

**Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física
Departamento de Física**

"PROBABILIDADES NEGATIVAS" E TOMOGRAFIA DE QUBITS

Alcenísio José de Jesus Silva

Orientador: Salomon S. Mizrahi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

São Carlos - SP

Março - 2007

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S586pn

Silva, Alcenísio José de Jesus.
"Probabilidades negativas" e tomografia de Qubits /
Alcenísio José de Jesus Silva. -- São Carlos : UFSCar,
2008.
98 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2007.

1. Probabilidade negativa. 2. Tomografia de Qubits. I.
Título.

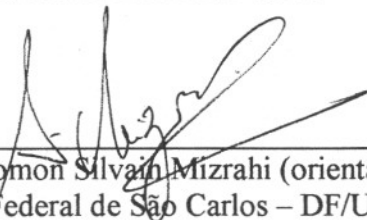
CDD: 530 (20^a)

ALCENÍSIO JOSÉ DE JESUS SILVA

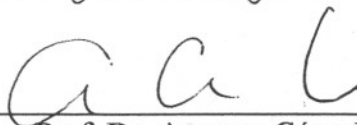
Dissertação de Mestrado submetida
à Coordenação do Programa de
Pós-Graduação em Física, da
Universidade Federal de São
Carlos, como requisito parcial para
a obtenção do título de Mestre em
Física

Aprovado em: 28/03/2007

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Salomon Silvan Mizrahi (orientador)
Universidade Federal de São Carlos – DF/UFSCar



Prof. Dr. Augusto César Lobo
Universidade Federal de Ouro Preto - ICEB/UFOP



Prof. Dr. Viktor Vasilevich Dodonov
Universidade de Brasília - IF/UnB

Agradecimentos

Os anos de 2005 e 2006 foram de muito aprendizado, foram dois anos muito produtivos. Além de muito conteúdo sobre Física, aprendi coisas que servirão para o resto de minha vida e da minha carreira. Meus professores foram, além dos professores de Física, os amigos que fiz e todas as pessoas com quem, de alguma forma, interagi. Então, gostaria de agradecer a todos que passaram o seu recado. Em particular, gostaria de agradecer a minha mãe e a meu pai, por tudo o que me proporcionaram ao longo da minha vida, até os dias de hoje. Agradeço, também, aos colegas de República em São Carlos, pelo companheirismo e amizade. Por fim, agradeço ao meu orientador, Salomon, e ao apoio CAPES.

Resumo

Nesta dissertação abordamos a tomografia de sistemas discretos, entendida como a representação e a reconstrução de estados. Para a tomografia utilizamos funções distribuição de pseudo-probabilidades simétricas. Os coeficientes dessa função distribuição de "probabilidades" são "probabilidades conjuntas", que eventualmente podem ser negativas, associadas a observáveis incompatíveis. As "probabilidades negativas" contém não só informação sobre as medições de contagens, mas também sobre o estado quântico dos sistemas. Apresentamos o argumento de Scully, Walther e Schleich que utiliza interferência na dupla-fenda para dar um significado às "probabilidades negativas" e propomos um exemplo alternativo utilizando divisores de feixe e um único fóton. Assim, além de definir funções de distribuição baseadas em eixos de quantização generalizados para direções quaisquer, apresentamos a interpretação física das "probabilidades negativas" decorrentes. Mostramos porque toda explicação que possa ser feita para justificar "probabilidade negativa" parece ser contraditória e não é convincente. É na interpretação das pseudo-probabilidades onde está o coração não só do presente trabalho, mas também, de toda a Mecânica Quântica, o seu único mistério, como diz Feynman.

Abstract

In this dissertation we approached the tomography of discrete systems, understood as the representation and the reconstruction of states. For the tomography we used distribution functions of symmetrical pseudo-probabilities. The coefficients of the distribution function of "probabilities" are "joint probabilities", that eventually can be negative, associated to incompatible observables. The "negative probabilities" contains not only information about the measurements of counts, but also on the quantum state of the systems. We present the argument of Scully, Walther and Schleich that uses double slit interference to give a meaning to the "negative probabilities" and we propose one alternative example using beam splitters and an single photon. Like this, moreover we define distribution functions based in generalized quantization axes for any directions, we present the physical interpretation of the resulting "negative probabilities". We showed the reason because all explanation usually done to justify "negative probabilities" seems to be contradictory and are not convincing. Is the interpretation of the "negative probabilities" that retain the heart, not only of the present work, but also, of the whole Quantum Mechanics, its only mystery, as Feynman says.

Sumário

Sumário	4
Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	8
1 Introdução	9
2 Função distribuição Simétrica	11
2.1 Ferramentas Algébricas e matrizes densidade	11
2.1.1 Bits quânticos e esfera de Bloch	12
2.1.2 Descrição de qubits pela matriz densidade	14
2.1.3 Eixos de quantização na esfera de Bloch	17
2.1.4 Eixos de quantização no espaço de fase de posição e momentum	21
2.1.5 Reconstrução de estados quânticos de N-qubits	22
2.2 Função distribuição Simétrica para 1-qubit e dois eixos de quantização	24
2.2.1 Relação entre as funções características simétrica e de Weyl	32
2.2.2 "Probabilidades negativas" e a relação de incerteza de Heisenberg	33
2.2.3 Relação com a função de Wigner de posição e momentum	34
2.3 Função distribuição Simétrica para 1-qubit e três eixos de quantização	36
2.4 Função distribuição simétrica para 2-qubit	38
3 Realização física de "probabilidades negativas" I	41
3.1 "Probabilidades negativas" e desigualdades de Bell	41
3.1.1 O "paradoxo" EPR	41
3.1.2 Correlações em duas partículas e correlações em uma única partícula	44
3.1.3 Desigualdade de Bell para duas partículas	45
3.1.4 Desigualdades para uma única partícula	46
3.2 A teoria da informação de Jaynes	47
3.2.1 Inferência em 1-qubit	50

3.2.2	Inferência em 2-qubit	52
3.3	Sistema para interferência de um único átomo	56
3.3.1	Descrição do <i>gedankenexperiment</i> da dupla-fenda	56
3.3.2	Incerteza quântica e interferência de um único átomo	65
3.3.3	Conclusões sobre o <i>gedankenexperiment</i> da dupla-fenda	68
4	Realização física de "probabilidades negativas" II	70
4.1	Descrição do <i>gedankenexperiment</i> de Mach-Zehnder	70
4.1.1	Conclusões sobre o <i>gedankenexperiment</i> de Mach-Zehnder	80
5	Conclusões e perspectivas futuras	85
	Apêndice 1: Quantização do campo eletromagnético	87
	Referências Bibliográficas	96

Lista de Figuras

2-1	Representação de 1-qubit na esfera de Bloch ¹⁴	14
2-2	Direções de projeção em 1-qubit	17
2-3	Probabilidades das contagens P_{\pm} em função de θ , o ângulo que caracteriza o estado.	28
2-4	Pseudoprobabilidade P_{++} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$	29
2-5	Pseudoprobabilidade P_{+-} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$	30
2-6	Pseudoprobabilidade P_{-+} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$	30
2-7	Pseudoprobabilidade P_{--} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$	31
2-8	Realizamos medições conjuntas (simultâneas) nas duas partículas. Interessa que elas estejam causalmente desconectadas e que se movam para os detectores, não necessariamente em direções opostas como mostra esta figura.	39
3-1	Alice e Beto compartilham um par de partículas cujo estado é correlacionado. O desenho situa-se no plano xz porque escolhemos $\phi = 0$	42
3-2	Um feixe atômico passando por uma dupla fenda tem seu padrão de interferência destruído ao detectarmos por qual fenda cada átomo passa ⁶	57
3-3	As funções $\psi_1(\vec{r}_1)$ e $\psi_2(\vec{r}_2)$ correspondem às funções associadas a cada fenda. A origem do sistema de coordenadas está no ponto O , assim $\vec{r}_1 = \vec{z} + (\vec{\xi} - \vec{d})$ e $\vec{r}_2 = \vec{z} + (\vec{\xi} + \vec{d})$	58
3-4	Pseudo-probabilidades apresentando negatividade ⁶	62
3-5	Pseudo-probabilidades apresentando negatividade ⁶	63

3-6	Funções densidade de probabilidades marginais. São densidades de probabilidade porque advém de uma função gaussiana.	64
3-7	Funções densidade de probabilidades marginais. São densidades de probabilidade porque advém de uma função gaussiana.	65
3-8	Dependência da pseudo-probabilidade P_{++} com o parâmetro θ que especifica o estado da cavidade. Na figura (a) $\theta = \pi/3$, na figura (b) $\theta = \pi/4$, na figura (c) $\theta = \pi/7$ e na figura (d) $\theta = \pi/50$	67
4-1	Interferência com um único fóton. Determinados eventos neste sistema podem ter probabilidades negativas.	71
4-2	Pseudo-probabilidades para um único fóton.	77
4-3	Pseudo-probabilidades para um único fóton.	78
4-4	Probabilidades marginais para um único fóton.	79
4-5	Probabilidades marginais para um único fóton.	80
4-6	Pseudo-probabilidades mostrando as regiões proibidas classicamente (regiões preenchidas com cor cinza).	84
5-1	Transversalidade do campo eletromagnético.	88

Lista de Tabelas

2.1	Os projetores têm propriedades bem diferentes mas, análogas, para uma partícula e duas partículas.	20
3.1	Detector "qual caminho" e a notação de spin-1/2.	59
4.1	Um fóton e spin-1/2	74

Capítulo 1

Introdução

No começo do século 20 os físicos espantaram-se com uma crescente aparição de fenômenos estranhos¹, os quais demonstraram a inadequação da física clássica para descrevê-los. Notou-se que a luz e os elétrons, por exemplo, comportavam-se como ondas e algumas vezes como partículas. Esta ambigüidade aparente foi completamente descrita de 1925 a 1927, com a formulação da teoria chamada *Mecânica Quântica*. A nova teoria afirma que há experimentos para os quais um resultado exato é fundamentalmente imprevisível e que, nestes casos, temos que nos satisfazer em calcular probabilidades.

Um dos problemas mais básicos da Mecânica Quântica está na caracterização dos estados quânticos (sua representação tomográfica) e sua reconstrução a partir de dados medidos. A reconstrução de um estado quântico requer medição de um conjunto completo de observáveis em um *ensemble* de cópias identicamente preparadas do sistema^{2,3}. Então, a tomografia pode ser definida como a reconstrução das representações dos estados, como por exemplo, a reconstrução das funções distribuição de pseudo-probabilidades⁴⁻⁷. Mas, como deve ser esperado de um trabalho teórico sobre tomografia de estados quânticos, estaremos muito mais interessados nas representações, ou seja, nas funções distribuição de pseudo-probabilidades do que na sua reconstrução em termos de dados medidos, embora mostraremos como isso pode ser feito no caso de medições projetivas, mas sem nos preocuparmos com detalhes experimentais.

Scully e Cohen ao desenvolverem a função distribuição simétrica^{5,6,8} acabaram derivando as chamadas "probabilidades negativas", que haviam sido sugeridas por Feynman^{9,10}, mas não calculadas por ele. Mostraremos que estas "probabilidades" correspondem ao análogo discreto das funções de Wigner de posição e momento.

As "probabilidades negativas" para sistemas de qubits são particularmente interessantes, pois leva a concepções que contrastam com o senso comum de maneira mais imediata que a função de Wigner de variáveis contínuas. Então, da mesma forma que parece absurdo uma partícula passar através de duas fendas ao mesmo tempo, parece absurdo falar em "probabilidades negativas".

Assim, além de repetir o cálculo e motivação das funções de distribuição de pseudo-probabilidades, estudaremos o conceito de "probabilidade negativa". Mostraremos porque toda explicação que possa ser feita para justificar o conceito de "probabilidade negativa" parece contraditória e não é convincente. Não simplesmente repetimos as distribuições existentes. Em nossa formulação, introduzimos eixos de quantização no espaço de Bloch dos sistemas discretos, generalizando as distribuições para o conceito de distribuição de pseudo-probabilidades associadas a observáveis incompatíveis.

Estamos sempre pensando em probabilidade como nossa única fonte de informação sobre os sistemas, no sentido de que qualquer coisa que se saiba sobre o sistema, ou pode ser reduzida a probabilidades ou foram obtidas a partir de probabilidades. Assim, estudamos a teoria de informação de Jaynes^{11,12}, que permite inferir dados desconhecidos a partir de informação parcial, visando explorar mais amplamente o conceito de informação contida em probabilidades.

Propomos um *gedankenexperiment*, envolvendo um único fóton e divisores de feixe, para calcular "probabilidades negativas", dando uma interpretação alternativa à interpretação via duas fendas com detectores "qual caminho"⁶. E, por fim, explicamos fisicamente o conceito de "probabilidade negativa" através da introdução de limites clássicos esperados para as probabilidades conjuntas.

Capítulo 2

Função distribuição Simétrica

2.1 Ferramentas Algébricas e matrizes densidade

Os operadores da álgebra $su(2)$ juntamente com a matriz identidade, expressos de forma hermitiana, formam um conjunto completa para expressar qualquer operador hermitiano de dimensão dois (inclusive operadores densidade ou, também chamados, estatísticos). A sua importância foi primeiramente considerada por Feynman⁹ no contexto da definição de um simulador quântico universal.

Feynman⁹ aborda a questão da simulação em física, colocando o problema do que seria um simulador universal. Simular não significa fazer exatamente o que um sistema físico faz, mas fazer uma bijeção do sistema físico em um outro (o computador) e executar neste operações com as mesmas probabilidades daquelas executadas no sistema original.

O conceito de simulação para Feynman é diferente do conceito usual. Da forma como ele define simulação, ele considera que o computador que simula é, na verdade, uma "cópia" do sistema simulado. Dessa forma, um computador clássico não seria capaz de simular um sistema quântico, pois neste poderiam ocorrer eventos com probabilidades negativas. Um tal simulador universal seria o computador quântico.

Um computador quântico, imaginado de uma maneira simplificada, seria um sistema quântico onde cada ponto do espaço-tempo teria apenas dois estados possíveis de base: ou o ponto está ocupado ou esta desocupado. Os operadores associados com um dado ponto são:

$$\hat{a} = \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y), \quad (2.1)$$

$$\hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y), \quad (2.2)$$

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_z), \quad (2.3)$$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

A propósito, no lado direito aparecem as matrizes de Pauli que são escritas a seguir:

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Algumas de suas propriedades são¹³:

1. $\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}\hat{I}$;
2. $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$;
3. $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = \delta_{ij}\hat{I} + i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$;
4. $tr\hat{\sigma}_i = 0$;
5. $tr(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j) = 2\delta_{ij}$;
6. $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_m = \delta_{ij}\hat{\sigma}_m + i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_m$;
7. $tr(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_m) = 2i\epsilon_{ijk}\delta_{km} = 2i\epsilon_{ijm}$;

Utilizamos $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ e $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

2.1.1 Bits quânticos e esfera de Bloch

O bit é a unidade fundamental de informação e computação clássicas. Na computação e informação quânticas, temos o conceito análogo, o bit quântico ou qubit¹⁴. Descrevemos os qubits como objetos matemáticos abstratos independentes de qualquer sistema físico particular, mas que podem ser realizados em sistemas físicos. A vantagem de descrever qubits como objetos matemáticos abstratos é que podemos construir uma teoria geral da computação quântica e informação quântica sem nos preocupar com um sistema específico para a sua realização.

Analogamente ao bit clássico, que pode estar em dois estados (0 ou 1), o qubit pode estar em dois estados também, $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. A notação " $|\rangle$ " é a chamada *notação de Dirac* e é a notação padrão da Mecânica Quântica. Os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são vetores e formam uma base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,

chamada *base computacional* do espaço de 1-qubit, com

$$\hat{\sigma}_3|0\rangle = -|0\rangle, \quad (2.6)$$

$$\hat{\sigma}_3|1\rangle = +|1\rangle, \quad (2.7)$$

ou seja, $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são auto-estados de $\hat{\sigma}_3$ com autovalores -1 e 1 , respectivamente.

Então, a diferença entre bits e qubits é que os qubits podem estar em outros estados, além de $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. É possível formar combinações lineares destes estados, chamadas *superposições*:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (2.8)$$

Os números a e b são chamados *amplitudes de probabilidade*; a probabilidade para medir $|0\rangle$ é $|a|^2$ e a probabilidade para medir $|1\rangle$ é $|b|^2$. A condição de que as probabilidades se somam resultando 1 é, desta forma, expressa pela condição de normalização do vetor de estado

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2.9)$$

Assim, o estado de 1-qubit é um vetor unitário no espaço vetorial complexo bidimensional.

Pode-se parametrizar o qubit em termos de coordenadas esféricas θ e ϕ

$$|\hat{r}(\theta, \phi)\rangle = \cos(\theta/2)|1\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|0\rangle; \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (2.10)$$

e definir o *vetor polarização* ou *vetor de Bloch* pelas suas componentes

$$P_i = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^3 (P_k)^2 = P^2, \quad (2.12)$$

ou seja,

$$P_1 = P \sin \theta \cos \phi, \quad P_2 = P \sin \theta \sin \phi, \quad P_3 = P \cos \theta, \quad (2.13)$$

e $\hat{\rho}$ é a matriz densidade, a ser definida na seção seguinte.

Os números θ e ϕ definem um ponto na esfera tridimensional unitária, como mostrado na figura 2-1. Esta esfera é chamada *esfera de Bloch*; ela fornece um meio de visualizar um único qubit. De qualquer forma, esta representação gráfica é limitada porque não é possível fazê-la para múltiplos qubits.

Para entender como múltiplos qubits são descritos matematicamente vamos analisar o caso de 2-qubits. Se fossem dois bits clássicos haveriam quatro estados possíveis, 00, 01, 10 e

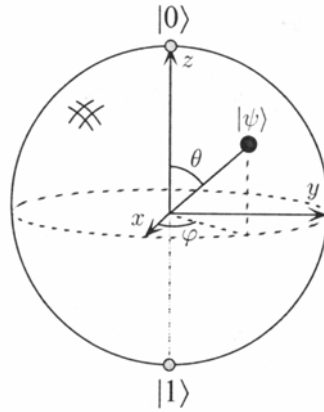


Figura 2-1: Representação de 1-qubit na esfera de Bloch¹⁴.

11. Corresponentemente, um sistema de 2-qubits tem quatro estados da *base computacional* $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Um par de qubits pode existir como uma superposição desses quatro estados, tal que o estado do par de qubits envolve *amplitudes de probabilidade* complexas (coeficientes da combinação linear)

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle. \quad (2.14)$$

Similarmente ao caso de 1-qubit, a probabilidade para obter o estado $|00\rangle$ é $|\alpha_{00}|^2$, e, semelhantemente, para os demais estados da base. A condição de que as probabilidades se somam resultando 1 é, desta forma, expressa pela condição de normalização do vetor de estado

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1. \quad (2.15)$$

De forma análoga ao caso de 2-qubit descremos um número qualquer de qubits em termos de vetores de estados.

2.1.2 Descrição de qubits pela matriz densidade

A descrição em termos de vetores de estado pode ser aplicada apenas para estados puros. Então, define-se o operador densidade (também chamado operador estatístico ou matriz densidade) que contém o máximo de informação possível de ser obtida sobre um dado sistema. Podemos, desta maneira, descrever tanto sistemas puros, quanto sistemas mistos.

Matriz densidade de 1-qubit

O operador densidade para 1-qubit pode ser escrito como

$$\hat{\rho} = a\hat{I} + \sum_i b_i \hat{\sigma}_i \quad (2.16)$$

com $a = 1/2$ (pois $\text{tr}\hat{\sigma}_i = 0$ e $\text{tr}\hat{\rho} = 1$) e $\text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_j) = 2b_j\delta_{ij} = 2b_j = \langle \hat{\sigma}_j \rangle \Rightarrow b_j = (1/2) \langle \hat{\sigma}_j \rangle = (1/2) P_j$, assim pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= (1/2) \left(\hat{I} + \sum_{i=1}^3 P_i \hat{\sigma}_i \right) \\ &= (1/2) \left(\hat{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$\vec{P} = P_1 \hat{i} + P_2 \hat{j} + P_3 \hat{k} \quad (2.18)$$

é o vetor polarização ou vetor de Bloch, e como

$$\text{tr}\hat{\rho}^2 \leq 1 \quad (2.19)$$

temos

$$|\vec{P}| \leq 1, \quad (2.20)$$

onde a igualdade é válida apenas para estados puros.

Matriz densidade de N-qubits

No caso geral de um sistema de N -qubits utilizamos os operadores da álgebra $su(2^N)$ para representar os observáveis. Tais operadores constituem um conjunto de $2^N - 1$ operadores linearmente independentes dados pela diferença de dois conjuntos

$$\left\{ \hat{\lambda}_{k=(i_1, i_2, \dots, i_N)} = \bigotimes_{j=1}^N \hat{\sigma}_{i_j}(j); i_j = 0, 1, 2, 3; k = 0, \dots, 2^{2N} - 1 \right\} - \left\{ \hat{\lambda}_{0,0,\dots,0} = \bigotimes_{j=1}^N \hat{\sigma}_0(j) \right\}. \quad (2.21)$$

Cada índice k é especificado por uma seqüência (i_1, i_2, \dots, i_N) . Cada índice i_j pode assumir quatro valores possíveis e há um total de $4^N = 2^{2N}$ possibilidades para o índice k . Numeramos essas possibilidades de 0 a $2^{2N} - 1$. Denominamos a N -upla de zeros por $k = 0$, as demais combinações são numeradas sem um ordenamento específico, ou seja, para cada combinação $(i_1, i_2, \dots, i_N) \neq (0, 0, \dots, 0)$ adotamos um número de 1 a $2^{2N} - 1$, mas escolhido de maneira aleatória. Não é um número específico para uma determinada combinação. Qualquer numeração

que se adotar está correta, pois interessa apenas o conjunto de operadores que se pode montar com esse procedimento. Também deve ser lembrado que $\hat{\sigma}_0 = \hat{I}$, $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_z$ e que cada índice* j indica a um determinado qubit j .

Das propriedades dos operadores de Pauli vemos imediatamente que

$$(i) \hat{\lambda}_k^\dagger = \hat{\lambda}_k, \quad (ii) \text{tr}_k \hat{\lambda}_k = 0. \quad (2.22)$$

Fisicamente a condição (i) implica que se tratam de observáveis, ou seja, operadores hermitianos. Por outro lado, é bem estabelecido^{15,16} que o conjunto (que inclui a identidade)

$$\left\{ \hat{\lambda}_k, k = 0, \dots, 2^{2N} - 1 \right\}, \quad (2.23)$$

forma uma base completa para o conjunto de todos os operadores lineares no espaço de Hilbert de dimensão 2^N . Daí qualquer operador hermitiano, incluindo operadores densidade, podem ser expandidos por eles, permitindo descrever sistemas de N -qubits^{15,16}

$$\hat{U} = \sum_{k=0}^{2^N-1} \alpha_k \hat{\lambda}_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

A matriz densidade mais geral possível para 2-qubits pode, então, ser escrita como

$$\hat{\rho}(1, 2) = \frac{1}{4} \left[\hat{I}(1) \otimes \hat{I}(2) + \hat{I}(1) \otimes \vec{P}(2) \cdot \vec{\sigma}(2) + \vec{P}(1) \cdot \vec{\sigma}(1) \otimes \hat{I}(2) + \sum_{ij} C_{ij}(1, 2) \hat{\sigma}_i(1) \otimes \hat{\sigma}_j(2) \right]. \quad (2.25)$$

onde

$$C_{ij} = \langle \hat{\sigma}_i(1) \otimes \hat{\sigma}_j(2) \rangle. \quad (2.26)$$

Para sistemas descorrelacionados (separáveis), a matriz densidade pode ser escrita como um produto das matrizes de cada sistema

$$\begin{aligned} \rho_{desc}(1, 2) &= \rho(1) \otimes \rho(2) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(1) + \vec{P}(1) \cdot \vec{\sigma}(1) \right) \otimes \frac{1}{2} \left(\hat{I}(2) + \vec{P}(2) \cdot \vec{\sigma}(2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{I}(1) \otimes \hat{I}(1) + \hat{I}(1) \otimes \vec{P}(2) \cdot \vec{\sigma}(2) + \vec{P}(1) \cdot \vec{\sigma}(1) \otimes \hat{I}(2) \right. \\ &\quad \left. + \vec{P}(1) \cdot \vec{\sigma}(1) \otimes \vec{P}(2) \cdot \vec{\sigma}(2) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

e

$$C_{ij}(1, 2) = P_i(1) P_j(2). \quad (2.28)$$

*Quando não apresentarmos o índice que rotula os qubits é porque há apenas um único qubit.

E observa-se que

$$\hat{\rho}(1) = \text{tr}_2 \hat{\rho}(1, 2) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(1) + \vec{P}(1) \cdot \vec{\sigma}(1) \right), \quad (2.29)$$

$$\hat{\rho}(2) = \text{tr}_1 \hat{\rho}(1, 2) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(2) + \vec{P}(2) \cdot \vec{\sigma}(2) \right) \quad (2.30)$$

onde os vetores $\vec{P}(1)$ e $\vec{P}(2)$ não são necessariamente iguais. A partir da expressão (2.25), calcula-se

$$\text{tr}(\rho^2(1, 2)) = \frac{1}{4} \left(1 + |\vec{P}(1)|^2 + |\vec{P}(2)|^2 + \sum_{ij=1}^3 C_{ij}^2(1, 2) \right), \quad (2.31)$$

devendo ser satisfeita a desigualdade

$$|\vec{P}(1)|^2 + |\vec{P}(2)|^2 + \sum_{ij=1}^3 C_{ij}^2(1, 2) \leq 3, \quad (2.32)$$

onde a igualdade vale somente para estados puros.

2.1.3 Eixos de quantização na esfera de Bloch

Para tornar mais geral a descrição dos spins, definimos novos operadores $\hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}$ de spin associados com eixos de quantização especificados por orientações espaciais \hat{r}_i (Veja Figura 2-2):

$$\{\hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.33)$$

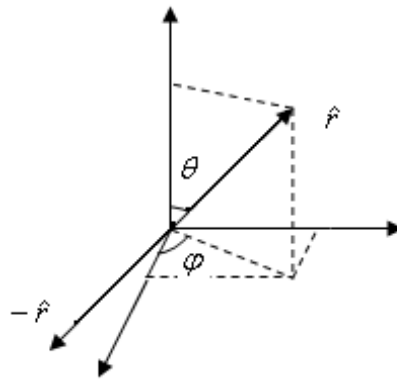


Figura 2-2: Direções de projeção em 1-qubit .

E verifica-se que

$$\hat{r}_i \cdot \vec{\sigma} |\hat{r}_i(\theta_i, \phi_i)\rangle = |\hat{r}_i(\theta_i, \phi_i)\rangle \quad (2.34)$$

e

$$\hat{r}_i \cdot \vec{\sigma} |-\hat{r}_i(\theta_i, \phi_i)\rangle = -|-\hat{r}_i(\theta_i, \phi_i)\rangle. \quad (2.35)$$

Além disso, os operadores (2.33) satisfazem a seguinte regra de comutação

$$[\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}] = [x_i^{(1)} \hat{\sigma}_i, x_j^{(2)} \hat{\sigma}_j] = 2ix_i^{(1)} x_j^{(2)} \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k = 2i (\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2) \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.36)$$

com

$$\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3), \quad (2.37)$$

$$\hat{r}_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}), \quad (2.38)$$

$$x_1^{(i)} = \sin \theta_i \cos \phi_i, \quad x_2^{(i)} = \sin \theta_i \sin \phi_i, \quad x_3^{(i)} = \cos \theta_i, \quad (2.39)$$

ou seja, \hat{r}_i é um versor escrito em coordenadas esféricas.

Além disso, o anticomutador está ligado ao produto escalar entre versores

$$\{\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}\} = \{x_i^{(1)} \hat{\sigma}_i, x_j^{(2)} \hat{\sigma}_j\} = x_i^{(1)} x_j^{(2)} \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{I} \quad (2.40)$$

e

$$(\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma})(\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} [\{\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}\} + [\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}]] = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{I} + i\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}. \quad (2.41)$$

Verifica-se que $(\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma})(\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) = [(\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})(\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma})]^\dagger$.

Definimos o projetor associado a um eixo de quantização \hat{r}_i de 1-qubit

$$\hat{\Pi}_\pm^{(i)} = \frac{1}{2} (\hat{I} \pm \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}) = |\pm \hat{r}(\theta_i, \phi_i)\rangle \langle \pm \hat{r}(\theta_i, \phi_i)| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \pm \cos \theta_i & e^{-i\phi_i} \sin \theta_i \\ e^{i\phi_i} \sin \theta_i & 1 \mp \cos \theta_i \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Podemos escrever $\hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}$ como a diferença entre dois projetores

$$\hat{r}_i \cdot \vec{\sigma} = |\hat{r}(\theta_i, \phi_i)\rangle \langle \hat{r}(\theta_i, \phi_i)| - |-\hat{r}(\theta_i, \phi_i)\rangle \langle -\hat{r}(\theta_i, \phi_i)| = \hat{\Pi}_+^{(i)} - \hat{\Pi}_-^{(i)}, \quad (2.43)$$

onde $|-\hat{r}(\theta_i, \phi_i)\rangle = |\hat{r}(\pi - \theta_i, \phi_i + \pi)\rangle$ e os projetores são complementares:

$$\hat{I} = |\hat{r}(\theta_i, \phi_i)\rangle \langle \hat{r}(\theta_i, \phi_i)| + |-\hat{r}(\theta_i, \phi_i)\rangle \langle -\hat{r}(\theta_i, \phi_i)| = \hat{\Pi}_+^{(i)} + \hat{\Pi}_-^{(i)}. \quad (2.44)$$

Além disso, os projetores para um mesmo versor \hat{r}_i são exclusivos

$$\hat{\Pi}_+^{(i)} \hat{\Pi}_-^{(i)} = \hat{\Pi}_-^{(i)} \hat{\Pi}_+^{(i)} = 0 \quad (2.45)$$

e, em geral, para versores diferentes \hat{r}_i e \hat{r}_j , temos

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_+^{(i)}\hat{\Pi}_+^{(j)} &= \frac{1}{4} \left(\hat{I} + \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma} + \hat{r}_j \cdot \vec{\sigma} + \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma} \hat{r}_j \cdot \vec{\sigma} \right) \\ &\neq 0,\end{aligned}\tag{2.46}$$

ou seja, o produto de dois projetores não é, necessariamente, um projetor em um espaço vetorial real. O produto normalizado

$$\frac{\hat{\Pi}_+^{(i)}\hat{\Pi}_+^{(j)}}{\text{tr} \left(\hat{\Pi}_+^{(i)}\hat{\Pi}_+^{(j)} \right)} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \frac{(\hat{r}_i + \hat{r}_j + i\hat{r}_i \wedge \hat{r}_j) \cdot \vec{\sigma}}{(1 + \hat{r}_i \cdot \hat{r}_j)} \right)\tag{2.47}$$

é um projetor em um espaço vetorial complexo.

Também, temos que

$$\left(\hat{\Pi}_+^{(i)} \right)^2 = \hat{\Pi}_+^{(i)}.\tag{2.48}$$

E um projetor não é inversível, pois

$$\det \hat{\Pi}_+^{(i)} = 0,\tag{2.49}$$

para qualquer direção \hat{r}_i . Além disso, os projetores para um mesmo qubit, para versores diferentes \hat{r}_i e \hat{r}_j , não comutam entre si:

$$\left[\hat{\Pi}_+^{(i)}, \hat{\Pi}_+^{(j)} \right] = \frac{1}{2} i \hat{r}_i \wedge \hat{r}_j \cdot \vec{\sigma}.\tag{2.50}$$

O anticomutador é dado por

$$\left\{ \hat{\Pi}_+^{(i)}, \hat{\Pi}_+^{(j)} \right\} = \hat{\Pi}_+^{(i)} + \hat{\Pi}_+^{(j)} + \frac{1}{2} (\hat{r}_i \cdot \hat{r}_j - 1) \hat{I}.\tag{2.51}$$

A probabilidade de projeção em uma direção especificada por \hat{r}_i na esfera de Bloch de 1-qubit (ou a probabilidade de uma partícula de spin-1/2 passar por um filtro de Stern-Gerlach na direção \hat{r}_i) é definida como

$$P_+^{(i)} = \text{tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_+^{(i)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \hat{r}_i \cdot \vec{P} \right).\tag{2.52}$$

Para dois qubits, a probabilidade conjunta do primeiro qubit se projetar em \hat{r}_i e o segundo qubit se projetar em \hat{r}_j , é definida como

$$P(+_i; +_j) = \text{tr}_{1,2} \left(\hat{\rho} (1, 2) \hat{\Pi}_+^{(i)} (1) \hat{\Pi}_+^{(j)} (2) \right),\tag{2.53}$$

onde $\hat{\rho} (1, 2)$ é o estado do par de qubits, e

$$\left[\hat{\Pi}_+^{(i)} (1), \hat{\Pi}_+^{(j)} (2) \right] = 0.\tag{2.54}$$

1 qubit	2 qubits (1, 2)
$\hat{\Pi}_+^{(i)}$ projektor associado à direção \hat{r}_i	$\hat{\Pi}_+^{(i)}(1) \hat{\Pi}_+^{(j)}(2)$ projeção conjunta na direção especificada por \hat{r}_i no qubit 1 e na direção especificada por \hat{r}_j no qubit 2
$P_+^{(i)} = \text{tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_+^{(i)} \right)$ $= \left\ \hat{\Pi}_+^{(i)} \psi\rangle \right\ ^2$ probabilidade de projeção do qubit na direção \hat{r}_i	$P_+^{(i)}(1) = \text{tr}_{1,2} \left(\hat{\rho}(1,2) \hat{\Pi}_+^{(i)}(1) \right)$ $= \left\ \hat{\Pi}_+^{(i)}(1) \psi_{1,2}\rangle \right\ ^2$ probabilidade de projeção na direção especificada por \hat{r}_i no qubit 1
$\hat{\Pi}_+^{(i)} \hat{\Pi}_+^{(j)} \neq \hat{\Pi}_+^{(j)} \hat{\Pi}_+^{(i)}$ não comutatividade	$\hat{\Pi}_+^{(i)}(1) \hat{\Pi}_+^{(j)}(2) = \hat{\Pi}_+^{(j)}(1) \hat{\Pi}_+^{(i)}(2)$ comutatividade
$P_{\pm\pm}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \text{tr} \hat{\rho} \left\{ \hat{\Pi}_\pm^{(i)}, \hat{\Pi}_\pm^{(j)} \right\}$ "probabilidade" de "projeção" conjunta nas direções $\pm \hat{r}_i$ e $\pm \hat{r}_j$ em um mesmo qubit	$P(\pm i; \pm j) = \text{tr}_{12} \left[\hat{\rho}(1,2) \hat{\Pi}_\pm^{(i)}(1) \hat{\Pi}_\pm^{(j)}(2) \right]$ probabilidade de projeção conjunta na direção especificada por $\pm \hat{r}_i$ no qubit 1 e na direção especificada por $\pm \hat{r}_j$ no qubit 2
$\left\ \hat{\Pi}_+^{(i)} \hat{\Pi}_+^{(j)} \psi\rangle \right\ ^2 \left(\neq P_{++}^{(i,j)} \right)$ em projeções sequenciais	$\left\ \hat{\Pi}_+^{(i)}(1) \hat{\Pi}_+^{(j)}(2) \psi_{1,2}\rangle \right\ ^2 = P(+i; +j)$ não há diferença em fazer projeções conjuntas ou sequenciais, pois os projetores comutam entre si
$C_{ij} = \left\langle \psi \left \left(\hat{\Pi}_+^{(i)} - \hat{\Pi}_-^{(i)} \right) \right. \right.$ $\left. \times \left(\hat{\Pi}_+^{(j)} - \hat{\Pi}_-^{(j)} \right) \right \psi \rangle$ $= P_{++}^{(i,j)} + P_{--}^{(i,j)} - P_{+-}^{(i,j)} - P_{-+}^{(i,j)}$ correlação entre as projeções nas direções \hat{r}_i e \hat{r}_j	$C_{ij}(1,2) = \text{tr}_{12} \left[\hat{\rho}(1,2) \left(\hat{\Pi}_+^{(i)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(i)}(1) \right) \right.$ $\left. \otimes \left(\hat{\Pi}_+^{(j)}(2) - \hat{\Pi}_-^{(j)}(2) \right) \right]$ $= P(+i; +j) + P(-i; -j)$ $- P(+i; -j) - P(-i; +j)$ correlação entre as projeções nas direções \hat{r}_i no qubit 1 e \hat{r}_j no qubit 2

Tabela 2.1: Os projetores têm propriedades bem diferentes mas, análogas, para uma partícula e duas partículas.

Na tabela 2.1 comparamos algumas propriedades dos projetores para uma partícula com as propriedades dos projetores para duas partículas.

Efeito de um projetor sobre o operador densidade de 1-qubit

Um projetor, atuando sobre o operador (2.17), deve funcionar como um "filtro", cujo efeito é dado por

$$\hat{\Pi}_+ \hat{\rho} \hat{\Pi}_+ = \hat{\rho}', \quad (2.55)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}' &= \frac{1}{8} \left(\hat{I} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma} \right) \left(\hat{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right) \left(\hat{I} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \hat{r} \cdot \vec{P} \right) \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \hat{r} \cdot \vec{P} \right) \hat{\Pi}_+ = \wp_+^{(i)} \hat{\Pi}_+.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Podemos pensar no exemplo de um feixe de partículas de spin-1/2 que incide sobre um filtro de Stern-Gerlach orientado na direção \hat{r} . A intensidade do feixe de saída é regulada pelo fator

$$\wp_+^{(i)} = \frac{1}{2} \left(1 + \hat{r} \cdot \vec{P} \right). \tag{2.57}$$

Notamos que

$$\text{tr} (\hat{\rho}')^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r} \cdot \vec{P} \right)^2 \leq 1, \tag{2.58}$$

assim, a intensidade do feixe se conservará, após emergir do "filtro", apenas se \hat{r} for paralelo a \vec{P} . E se $\vec{P} = -\hat{r}$, então

$$\hat{\Pi}_+ \hat{\rho} \hat{\Pi}_+ = 0, \tag{2.59}$$

Pelas equações (2.56) e (2.58) vemos que o feixe de saída do "filtro" de Stern-Gerlach fica polarizado na direção da orientação do campo magnético, mas a expressão $\hat{\rho}'$ não está normalizada, pois esperávamos que o feixe de saída fosse puro, ou seja, que $\text{tr} (\hat{\rho}')^2 = 1$. A normalização é, então, feita como

$$\frac{\hat{\Pi}_+ \hat{\rho} \hat{\Pi}_+}{\text{tr} (\hat{\rho} \hat{\Pi}_+)} = \hat{\Pi}_+, \tag{2.60}$$

expressão válida apenas quando $\hat{r} \cdot \vec{P} \neq -1$. Mas notemos que, com a normalização, perde-se a informação sobre a intensidade do feixe de saída.

2.1.4 Eixos de quantização no espaço de fase de posição e momentum

Estudamos variáveis generalizadas associadas a eixos de quantização no espaço de Bloch de 1-qubit. Da mesma forma, no espaço de fase de posição e momentum linear, a partir de um par de variáveis (\hat{p}, \hat{q}) satisfazendo a regra de comutação

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \tag{2.61}$$

podemos definir novas variáveis associadas a eixos de quantização \hat{r} e \hat{r}'

$$\hat{r} \cdot \vec{X} = e^{\frac{i}{2}(q^2+p^2)\theta} \hat{q} e^{-\frac{i}{2}(q^2+p^2)\theta} = \hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta \quad (2.62)$$

e

$$\hat{r}' \cdot \vec{X} = e^{\frac{i}{2}(q^2+p^2)\theta} \hat{p} e^{-\frac{i}{2}(q^2+p^2)\theta} = -\hat{q} \sin \theta + \hat{p} \cos \theta \quad (2.63)$$

correspondendo a uma rotação de um ângulo θ no espaço de fase. Os versores no espaço de fase, \hat{r} e \hat{r}' , se escrevem como

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (2.64)$$

e

$$\hat{r}' = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \hat{i} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \hat{j} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \quad (2.65)$$

e são as direções correspondentes ao final das rotações, com

$$\hat{r} \cdot \hat{r}' = 0. \quad (2.66)$$

A variável $\vec{X} = \hat{q}\hat{i} + \hat{p}\hat{j}$ é um vetor no espaço de fase.

Para duas direções distintas as relações, de comutação são dadas por

$$\left[\hat{r}_1 \cdot \vec{X}, \hat{r}_2 \cdot \vec{X} \right] = i\hbar \hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2 \cdot \hat{k} \quad (2.67)$$

$$= i\hbar \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (2.68)$$

Assim, em princípio, poderíamos proceder de maneira análoga ao que foi feito para spin-1/2 e definir projetores associados a direções \hat{r} no espaço de fase. Porém não faremos isso, pois o motivo que o fizemos para o sistema de spin-1/2 foi porque a sua função de Wigner, a ser desenvolvida, assim o exige. Porém a função de Wigner de posição e momentum linear, na forma como tradicionalmente aparece na literatura, está relacionada apenas com o produto dos projetores $|q\rangle\langle q|$ e $|p\rangle\langle p|$, conforme demonstraremos na seção 2.2.

2.1.5 Reconstrução de estados quânticos de N-qubits

Podemos reconstruir tanto o operador densidade, quanto as funções distribuição a serem definidas a seguir. Isto é, sempre se consegue expressar as correlações em termos de medições de contagens experimentais. Isto ocorre porque os operadores são associados aos eixos de quantiza-

ção, em termos de projetores. Por exemplo, da equação (2.43), temos

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_y(1)\hat{\sigma}_y(2) &= \hat{j} \cdot \vec{\sigma}(1)\hat{j} \cdot \vec{\sigma}(1) = \left(\hat{\Pi}_+^{(y)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(y)}(1)\right) \left(\hat{\Pi}_+^{(y)}(2) - \hat{\Pi}_-^{(y)}(2)\right) \\ &= \hat{\Pi}_+^{(y)}(1)\hat{\Pi}_+^{(y)}(2) - \hat{\Pi}_+^{(y)}(1)\hat{\Pi}_-^{(y)}(2) - \hat{\Pi}_-^{(y)}(1)\hat{\Pi}_+^{(y)}(2) + \hat{\Pi}_-^{(y)}(1)\hat{\Pi}_-^{(y)}(2).\end{aligned}\quad (2.69)$$

De forma alternativa, para expressar os operadores de Pauli em termos de direções quaisquer, considera-se o projetor associado a uma direção i na partícula j , que é escrito como

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_+^{(i)}(j) &= \frac{1}{2} \left(\hat{I}_j(j) + \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{I}_j(j) + x_1^{(i)} \hat{\sigma}_x(j) + x_2^{(i)} \hat{\sigma}_y(j) + x_3^{(i)} \hat{\sigma}_z(j) \right)\end{aligned}\quad (2.70)$$

e utilizando-se três direções, é possível expressar as três matrizes de Pauli em termos de projetores e, conseqüentemente, pode-se expressar os valores médios das matrizes de Pauli em termos de medições de contagens:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_+^{(1)}(j) \\ \hat{\Pi}_+^{(2)}(j) \\ \hat{\Pi}_+^{(3)}(j) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{I}_j(j) \\ \hat{I}_j(j) \\ \hat{I}_j(j) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x(j) \\ \hat{\sigma}_y(j) \\ \hat{\sigma}_z(j) \end{pmatrix}\quad (2.71)$$

ou

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x(j) \\ \hat{\sigma}_y(j) \\ \hat{\sigma}_z(j) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{x_1^{(1)}x_2^{(2)}x_3^{(3)} - x_1^{(1)}x_3^{(2)}x_2^{(3)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)}x_3^{(3)} + x_2^{(1)}x_3^{(2)}x_1^{(3)} + x_3^{(1)}x_1^{(2)}x_2^{(3)} - x_3^{(1)}x_2^{(2)}x_1^{(3)}} \\ & \times \begin{pmatrix} x_2^{(2)}x_3^{(3)} - x_3^{(2)}x_2^{(3)} & - \left(x_2^{(1)}x_3^{(3)} - x_3^{(1)}x_2^{(3)} \right) & x_2^{(1)}x_3^{(2)} - x_3^{(1)}x_2^{(2)} \\ - \left(x_1^{(2)}x_3^{(3)} - x_3^{(2)}x_1^{(3)} \right) & x_1^{(1)}x_3^{(3)} - x_3^{(1)}x_1^{(3)} & - \left(x_1^{(1)}x_3^{(2)} - x_3^{(1)}x_1^{(2)} \right) \\ x_1^{(2)}x_2^{(3)} - x_2^{(2)}x_1^{(3)} & - \left(x_1^{(1)}x_2^{(3)} - x_2^{(1)}x_1^{(3)} \right) & x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)} \end{pmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \hat{I}_j(j) + 2\hat{\Pi}_+^{(1)}(j) \\ \hat{I}_j(j) + 2\hat{\Pi}_+^{(2)}(j) \\ \hat{I}_j(j) + 2\hat{\Pi}_+^{(3)}(j) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.72)$$

Este esquema simples permite fazer a reconstrução de qualquer objeto físico descrito neste trabalho. Por exemplo, para 3-qubits podemos reconstruir qualquer correlação

$$\hat{\sigma}_i(1)\hat{\sigma}_j(2)\hat{\sigma}_k(2)\quad (2.73)$$

escrevendo cada $\hat{\sigma}_i(j)$, $j = 1, 2, 3$, em função dos projetores, a partir da equação (2.72). Aparecerão produtos de projetores dos três qubits (pois cada $\hat{\sigma}_i(j)$ será substituído por uma combinação linear de projetores) e os valores médios desses produtos de projetores são probabilidades mensuráveis diretamente.

2.2 Função distribuição Simétrica para 1-qubit e dois eixos de quantização

Inicialmente, o conceito de função distribuição de "probabilidades" foi emprestado da estatística puramente matemática para ser usada na Física (originalmente na Física Clássica). Na Física Quântica o mesmo conceito tornou-se útil^{7,17} mas encontrou dificuldades, uma vez que a relação de incerteza entre observáveis incompatíveis tornou a definição de espaço de fase problemática, pois uma partícula não pode ter posição e momentum linear simultaneamente bem definidos. Analogamente, não se pode determinar simultaneamente os observáveis $\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}$ e $\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}$ associados aos eixos de quantização \hat{r}_1 e \hat{r}_2 de uma mesma partícula. Ou seja, em ambos os casos não se pode definir uma distribuição de "probabilidades" conjunta verdadeira. Apesar disso, pode-se definir funções que apresentam uma semelhança com as funções de distribuição no espaço de fase clássico, chamadas funções distribuição de pseudo-probabilidades (ou "probabilidades", entre aspas), que provaram ser de grande utilidade no estudo dos sistemas quânticos. Elas são úteis não apenas como ferramentas de cálculo, mas também ajudam na tarefa de conectar a Mecânica Estatística Clássica à Mecânica Estatística Quântica.

A razão das funções de distribuição de "probabilidades" serem úteis na tarefa de realizar a conexão entre a Mecânica Estatística Clássica e a Mecânica Estatística Quântica é que distribuições de pseudo-probabilidades permitem expressar os cálculos de médias na Mecânica Estatística Quântica de maneira muito similar aos cálculos de médias clássicas. Como um exemplo específico é interessante considerar uma partícula em uma dimensão com sua posição e momentum linear denotados por \hat{q} e \hat{p} , respectivamente. Classicamente a partícula é descrita por uma distribuição no espaço de fase $P_C(p, q)$. A média de uma função da posição e momento $A(p, q)$ pode ser expressa como

$$\langle A \rangle_C = \int_{-\infty}^{+\infty} dq dp A(q, p) P_C(q, p). \quad (2.74)$$

Se uma partícula é descrita por uma matriz densidade $\hat{\rho}$, a média de uma função da posição e do momento $\hat{A}(q, p)$ escreve-se

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{A}). \quad (2.75)$$

O uso de uma distribuição de pseudo-probabilidade, $P_\mu(q, p)$, permite expressar tal média como

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq dp A_\mu(q, p) P_\mu(q, p), \quad (2.76)$$

onde a função $A_\mu(q, p)$ é um mapa do operador $\hat{A}(q, p)$ por uma regra de correspondência bem definida, para um mesmo tipo de mapa μ .

No caso das variáveis $\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}$ e $\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}$ pode se fazer um procedimento semelhante. Para se calcular o valor esperado de um observável $\hat{A}(\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})$ que seja uma função polinomial de argumentos $\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}$ e $\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}$, em termos da matriz densidade $\hat{\rho}$, faz-se o cálculo:

$$\langle \hat{A} \rangle = tr \left[\hat{\rho} \hat{A}(\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) \right]. \quad (2.77)$$

Introduzindo-se o operador que lembra a função delta de Dirac,

$$\delta(s - \hat{b}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \exp \left[-i\xi (s - \hat{b}) \right], \quad (2.78)$$

onde \hat{b} é um operador e s é a variável associada, define-se a função $A(s_1, s_2)$ como

$$\hat{A}(\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}, \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(s_1, s_2) \delta(s_1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}) \delta(s_2 - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) ds_1 ds_2 \quad (2.79)$$

e o valor médio expressa-se como

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= tr \left[\hat{\rho} \hat{A} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} A(s_1, s_2) tr \left[\hat{\rho} \delta(s_1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}) \delta(s_2 - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) \right] ds_1 ds_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(s_1, s_2) P(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \end{aligned} \quad (2.80)$$

definindo-se a função distribuição

$$P(s_1, s_2) = tr \left[\hat{\rho} \delta(s_1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}) \delta(s_2 - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) \right] \quad (2.81)$$

que pode ser complexa. A fim de assegurar que $P(s_1, s_2)$ seja real, define-se a forma simetrizada

$$\begin{aligned}
P_S(s_1, s_2) &= \text{tr} \left(\hat{\rho} \frac{1}{2} \{ \delta(s_1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}), \delta(s_2 - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) \} \right) \\
&= \text{tr} \left(\hat{\rho} \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_1}{2\pi} e^{-ib_1(s_1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma})}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_2}{2\pi} e^{-ib_2(s_2 - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})} \right\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(b_1 s_1 + b_2 s_2)} \text{tr} \left(\hat{\rho} \{ e^{ib_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}}, e^{ib_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}} \} \right) \frac{db_1 db_2}{4\pi^2}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Também defini-se as funções características simétrica e de Weyl como

$$M_s(b_1, b_2) = \text{tr} \left(\hat{\rho} \hat{M}_s(b_1, b_2) \right) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\hat{\rho} \{ e^{ib_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}}, e^{ib_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}} \} \right) \tag{2.83}$$

e

$$M_w(\beta_1, \beta_2) = \text{tr}(\rho e^{i(\beta_1 \hat{r}_1 + \beta_2 \hat{r}_2) \cdot \vec{\sigma}}), \tag{2.84}$$

respectivamente, com $s_1, s_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e as funções distribuição de probabilidades nada mais são do que a transformada de Fourier das funções características. A definição das funções características é necessária, pois a partir delas a função distribuição é obtida como uma transformação de Fourier como na equação (2.82) e as variáveis reais s_1 e s_2 são as variáveis envolvidas na transformação de Fourier. Veremos a seguir que, após a transformação, as variáveis reais s_1 e s_2 podem assumir apenas dois valores, $+1$ e -1 , como era esperado de variáveis associadas a observáveis de "spin".

O operador $\hat{M}_s(b_1, b_2)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\hat{M}_s &= \frac{1}{2} \{ e^{ib_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}}, e^{ib_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}} \} = (\cos b_1 \cos b_2 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \sin b_1 \sin b_2) \hat{I} + \\
&\quad + i(\sin b_1 \cos b_2) \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} + i(\cos b_1 \sin b_2) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma},
\end{aligned} \tag{2.85}$$

portanto, a função distribuição simétrica é escrita como

$$\begin{aligned}
P_S(s_1, s_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ib_1 s_1 - ib_2 s_2} M_s(b_1, b_2) \frac{db_1 db_2}{4\pi^2} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ib_1 s_1 - ib_2 s_2} [\cos b_1 \cos b_2 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \sin b_1 \sin b_2 \\
&\quad + i(\sin b_1 \cos b_2) \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + i(\cos b_1 \sin b_2) \hat{r}_2 \cdot \vec{P}] \frac{db_1 db_2}{4\pi^2}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Lembrando que $\vec{P} = tr(\hat{\rho}\vec{\sigma})$ é o vetor de polarização. Uma integral típica que ocorre em (2.86) é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos b_1 \cos b_2 e^{-ib_1 s_1} e^{-ib_2 s_2} db_1 db_2 = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ib_1} + e^{-ib_1}) e^{-ib_1 s_1} \frac{db_1}{4\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ib_2} + e^{-ib_2}) e^{-ib_2 s_2} \frac{db_2}{4\pi} \end{aligned}$$

e, usando a definição da função δ , tem-se⁵

$$\begin{aligned} P_s(s_1, s_2) &= P_{++} \delta(1 - s_1) \delta(1 - s_2) + P_{+-} \delta(1 - s_1) \delta(1 + s_2) \\ &+ P_{-+} \delta(1 + s_1) \delta(1 - s_2) + P_{--} \delta(1 + s_1) \delta(1 + s_2), \end{aligned} \quad (2.87)$$

onde os números $P_{\pm\pm}$ são os coeficientes da distribuição e são escritos como

$$P_{++} = \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right), \quad (2.88)$$

$$P_{+-} = \frac{1}{4} \left(1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P} - \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right), \quad (2.89)$$

$$P_{-+} = \frac{1}{4} \left(1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 - \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right), \quad (2.90)$$

$$P_{--} = \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 - \hat{r}_1 \cdot \vec{P} - \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right). \quad (2.91)$$

Em termos dos projetores,

$$\begin{aligned} P_{\pm\pm} &= \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{\Pi}_{\pm}^{(1)}, \hat{\Pi}_{\pm}^{(2)} \right\} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} \left\langle \left\{ \left(\hat{I} \pm \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \right), \left(\hat{I} \pm \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} \right) \right\} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left(1 \pm \hat{r}_1 \cdot \vec{P} \pm \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \right). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Os sinais em $P_{\pm\pm}$ se referem aos sinais que precedem os versores \hat{r}_1 e \hat{r}_2 . Cada elemento $P_{\pm\pm}$ toma valores no intervalo $[-1/8; 1]$, válido para quaisquer vetores \hat{r}_1 , \hat{r}_2 e \vec{P} .

As probabilidades marginais, que dependem da polarização do feixe de partículas, escrevem-se como

$$P_+^{(1)} = P_{++} + P_{+-} = \frac{1}{2} (1 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P}), \quad (2.93)$$

$$P_+^{(2)} = P_{++} + P_{-+} = \frac{1}{2} (1 + \hat{r}_2 \cdot \vec{P}), \quad (2.94)$$

$$P_-^{(1)} = P_{--} + P_{-+} = \frac{1}{2} (1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{P}), \quad (2.95)$$

$$P_-^{(2)} = P_{--} + P_{+-} = \frac{1}{2} (1 - \hat{r}_2 \cdot \vec{P}), \quad (2.96)$$

com $0 \leq P_{\pm}^{(i)} \leq 1$.

E também de (2.88) a (2.91), temos

$$P_{++} + P_{--} = \frac{1}{2}(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2) \quad (2.97)$$

e

$$P_{+-} + P_{-+} = \frac{1}{2}(1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2) \quad (2.98)$$

A diferença entre as somas parciais (2.97) e (2.98) informa sobre as orientações dos eixos de quantização

$$P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2. \quad (2.99)$$

Para $\theta_i = \phi_i = \phi = 0$ ($i = 1, 2$) e $P = 1$, variando-se θ , e utilizando-se (2.13) obtém-se

$$P_+^{(i)} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad (2.100)$$

$$P_-^{(i)} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \quad (2.101)$$

cujos gráficos são dados na figura 2-3,

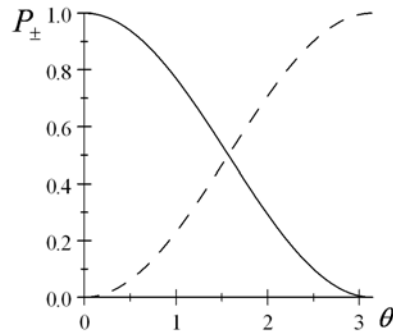


Figura 2-3: Probabilidades das contagens P_{\pm} em função de θ , o ângulo que caracteriza o estado.

onde a linha sólida corresponde a $P_+^{(i)}$ e linha tracejada corresponde a $P_-^{(i)}$.

Ao se considerar a pseudo-probabilidade (2.88) para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e para $\theta_1 = 0$, com $P = 1$, obtém-se

$$P_{\pm\pm} = \frac{1}{4}(1 \pm \cos \theta_2 \pm \cos \theta \pm \cos(\theta - \theta_2)) \quad (2.102)$$

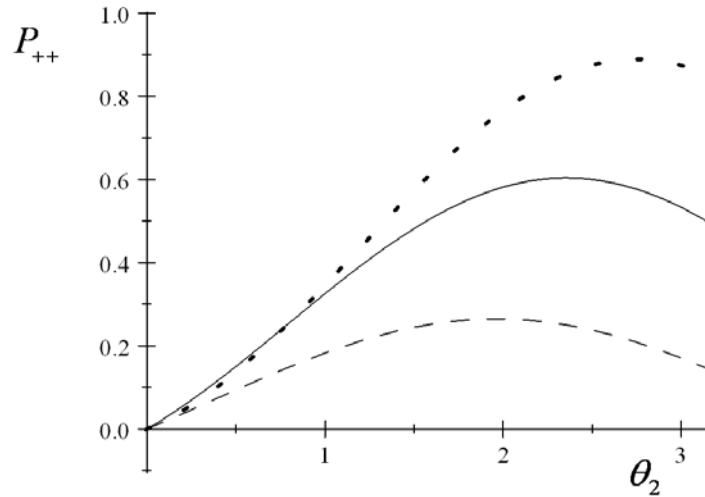


Figura 2-4: Pseudoprobabilidade P_{++} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

ou

$$P_{++} = \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \theta \sin \theta_2, \quad (2.103)$$

$$P_{+-} = \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin \theta \sin \theta_2, \quad (2.104)$$

$$P_{-+} = \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \theta \sin \theta_2, \quad (2.105)$$

e

$$P_{--} = \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin \theta \sin \theta_2. \quad (2.106)$$

Das figuras (2-5) e (2-7) que correspondem às equações (??) e (2.106), vê-se que as pseudoprobabilidades podem tomar valores negativos em algumas regiões.

De (2.93) a (2.96), vê-se que

$$\hat{r}_1 \cdot \vec{P} = 2P_+^{(1)} - 1, \quad (2.107)$$

$$\hat{r}_2 \cdot \vec{P} = 2P_+^{(2)} - 1, \quad (2.108)$$

$$-\hat{r}_1 \cdot \vec{P} = 2P_-^{(1)} - 1, \quad (2.109)$$

$$-\hat{r}_2 \cdot \vec{P} = 2P_-^{(2)} - 1. \quad (2.110)$$

Assim, das equações (2.107) a (2.110) e de (2.88) a (2.91) pode-se escrever as pseudo-probabilidades

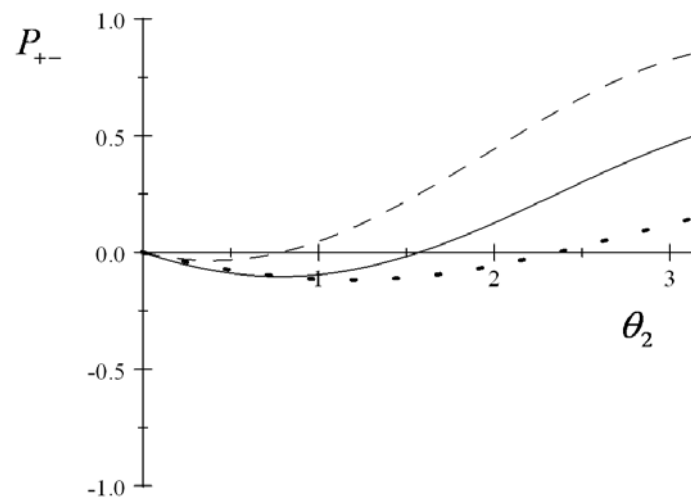


Figura 2-5: Pseudoprobabilidade P_{+-} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

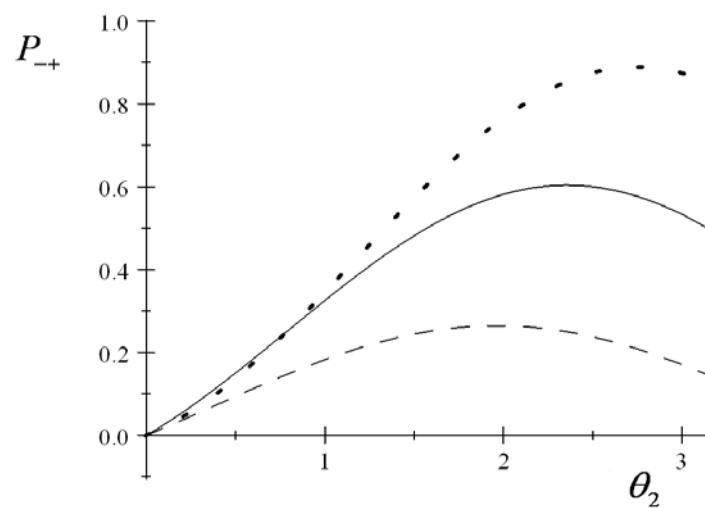


Figura 2-6: Pseudoprobabilidade P_{-+} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

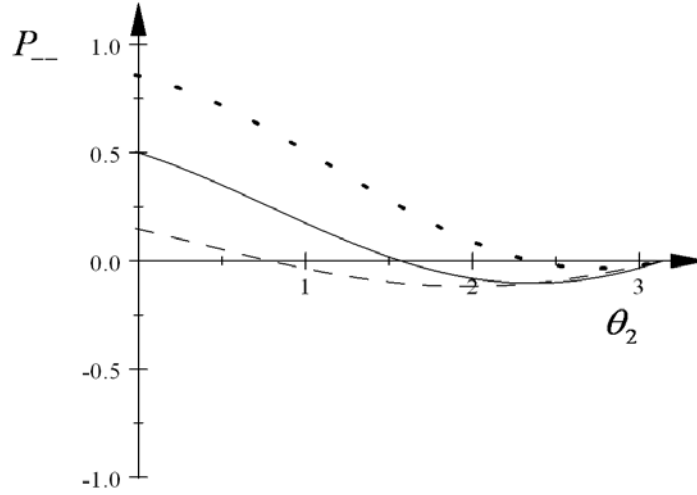


Figura 2-7: Pseudoprobabilidade P_{--} em função de θ_2 para $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ (plano xz) e com $\theta_1 = 0$. Deve ser observado que a linha sólida corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$, a linha tracejada a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e linha pontilhada a $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

em termos de quantidades mensuráveis

$$\begin{aligned}
 P_{++} &= \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + 2P_+^{(1)} - 1 + 2P_+^{(2)} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(-1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + 2P_+^{(1)} + 2P_+^{(2)} \right), \tag{2.111}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{+-} &= \frac{1}{4} \left(1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P} - \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(-1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + 2P_+^{(1)} + 2P_-^{(2)} \right), \tag{2.112}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{-+} &= \frac{1}{4} \left(1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 - \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(-1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + 2P_-^{(1)} + 2P_+^{(2)} \right), \tag{2.113}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{--} &= \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 - \hat{r}_1 \cdot \vec{P} - \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(-1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + 2P_-^{(1)} + 2P_-^{(2)} \right). \tag{2.114}
 \end{aligned}$$

Assim como ocorre com a função de Wigner de variáveis contínuas pode-se reconstruir as quatro pseudo-probabilidades que dependerão das contagens (diretamente no caso de spin-1/2 e indiretamente no caso de fótons). No caso de sistemas de óptica linear, nota-se que as projeções

na esfera de Bloch não são as projeções no espaço real dos polarizadores.

É interessante observar que, o fato de que $P_+^{(1)} + P_-^{(1)} = 1$, onde $P_+^{(1)}$ e $P_-^{(1)}$ são as probabilidades marginais, pode ser usado como uma maneira de medir a eficiência dos detectores, observado que a soma deve resultar sempre 1.

2.2.1 Relação entre as funções características simétrica e de Weyl

Pode-se estabelecer uma relação entre os observáveis simétricos \hat{M}_s e de Weyl \hat{M}_w . Para duas direções \hat{r}_1 e \hat{r}_2 , tem-se

$$\begin{aligned} e^{i(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) \cdot \vec{\sigma}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (\beta_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} + \beta_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} (\beta_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} + \beta_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} (\beta_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} + \beta_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})^{2n+1}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

e como

$$\begin{aligned} (\beta_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} + \beta_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma})^2 &= (\beta_1 \hat{r}_1 + \beta_2 \hat{r}_2) \cdot \vec{\sigma} (\beta_1 \hat{r}_1 + \beta_2 \hat{r}_2) \cdot \vec{\sigma} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{\sigma} = a_i a_j \sigma_i \sigma_j \\ &= a_i a_j (\delta_{ij} \hat{I} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k) = a^2 \hat{I}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

concluimos que

$$e^{i(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) \cdot \vec{\sigma}} = \cos a \hat{I} + i \frac{\vec{a}}{a} \cdot \vec{\sigma} \sin a, \quad a = \left| \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \right|. \quad (2.117)$$

Mas, visto que

$$\begin{aligned} \cos a \hat{I} + i \frac{\vec{a}}{a} \cdot \vec{\sigma} \sin a &= (\cos b_1 \cos b_2 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \sin b_1 \sin b_2) \hat{I} \\ &\quad + i (\sin b_1 \cos b_2) \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} + i (\cos b_1 \sin b_2) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.118)$$

temos duas igualdades:

1. Para os termos que multiplicam \hat{I} , tem-se

$$\cos \left| \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \right| = \cos b_1 \cos b_2 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \sin b_1 \sin b_2 \quad (2.119)$$

ou

$$\left| \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \right| = \arccos (\cos b_1 \cos b_2 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \sin b_1 \sin b_2) \quad (2.120)$$

2. Para os termos que multiplicam $i\vec{\sigma}$, tem-se

$$\frac{\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2}{|\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2|} \sin |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2| = \sin b_1 \cos b_2 \hat{r}_1 + \cos b_1 \sin b_2 \hat{r}_2 \quad (2.121)$$

ou

$$\beta_1 = \frac{\sin b_1 \cos b_2}{\sin |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2|} |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2| \quad (2.122)$$

e

$$\beta_2 = \frac{\sin b_2 \cos b_1}{\sin |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2|} |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2|, \quad (2.123)$$

onde foi usado o produto vetorial de (2.121) por \hat{r}_2 e depois por \hat{r}_1 para obter as expressões para β_1 e β_2 , respectivamente. Assim obtemos os parâmetros da função de Weyl, β_1 e β_2 , em termos dos parâmetros da função simétrica, b_1 e b_2 .

2.2.2 "Probabilidades negativas" e a relação de incerteza de Heisenberg

Atribuindo a operadores \hat{A} e \hat{B} , os valores $\hat{A} = \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}$ e $\hat{B} = \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}$, a relação de incerteza estabelece que

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 \quad (2.124)$$

onde, $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$. A equação (2.124) pode ser reescrita como

$$\left(1 - (\hat{r}_1 \cdot \vec{P})^2\right) \left(1 - (\hat{r}_2 \cdot \vec{P})^2\right) \geq (\hat{r}_3 \cdot \vec{P})^2 \quad (2.125)$$

onde $\hat{r}_3 = \hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2$.

Da inequação (2.125), vemos que quando o vetor polarização \vec{P} é coplanar com \hat{r}_1 e \hat{r}_2 , a incerteza mínima é igual a zero. As incertezas $\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle$ ou $\langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle$ são nulas se \vec{P} for paralelo a \hat{r}_1 ou \hat{r}_2 . Se \vec{P} for paralelo a \hat{r}_1 , a pseudo-probabilidade

$$P_{++} = \frac{1}{4} \left(1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + \hat{r}_2 \cdot \vec{P}\right) \quad (2.126)$$

se reduz a

$$P_{++} = \frac{1 + |\vec{P}|}{4} (1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2). \quad (2.127)$$

Ou seja, quando a incerteza é nula as probabilidades são positivas (probabilidades marginais)!

2.2.3 Relação com a função de Wigner de posição e momentum

Vamos proceder de maneira análoga ao que foi feito para as variáveis de spin e deduzir uma função distribuição de posição e momentum. Observaremos então que, procedendo desta forma, deduziremos a função de Wigner. O objetivo dessa investigação é averiguar a relação das pseudo-probabilidades negativas para uma partícula de spin-1/2 com a função de Wigner de variáveis contínuas p e q .

Conforme indica a equação (2.81), calculamos a seguinte média em um estado genérico

$$\begin{aligned}
P(x, p) &= \frac{1}{2} \langle \psi(x) | \{ \delta(x - \hat{q}), \delta(p - \hat{p}) \} | \psi(x) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \psi(x) \left| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_1}{2\pi} e^{-i\xi_1(x-\hat{q})}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{2\pi} e^{-i\xi_2(p-\hat{p})} \right\} \right| \psi(x) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{4\pi^2} e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 p)} \langle \psi(x) | \{ e^{i\xi_1 \hat{q}}, e^{i\xi_2 \hat{p}} \} | \psi(x) \rangle, \tag{2.128}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\langle \psi(x) | e^{i\xi_1 \hat{q}} e^{i\xi_2 \hat{p}} | \psi(x) \rangle &= \langle \psi(x) | e^{i\xi_1 \hat{q}} | \psi(x + \xi_2) \rangle \\
&= \langle \psi(x) | e^{i\xi_1 x} | \psi(x + \xi_2) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\xi_1 x} \psi^*(x) \psi(x + \xi_2) \tag{2.129}
\end{aligned}$$

e

$$\langle \psi(x) | e^{i\xi_2 \hat{p}} e^{i\xi_1 \hat{q}} | \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\xi_1 x} \psi^*(x + \xi_2) \psi(x). \tag{2.130}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P(x, p) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{4\pi^2} e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 p)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left(e^{i\xi_1 x'} \psi^*(x') \psi(x' + \xi_2) + e^{i\xi_1 x'} \psi^*(x' + \xi_2) \psi(x') \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 e^{-i\xi_2 p} \psi^*(x) \psi(x + \xi_2) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 e^{-i\xi_2 p} \psi^*(x + \xi_2) \psi(x) \right). \tag{2.131}
\end{aligned}$$

Por outro lado, considerando os projetores associados a autoestados de posição e momentum,

$$\hat{\Pi}^{(x'')} = |x''\rangle \langle x''| \tag{2.132}$$

e

$$\hat{\Pi}^{(p)} = |p\rangle \langle p|, \quad (2.133)$$

construímos o produto não simetrizado

$$\hat{\Pi}^{(x'')} \hat{\Pi}^{(p)} \quad (2.134)$$

e multiplicando à esquerda por $\langle \psi |$ e à direita por $|\psi\rangle$, o elemento de matriz é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \langle \psi | x'' \rangle \langle x'' | p \rangle \langle p | \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \psi^*(x'') e^{ix''p} \tilde{\psi}(p) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x'') e^{ix''p} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix'p} \psi(x') dx' dx'' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x'') \psi(x') e^{i(x''-x')p} dx' dx''. \end{aligned} \quad (2.135)$$

A integral em x'' é necessária para podermos fazer uma mudança de variáveis nas duas variáveis, x' e x'' .

Utilizando a função

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 e^{-i\xi_2 p} \psi^*(x) \psi(x + \xi_2), \quad (2.136)$$

que aparece no lado direito da equação (2.131), e fazendo as substituições

$$x = x'' \quad (2.137)$$

e

$$x + \xi_2 = x', \quad (2.138)$$

é imediato concluir que recaímos na função (2.135). Por outro lado, na função (2.135), fazendo as transformações de jacobiano 1,

$$x'' - x' = y \quad (2.139)$$

e

$$\frac{x'' + x'}{2} = x, \quad (2.140)$$

ou seja,

$$x' = x - \frac{y}{2} \quad (2.141)$$

e

$$x'' = x + \frac{y}{2}, \quad (2.142)$$

ficamos com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(x + \frac{y}{2} \right) \psi \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{iyp} dy \right]. \quad (2.143)$$

A expressão entre colchetes é a função de Wigner.

Desta forma, concluímos que estamos usando, para o caso de sistemas de spin, a mesma função proposta por Wigner para as variáveis p e q associadas aos observáveis de posição e momentum (\hat{p} e \hat{q}).

2.3 Função distribuição Simétrica para 1-qubit e três eixos de quantização

Para obter a função distribuição simétrica de três eixos de quantização, definimos a função característica correspondente,

$$M(b_1, b_2, b_3) = tr \left(\hat{\rho} \hat{M}(b_1, b_2, b_3) \right), \quad (2.144)$$

onde

$$\hat{M}(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 |\epsilon_{ijk}| e^{i\vec{b}_i \cdot \vec{\sigma}} e^{i\vec{b}_j \cdot \vec{\sigma}} e^{i\vec{b}_k \cdot \vec{\sigma}}. \quad (2.145)$$

Calcula-se, explicitamente, a função característica,

$$\begin{aligned} M(b_1, b_2, b_3) &= tr \left(\hat{\rho} \hat{M}(b_1, b_2, b_3) \right) = \\ &= \cos b_1 \cos b_2 \cos b_3 - (\cos b_1 \sin b_2 \sin b_3 \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 \\ &+ \cos b_2 \sin b_1 \sin b_3 \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 + \cos b_3 \sin b_1 \sin b_2 \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2) \\ &+ i(\cos b_2 \cos b_3 \sin b_1 \hat{r}_1 + \cos b_1 \cos b_3 \sin b_2 \hat{r}_2 \\ &+ \cos b_1 \cos b_2 \sin b_3 \hat{r}_3 - \frac{1}{3} \sin b_1 \sin b_2 \sin b_3 \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_1 \\ &\quad - \frac{1}{3} \sin b_1 \sin b_2 \sin b_3 \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_2 \\ &\quad - \frac{1}{3} \sin b_1 \sin b_2 \sin b_3 \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3) \cdot \vec{P}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

e obtêm-se que a função de distribuição em três direções é dada por

$$P(s_1, s_2, s_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ib_1s_1 - b_2s_2 - b_3s_3} M(b_1, b_2, b_3) \frac{db_1 db_2 db_3}{8\pi^3}. \quad (2.147)$$

cujos cálculo permite escrevê-la como

$$\begin{aligned} P(s_1, s_2, s_3) = & P_{+++} \delta(1 - s_1) \delta(1 - s_2) \delta(1 - s_3) + P_{++-} \delta(1 - s_1) \delta(1 - s_2) \delta(1 + s_3) \\ & + P_{+-+} \delta(1 - s_1) \delta(1 + s_2) \delta(1 - s_3) + P_{-+-} \delta(1 + s_1) \delta(1 - s_2) \delta(1 + s_3) \\ & + P_{-++} \delta(1 + s_1) \delta(1 - s_2) \delta(1 - s_3) + P_{+--} \delta(1 - s_1) \delta(1 + s_2) \delta(1 + s_3) \\ & + P_{---} \delta(1 + s_1) \delta(1 + s_2) \delta(1 + s_3) \\ & + P_{--+} \delta(1 + s_1) \delta(1 + s_2) \delta(1 - s_3), \end{aligned} \quad (2.148)$$

onde as pseudo-probabilidades são

$$\begin{aligned} P_{\pm\pm\pm} = & \frac{1}{8} \left[1 \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 \pm \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 \pm \hat{r}_1 \cdot \vec{P} \pm \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right. \\ & \left. \pm \hat{r}_3 \cdot \vec{P} \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3 \cdot \frac{\vec{P}}{3} \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_2 \cdot \frac{\vec{P}}{3} \pm \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_1 \cdot \frac{\vec{P}}{3} \right]. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Os sinais em $P_{\pm\pm\pm}$ se referem aos sinais que precedem os versores \hat{r}_1 , \hat{r}_2 e \hat{r}_3 , respectivamente.

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} P_{++-} = & \frac{1}{8} \left[1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 - \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 + \hat{r}_1 \cdot \vec{P} + \hat{r}_2 \cdot \vec{P} \right. \\ & \left. - \hat{r}_3 \cdot \vec{P} - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3 \cdot \frac{\vec{P}}{3} - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_2 \cdot \frac{\vec{P}}{3} - \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_1 \cdot \frac{\vec{P}}{3} \right]. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Escrevendo-se todas as pseudo-probabilidades explicitamente, é fácil mostrar que

$$\sum_{i,j,k=\pm} P_{ijk} = 1, \quad (2.151)$$

Também tem-se as pseudo-probabilidades reduzidas para duas direções em 1-qubit:

$$P_{++}^{(1,2)} = P_{++-} + P_{+++}, \text{ soma-se sobre o terceiro índice;} \quad (2.152)$$

$$P_{--}^{(1,2)} = P_{--+} + P_{---}, \text{ soma-se sobre o terceiro índice;} \quad (2.153)$$

$$P_{++}^{(1,3)} = P_{+++} + P_{+--}, \text{ soma-se sobre o segundo índice;} \quad (2.154)$$

...

Observamos aqui que, em termos dos projetores, as pseudo-probabilidades $P_{\pm\pm\pm}$ podem ser facilmente obtidas como

$$P_{\pm\pm\pm} = \frac{1}{3!} \left\langle \sum_{i,j,k=1}^3 |\epsilon_{ijk}| \hat{\Pi}_{\pm}^{(i)} \hat{\Pi}_{\pm}^{(j)} \hat{\Pi}_{\pm}^{(k)} \right\rangle. \quad (2.155)$$

Pode-se dizer que, qualquer que seja o número de direções, esse procedimento permite calcular as pseudo-probabilidades e, a partir daí, pode-se montar a função distribuição simétrica, também para qualquer número de direções. Cada elemento em $P_{\pm\pm\pm}$ está no intervalo $[-1/12; 1]$ para quaisquer vetores $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3$ e \vec{P} .

2.4 Função distribuição simétrica para 2-qubit

A função distribuição para 2-qubit⁶ pode ser escrita de maneira muito semelhante ao que foi feito para 1-qubit; para duas direções para cada qubit, (veja figura 2-8) tem-se

$$\begin{aligned} P_S(s_1, s_2; s_3, s_4) &= tr \left(\hat{\rho}(1, 2) \frac{1}{2} \{ \delta(s_1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1)), \delta(s_2 - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(1)) \} \right. \\ &\quad \left. \otimes \frac{1}{2} \{ \delta(s_3 - \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(2)), \delta(s_4 - \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) \} \right) \\ &= tr \left(\hat{\rho}(1, 2) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_1 db_2}{4\pi^2} e^{-i(b_1 s_1 + b_2 s_2)} \{ e^{ib_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1)}, e^{ib_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(1)} \} \right. \\ &\quad \left. \otimes \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_3 db_4}{4\pi^2} e^{-i(b_3 s_3 + b_4 s_4)} \{ e^{ib_3 \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(2)}, e^{ib_4 \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)} \} \right) \end{aligned} \quad (2.156)$$

onde s_1 e s_2 se referem ao primeiro qubit e s_3 e s_4 se referem ao segundo qubit.

Após cálculos um pouco laboriosos obtém-se as pseudo-probabilidades, que aparecem na função distribuição como coeficientes multiplicados por funções delta correspondentes, de maneira completamente análoga ao que foi feito para um qubit:

$$P(\pm_1(1), \pm_2(1); \pm_3(2), \pm_4(2)) = \frac{1}{16} [1 \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \pm \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_4 \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_4 \quad (2.157)$$

$$\pm \hat{r}_1 \cdot \vec{P}(1) \pm \hat{r}_2 \cdot \vec{P}(1) \pm \hat{r}_3 \cdot \vec{P}(2) \pm \hat{r}_4 \cdot \vec{P}(2) \pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3 \cdot \vec{P}(2)$$

$$\pm \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_4 \cdot \vec{P}(2) \pm \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_4 \hat{r}_1 \cdot \vec{P}(1) \pm \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_4 \hat{r}_2 \cdot \vec{P}(1)$$

$$\pm \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle \pm \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle \pm \langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle$$

$$\pm \langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle], \quad (2.158)$$

ou de forma mais compacta

$$P(\pm_1(1), \pm_2(1); \pm_3(2), \pm_4(2)) = \frac{1}{16} \left\langle \left\{ \hat{\Pi}_{\pm}^{(1)}(1), \hat{\Pi}_{\pm}^{(2)}(1) \right\} \left\{ \hat{\Pi}_{\pm}^{(3)}(2), \hat{\Pi}_{\pm}^{(4)}(2) \right\} \right\rangle, \quad (2.159)$$

Os dois fatores comutam entre si, por serem de espaços diferentes. Para ficar mais claro, podemos pensar sobre os qubits em termos de partículas (Veja figura 2-8). Assim, podemos dizer que os rótulos antes do ponto e vírgula se referem à partícula 1 e os rótulos depois do ponto e vírgula se referem à partícula 2; desta forma, iremos omitir os índices indicadores das partículas 1, 2. Da esquerda para a direita os sinais \pm se referem às direções 1, 2, 3, 4. Observe que as pseudo-probabilidades, agora escrita como $P(\pm_1, \pm_2; \pm_3, \pm_4)$, envolvem projeções simultâneas nas duas partículas e também em uma mesma partícula. O estado emaranhado das duas partículas é suposto desconhecido e o nosso objetivo é determiná-lo através de medições de projeção conjuntas nas duas partículas. O procedimento particular e os detalhes experimentais para cada sistema possível não é nosso interesse aqui.

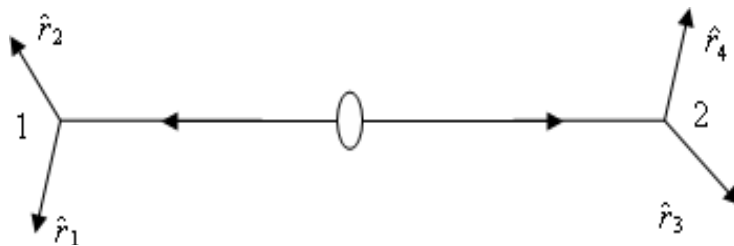


Figura 2-8: Realizamos medições conjuntas (simultâneas) nas duas partículas. Interessa que elas estejam causalmente desconectadas e que se movam para os detectores, não necessariamente em direções opostas como mostra esta figura.

Observa-se que se pode calcular probabilidades marginais, como por exemplo

$$P(+1, +2; +3, +4) + P(+1, -2; +3, +4) = P(+1; +3, +4), \quad (2.160)$$

$$P(-1, +2; +3, +4) + P(-1, -2; +3, +4) = P(-1; +3, +4), \quad (2.161)$$

e

$$P(+1; +3, +4) + P(-1; +3, +4) = P_{++}^{(3,4)} \quad (2.162)$$

que é a pseudo-probabilidade para uma partícula (neste caso, a partícula 2) e duas direções.

Um exemplo de probabilidade envolvendo as duas partículas pode ser obtido fazendo as somas

$$P(-1, -2; -3, -4) + P(-1, +2; -3, -4) = P(-1; -3, -4) \quad (2.163)$$

e

$$P(-1, +2; +3, -4) + P(-1, -2; +3, -4) = P(-1; +3, -4) \quad (2.164)$$

e, posteriormente

$$P(-1; -3, -4) + P(-1; +3, -4) = P(-1; -4), \quad (2.165)$$

onde

$$P(-1; -4) = \frac{1}{4} \left(1 - \hat{r}_1 \cdot \vec{P}(1) - \hat{r}_4 \cdot \vec{P}(2) + \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle \right). \quad (2.166)$$

Com estas idéias é possível estender a descrição para um número qualquer de qubits.

Ao utilizar-se, em cada partícula, de uma direção de projeção apenas, obtém-se

$$\begin{aligned} P_S(s_1; s_2) &= tr \left(\hat{\rho}(1, 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_1 db_2}{4\pi^2} e^{-i(b_1 s_1 + b_2 s_2)} e^{i b_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1)} \otimes e^{i b_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2)} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos b_1 \cos b_2 + i \langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle \cos b_1 \sin b_2 \\ &\quad + i \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \rangle \sin b_1 \cos b_2 \\ &\quad - \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle \sin b_1 \sin b_2) e^{-i(b_1 s_1 + b_2 s_2)} db_1 db_2. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Isto resulta em uma distribuição de probabilidades cujos coeficientes são positivos, correspondendo exatamente às contagens experimentais, pois esses coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} P(\pm_1; \pm_2) &= \frac{1}{4} \left(1 \pm \hat{r}_1 \cdot \vec{P}_1 \pm \hat{r}_2 \cdot \vec{P}_2 \pm \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}_1 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \left(\hat{I}_1 \pm \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}_1 \right) \left(\hat{I}_2 \pm \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \hat{\Pi}_{\pm}^{(1)}(1) \hat{\Pi}_{\pm}^{(2)}(2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Constitui importância fundamental notar que a negatividade das pseudo-probabilidades está relacionada à relação de incerteza e à não comutatividade dos operadores. Para ter certeza disso basta notar que a função distribuição para duas partículas se torna positiva ao eliminar-se os termos que não comutam, adotando-se uma única direção de projeção em cada partícula. Probabilidades negativas se referem a probabilidades conjuntas associadas a observáveis incompatíveis, ou seja, que não comutam entre si.

Capítulo 3

Realização física de "probabilidades negativas" I

3.1 "Probabilidades negativas" e desigualdades de Bell

3.1.1 O "paradoxo" EPR

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen^{18,19} propuseram um *gedankenexperiment* através do qual eles acreditavam ser possível demonstrar que a Mecânica Quântica não é uma teoria completa da realidade¹⁴.

Em essência, o argumento EPR é o seguinte. Inicialmente define-se o conceito de "elemento de realidade". Qualquer elemento de realidade *deve* ser representado em uma teoria física completa. O objetivo do argumento é mostrar que a Mecânica Quântica não é uma teoria física completa, através da identificação de elementos de realidade que não estão incluídos na Mecânica Quântica. Para isso, eles introduziram o que eles denominaram de *condições suficientes* para que uma propriedade física seja um elemento de realidade, a saber, que é possível prever, com certeza, o valor daquela propriedade. Esta condição, na verdade, pode ser desdobrada em duas outras:

1. Os observáveis têm propriedades físicas independentes da observação, hipótese conhecida como *realismo*;
2. Para dois observáveis causalmente desconectados (ou seja, quando as medições são efetuadas ao mesmo tempo e considerando o fato de que influências físicas não podem se propagar mais rápido que a luz) medições em um deles não podem influenciar o outro instantaneamente. Hipótese conhecida como *localidade*.

De posse dessas hipóteses constrói-se uma quantidade física que obedece a elas e a uma certa desigualdade que envolve probabilidade de eventos clássicos, portanto, não incompatíveis,

conhecida como desigualdade de Bell. Mas os experimentos subsequentes à publicação do artigo de EPR^{20,21} invalidam o argumento deles e concordam com a Mecânica Quântica, porque a violação da desigualdade de Bell surge como um resultado experimental.

Para analisar alguns aspectos desse problema mais a fundo retomamos o projetor (2.42) e o reescrevemos como

$$\hat{\Pi}_+^{(i)}(j) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta_i}{2} & e^{-i\phi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} \\ e^{i\phi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} & \sin^2 \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix}_j, \quad (3.1)$$

e considera-se a situação mostrada na figura 3-1. Um sistema de spin-zero é dividido em duas partículas de spin-1/2, e os spins são, então, anti-correlacionados (singleto). Uma partícula do par é destinada a Alice e a outra é destinada a Beto:

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_A 0_B\rangle - |0_A 1_B\rangle). \quad (3.2)$$

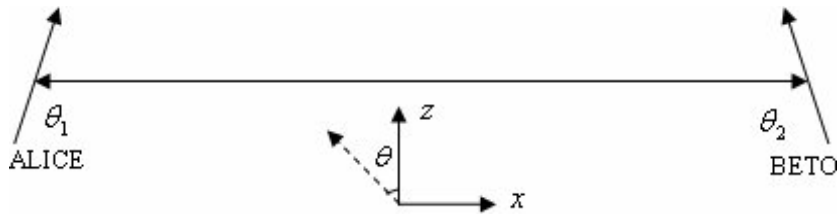


Figura 3-1: Alice e Beto compartilham um par de partículas cujo estado é correlacionado. O desenho situa-se no plano xz porque escolhemos $\phi = 0$.

Para simplificar trabalhamos no plano xz , ou seja, fazemos $\phi = 0$ em (3.1) e calculamos a probabilidade conjunta de detecção simultânea das duas partículas

$$\begin{aligned} P(+1; +2) &= \langle \psi_{EPR} | \hat{\Pi}_+^{(1)}(A) \hat{\Pi}_+^{(2)}(B) | \psi_{EPR} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A probabilidade da partícula de Alice ser detectada em θ_1 independentemente da medição na partícula de Beto, é dada por

$$P_+^{(1)}(A) = \langle \psi_{EPR} | \hat{\Pi}_+^{(1)}(A) | \psi_{EPR} \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Por outro lado, Alice não tem controle sobre o resultado da medição de Beto pois, independentemente do resultado da medição dela, temos

$$P_+^{(2)}(B) = \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Consideremos agora a probabilidade de que a partícula de Beto seja detectada com o aparelho de medição na direção θ_2 se sabemos que a partícula de Alice foi detectada em θ_1 (probabilidade condicional)

$$P(+2|+1) = \frac{P(+1; +2)}{P_+^{(1)}(A)} = \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \quad (3.6)$$

Temos que

$$P(+2|+1) = \begin{cases} 1, & \text{para } \theta_1 - \theta_2 = \pm\pi \\ 0, & \text{para } \theta_1 - \theta_2 = 0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Logo, o resultado da medição na partícula de Beto parece ter sido influenciado pelo resultado da medição na partícula de Alice, mesmo que os dois estivessem bem separados no momento da medição. Este é o paradoxo da não localidade. É um paradoxo porque EPR supõem a hipótese da localidade.

Entretanto, Alice não pode enviar informação para Beto, em velocidade mais rápida que a velocidade da luz, apenas ajustando o seu ângulo de medição θ_1 . Isto porque, ajustar o ângulo θ_1 não garante a detecção na direção θ_2 da partícula de Beto, exceto no caso em que a partícula de Alice é detectada em θ_1 (deve ser lembrado que $P_+^{(1)}(A) = \frac{1}{2}$).

O projetor complementar a (3.1) é obtido fazendo-se as substituições $\theta_i \rightarrow \pi - \theta_i$ e $\phi_i \rightarrow \phi_i + \pi$ na equação (3.1)

$$\hat{\Pi}_-^{(i)}(j) = \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta_i}{2} & e^{-i\phi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} \\ e^{i\phi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} & \cos^2 \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix}_j. \quad (3.8)$$

Por simplicidade consideramos projecções no plano xz ($\phi_i = 0$ em (3.8)) e calculamos

$$P(+1; +2) = \langle \psi_{EPR} | \hat{\Pi}_+^{(1)}(A) \hat{\Pi}_+^{(2)}(B) | \psi_{EPR} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad (3.9)$$

$$P(-1; -2) = \langle \psi_{EPR} | \hat{\Pi}_-^{(1)}(A) \hat{\Pi}_-^{(2)}(B) | \psi_{EPR} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad (3.10)$$

$$P(-1; +2) = \langle \psi_{EPR} | \hat{\Pi}_-^{(1)}(A) \hat{\Pi}_+^{(2)}(B) | \psi_{EPR} \rangle = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad (3.11)$$

$$P(+1; -2) = \langle \psi_{EPR} | \hat{\Pi}_+^{(1)}(A) \hat{\Pi}_-^{(2)}(B) | \psi_{EPR} \rangle = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad (3.12)$$

que são, respectivamente, as probabilidades de ambas as partículas, de Alice e de Beto, serem detectadas (cada uma ao longo do eixo do detector); de ambas não serem detectadas; etc.

Fixar o ângulo θ_1 de Alice não garante que o estado de Beto seja projetado ou não (que Beto detecte ou não detecte a partícula), pois podemos fixar o ângulo de Alice, mas Beto não tem informação sobre o resultado das medições na partícula de Alice (ela pode detectar ou não uma

partícula na direção θ_1). Observa-se que

$$P(+\theta_2|\theta_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{P(+1; +2)}{P_+^{(1)}(A)} + \frac{P(-1; +2)}{P_+^{(1)}(A)} \right) = \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

onde soma-se sobre os valores $+\theta_1$ e $-\theta_1$ pelo fato de Beto não ter informação sobre o resultado da medição na partícula de Alice. Ou, equivalentemente

$$P(+\theta_2|\theta_1) = P(+1; +2) + P(-1; +2). \quad (3.14)$$

Então, fixando o ângulo θ_1 , a probabilidade de Beto detectar a partícula na direção θ_2 é dada pela mesma probabilidade de Alice detectar a partícula em θ_1 independentemente de qualquer medição na partícula de Beto

$$P(+\theta_2|\theta_1) = P_+^{(1)}(A) = \frac{1}{2}. \quad (3.15)$$

Isto é o mesmo que afirmar que a equação (3.14) diz que, na verdade, não se considera o resultado da medição na partícula de Alice e faz-se apenas a medição na partícula de Beto independentemente do que Alice obteve como resultado.

Como a equação (3.15) independe de θ_1 , conclui-se que fixar o ângulo θ_1 de Alice não causa influência sobre o resultado da medição na partícula de Beto (a probabilidade de detecção em θ_2 é de 50%). O *princípio da causalidade* é preservado.

3.1.2 Correlações em duas partículas e correlações em uma única partícula

A correlação entre duas partículas é definida como

$$C_{12}(1, 2) = \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle, \quad (3.16)$$

com $|C_{12}(1, 2)| \leq 1$. Em termos de projetores, tem-se

$$-1 \leq \langle \psi \left| \left(\hat{\Pi}_+^{(1)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(1)}(1) \right) \left(\hat{\Pi}_+^{(2)}(2) - \hat{\Pi}_-^{(2)}(2) \right) \right| \psi \rangle \leq +1. \quad (3.17)$$

Experimentalmente costuma-se utilizar a função correlação escrita como

$$C_{12}(1, 2) = \frac{\langle \psi \left| \left(\hat{\Pi}_+^{(1)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(1)}(1) \right) \left(\hat{\Pi}_+^{(2)}(2) - \hat{\Pi}_-^{(2)}(2) \right) \right| \psi \rangle}{\langle \psi \left| \left(\hat{\Pi}_+^{(1)}(1) + \hat{\Pi}_-^{(1)}(1) \right) \left(\hat{\Pi}_+^{(2)}(2) + \hat{\Pi}_-^{(2)}(2) \right) \right| \psi \rangle}. \quad (3.18)$$

Assim, mesmo se houver imperfeições na detecção, fica assegurado que $|C_{12}(1, 2)| \leq 1$.

Para o estado EPR $|\psi_{EPR}\rangle$ vamos calcular, explicitamente, a correlação

$$\begin{aligned}
C_{12}(1, 2) &= \langle \psi_{EPR} | \left(\hat{\Pi}_+^{(1)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(1)}(1) \right) \left(\hat{\Pi}_+^{(2)}(2) - \hat{\Pi}_-^{(2)}(2) \right) | \psi_{EPR} \rangle \\
&= P(+1; +2) + P(-1; -2) - P(+1; -2) - P(-1; +2) \\
&= -\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&= -\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Para $\theta_1 - \theta_2 = \pi$, os detectores orientados estão na mesma direção mas em sentidos opostos, e como o estado EPR é um estado singleto, há perfeita correlação das medições, $C_{12}(1, 2) = 1$: quando a partícula de Alice for detectada, a partícula de Beto também será, e quando a partícula de Alice não for detectada, a partícula de Beto também não será. Agora, para $\theta_1 = \theta_2$, os detectores orientados estão na mesma direção e no mesmo sentido, e como o estado EPR é um estado singleto, há uma perfeita anti-correlação das medições $C_{12}(1, 2) = -1$: quando a partícula de Alice for detectada, a partícula de Beto não será, e quando a partícula de Alice não for detectada, a partícula de Beto será.

Agora, vamos definir a correlação entre duas direções para uma única partícula, conforme foram definidas para duas partículas

$$\begin{aligned}
C_{12}(1) &= \text{tr} \hat{\rho}(1) \left(\hat{\Pi}_+^{(1)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(1)}(1) \right) \left(\hat{\Pi}_+^{(2)}(1) - \hat{\Pi}_-^{(2)}(1) \right) \\
&= P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} \\
&= \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

que é o mesmo resultado obtido para duas partículas, a menos do sinal. Essa é uma nova maneira de olhar para o EPR. Este resultado foi obtido de outra forma por Scully, Walther e Schleich⁶.

3.1.3 Desigualdade de Bell para duas partículas

No experimento EPR, consideremos as seguintes identidades entre as probabilidades de medição conjunta

$$P(+1; +3) = (P(+1, +2; +3, +4) + P(+1, -2; +3, +4)) + P(+1; +3, -4), \tag{3.21}$$

$$P(+1; +4) = (P(+1, +2; +3, +4) + P(+1, -2; +3, +4)) + P(+1; -3, +4), \tag{3.22}$$

$$P(+2; +3) = (P(+1, +2; +3, +4) + P(-1, +2; +3, +4)) + P(+2; +3, -4), \tag{3.23}$$

$$P(+2; +4) = (P(+1, +2; +3, +4) + P(-1, +2; +3, +4)) + P(+2; -3, +4). \tag{3.24}$$

Das equações de (3.21) a (3.23), obtém-se facilmente uma desigualdade de Bell. Inicia-se com

$$P(+1; +3) + P(+2; +3) = P(+1, +2; +3, +4) + P(+1, -2; +3, +4) + P(+1; +3, -4) \\ + P(+1, +2; +3, +4) + P(-1, +2; +3, +4) + P(+2; +3, -4) \quad (3.25)$$

Usando as equações (3.22) e (3.24), nota-se que a equação (3.25) pode ser reescrita como

$$P(+1; +3) + P(+2; +3) = P(+2; +4) - P(+2; -3, +4) \\ + P(+1; +4) - P(+1; -3, +4). \quad (3.26)$$

Como classicamente, as probabilidades são positivas, isto implica que

$$P(+2; +4) + P(+1; +4) \geq P(+1; +3), \quad (3.27)$$

que é uma desigualdade do tipo Bell; Scully e Zubairy⁸ obtiveram essa mesma desigualdade de modo diferente. Considerando a forma da probabilidade (3.9), a desigualdade (3.27) é violada para a escolha de ângulos

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0 \text{ e } \theta_4 = \frac{\pi}{4}, \quad (3.28)$$

como

$$0,15 \geq 0,25. \quad (3.29)$$

3.1.4 Desigualdades para uma única partícula

De maneira análoga, pode-se construir uma desigualdade para uma única partícula. Para isso consideramos as pseudo-probabilidades* definidas na equação (2.149) e escrevemos

$$P_{++}^{(1,2)} = P_{++-} + P_{+++}, \quad (3.30)$$

$$P_{++}^{(2,3)} = P_{-++} + P_{+++}, \quad (3.31)$$

$$P_{++}^{(1,3)} = P_{+--} + P_{+++}. \quad (3.32)$$

Somando (3.30) com (3.31) e subtraindo (3.32), obtemos

$$P_{++}^{(1,2)} + P_{++}^{(2,3)} - P_{++}^{(1,3)} = P_{++-} + P_{+++} \\ + P_{-++} + P_{+++} - P_{+--} - P_{+++}. \quad (3.33)$$

*Quando omitimos os índices superiores $((i, j) = (1, 2), (2, 3), (1, 3))$, que especificam direções envolvidas nestas "probabilidades" conjuntas, estamos supondo que as direções são óbvias e não precisam ser especificadas.

Ou seja,

$$P_{++}^{(1,2)} + P_{+--+} = P_{++}^{(1,3)} + P_{++-}. \quad (3.34)$$

Novamente o argumento é que classicamente probabilidades são positivas, permitindo obter a desigualdade:

$$P_{++}^{(1,2)} + P_{+--+} - P_{++}^{(1,3)} \geq 0. \quad (3.35)$$

Lembrando que, para $\phi = \phi_1 = \phi_2 = 0$ (plano xz), temos

$$P_{++}^{(i,j)} = \frac{1}{4} [1 + \cos(\theta_i - \theta_j) + \cos(\theta - \theta_i) + \cos(\theta - \theta_j)], \quad (3.36)$$

onde θ caracteriza um estado puro de um spin polarizado no plano xz , e

$$\begin{aligned} P_{+--+} = & \frac{1}{8} (1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_3) - \cos(\theta_2 - \theta_3) + \cos(\theta_1 - \theta) - \cos(\theta_2 - \theta) \\ & + \cos(\theta_3 - \theta) - \frac{1}{3} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_3 - \theta) - \frac{1}{3} \cos(\theta_1 - \theta_3) \cos(\theta_2 - \theta) \\ & - \frac{1}{3} \cos(\theta_2 - \theta_3) \cos(\theta_1 - \theta)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

e ainda, considerando $\theta = \pi/4$, $\theta_1 = \text{qualquer}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, obtém-se

$$\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) \sin \theta_1 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\right) \cos \theta_1 \geq 0, \quad (3.38)$$

e para $\theta_1 = \pi$, obtemos a seguinte violação

$$-1,4 \geq 0. \quad (3.39)$$

3.2 A teoria da informação de Jaynes

A teoria da informação possibilita estabelecer funções distribuição com base em conhecimento parcial sobre um determinado sistema, e permite fazer uma inferência estatística chamada estimativa pela maximização da entropia^{11,12}. O operador estatístico assim construído provém do *princípio da máxima entropia*.

A teoria de probabilidades se desenvolveu segundo duas direções conceitualmente distintas, mas matematicamente idênticas^{11,22}: a escola objetivista (Von Mises, 1957; Popper, 1959; Keynes, 1943; Carnap, 1950) e a escola subjetivista (Ramsey, 1926; De Finetti, 1972). A escola objetivista se divide em duas outras: a escola freqüencista (Von Mises, 1957; Popper, 1959) e a abordagem lógica (Keynes, 1943; Carnap, 1950).

A escola objetivista considera a probabilidade de um evento como uma propriedade física

objetiva daquele evento, e sempre é possível, em princípio, de ser medida experimentalmente pela observação de frequências em que aparecem em um experimento. Por outro lado, a escola subjetivista considera as probabilidades como expressões da ignorância humana; a probabilidade de um evento é simplesmente a nossa expectativa de que ele ocorrerá ou não, baseada em alguma informação parcial disponível e, então, a medição de outros observáveis, não conhecidos, não é realizada, mas sim inferida.

Na teoria de Jaynes supõe-se conhecer os valores esperados do conjunto $\{\langle \hat{X}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{X}_n \rangle\}$, obtidos de medições experimentais. A partir disso, deseja-se inferir o valor esperado de outras variáveis não pertencentes ao conjunto dado. Para se calcular diretamente (sem inferência) precisa-se conhecer a matriz densidade $\hat{\rho}$. Mesmo que o conhecimento do conjunto $\{\langle \hat{X}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{X}_n \rangle\}$ não seja suficiente para determinar o operador estatístico $\hat{\rho}$ com o máximo de informação possível, podemos construir um operador estatístico, sendo o menos enviesado possível, a partir, somente, da informação disponível. Para isso, vamos maximizar a entropia, sujeita às condições de vínculo associadas aos valores médios conhecidos. Então, definimos o funcional

$$S[\hat{\rho}] = -tr\hat{\rho} \ln \hat{\rho} - \sum_{m=1}^n \lambda_m tr(\hat{\rho} \hat{X}_m) - \lambda_0 tr\hat{\rho}, \quad (3.40)$$

onde os elementos do conjunto $\{\lambda_m, m = 0, \dots, n\}$ são os multiplicadores de Lagrange. Aplicando o cálculo variacional e fazendo uma variação aleatória $\delta\hat{\rho}$, obtém-se

$$\hat{\rho} = \exp \left[- (1 + \lambda_0) \hat{I} - \sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right]. \quad (3.41)$$

Impondo a condição de normalização, $tr\hat{\rho} = 1$, resulta em

$$\hat{\rho} = \frac{\exp \left(- \sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right)}{Z} \quad (3.42)$$

e

$$\ln Z = 1 + \lambda_0, \quad (3.43)$$

onde

$$Z = tr \exp \left(- \sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right) \quad (3.44)$$

é a função partição já conhecida da Mecânica Estatística.

Com o objetivo de determinar os valores médios $\langle \hat{X}_l \rangle$, calculamos a derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_l} \text{tr} \exp \left(- \sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \text{tr} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right)^p}{p!} \\
&= \text{tr} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p p \left(\sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right)^{p-1} \hat{X}_l}{p!} \\
&= \text{tr} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} (p+1) \left(\sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right)^p \hat{X}_l}{(p+1) p!} \\
&= -\text{tr} \left[\hat{X}_l \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right)^p}{p!} \right] \\
&= -\text{tr} \left[\hat{X}_l \exp \left(- \sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right) \right]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Por outro lado, observamos que

$$\langle \hat{X}_l \rangle = \frac{\text{tr} \left(\hat{X}_l \exp \left(- \sum_{m=1}^n \lambda_m \hat{X}_m \right) \right)}{Z} \tag{3.46}$$

e comparando a expressão (3.46) com (3.45) e utilizando a definição da derivada da função logaritmo, concluímos imediatamente, que

$$\langle \hat{X}_l \rangle = - \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \ln Z = - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_l}. \tag{3.47}$$

Usa-se o operador estatístico para calcular a entropia

$$S = -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = \sum_{m=1}^n \lambda_m \langle \hat{X}_m \rangle + \ln Z \tag{3.48}$$

e isto, juntamente com a equação (3.47), implica que

$$\lambda_l = \frac{\partial S}{\partial \langle \hat{X}_l \rangle} \tag{3.49}$$

e também se verifica, obviamente, que

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_l} = 0, \tag{3.50}$$

o que significa que o conjunto de parâmetros $\{\lambda_l, l = 0, \dots, n\}$ é aquele que torna a entropia S

máxima.

3.2.1 Inferência em 1-qubit

Primeiramente, consideremos o exemplo onde é conhecido o valor médio $\langle \hat{X}_1 \rangle = \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle$. Utilizando a equação (3.42), escrevemos

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\lambda_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}}}{2 \cosh \lambda_1}. \quad (3.51)$$

O próprio valor médio $\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle$ calculado em termos de $\hat{\rho}$ é dado por

$$\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle = -\tanh \lambda_1, \quad (3.52)$$

ou seja, estabelece-se uma relação entre o valor médio e o multiplicador de Lagrange

$$\lambda_1 = \tanh^{-1} (-\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle), \quad (3.53)$$

e

$$S = \lambda_1 \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle + \ln (2 \cosh \lambda_1). \quad (3.54)$$

Pode-se inferir o valor médio de uma segunda variável $\hat{X}_2 = \langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle$, obtendo-se

$$\langle \hat{X}_2 \rangle = -\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \tanh \lambda_1 \quad (3.55)$$

$$= \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle \quad (3.56)$$

$$= \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \langle \hat{X}_1 \rangle. \quad (3.57)$$

Vê-se que se \hat{r}_2 for ortogonal a \hat{r}_1 , nada pode ser inferido, um resultado muito interessante, pois diz respeito apenas à geometria do problema. Notamos que os valores médios $\langle \hat{X}_1 \rangle$ e $\langle \hat{X}_2 \rangle$ são linearmente dependentes.

Agora, consideremos o exemplo onde são conhecidos os valores médios

$$\left\{ \hat{X}_1 = \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle, \hat{X}_2 = \langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle \right\}. \quad (3.58)$$

Utilizando a equação (3.42), escrevemos

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\lambda_1 \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} - \lambda_2 \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}}}{2 \cosh a_1}, \quad \vec{a}_1 = \lambda_1 \hat{r}_1 + \lambda_2 \hat{r}_2, \quad a_1 = |\vec{a}_1|. \quad (3.59)$$

Assim, inferimos o valor médio de uma terceira variável, $\hat{X}_3 = \langle \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma} \rangle$, obtendo

$$\langle \hat{X}_3 \rangle = -\frac{\tanh a_1}{a_1} (\lambda_1 \hat{r}_1 + \lambda_2 \hat{r}_2) \cdot \hat{r}_3. \quad (3.60)$$

Se \hat{r}_3 for ortogonal à combinação linear $\lambda_1 \hat{r}_1 + \lambda_2 \hat{r}_2$ não é possível inferir nada sobre $\langle \hat{X}_3 \rangle$.

Por último, considere o exemplo onde é conhecido o conjunto de valores médios

$$\{\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle, \langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle, \langle \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma} \rangle\}. \quad (3.61)$$

Neste caso, o operador densidade pode ser escrito como

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma}}}{2 \cosh a_2}, \quad \vec{a}_2 = \lambda_1 \hat{r}_1 + \lambda_2 \hat{r}_2 + \lambda_3 \hat{r}_3, \quad a_2 = |\vec{a}_2|. \quad (3.62)$$

O operador (3.62) deve ser igual ao operador densidade com máxima informação sobre o sistema, pois, se as direções $\hat{r}^{(1)}$, $\hat{r}^{(2)}$ e $\hat{r}^{(3)}$ não são co-planares, o conjunto (3.61) contém toda a informação que se pode extrair do sistema. Logo, fazemos a identificação

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma}}}{2 \cosh a_2} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} - \frac{\vec{a}_2}{a_2} \cdot \vec{\sigma} \tanh a_2 \right), \quad (3.63)$$

com

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (3.64)$$

e escrevemos o vetor polarização

$$\vec{P} = -\frac{\tanh a_2}{a_2} \vec{a}_2; \quad (3.65)$$

Multiplicando escalarmente por \vec{a}_2 , obtemos

$$\vec{P} \cdot \vec{a}_2 = -a_2 \tanh a_2, \quad (3.66)$$

verificando-se a desigualdade

$$0 \leq |\vec{P}| = |\tanh a_2| \leq 1. \quad (3.67)$$

Para expressar o parâmetro λ_1 em termos dos elementos do conjunto (3.61), reescrevemos o vetor polarização como

$$\vec{P} = -\frac{\tanh a_2}{a_2} (\lambda_1 \hat{r}_1 + \lambda_2 \hat{r}_2 + \lambda_3 \hat{r}_3) \quad (3.68)$$

e, efetuando produtos vetoriais, obtemos

$$\left(\vec{P} \wedge \hat{r}_2 \right) \wedge \hat{r}_3 = -\frac{\tanh a_2}{a_2} \lambda_1 (\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2) \wedge \hat{r}_3, \quad (3.69)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
-\lambda_1 \frac{\tanh a_2}{a_2} &= \left(\vec{P} \wedge \hat{r}_2 \right) \wedge \hat{r}_3 \cdot (\hat{r}_1 \wedge \hat{r}_2) \wedge \hat{r}_3 \\
&= \left[-\vec{P} (\hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2) + \hat{r}_2 (\hat{r}_3 \cdot \vec{P}) \right] \cdot [-\hat{r}_1 (\hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2) + \hat{r}_2 (\hat{r}_3 \cdot \hat{r}_1)] \\
&= \left[\langle \hat{X}_1 \rangle (\hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2)^2 - \langle \hat{X}_2 \rangle \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_1 \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{X}_3 \rangle \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_1 \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2 + \langle \hat{X}_3 \rangle \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_1 \right]. \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Por outro lado, o conhecimento dos elementos do conjunto (3.61) permite determinar o vetor polarização, pois

$$\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle = x_1^{(1)} P_x + x_2^{(1)} P_y + x_3^{(1)} P_z = 2P_+^{(1)} - 1 \tag{3.71}$$

$$\langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle = x_1^{(2)} P_x + x_2^{(2)} P_y + x_3^{(2)} P_z = 2P_+^{(2)} - 1 \tag{3.72}$$

$$\langle \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma} \rangle = x_1^{(3)} P_x + x_2^{(3)} P_y + x_3^{(3)} P_z = 2P_+^{(3)} - 1 \tag{3.73}$$

Nas equações de (3.71) a (3.73) podemos isolar as componentes do vetor polarização P_x , P_y e P_z em termos das medições de contagens. O conhecimento do vetor polarização permite escrever

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{P} = \langle \vec{X}_{a_2} \rangle = -\frac{\tanh a_2}{a_2}. \tag{3.74}$$

Assim, podemos escrever o parâmetro λ_1 a partir das equações (3.70) e (3.74),

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\langle \vec{X}_{a_2} \rangle} \left[\langle \hat{X}_1 \rangle (\hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2)^2 - \langle \hat{X}_2 \rangle \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2 \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_1 \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{X}_3 \rangle \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_1 \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_2 + \langle \hat{X}_3 \rangle \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_1 \right]. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Podemos proceder de forma análoga para calcular λ_2 e λ_3 .

3.2.2 Inferência em 2-qubit

A fim de verificar, rapidamente, a influência do processo de inferência no estudo da informação contida em sistemas com mais de 1-qubit, consideremos três exemplos simples:

1. Conhecemos o valor esperado $\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} (1) \rangle$;
2. Conhecemos o valor esperado $\langle \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} (2) \rangle$;
3. Conhecemos o valor esperado $\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} (1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} (2) \rangle$.

Assim, teremos três operadores estatísticos, um correspondente a cada exemplo:

1. $\hat{\rho}(1) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(1) - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \tanh \lambda_1 \right);$
2. $\hat{\rho}(2) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(2) - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \tanh \lambda_2 \right);$
3. $\hat{\rho}(1, 2) = \frac{1}{4} \left(\hat{I}(1) \hat{I}(2) - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \tanh \lambda_3 \right).$

Para cada um dos três operadores estatísticos, dos itens acima, vamos inferir três variáveis:

1. $\langle \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1) \rangle;$
2. $\langle \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle;$
3. $\langle \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle.$

Para o operador $\hat{\rho}(1) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(1) - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \tanh \lambda_1 \right)$, temos

$$tr(\hat{\rho}(1) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1)) = -\tanh \lambda_1 \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3, \quad (3.76)$$

$$tr(\hat{\rho}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) = 0, \quad (3.77)$$

$$tr(\hat{\rho}(1) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) = 0. \quad (3.78)$$

Para o operador $\hat{\rho}(2) = \frac{1}{2} \left(\hat{I}(2) - \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \tanh \lambda_2 \right)$, temos

$$tr(\hat{\rho}(2) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1)) = 0, \quad (3.79)$$

$$tr(\hat{\rho}(2) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) = -\tanh \lambda_2 \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_4, \quad (3.80)$$

$$tr(\hat{\rho}(2) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) = 0. \quad (3.81)$$

Para o operador

$$\hat{\rho}(1, 2) = \frac{1}{4} \left(\hat{I}(1) \hat{I}(2) - \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \tanh \lambda_3 \right), \quad (3.82)$$

temos

$$tr(\hat{\rho}(1, 2) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1)) = 0,$$

$$tr(\hat{\rho}(1, 2) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) = 0,$$

$$tr(\hat{\rho}(1, 2) \hat{r}_3 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_4 \cdot \vec{\sigma}(2)) = -\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_4 \tanh \lambda_3. \quad (3.83)$$

Da equação (3.83) vemos que se a direção \hat{r}_1 (partícula 1) for ortogonal à direção \hat{r}_3 (partícula 2) ou se a direção \hat{r}_2 (partícula 1) for ortogonal a \hat{r}_4 (partícula 2), nada pode ser inferido. A mesma equação informa que

$$\lambda_3 = \tanh^{-1} \left(-\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle \right). \quad (3.84)$$

Desigualdade de Bell com informação parcial

O conhecimento experimental do seguinte conjunto de "probabilidades conjuntas"

$$\{P(+1; +2), P(+1; -2), P(-1; +2), P(-1; -2)\} \quad (3.85)$$

é suficiente para o conhecimento da variável $\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle$, e através desta variável inferimos o operador estístico (3.82). Como esta variável contém apenas informação parcial sobre o sistema, queremos verificar a violação da desigualdade de Bell para o operador estístico inferido e comparar com violação quando há máxima informação sobre o estado. Para isso, consideremos a desigualdade de Bell

$$P(+A, +B) + P(+B, +C) \geq P(+A, +C). \quad (3.86)$$

Cada uma das probabilidades indicadas podem ser calculadas seguindo o modelo

$$\begin{aligned} P(+A, +B) &= \text{tr} \left(\hat{\rho}(1, 2) \hat{\Pi}_+^{(A)}(1) \hat{\Pi}_+^{(B)}(2) \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_A \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_B \tanh \lambda_3). \end{aligned} \quad (3.87)$$

E da equação (3.84), temos que

$$P(+A, +B) = \frac{1}{4} (1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_A \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_B \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle). \quad (3.88)$$

Analogamente,

$$P(+B, +C) = \frac{1}{4} (1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_B \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_C \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle) \quad (3.89)$$

e

$$P(+A, +C) = \frac{1}{4} (1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_A \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_C \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle). \quad (3.90)$$

Para um estado EPR, as probabilidades se escrevem como

$$P(+A, +B) = \frac{1}{4} (1 + \cos(\theta_1 - \theta_A) \cos(\theta_2 - \theta_B) \cos(\theta_1 - \theta_2)), \quad (3.91)$$

$$P(+B, +C) = \frac{1}{4} (1 + \cos(\theta_1 - \theta_B) \cos(\theta_2 - \theta_C) \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (3.92)$$

e

$$P(+A, +C) = \frac{1}{4} (1 + \cos(\theta_1 - \theta_A) \cos(\theta_2 - \theta_C) \cos(\theta_1 - \theta_2)), \quad (3.93)$$

pois a correlação $\langle \hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma}(1) \hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma}(2) \rangle = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ é conhecida.

No caso onde há máxima informação sobre o estado EPR, temos

$$P(+_A, +_B) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2} \right), \quad (3.94)$$

$$P(+_B, +_C) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_B - \theta_C}{2} \right) \quad (3.95)$$

e

$$P(+_A, +_C) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_A - \theta_C}{2} \right). \quad (3.96)$$

As probabilidades (3.94) a (3.96), para a escolha de ângulos

$$\theta_A = 0, \quad (3.97)$$

$$\theta_B = \frac{\pi}{4} \quad (3.98)$$

e

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}, \quad (3.99)$$

substituídas na desigualdade (3.86), resultam na violação

$$0,15 \geq 0,25. \quad (3.100)$$

Por outro lado, as probabilidades (3.91) a (3.93), para

$$\theta_1 = \pi \quad (3.101)$$

e

$$\theta_2 = 0 \quad (3.102)$$

com os mesmos valores de θ_A , θ_B e θ_C , não produzem violação da desigualdade (3.86), pois obtemos

$$0,68 \geq 0,25. \quad (3.103)$$

Assim, concluímos que a falta de informação em (3.82) pode se refletir em uma violação menor, ou mesmo em não violação da desigualdade de Bell, para algumas situações.

3.3 Sistema para interferência de um único átomo

3.3.1 Descrição do *gedankenexperiment* da dupla-fenda

Quem primeiramente mencionou o conceito de "probabilidade negativa" foi Feynman⁹. Porém ele não justificou nem deduziu tais "probabilidades". Nesta seção iremos descrever a proposta de Scully, Walther e Schleich⁶ para a abordagem de Feynman para probabilidades negativas. A parte da dedução da função distribuição de pseudo-probabilidade já foi feita no capítulo anterior. Reproduzimos, então, nesta seção, os resultados relativos à aplicação da função distribuição para as correlações envolvendo o padrão de interferência, buscando interpretar as pseudo-probabilidades; no final da seção concluímos que o argumento dos autores, para uma interpretação de probabilidade de projeção conjunta em uma única partícula, não é convincente. Assim, na seção seguinte, propomos uma melhor argumentação.

O esquema (veja figura 3-2) consiste de uma fonte emissora de átomos de Rydberg[†] e uma montagem micrométrica composta das seguintes partes: um par de colimadores, que são duas fendas cuja largura é maior que a largura do par de fendas onde se origina o padrão de interferência[‡]; um par de cavidades detectoras colocadas entre as fendas colimadoras e as fendas difratadoras (detectores "qual caminho"^{6,24-28}), que fornecem a informação sobre qual o caminho seguido pelo átomo[§]; o próprio par de fendas onde se origina o padrão de interferência e uma tela onde será registrado o padrão de interferência.

No esquema, um laser excita o átomo para um estado de Rydberg de longa vida $|i\rangle \rightarrow |e\rangle$. Este segue em frente na direção z e quando ele passa através da cavidade do detector de "qual caminho" pode ocorrer ou não a transição $|e\rangle \rightarrow |d\rangle$. Se ocorrer, haverá emissão espontânea de um fóton. Se um fóton for deixado pelo átomo na cavidade 1, o estado do par de cavidades será $|1_1 0_2\rangle$ ($|1_1 0_2\rangle$ denota um fóton na cavidade 1 e nenhum fóton na cavidade 2), e se um fóton for deixado pelo átomo na cavidade 2, o estado do par de cavidades será $|0_1 1_2\rangle$ ($|0_1 1_2\rangle$ denota um fóton na cavidade 2 e nenhum fóton na cavidade 1). Supõe-se que as duas cavidades são idênticas⁶ e que, portanto, há igual probabilidade de um fóton ser deixado em uma ou outra cavidade (o átomo pode "passar" pelas duas cavidades ao mesmo tempo), logo podemos imaginar que as

[†]Átomos de Rydberg são átomos grandes, que possuem um elétron em um estado de número quântico "muito grande" (não existe uma referência para a definição de grande, para interesses práticos $n \geq 15$ é bastante satisfatório²³), e que possuem um momento de dipolo grande, podendo ser usados para interagir com campos eletromagnéticos. Esses átomos de Rydberg se parecem muito com átomos de hidrogênio.

[‡]O comprimento de onda da onda atômica deve ser maior que a distância entre as fendas e maior que a largura das mesmas.

[§]Supõe-se que o feixe atômico é de intensidade muito baixa, tal que os átomos são enviados um a um.

cavidades estejam em um estado simétrico

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1 0_2\rangle + |0_1 1_2\rangle) \quad (3.104)$$

ou anti-simétrico

$$|\bar{s}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1 0_2\rangle - |0_1 1_2\rangle). \quad (3.105)$$

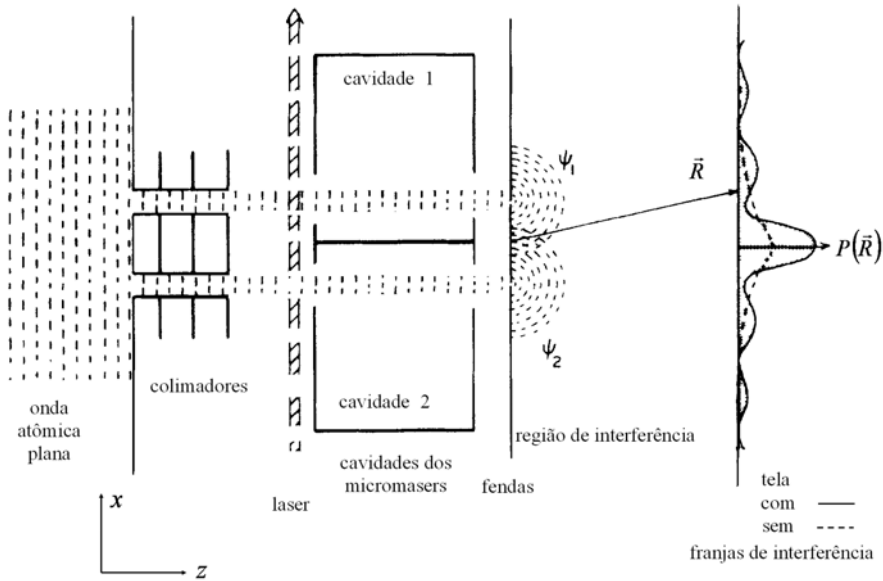


Figura 3-2: Um feixe atômico passando por uma dupla fenda tem seu padrão de interferência destruído ao detectarmos por qual fenda cada átomo passa⁶.

O experimento de duas fendas sem presença de um detector, que permita determinar qual o caminho seguido pelo átomo, tem a seguinte função de onda atômica

$$|\Psi(\vec{R})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}_1) + \psi_2(\vec{r}_2)) |i\rangle, \quad (3.106)$$

que é válida para a região entre as fendas e o anteparo. O vetor de estado $|i\rangle$ denota o estado interno do átomo. Assim, a densidade de probabilidade na tela apresenta interferência

$$P(\vec{R}) = \frac{1}{2} [|\psi_1(\vec{r}_1)|^2 + |\psi_2(\vec{r}_2)|^2 + \psi_1^*(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) + \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2^*(\vec{r}_2)]. \quad (3.107)$$

O fenômeno pode ser visualizado na figura 3-3, de onde vemos que

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\vec{d} \quad (3.108)$$

e também

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{d}, \quad (3.109)$$

logo, de (3.108) e (3.109), temos

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{2} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \quad (3.110)$$

ou seja, \vec{R} é coordenada do centro de massa do átomo.

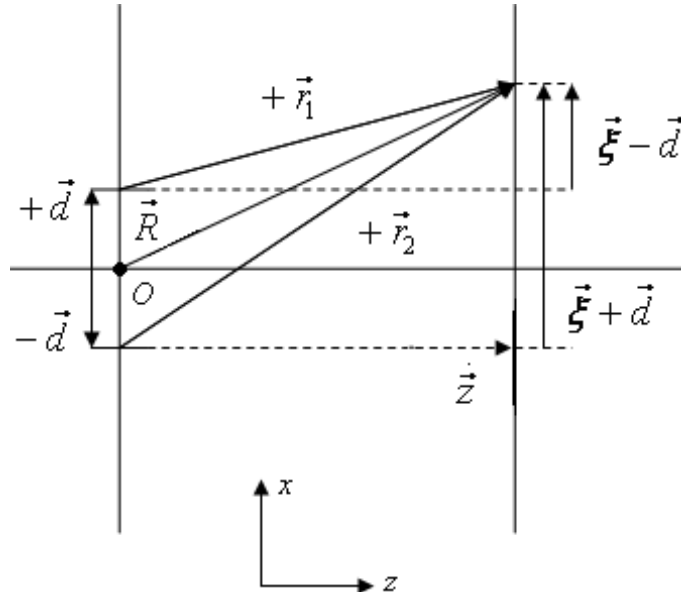


Figura 3-3: As funções $\psi_1(\vec{r}_1)$ e $\psi_2(\vec{r}_2)$ correspondem às funções associadas a cada fenda. A origem do sistema de coordenadas está no ponto O , assim $\vec{r}_1 = \vec{z} + (\vec{\xi} - \vec{d})$ e $\vec{r}_2 = \vec{z} + (\vec{\xi} + \vec{d})$.

Vamos, então, considerar o experimento de duas fendas onde o detector de "qual caminho" está presente (figura 3-2). Neste caso, o estado do átomo ficará emaranhado com o estado do par de cavidades, sendo escrito como

$$\begin{aligned} |\Psi(\vec{R})\rangle &= \alpha(\psi_1(\vec{r}_1)|1_10_2\rangle + \psi_2(\vec{r}_2)|0_11_2\rangle) \otimes |d\rangle \\ &\quad + \beta(\psi_1(\vec{r}_1) + \psi_2(\vec{r}_2))|0_10_2\rangle \otimes |e\rangle, \end{aligned} \quad (3.111)$$

onde

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (3.112)$$

e supõe-se que a probabilidade do átomo não deixar um fóton na cavidade que atravessa, é muito pequena

$$|\beta|^2 \ll 1. \quad (3.113)$$

A parte espacial do estado (3.106) se emaranha com o estado do par de cavidades quando há emissão espontânea. Em contraste com a equação (3.107), a densidade de probabilidade agora é

Cavidade	Spin-1/2
$ 1_1 0_2\rangle$	$ +z\rangle \equiv 1\rangle$
$ 0_1 1_2\rangle$	$ -z\rangle \equiv 0\rangle$
$ s\rangle$	$ +x\rangle$
$ \bar{s}\rangle$	$ -x\rangle$

Tabela 3.1: Detector "qual caminho" e a notação de spin-1/2.

dada por

$$\begin{aligned}
P(\vec{R}) &= \|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\|^2 = |\alpha|^2 (|\psi_1(\vec{r}_1)|^2 + |\psi_2(\vec{r}_2)|^2) \\
&\quad + |\beta|^2 [|\psi_1(\vec{r}_1)|^2 + |\psi_2(\vec{r}_2)|^2 + \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \\
&\quad + \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2^*(\vec{r}_2)].
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Então, pode-se observar uma interferência muito fraca, dependendo do valor de $|\beta|^2$, ou seja, se $|\beta|^2 \ll 1$ a interferência praticamente desaparece.

Então os presentes resultados, mostram que o objetivo de Einstein é realizável: é possível obter informação sobre qual caminho sem apelar para o argumento de espalhamento incontrolável ou redução da função de onda. Por outro lado, o pensamento de Bohr também não é contrariado pelas considerações desse experimento, pois o comportamento de onda (interferência) desaparece logo que alguém é capaz de dizer por qual caminho átomo passou. Então a perda de coerência nas medições em sistemas quânticos pode sempre ser atribuída às correlações entre o aparelho de medida e o sistema observado. Dito de outra forma, a informação é transferida para um aparelho de medida e isto pode mudar o resultado do experimento.

Essas considerações são baseadas principalmente nos avanços em Óptica Quântica, em particular no desenvolvimento das técnicas do micromaser^{24,28}. Neste *gedankenexperiment* é possível em princípio, e realizável na prática, para um átomo de Rydberg grande efetuar a transição $a \rightarrow b$ com probabilidade 1. Isto pode acontecer mesmo que a cavidade não contenha nenhum fóton inicialmente.

Observamos que o estado da cavidade é algebricamente isomorfo ao estado de um spin-1/2 (veja tabela 3.1). Com isto, diz-se que é possível reproduzir a álgebra $su(2)$ em termos dos estados da cavidade. De fato, tem-se

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\Pi}_+^{(x)} - \hat{\Pi}_-^{(x)} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \equiv |0_1 1_2\rangle\langle 1_1 0_2| + |1_1 0_2\rangle\langle 0_1 1_2|, \tag{3.115}$$

$$\hat{\sigma}_y = \hat{\Pi}_+^{(y)} - \hat{\Pi}_-^{(y)} = -i(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|) \equiv -i(|0_1 1_2\rangle\langle 1_1 0_2| - |1_1 0_2\rangle\langle 0_1 1_2|), \tag{3.116}$$

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\Pi}_+^{(z)} - \hat{\Pi}_-^{(z)} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \equiv |0_1 1_2\rangle\langle 0_1 1_2| - |1_1 0_2\rangle\langle 1_1 0_2|. \tag{3.117}$$

Para calcular probabilidades conjuntas, mesmo classicamente, calcula-se a estatística das

duas realizações simultaneamente, e não seqüencialmente. No caso quântico os observáveis não comutam entre si e deve-se, assim, calcular a média no estado do sistema do produto simetrizado dos projetores para obter as "probabilidades conjuntas". O resultado calculado fornece as pseudo-probabilidades.

Por exemplo, a "probabilidade conjunta" do átomo atravessar a cavidade 1 ($|1_1 0_2\rangle$) e do estado das duas ser o estado simétrico $|s\rangle$, é

$$P_{++} = \left\langle \Psi \left| \frac{1}{2} \left\{ |1_1 0_2\rangle \langle 1_1 0_2| \otimes |b\rangle \langle b|, \frac{1}{2} (|1_1 0_2\rangle + |0_1 1_2\rangle) (\langle 1_1 0_2| + \langle 0_1 1_2|) \right\} \right| \Psi \right\rangle \quad (3.118)$$

onde os estado $|\Psi\rangle$ é dado pela equação (3.111). Essa média não depende do estado interno do átomo $|b\rangle$ e tudo se passa como se o estado $|\Psi\rangle$ fosse dado por

$$|\Psi\rangle = \psi_1(\vec{r}) |1\rangle + \psi_2(\vec{r}) |0\rangle \quad (3.119)$$

e a "probabilidade" é calculada como

$$\begin{aligned} P_{++} &= \left\langle \Psi \left| \frac{1}{2} \left\{ |1\rangle \langle 1|, \frac{1}{2} (|1\rangle + |0\rangle) (\langle 1| + \langle 0|) \right\} \right| \Psi \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi \left| \frac{1}{2} \left\{ \hat{\Pi}_+^{(z)}, \hat{\Pi}_+^{(x)} \right\} \right| \Psi \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Em uma direção de propagação \vec{r}_i o pacote de onda pode ser escrito em termos do módulo do vetor posição $|\vec{r}_i|$, como se fosse um pacote de onda unidimensional

$$\psi_1(|\vec{r}_1|) = \psi_1\left(\left|\vec{z} + \left(\vec{\xi} - \vec{d}\right)\right|\right) \quad (3.121)$$

e

$$\psi_2(|\vec{r}_2|) = \psi_2\left(\left|\vec{z} + \left(\vec{\xi} + \vec{d}\right)\right|\right). \quad (3.122)$$

No artigo original⁶ os autores escolhem estas funções como pacotes de onda Gaussianos de forma

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= N e^{-\frac{|\vec{r}_1|^2}{4w^2}} e^{-i\frac{|\vec{r}_1|^2}{w^2}} = N e^{-\frac{(z^2 + (\xi-d)^2)}{4w^2}} e^{-i\frac{(z^2 + (\xi-d)^2)}{w^2}} \\ &= N e^{-\frac{z^2}{4w^2}} e^{-i\frac{z^2}{w^2}} e^{-\frac{(\xi-d)^2}{4w^2}} e^{-i\frac{(\xi-d)^2}{w^2}}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

e usam apenas a parte da função (3.123) que depende de ξ , assim

$$\psi_1(\xi) = N e^{-\frac{(\xi-d)^2}{4w^2}} e^{-i\frac{(\xi-d)^2}{w^2}}, \quad (3.124)$$

onde N é o fator de normalização, d é o espaçamento das fendas, ξ é a variável transversal sobre

a tela e w é o parâmetro que governa a largura do pacote de onda. Para obter $\psi_2(\xi)$ basta trocar $d \rightarrow -d$ na equação (3.124). A justificativa para a escolha de uma função gaussiana e escrevê-la como na equação (3.124) não é dada pelos autores. Porém, não é muito difícil intuir que tal função deve ser oscilante, como um co-seno, por exemplo, e que deve ser modulada por uma exponencial, pois a altura dos picos deve reduzir-se rapidamente quando nos afastamos do pico central. Alguém poderia, então, "chutar" a função

$$\psi_1(\xi) = N e^{-\frac{(\xi-d)^2}{4w^2}} \cos \frac{(\xi-d)^2}{w^2}. \quad (3.125)$$

Porém, suponha que calculemos, com esta função de onda, as probabilidades marginais[¶] $P_{++} + P_{+-} = |\psi_1(\xi)|^2$ e $P_{-+} + P_{--} = |\psi_2(\xi)|^2$ que são, respectivamente: a probabilidade do átomo passar pela fenda 1, deixando um fóton na cavidade 1, tal que o estado do detector "qual caminho" se torne $|1_1, 0_2\rangle$; e a probabilidade do átomo passar pela fenda 2, deixando um fóton na cavidade 2, tal que o estado do detector "qual caminho" se torne $|0_1, 1_2\rangle$. Agora, notemos que se o fóton passa por uma das cavidades não deve haver interferência e, contrariamente a esse fato, as funções $|\psi_1(\xi)|^2$ e $|\psi_2(\xi)|^2$ apresentarão um padrão típico de interferência. Assim, concluímos que a função de onda conveniente para o experimento é a (3.124).

Calculando a pseudo-probabilidade (3.120) e as outras, obtém-se

$$P_{++}(\xi) = \frac{1}{2} \left(|\psi_1(\xi)|^2 + \frac{1}{2} \{ \psi_1^*(\xi) \psi_2(\xi) + c.c. \} \right), \quad (3.126)$$

$$P_{+-}(\xi) = \frac{1}{2} \left(|\psi_1(\xi)|^2 - \frac{1}{2} \{ \psi_1^*(\xi) \psi_2(\xi) + c.c. \} \right), \quad (3.127)$$

$$P_{-+}(\xi) = \frac{1}{2} \left(|\psi_2(\xi)|^2 + \frac{1}{2} \{ \psi_1^*(\xi) \psi_2(\xi) + c.c. \} \right), \quad (3.128)$$

$$P_{--}(\xi) = \frac{1}{2} \left(|\psi_2(\xi)|^2 - \frac{1}{2} \{ \psi_1^*(\xi) \psi_2(\xi) + c.c. \} \right), \quad (3.129)$$

que se escrevem explicitamente como

$$P_{++}(\xi) = \frac{1}{2} N^2 \left[e^{-\frac{(\xi-d)^2}{2w^2}} + e^{-\frac{(\xi^2+d^2)}{2w^2}} \cos \frac{4\xi d}{w^2} \right], \quad (3.130)$$

$$P_{+-}(\xi) = \frac{1}{2} N^2 \left[e^{-\frac{(\xi-d)^2}{2w^2}} - e^{-\frac{(\xi^2+d^2)}{2w^2}} \cos \frac{4\xi d}{w^2} \right], \quad (3.131)$$

$$P_{-+}(\xi) = \frac{1}{2} N^2 \left[e^{-\frac{(\xi+d)^2}{2w^2}} + e^{-\frac{(\xi^2+d^2)}{2w^2}} \cos \frac{4\xi d}{w^2} \right], \quad (3.132)$$

$$P_{--}(\xi) = \frac{1}{2} N^2 \left[e^{-\frac{(\xi+d)^2}{2w^2}} - e^{-\frac{(\xi^2+d^2)}{2w^2}} \cos \frac{4\xi d}{w^2} \right]. \quad (3.133)$$

[¶]As probabilidades P_{++} , P_{+-} , P_{-+} e P_{--} estão definidas logo abaixo.

As equações de (3.130) a (3.133) são desenhadas nas figuras 3-4 e 3-5: (a) P_{++} é a "probabilidade conjunta" da partícula passar pela fenda 1 e o detector "qual caminho" ficar no estado simétrico $|s\rangle$; (b) P_{+-} é a "probabilidade conjunta" da partícula passar pela fenda 1 e o detector "qual caminho" ficar no estado anti-simétrico $|\bar{s}\rangle$; (c) P_{-+} é a "probabilidade conjunta" da partícula passar pela fenda 2 e o detector "qual caminho" ficar no estado simétrico $|s\rangle$; (d) P_{--} é a "probabilidade conjunta" da partícula passar pela fenda 2 e o detector "qual caminho" ficar no estado anti-simétrico $|\bar{s}\rangle$. Essas correspondências decorrem naturalmente das propriedades discutidas anteriormente, assim, na verdade, nosso cálculo de "probabilidades conjuntas" se refere a duas propriedades *das cavidades*.

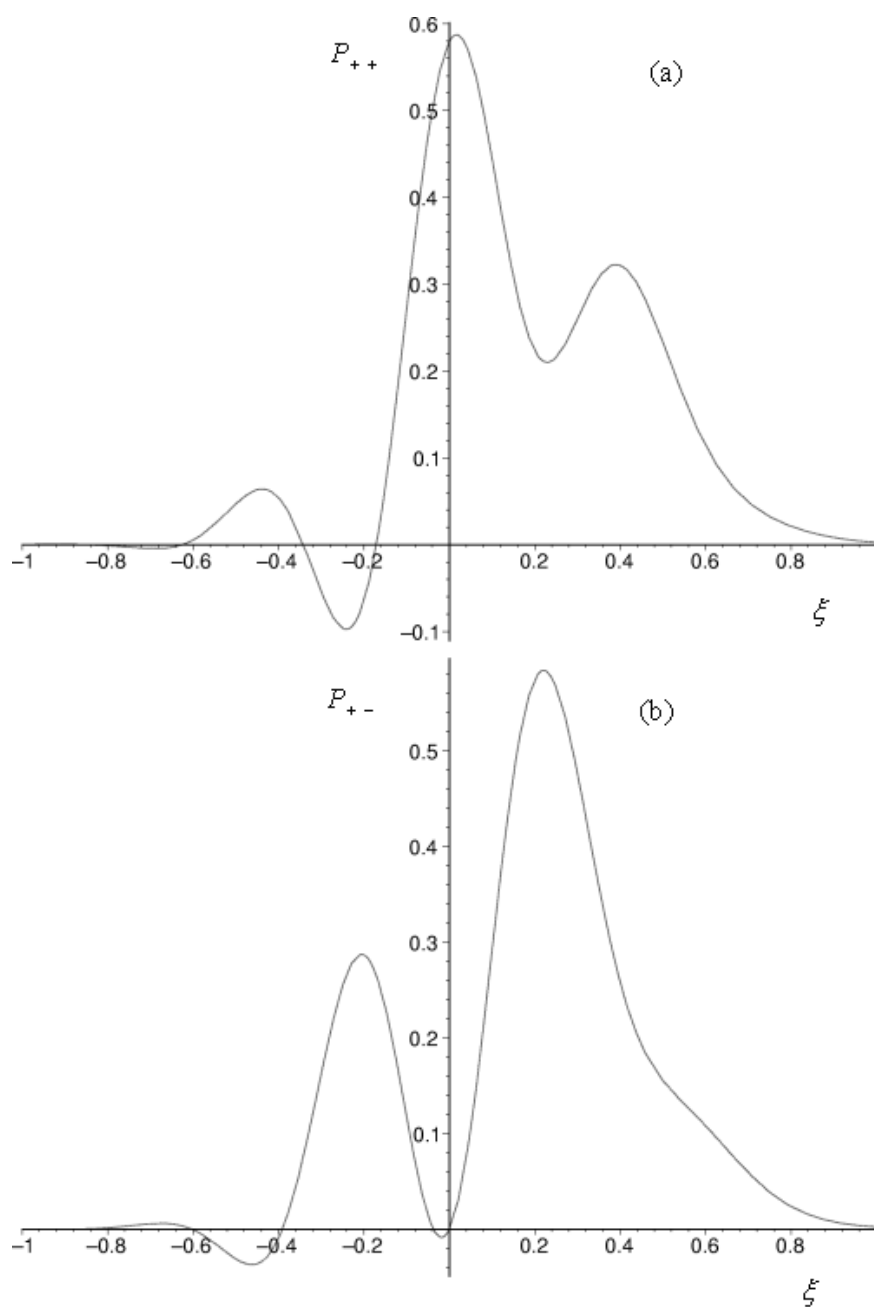


Figura 3-4: Pseudo-probabilidades apresentando negatividade⁶.

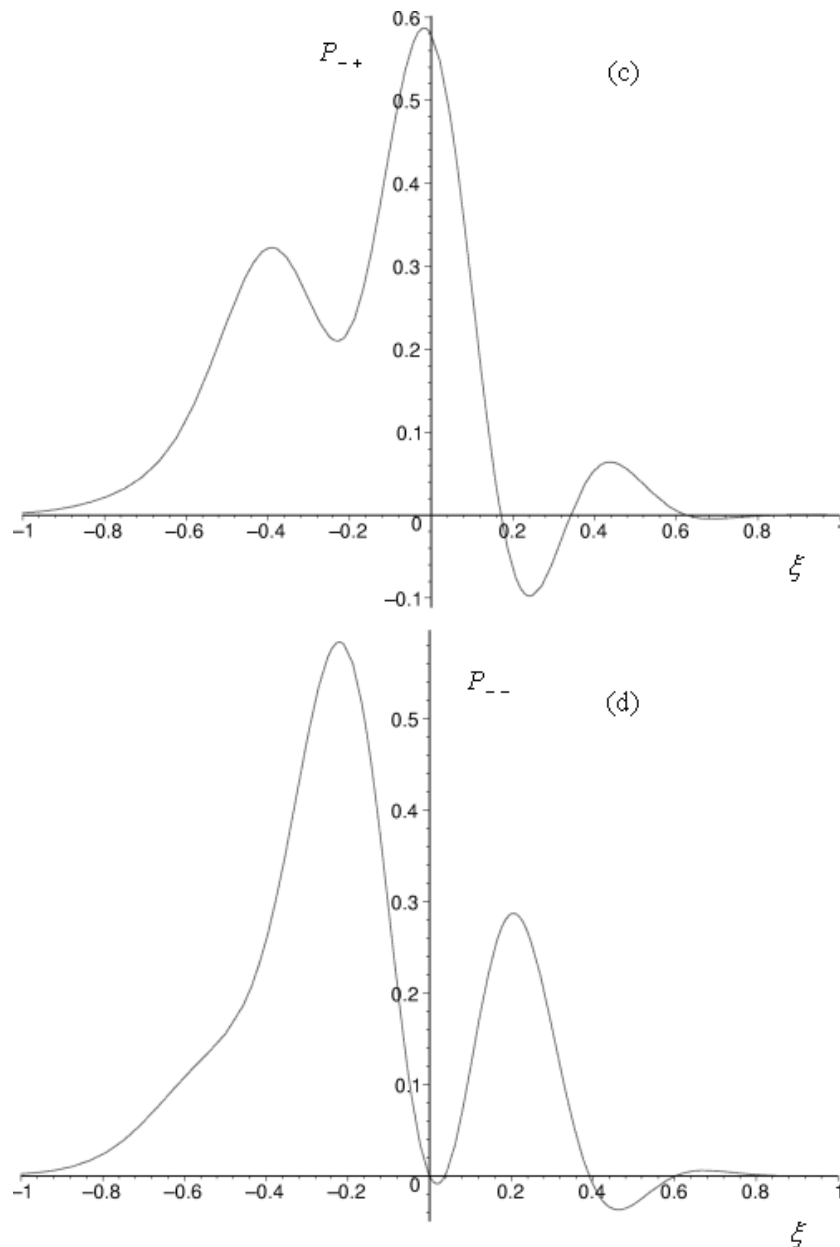


Figura 3-5: Pseudo-probabilidades apresentando negatividade⁶.

As probabilidades marginais são facilmente calculadas: (a) a interferência construtiva $P(\xi)_{construtiva} = P_{++} + P_{-+}$ é encontrada perguntando-se qual é a probabilidade de termos as cavidades no estado simétrico $|s\rangle$, independentemente de se saber por onde passa o átomo (este padrão é o mesmo que poderia ser obtido pela função (3.107)); (b) a interferência destrutiva $P(\xi)_{destrutiva} = P_{+-} + P_{--}$ é encontrada perguntando-se qual é a probabilidade de termos o detector "qual caminho" no estado $|\bar{s}\rangle$, independentemente de se saber por onde passa o átomo (este padrão de interferência é o mesmo que poderia ser obtido pela função (3.107), fazendo-se a substituição $\psi_1(\vec{r}_1) + \psi_2(\vec{r}_2) \rightarrow \psi_1(\vec{r}_1) - \psi_2(\vec{r}_2)$); (c) $P_{++} + P_{+-} = |\psi_1(\xi)|^2$ é a probabilidade do átomo passar pela fenda 1, deixando um fóton na cavidade 1, tal que o estado do detector "qual caminho" se torne $|1, 0\rangle$; (d) $P_{-+} + P_{--} = |\psi_2(\xi)|^2$ é a probabilidade do átomo passar pela fenda 2, deixando um fóton

na cavidade 2, tal que o estado do detector "qual caminho" se torne $|0, 1\rangle$. Os gráficos dessas probabilidades marginais estão nas figuras 3-6 e 3-7.

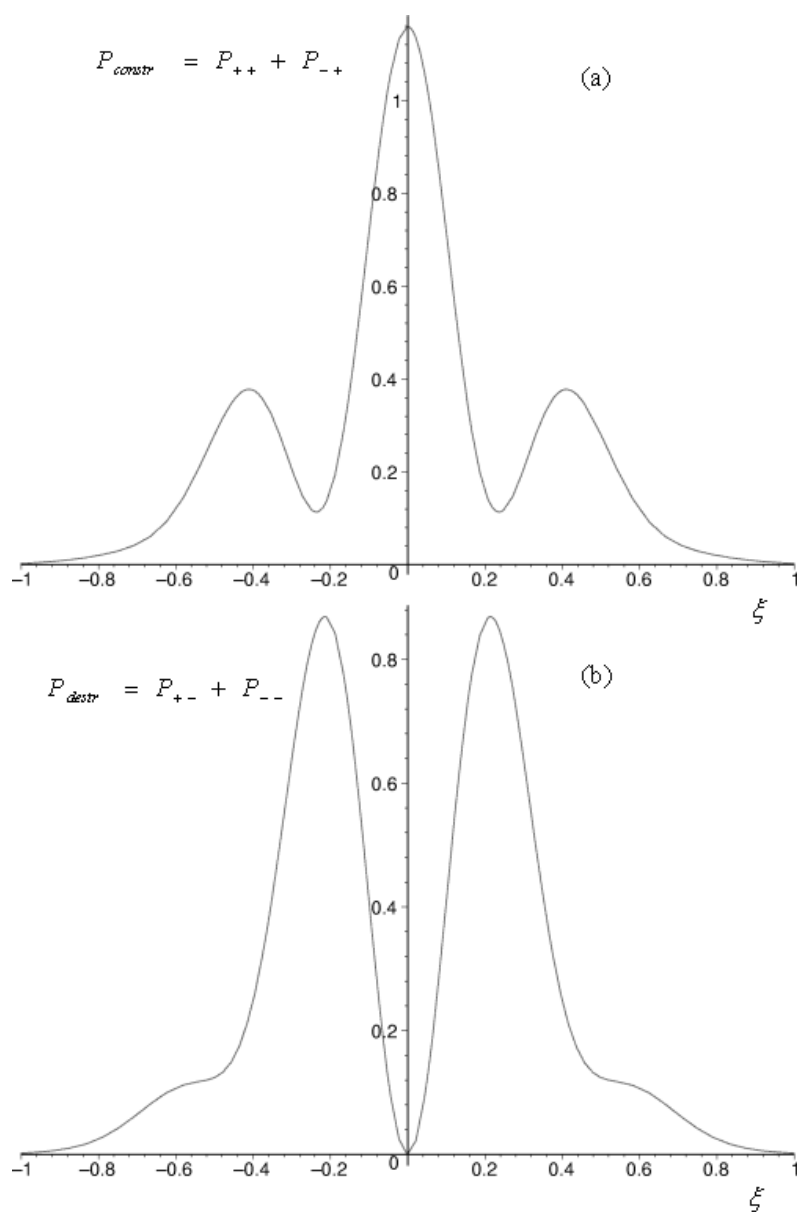


Figura 3-6: Funções densidade de probabilidades marginais. São densidades de probabilidade porque advém de uma função gaussiana.

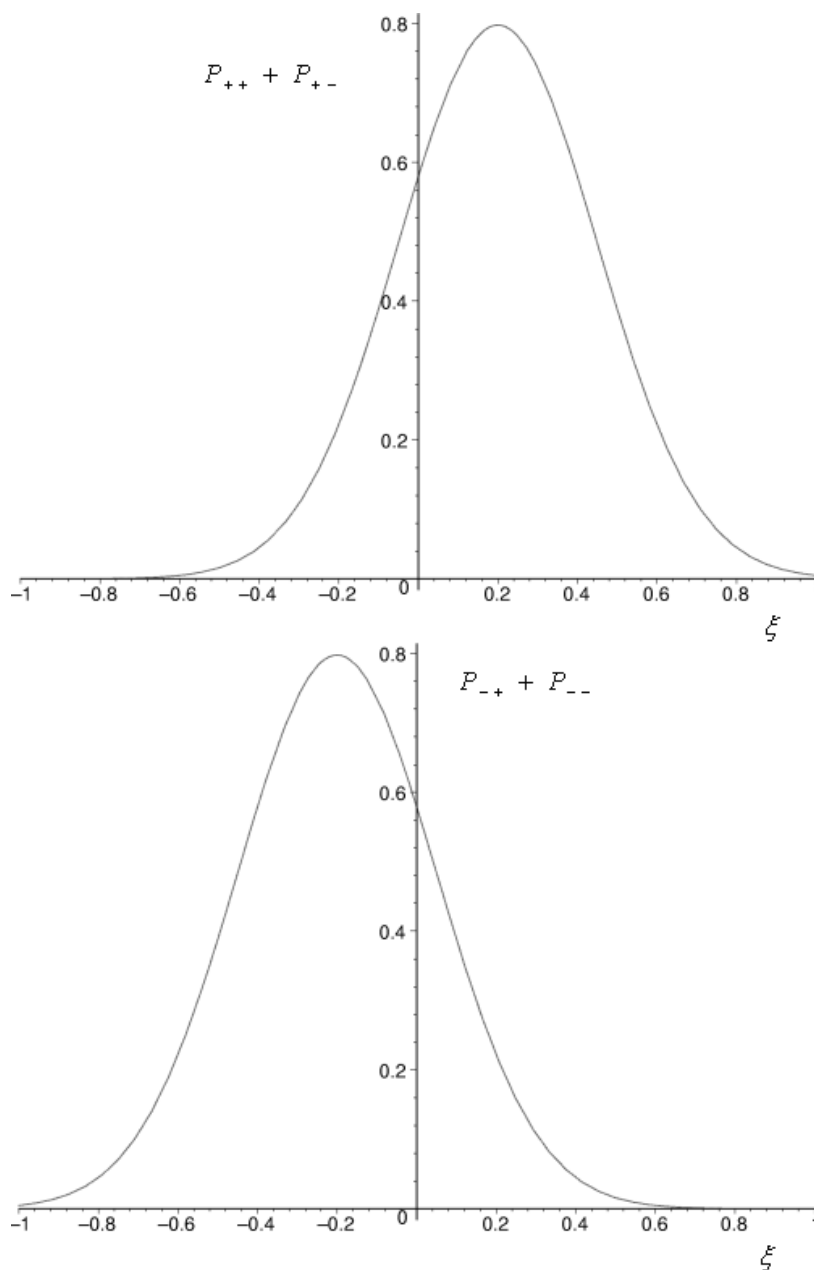


Figura 3-7: Funções densidade de probabilidades marginais. São densidades de probabilidade porque advém de uma função gaussiana.

3.3.2 Incerteza quântica e interferência de um único átomo

Se as cavidades forem diferentes, no sentido de que as probabilidades do átomo passar e deixar um fóton são diferentes para cada cavidade, o estado do sistema átomo-cavidade não muda sua forma

$$|\Psi\rangle = (\psi_1 |1_1 0_2\rangle + \psi_2 |0_1 1_2\rangle) |i\rangle, \quad (3.134)$$

mas os estados da cavidade se tornam "rodados"

$$|s\rangle \rightarrow |\theta\rangle \quad (3.135)$$

e

$$|\bar{s}\rangle \rightarrow |\pi + \theta\rangle, \quad (3.136)$$

ou seja,

$$|\theta\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |1_1 0_2\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |0_1 1_2\rangle \quad (3.137)$$

e

$$|\pi + \theta\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |1_1 0_2\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |0_1 1_2\rangle, \quad (3.138)$$

onde, em particular, temos

$$\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle = |s\rangle \quad (3.139)$$

e

$$\left| \pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle = |\bar{s}\rangle. \quad (3.140)$$

A "probabilidade conjunta" do átomo passar pela cavidade 1 e esta ficar no estado "rodado" $|\theta\rangle$ é dada por

$$P_{++} = \frac{1}{2} \langle \Psi | \left\{ \hat{\Pi}_+^{(z)}, \hat{\Pi}_+^{(\theta)} \right\} | \Psi \rangle \quad (3.141)$$

onde

$$\hat{\Pi}_+^{(z)} = |1_1 0_2\rangle \langle 1_1 0_2| \quad (3.142)$$

e

$$\hat{\Pi}_+^{(\theta)} = \left(\cos \frac{\theta}{2} |1_1 0_2\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |0_1 1_2\rangle \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \langle 1_1 0_2| + \sin \frac{\theta}{2} \langle 0_1 1_2| \right). \quad (3.143)$$

Assim,

$$P_{++} = |\psi_1|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1). \quad (3.144)$$

Por outro lado, a relação de incerteza quântica é dada por

$$\langle \Psi | \left(\Delta \hat{\Pi}_+^{(z)} \right)^2 | \Psi \rangle \langle \Psi | \left(\Delta \hat{\Pi}_+^{(\theta)} \right)^2 | \Psi \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle \Psi | \left[\hat{\Pi}_+^{(z)}, \hat{\Pi}_+^{(\theta)} \right] | \Psi \rangle \right|^2, \quad (3.145)$$

ou seja,

$$\left(P_+^{(z)} - \left(P_+^{(z)} \right)^2 \right) \left(P_+^{(\theta)} - \left(P_+^{(\theta)} \right)^2 \right) \geq \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1). \quad (3.146)$$

Utilizamos os gráficos da figura 3-8 para analisar o comportamento da pseudo-probabilidade P_{++} quando variamos θ . De (a) para (d) observamos que P_{++} perde sua negatividade e gradativamente se torna o gráfico para a probabilidade $P_{++} + P_{+-}$ do átomo passar pela fenda 1.

Voltando à desigualdade (3.146) vemos que quando θ tende a zero a incerteza mínima (lado direito da desigualdade (3.146)) também tende a zero, e isto está de acordo com o fato de que passamos a saber que o átomo atravessa a cavidade (fenda) 1 com probabilidade quase 100%.

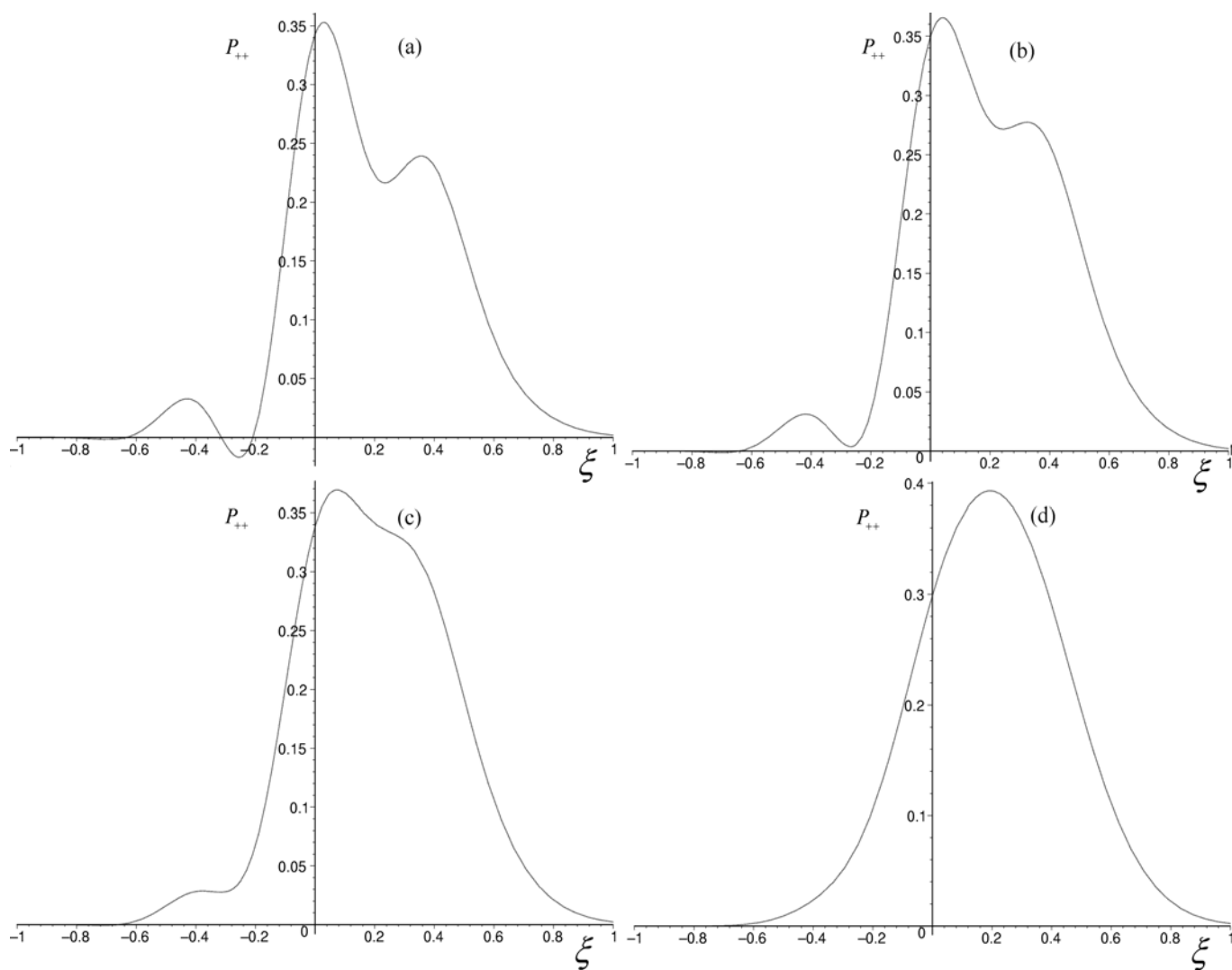


Figura 3-8: Dependência da pseudo-probabilidade P_{++} com o parâmetro θ que especifica o estado da cavidade. Na figura (a) $\theta = \pi/3$, na figura (b) $\theta = \pi/4$, na figura (c) $\theta = \pi/7$ e na figura (d) $\theta = \pi/50$.

Note que não somente a incerteza mínima tende a zero, pois, já que a incerteza sobre qual fenda o átomo passa tende a zero, então o lado esquerdo da desigualdade (3.146) também tende a zero. De fato, $P_+^{(z)} \rightarrow 1$ e $\left(P_+^{(z)} - \left(P_+^{(z)}\right)^2\right) \rightarrow 0$.

3.3.3 Conclusões sobre o *gedankenexperiment* da dupla-fenda

Percebemos que o conceito de "probabilidades conjuntas" resiste a uma interpretação satisfatória. O fato do átomo passar, por exemplo, pela cavidade (fenda) 1 e, ao mesmo tempo, deixar o par de cavidades (caracterizadas pelo fóton depositado) em um estado de superposição simétrica é, aparentemente, contraditório. Se soubermos por qual fenda o átomo passa, estaremos inevitavelmente destruindo o estado de superposição das cavidades e não haveria mais "probabilidades negativas". Mas essa redução do estado das cavidades não ocorre, pois a informação sobre o caminho percorrido pelo átomo fica retida no estado do par de cavidades, que é um sistema quântico.

As medições feitas pelos instrumentos de medida, são clássicas, assim não temos acesso a medições diretas de probabilidades negativas, entretanto podemos calculá-las a partir de quantidades mensuráveis e empíricas. As "probabilidades negativas", que são o correspondente discreto para a função de Wigner, fornecem uma descrição dos estados quânticos discretos similar à descrição de estados clássicos. São probabilidades no senso clássico, mas contruídas para representar sistemas quânticos. O preço que se paga por fazer essa analogia é a introdução da negatividade para "probabilidades".

Então, como as pseudo-probabilidades conjuntas não são probabilidades de medição direta, não deve ocorrer nenhuma evolução do estado do sistema entre um evento e outro, porque o estado não deve mudar entre um evento e outro. Vamos dar um exemplo pelo qual calculamos a probabilidade de medição seqüencial em duas direções e comparamos com a "probabilidade conjunta". Consideremos, então, a probabilidade de uma partícula de spin-1/2, no estado $|\psi\rangle$, passar por um filtro de Stern-Gerlach orientado na direção $+z$, e depois, por outro na direção $+x$, seqüencialmente:

$$\begin{aligned} \left\| \langle +x | \hat{\Pi}_+^{(z)} | \psi \rangle \right\|^2 &= \langle \psi | \hat{\Pi}_+^{(z)} | +x \rangle \langle +x | \hat{\Pi}_+^{(z)} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{\Pi}_+^{(z)} \hat{\Pi}_+^{(x)} \hat{\Pi}_+^{(x)} \hat{\Pi}_+^{(z)} | \psi \rangle \\ &= \left\| \hat{\Pi}_+^{(x)} \hat{\Pi}_+^{(z)} | \psi \rangle \right\|^2, \end{aligned} \quad (3.147)$$

que é diferente da "probabilidade conjunta"

$$P_{++}^{(x,z)} = \frac{1}{2} \langle \psi | \left\{ \hat{\Pi}_+^{(x)}, \hat{\Pi}_+^{(z)} \right\} | \psi \rangle. \quad (3.148)$$

Admitindo

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+z\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-z\rangle \quad (3.149)$$

e utilizando as expressões

$$\hat{\Pi}_+^{(x)} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_x) \quad (3.150)$$

e

$$\hat{\Pi}_+^{(z)} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_z) \quad (3.151)$$

obtemos,

$$\left\| \hat{\Pi}_+^{(x)} \hat{\Pi}_+^{(z)} |\psi\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} (1 + \cos \theta). \quad (3.152)$$

Temos também a probabilidade de uma partícula de spin-1/2, no estado $|\psi\rangle$, passar por um filtro de Stern-Gerlach orientado na direção $+x$, e depois, por outro na direção $+z$, seqüencialmente:

$$\left\| \hat{\Pi}_+^{(z)} \hat{\Pi}_+^{(x)} |\psi\rangle \right\|^2 = \frac{1}{4} (1 + \sin \theta). \quad (3.153)$$

Por outro lado, a "probabilidade conjunta" vale

$$P_{++}^{(x,z)} = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.154)$$

Então, a diferença entre "probabilidade conjunta" e probabilidade de medição seqüencial, é que nas medições seqüenciais o estado é modificado pela primeira medição, através da projeção do estado.

Capítulo 4

Realização física de "probabilidades negativas" II

4.1 Descrição do *gedankenexperiment* de Mach-Zehnder

Conforme ilustrado na figura 4-1, um único fóton²⁹⁻³² incide sobre um divisor de feixes A (o modo \hat{a}_0 corresponde ao vácuo) e os dois modos \hat{a}_2 e \hat{a}_3 originados são refletidos por dois espelhos (M_1 e M_2) e incidem sobre um segundo divisor de feixes B . Fotodetectores (D_1 e D_2) são colocados em cada um dos dois modos emergentes \hat{a}_{f_1} e \hat{a}_{f_2} . Podemos pensar em duas montagens experimentais. Na primeira montagem, o divisor de feixes B está presente no ponto de interseção dos modos \hat{a}_2 e \hat{a}_3 originados no divisor de feixes A . Ajustando o comprimento de caminho dos dois modos \hat{a}_2 e \hat{a}_3 podemos cancelar completamente o sinal detectado pelos detectores ou reproduzir a intensidade original de entrada. Parece evidente que o fóton "segue por dois caminhos". Na montagem alternativa removemos o segundo divisor de feixes, logo, os detectores indicarão qual o caminho percorrido pelo fóton. Como no experimento da dupla-fenda, é impossível, obter a informação sobre qual o caminho e, concomitantemente, observar interferência.

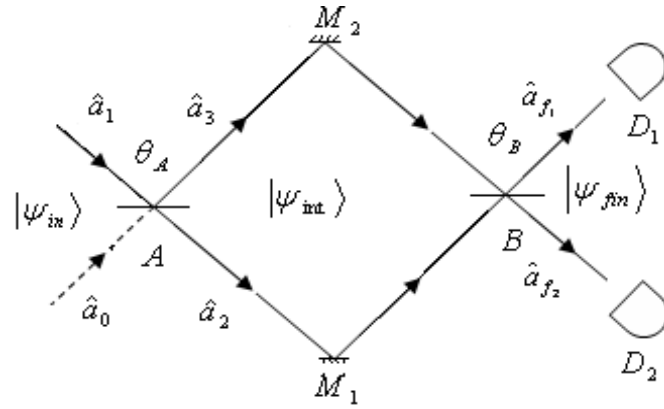


Figura 4-1: Interferência com um único fóton. Determinados eventos neste sistema podem ter probabilidades negativas.

O estado de inicial se escreve como

$$|\psi_{in}\rangle = |0_01_1\rangle = f_0(\hat{a}_0^\dagger) f_1(\hat{a}_1^\dagger) |0_00_1\rangle, \quad (4.1)$$

onde

$$f_0(\hat{a}_0^\dagger) = 1 \quad (4.2)$$

e

$$f_1(\hat{a}_1^\dagger) = \hat{a}_1^\dagger. \quad (4.3)$$

O divisor de feixes A faz a seguinte operação

$$\hat{a}_2 = T_A \hat{a}_1 + R_A \hat{a}_0, \quad (4.4)$$

$$\hat{a}_3 = R_A \hat{a}_1 + T_A \hat{a}_0, \quad (4.5)$$

e

$$f_0(\hat{a}_0^\dagger) f_1(\hat{a}_1^\dagger) \rightarrow f_2(\hat{a}_2^\dagger) f_3(\hat{a}_3^\dagger) = f_0(R_A \hat{a}_2^\dagger + T_A \hat{a}_3^\dagger) f_1(T_A \hat{a}_2^\dagger + R_A \hat{a}_3^\dagger) \quad (4.6)$$

onde $R_A = i \sin \frac{\theta_A}{2}$ e $T_A = \cos \frac{\theta_A}{2}$, são os coeficientes de transmissão e reflexão, respectivamente. Os valores apresentados são devidos ao requerimento da unitariedade (preservar o número de fótons). Matricialmente, escrevemos

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \sin \frac{\theta_A}{2} & \cos \frac{\theta_A}{2} \\ \cos \frac{\theta_A}{2} & i \sin \frac{\theta_A}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \sin \frac{\theta_A}{2} & \cos \frac{\theta_A}{2} \\ \cos \frac{\theta_A}{2} & -i \sin \frac{\theta_A}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Assim, o estado intermediário é escrito como

$$\begin{aligned} |\psi_{int}\rangle &= f_0 \left(R_A \hat{a}_2^\dagger + T_A \hat{a}_3^\dagger \right) f_1 \left(T_A \hat{a}_2^\dagger + R_A \hat{a}_3^\dagger \right) |0_2 0_3\rangle \\ &= T_A \hat{a}_2^\dagger |0_2 0_3\rangle + R_A \hat{a}_3^\dagger |0_2 0_3\rangle \\ &= \cos \frac{\theta_A}{2} |1_2 0_3\rangle + i \sin \frac{\theta_A}{2} |0_2 1_3\rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na ausência do divisor de feixes B , este sistema simula um qubit, pois definimos

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3, \quad (4.10)$$

com

$$\hat{\sigma}_0 |1_2 0_3\rangle = |1_2 0_3\rangle \quad (4.11)$$

e

$$\hat{\sigma}_0 |0_2 1_3\rangle = -|0_2 1_3\rangle, \quad (4.12)$$

ou seja,

$$|1_2 0_3\rangle \rightarrow |+z\rangle \quad (4.13)$$

e

$$|0_2 1_3\rangle \rightarrow |-z\rangle. \quad (4.14)$$

E o número de fótons é tal que $\langle \hat{n}_2 \rangle + \langle \hat{n}_3 \rangle = \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \rangle = 1$. Além disso, define-se

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3, \quad (4.15)$$

pois

$$\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 |0_2 1_3\rangle = |1_2 0_3\rangle \Leftrightarrow \hat{\sigma}_+ |-z\rangle = |+z\rangle \quad (4.16)$$

e

$$\hat{\sigma}_- = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2, \quad (4.17)$$

pois

$$\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2 |1_2 0_3\rangle = |0_2 1_3\rangle \Leftrightarrow \hat{\sigma}_- |+z\rangle = |-z\rangle. \quad (4.18)$$

Como podemos escrever

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-, \quad \hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-}{i} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_0, \quad (4.19)$$

definimos o vetor pseudo-polarização como

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \langle \vec{\sigma} \rangle_{\psi_{int}}, \\ &= \left\langle \hat{\sigma}_x \hat{i} + \hat{\sigma}_y \hat{j} + \hat{\sigma}_z \hat{k} \right\rangle_{\psi_{int}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

Note-se que essa polarização não corresponde à propriedade de polarização dos fótons.

O vetor pseudo-polarização é, então, escrito como

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \langle \psi_{int} | \vec{\sigma} | \psi_{int} \rangle \\ &= \sin \theta_A \hat{j} + \cos \theta_A \hat{k}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

e está restrito ao plano yz ($\phi = \pi/2$). Assim, uma direção qualquer na "esfera" de Bloch do "1-qubit" (entre aspas porque está restrito ao plano yz), será dada por

$$\hat{r} = (\sin \theta) \hat{j} + (\cos \theta) \hat{k}. \quad (4.22)$$

E a probabilidade de projeção nesta direção será

$$\begin{aligned} P_+ &= \left\langle \psi_{int} \left| \frac{1}{2} (\hat{I} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \right| \psi_{int} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta + \theta_A)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Seguindo o método que utilizamos para o divisor de feixes A , obtemos que o efeito do divisor de feixes B é descrito similarmente

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{f_1} \\ \hat{a}_{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_B}{2} & i \sin \frac{\theta_B}{2} \\ i \sin \frac{\theta_B}{2} & \cos \frac{\theta_B}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_B}{2} & -i \sin \frac{\theta_B}{2} \\ -i \sin \frac{\theta_B}{2} & \cos \frac{\theta_B}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{f_1} \\ \hat{a}_{f_2} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Considerando que agora o divisor de feixes B está presente no esquema da figura 4-1, o estado

Fóton	Spin-1/2
$ 1_2 0_3\rangle$	$ +z\rangle$
$ 0_2 1_3\rangle$	$ -z\rangle$
$ s'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1_2 0_3\rangle + i 0_2 1_3\rangle)$	$ +y\rangle = (+z\rangle + i -z\rangle)$
$ \bar{s}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(- 1_2 0_3\rangle + i 0_2 1_3\rangle)$	$ -y\rangle = (- +z\rangle + i -z\rangle)$

Tabela 4.1: Um fóton e spin-1/2

final é escrito, a partir do estado (4.9), como

$$\begin{aligned}
|\psi_{fin}\rangle &= \cos\frac{\theta_A}{2} \left(\cos\frac{\theta_B}{2} \hat{a}_{f_1}^\dagger + i \sin\frac{\theta_B}{2} \hat{a}_{f_2}^\dagger \right) |0_{f_1} 0_{f_2}\rangle + i \sin\frac{\theta_A}{2} \left(i \sin\frac{\theta_B}{2} \hat{a}_{f_1}^\dagger + \cos\frac{\theta_B}{2} \hat{a}_{f_2}^\dagger \right) |0_{f_1} 0_{f_2}\rangle \\
&= \cos\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right) |1_{f_1} 0_{f_2}\rangle + i \sin\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right) |0_{f_1} 1_{f_2}\rangle.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

A probabilidade do fóton passar pelo caminho AM_1BD_1 é dada por

$$P_{AM_1BD_1} = \cos^2\frac{\theta_A}{2} \cos^2\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right); \tag{4.27}$$

A probabilidade do fóton passar pelo caminho AM_1BD_2 é dada por

$$P_{AM_1BD_2} = \cos^2\frac{\theta_A}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right); \tag{4.28}$$

A probabilidade do fóton passar pelo caminho AM_2BD_1 é dada por

$$P_{AM_2BD_1} = \sin^2\frac{\theta_A}{2} \cos^2\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right); \tag{4.29}$$

E a probabilidade do fóton passar pelo caminho AM_2BD_2 é dada por

$$P_{AM_2BD_2} = \sin^2\frac{\theta_A}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right); \tag{4.30}$$

Notamos que

$$P_{AM_1BD_1} + P_{AM_1BD_2} + P_{AM_2BD_1} + P_{AM_2BD_2} = 1, \tag{4.31}$$

mas não há "probabilidade negativa" neste caso.

Com base na tabela 4.1 definimos os projetores

$$\hat{\Pi}_+^{(z)} = |1_2 0_3\rangle \langle 1_2 0_3|, \tag{4.32}$$

$$\hat{\Pi}_-^{(z)} = |0_2 1_3\rangle \langle 0_2 1_3|, \tag{4.33}$$

$$\hat{\Pi}_+^{(y)} = \frac{1}{2} (|1_2 0_3\rangle + i|0_2 1_3\rangle) (\langle 1_2 0_3| - i \langle 0_2 1_3|), \tag{4.34}$$

e

$$\hat{\Pi}_-^{(y)} = \frac{1}{2} (-|1_2 0_3\rangle + i|0_2 1_3\rangle) (-\langle 1_2 0_3| - i\langle 0_2 1_3|) \quad (4.35)$$

Temos agora, quatro pseudo-probabilidades: a pseudo-probabilidade conjunta do fóton passar pelo caminho AM_1B e estar em uma superposição $|s'\rangle$ é dada por

$$P_{++} = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{\Pi}_+^{(z)}, \hat{\Pi}_+^{(y)} \right\} \right\rangle_{\psi_{int}} ; \quad (4.36)$$

a pseudo-probabilidade conjunta do fóton passar pelo caminho AM_1B e estar em uma superposição $|\vec{s}'\rangle$ é dada por

$$P_{+-} = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{\Pi}_+^{(z)}, \hat{\Pi}_-^{(y)} \right\} \right\rangle_{\psi_{int}} ; \quad (4.37)$$

a pseudo-probabilidade conjunta do fóton passar pelo caminho AM_2B e estar em uma superposição $|s'\rangle$ é dada por

$$P_{-+} = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{\Pi}_-^{(z)}, \hat{\Pi}_+^{(y)} \right\} \right\rangle_{\psi_{int}} ; \quad (4.38)$$

e, finalmente, a pseudo-probabilidade conjunta do fóton passar pelo caminho AM_2B e estar em uma superposição $|\vec{s}'\rangle$ é dada por

$$P_{--} = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{\Pi}_-^{(z)}, \hat{\Pi}_-^{(y)} \right\} \right\rangle_{\psi_{int}} . \quad (4.39)$$

Assim, utilizando o estado (4.9), as pseudo-probabilidades ficam determinadas pela expressão

$$P_{\pm\pm} = \frac{1}{4} (1 \pm \cos \theta_A \pm \sin \theta_A) \quad (4.40)$$

ou

$$P_{++} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_A}{2} + \frac{1}{4} \sin \theta_A, \quad (4.41)$$

$$P_{+-} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_A}{2} - \frac{1}{4} \sin \theta_A, \quad (4.42)$$

$$P_{-+} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_A}{2} + \frac{1}{4} \sin \theta_A, \quad (4.43)$$

$$P_{--} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_A}{2} - \frac{1}{4} \sin \theta_A, . \quad (4.44)$$

As pseudo-probabilidades de (4.41) a (4.44) estão representadas graficamente nas figuras 4-2 e 4-3.

As probabilidades marginais são também muito interessantes: a probabilidade do fóton passar pelo caminho AM_1B é dada por

$$P_{++} + P_{+-} = \cos^2 \frac{\theta_A}{2}; \quad (4.45)$$

a probabilidade do fóton passar pelo caminho AM_2B é dada por

$$P_{-+} + P_{--} = \sin^2 \frac{\theta_A}{2}; \quad (4.46)$$

a probabilidade do fóton estar em uma superposição $|s'\rangle$ se escreve como

$$P_{++} + P_{-+} = \frac{1}{2} (1 + \sin \theta_A); \quad (4.47)$$

a probabilidade do fóton estar em uma superposição $|\bar{s}'\rangle$ se escreve como

$$P_{+-} + P_{--} = \frac{1}{2} (1 - \sin \theta_A); \quad (4.48)$$

Os gráficos das probabilidades marginais de (4.45) a (4.48) estão representados nas figuras 4-4 e 4-5. As marginais correspondem às probabilidades que podem ser medidas. As probabilidades (4.47) e (4.48) mostram que quando não sabemos por qual caminho o fóton passa, obtemos um padrão de interferência.

Ainda é importante observar que, mesmo sem a sofisticação de um avanço tecnológico de Ótica Quântica como um detector "qual caminho", é possível estudar as "probabilidades negativas". Utilizou-se um experimento simples e que requer apenas fontes de um único fóton, divisores de feixe, espelhos 100% refletivos e detectores de fótons.

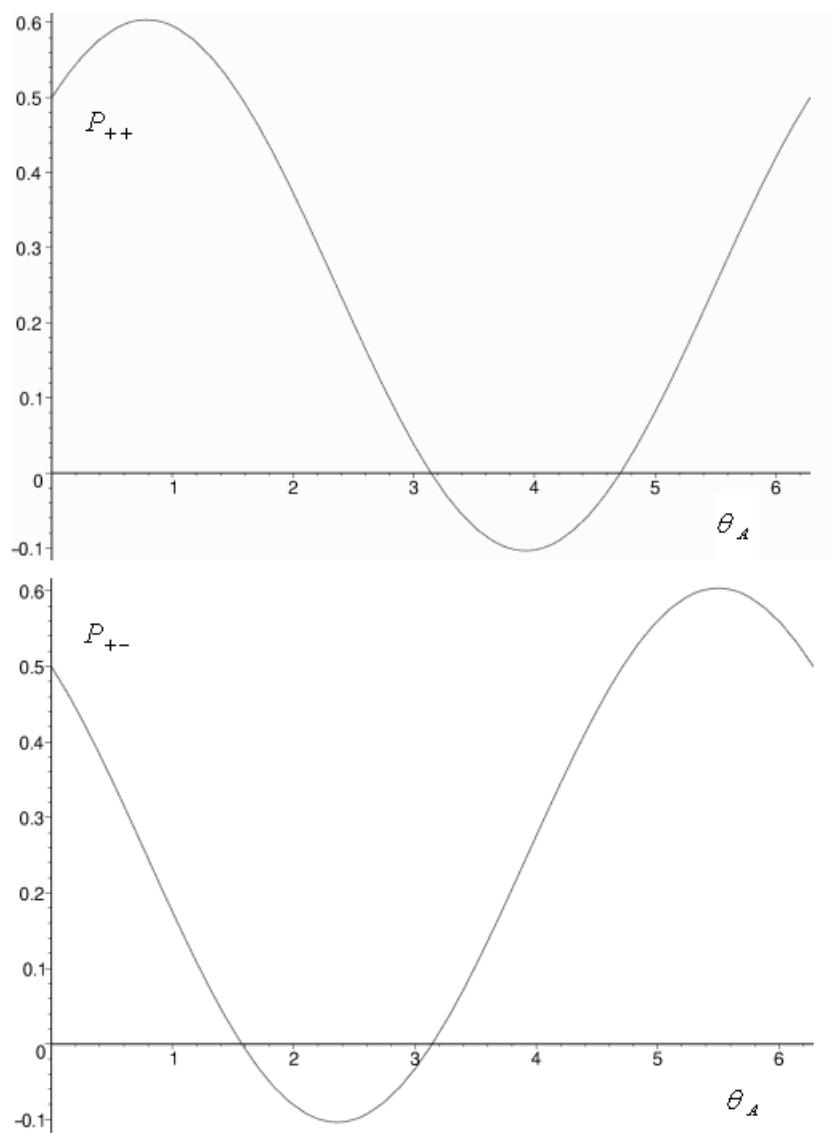


Figura 4-2: Pseudo-probabilidades para um único fóton.

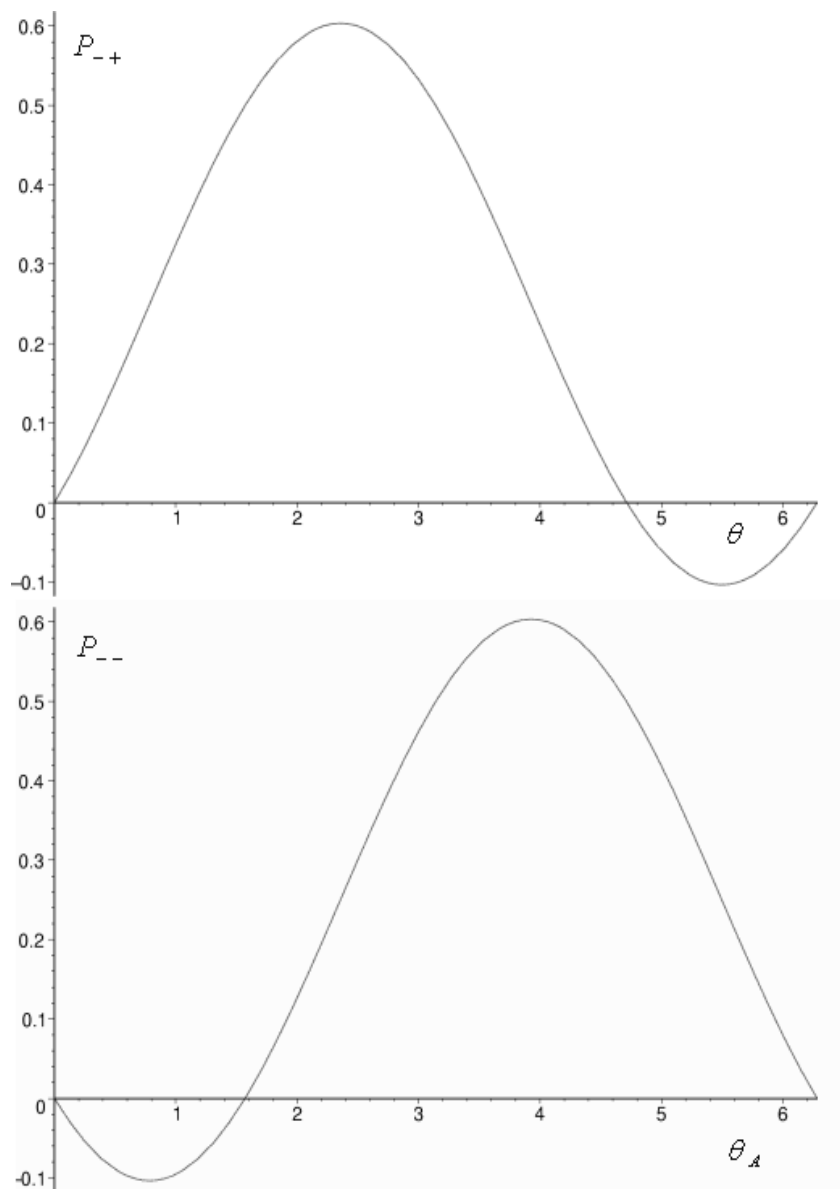


Figura 4-3: Pseudo-probabilidades para um único fóton.

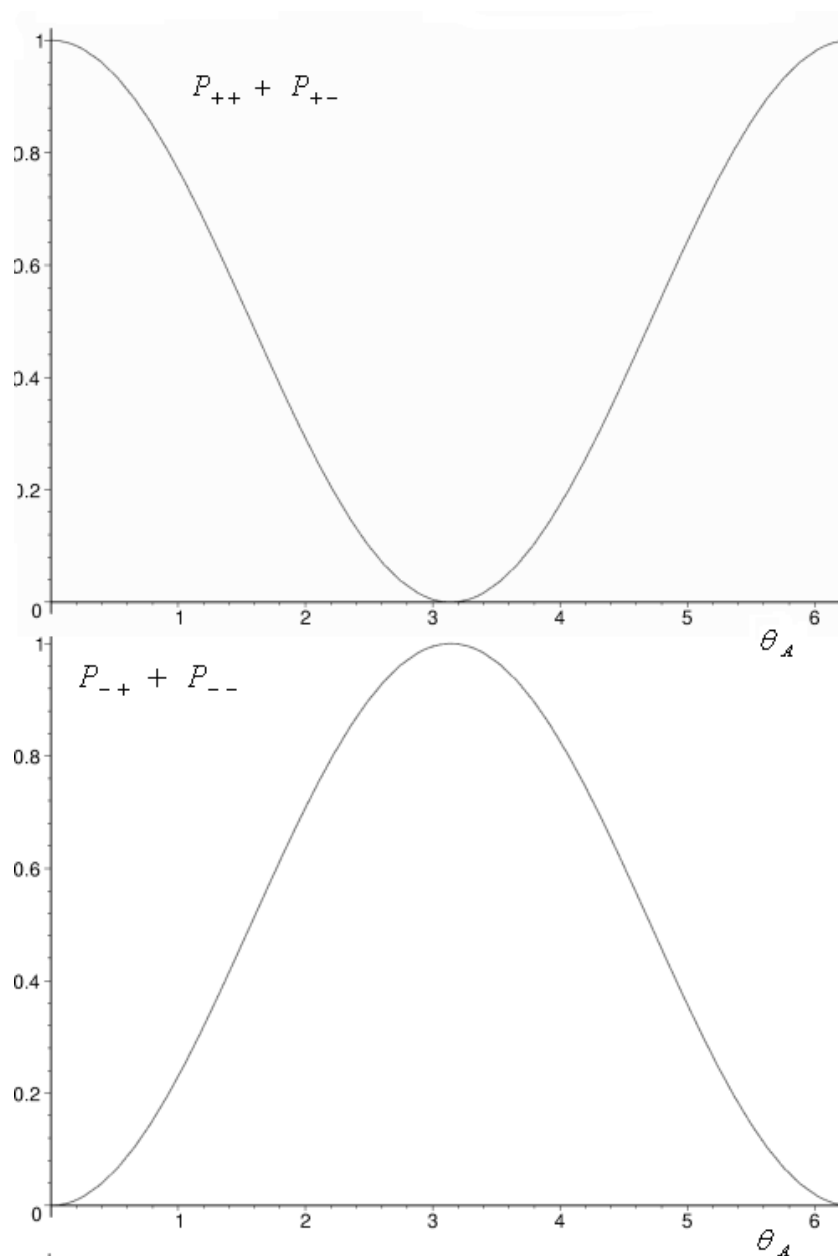


Figura 4-4: Probabilidades marginais para um único fóton.

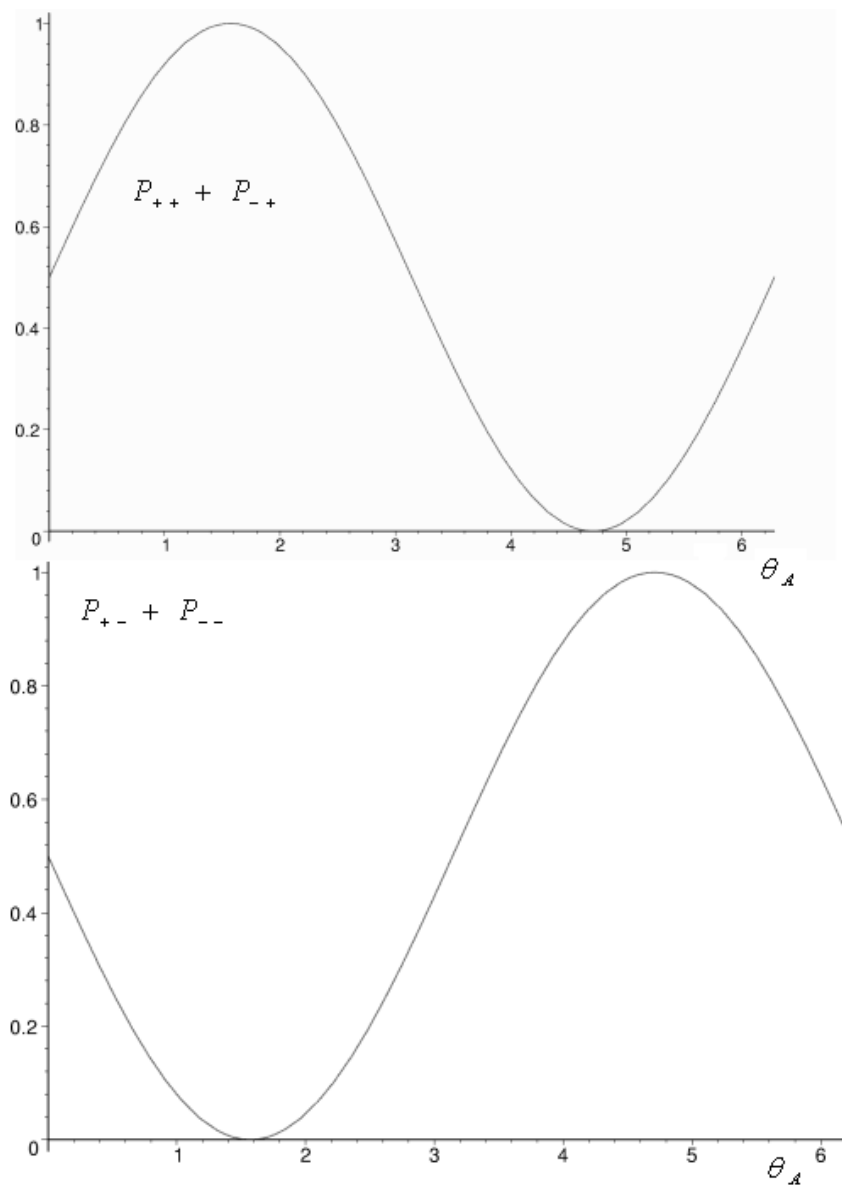


Figura 4-5: Probabilidades marginais para um único fóton.

4.1.1 Conclusões sobre o *gedankenexperiment* de Mach-Zehnder

Feynman diz³³ que o conceito de "probabilidade negativa" é tão natural quanto o conceito de número inteiro negativo. Ele diz que se uma pessoa A tem 8 maçãs e dá 10 maçãs para outra pessoa B, a pessoa A fica com -2 maçãs e se posteriormente a pessoa B repassa para a pessoa A 5 maçãs, esta fica com 3 maçãs, ou seja, $8 - 10 = -2$ e $-2 + 5 = 3$. Obviamente, um número negativo de maçãs é, aparentemente, absurdo. Mas, continua Feynman, se alguém se recusar a usar tal artifício matemático, que facilita incrivelmente nossos cálculos, permitindo manipular complexas equações algébricas, seria este alguém taxado de ter alguma deficiência mental.

O conceito de "probabilidade negativa" aparece em um contexto semelhante ao descrito no parágrafo anterior. Como um exemplo, análogo ao exemplo utilizado por LEIBFRIED, PFAU e MONROE³⁴ inspirados na idéia original de Feynman, propomos que o leitor imagine o *gedanken-*

experiment do lançamento simultâneo de duas "moedas quânticas". Os resultados possíveis são

$$\{Ca(1)Ca(2), Ca(1)Co(2), Co(1)Ca(2), Co(1)Co(2)\}, \quad (4.49)$$

onde $Ca(1)$ denota cara na moeda 1, $Co(1)$ denota coroa na moeda 1, $Ca(2)$ denota cara na moeda 2 e $Co(2)$ denota coroa na moeda 2. As probabilidades associadas não precisam ser iguais para cara e coroa pois a "moeda quântica" pode ser "viciada". Vamos supor os seguintes valores

$$P(Ca(1)) = P(Ca(1)) = P_+^{(1)} = \frac{1}{4}, \quad (4.50)$$

$$P(Co(1)) = P(Co(1)) = P_-^{(1)} = \frac{3}{4}, \quad (4.51)$$

$$P(Ca(2)) = P(Ca(2)) = P_+^{(2)} = \frac{1}{4} \quad (4.52)$$

e

$$P(Co(2)) = P(Co(2)) = P_-^{(2)} = \frac{3}{4}. \quad (4.53)$$

Quando as "probabilidades conjuntas" corresponderem ao produto das probabilidades individuais (eventos independentes), ou seja,

$$\begin{array}{l} Ca(1) \leftrightarrow +1 \quad Co(1) \leftrightarrow -1 \\ P_{++} = \frac{1}{16} \quad P_{-+} = \frac{3}{16} \quad Ca(2) \leftrightarrow +2, \\ P_{+-} = \frac{3}{16} \quad P_{--} = \frac{9}{16} \quad Co(2) \leftrightarrow -2 \end{array} \quad (4.54)$$

a correlação será igual a

$$P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} = \frac{1}{4}, \quad (4.55)$$

embora os eventos sejam independentes. Na matriz (4.54) observamos que as probabilidades marginais, que são obtidas somando-se as "probabilidades conjuntas" que estão na mesma linha ou na mesma coluna, correspondem exatamente às probabilidades individuais para sair cada face no lançamento das moedas, como, de fato, deveria ser. Se impusermos outro tipo de correlação (outro estado conjunto), digamos

$$P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} = -1, \quad (4.56)$$

obtemos a seguinte matriz de "probabilidades conjuntas":

$$\begin{aligned}
 Ca(1) &\leftrightarrow +1 & Co(1) &\leftrightarrow -1 \\
 P_{++} &= \frac{1}{4} & P_{-+} &= \frac{1}{2} & Ca(2) &\leftrightarrow +2 \\
 P_{+-} &= \frac{1}{2} & P_{--} &= -\frac{1}{4} & Co(2) &\leftrightarrow -2
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Na matriz (4.57) as somas diagonais indicam um estado anti-correlacionado (tipo estado EPR), pois a soma

$$P_{-+} + P_{+-} = 1 \tag{4.58}$$

informa que a probabilidade de sair coroa na moeda 1 e cara na moeda 2 ou sair cara na moeda 1 e coroa na moeda 2, é igual a 1, e a soma

$$P_{++} + P_{--} = 0 \tag{4.59}$$

informa que, conseqüentemente, não pode sair cara nas duas moedas ou coroa nas duas moedas.

Na matriz (4.57) ocorre que P_{-+} , por exemplo, é maior que o valor de $3/16$, pois ocorreu uma mudança da correlação que fez com que o valor $3/16$ fosse extrapolado, mas as marginais foram preservadas. Do ponto de vista clássico, a introdução de uma dependência dos eventos não deveria levar a esse tipo de mudança na correlação que leva a probabilidades conjuntas negativas. Assim, ocorre algo semelhante a dar 10 maçãs para alguém quando se tem apenas 8 maçãs. Como conseqüência, introduzimos "probabilidades negativas" a fim de preservar as probabilidades marginais.

O exemplo acima é muito artificial. O esquema com um fóton, que propomos, além de muito mais realista é muito instrutivo para se estudar o significado físico das "probabilidades negativas". Através da figura (4-6) vemos que estamos com uma configuração altamente simétrica; cada uma das regiões *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII* e *VIII* possuem área igual. Dessa forma, é possível demonstrar que a negatividade surge devido à dependência quântica dos eventos. Explicaremos a seguir o que queremos dizer com isso.

Considere que o espaço amostral descrito em (4.49) se refere agora a moedas clássicas, independentes e sem correlação. Então cada uma das probabilidades individuais de (4.50) a (4.53) será igual a $1/2$. Conseqüente qualquer probabilidade conjunta da tabela (4.54) será igual a $1/4$. Por outro lado, se uma das probabilidades é $\frac{1}{2}$ e se não há correlações, e se os eventos forem independentes, então a probabilidade conjunta poderá ter valor máximo igual a $\frac{1}{2}$. Um desvio desse valor indica, no mínimo, dependência dos eventos, no nosso caso, essa dependência é introduzida, no caso do sistema quântico descrito na figura (4-6), pela incompatibilidade dos observáveis associada à incerteza quântica e à superposição de estados; a correlação é zero assim

como para as moedas clássicas descritas no início deste parágrafo.

Então, existem regiões (*I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII* e *VIII*) classicamente proibidas pela independência dos eventos que são ilustradas na figura (4-6). Se a probabilidade ultrapassa o limite de 0,5 ocorre algo semelhante a dever maçãs. Logo, a cada região cujos valores da pseudo-probabilidade está acima de 0,5 corresponde uma região da pseudo-probabilidade complementar cujos valores estão abaixo de zero. Ocorrem não somente violações negativas, mas também violações positivas do conceito de probabilidade. As pseudo-probabilidades complementares são aquelas ligadas por uma dupla-seta no diagrama (4.60). Isto é o significado imaginado por Feynman para "probabilidades negativas", que era, no entanto, limitado por dificuldades conceituais⁶.

$$\begin{array}{ccc}
 P_{++} & \longleftrightarrow & P_{-+} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P_{+-} & \longleftrightarrow & P_{--}
 \end{array} \quad (4.60)$$

Por fim, vamos resumir o conceito físico de "probabilidades conjuntas":

...são as "probabilidades" de ocorrerem eventos incompatíveis conjuntos que, além de descrever o estado quântico correspondente, guardam as probabilidades marginais e que contém, em seu conjunto, toda a informação que pode ser extraída desse estado quântico. Eventualmente podem ser negativas, expressando violações da concepção clássica de probabilidade.

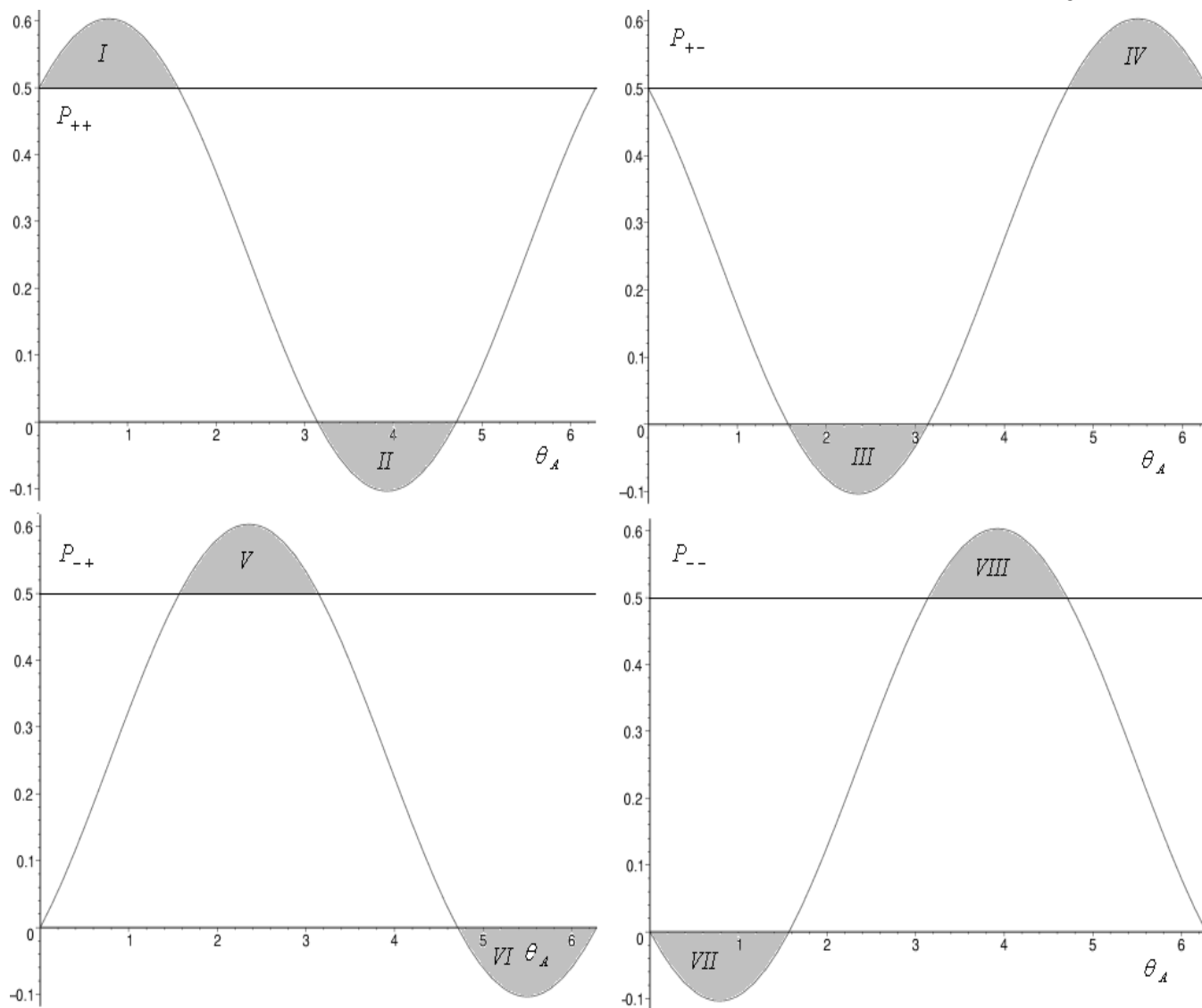


Figura 4-6: Pseudo-probabilidades mostrando as regiões proibidas classicamente (regiões preenchidas com cor cinza).

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

O conceito de função distribuição de "probabilidades" permite fazer uma representação matemática e uma representação gráfica dos estados quânticos discretos. Estas representações, quando reconstruídas, chamam-se tomografia quântica.

Tais funções distribuição, quando construídas para sistemas do tipo qubits, apresentam coeficientes que são interpretados como "probabilidades negativas". São probabilidades conjuntas associadas a observáveis incompatíveis e que não podem ser medidas diretamente.

A pergunta imediata que se faz, é: qual o significado físico das "probabilidades conjuntas", já que elas podem ser negativas e não podem ser medidas diretamente? Respondemos esta pergunta da seguinte forma: como essas "probabilidades" se referem a observáveis incompatíveis, elas não podem ser medidas, por medições simultâneas sobre os dois observáveis, com uma precisão maior que aquela estabelecida pela relação de incerteza de Heisenberg. Ao compararmos um ponto de vista clássico para eventos totalmente independentes, a "probabilidade conjunta" quântica não poderia ultrapassar o maior valor esperado para o experimento onde não há quaisquer correlações ou dependência de eventos. No entanto, vemos que a "probabilidades conjuntas" quântica podem ultrapassar o maior valor esperado para eventos independentes, mas, em contrapartida, tem regiões negativas, preservando a positividade das probabilidades marginais, que, por ventura, podem ser medidas e contém a informação para reconstruir as pseudo-probabilidades. Ocorre algo parecido com um "saldo negativo de probabilidade por ultrapassar o valor máximo permitido". A negatividade traduz o efeito do caráter quântico sobre o ponto de vista clássico adotado no conceito de pseudo-probabilidades, ou seja, a negatividade expressa o caráter quântico do sistema.

Então é por razões históricas que as "probabilidades negativas" são criticadas. Mesmo os números inteiros negativos enfrentaram muita recusa até finalmente encontrarmos aplicações para eles. Depois surgiram os números complexos que, atualmente, são largamente usados, por exemplo, na Engenharia Elétrica e são também, absolutamente indispensáveis na Mecânica Quântica.

Deve ser notado que neste trabalho não definimos observáveis de dois ou mais qubits que não comutam entre si. Poderia ser feito, mas acredita-se que isto apenas complica e não traz grandes novidades. Para 2-qubits¹⁵, por exemplo, as direções de projeção \hat{r} , para os projetores, pertencem ao \mathbb{R}^{15} . A forma que utilizamos é suficiente para caracterizar qualquer sistema discreto.

Uma idéia possível de ser abordada, em um trabalho futuro, é baseada no fato da Mecânica Quântica ter, no seu fundamento, a não comutatividade de observáveis como seu único mistério. Isto, então, é válido em qualquer sistema quântico. Sendo assim, mesmo naqueles sistemas ditos emaranhados a não comutatividade estará presente, pois a Mecânica Quântica não pode se afastar de suas origens. Estudar qual é a relação exata existente talvez possibilite extrair um critério de separabilidade para sistemas mistos (um problema em aberto), baseado simplesmente em procurar conjuntos de observáveis que não comutam entre si, ou que comutam "um pouco mais" ou "um pouco menos". "Comutar menos", significa que a incerteza mínima está próxima de seu valor máximo, e "comutar mais", significa que a incerteza mínima está próxima de zero. Quando "comutar mais", deverá haver uma diminuição da negatividade das "probabilidades negativas" e uma diminuição da violação das desigualdades de Bell, e vice-versa.

Outro fato que pode ser estudado futuramente, diz respeito ao desenvolvimento de uma lógica Booleana não comutativa baseada nas propriedades dos projetores e das pseudo-probabilidades. Fizemos alguns cálculos e observamos que o produto de dois projetores é também um projetor, mas que projeta em uma direção complexa (na verdade, isto corresponde às propriedades das matrizes de Pauli). Por outro lado, o comutador e o anticomutador não são projetores. Poderiam ser explorados, tanto o significado para a Lógica Quântica, quanto o significado físico desses fatos.

Apêndice 1: Quantização do campo eletromagnético

Das equações de Maxwell para o campo eletromagnético³⁵ no vácuo obtém-se (utilizando o calibre de Coulomb) a equação de onda

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.1)$$

onde \vec{A} é o potencial vetor. A solução geral da equação de onda é

$$\vec{A}_{\vec{k}}(\hat{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}} q_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (5.2)$$

onde $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}$ é a polarização e $q_{\vec{k}}(t)$ é amplitude dos modos de vibração (esta última eventualmente pode ser complexa).

É interessante lembrar também que é o calibre de Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.3)$$

que implica na transversalidade do campo eletromagnético

$$k_x + k_y + k_z = \vec{k} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}} = 0. \quad (5.4)$$

A condição de transversalidade permite dois estados de polarização linearmente independentes $\hat{\epsilon}_{\vec{k},\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) para cada vetor de onda \vec{k} . É fácil ver que $\hat{\epsilon}_{\vec{k},\alpha} = \hat{\epsilon}_{-\vec{k},\alpha}$ (Figura 5-1).

Seja $\lambda_m = \left(\vec{k}, \alpha \right)_m$. O problema dinâmico presente pode ser quantizado identificando-se q_{λ} e p_{λ} com operadores que obedecem as relações de comutação

$$[\hat{q}_{\lambda}, \hat{p}_{\lambda'}] = i\hbar \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (5.5)$$

$$[\hat{q}_{\lambda}, \hat{q}_{\lambda'}] = [\hat{p}_{\lambda}, \hat{p}_{\lambda'}] = 0, \quad (5.6)$$

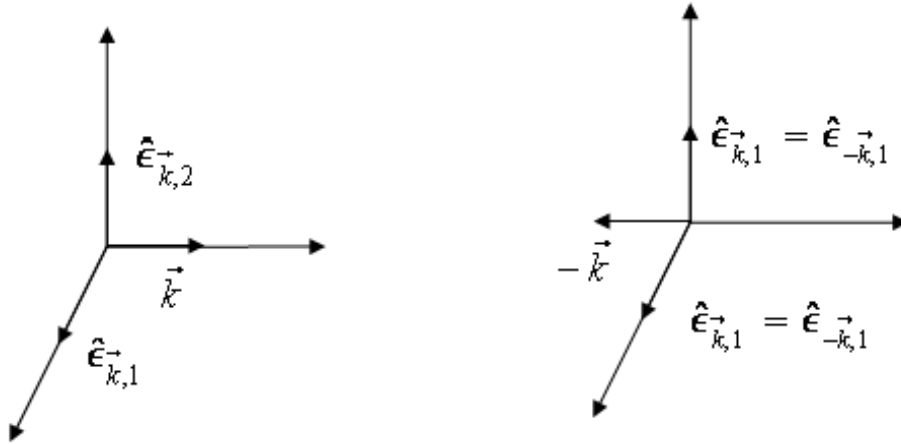


Figura 5-1: Transversalidade do campo eletromagnético.

É conveniente fazer uma transformação canônica (que preserva as relações de comutação) para o operador \hat{a}_λ :

$$\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} = \frac{1}{\sqrt{2m_\lambda \hbar \omega_\lambda}} (m_\lambda \omega_\lambda \hat{q}_\lambda + i\hat{p}_\lambda) \quad (5.7)$$

e seu para adjunto com $\lambda \rightarrow -\lambda$, $\hat{a}_{-\lambda}^\dagger$:

$$\hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t} = \frac{1}{\sqrt{2m_\lambda \hbar \omega_\lambda}} (m_\lambda \omega_\lambda \hat{q}_\lambda - i\hat{p}_\lambda), \quad (5.8)$$

onde foi utilizado $\hat{q}_{-\lambda}^\dagger = \hat{q}_\lambda$ e $\hat{p}_{-\lambda}^\dagger = \hat{p}_\lambda$.

Ou, equivalentemente

$$\hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_\lambda \omega_\lambda}} (\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + \hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t}), \quad (5.9)$$

$$\hat{p}_\lambda = -i\sqrt{\frac{m_\lambda \hbar \omega_\lambda}{2}} (\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} - \hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t}). \quad (5.10)$$

Assim, o potencial vetor é escrito como

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \sum_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_\lambda q_\lambda e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \sum_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2m_\lambda \omega_\lambda}} (\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + \hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

e fazendo $m_\lambda = 1$, obtém-se

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_\lambda}} \hat{\epsilon}_\lambda (\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + \hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (5.12)$$

Utilizando a fórmula clássica de energia do campo eletromagnético

$$U = \frac{1}{8\pi} \int dV \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \wedge \vec{A})^2 \right] \quad (5.13)$$

obtém-se o hamiltoniano do campo da radiação livre

$$\hat{H}_f = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} \left(\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.14)$$

Pode-se verificar que

$$i\hbar \dot{\hat{p}}_{\lambda} = [\hat{p}_{\lambda}, \hat{H}_f], \quad (5.15)$$

$$i\hbar \dot{\hat{q}}_{\lambda} = [\hat{q}_{\lambda}, \hat{H}_f], \quad (5.16)$$

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_{\lambda}^{\dagger} = [\hat{a}_{\lambda}^{\dagger}, \hat{H}_f] = -\hbar \omega_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}. \quad (5.17)$$

Logo,

$$\dot{\hat{a}}_{\lambda}^{\dagger} = i\omega_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \quad (5.18)$$

ou

$$\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} = \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(0) e^{i\omega_{\lambda} t} \quad \text{e} \quad \hat{a}_{\lambda} = \hat{a}_{\lambda}(0) e^{-i\omega_{\lambda} t} \quad (5.19)$$

assim \hat{H}_f não depende do tempo.

O operador número de ocupação de fótons no modo λ é

$$\hat{n}_{\lambda} = \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} \quad (5.20)$$

e é óbvio que

$$[\hat{n}_{\lambda}, \hat{H}_f] = 0. \quad (5.21)$$

Há conservação do número de fótons e também existe uma base de auto-vetores simultâneos para \hat{n}_{λ} e \hat{H}_f : Ou seja,

$$\hat{H}_f |n_{\lambda}\rangle = E_{n_{\lambda}} |n_{\lambda}\rangle \quad (5.22)$$

e se,

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle = |n_{\lambda}\rangle \Rightarrow |\alpha, t_0 = 0; t\rangle = \exp\left(\frac{-i\hat{H}_f t}{\hbar}\right) |\alpha, t_0 = 0\rangle, \quad (5.23)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0 = 0; t\rangle &= \sum_{\lambda'} |n_{\lambda'}\rangle \langle n_{\lambda'} | n_{\lambda}\rangle \exp\left(\frac{-iE_{n_{\lambda'}} t}{\hbar}\right) \\ &= |n_{\lambda}\rangle \exp\left(\frac{-iE_{n_{\lambda}} t}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

então se o sistema é inicialmente um auto-estado simultâneo de \hat{n}_{λ} e \hat{H}_f , ele continua assim todo o tempo. O máximo que pode acontecer é a modulação de fase $\exp\left(\frac{-iE_{n_{\lambda}} t}{\hbar}\right)$. É nesse sentido que um observável compatível com \hat{H}_f é uma constante do movimento; e se esse observável for \hat{n}_{λ} , o número de fótons é constante. Pela equação do movimento de Heisenberg tem-se

$$i\hbar\dot{\hat{n}}_{\lambda} = [\hat{n}_{\lambda}, \hat{H}_f] = 0. \quad (5.25)$$

Quando existirem vários modos cujos números de fótons se conservam sob \hat{H}_f existirá uma base do tipo

$$\{|n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_n}, \dots\rangle\} \quad (5.26)$$

com

$$\hat{n}_{\lambda_m} |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle = n_{\lambda_m} |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle \quad (5.27)$$

e

$$\hat{H}_f |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle = \left(\sum_l \hbar\omega_{\lambda_l} \left(n_{\lambda_l} + \frac{1}{2}\right)\right) |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle \quad (5.28)$$

e $n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots$ são o número médio de fótons em cada modo. O operador \hat{a}_{λ_m} é o operador de aniquilação de um fóton no modo $\lambda_m = (\vec{k}, \alpha)_m$ e $\hat{a}_{\lambda_m}^{\dagger}$ é o operador de criação de um fóton no modo $\lambda_m = (\vec{k}, \alpha)_m$.

Pode-se verificar que

$$[\hat{a}_{\lambda}, \hat{n}_{\lambda}] = \delta_{\lambda\lambda} \hat{a}_{\lambda} \quad (5.29)$$

e

$$[\hat{a}_{\lambda}^{\dagger}, \hat{n}_{\lambda'}] = -\delta_{\lambda\lambda'} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \quad (5.30)$$

Considerando um único modo

$$\hat{n}^{\dagger} = \hat{n}, \quad (5.31)$$

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (5.32)$$

$$\hat{n} (\hat{a}^{\dagger} |n\rangle) = (\hat{n}\hat{a}^{\dagger}) |n\rangle = (\hat{a}^{\dagger}\hat{n} + \hat{a}^{\dagger}) |n\rangle = (n+1) (\hat{a}^{\dagger} |n\rangle), \quad (5.33)$$

logo $(n+1)$ é autovalor do estado $\hat{a}^{\dagger} |n\rangle$.

Analogamente,

$$\hat{n}(\hat{a}|n\rangle) = (\hat{n}\hat{a})|n\rangle = (n-1)(\hat{a}|n\rangle), \quad (5.34)$$

logo, $(n-1)$ é o autovalor do estado $\hat{a}|n\rangle$, assim pode-se escrever

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = C_+|n+1\rangle \quad (5.35)$$

e

$$\hat{a}|n\rangle = C_-|n-1\rangle, \quad (5.36)$$

mas

$$|C_+|^2 = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = n+1 \quad (5.37)$$

e

$$|C_-|^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n, \quad (5.38)$$

logo, a menos de uma fase

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (5.39)$$

e

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (5.40)$$

Além disso,

$$n = \langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \|\hat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0 \quad (5.41)$$

e n não pode ser não inteiro (pois o número de fótons é finito).

O vácuo para um determinado modo é

$$|0\rangle = \hat{a}|1\rangle \quad (5.42)$$

e

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (5.43)$$

é o vetor nulo.

Um estado genérico do número de fótons é

$$|n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle = |n_{\lambda_1}\rangle |n_{\lambda_2}\rangle \dots |n_{\lambda_m}\rangle \dots \quad (5.44)$$

e o estado de vácuo é

$$|0\rangle = |0_{\lambda_1}\rangle |0_{\lambda_2}\rangle \dots |0_{\lambda_m}\rangle \dots \quad (5.45)$$

O estado mais geral possível é escrito como

$$|n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, n_{\lambda_3}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle = \prod_{\lambda_l} \frac{(\hat{a}_{\lambda_l}^\dagger)^{n_{\lambda_l}}}{\sqrt{n_{\lambda_l}}} |0\rangle. \quad (5.46)$$

Este estado é simétrico em relação à troca de m e n entre si:

$$\hat{a}_{\lambda_m}^\dagger \hat{a}_{\lambda_n}^\dagger |0\rangle = \hat{a}_{\lambda_n}^\dagger \hat{a}_{\lambda_m}^\dagger |0\rangle, \quad (5.47)$$

o que é consistente com a estatística de Bosi-Einstein.

O momento angular é

$$\vec{J} = \frac{1}{8\pi c} \int dV \vec{r} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B} - \vec{B} \wedge \vec{E}) \quad (5.48)$$

e pode-se escrever

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B}) &= \vec{E} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - (\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{B} \\ &= \vec{E} (\vec{r} \cdot \nabla \wedge \vec{A}) - (\vec{r} \cdot \vec{E}) (\nabla \wedge \vec{A}) \end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$\begin{aligned} -(\vec{r} \cdot \vec{E}) (\nabla \wedge \vec{A}) &= \nabla (\vec{r} \cdot \vec{E}) \wedge \vec{A} - \nabla \wedge [(\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{A}] \\ &= (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} \wedge \vec{A} + \vec{E} \wedge \vec{A} - \nabla \wedge [(\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{A}] \end{aligned} \quad (5.50)$$

logo

$$\vec{r} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{E} (\vec{r} \cdot \nabla \wedge \vec{A}) + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} \wedge \vec{A} - \nabla \wedge [(\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{A}] + \vec{E} \wedge \vec{A}. \quad (5.51)$$

Os três primeiros termos da expressão 5.51 têm dependência explícita em \vec{r} enquanto que o último não tem.

A parte independente de \vec{r} tem a seguinte contribuição para o momentum angular:

$$\hat{I} = \frac{1}{8\pi c} \int dV [\vec{E} \wedge \vec{A} + h.c.]. \quad (5.52)$$

Esta parte representa a contribuição das propriedades intrínsecas do campo ao momento angular

total (spin do campo). Utilizando as definições

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_{\lambda} q_{\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (5.53)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.54)$$

Obtém-se

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\lambda} \hat{\epsilon}_{\lambda} p_{-\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (5.55)$$

onde foi utilizado o fato de que

$$\hat{p}_{-\lambda}^{\dagger} = \hat{p}_{\lambda} \text{ e } \hat{p}_{\lambda}^{\dagger} = \hat{p}_{\lambda} \Rightarrow \hat{p}_{-\lambda}^{\dagger} = \hat{p}_{\lambda}^{\dagger} \Rightarrow \hat{p}_{-\lambda} = \hat{p}_{\lambda} \quad (5.56)$$

e

$$\vec{E} \wedge \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{4\pi c^2}{V} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{\epsilon}_{\lambda} \wedge \hat{\epsilon}_{\lambda'} \hat{p}_{-\lambda} q_{\lambda'} e^{i\vec{r}\cdot(\vec{k}+\vec{k}')}. \quad (5.57)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int (\vec{E} \wedge \vec{A}) dV &= -\frac{4\pi c}{V} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{\epsilon}_{\lambda} \wedge \hat{\epsilon}_{\lambda'} \hat{p}_{-\lambda} q_{\lambda'} V \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \\ &= -4\pi c \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \wedge \hat{\epsilon}_{-\vec{k}\alpha'} \hat{p}_{-\vec{k}\alpha} q_{-\vec{k}\alpha'} \end{aligned} \quad (5.58)$$

note-se que o produto vetorial se anula se $\alpha = \alpha'$, logo

$$\int (\vec{E} \wedge \vec{A}) dV = -4\pi c \sum_{\vec{k}} [\hat{\epsilon}_{\vec{k}1} \wedge \hat{\epsilon}_{-\vec{k}2} \hat{p}_{-\vec{k}1} q_{-\vec{k}2} + \hat{\epsilon}_{\vec{k}2} \wedge \hat{\epsilon}_{-\vec{k}1} \hat{p}_{-\vec{k}2} q_{-\vec{k}1}] \quad (5.59)$$

no segundo termo trocando $-\vec{k} \rightarrow \vec{k}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int (\vec{E} \wedge \vec{A}) dV &= -4\pi c \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}1} \wedge \hat{\epsilon}_{-\vec{k}2} (\hat{p}_{-\vec{k}1} q_{-\vec{k}2} - p_{\vec{k}2} q_{\vec{k}1}) \\ &= -4\pi c \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}1} \wedge \hat{\epsilon}_{\vec{k}2} (\hat{p}_{-\vec{k}1} q_{-\vec{k}2} - p_{\vec{k}2} q_{\vec{k}1}) \end{aligned} \quad (5.60)$$

e no primeiro termo trocando-se $-\vec{k} \rightarrow \vec{k}$, obtém-se

$$\int (\vec{E} \wedge \vec{A}) dV = -4\pi c \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}1} \wedge \hat{\epsilon}_{\vec{k}2} (\hat{p}_{\vec{k}1} q_{\vec{k}2} - p_{\vec{k}2} q_{\vec{k}1}). \quad (5.61)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\vec{k}_1} q_{\vec{k}_2} - p_{\vec{k}_2} q_{\vec{k}_1} &= -\frac{i\hbar}{2} \left[\left(\hat{a}_{-\vec{k}_1} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger e^{i\omega t} \right) \left(\hat{a}_{\vec{k}_2} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-\vec{k}_2}^\dagger e^{i\omega t} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\hat{a}_{-\vec{k}_2} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger e^{i\omega t} \right) \left(\hat{a}_{\vec{k}_1} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-\vec{k}_1}^\dagger e^{i\omega t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Logo,

$$\int \left(\vec{E} \wedge \vec{A} \right) dV = -4\pi i\hbar c \sum_{\vec{k}} \left(\hat{\epsilon}_{\vec{k}_1} \wedge \hat{\epsilon}_{\vec{k}_2} \right) \left(\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_1} - \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_2} \right). \quad (5.63)$$

Pode-se verificar que este operador é hermitiano, assim a simetrização é dispensável.

Agora pode-se escrever

$$\hat{I} = \frac{1}{4\pi c} \int \left(\vec{E} \wedge \vec{A} \right) dV = i\hbar \sum_{\vec{k}} \hat{k} \left(\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_1} - \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_2} \right), \quad \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \hat{\epsilon}_{\vec{k}_1} \wedge \hat{\epsilon}_{\vec{k}_2}. \quad (5.64)$$

(no caso de $\hat{\epsilon}_{\vec{k}_1}$ ser ortogonal a $\hat{\epsilon}_{\vec{k}_2}$).

O operador \hat{I} não é diagonal na representação em que as polarizações são descritas pelos vetores $\hat{\epsilon}_{\vec{k}_1}$ e $\hat{\epsilon}_{\vec{k}_2}$. \hat{I} aniquila fótons em uma dada polarização linear e cria em outra polarização linear.

Pode-se diagonalizar \hat{I} por uma transformação canônica:

$$\hat{a}_{\vec{k}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1} + \hat{b}_{\vec{k}_2} \right), \quad (5.65)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}_2} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1} - \hat{b}_{\vec{k}_2} \right), \quad (5.66)$$

ou

$$\hat{b}_{\vec{k}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\vec{k}_1} - i\hat{a}_{\vec{k}_2} \right), \quad (5.67)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\vec{k}_1} + i\hat{a}_{\vec{k}_2} \right). \quad (5.68)$$

Também temos,

$$\hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger + \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \right), \quad (5.69)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger - \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \right), \quad (5.70)$$

ou

$$\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger + i\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger \right), \quad (5.71)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger - i\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger \right), \quad (5.72)$$

logo,

$$\hat{I} = \hbar \sum_{\vec{k}} \hat{k} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_1} - \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_2} \right) = \sum_{\vec{k}} \hat{I}_{\vec{k}}, \quad (5.73)$$

onde

$$\hat{I}_{\vec{k}} = \hbar \hat{k} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_1} - \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_2} \right) \quad (5.74)$$

A expressão (5.74) se refere a dois modos (cada um com uma polarização linear) e conta o número de fótons em cada modo.

Referências Bibliográficas

- [1] FEYNMAN, R. P.; Hibbs A. R. **Quantum Machanics and Path Integrals**. 1. ed. McGraw-Hill, 1965.
- [2] FEYNMAN, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, Matthew. **The Feynman Lectures on Physics III**. 1. ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.
- [3] SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Addison-Wesley, 1994 (Editado por San Fu Tuan).
- [4] SCULLY, M. O.; MAN'KO, V. I.; CUNHA, M. O. Terra. **Quasiprobability and Probability Distribution for Spin 1/2 States**. Foundations of Physics Letters, v. 14, No. 2, p. 103-117 (2001).
- [5] COHEN, L.; SCULLY, MARLAN O. **Joint Wigner Distribution for Spin-1/2 Paticles**. Foundations of Physics, v. 16, No. 4, p.295-310 (1986).
- [6] SCULLY, Marlan O.; WALTHER, Herbert; SCHLEICH, Wolfgang. **Feynmans's approach to negative probability in quantum mechanics**. Phys. Rev. A, v. 49, p. 1562–1566 (1994).
- [7] HILLERY, M.; SCULLY, M. O.; et al. **Distribution Functions in Physics: Fundamentals**. Physics Reports, v. 106, No. 3, p. 121-167 (1984).
- [8] SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. Suhail. **Quantum optics**. 1 ed. Cambridge university Press, 1997.
- [9] FEYNMAN, Richard P. **Simulating Physics with Computers**. International Journal of Theoretical Physics, v. 21, Nos. 6/7, p. 467-488 (1982).
- [10] FEYNMAN, R. P. **Feynman and Computation: Exploring Limits of Computers**. Westview press, 1999, (Editado por Anthony J. G. Hey).
- [11] JAYNES, E. T. **Information Theory and Statistical Mechanics**. Phys. Rev., v. 106, p. 620-630 (1957).

- [12] JAYNES, E. T. **Information Theory and Statistical Mechanics II**. Phys. Rev., v.108, p. 171-190 (1957).
- [13] BLUM, Karl. **Density Matrix Theory and Applications**. 2. ed. New York and London: Plenum Press, 1989.
- [14] NIELSEN, Michael A.;CHUANG, Isaac L. **Quantum Computation and Quantum Information**. 1. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2000.
- [15] KIMURA, Gen; KOSSAKOWSKI, A. **The Bloch-Vector Space for N-Level Systems: the Spherical-Coordinate Point of View**. Open Sys. & Information Dyn. 12, p. 207-229 (2005).
- [16] BOURDON, P. S.; WILLIAMS, H. T. **Unital quantum operations on the Bloch ball and Bloch region**. Phys. Rev. A, v. 69, p. 022314 (2004).
- [17] LOBO, A. C.; NEMES, M. C. **A coordinate independent formulation of the Weyl-Wigner transform theory**. Physica A, v. 311, p. 111-129 (2002).
- [18] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. **Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?** Physical Review, v. 47, p. 777-780 (1935).
- [19] BOHR, N. **Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?** Physical Review, v. 48, p. 696-702 (1935).
- [20] ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. **Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities**. Physical Review Letters, v. 49, No. 2, p. 91-94 (1982).
- [21] ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. **Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers**. Physical Review Letters, v. 49, No. 25, p. 1804-1807 (1982).
- [22] PITOWSKY, Itamar. **Quantum Probability - Quantum Logic**. Lecture Notes in Physics, v. 321. Springer-Verlag (1989).
- [23] EJNISMAN, R.; NUSSENZVEIG, P. **Átomos de Rydberg: Estudos Quânticos com Átomos "Quase-Clássicos"**. Revista Brasileira do Ensino de Física, v. 19, No. 1, p. 90-101 (1997).

- [24] MESCHÉDE, D.; WALTHER, Herbert; MÜLLER, G. **One-Atom Maser**. Physical Review Letters, v. 54, No. 6, p. 551-554 (1985).
- [25] SCULLY, Marlan O.; WALTHER, Herbert. **Quantum optical test of observation and complementarity in quantum mechanics**. Physical Review A, v. 39, No. 10, p. 5229-5236 (1989).
- [26] SCULLY, M. O.; ENGLERT, Berthold-Georg; WALTHER, Herbert. **Quantum optical tests of complementarity**. Nature, v. 351, p. 111-116 (1991).
- [27] GERRY, Christopher C. **Complementarity and quantum erasure with dispersive atom-field interactions**. Phys. Rev. A (Brief Reports), v. 53, No. 2, p. 1179-1182 (1996).
- [28] MEYER, Georg M.; SCULLY, Marlan O., WALTHER, Herbert. **Quantum theory of the maser. I. General theory**. Phys. Rev. A, v. 56., No. 5, p. 4142-4152 (1997).
- [29] KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. J. **A scheme for efficient quantum computation with linear optics**. Nature, v. 409, p. 46-52 (2001).
- [30] LEE, Hwang; KOK, P.; CERF, et. al. **Linear optics and projective measurements alone suffice to create large-photon-number path entanglement**. Phys. Rev. A 65, p. 030101 (2002).
- [31] ASPECT, Alain; GRANGIER, Philippe. **Wave-Particle Duality for Single Photons**. Hyperfine Interactions, v. 37, p. 3-18 (1987).
- [32] HELLMUTH, T.; WALTHER, H.; SCHLEICH, W. **Delayed-choice experiment in quantum interference**. Phys. Rev. A, v. 35, p. 2532-2541 (1987).
- [33] FEYNMAN, R. P. **"Negative Probabilities" in Quantum Mechanics: Essays in Honor of David Bohm**, B. J. Hiley, F. D. Peat, eds. Routledge&Kegan Paul, p. 235, London (1987).
- [34] LEIBFRIED, D.; PFAU, T.; MONROE, C. **Shadows and Mirrors: Reconstructing Quantum States of Atom Motion**. Physics Today, Abril, 22-28 (1998).
- [35] MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical coherence and quantum optics**. 1. ed. Cambridge University Press, 1995.