

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

A Equação de Yang-Baxter para Modelos de Vértices com Três Estados

Rodrigo Alves Pimenta

Orientador: Prof. Dr. Márcio J. Martins

Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal de São Carlos como
requisito parcial à obtenção do título de
Mestre em Física.

São Carlos

Março - 2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

P644ey

Pimenta, Rodrigo Alves.

A equação de Yang-Baxter para modelos de vértices com três estados / Rodrigo Alves Pimenta. -- São Carlos : UFSCar, 2011.

62 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Física matemática. 2. Yang-Baxter (Equação). 3. Modelos integráveis. 4. Ansatz de Bethe. I. Título.

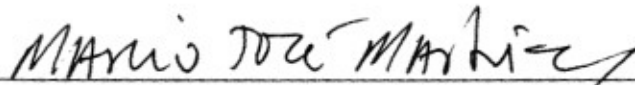
CDD: 530.15 (20^a)

RODRIGO ALVES PIMENTA

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovado em: 02 de março de 2011

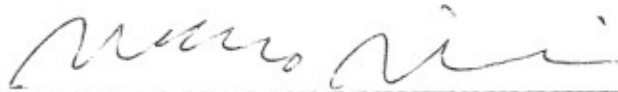
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcio José Martins (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - DF



Prof. Dr. Francisco Castilho Alcaraz
Universidade de São Paulo - IFSC



Prof. Dr. Marco Moriconi
Universidade Federal Fluminense - IF

*Aos meus pais, Edimar e Ana Maria, aos meus irmãos, Rafael e Mariana, e à minha
esposa, Mariana.*

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo apoio incondicional durante toda minha vida.

À minha amada Mariana, pelo incentivo e inspiração, fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao professor Márcio, pela orientação e pelas oportunidades a mim oferecidas.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos as possíveis soluções da equação de Yang-Baxter para modelos de dezenove vértices invariantes por simetria de paridade e reversão temporal do ponto de vista da geometria algébrica. Determinamos a forma das curvas algébricas que vinculam os respectivos pesos de Boltzmann e descobrimos que suas estruturas são universais. Com tal observação foi possível classificar, de uma maneira unificada, as variedades algébricas integráveis em quatro diferentes famílias, três delas já conhecidas e uma delas correspondendo a um novo modelo de dezenove vértices. A introdução de um parâmetro espectral nos pesos de Boltzmann é feita através da parametrização da curva algébrica fundamental, que é uma cônica. A diagonalização da matriz de transferência do novo modelo de vértices bem como suas propriedades no limite termodinâmico são discutidas. Mencionamos ainda uma curiosa conexão entre a forma da curva principal e a natureza das excitações das Hamiltonianas de spin-1 associadas aos modelos de vértices.

Palavras-chave: Equação de Yang-Baxter; Modelos Integráveis na Rede; Ansatz de Bethe

Abstract

In this work we study the solutions of the Yang-Baxter equation associated to nineteen vertex models invariant by the parity-time symmetry from the perspective of algebraic geometry. We determine the form of the algebraic curves constraining the respective Boltzmann weights and found that they possess a universal structure. This allows us to classify the integrable manifolds in four different families reproducing three known models besides uncovering a novel nineteen vertex model in a unified way. The introduction of the spectral parameter on the weights is made via the parameterization of the fundamental algebraic curve which is a conic. The diagonalization of the transfer matrix of the new vertex model and its thermodynamic limit properties are discussed. We point out a connection between the form of the main curve and the nature of the excitations of the corresponding spin-1 chains.

Keywords: Yang-Baxter Equation; Lattice Integrable Models; Bethe Ansatz

Sumário

Introdução	8
1 A Equação de Yang-Baxter	14
2 O Modelo de Seis Vértices	17
3 O Modelo de Dezenove Vértices	21
3.1 Relações de Dois Termos	23
3.2 Relações de Três Termos	24
3.3 Relações de Quatro Termos	32
3.3.1 Ramo 1	36
3.3.2 Ramo 2	38
3.4 Relações de Cinco Termos	41
4 Parametrização e Hamiltoniana	43
5 Solução Exata do Ramo 2B	49
6 Conclusão	54
Apêndice A	55
Apêndice B	58
Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

1	Configuração de vértice elementar em uma rede quadrada de dimensão $L \times L$	10
2	As configurações estatísticas possíveis para o modelo de seis vértices na rede quadrada.	17
3	As configurações estatísticas possíveis para o modelo de dezenove vértices na rede quadrada.	21
4	Estruturas algébricas provenientes da resolução das relações de três termos (64-72), válidas para $i = 0, 1, 2$. Os invariantes são vinculados pelas Eqs.(80,88, 89,98,108).	32
5	Estruturas algébricas provenientes da resolução das relações de quatro termos, válidas para $i = 0, 1, 2$. As expressões para os invariantes $\Delta_{\pm}^{(g)}$, $\Delta_{\pm}^{(h)}$ e $\Delta_{\pm}^{(\tilde{h})}$ estão dadas nas Tabelas 2 e 3.	41
6	As raízes $z_j = \frac{3\lambda_j}{\pi}$ do estado fundamental para (a) $L = 8$, (b) $L = 10$, (c) $L = 12$, (d) $L = 14$	50
7	As raízes $z_j = \frac{3\lambda_j}{\pi}$ do estado fundamental para $L = 40$ e $L = 42$ em que (a) $z_j = x_j + iy_j$ e (b) $z_j = x_j - iy_j$	51

Lista de Tabelas

1	Número de equações funcionais classificadas de acordo com o número de produtos triplos de pesos.	23
2	Expressões para os invariantes no ramo 1, em que a variável discreta $\epsilon_1 = \pm 1$	38
3	Expressões para os invariantes no ramo 2, em que $\omega = \exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right)$ e as variáveis discretas $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$	40
4	Acoplamentos das Hamiltonianas para os quatro ramos, em que $\bar{\gamma} = \frac{i\pi}{4}(1 - \epsilon_1)$, $\gamma_0 = \frac{i\pi\epsilon_1}{3}$, $\omega = \exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right)$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \pm 1$. A variável s é definida por $s = \sinh(\gamma) \sinh(\gamma - \gamma_0)$	47
5	Valores dos invariantes para os ramos especiais 1S e 2S.	58

Introdução

O estudo de sistemas de baixa dimensionalidade, especialmente em $(1 + 1)$ dimensões, tem se tornado cada vez mais importante, tanto no contexto da Teoria Quântica de Campos quanto no contexto da Mecânica Estatística. Várias razões para tal interesse podem ser apontadas. Em primeiro lugar, em $(1 + 1)$ dimensões, técnicas perturbativas não podem em geral ser aplicadas, e o acesso a resultados e métodos exatos se torna indispensável. Além disso, a riqueza matemática desses sistemas é surpreendente, possuindo estruturas comuns com diversas áreas, entre as quais teorias de campo conforme bidimensionais, grupos quânticos, grupos de tranças e a teoria de nós e conexões. Podemos ainda mencionar, no contexto da física de altas energias, conexões com a teoria de cordas supersimétrica e o espalhamento de gluons da QCD. Por último, podemos citar o aparecimento de interessantes fenômenos como a separação entre graus de liberdade de carga e spin.

Na Mecânica Estatística, foco principal deste trabalho, podemos destacar os modelos na rede como uma classe de modelos de importância particular. Nesses modelos, conceitos fundamentais como integrabilidade, matriz de transferência e equação de Yang-Baxter surgem naturalmente. De fato, consideremos um sistema que possa ser modelado através de um conjunto de estados locais $\{\sigma\}$ em uma dada rede conveniente, com L sítios e em equilíbrio térmico a uma dada temperatura t . Supondo que a cada conjunto de estados esteja associada uma energia E_σ , a função de partição pode ser escrita como,

$$Z = \sum_{config} e^{-\beta E_\sigma}, \quad (1)$$

em que a soma se estende a todas as possíveis configurações e $\beta = 1/(k_B t)$. Uma vez conhecida a função de partição, em princípio podemos calcular todas as quantidades termodinâmicas do sistema. Por exemplo, a energia livre por sítio no limite termodinâmico é dada por,

$$F = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta L} \ln Z. \quad (2)$$

Entretanto, o cálculo da função de partição é um problema combinatorial sofisticado em redes com dimensão $d \geq 2$. Uma maneira alternativa para tratar esse problema é a utilização da técnica da matriz de transferência, a qual transforma o cálculo da função

de partição Z em um problema de autovalores dessa matriz. Nesse formalismo, apenas o maior autovalor Γ_0 da matriz de transferência contribuirá para a energia livre por sítio no limite termodinâmico, i.e.,

$$F = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta L} \ln \Gamma_0. \quad (3)$$

Observamos, entretanto, que a dimensão da matriz de transferência cresce com a potência L^{d-1} e o cálculo do autovalor Γ_0 permanece um problema extremamente difícil, e em geral sem solução. Entretanto, em duas dimensões, Baxter et. al. [1, 2, 3] mostraram que o problema é tratável se olharmos para uma classe de modelos em que as matrizes de transferência comutam entre si. Assim, seja $T^{(i)}(\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)})$ a matriz de transferência de uma cadeia de tamanho L com n pesos de Boltzmann $\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)}$. A comutatividade da matriz de transferência é expressa por,

$$\left[T^{(1)}(\omega_1^{(1)}, \dots, \omega_n^{(1)}), T^{(2)}(\omega_1^{(2)}, \dots, \omega_n^{(2)}) \right] = 0, \quad (4)$$

para L arbitrário e pesos $\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)}$ para $i = 1, 2$.

Da Eq.(4) segue imediatamente que a matriz de transferência se torna uma função geradora de um número infinito de quantidades conservadas. De fato, suponhamos que os pesos de Boltzmann $\omega_n^{(i)}$ possam ser parametrizados por um conjunto de parâmetros espectrais $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ sendo p um número *a priori* arbitrário e, conseqüentemente, $T = T(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Expandindo a matriz de transferência em torno de um ponto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \{\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0\}$, obtemos,

$$T(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{a_1, \dots, a_p=0}^{\infty} Q_{a_1, \dots, a_p} [\lambda_1 - \lambda_1^0]^{a_1} \dots [\lambda_p - \lambda_p^0]^{a_p} \quad (5)$$

e, substituindo esse resultado na Eq.(4), segue imediatamente que

$$[Q_{a_1, \dots, a_p}, Q_{b_1, \dots, b_p}] = 0. \quad (6)$$

Logo, os coeficientes da expansão (5) podem ser interpretados como cargas conservadas em involução, o que nos permite dizer que tais sistemas são integráveis à maneira clássica de Liouville. Além disso, decorre da Eq.(4) que os autovetores da matriz de transferência não dependem dos pesos, tornando possível a proposta de ansatz universais para eles. A questão fundamental portanto é: sob que condições a Eq.(4) é válida?

Aparentemente, seria necessário verificar um número infinito de vínculos sobre os pesos uma vez que a Eq.(4) deve ser válida para qualquer valor de L . Entretanto, Baxter [4] mostrou que um número finito de condições locais sobre os pesos são suficientes para garantir a comutatividade entre as matrizes de transferência, mesmo para L arbitrário. Tais condições podem ser escritas em termos de uma equação matricial cuja estrutura depende muito da classe de modelos considerada. Neste trabalho analisaremos essa equação para uma classe relevante de modelos na rede denominada modelos de vértices.

Consideremos então uma rede quadrada de tamanho $L \times L$. As configurações estatísticas são definidas de acordo com os possíveis estados para cada ligação ao redor de um dado vértice. No caso mais simples, o número de estados possíveis em ambas as ligações horizontais e verticais é o mesmo, e podem ser rotulados por números inteiros $1, 2, \dots, N$. Naturalmente, a cada configuração de vértice $a, b, c, d = 1, \dots, N$, com energia $E(a, c|b, d)$, é associado um peso de Boltzmann

$$\mathcal{L}(a, c|b, d) = \exp[-\beta E(a, c|b, d)], \quad (7)$$

como definido na Figura 1.

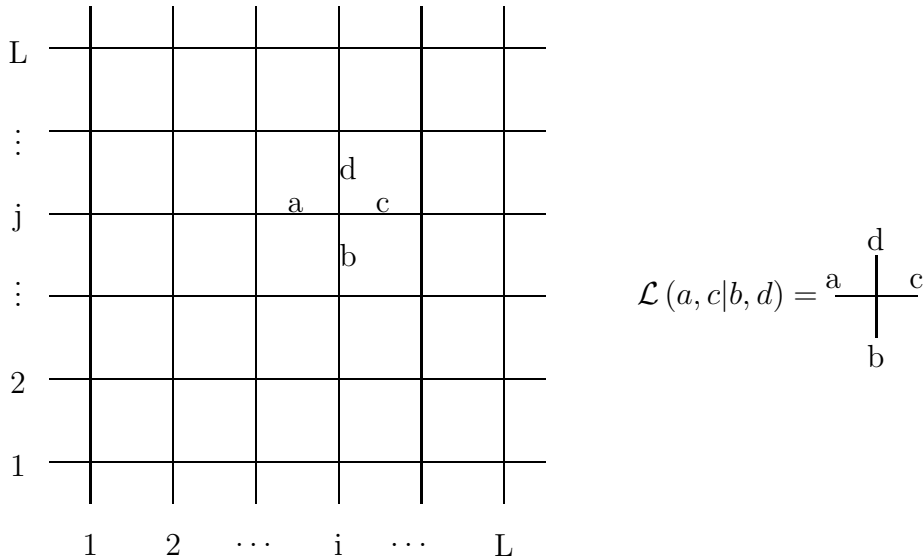


Figura 1: Configuração de vértice elementar em uma rede quadrada de dimensão $L \times L$.

A condição suficiente para a comutatividade de duas matrizes de transferência (4) associadas a um dado modelo de vértices para L arbitrário é justamente a celebrada equação de Yang-Baxter [4]. Considerando a notação da Figura 1, tal equação funcional

pode ser escrita como,

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3=1}^N R(a_1, \gamma_1 | a_2, \gamma_2) \mathcal{L}^{(1)}(\gamma_1, b_1 | a_3, \gamma_3) \mathcal{L}^{(2)}(\gamma_2, b_2 | \gamma_3, b_3) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3=1}^N \mathcal{L}^{(2)}(a_2, \gamma_2 | a_3, \gamma_3) \mathcal{L}^{(1)}(a_1, \gamma_1 | \gamma_3, b_3) R(\gamma_1, b_1 | \gamma_2, b_2). \quad (8)$$

em que $R(a, c|b, d)$ são elementos de uma matriz $N^2 \times N^2$ invertível frequentemente denominada matriz R .

Para classificar os possíveis modelos de vértices integráveis temos que encontrar as possíveis soluções da equação de Yang-Baxter correspondente. Em princípio, podemos adotar o método utilizado por Baxter para modelos de vértices com dois estados por ligação [4]. A idéia básica é começar isolando os elementos de matriz $R(a, c|b, d)$ com a ajuda de subconjuntos de relações provenientes da Eq.(8). As equações restantes passam portanto a depender apenas dos pesos $\mathcal{L}^{(1)}(a, c|b, d)$ e $\mathcal{L}^{(2)}(a, c|b, d)$, e devem ser resolvidas através de separação de variáveis. Esse passo é fundamental para revelar as estruturas algébricas que restringem o espaço de parâmetros formado pelos pesos de Boltzmann. A parametrização dessas estruturas nos permite obter a dependência dos pesos de Boltzmann com relação ao parâmetro espectral, aspecto este importante por exemplo na formulação do ansatz de Bethe algébrico [5, 6, 7, 8].

A implementação de todos os passos descritos acima, mesmo para um modelo com número de estados fixo, constitui em geral um problema desafiador em Física-Matemática. Os resultados concretos, em sua maioria, estão concentrados em modelos de vértices com dois estados por ligação, veja por exemplo [9, 10, 11]. Nesse caso os modelos que tem sido descobertos estão principalmente associados às variedades do modelo de seis vértices assimétrico [1, 12], do modelo de oito vértices simétrico [1, 13] e aos chamados sistemas de férmions livres [14, 15, 16]. As dificuldades do problema crescem com o número de estados N devido à proliferação de um número maior de pesos permitidos que serão fixados, em última análise, por diferentes classes de equações funcionais. Por outro lado, essa estratégia tem o mérito de possibilitar a classificação dos modelos de vértices integráveis de primeiros princípios.

O propósito desta dissertação é iniciar o estudo do método de Baxter para modelos de vértices com três estados por ligação satisfazendo a chamada regra do gelo¹. Com

¹A motivação física da regra do gelo está relacionada à entropia residual do gelo. Para um in-

essa regra, o número de pesos de Boltzmann possíveis é reduzido para dezenove. Aqui consideraremos uma classe relevante de tais modelos cujos pesos são invariantes pelas simetrias de paridade e reversão temporal (\mathcal{PT})². Para essa classe de modelos mostraremos que as curvas algébricas que vinculam os pesos de Boltzmann são de fato universais. Os possíveis modelos de vértices solúveis são distinguidos através de diferentes relações entre invariantes definidos por tais variedades. Essa análise geral nos permite a classificação dos modelos de dezenove vértices em quatro diferentes famílias. As três primeiras já foram descobertas no contexto do modelo integrável XXZ de spin-1 [22], do método do espalhamento inverso quântico do modelo de Mikhailov-Shabat [23] e no contexto da álgebra quântica $U_q[SU(2)]$ nas raízes da unidade [24, 25, 26, 27, 28]. Curiosamente, nossos resultados revelam que todos esses modelos tem a mesma estrutura algébrica independentemente de sua distinta origem via grupos quânticos. Acreditamos que o quarto modelo de vértices é novo na literatura.

Organizamos esta dissertação como se segue. Na primeira seção, apresentaremos a dedução da equação de Yang-Baxter no contexto de modelos de vértices. Na seção 2 ilustraremos a técnica de Baxter no modelo de seis vértices assimétrico, além de obter a parametrização dos respectivos pesos de Boltzmann. Em seguida, na seção 3, desenvolveremos um método sistemático para a resolução da equação de Yang-Baxter para o modelo de dezenove vértices. Essa análise permite mostrar que a curva algébrica principal é uma cônica envolvendo três pesos de Boltzmann independentes. As amplitudes restantes são notavelmente resolvidas em termos de razões de polinômios dependendo apenas de tais pesos. Esta análise permitirá classificar os modelos de dezenove vértices invariantes pela simetria \mathcal{PT} de uma perspectiva unificada. Na seção 4 discutiremos a parametrização dos pesos de Boltzmann em termos de um parâmetro espectral, além de calcular as Hamiltonianas de spin-1 associadas a cada um dos quatro modelos de vértices. Observaremos que a forma geométrica da curva algébrica fundamental está diretamente relacionada à natureza das excitações elementares das cadeias de spin-1

rodução ao assunto, sugerimos [17].

²A simetria \mathcal{PT} é uma condição menos restritiva que a hermiticidade que ainda permite a existência de autovalores reais para a Hamiltoniana, pelo menos no âmbito de um teoria de campos em $(0+1)$ dimensões [18]. Outro aspecto importante é a possibilidade de extensão da integrabilidade para fronteiras abertas quando os modelos são invariantes por simetria \mathcal{PT} [19, 20, 21].

correspondentes. Na seção 5 apresentaremos os autovalores da matriz de transferência associada ao novo modelo de dezenove vértices, além da equação do ansatz de Bethe. Investigaremos então as propriedades deste modelo no limite termodinâmico. Os resultados obtidos corroboram a conexão acima mencionada entre a curva algébrica e as excitações da cadeia de spin-1. Nossas conclusões serão apresentadas na seção 6. Nos apêndices mostraremos alguns detalhes técnicos necessários para o entendimento do texto principal.

1 A Equação de Yang-Baxter

Consideremos um modelo de vértices definido de acordo com a Figura 1, e caracterizado pelo conjunto de pesos de Boltzmann $\mathcal{L}^{(i)}(a, c|b, d)$, para $i = 1, 2$. Os estados das ligações horizontais e verticais formam diferentes espaços vetoriais, denominados respectivamente de auxiliar ($\mathcal{A} = \mathbb{C}^N$) e vertical ($\mathcal{V} = \mathbb{C}^N$). A dimensão desses espaços vetoriais é dada pelo número máximo de estados que cada ligação horizontal ou vertical pode possuir; consideraremos o caso mais simples em que esse número máximo é o mesmo para todas as ligações, e é igual a N . Com a finalidade de localizar um dado vértice na rede, introduzimos índices (k, j) nos rótulos dos estados e, dessa maneira, a função de partição desse modelo de vértices pode ser escrita como,

$$Z = \sum_{\text{conf vértices}} \prod \mathcal{L}^{(i)}(a_k^j, a_{k+1}^j | b_k^j, b_k^{j+1}) = \sum \prod_{\{b_k^j\}}^L \left[\sum \prod_{\{a_k^j\}}^L \mathcal{L}^{(i)}(a_k^j, a_{k+1}^j | b_k^j, b_k^{j+1}) \right]. \quad (9)$$

A expressão entre colchetes na Eq.(9) pode ser interpretada como sendo os elementos de uma matriz $T^{(i)}$, atuando no espaço $V = \prod_{i=1}^L \mathbb{C}^N$, e usualmente denominada matriz de transferência,

$$T^{(i)} = \sum_{b_1^j, \dots, b_L^{j+1}=1}^N T^{(i)}(b_1^j, \dots, b_L^j | b_1^{j+1}, \dots, b_L^{j+1}) e_{b_1^j, b_1^{j+1}} \otimes \dots \otimes e_{b_L^j, b_L^{j+1}}, \quad (10)$$

em que $e_{a,b}$ são as matrizes de Weyl de dimensão $N \times N$ ³ e

$$T^{(i)}(b_1^j, \dots, b_L^j | b_1^{j+1}, \dots, b_L^{j+1}) = \sum \prod_{\{a_k^j\}}^L \mathcal{L}^{(i)}(a_k^j, a_{k+1}^j | b_k^j, b_k^{j+1}). \quad (11)$$

Usando a Eq.(11), a função de partição (9) pode ser reescrita como,

$$Z = \sum \prod_{\{b_i^j\}}^L T^{(i)}(b_1^j, \dots, b_L^j | b_1^{j+1}, \dots, b_L^{j+1}), \quad (12)$$

cuja forma é bastante semelhante a de um produto de matrizes. Se considerarmos condições periódicas de contorno nas variáveis de estado verticais, então a Eq.(12) pode finalmente ser escrita de uma maneira bastante compacta, a saber

$$Z = \text{Tr}_V \left\{ [T^{(i)}]^L \right\}, \quad (13)$$

³Uma matriz de Weyl $e_{i,j}$ é uma matriz de dimensão $N \times N$ cujas únicas entradas não nulas são a unidade e se posicionam na interseção da i -ésima linha com a j -ésima coluna, tal que $e_{i,j}e_{k,l} = \delta_{j,k}e_{i,l}$.

em que Tr_V representa o traço no espaço de estados verticais V .

Por outro lado, os elementos de matriz (11) também podem ser escritos em termos de um traço de produtos de matrizes, desde que consideremos condições periódicas de contorno também na direção horizontal. De fato, se considerarmos uma matriz $\tilde{\mathcal{L}}^{(i)}(b, b')$ que atua no espaço auxiliar \mathcal{A} definida por,

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(i)}(b, b') = \sum_{a, a'=1}^N \mathcal{L}^{(i)}(a, a'|b, b') e_{a, a'}, \quad (14)$$

então a Eq.(11) se torna,

$$T^{(i)}(b_1^j, \dots, b_L^j | b_1^{j+1}, \dots, b_L^{j+1}) = Tr_{\mathcal{A}} \left[\tilde{\mathcal{L}}^{(k)}(b_1^j, b_1^{j+1}) \tilde{\mathcal{L}}^{(k)}(b_2^j, b_2^{j+1}) \dots \tilde{\mathcal{L}}^{(k)}(b_L^j, b_L^{j+1}) \right], \quad (15)$$

em que $Tr_{\mathcal{A}}$ representa o traço no espaço auxiliar \mathcal{A} . Observe que os elementos de matriz de $\tilde{\mathcal{L}}^{(i)}(b, b')$ são matrizes de dimensão $N \times N$ que dependem das variáveis verticais correspondentes (b, b') . A expressão entre colchetes da Eq.(15) nos motiva a fazer a seguinte definição,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}j}^{(i)} = I \otimes \dots \otimes \underbrace{\mathcal{L}^{(i)}}_{\text{posição } j} \otimes \dots \otimes I, \quad (16)$$

em que I denota a matriz identidade de dimensão $N \times N$. O índice “ $\mathcal{A}j$ ” é utilizado para indicar a atuação da matriz (16) no espaço $\mathcal{A} \otimes \mathcal{V}_j$, sendo \mathcal{V}_j o j -ésimo subespaço de $V = \mathcal{V}^{\otimes L}$. Com a definição (16), podemos reescrever

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(i)}(b_1^j, b_1^{j+1}) \tilde{\mathcal{L}}^{(i)}(b_2^j, b_2^{j+1}) \dots \tilde{\mathcal{L}}^{(i)}(b_L^j, b_L^{j+1}) = \tau^{(i)}(b_1^j, \dots, b_L^j | b_1^{j+1}, \dots, b_L^{j+1}) \quad (17)$$

em que

$$\tau^{(i)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}1}^{(i)} \dots \mathcal{L}_{\mathcal{A}L}^{(i)} \quad (18)$$

é denominada matriz monodromia. Finalmente, segue por construção

$$T^{(i)} = Tr_{\mathcal{A}} [\tau^{(i)}]. \quad (19)$$

Neste ponto, a comutatividade das matrizes de transferência segue de maneira direta. Para demonstrar essa propriedade, consideremos duas matrizes $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$, dadas por,

$$T^{(1)} = Tr_{\mathcal{A}} [\tau^{(1)}] \quad (20)$$

e

$$T^{(2)} = Tr_{\mathcal{A}} [\tau^{(2)}]. \quad (21)$$

Para que as matrizes (20) e (21) comutem basta a existência de uma matriz R , invertível, definida em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ tal que

$$R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(2)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(1)}R. \quad (22)$$

De fato, temos,

$$T^{(1)}T^{(2)} = Tr_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)} \cdots \mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)} \right] \quad (23)$$

e

$$T^{(2)}T^{(1)} = Tr_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)} \cdots \mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)} \right]. \quad (24)$$

Multiplicando então a Eq.(22) à direita por R^{-1} para obter,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(1)} = R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j}^{(2)}R^{-1} \quad (25)$$

e usando (25) em (24), temos

$$\begin{aligned} T^{(2)}T^{(1)} &= Tr_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}} \left[R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}R^{-1}R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)}R^{-1} \cdots R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)}R^{-1} \right] \\ &= Tr_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}} \left[R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)} \cdots R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)}R^{-1} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Como o traço é invariante por transformações de similaridade, a Eq.(26) se torna

$$T^{(2)}T^{(1)} = Tr_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)} \cdots \mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)} \right] = T^{(1)}T^{(2)}, \quad (27)$$

o que comprova a comutatividade das matrizes $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$.

Um interessante fato a ser notado é que a condição local (22) se estende globalmente para as matrizes monodromia. Com efeito, temos,

$$R\tau^{(1)}\tau^{(2)} = R\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)} \cdots \mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)} \quad (28)$$

Usando a Eq.(22) repetidamente na Eq.(28) obtemos,

$$R\tau^{(1)}\tau^{(2)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}^{(1)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}^{(1)} \cdots \mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(2)}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_L}^{(1)}R, \quad (29)$$

ou seja,

$$R\tau^{(1)}\tau^{(2)} = \tau^{(2)}\tau^{(1)}R. \quad (30)$$

Dizemos que a Eq.(22) é uma condição local de integrabilidade, enquanto a Eq.(30) é uma condição global de integrabilidade. Escrita em termos de índices matriciais, a Eq.(22) é justamente a equação de Yang-Baxter (8) citada na seção anterior.

2 O Modelo de Seis Vértices

Nesta seção revisaremos o modelo de seis vértices assimétrico [9], que corresponde a um modelo de vértices com $N = 2$ satisfazendo à regra do gelo, ou seja, cujos pesos são invariantes pela simetria $U(1)^4$. Tal simetria permite a existência de seis configurações estatísticas, ilustradas na Figura 2.

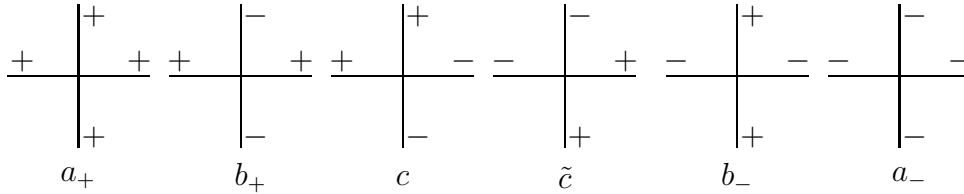


Figura 2: As configurações estatísticas possíveis para o modelo de seis vértices na rede quadrada.

As matrizes $\mathcal{L}^{(i)}$ dos pesos de Boltzmann representados na Figura 2 podem ser convenientemente escritas da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(i)} = & a_+^{(i)} e_{1,1} \otimes e_{1,1} + b_+^{(i)} e_{1,1} \otimes e_{2,2} + b_-^{(i)} e_{2,2} \otimes e_{1,1} + a_-^{(i)} e_{2,2} \otimes e_{2,2} \\ & + c^{(0)} e_{1,2} \otimes e_{2,1} + \tilde{c}^{(0)} e_{2,1} \otimes e_{1,2} \quad \text{para } i = 1, 2, \end{aligned} \quad (31)$$

em que $e_{a,b}$ são matrizes de Weyl de dimensão 2×2 .

O primeiro passo em nossa análise consiste em determinar a forma da matriz R considerando os operadores $\mathcal{L}^{(i)}$ (31). Para tanto, propomos uma matriz R geral de dimensão 4×4 com todos os dezesseis elementos. Substituímos então a matriz R e os operadores $\mathcal{L}^{(i)}$ na equação de Yang-Baxter (8). Levando em conta que nenhum dos pesos na Eq.(31) pode ser nulo e com a hipótese adicional de que o peso $a_+^{(i)}$ é em geral distinto do peso $b_-^{(i)}$, observamos que a equação de Yang-Baxter (8) impõe à matriz R a mesma estrutura dos operadores $\mathcal{L}^{(i)}$. Dessa maneira, vamos adotar a seguinte notação para a matriz R ,

$$\begin{aligned} R = & a_+^{(0)} e_{1,1} \otimes e_{1,1} + b_+^{(0)} e_{1,1} \otimes e_{2,2} + b_-^{(0)} e_{2,2} \otimes e_{1,1} + a_-^{(0)} e_{2,2} \otimes e_{2,2} \\ & + c^{(0)} e_{1,2} \otimes e_{2,1} + \tilde{c}^{(0)} e_{2,1} \otimes e_{1,2} \end{aligned} \quad (32)$$

⁴Isto é ainda equivalente a dizer que os únicos pesos não nulos são aqueles que satisfazem a relação $a + b = c + d$.

Com as matrizes $\mathcal{L}^{(i)}$ (31) e R (32), o número de equações funcionais, que correspondem às entradas não nulas da Eq.(8), é igual a treze. Entre estas equações, uma delas possui dois produtos triplos de pesos enquanto que as doze demais têm três produtos triplos de pesos.

A equação contendo dois produtos triplos de pesos é dada por,

$$c^{(0)}\tilde{c}^{(1)}c^{(2)} - \tilde{c}^{(0)}c^{(1)}\tilde{c}^{(2)} = 0. \quad (33)$$

Neste ponto observamos que a Eq.(33) pode ser facilmente resolvida via uma transformação que preserva a equação de Yang-Baxter. Para maiores detalhes técnicos sobre tal transformação sugerimos [29]. Alternativamente, poderíamos argumentar que a função de partição com condições periódicas de contorno não depende individualmente dos pesos $c^{(i)}$ ou $\tilde{c}^{(i)}$, mas apenas do produto entre eles, $c^{(i)}\tilde{c}^{(i)}$. Desta forma, sem perder de generalidade, podemos impor,

$$\tilde{c}^{(i)} = c^{(i)} \quad \text{para } i = 0, 1, 2. \quad (34)$$

Levando em conta a Eq.(34), as doze equações de três termos iniciais se reduzem para seis relações independentes, dadas por,

$$c^{(0)}b_{\pm}^{(1)}a_{\mp}^{(2)} - c^{(0)}a_{\mp}^{(1)}b_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(0)}c^{(1)}c^{(2)} = 0, \quad (35)$$

$$a_{\pm}^{(0)}c^{(1)}a_{\pm}^{(2)} - b_{\mp}^{(0)}c^{(1)}b_{\pm}^{(2)} - c^{(0)}a_{\pm}^{(1)}c^{(2)} = 0, \quad (36)$$

$$c^{(0)}c^{(1)}b_{\pm}^{(2)} + b_{\pm}^{(0)}a_{\pm}^{(1)}c^{(2)} - a_{\pm}^{(0)}b_{\pm}^{(1)}c^{(2)} = 0. \quad (37)$$

As equações (35-37) constituem um sistema linear homogêneo nas cinco variáveis $a_{\pm}^{(0)}$, $b_{\pm}^{(0)}$ e $c^{(0)}$. Assim podemos utilizar quatro delas para isolar as variáveis $a_{\pm}^{(0)}$ e $b_{\pm}^{(0)}$ em termos do peso $c^{(0)}$. Escolhendo a Eq.(35) para isolar $b_{\pm}^{(0)}$ e a Eq.(36) para $a_{\pm}^{(0)}$, obtemos

$$\frac{b_{\pm}^{(0)}}{c^{(0)}} = \frac{b_{\pm}^{(1)}a_{\mp}^{(2)} - a_{\mp}^{(1)}b_{\pm}^{(2)}}{c^{(1)}c^{(2)}}, \quad (38)$$

$$\frac{a_{\pm}^{(0)}}{c^{(0)}} = \frac{b_{\mp}^{(1)}a_{\pm}^{(2)}b_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(1)}\{b_{+}^{(2)}b_{-}^{(2)} - [c^{(2)}]^2\}}{c^{(1)}a_{\pm}^{(2)}c^{(2)}}. \quad (39)$$

A equação restante (37) deve portanto fixar vínculos entre os pesos $a_{\pm}^{(i)}$, $b_{\pm}^{(i)}$ e $c^{(i)}$ para $i = 1, 2$. De fato, substituindo (38,39) na Eq.(37) obtemos a seguinte identidade,

$$c^{(0)} \left\{ \left(a_{+}^{(1)}a_{-}^{(1)} + b_{+}^{(1)}b_{-}^{(1)} - [c^{(1)}]^2 \right) a_{\pm}^{(2)}b_{\pm}^{(2)} - \left(a_{+}^{(2)}a_{-}^{(2)} + b_{+}^{(2)}b_{-}^{(2)} - [c^{(2)}]^2 \right) a_{\pm}^{(1)}b_{\pm}^{(1)} \right\} = 0 \quad (40)$$

Levando em conta que nenhum peso de Boltzmann pode ser nulo, a expressão entre chaves na Eq.(40) deve ser igual a zero. Essa expressão pode ser resolvida através de separação de variáveis da seguinte maneira,

$$\frac{a_+^{(i)}a_-^{(i)} + b_+^{(i)}b_-^{(i)} - [c^{(i)}]^2}{a_\pm^{(i)}b_\pm^{(i)}} = \Delta_\pm, \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (41)$$

em que Δ_\pm são constantes de separação, ou invariantes.

O próximo passo é encontrar uma parametrização conveniente para as relações (41). Tal procedimento nos permite dizer qual a dependência dos pesos de Boltzmann em relação a parâmetros espectrais. Para atingir esse objetivo, podemos inicialmente utilizar o índice + da Eq.(41) para isolar linearmente o peso $a_-^{(i)}$,

$$a_-^{(i)} = \frac{\Delta_+ a_+^{(i)} b_+^{(i)} - b_+^{(i)} b_-^{(i)} + [c^{(i)}]^2}{a_+^{(i)}} \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (42)$$

Substituindo (42) no índice – da Eq.(41) obtemos,

$$\Gamma \left[a_+^{(i)} \right]^2 b_+^{(i)} - \Delta_+ a_+^{(i)} b_+^{(i)} b_-^{(i)} + b_+^{(i)} \left[b_-^{(i)} \right]^2 - b_-^{(i)} \left[c^{(i)} \right]^2 = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (43)$$

em que definimos um novo invariante Γ dado por,

$$\Gamma = \frac{\Delta_+}{\Delta_-}. \quad (44)$$

Agora, introduzimos as variáveis

$$x_i = \frac{a_+^{(i)}}{c^{(i)}}, \quad y_i = \frac{b_+^{(i)}}{c^{(i)}}, \quad z_i = \frac{b_-^{(i)}}{c^{(i)}}, \quad (45)$$

em termos das quais a Eq.(43) é escrita como,

$$\left[x_i - \frac{\Delta_+}{2\Gamma} z_i \right]^2 - \left[\frac{\Delta_+^2}{4\Gamma^2} - \frac{1}{\Gamma} \right] z_i^2 = r_i^2 \quad (46)$$

em que

$$r_i^2 = \frac{z_i}{\Gamma y_i}. \quad (47)$$

A Eq.(46) é a equação de uma superfície constituída de cônicas com “raio” r_i . Assim, sua parametrização envolverá dois parâmetros espectrais: o raio r_i e um parâmetro λ_i que descreve as cônicas para um dado r_i . Podemos implementar tal parametrização via funções hiperbólicas, i.e.,

$$x_i - \frac{\Delta_+}{2\Gamma} z_i = r_i \cosh(\lambda_i), \quad (48)$$

$$z_i = \frac{r_i \sinh(\lambda_i)}{\sqrt{\frac{\Delta_+^2}{4\Gamma^2} - \frac{1}{\Gamma}}}. \quad (49)$$

Para obter expressões simples para os pesos, podemos definir os invariantes Δ_+ e Γ por,

$$\Delta_+ = 2 \cosh(\gamma), \quad \Gamma = \frac{\cosh^2(\gamma)}{\cosh^2(\frac{\delta}{2})}. \quad (50)$$

Com essas definições, pelas Eqs.(42,45), os pesos de Boltzmann são dados por, para ambos os índices $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} a_+^{(i)} = 1, \quad a_-^{(i)} = \frac{1}{r_i^2}, \quad b_+^{(i)} = \frac{\cosh(\frac{\delta}{2}) \sinh(\lambda_i)}{r_i^2 \cosh(\gamma) \sinh(\lambda_i + \frac{\delta}{2})}, \\ b_-^{(i)} = \frac{\cosh(\gamma) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\frac{\delta}{2}) \sinh(\lambda_i + \frac{\delta}{2})}, \quad c^{(i)} = \frac{\sinh(\frac{\delta}{2})}{r_i \sinh(\lambda_i + \frac{\delta}{2})}, \end{aligned} \quad (51)$$

em que o peso $a_+^{(i)} = 1$ foi fixado pela liberdade de escolha do peso $c^{(i)}$.

Por outro lado, os pesos $a_{\pm}^{(0)}$ e $b_{\pm}^{(0)}$ são obtidos pela substituição direta das relações (51) nas Eqs.(38,39). Realizando esse passo e escolhendo o peso $c^{(0)}$ de maneira que $a_+^{(0)} = 1$, as expressões finais para os pesos da matriz R são dadas por,

$$\begin{aligned} a_+^{(0)} = 1, \quad a_-^{(0)} = \frac{r_2^2}{r_1^2}, \quad b_+^{(0)} = \frac{\cosh(\frac{\delta}{2}) \sinh(\lambda_1 - \lambda_2)}{r_1^2 \cosh(\gamma) \sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{\delta}{2})}, \\ b_-^{(0)} = \frac{r_2^2 \cosh(\gamma) \sinh(\lambda_1 - \lambda_2)}{\cosh(\frac{\delta}{2}) \sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{\delta}{2})}, \quad \tilde{c}^{(0)} = c^{(0)} = \frac{r_2 \sinh(\frac{\delta}{2})}{r_1 \sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{\delta}{2})} \end{aligned} \quad (52)$$

Claramente, a dependência dos pesos da matriz R (52) é aditiva em relação ao parâmetro espectral λ_i , mas não em relação ao parâmetro r_i .

É interessante observar que se a simetria \mathcal{PT} for imposta ao modelo de seis vértices, o que corresponde a impor,

$$b_-^{(i)} = b_+^{(i)} \quad (53)$$

então o parâmetro espectral r_i será obrigatoriamente fixado por

$$r_i^2 = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (54)$$

enquanto que os invariantes γ e δ serão relacionados através de

$$\delta = 2\gamma. \quad (55)$$

Logo, a solução da equação de Yang-Baxter para o modelo de seis vértices invariante por simetria \mathcal{PT} , também conhecido como modelo de seis vértices simétrico, possui apenas um parâmetro espectral (aditivo) e um parâmetro livre. Esse resultado também será obtido no modelo de dezenove vértices invariante por essa mesma simetria.

3 O Modelo de Dezenove Vértices

O modelo de dezenove vértices é o modelo de vértices com três estados por ligação ($N = 3$) satisfazendo à regra do gelo. Os três estados permitidos podem ser rotulados por $a, b, c, d = 0, \pm$. Como o próprio nome indica, o número de configurações permitidas é igual a dezenove. Representamos os pesos na Figura 3, em que os respectivos índices enfatizam os setores de carga não nulos $a + b$ ⁵.

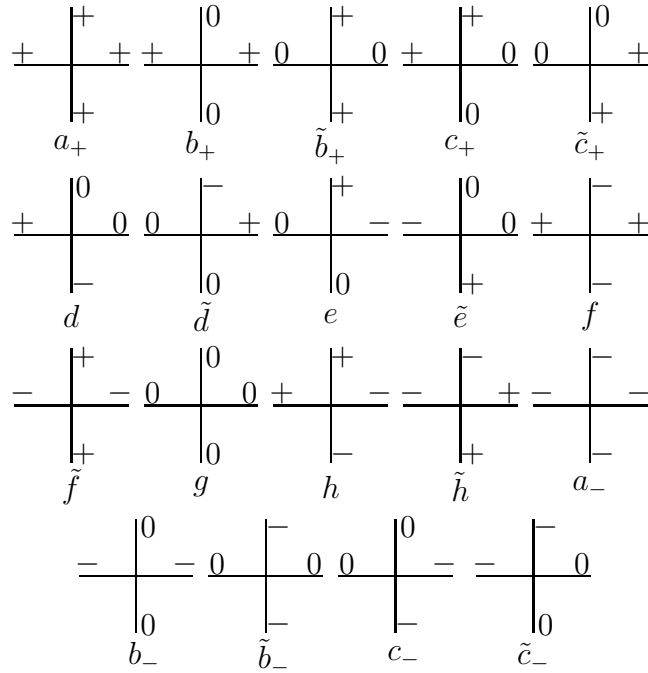


Figura 3: As configurações estatísticas possíveis para o modelo de dezenove vértices na rede quadrada.

Nesta dissertação, estudaremos os modelos de dezenove vértices cujos pesos são invariantes por simetria \mathcal{PT} . Essa invariância restringe o número de pesos distintos entre si, levando a uma subclasse de modelos de três estados com quatorze pesos de Boltzmann em princípio distintos. Mais precisamente, a simetria \mathcal{PT} impõe as

⁵Mencionamos aqui que o modelo de dezenove vértices possui aplicações em sistemas físicos reais. De fato, este modelo pode ser usado para mapear o chamado modelo XY , que por sua vez descreve propriedades de junções Josephson supercondutoras. Neste trabalho, estamos interessados primordialmente na física-matemática do modelo de dezenove vértices, e portanto para essa aplicação remetemos ao trabalho [30].

seguintes relações entre os pesos da Figura 3,

$$\tilde{b}_{\pm} = b_{\pm}, \tilde{f} = f, e = d, \tilde{e} = \tilde{d}. \quad (56)$$

Levando em conta o subespaço de parâmetros (56), o operador $\mathcal{L}^{(i)}$ pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(i)} = & a_+^{(i)} e_{1,1} \otimes e_{1,1} + b_+^{(i)} [e_{1,1} \otimes e_{2,2} + e_{2,2} \otimes e_{1,1}] + f^{(i)} [e_{1,1} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes e_{1,1}] \\ & + b_-^{(i)} [e_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes e_{2,2}] + g^{(i)} e_{2,2} \otimes e_{2,2} + a_-^{(i)} e_{3,3} \otimes e_{3,3} + h^{(i)} e_{1,3} \otimes e_{3,1} \\ & + \tilde{h}^{(i)} e_{3,1} \otimes e_{1,3} + c_+^{(i)} e_{1,2} \otimes e_{2,1} + \tilde{c}_+^{(i)} e_{2,1} \otimes e_{1,2} + c_-^{(i)} e_{2,3} \otimes e_{3,2} + \tilde{c}_-^{(i)} e_{3,2} \otimes e_{2,3} \\ & + d^{(i)} [e_{1,2} \otimes e_{3,2} + e_{2,3} \otimes e_{2,1}] + \tilde{d}^{(i)} [e_{2,1} \otimes e_{2,3} + e_{3,2} \otimes e_{1,2}], \text{ para } i = 1, 2, \end{aligned} \quad (57)$$

em que $e_{a,b}$ são matrizes de Weyl de dimensão 3×3 .

Da mesma forma como acontece no modelo de seis vértices, a equação de Yang-Baxter (8) impõe a mesma estrutura do operador $\mathcal{L}^{(i)}$ à matriz R , desde que os pesos $a_{\pm}^{(i)}$ sejam em geral distintos de $b_{\pm}^{(i)}$ e $f^{(i)}$. Conseqüentemente, a matriz R pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} R = & a_+^{(0)} e_{1,1} \otimes e_{1,1} + b_+^{(0)} [e_{1,1} \otimes e_{2,2} + e_{2,2} \otimes e_{1,1}] + f^{(0)} [e_{1,1} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes e_{1,1}] \\ & + b_-^{(0)} [e_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes e_{2,2}] + g^{(0)} e_{2,2} \otimes e_{2,2} + a_-^{(0)} e_{3,3} \otimes e_{3,3} + h^{(0)} e_{1,3} \otimes e_{3,1} \\ & + \tilde{h}^{(0)} e_{3,1} \otimes e_{1,3} + c_+^{(0)} e_{1,2} \otimes e_{2,1} + \tilde{c}_+^{(0)} e_{2,1} \otimes e_{1,2} + c_-^{(0)} e_{2,3} \otimes e_{3,2} + \tilde{c}_-^{(0)} e_{3,2} \otimes e_{2,3} \\ & + d^{(0)} [e_{1,2} \otimes e_{3,2} + e_{2,3} \otimes e_{2,1}] + \tilde{d}^{(0)} [e_{2,1} \otimes e_{2,3} + e_{3,2} \otimes e_{1,2}]. \end{aligned} \quad (58)$$

Enfatizamos aqui que estamos interessados em modelos de dezenove vértices genuínos, em que todos os pesos $a_{\pm}^{(i)}$, $b_{\pm}^{(i)}$, $c_{\pm}^{(i)}$, $\tilde{c}_{\pm}^{(i)}$, $d^{(i)}$, $\tilde{d}^{(i)}$, $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$ para $i = 0, 1, 2$ são considerados não nulos. Uma tentativa de classificação de modelos de vértices com três estados por ligação foi realizada anteriormente na literatura [31]. Entretanto, no trabalho [31], simetrias bastante restritivas foram assumidas, além de permitir que alguns pesos fossem iguais a zero. Como resultado, o único modelo estritamente de dezenove vértices encontrado foi o modelo de Fateev-Zamolodchikov [22].

Com as matrizes $\mathcal{L}^{(i)}$ (57) e R (58), o número de entradas não nulas na equação matricial de Yang-Baxter (8) é superior a cem. Como no modelo de seis vértices, as equações funcionais correspondentes podem ser classificadas de acordo com o número de produtos triplos que possuem. Neste caso, além das equações com dois e três termos, existem relações com quatro e cinco termos. Na Tabela 1 resumimos o número

de equações contento dois, três, quatro e cinco tipos de produtos triplos de pesos. Claramente, tanto o número quanto a estrutura dessas equações torna o presente problema consideravelmente mais complicado que o associado aos modelos de vértices com $N = 2$, analisado na Seção 2. Iniciaremos nossa discussão resolvendo as equações mais simples, que contém apenas dois tipos de produtos triplos de pesos.

Tabela 1: Número de equações funcionais classificadas de acordo com o número de produtos triplos de pesos.

Número de produtos triplos	Número de equações
dois	6
três	36
quatro	57
cinco	24

3.1 Relações de Dois Termos

As seis equações que possuem somente dois tipos diferentes de produtos triplos de pesos são dadas por,

$$c_{\pm}^{(0)} \tilde{c}_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - \tilde{c}_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} \tilde{c}_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (59)$$

$$d^{(0)} \tilde{d}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - \tilde{d}^{(0)} d^{(1)} \tilde{c}_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (60)$$

$$c_{\pm}^{(0)} \tilde{d}^{(1)} d^{(2)} - \tilde{c}_{\pm}^{(0)} d^{(1)} \tilde{d}^{(2)} = 0. \quad (61)$$

Primeiramente, notamos que a diferença aparente entre $c_{\pm}^{(i)}$ e $\tilde{c}_{\pm}^{(i)}$ pode ser eliminada via uma transformação que preserva a equação de Yang-Baxter, de maneira análoga ao que ocorre no modelo de seis vértices [29]. Portanto, sem perder generalidade podemos novamente impor,

$$\tilde{c}_{\pm}^{(i)} = c_{\pm}^{(i)}, \quad \text{para } i = 0, 1, 2. \quad (62)$$

Substituindo o resultado (62) nas Eqs.(60,61) concluímos que o peso $\tilde{d}^{(i)}$ torna-se proporcional a $d^{(i)}$,

$$\frac{\tilde{d}^{(i)}}{d^{(i)}} = \Psi, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \quad (63)$$

em que Ψ é o nosso primeiro invariante para o modelo de dezenove vértices.

O próximo passo é a análise das equações envolvendo três tipos de produtos triplos.

3.2 Relações de Três Termos

Usando a solução (62,63) observamos que das trinta e seis relações que possuem três produtos triplos restam apenas dezoito equações independentes, uma vez que elas são proporcionais aos pares. Elas podem ser divididas em três diferentes conjuntos com seis equações cada, dados por,

- conjunto $G_{\pm}^{(1)}$

$$b_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} a_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - c_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (64)$$

$$b_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} a_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (65)$$

$$c_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + b_{\pm}^{(0)} a_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (66)$$

- conjunto $G_{\pm}^{(2)}$

$$d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + f^{(0)} d^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - d^{(0)} f^{(1)} a_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (67)$$

$$f^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} a_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (68)$$

$$\Psi d^{(0)} d^{(1)} b_{\mp}^{(2)} + f^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\mp}^{(2)} - b_{\pm}^{(0)} f^{(1)} c_{\mp}^{(2)} = 0, \quad (69)$$

- conjunto $G_{\pm}^{(3)}$

$$b_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} d^{(1)} f^{(2)} - a_{\pm}^{(0)} f^{(1)} d^{(2)} = 0, \quad (70)$$

$$c_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} f^{(2)} - a_{\pm}^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (71)$$

$$\Psi b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} d^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} b_{\mp}^{(1)} f^{(2)} - c_{\pm}^{(0)} f^{(1)} b_{\mp}^{(2)} = 0, \quad (72)$$

em que o índice \pm nas Eqs.(64-72) significa que cada uma delas se divide em duas equações funcionais independentes.

No total, temos dezoito equações homogêneas lineares mas somente oito pesos de Boltzmann $a_{\pm}^{(0)}, b_{\pm}^{(0)}, c_{\pm}^{(0)}, d^{(0)}$ e $f^{(0)}$ estão à nossa disposição para serem eliminados. Portanto, temos um alto grau de sobre-determinação o que torna a solução das Eqs.(64-72) longe de ser trivial. Iniciaremos nossa análise considerando o conjunto de equações $G_{\pm}^{(1)}$. Elas são similares às equações funcionais do modelo de seis vértices simétrico e podem ser facilmente resolvidas. Primeiro eliminamos os pesos $a_{\pm}^{(0)}, b_{\pm}^{(0)}$ em termos de $c_{\pm}^{(0)}$ com a ajuda das Eqs.(64,65). Como resultado obtemos,

$$\frac{a_{\pm}^{(0)}}{c_{\pm}^{(0)}} = \frac{b_{\pm}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} b_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(1)} \left\{ [b_{\pm}^{(2)}]^2 - [c_{\pm}^{(2)}]^2 \right\}}{c_{\pm}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} c_{\pm}^{(2)}}, \quad (73)$$

$$\frac{b_{\pm}^{(0)}}{c_{\pm}^{(0)}} = \frac{b_{\pm}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)}}{c_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)}}. \quad (74)$$

Substituindo os resultados acima (73,74) na Eq.(66) encontramos duas curvas separáveis que envolvem os pesos $a_{\pm}^{(i)}, b_{\pm}^{(i)}$ e $c_{\pm}^{(i)}$ para $i = 1, 2$. Suas soluções nos levam aos seguintes invariantes,

$$\frac{[a_{\pm}^{(i)}]^2 + [b_{\pm}^{(i)}]^2 - [c_{\pm}^{(i)}]^2}{a_{\pm}^{(i)} b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}, \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (75)$$

em que Δ_{\pm} são parâmetros invariantes livres.

Analisemos agora as relações associadas com o conjunto $G_{\pm}^{(2)}$. Começamos eliminando os pesos $d^{(0)}$ e $f^{(0)}$ das Eqs.(67,68). Como eles podem ser isolados das equações que possuem diferentes setores de carga, precisamos manter suas expressões explícitas, uma vez que as compatibilidades entre elas serão implementadas adiante. As expressões para $d^{(0)}$ e $f^{(0)}$ são,

$$\frac{d^{(0)}}{c_{\pm}^{(0)}} = \frac{d^{(1)} a_{\pm}^{(2)}}{c_{\pm}^{(1)}} \left\{ \frac{b_{\pm}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)}}{f^{(1)} a_{\pm}^{(2)} b_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(1)} [b_{\pm}^{(2)}]^2 + b_{\pm}^{(1)} [c_{\pm}^{(2)}]^2} \right\}, \quad (76)$$

$$f^{(0)} = \left[\frac{f^{(1)} a_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)}}{d^{(1)} c_{\pm}^{(2)}} \right] d^{(0)}, \quad (77)$$

em que, como anteriormente, elas são dadas em termos dos pesos comuns $c_{\pm}^{(0)}$.

Então, substituímos as Eqs.(76,77) na Eq.(69) e considerando que os pesos de Boltzmann são não nulos, encontramos a seguinte relação,

$$c_{\mp}^{(2)} \left\{ \left([b_{\pm}^{(1)}]^2 + [f^{(1)}]^2 \right) a_{\pm}^{(2)} b_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(1)} f^{(1)} \left([a_{\pm}^{(2)}]^2 + [b_{\pm}^{(2)}]^2 - [c_{\pm}^{(2)}]^2 \right) \right\} \quad (78)$$

$$- \Psi [d^{(1)}]^2 a_{\pm}^{(2)} b_{\mp}^{(2)} c_{\pm}^{(2)} = 0.$$

Usando o invariante (75) no segundo termo da Eq.(78) é possível separar os pesos com índice $i = 1$ daqueles com índice $i = 2$. De fato, a solução da Eq.(78) pode ser escrita como,

$$\frac{[b_{\pm}^{(1)}]^2 + [f^{(1)}]^2 - \Delta_{\pm} b_{\pm}^{(1)} f^{(1)}}{[d^{(1)}]^2} = \Psi \frac{b_{\mp}^{(2)} c_{\pm}^{(2)}}{b_{\pm}^{(2)} c_{\mp}^{(2)}} = \Lambda_{\pm}, \quad (79)$$

em que Λ_{\pm} são, novamente, parâmetros constantes. No entanto, devido a consistência do lado direito da Eq.(79) eles são relacionados por,

$$\Lambda_+ \Lambda_- = \Psi^2. \quad (80)$$

Com o objetivo de completar a análise do conjunto $G_{\pm}^{(2)}$ precisamos impor a compatibilidade entre as duas possibilidades para $d^{(0)}$ e $f^{(0)}$ derivadas das relações (76,77). A consistência para os pesos $d^{(0)}$ é facilmente resolvida fixando-se a relação entre as amplitudes $c_+^{(0)}$ e $c_-^{(0)}$. Em contraste, a compatibilidade para o peso $f^{(0)}$ impõe a identificação das expressões para os índices de carga \pm da Eq.(77). O resultado de tal identificação é,

$$b_-^{(1)}b_-^{(2)}c_+^{(2)} - b_+^{(1)}b_+^{(2)}c_-^{(2)} + f^{(1)}a_+^{(2)}c_-^{(2)} - f^{(1)}a_-^{(2)}c_+^{(2)} = 0. \quad (81)$$

Felizmente, a Eq.(81) torna-se separável uma vez que considerarmos o lado direito da Eq.(79). Isso nos permite relacionar o produto $b_-^{(2)}c_+^{(2)}$ com $b_+^{(2)}c_-^{(2)}$ e como resultado, a Eq.(81) pode ser trivialmente resolvida pelo método de separação de variáveis. A solução final é,

$$\frac{\frac{\Lambda_{\pm}}{\Psi}b_-^{(1)} - b_+^{(1)}}{f^{(1)}} = \frac{a_-^{(2)}c_+^{(2)} - a_+^{(2)}c_-^{(2)}}{b_+^{(2)}c_-^{(2)}} = \Omega, \quad (82)$$

em que Ω é um novo invariante.

Antes de prosseguir com a análise do conjunto $G_{\pm}^{(3)}$ devemos discutir os resultados obtidos até agora. A característica principal do último invariante (82) é que ele relaciona pesos com diferentes índices de carga. Portanto, esperamos que os invariantes Δ_{\pm} , Λ_{\pm} , Ψ e Ω estejam relacionados de alguma forma. Uma forma de revelar esses vínculos é proceder da seguinte maneira. Usando o lado esquerdo das Eqs.(79,82) podemos eliminar os pesos $d^{(1)}$ e $b_-^{(1)}$, ou seja,

$$[d^{(1)}]^2 = \frac{1}{\Lambda_+} \left\{ [b_+^{(1)}]^2 + [f^{(1)}]^2 - \Delta_+ b_+^{(1)} f^{(1)} \right\}, \quad b_-^{(1)} = \frac{\Psi}{\Lambda_+} [b_+^{(1)} + \Omega f^{(1)}]. \quad (83)$$

Agora, substituímos os resultados (83) no lado esquerdo da Eq.(79) com o índice de carga $-$. Após utilizar a relação (80) obtemos a expressão,

$$\Psi (2\Omega\Psi + \Delta_+\Psi - \Delta_-\Lambda_+) b_+^{(1)} + (\Lambda_+^2 - \Delta_-\Lambda_+\Omega\Psi - \Psi^2 + \Omega^2\Psi^2) f^{(1)} = 0. \quad (84)$$

Em seguida, consideramos uma abordagem análoga para os pesos com índices $i = 2$. Primeiramente, eliminamos os pesos $b_-^{(2)}$ e $c_-^{(2)}$ com a ajuda do lado direito das Eqs.(79,82),

$$b_-^{(2)} = \frac{\Lambda_+ b_+^{(2)} c_-^{(2)}}{\Psi c_+^{(2)}}, \quad c_-^{(2)} = \frac{a_-^{(2)} c_+^{(2)}}{a_+^{(2)} + \Omega b_+^{(2)}}. \quad (85)$$

Substituindo a Eq.(85) no invariante que une os pesos $a_-^{(2)}$, $b_-^{(2)}$ e $c_-^{(2)}$ dados pela Eq.(75) obtemos,

$$\begin{aligned} & \Lambda_+^2 \left[b_+^{(2)} \right]^2 - \Delta_- \Lambda_+ \Psi b_+^{(2)} \left[a_+^{(2)} + \Omega b_+^{(2)} \right] \\ & + \Psi^2 \left\{ \left[a_+^{(2)} \right]^2 + 2\Omega a_+^{(2)} b_+^{(2)} + \Omega^2 \left[b_+^{(2)} \right]^2 - \left[c_+^{(2)} \right]^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

A relação acima pode ser ainda simplificada usando a expressão para o invariante Δ_+ , veja Eq.(75), no último termo da Eq.(86). Efetuando tal simplificação obtemos,

$$\Psi (2\Omega\Psi + \Delta_+\Psi - \Delta_-\Lambda_+) a_+^{(2)} + (\Lambda_+^2 - \Delta_-\Lambda_+\Omega\Psi - \Psi^2 + \Omega^2\Psi^2) b_+^{(2)} = 0. \quad (87)$$

Assim, alcançamos um ponto em que duas possibilidades emergem. A primeira consiste na hipótese de que o pares de pesos $\{b_+^{(i)}, f^{(i)}\}$ e $\{a_+^{(i)}, b_+^{(i)}\}$ são considerados linearmente dependentes. A partir das Eqs.(84,87), podemos ver que essa hipótese implica na identidade $\frac{b_+^{(1)}}{f^{(1)}} = \frac{a_+^{(2)}}{b_+^{(2)}}$ que juntamente com a Eq.(77) nos leva a concluir que os pesos $f^{(0)}$ se anulam. Aqui, destacamos que estamos procurando por modelos de dezenove vértices genuínos e, portanto, essa solução deve ser ingorada. Logo, somos obrigados a escolher a segunda possibilidade que consiste em impor que os coeficientes das Eqs.(84,87) sejam nulos. Essa condição implica que os invariantes Δ_\pm , Λ_+ , Ψ e Ω sejam vinculados pelas seguintes equações,

$$2\Omega\Psi + \Delta_+\Psi - \Delta_-\Lambda_+ = 0, \quad (88)$$

$$\Lambda_+^2 - \Delta_-\Lambda_+\Omega\Psi - \Psi^2 + \Omega^2\Psi^2 = 0. \quad (89)$$

Vamos discutir agora a solução das equações funcionais associadas ao conjunto $G_\pm^{(3)}$. Para este conjunto, podemos ver que os pesos a serem eliminados são $a_\pm^{(0)}$, $b_\pm^{(0)}$ e $c_\pm^{(0)}$. Entretanto, eles já foram computados através das Eqs.(64-66) e assim a nossa tarefa consiste em fazer as equações do conjunto $G_\pm^{(3)}$ compatíveis com as do conjunto $G_\pm^{(1)}$. O primeiro passo para resolver esse problema é garantir desde o início que todas as seis relações funcionais do conjunto $G_\pm^{(3)}$ sejam satisfeitas. Isto é feito eliminando os pesos $a_\pm^{(0)}$ e $b_\pm^{(0)}$ das Eqs.(70,71),

$$\frac{a_\pm^{(0)}}{c_\pm^{(0)}} = \frac{1}{d^{(1)}d^{(2)}} \left\{ \frac{\left[b_\pm^{(1)}d^{(2)} - d^{(1)}f^{(2)} \right] \left[b_\pm^{(1)}d^{(2)} + d^{(1)}f^{(2)} \right]}{b_\pm^{(1)}b_\pm^{(2)} - f^{(1)}f^{(2)}} \right\}, \quad (90)$$

$$\frac{b_{\pm}^{(0)}}{c_{\pm}^{(0)}} = \frac{1}{d^{(1)}d^{(2)}} \left\{ \frac{b_{\pm}^{(1)} f^{(1)} [d^{(2)}]^2 - [d^{(1)}]^2 b_{\pm}^{(2)} f^{(2)}}{b_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - f^{(1)} f^{(2)}} \right\}. \quad (91)$$

Substituindo as expressões (90,91) na última equação do conjunto $G_{\pm}^{(3)}$, i.e. Eq.(72), obtemos para o setor de carga +,

$$\begin{aligned} & b_+^{(1)} f^{(1)} \left\{ b_-^{(2)} b_+^{(2)} - \Psi [d^{(2)}]^2 \right\} - b_+^{(2)} f^{(2)} \left\{ b_-^{(1)} b_+^{(1)} - \Psi [d^{(1)}]^2 \right\} \\ & - [f^{(1)}]^2 b_-^{(2)} f^{(2)} + b_-^{(1)} f^{(1)} [f^{(2)}]^2 = 0, \end{aligned} \quad (92)$$

enquanto para o setor de carga – encontramos,

$$\begin{aligned} & b_-^{(1)} f^{(1)} \left\{ b_-^{(2)} b_+^{(2)} - \Psi [d^{(2)}]^2 \right\} - b_-^{(2)} f^{(2)} \left\{ b_-^{(1)} b_+^{(1)} - \Psi [d^{(1)}]^2 \right\} \\ & - [f^{(1)}]^2 b_+^{(2)} f^{(2)} + b_+^{(1)} f^{(1)} [f^{(2)}]^2 = 0, \end{aligned} \quad (93)$$

Embora as Eqs.(92,93) não sejam individualmente separáveis, podemos considerar combinações lineares de tais equações que são separáveis nos índices $i = 1, 2$. De fato, adicionando e subtraindo as Eqs.(92,93), temos como resultado o seguinte vínculo,

$$\frac{\left[b_+^{(i)} \pm b_-^{(i)} \right] f^{(i)}}{b_+^{(i)} b_-^{(i)} - \Psi [d^{(i)}]^2 \pm [f^{(i)}]^2} = \Theta_{\pm}, \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (94)$$

em que Θ_{\pm} são invariantes adicionais.

Mais uma vez, o invariante (94) une pesos que carregam diferentes setores de carga \pm . Assim, temos que repetir a mesma análise feita para o invariante Ω , veja Eq.(82). Como antes, a expressão (94) para índice $i = 1$ é simplificada com a ajuda dos pesos $d^{(1)}$ e $b_-^{(1)}$ dados pela Eq.(83). Isso nos leva à seguinte identidade,

$$[\Lambda_+ \pm \Psi - \Psi \Theta_{\pm} (\Delta_+ + \Omega)] b_+^{(1)} + [\pm \Omega \Psi \mp \Theta_{\pm} (\Lambda_+ \mp \Psi)] f^{(1)} = 0. \quad (95)$$

Considerando que estamos procurando soluções linearmente independentes para os pesos $b_+^{(1)}$ e $f^{(1)}$ é necessário que os coeficientes da Eq.(95) sejam iguais a zero. Em outras palavras, temos as restrições adicionais,

$$\Lambda_+ \pm \Psi - \Psi \Theta_{\pm} (\Delta_+ + \Omega) = 0, \quad (96)$$

e

$$\pm \Omega \Psi \mp \Theta_{\pm} (\Lambda_+ \mp \Psi) = 0. \quad (97)$$

Podemos observar que resolvendo a Eq.(96) para os invariantes Θ_{\pm} e substituindo o resultado na relação (97) descobrimos que ela é trivialmente satisfeita desde que

consideremos o vínculo anterior (88) resolvido para o invariante Δ_- . Isto significa que as Eqs.(96,97) são ambas resolvidas desde que,

$$\Theta_{\pm} = \frac{\Lambda_+ \pm \Psi}{\Psi(\Delta_+ + \Omega)}. \quad (98)$$

Para o índice $i = 2$ temos que usar novamente a expressão para os pesos $b_-^{(2)}$ e $c_-^{(2)}$ dados pela Eq.(85). Substituindo esses pesos na Eq.(94) obtemos duas equações lineares para o peso $a_-^{(2)}$ associado aos setores de carga \pm . Eles são dados por,

$$a_-^{(2)} = \frac{\Psi \left[a_+^{(2)} + \Omega b_+^{(2)} \right] \left\{ \Psi \Theta_{\pm} [d^{(2)}]^2 + b_+^{(2)} f^{(2)} \mp \Theta_{\pm} [f^{(2)}]^2 \right\}}{\Lambda_+ b_+^{(2)} \left[\Theta_{\pm} b_+^{(2)} \mp f^{(2)} \right]}. \quad (99)$$

A compatibilidade de tais relações para os setores \pm e o fato de que os pesos não devem ser nulos nos leva à seguinte relação entre os pesos $b_+^{(2)}$, $d^{(2)}$ e $f^{(2)}$,

$$(\Theta_- - \Theta_+) \left\{ [b_+^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 \right\} + \Psi (\Theta_+ + \Theta_-) [d^{(2)}]^2 + 2(1 - \Theta_+ \Theta_-) b_+^{(2)} f^{(2)} = 0. \quad (100)$$

Considerando os vínculos (88,89,98), podemos mostrar que a Eq.(100) torna-se equivalente à seguinte expressão,

$$\Psi^2(\Delta_+ + \Omega) \left\{ [b_+^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 - \Lambda_+ [d^{(2)}]^2 - \Delta_+ b_+^{(2)} f^{(2)} \right\} = 0. \quad (101)$$

A única solução da Eq.(101) que não leva a pesos nulos é ⁶,

$$\frac{[b_+^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 - \Delta_+ b_+^{(2)} f^{(2)}}{[d^{(2)}]^2} = \Lambda_+. \quad (102)$$

Observemos que a Eq.(102) generaliza o lado esquerdo do invariante (79) para os pesos com índice $i = 2$. Nesse ponto, observamos que este fato também vale para o invariante Λ_- envolvendo os pesos $b_-^{(2)}$, $d^{(2)}$ e $f^{(2)}$. De fato, usando a expressão para os pesos $b_-^{(2)}$, $c_-^{(2)}$, $a_-^{(2)}$ obtidos das Eqs.(85,99) além dos vínculos (80,88,89,98) entre os invariantes bem como a Eq.(102) para eliminar o peso $[d^{(2)}]^2$, é possível verificar que,

$$\frac{[b_-^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 - \Delta_- b_-^{(2)} f^{(2)}}{[d^{(2)}]^2} = \Lambda_-. \quad (103)$$

⁶Note que $\Psi = 0$ implica $\tilde{d}^{(i)} = 0$ enquanto $\Delta_+ + \Omega = 0$ é equivalente a $b_+^{(2)} b_-^{(2)} - \Psi [d^{(2)}]^2 \pm [f^{(2)}]^2 = 0$. A última identidade implica que $f^{(2)} = 0$.

Agora, podemos voltar a discutir a solução das equações restantes do conjunto $G_{\pm}^{(3)}$. Nessa etapa, temos que igualar os pesos $a_{\pm}^{(0)}$ e $b_{\pm}^{(0)}$ obtidos de diferentes pares de relações associadas aos conjuntos $G_{\pm}^{(1)}$ e $G_{\pm}^{(3)}$. Em outras palavras, temos que fazer a Eq.(73) compatível com a Eq.(90) assim como a Eq.(74) consistente com a Eq.(91). Essas compatibilidades são equivalentes a resolver as seguintes relações funcionais,

$$d^{(1)}d^{(2)} \left[b_{\pm}^{(1)}a_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(1)}b_{\pm}^{(2)} \right] \left[b_{\pm}^{(1)}b_{\pm}^{(2)} - f^{(1)}f^{(2)} \right] = c_{\pm}^{(1)}c_{\pm}^{(2)} \left\{ b_{\pm}^{(1)}f^{(1)} [d^{(2)}]^2 - [d^{(1)}]^2 b_{\pm}^{(2)}f^{(2)} \right\}, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} & d^{(1)}d^{(2)} \left\{ b_{\pm}^{(1)}a_{\pm}^{(2)}b_{\pm}^{(2)} - a_{\pm}^{(1)} [b_{\pm}^{(2)}]^2 + a_{\pm}^{(1)} [c_{\pm}^{(2)}]^2 \right\} \left[b_{\pm}^{(1)}b_{\pm}^{(2)} - f^{(1)}f^{(2)} \right] \\ & = c_{\pm}^{(1)}c_{\pm}^{(2)}a_{\pm}^{(2)} \left\{ [b_{\pm}^{(1)}]^2 [d^{(2)}]^2 - [d^{(1)}]^2 [f^{(2)}]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (105)$$

Progressos podem ser feitos elevando ao quadrado ambos os lados das expressões (104,105). Esta operação torna possível a utilização dos invariantes Δ_{\pm} (75) para eliminar os pesos $[c_{\pm}^{(i)}]^2$ assim como as Eqs.(79,102,103) para extrair $[d^{(i)}]^2$ para ambos $i = 1, 2$. Realizando esses dois passos, as Eqs.(104,105) tornam-se proporcionais a,

$$\begin{aligned} & b_{\pm}^{(2)} [a_{\pm}^{(2)} + f^{(2)}] \left\{ [b_{\pm}^{(1)}]^2 - a_{\pm}^{(1)}f^{(1)} \right\} - b_{\pm}^{(1)} [a_{\pm}^{(1)} + f^{(1)}] \left\{ [b_{\pm}^{(2)}]^2 - a_{\pm}^{(2)}f^{(2)} \right\} + \\ & - \Delta_{\pm} \left\{ a_{\pm}^{(2)}f^{(2)} [b_{\pm}^{(1)}]^2 - a_{\pm}^{(1)}f^{(1)} [b_{\pm}^{(2)}]^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (106)$$

Uma análise cuidadosa da Eq.(106) mostra que tal relação pode de fato ser separada para ambos os índices de carga \pm , nos levando ao último invariante associado às relações de três termos,

$$\frac{a_{\pm}^{(i)}b_{\pm}^{(i)} - \Delta_{\pm}a_{\pm}^{(i)}f^{(i)} + b_{\pm}^{(i)}f^{(i)}}{[b_{\pm}^{(i)}]^2 - a_{\pm}^{(i)}f^{(i)}} = \Gamma_{\pm} \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (107)$$

em que Γ_{\pm} são invariantes adicionais.

O último passo da nossa análise consiste em mais uma compatibilização: a dos diferentes setores de carga \pm do invariante (107). Esta tarefa envolve a manipulação de várias expressões e os respectivos detalhes técnicos são apresentados no Apêndice A. A condição de consistência resulta em um vínculo entre os invariantes Γ_{\pm} , Λ_{+} e Ω cuja expressão é bastante simples, a saber,

$$\Gamma_{-}\Lambda_{+} - \Psi(\Gamma_{+} + \Omega) = 0. \quad (108)$$

Além disso, outro importante resultado da análise feita no Apêndice A é que os únicos pesos independentes são $a_+^{(i)}$, $b_+^{(i)}$ e $c_+^{(i)}$. De fato, as demais amplitudes presentes nas equações de três termos podem ser escritas por meio de tais pesos. Como resultado, os pesos $a_-^{(i)}$, $b_-^{(i)}$, $c_-^{(i)}$, $d^{(i)}$ e $f^{(i)}$ são dados em termos de razões de polinômios cujo grau máximo é igual a dois. No que se segue, apresentaremos tais relações uma vez que serão úteis posteriormente. Usando os resultados do Apêndice A, as expressões simplificadas para os pesos $a_-^{(i)}$, $b_-^{(i)}$, $c_-^{(i)}$ são,

$$a_-^{(i)} = \frac{\Psi^2(a_+^{(i)} + \Omega b_+^{(i)})[(\Delta_+ - \Gamma_+ + \Omega)a_+^{(i)} - (1 + \Gamma_+ \Omega)b_+^{(i)}]}{\Lambda_+^2[(\Delta_+ - \Gamma_+)a_+^{(i)} - b_+^{(i)}]}, \quad (109)$$

$$b_-^{(i)} = \frac{\Psi[(\Delta_+ - \Gamma_+ + \Omega)a_+^{(i)} - (1 + \Gamma_+ \Omega)b_+^{(i)}]}{\Lambda_+[(\Delta_+ - \Gamma_+)a_+^{(i)} - b_+^{(i)}]} b_+^{(i)}, \quad (110)$$

$$c_-^{(i)} = \frac{\Psi^2[(\Delta_+ - \Gamma_+ + \Omega)a_+^{(i)} - (1 + \Gamma_+ \Omega)b_+^{(i)}]}{\Lambda_+^2[(\Delta_+ - \Gamma_+)a_+^{(i)} - b_+^{(i)}]} c_+^{(i)}, \quad (111)$$

enquanto para os pesos $d^{(i)}$ e $f^{(i)}$ temos,

$$d^{(i)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \Delta_+ \Gamma_+ + \Gamma_+^2}{\Lambda_+}} \frac{b_+^{(i)} c_+^{(i)}}{(-\Delta_+ + \Gamma_+) a_+^{(i)} + b_+^{(i)}}, \quad f^{(i)} = \frac{[a_+^{(i)} - \Gamma_+ b_+^{(i)}] b_+^{(i)}}{(\Delta_+ - \Gamma_+) a_+^{(i)} - b_+^{(i)}}. \quad (112)$$

Gostaríamos de concluir essa seção com os seguintes comentários. Primeiro, é importante destacar que todos os invariantes obtidos até aqui também são válidos para índice $i = 0$. Este resultado é verificado usando as expressões dos pesos eliminados $a_\pm^{(0)}$, $b_\pm^{(0)}$, $c_\pm^{(0)}$, $d^{(0)}$ e $f^{(0)}$ nas expressões dos respectivos invariantes. Como consequência, as relações acima (109-112) permanecem válidas para os pesos $a_-^{(0)}$, $b_-^{(0)}$, $c_-^{(0)}$, $d^{(0)}$ e $f^{(0)}$. Observamos finalmente que dos dez invariante encontrados, Δ_\pm , Λ_\pm , Γ_\pm , Θ_\pm , Ω e Ψ , apenas quatro deles permanecem livres em razão dos seis vínculos (80,88,89,98,108). Todos os invariantes obtidos nessa seção estão resumidos na Figura 4.

$$\begin{array}{c}
\boxed{\frac{[a_{\pm}^{(i)}]^2 + [b_{\pm}^{(i)}]^2 - [c_{\pm}^{(i)}]^2}{a_{\pm}^{(i)} b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}} \\
| \\
\boxed{\frac{[b_{\pm}^{(i)}]^2 + [f^{(i)}]^2 - \Delta_{\pm} b_{\pm}^{(i)} f^{(i)}}{[d^{(i)}]^2} = \Psi \frac{b_{\mp}^{(i)} c_{\pm}^{(i)}}{b_{\pm}^{(i)} c_{\mp}^{(i)}} = \Lambda_{\pm}} \\
| \\
\boxed{\frac{\frac{\Lambda_{\pm} b_{\pm}^{(i)} - b_{\pm}^{(i)}}{\Psi} - b_{\mp}^{(i)}}{f^{(i)}} = \frac{a_{-}^{(i)} c_{+}^{(i)} - a_{+}^{(i)} c_{-}^{(i)}}{b_{+}^{(i)} c_{-}^{(i)}} = \Omega} \\
| \\
\boxed{\frac{[b_{+}^{(i)} \pm b_{-}^{(i)}] f^{(i)}}{b_{+}^{(i)} b_{-}^{(i)} - \Psi [d^{(i)}]^2 \pm [f^{(i)}]^2} = \Theta_{\pm}} \\
| \\
\boxed{\frac{a_{\pm}^{(i)} b_{\pm}^{(i)} - \Delta_{\pm} a_{\pm}^{(i)} f^{(i)} + b_{\pm}^{(i)} f^{(i)}}{[b_{\pm}^{(i)}]^2 - a_{\pm}^{(i)} f^{(i)}} = \Gamma_{\pm}}
\end{array}$$

Figura 4: Estruturas algébricas provenientes da resolução das relações de três termos (64-72), válidas para $i = 0, 1, 2$. Os invariantes são vinculados pelas Eqs.(80,88, 89,98,108).

3.3 Relações de Quatro Termos

Após a solução das equações de dois termos, Eqs.(62,63), o número total de relações de quatro termos se reduz para cinquenta e uma equações. A maioria destas relações depende dos pesos $g^{(i)}$, $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$ que ainda devem ser determinados. A única exceção é uma equação fatorizável, dada por,

$$d^{(0)} d^{(2)} (\Psi^2 - 1) [c_{+}^{(1)} - c_{-}^{(1)}] = 0. \quad (113)$$

As outras cinquenta equações podem ser classificadas em cinco diferentes conjuntos caracterizados pela presença ou não dos pesos $g^{(i)}$, $h^{(i)}$, $\tilde{h}^{(i)}$ nas relações funcionais. Há equações nas quais aparecem apenas um desses três pesos, equações em que aparecem dois deles e equações envolvendo os três pesos ainda desconhecidos. Os conjuntos de equações estão listados abaixo,

- conjunto $G_{\pm}^{(4)}$

$$-c_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + \Psi d^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + g^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(0)} g^{(1)} c_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (114)$$

$$-b_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + \Psi b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} d^{(2)} - c_{\pm}^{(0)} g^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} g^{(2)} = 0, \quad (115)$$

$$-d^{(0)} b_{\mp}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + c_{\mp}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - g^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + b_{\mp}^{(0)} d^{(1)} g^{(2)} = 0, \quad (116)$$

- conjunto $G_{\pm}^{(5)}$

$$h^{(0)} (b_{-}^{(1)} b_{+}^{(2)} - b_{+}^{(1)} b_{-}^{(2)}) + d^{(0)} d^{(1)} (c_{+}^{(2)} - c_{-}^{(2)}) = 0, \quad (117)$$

$$h^{(1)} (b_{+}^{(0)} b_{+}^{(2)} - b_{-}^{(0)} b_{-}^{(2)}) - c_{-}^{(0)} c_{+}^{(1)} c_{-}^{(2)} + c_{+}^{(0)} c_{-}^{(1)} c_{+}^{(2)} = 0, \quad (118)$$

$$h^{(2)} (b_{+}^{(0)} b_{-}^{(1)} - b_{-}^{(0)} b_{+}^{(1)}) + d^{(1)} d^{(2)} (c_{+}^{(0)} - c_{-}^{(0)}) = 0, \quad (119)$$

$$-d^{(0)} d^{(1)} b_{\mp}^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - h^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\mp}^{(2)} + b_{\pm}^{(0)} h^{(1)} c_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (120)$$

$$c_{\pm}^{(0)} h^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + b_{\pm}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - b_{\mp}^{(0)} d^{(1)} d^{(2)} - c_{\mp}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (121)$$

$$a_{\pm}^{(0)} h^{(1)} a_{\pm}^{(2)} - d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - f^{(0)} h^{(1)} f^{(2)} - h^{(0)} a_{\pm}^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (122)$$

- conjunto $G_{\pm}^{(6)}$

$$\tilde{h}^{(0)} (b_{+}^{(1)} b_{-}^{(2)} - b_{-}^{(1)} b_{+}^{(2)}) + \Psi^2 d^{(0)} d^{(1)} (c_{-}^{(2)} - c_{+}^{(2)}) = 0, \quad (123)$$

$$\tilde{h}^{(1)} (b_{-}^{(0)} b_{-}^{(2)} - b_{+}^{(0)} b_{+}^{(2)}) + c_{-}^{(0)} c_{+}^{(1)} c_{-}^{(2)} - c_{+}^{(0)} c_{-}^{(1)} c_{+}^{(2)} = 0, \quad (124)$$

$$\tilde{h}^{(2)} (-b_{+}^{(0)} b_{-}^{(1)} + b_{-}^{(0)} b_{+}^{(1)}) + \Psi^2 d^{(1)} d^{(2)} (c_{-}^{(0)} - c_{+}^{(0)}) = 0, \quad (125)$$

$$\Psi^2 d^{(0)} d^{(1)} b_{\mp}^{(2)} - c_{\pm}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(0)} \tilde{h}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + \tilde{h}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\mp}^{(2)} = 0, \quad (126)$$

$$-c_{\pm}^{(0)} \tilde{h}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + \Psi^2 b_{\mp}^{(0)} d^{(1)} d^{(2)} + c_{\mp}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (127)$$

$$-a_{\pm}^{(0)} \tilde{h}^{(1)} a_{\pm}^{(2)} + f^{(0)} \tilde{h}^{(1)} f^{(2)} + \Psi^2 d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + \tilde{h}^{(0)} a_{\pm}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (128)$$

- conjunto $G_{\pm}^{(7)}$

$$(\Psi^2 - 1) d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + \tilde{h}^{(0)} h^{(1)} \tilde{h}^{(2)} - h^{(0)} \tilde{h}^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (129)$$

$$\Psi h^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - \Psi c_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (130)$$

$$-\tilde{h}^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - \Psi d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + \Psi b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (131)$$

$$h^{(0)} f^{(1)} a_{\pm}^{(2)} - h^{(0)} a_{\pm}^{(1)} f^{(2)} - \Psi d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - f^{(0)} h^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (132)$$

$$-\tilde{h}^{(0)} f^{(1)} a_{\pm}^{(2)} + \tilde{h}^{(0)} a_{\pm}^{(1)} f^{(2)} + \Psi d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + f^{(0)} \tilde{h}^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (133)$$

$$h^{(0)} \tilde{h}^{(1)} f^{(2)} + \Psi d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + f^{(0)} a_{\pm}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} - a_{\pm}^{(0)} f^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (134)$$

$$-\tilde{h}^{(0)} h^{(1)} f^{(2)} - \Psi d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - f^{(0)} a_{\pm}^{(1)} h^{(2)} + a_{\pm}^{(0)} f^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (135)$$

• conjunto $G_{\pm}^{(8)}$

$$-\Psi c_{\pm}^{(0)} d^{(1)} a_{\pm}^{(2)} + f^{(0)} \tilde{h}^{(1)} d^{(2)} + \Psi d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} g^{(2)} + \Psi \tilde{h}^{(0)} a_{\pm}^{(1)} d^{(2)} = 0, \quad (136)$$

$$c_{\pm}^{(0)} d^{(1)} a_{\pm}^{(2)} - h^{(0)} a_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} g^{(2)} - \Psi f^{(0)} h^{(1)} d^{(2)} = 0, \quad (137)$$

$$a_{\pm}^{(0)} d^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - g^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - \Psi d^{(0)} h^{(1)} f^{(2)} - d^{(0)} a_{\pm}^{(1)} h^{(2)} = 0, \quad (138)$$

$$d^{(0)} \tilde{h}^{(1)} f^{(2)} - \Psi a_{\pm}^{(0)} d^{(1)} c_{\pm}^{(2)} + \Psi g^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + \Psi d^{(0)} a_{\pm}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (139)$$

$$h^{(0)} c_{\mp}^{(1)} f^{(2)} - c_{\pm}^{(0)} f^{(1)} c_{\mp}^{(2)} + \Psi d^{(0)} g^{(1)} d^{(2)} + f^{(0)} c_{\pm}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0, \quad (140)$$

$$c_{\pm}^{(0)} f^{(1)} c_{\mp}^{(2)} - \Psi d^{(0)} g^{(1)} d^{(2)} - \tilde{h}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} f^{(2)} - f^{(0)} c_{\pm}^{(1)} h^{(2)} = 0. \quad (141)$$

A Eq.(113) nos mostra que existem pelo menos duas ramificações na solução da equação de Yang-Baxter. Ou $\Psi^2 = 1$ ou $c_{+}^{(1)} = c_{-}^{(1)}$ uma vez que os pesos $d^{(i)}$ devem ser diferentes de zero. Essa informação, entretanto, não é necessária para resolver as equações associadas ao peso $g^{(i)}$, i.e., o conjunto $G_{\pm}^{(4)}$. De fato, podemos observar que as Eqs.(114,115) do conjunto $G_{\pm}^{(4)}$ contém os produtos triplos de pesos $b_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} c_{\pm}^{(1)}$, $c_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)}$, $\Psi d^{(0)} d^{(1)} b_{\pm}^{(2)}$ e $\Psi b_{\pm}^{(0)} d^{(1)} d^{(2)}$ que também estão presentes nas relações de três termos já resolvidas, veja Eqs.(64,66,69,72). Logo, eliminando os primeiros produtos triplos das relações de três termos mencionadas e substituindo o resultado nas Eqs.(114,115) obtemos as seguintes relações,

$$b_{\pm}^{(0)} \left[a_{\pm}^{(1)} - g^{(1)} \right] - \left[a_{\pm}^{(0)} - g^{(0)} \right] b_{\pm}^{(1)} - f^{(0)} b_{\mp}^{(1)} + b_{\mp}^{(0)} f^{(1)} = 0, \quad (142)$$

e

$$\left[a_{\pm}^{(1)} - g^{(1)} \right] b_{\pm}^{(2)} - b_{\pm}^{(1)} \left[a_{\pm}^{(2)} - g^{(2)} \right] + f^{(1)} b_{\mp}^{(2)} - b_{\mp}^{(1)} f^{(2)} = 0. \quad (143)$$

Um passo essencial para realizar a separação de variáveis nas Eqs.(142,143) é o uso do invariante Ω , que vincula os pesos $b_{+}^{(i)}$ e $b_{-}^{(i)}$. Com efeito, da expressão do terceiro quadro da Figura 4 podemos eliminar os pesos $b_{\pm}^{(i)}$ em termos de $b_{\mp}^{(i)}$ e $f^{(i)}$. Substituindo

então o resultado nas Eqs.(142,143) e realizando simples manipulações algébricas, que incluem o uso da identidade (80), obtemos o invariante associado ao peso $g^{(i)}$,

$$\frac{-g^{(i)} + a_{\pm}^{(i)} + \frac{\Psi}{\Lambda_{\pm}} f}{b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}^{(g)} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \quad (144)$$

em que $\Delta_{\pm}^{(g)}$ são parâmetros constantes.

Agora, devemos assegurar a consistência da Eq.(144) para os diferentes índices de carga \pm . Essa tarefa pode ser realizada impondo a igualdade entre as expressões para o peso $g^{(i)}$ obtidas dos setores $+$ e $-$, dada por,

$$a_{+}^{(i)} - a_{-}^{(i)} + \left(\frac{\Psi}{\Lambda_{+}} - \frac{\Psi}{\Lambda_{-}} \right) f^{(i)} - \Delta_{+}^{(g)} b_{+}^{(i)} + \Delta_{-}^{(g)} b_{-}^{(i)} = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, 2. \quad (145)$$

Para resolver a Eq.(145) substituímos as expressões para os pesos $a_{\pm}^{(i)}$, $b_{\pm}^{(i)}$ e $f^{(i)}$ obtidas na seção anterior, veja Eqs.(109,110,112). Após algumas simplificações algébricas, a Eq.(145) se torna uma equação polinomial nas amplitudes $a_{+}^{(i)}$ e $b_{+}^{(i)}$ com a seguinte forma⁷,

$$A_1 \left[a_{+}^{(i)} \right]^2 + A_2 a_{+}^{(i)} b_{+}^{(i)} + A_3 \left[b_{+}^{(i)} \right]^2 = 0 \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (146)$$

Os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 dependem somente de combinações de invariantes e devem ser nulos para garantir a validade da Eq.(145). Após usar o vínculo (80) suas expressões são,

$$\begin{aligned} A_1 &= (\Delta_{+} - \Gamma_{+}) \Lambda_{+}^2 - (\Delta_{+} - \Gamma_{+} + \Omega) \Psi^2 \equiv 0, \\ A_2 &= -\Lambda_{+}^3 - [1 + \Delta_{+}^{(g)} (\Delta_{+} - \Gamma_{+})] \Lambda_{+}^2 \Psi + [1 + \Delta_{-}^{(g)} (\Delta_{+} - \Gamma_{+} + \Omega)] \Lambda_{+} \Psi^2 \\ &\quad + [1 - \Omega (\Delta_{+} - 2\Gamma_{+} + \Omega)] \Psi^3 \equiv 0, \\ A_3 &= \Delta_{+}^{(g)} \Psi \Lambda_{+}^2 + \Gamma_{+} \Lambda_{+}^3 - [\Delta_{-}^{(g)} + \Gamma_{+} + \Delta_{-}^{(g)} \Gamma_{+} \Omega] \Lambda_{+} \Psi^2 + (1 + \Gamma_{+} \Omega) \Omega \Psi^3 \equiv 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Com o peso $g^{(i)}$ determinado, veja Eq.(144), o próximo passo consiste em descobrir as curvas algébricas associadas aos pesos de Boltzmann $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$. Para obter progressos nesta direção é necessário usar explicitamente os dois possíveis ramos oriundos da Eq.(113).

⁷Para $i = 0$ a equação (145) é automaticamente satisfeita se $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ e desde que as relações entre invariantes (80,88,89) sejam levadas em conta.

3.3.1 Ramo 1

Neste ramo temos $\Psi = \pm 1$. Esse vínculo simplifica consideravelmente a Eq.(129), a qual podemos usar para extrair o peso $\tilde{h}^{(0)}$,

$$\tilde{h}^{(0)} = \frac{\tilde{h}^{(1)}h^{(2)}}{h^{(1)}\tilde{h}^{(2)}}h^{(0)}. \quad (148)$$

Substituindo o resultado (148) nos pares de equações (122,128) e (120,126) é fácil ver que suas combinações lineares fixam uma relação entre $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$, dada por,

$$\tilde{h}^{(i)} = h^{(i)} \quad \text{para } i = 0, 1, 2. \quad (149)$$

Como consequência da Eq.(149) as equações do conjuntos $G_{\pm}^{(5)}$ e $G_{\pm}^{(6)}$ se tornam equivalentes assim como o número de relações independentes dos conjuntos $G_{\pm}^{(7)}$ e $G_{\pm}^{(8)}$ se reduz à metade. Com esses resultados, somos agora capazes de utilizar a mesma estratégia usada para resolver o peso $g^{(i)}$ para resolver os pesos $\tilde{h}^{(i)} = h^{(i)}$. Para tanto, em primeiro lugar, eliminamos os produtos triplos de pesos $d^{(0)}b_{\pm}^{(1)}c_{\pm}^{(2)}$ e $c_{\pm}^{(0)}b_{\pm}^{(1)}d^{(2)}$ das Eqs.(68,71) e então substituímos o resultado na Eq.(130), que se torna separável nos índices $i = 0$ e $i = 2$ da seguinte maneira,

$$\frac{-\Psi h^{(0)} + \Psi a_{\pm}^{(0)} + f^{(0)}}{b_{\pm}^{(0)}} = \frac{-h^{(2)} + a_{\pm}^{(2)} + \Psi f^{(2)}}{b_{\pm}^{(2)}} = \Delta_{\pm}^{(h)}, \quad (150)$$

em que $\Delta_{\pm}^{(h)}$ são constantes de separação.

Mais uma vez temos que implementar a compatibilidade entre as relações associadas aos diferentes setores de carga \pm . Esse procedimento é realizado de maneira análoga ao que foi feito para o peso $g^{(i)}$. Como resultado obtemos que os pesos $h^{(0)}$ e $h^{(2)}$ obtidos dos setores de carga \pm são compatíveis desde que as seguintes relações entre invariantes sejam satisfeitas,

$$\Delta_{+}^{(h)} = \frac{1}{\Lambda_{+}^2}(1 + \Gamma_{+}\Omega)(\Delta_{-}^{(h)}\Lambda_{+}\Psi - \Omega), \quad (151)$$

$$\Omega = (\Delta_{+} - \Gamma_{+})(\Lambda_{+}^2 - 1), \quad (152)$$

$$(\Lambda_{+}^2 - 1)\{1 + (\Delta_{+} - \Gamma_{+})[(\Delta_{+} - \Gamma_{+})(\Lambda_{+}^2 - 1) - \Delta_{-}^{(h)}\Lambda_{+}\Psi]\} = 0. \quad (153)$$

Da Eq.(153) observamos que o ramo 1 se subdivide em duas distintas famílias uma vez que tal relação possui duas diferentes soluções. Denominaremos tais possibilidades por ramos 1A e 1B. Para o ramo 1A o valor de Λ_{+} é fixado por,

$$\Lambda_{+}^2 = 1, \quad (154)$$

enquanto o ramo 1B é definido resolvendo-se a Eq.(153) para $\Delta_-^{(h)}$,

$$\Delta_-^{(h)} = \frac{1 + (\Lambda_+^2 - 1)(\Delta_+ - \Gamma_+)^2}{\Lambda_+ \Psi(\Delta_+ - \Gamma_+)}. \quad (155)$$

Em ambos os ramos 1A e 1B, podemos manipular as Eqs.(120,121) com o objetivo de determinar o único peso ainda desconhecido, $h^{(1)}$. O resultado é similar à expressão obtida para os pesos $h^{(0)}$ e $h^{(2)}$, e é dado por,

$$\frac{-h^{(1)} + a_{\pm}^{(1)} + \Psi f^{(1)}}{b_{\pm}^{(1)}} = \Delta_{\pm}^{(h)}. \quad (156)$$

Alcançamos então um ponto em que todos os pesos de Boltzmann estão dados em termos de invariantes e dos pesos $a_+^{(i)}$, $b_+^{(i)}$ e $c_+^{(i)}$. Substituindo-os nas relações de quatro termos ainda não utilizados e usando o invariante (75) para eliminar o peso $[c_+^{(i)}]^2$ obteremos equações polinomiais nas variáveis $a_+^{(i)}$ e $b_+^{(i)}$ cujos coeficientes dependem apenas de invariantes. Impondo que esses coeficientes sejam nulos e considerando os vínculos previamente obtidos (80,88,89,98,108) bem como as Eqs.(147,151,152,153) somos capazes de computar as expressões para os invariantes. Na verdade, basta que as Eqs.(116,136) sejam resolvidas para que todas as demais relações de quatro termos restantes sejam automaticamente satisfeitas. O resultado final dessa análise está resumido na Tabela 2.

Tabela 2: Expressões para os invariantes no ramo 1, em que a variável discreta $\epsilon_1 = \pm 1$.

Invariantes	Ramo 1A	Ramo 1B
Δ_+	livre	livre
Δ_-	Δ_+	$\frac{-\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{2}$
Λ_+	1	$\frac{2\epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{3\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}$
Λ_-	1	$\frac{\sqrt{3} \Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{2\epsilon_1 \sqrt{4 - \Delta_+^2}}$
Ψ	1	1
Ω	0	$\frac{6 - 3\Delta_+^2 - \epsilon_1 \sqrt{3} \Delta_+ \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{3\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}$
Γ_+	$\Delta_+ + \epsilon_1$	$\frac{3\Delta_+ - \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{6}$
Γ_-	$\Delta_+ + \epsilon_1$	$\frac{-3\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{6}$
Θ_+	$\frac{2}{\Delta_+}$	$\frac{\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{2}$
Θ_-	0	$\frac{-3\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{6}$
$\Delta_+^{(g)}$	$\Delta_+ - \epsilon_1$	$\frac{\epsilon_1 \sqrt{3} + \Delta_+ \sqrt{4 - \Delta_+^2}}{\sqrt{4 - \Delta_+^2}}$
$\Delta_-^{(g)}$	$\Delta_+ - \epsilon_1$	$\frac{(4 - \Delta_+^2)(\Delta_+ + \epsilon_1 \sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2})}{\epsilon_1 \sqrt{3} \Delta_+ \sqrt{4 - \Delta_+^2} + 4 - \Delta_+^2}$
$\Delta_+^{(h)}$	Δ_+	Δ_+
$\Delta_-^{(h)}$	Δ_+	$\frac{\sqrt{3} \sqrt{4 - \Delta_+^2} - \epsilon_1 \Delta_+}{2\epsilon_1}$

Para finalizar essa seção devemos fazer algumas observações. Os casos $\Psi = -1$ ou $\Lambda_+ = -1$ implicam valores fixos para os invariantes e podem ser reproduzidos no contexto da solução 1B e de outro ramo que discutiremos na próxima seção. Os detalhes técnicos relacionados a essas situações especiais estão coletados no Apêndice B. Finalmente, destacamos o fato de que os ramos 1A e 1B tem apenas um parâmetro livre, que escolhemos ser o invariante Δ_+ . Entretanto, apenas o ramo 1A é invariante por simetria de carga $+ \leftrightarrow -$.

3.3.2 Ramo 2

Outra possibilidade de solução da Eq.(113) é $c_+^{(1)} = c_-^{(1)}$. Essa condição, usada juntamente com o resultado anterior (111) leva a uma equação polinomial nas amplitudes

$a_+^{(1)}$ e $b_+^{(1)}$,

$$[(\Lambda_+^2 - \Psi^2)(\Delta_+ - \Gamma_+) - \Omega\Psi^2]a_+^{(1)} + [-\Lambda_+^2 + (1 + \Gamma_+\Omega)\Psi^2]b_+^{(1)} = 0. \quad (157)$$

A combinação linear (157) é satisfeita para $a_+^{(1)}$ e $b_+^{(1)}$ arbitrários impondo que os respectivos coeficientes sejam nulos. Como consequência, os invariantes Ω e Λ_+ são fixados por⁸,

$$\Omega = 0 \quad \text{e} \quad \Lambda_+ = \pm\Psi. \quad (158)$$

Usando o resultado (158) de volta nas expressões para os pesos $a_-^{(i)}$, $b_-^{(i)}$ e $c_-^{(i)}$ dados nas Eqs.(109,110,111) obtemos relações bastante simples,

$$\frac{a_-^{(i)}}{a_+^{(i)}} = 1, \quad \frac{b_-^{(i)}}{b_+^{(i)}} = \pm, \quad \frac{c_-^{(i)}}{c_+^{(i)}} = 1 \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2. \quad (159)$$

Como consequência imediata da Eq.(159) podemos implementar simplificações severas nas equações de quatro termos. Primeiramente, é um resultado direto que as Eqs.(117,118,119,123, 124,125) são automaticamente satisfeitas. Além disso, o número de relações independentes se reduz drasticamente: os conjuntos $G_\pm^{(5)}$ e $G_\pm^{(6)}$ passam a ter apenas três equações, enquanto os conjuntos $G_\pm^{(7)}$ e $G_\pm^{(8)}$ tem o número de equações reduzido à metade. Nesse ponto, estamos em posição de utilizar novamente a estratégia usada para obter o invariante vinculando o peso $g^{(i)}$, agora para os pesos $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$. De fato, eliminado os produtos triplos $b_+^{(0)}c_+^{(1)}c_+^{(2)}$, $c_+^{(0)}c_+^{(1)}b_+^{(2)}$, $\Psi d^{(0)}d^{(1)}b_+^{(2)}$ e $\Psi b_+^{(0)}d^{(1)}d^{(2)}$ via as Eqs.(64,66,69,72) e os substituindo nas Eqs.(120,121) conseguimos obter equações funcionais separáveis para o peso $h^{(i)}$, cuja solução é,

$$\frac{-\Psi h^{(i)} + \Psi a_+^{(i)} + f^{(i)}}{b_+^{(i)}} = \Delta_+^{(h)} \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2. \quad (160)$$

Da mesma forma o peso $\tilde{h}^{(i)}$ pode ser calculado. Através do mesmo método, mas agora para as Eqs.(126,127) obtem-se,

$$\frac{-\tilde{h}^{(i)} + a_+^{(i)} + \Psi f^{(i)}}{b_+^{(i)}} = \Delta_+^{(\tilde{h})} \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2. \quad (161)$$

A esta altura, todos os pesos de Boltzmann no ramo 2 foram determinados. O último passo é portanto substituí-los nas Eqs.(122,128) bem como nas relações dos

⁸Observe que a possível solução $\Delta_+ = \Gamma_+ + \Gamma_+^{-1}$ deve ser descartada uma vez que ela implica $d^{(i)} = 0$, veja Eq.(112).

Tabela 3: Expressões para os invariantes no ramo 2, em que $\omega = \exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right)$ e as variáveis discretas $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm$.

Invariantes	Ramo 2A	Ramo 2B
Δ_+	livre	$\epsilon_1\sqrt{3}$
Δ_-	Δ_+	$-\epsilon_1\sqrt{3}$
Λ_+	$\frac{2-\Delta_+^2+\epsilon_2\Delta_+\sqrt{\Delta_+^2-4}}{2}$	ω
Λ_-	$\frac{2-\Delta_+^2+\epsilon_2\Delta_+\sqrt{\Delta_+^2-4}}{2}$	ω
Ψ	$\frac{2-\Delta_+^2+\epsilon_2\Delta_+\sqrt{\Delta_+^2-4}}{2}$	$-\omega$
Ω	0	0
Γ_+	ϵ_1	$\frac{\epsilon_1}{\sqrt{3}}$
Γ_-	ϵ_1	$-\frac{\epsilon_1}{\sqrt{3}}$
Θ_+	$\frac{2}{\Delta_+}$	0
Θ_-	0	$-\frac{2\epsilon_1}{\sqrt{3}}$
$\Delta_+^{(g)}$	$\Delta_+ - \epsilon_1$	0
$\Delta_-^{(g)}$	$\Delta_+ - \epsilon_1$	0
$\Delta_+^{(h)}$	0	0
$\Delta_+^{(\tilde{h})}$	0	0

conjuntos $G_{\pm}^{(7)}$ e $G_{\pm}^{(8)}$ para fixar as relações entre invariantes. Mais uma vez temos que considerar dois possíveis sub-ramos, uma vez que desde o começo Eq.(158) tem duas possíveis soluções. Denominaremos a solução com $\Lambda_+ = \Psi$ de 2A e a solução com $\Lambda_+ = -\Psi$ de 2B. Levando em conta todos os vínculos anteriores, e procedendo de maneira análoga ao ramo 1, obtemos as relações finais entre invariantes para os ramos 2A e 2B, que estão resumidas na Tabela 3.

Observe que apenas o ramo 2A tem um parâmetro livre e é invariante por simetria de carga.

Um último e importante comentário deve ser feito nessa seção. Embora as curvas algébricas para os pesos $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$ sejam obtidas de diferentes equações para os ramos 1 e 2 suas expressões finais podem ser colocadas de uma forma unificada. De fato, elas

podem ser escritas como,

$$\frac{-\Psi h^{(i)} + \Psi a_{\pm}^{(i)} + f^{(i)}}{b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}^{(h)}, \quad \frac{-\tilde{h}^{(i)} + a_{\pm}^{(i)} + \Psi f^{(i)}}{b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}^{(\tilde{h})} \quad \text{para } i = 0, 1, 2. \quad (162)$$

O resultado geral (162) recupera o ramo 1 simplesmente através da identificação $\Delta_{\pm}^{(h)} = \Delta_{\pm}^{(\tilde{h})}$ enquanto para o ramo 2 temos que levar em conta a Eq.(159) e portanto impor $\frac{\Delta_{-}^{(h)}}{\Delta_{+}^{(h)}} = \frac{\Delta_{-}^{(\tilde{h})}}{\Delta_{+}^{(\tilde{h})}} = \pm$. Na Figura 5 resumimos os invariantes obtidos na resolução das equações de quatro termos.

$$\begin{array}{c} \boxed{\frac{-g^{(i)} + a_{\pm}^{(i)} + \frac{\Psi}{\Lambda_{\pm}} f}{b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}^{(g)}} \\ \mid \\ \boxed{\frac{-\Psi h^{(i)} + \Psi a_{\pm}^{(i)} + f^{(i)}}{b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}^{(h)}} \\ \mid \\ \boxed{\frac{-\tilde{h}^{(i)} + a_{\pm}^{(i)} + \Psi f^{(i)}}{b_{\pm}^{(i)}} = \Delta_{\pm}^{(\tilde{h})}} \end{array}$$

Figura 5: Estruturas algébricas provenientes da resolução das relações de quatro termos, válidas para $i = 0, 1, 2$. As expressões para os invariantes $\Delta_{\pm}^{(g)}$, $\Delta_{\pm}^{(h)}$ e $\Delta_{\pm}^{(\tilde{h})}$ estão dadas nas Tabelas 2 e 3.

3.4 Relações de Cinco Termos

O número de relações de cinco termos se mantém inalterado após a resolução das equações de dois termos. A seguir apresentamos a estrutura das vinte e quatro equações funcionais,

$$b_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - d^{(0)} \tilde{h}^{(1)} d^{(2)} - g^{(0)} c_{\pm}^{(1)} g^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} g^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - \Psi^2 d^{(0)} a_{\pm}^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (163)$$

$$b_{\pm}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - \Psi^2 d^{(0)} h^{(1)} d^{(2)} - g^{(0)} c_{\pm}^{(1)} g^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} g^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - d^{(0)} a_{\pm}^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (164)$$

$$\Psi b_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} d^{(1)} \tilde{h}^{(2)} - d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} g^{(2)} - \Psi f^{(0)} a_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - h^{(0)} \tilde{h}^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (165)$$

$$b_{\pm}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} + \Psi c_{\pm}^{(0)} d^{(1)} h^{(2)} - \Psi d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} g^{(2)} - f^{(0)} a_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - \Psi \tilde{h}^{(0)} h^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (166)$$

$$\Psi d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - \Psi d^{(0)} a_{\pm}^{(1)} f^{(2)} - g^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - d^{(0)} \tilde{h}^{(1)} h^{(2)} + \tilde{h}^{(0)} d^{(1)} c_{\pm}^{(2)} = 0 \quad (167)$$

$$d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} - d^{(0)} a_{\pm}^{(1)} f^{(2)} - \Psi g^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - \Psi d^{(0)} h^{(1)} \tilde{h}^{(2)} + \Psi h^{(0)} d^{(1)} c_{\pm}^{(2)} = 0 \quad (168)$$

$$b_{\pm}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} b_{\pm}^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} h^{(1)} c_{\pm}^{(2)} - f^{(0)} c_{\mp}^{(1)} f^{(2)} - h^{(0)} c_{\pm}^{(1)} h^{(2)} - d^{(0)} g^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (169)$$

$$b_{\mp}^{(0)} c_{\pm}^{(1)} b_{\mp}^{(2)} + c_{\mp}^{(0)} \tilde{h}^{(1)} c_{\mp}^{(2)} - f^{(0)} c_{\pm}^{(1)} f^{(2)} - \tilde{h}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} - \Psi^2 d^{(0)} g^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (170)$$

$$\Psi d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} b_{\mp}^{(2)} + \Psi g^{(0)} d^{(1)} c_{\mp}^{(2)} - f^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - \Psi d^{(0)} g^{(1)} g^{(2)} - \Psi \tilde{h}^{(0)} c_{\mp}^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (171)$$

$$d^{(0)} b_{\pm}^{(1)} b_{\mp}^{(2)} + g^{(0)} d^{(1)} c_{\mp}^{(2)} - \Psi f^{(0)} c_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - d^{(0)} g^{(1)} g^{(2)} - h^{(0)} c_{\mp}^{(1)} d^{(2)} = 0 \quad (172)$$

$$b_{\pm}^{(0)} b_{\mp}^{(1)} d^{(2)} - \Psi d^{(0)} c_{\mp}^{(1)} f^{(2)} + c_{\pm}^{(0)} d^{(1)} g^{(2)} - g^{(0)} g^{(1)} d^{(2)} - d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} h^{(2)} = 0 \quad (173)$$

$$\Psi b_{\mp}^{(0)} b_{\pm}^{(1)} d^{(2)} - d^{(0)} c_{\pm}^{(1)} f^{(2)} + \Psi c_{\mp}^{(0)} d^{(1)} g^{(2)} - \Psi g^{(0)} g^{(1)} d^{(2)} - \Psi d^{(0)} c_{\mp}^{(1)} \tilde{h}^{(2)} = 0 \quad (174)$$

As relações acima não envolvem nenhum novo peso de Boltzmann. Como consequência, podemos substituir as expressões para os pesos obtidas nas duas seções anteriores nas Eqs.(163-174) e procurar por novas restrições sobre os invariantes dos ramos 1 e 2. Curiosamente, após a resolução das equações de três e quatro termos todas as equações de cinco termos são automaticamente satisfeitas. Dessa maneira, as quatro famílias de modelos de vértices definidas pelo invariantes nas Tabelas 2 e 3 são exatamente integráveis.

4 Parametrização e Hamiltoniana

Nesta seção apresentaremos a parametrização dos pesos de Boltzmann associados às quatro famílias distintas de modelos discutidas na seção anterior, além de calcular as Hamiltonianas de spin-1 associadas.

Como discutido na seção 3, temos apenas uma estrutura algébrica fundamental, envolvendo os pesos $a_+^{(i)}$, $b_+^{(i)}$ e $c_+^{(i)}$. A correspondente curva (75) pode ser reescrita na seguinte forma,

$$\left[x_i - \frac{\Delta_+}{2} y_i \right]^2 - \left[\frac{\Delta_+^2}{4} - 1 \right] y_i^2 = 1, \quad (175)$$

em que as novas variáveis x_i e y_i estão relacionadas aos pesos por,

$$x_i = \frac{a_+^{(i)}}{c_+^{(i)}}, \quad y_i = \frac{b_+^{(i)}}{c_+^{(i)}}. \quad (176)$$

Observe que diferentemente do que ocorre no modelo de seis vértices assimétrico, veja Eq.(46), a Eq.(175) é a equação de uma cônica, e sua parametrização envolverá portanto apenas um parâmetro espectral λ_i . Como antes, podemos utilizar funções hiperbólicas para a parametrização, ou seja,

$$x_i - \frac{\Delta_+}{2} y_i = \cosh(\lambda_i), \quad y_i = \frac{\sinh(\lambda_i)}{\sqrt{\frac{\Delta_+^2}{4} - 1}} \quad (177)$$

Por conveniência futura, podemos ainda introduzir a seguinte definição para o único invariante livre Δ_+ ,

$$\Delta_+ = 2 \cosh(\gamma). \quad (178)$$

Substituindo Eq.(176) na Eq.(177) e após utilizar a definição (178) obtemos,

$$a_+^{(i)} = 1, \quad b_+^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad c_+^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (179)$$

em que $a_+^{(i)}$ foi fixado pela liberdade de normalização.

Antes de prosseguir, ressaltamos que sob a parametrização acima a equação de Yang-Baxter é aditiva em relação ao parâmetro espectral λ_i ,

$$\lambda_0 = \lambda_1 - \lambda_2. \quad (180)$$

Todos os demais pesos são determinados em termos de $a_+^{(i)}$, $b_+^{(i)}$ e $c_+^{(i)}$ com a ajuda das Eqs.(109,110,111,112,144,162). A seguir listaremos as expressões simplificadas dos pesos associados a cada um dos quatro modelos de vértices integráveis definidos pelos invariantes dados nas Tabelas 2 e 3.

- Ramo 1A

Este modelo de vértices corresponde à família de matrizes S de spin-1 fatorizáveis encontrada por Zamolodchikov e Fateev [22], a menos da presença das variáveis discretas $\epsilon_1 = \pm 1$. Destacamos que o espectro da matriz de transferência para $\epsilon_1 = +1$ apenas pode ser relacionado com o espectro de $\epsilon_1 = -1$ para L par. Os respectivos pesos são dados por,

$$a_{\pm}^{(i)} = 1, \quad b_{\pm}^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad c_{\pm}^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (181)$$

$$\tilde{d}^{(i)} = d^{(i)} = \pm \frac{\sinh(\gamma) \sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad f^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (182)$$

$$g^{(i)} = \frac{-2 \cosh(\frac{\gamma}{2} - \bar{\gamma}) + \cosh(\frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) + \cosh(2\lambda_i + \frac{\gamma}{2} - \bar{\gamma})}{2 \sinh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (183)$$

$$\tilde{h}^{(i)} = h^{(i)} = \frac{2 \cosh(\frac{\gamma}{2} - \bar{\gamma}) \sinh^2(\frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma})}{\sinh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (184)$$

em que $\bar{\gamma} = \frac{i\pi}{4}(1 - \epsilon_1)$.

- Ramo 1B

Os pesos deste ramo foram obtidos no contexto das representações da álgebra quântica $U_q[SU(2)]$ quando q são as raízes da unidade [24, 25, 26, 27, 28]. Observe que este modelo não possui invariância por simetria de carga, e os pesos são,

$$a_+^{(i)} = 1, \quad b_+^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad c_+^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (185)$$

$$a_-^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i - \gamma + \gamma_0) \sinh(\lambda_i - \gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad b_-^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma - \lambda_i) \sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (186)$$

$$c_-^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma_0 - \gamma) \sinh(\lambda_i - \gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad \tilde{d}^{(i)} = d^{(i)} = \pm \frac{\sqrt{\sinh(\gamma) \sinh(\gamma - \gamma_0)} \sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (187)$$

$$f^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i - \gamma_0) \sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad g^{(i)} = \frac{-1 + \cosh(2\lambda_i + \gamma_0) + \cosh(2\gamma - \gamma_0)}{2 \sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (188)$$

$$\tilde{h}^{(i)} = h^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma) \sinh(\gamma - \gamma_0)}{\sinh(\lambda_i + \gamma - \gamma_0) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (189)$$

em que $\gamma_0 = \frac{i\pi}{3}\epsilon_1$.

- Ramo 2A

A menos da presença das variáveis discretas $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ extras os pesos deste modelo correspondem aos pesos da matriz R de Izergin-Korepin [23]. O espectro da matriz de transferência é entretanto independente do parâmetro ϵ_2 . Explicitamente, os pesos são,

$$a_{\pm}^{(i)} = 1, \quad b_{\pm}^{(i)} = \frac{\sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad c_{\pm}^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (190)$$

$$d^{(i)} = \mp \frac{\exp(\epsilon_2 \gamma) \sinh(\gamma) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad \tilde{d}^{(i)} = -\exp(-2\epsilon_2 \gamma) d^{(i)}, \quad (191)$$

$$f^{(i)} = \frac{\cosh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (192)$$

$$g^{(i)} = \frac{-\sinh(\frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) - \sinh(\frac{3\gamma}{2} - \bar{\gamma}) + \sinh(\frac{5\gamma}{2} + \bar{\gamma}) + \sinh(2\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} - \bar{\gamma})}{2 \cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (193)$$

$$h^{(i)} = \frac{\cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma) - \exp(2\epsilon_2 \gamma) \cosh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (194)$$

$$\tilde{h}^{(i)} = \frac{\cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma) - \exp(-2\epsilon_2 \gamma) \cosh(\lambda_i + \frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i + \frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma}) \sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (195)$$

em que, como antes, $\bar{\gamma} = \frac{i\pi}{4}(1 - \epsilon_1)$.

- Ramo 2B

Este modelo de dezenove vértices aparentemente é novo na literatura. Observemos que este modelo viola simetria de carga, uma vez que $b_-^{(i)} = -b_+^{(i)}$. A forma explícita dos pesos é,

$$a_{\pm}^{(i)} = 1, \quad b_{\pm}^{(i)} = \pm \frac{\sinh(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad c_{\pm}^{(i)} = \frac{\sinh(\gamma)}{\sinh(\lambda_i + \gamma)}, \quad (196)$$

$$d^{(i)} = \pm \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right) \sinh(\lambda)}{2 \cosh(\lambda - 2\gamma) \cosh(\lambda)}, \quad \tilde{d}^{(i)} = -\exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right) d^{(i)}, \quad (197)$$

$$f^{(i)} = -\frac{\sinh(\lambda_i + 2\gamma) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i - 2\gamma) \cosh(\lambda_i)}, \quad g^{(i)} = \frac{\cosh(2\lambda_i)}{2 \cosh(\lambda_i - 2\gamma) \cosh(\lambda_i)}, \quad (198)$$

$$h^{(i)} = \frac{\cosh(\lambda_i - 2\gamma) \cosh(\lambda_i) + \exp\left(\frac{-i\pi\epsilon_2}{3}\right) \sinh(\lambda_i + 2\gamma) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i - 2\gamma) \cosh(\lambda_i)}, \quad (199)$$

$$\tilde{h}^{(i)} = \frac{\cosh(\lambda_i - 2\gamma) \cosh(\lambda_i) + \exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right) \sinh(\lambda_i + 2\gamma) \sinh(\lambda_i)}{\cosh(\lambda_i - 2\gamma) \cosh(\lambda_i)}, \quad (200)$$

em que $\gamma = \frac{i\pi}{2}(1 - \epsilon_1) + \frac{i\pi}{6}\epsilon_1$ tal que $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$.

A seguir, apresentaremos as Hamiltonianas de spin-1 associadas a cada um dos quatro modelos de vértices descritos acima. Observamos que, no ponto $\lambda = 0$, a matriz (57) é exatamente o permutador sobre $C^3 \otimes C^3$. Tal propriedade mostra-nos que as respectivas Hamiltonianas são dadas como a soma de termos de primeiros vizinhos,

$$H = J_0 \sum_{i=1}^L H_{i,i+1}, \quad (201)$$

em que J_0 é uma normalização arbitrária.

O termo $H_{i,i+1}$ é obtido através da ação do permutador na derivada do respectivo operador $\mathcal{L}^{(i)}$ no ponto $\lambda_i = 0$. A expressão geral em termos de matrizes de spin-1 é,

$$\begin{aligned} H_{i,i+1} = & J_1 S_i^+ S_{i+1}^- + \tilde{J}_1 S_i^- S_{i+1}^+ + J_2 (S_i^+ S_i^z) (S_{i+1}^- S_{i+1}^z) + \tilde{J}_2 (S_i^z S_i^-) (S_{i+1}^z S_{i+1}^+) \\ & + J_3 (S_i^+)^2 (S_{i+1}^-)^2 + \tilde{J}_3 (S_i^-)^2 (S_{i+1}^+)^2 + J_4 (S_i^+ S_i^z S_{i+1}^-) + \tilde{J}_4 (S_i^z S_i^- S_{i+1}^+) \\ & + J_5 (S_i^+ S_{i+1}^- S_{i+1}^z) + \tilde{J}_5 (S_i^- S_{i+1}^z S_{i+1}^+) + h_1 (S_i^z + S_{i+1}^z) + h_2 [(S_i^z)^2 + (S_{i+1}^z)^2] \\ & + \delta_1 S_i^z S_{i+1}^z + \delta_2 (S_i^z S_{i+1}^z)^2 + \delta_3 (S_i^z)^2 S_{i+1}^z + \delta_4 S_i^z (S_{i+1}^z)^2 \end{aligned} \quad (202)$$

em que S^\pm e S^z são as matrizes de spin-1 satisfazendo a álgebra $SU(2)$.

Observe que na Eq.(202) os termos de potencial químico que são cancelados sob condições de contorno periódicas foram omitidos. Na Tabela 4 mostramos as expressões para os acoplamentos da Eq.(202) para todos os quatros ramos. Neste ponto ressaltamos que a Hamiltoniana associada ao ramo 2B é um caso particular da cadeia de spin-1 integrável descoberta em [32, 33]. Tal equivalência ocorre quando os parâmetros t_3 e t_p definidos em [32, 33] são dados por $t_3 = -1$ e $t_p = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tabela 4: Acoplamentos das Hamiltonianas para os quatro ramos, em que $\bar{\gamma} = \frac{i\pi}{4}(1 - \epsilon_1)$, $\gamma_0 = \frac{i\pi\epsilon_1}{3}$, $\omega = \exp\left(\frac{i\pi\epsilon_2}{3}\right)$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \pm 1$. A variável s é definida por $s = \sinh(\gamma) \sinh(\gamma - \gamma_0)$.

Ramo	1A	1B	2A	2B
J_1	$\pm \frac{1}{2 \sinh(\frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma})}$	$\pm \frac{1}{2\sqrt{s}}$	$\pm \frac{1}{2 \exp(\epsilon_2 \gamma) \cosh(\frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma})}$	$\mp \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \omega^2}{2}$
\tilde{J}_1	J_1	J_1	J_1	J_1
J_2	$\frac{1}{\sinh(\gamma)} \mp \frac{1}{\sinh(\frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma})}$	$\frac{\sqrt{3} \sinh(\gamma - \frac{\gamma_0}{2})}{2s} \mp \frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sinh(\gamma)} \pm \frac{\sinh(\epsilon_2 \gamma)}{\cosh(\frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma})}$	$\mp \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2}$
\tilde{J}_2	J_2	J_2	J_2	J_2
J_3	$-\frac{\epsilon_1}{4 \sinh(\gamma)}$	$-\frac{i\sqrt{3}\epsilon_1}{8s}$	$\frac{\cosh(\frac{\gamma}{2} + \bar{\gamma})}{4 \sinh(\gamma) \cosh(\frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma})}$	$-\frac{i\sqrt{3}\epsilon_1}{4}$
\tilde{J}_3	J_3	J_3	J_3	J_3
J_4	$-\frac{J_2}{2}$	$-\frac{1}{2 \sinh(\gamma - \gamma_0)} \pm \frac{1}{2\sqrt{s}}$	$-\frac{1}{2 \sinh(\gamma)} \pm \frac{\exp(-\epsilon_2 \gamma)}{2 \cosh(\frac{3\gamma}{2} + \bar{\gamma})}$	$-i \mp \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \omega^2}{2}$
\tilde{J}_4	$-\frac{J_2}{2}$	J_4	J_4	J_4
J_5	$\frac{J_2}{2}$	$\frac{1}{2 \sinh(\gamma)} \mp \frac{1}{2\sqrt{s}}$	$-J_4$	$-i \pm \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \omega^2}{2}$
\tilde{J}_5	$\frac{J_2}{2}$	J_5	$-J_4$	J_5
δ_1	$\frac{2 \cosh(\gamma) + \epsilon_1}{2 \sinh(\gamma)}$	0	$\frac{\cosh(2\epsilon_2 \gamma)}{2[-\epsilon_1 \sinh(\gamma) + \sinh(2\gamma)]}$	$-\frac{i\sqrt{3}\epsilon_1}{4}$
δ_2	$-\delta_1$	0	$\frac{4\epsilon_1 \cosh(\gamma) - \cosh(2\epsilon_2 \gamma)}{2[-\epsilon_1 \sinh(\gamma) + \sinh(2\gamma)]}$	$3\delta_1$
δ_3	0	0	$-\frac{\sinh(2\epsilon_2 \gamma)}{\cosh(2\epsilon_2 \gamma)} \delta_1$	$i\epsilon_2 \sqrt{3} \delta_1$
δ_4	0	0	$\frac{\sinh(2\epsilon_2 \gamma)}{\cosh(2\epsilon_2 \gamma)} \delta_1$	$-i\epsilon_2 \sqrt{3} \delta_1$
h_1	0	$\frac{\sinh(2\gamma - \gamma_0)}{2s}$	0	0
h_2	$\frac{\cosh(\gamma)}{\sinh(\gamma)}$	$-\frac{\sqrt{3} \cosh(\gamma + \frac{\gamma_0}{2})}{4s \sinh(\gamma - \gamma_0)}$	$\frac{[-3\epsilon_1 + 2 \cosh(\gamma)] \cosh(\gamma)}{-\epsilon_1 \sinh(\gamma) + \sinh(2\gamma)}$	0

Concluimos essa seção com os seguintes comentários. Algumas das propriedades físicas das Hamiltonianas 1A, 1B e 2A já foram investigadas na literatura, veja por exemplo [34, 35, 36, 37]. Os resultados incluem, por exemplo, a natureza do espectro das excitações sobre o estado fundamental no regime anti-ferromagnético. Considerando esses resultados concluímos que o espectro é sem lacuna de massa quando o parâmetro livre Δ_+ pertence ao intervalo $-2 < \Delta_+ < 2$. Logo, fora dessa região o espectro deve ter uma lacuna de massa diferente de zero cujo valor depende de Δ_+ . Surpreendentemente, tal mudança de comportamento físico está diretamente relacionada à variação da forma geométrica da curva algébrica fundamental (175). De fato, no regime de lacuna de massa nula a curva correspondente é fechada e possui a forma de uma elipse enquanto na região massiva a curva é uma hipérbole. Esta relação entre a forma geométrica da curva algébrica principal e a natureza das excitações sugere que o regime anti-ferromagnético da cadeia de spin-1 relacionada ao ramo 2B deve ter lacuna de massa nula uma vez que nesse caso $\Delta_+ = \pm\sqrt{3}$. Na próxima seção apresentaremos evidências corroborando tal previsão.

5 Solução Exata do Ramo 2B

Apresentaremos nesta seção a diagonalização exata da matriz de transferência associada aos pesos do novo modelo de vértices definido como ramo 2B. Como vimos na seção 1, a correspondente matriz de transferência $T(\lambda)$ pode ser escrita como o traço de um produto ordenado de operadores $\mathcal{L}^{(i)}$ agora parametrizados pelo parâmetro espectral λ (19). A expressão de tais operadores em termos de matrizes de Weyl é dada pela Eq.(57) enquanto os correspondentes pesos $a_+^{(i)}$, $b_+^{(i)}$, $c_+^{(i)}$, $d^{(i)}$, $\tilde{d}^{(i)}$, $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$ e $\tilde{h}^{(i)}$ são dados nas Eqs.(196-200).

O autovalores da matriz de transferência $T(\lambda)$ podem ser determinados via o ansatz de Bethe algébrico, desenvolvido em [8]. Aqui limitaremos nossa exposição aos resultados principais necessários para descrever as propriedades físicas da Hamiltoniana associada ao modelo de vértices 2B no limite termodinâmico. Sua matriz de transferência comuta com o operador de spin total $\sum_{i=1}^L S_i^z$, em que S_i^z denota a componente azimutal das matrizes de spin-1 atuando no i -ésimo sítio. Consequentemente, o espaço de Hilbert pode ser separado em $2L + 1$ setores identificados por um número inteiro $n = L - r$ com $r = 0, \pm 1, \dots, \pm L$. O autovalor da matriz de transferência $T(\lambda)$ para um dado setor n será denotado por $\Lambda_n(\lambda)$. Aplicando o método desenvolvido em [8] descobrimos que a expressão para $\Lambda_n(\lambda)$ é,

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\lambda) &= \prod_{j=1}^n \epsilon_1 \frac{\sinh[\lambda_j - \lambda + \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]}{\sinh[\lambda_j - \lambda - \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]} \\ &+ \left[\epsilon_1 \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + \frac{i\pi\epsilon_1}{6})} \right]^L \prod_{j=1}^n \epsilon_1 \frac{\sinh[2(\lambda - \lambda_j) + \frac{i\pi\epsilon_1}{2}] \sinh[\lambda - \lambda_j - \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]}{\sinh[2(\lambda - \lambda_j) - \frac{i\pi\epsilon_1}{6}] \sinh[\lambda - \lambda_j + \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]} \\ &+ \left[-\frac{\sinh(\lambda + \frac{i\pi\epsilon_1}{3}) \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda - \frac{i\pi\epsilon_1}{3}) \cosh(\lambda)} \right]^L \prod_{j=1}^n \epsilon_1 \frac{\sinh[\lambda - \lambda_j - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]}{\sinh[\lambda - \lambda_j + \frac{5i\pi\epsilon_1}{12}]} \end{aligned} \quad (203)$$

desde que os parâmetros $\{\lambda_j\}$ satisfaçam as seguintes equações do ansatz de Bethe,

$$\left(\frac{\sinh[\lambda_j + \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]}{\sinh[\lambda_j - \frac{i\pi\epsilon_1}{12}]} \right)^L = \prod_{k \neq j}^n \frac{\sinh[2(\lambda_j - \lambda_k) + \frac{i\pi\epsilon_1}{3}]}{\sinh[2(\lambda_j - \lambda_k) - \frac{i\pi\epsilon_1}{3}]} \quad \text{para } j = 1, \dots, n. \quad (204)$$

Temos agora os ingredientes básicos para investigar o estado fundamental e a natureza das excitações da cadeia de spin-1 correspondente. O autovalor associado ao setor n , $E_n(L)$, é obtido via a derivada logarítmica de $\Lambda_n(\lambda)$ no ponto $\lambda = 0$ e usando

a normalização $J_0 = -i$. Como resultado obtemos,

$$E_n(L) = \epsilon_1 \sum_{j=1}^n \frac{2 \sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6}) - \cosh(2\lambda_j)} \quad (205)$$

A seguir, vamos considerar o estudo das propriedades do regime anti-ferromagnético $\epsilon_1 = +1$. Progressos podem ser feitos após a identificação da distribuição das raízes $\{\lambda_j\}$, capazes de reproduzir o regime de baixas energias da Hamiltoniana de spin-1. Este passo é realizado via a resolução numérica da equação do ansatz de Bethe (204) e substituindo então as raízes na Eq.(205). Em seguida, comparamos os resultados para $E_n(L)$ com a diagonalização exata da Hamiltoniana até $L = 12$. Observamos que, embora a Hamiltoniana associada ao ramo 2B não seja hermitiana, todos os autovalores são reais. Como resultado dessa análise temos o fato de que o estado fundamental para L par corresponde ao setor com magnetização zero $n = L$. Além disso, observemos um interessante comportamento das raízes: a sua forma no plano complexo é diferente se $\frac{L}{2}$ é par ou ímpar. Na Figura 6 exibimos as raízes de Bethe para $L = 8, 10, 12$ e 14 escaladas pelo fator $\frac{3}{\pi}$.

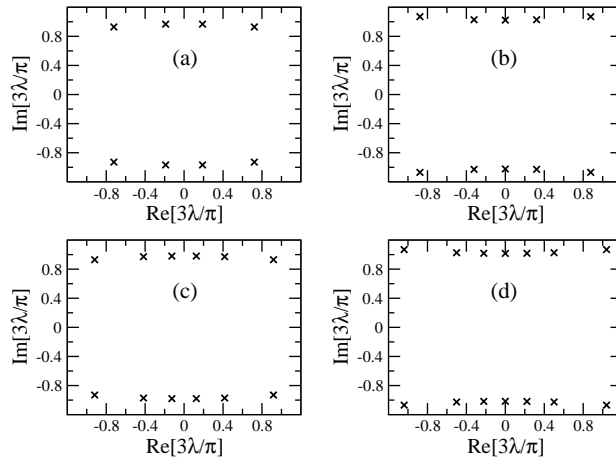


Figura 6: As raízes $z_j = \frac{3\lambda_j}{\pi}$ do estado fundamental para (a) $L = 8$, (b) $L = 10$, (c) $L = 12$, (d) $L = 14$.

Resolvemos então as equações de Bethe (204) para valores grandes de L para extrapolar o padrão das raízes no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$. Na Figura 7 mostramos as correspondentes raízes de Bethe para $L = 40$ e 42 . Com o intuito de melhor visualização da curvatura exibida pelas raízes mostramos os valores positivos e negativos das partes imaginárias separadamente.

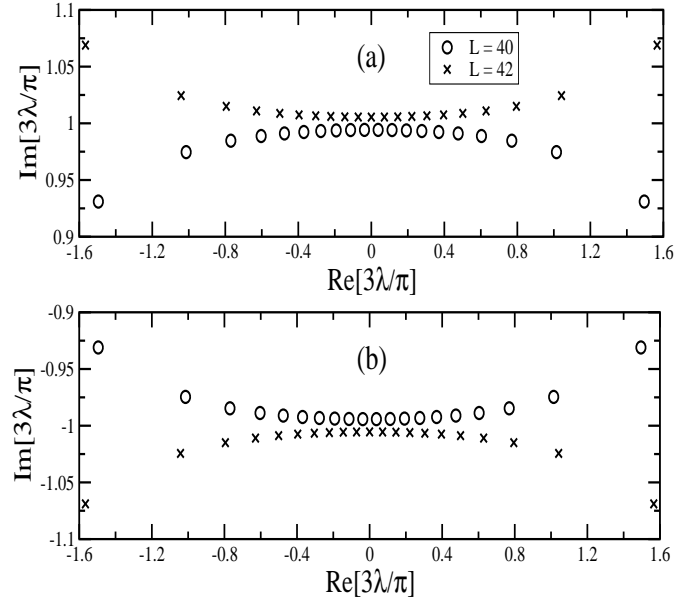


Figura 7: As raízes $z_j = \frac{3\lambda_j}{\pi}$ do estado fundamental para $L = 40$ e $L = 42$ em que (a) $z_j = x_j + iy_j$ e (b) $z_j = x_j - iy_j$.

A análise acima nos leva a concluir que no limite $L \rightarrow \infty$ as raízes λ_j se aglomeram no plano complexo na forma $\pm x_j \pm iy_j$ que são usualmente denominadas de soluções tipo “2–strings” [38, 39]. Cada “2–string” tem a mesma parte real μ_s e partes imaginárias igualmente espaçadas.

$$\lambda_j = \mu_j \pm \frac{i\pi}{3}, \quad \mu_j \in \mathbb{R}. \quad (206)$$

O próximo passo é a substituição da estrutura (206) nas equações de Bethe (204) e, tomando o logaritmo do resultado, obtemos as seguintes relações para μ_j ,

$$L \left[\phi \left(\mu_j, \frac{5\pi}{12} \right) - \phi \left(\mu_j, \frac{\pi}{4} \right) \right] = -2\pi Q_j + \sum_{k \neq j}^n \phi \left(2\mu_j - 2\mu_k, \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (207)$$

em que a função $\phi(x, y) = 2 \arctan[\tanh(x) \cot(y)]$ e Q_j são números inteiros ou semi-inteiros que caracterizam os ramos logarítmicos.

Através de nossa análise numérica observamos que o espectro de baixas energias pode ser descrito através da seguinte sequência de números Q_j ,

$$Q_j = -\frac{1}{2} \left[\frac{L}{2} - n - 1 \right] + j - 1, \text{ para } j = 1, \dots, \frac{L}{2} - n. \quad (208)$$

Para grandes valores de L , a distribuição das raízes se aproxima de uma distribuição contínua com densidade $\rho(\mu)$ dada por,

$$\rho(\mu) = \frac{d}{d\lambda} [Z_L(\mu)] \quad (209)$$

em que a função contante é,

$$Z_L(\mu_j) = \frac{1}{2\pi} \left[\phi\left(\mu_j, \frac{\pi}{4}\right) - \phi\left(\mu_j, \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{L} \sum_{k \neq j}^L \phi(2\mu_j - 2\mu_k, \frac{\pi}{3}) \right]. \quad (210)$$

Estritamente no limite $L \rightarrow \infty$, as Eqs.(209,210) se tornam equações integrais lineares para a densidade $\rho(\mu)$, e podem ser resolvidas por transformadas de Fourier. O resultado final para $\rho(\mu)$ é,

$$\rho(\mu) = \frac{1}{\pi \cosh(2\mu)}. \quad (211)$$

A energia do estado fundamental por sítio e_∞ pode agora ser computada tomando o limite de volume infinito da Eq.(205) e com a ajuda da Eq.(211). Escrevendo o resultado em termos de sua transformada de Fourier temos,

$$e_\infty = \int_0^\infty d\omega \frac{\sinh[\frac{\pi\omega}{12}] - \sinh[\frac{\pi\omega}{4}]}{\cosh[\frac{\pi\omega}{4}] \sinh[\frac{\pi\omega}{2}]} = -\frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{9}. \quad (212)$$

Vamos agora voltar nossa atenção ao comportamento das excitações de baixa energia. Esses estados são obtidos das equações de Bethe (207) através da introdução de vacâncias na sequência de números Q_j . Este método é padrão na área de modelos integráveis e para technicalidades veja por exemplo [40, 41]. O resultado é que a energia $\epsilon(\mu)$ e o momenta $\rho(\mu)$ de uma excitação de vacância, medidos a partir do estado fundamental, são dados por,

$$\epsilon(\mu) = 2\pi\rho(\mu) \text{ e } \rho(\mu) = \int_\mu^\infty \epsilon(x)dx. \quad (213)$$

Para calcular a relação de dispersão em baixas energias $\epsilon(p)$ temos que em primeiro lugar computar a integral em Eq.(213) e então eliminar a variável μ da função $\epsilon(\mu)$. Realizando esses passos, obtemos a seguinte expressão para a relação de dispersão,

$$\epsilon(p) = 2 \sin(p). \quad (214)$$

Da Eq.(214) observamos que as excitações com momento pequeno tem comportamento linear em p . Portanto, as excitações não possuem lacuna de massa para pequenos valores dos momenta p . Esse resultado corrobora a conexão entre a forma geométrica da curva principal e a natureza das excitações da cadeia de spin-1, que foi apresentada no final da seção 4.

6 Conclusão

Nessa dissertação, investigamos as soluções da equação de Yang-Baxter para modelos de dezenove vértices invariantes por simetria \mathcal{PT} . Desenvolvemos um método sistemático para resolver as correspondentes relações funcionais de um ponto de vista algébrico, sem a necessidade de assumir *a priori* alguma dependência espectral para os pesos de Boltzmann. A estrutura das relações algébricas obtidas segue de fato um padrão universal para todos os quatro modelos de vértices encontrados. Todos eles compartilham uma mesma curva algébrica fundamental, que corresponde a uma cônica dependendo de apenas três pesos de Boltzmann. Através de uma parametrização usual das cônicas obtivemos a dependência dos pesos em relação ao um parâmetro espectral de uma perspectiva unificada. Três dos modelos obtidos já eram conhecidos na literatura mas um deles foi descoberto através de nossa análise.

Observamos uma intrigante relação entre a forma da curva algébrica fundamental e a natureza das excitações das cadeias de spin-1 associadas aos modelos de vértices. No regime em que a cônica corresponde a uma elipse as excitações não possuem lacuna de massa enquanto no regime hiperbólico as excitações são massivas. Esse fato é corroborado por resultados anteriores a respeito das propriedades físicas das três cadeias de spin-1 conhecidas bem como pela solução exata do novo modelo de dezenove vértices.

Parece interessante investigar se o cenário descrito acima permanece ou não válido para modelos de vértices com mais estados por ligação, mas ainda invariantes por simetria \mathcal{PT} . Em princípio, o método que desenvolvemos pode ser estendido para outros modelos cujas configurações estatísticas preservem pelo menos uma simetria $U(1)$. Outro problema interessante é o estudo dos invariantes algébricos subjacentes a modelos de vértices que não satisfazem a simetria \mathcal{PT} e, em particular, descobrir a forma da estrutura algébrica principal.

Apêndice A: Relações de Três Termos

Neste apêndice apresentaremos alguns detalhes técnicos envolvidos na resolução do conjunto $G_{\pm}^{(3)}$. Uma primeira observação que devemos fazer é que, a partir do último invariante (107), o peso $f^{(i)}$ pode ser facilmente escrito em termos dos pesos $a_{\pm}^{(i)}$ e $b_{\pm}^{(i)}$ ou de $a_{\pm}^{(i)}$ e $b_{\pm}^{(i)}$, i.e.,

$$f^{(i)} = \frac{[a_{\pm}^{(i)} - \Gamma_{\pm} b_{\pm}^{(i)}] b_{\pm}^{(i)}}{(\Delta_{\pm} - \Gamma_{\pm}) a_{\pm}^{(i)} - b_{\pm}^{(i)}} \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (\text{A.1})$$

Agora, a Eq.(A.1) pode ser usada para obter uma relação similar para o peso $d^{(i)}$. De fato, substituindo Eq.(A.1) nas Eqs.(79,102,103) e efetuando algumas simplificações obtemos,

$$\Lambda_{\pm} [d^{(i)}]^2 = \frac{(1 - \Delta_{\pm} \Gamma_{\pm} + \Gamma_{\pm}^2) [b_{\pm}^{(i)}]^2 \left\{ [a_{\pm}^{(i)}]^2 - \Delta_{\pm} a_{\pm}^{(i)} b_{\pm}^{(i)} + [b_{\pm}^{(i)}]^2 \right\}}{[(-\Delta_{\pm} + \Gamma_{\pm}) a_{\pm}^{(i)} + b_{\pm}^{(i)}]^2} \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (\text{A.2})$$

Usando então a estrutura dos invariantes Δ_{\pm} dados pela Eq.(75) na expressão (A.2) é possível tomar a raiz quadrada de $[d^{(i)}]^2$. O resultado final dessa operação é,

$$d^{(i)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \Delta_{\pm} \Gamma_{\pm} + \Gamma_{\pm}^2}{\Lambda_{\pm}}} \frac{b_{\pm}^{(i)} c_{\pm}^{(i)}}{(-\Delta_{\pm} + \Gamma_{\pm}) a_{\pm}^{(i)} + b_{\pm}^{(i)}} \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (\text{A.3})$$

As equações (A.1,A.3) apontam que a compatibilização entre os invariantes Γ_{\pm} é equivalente a equiparar as expressões para os pesos $f^{(i)}$ e $d^{(i)}$ provenientes dos diferentes setores de carga \pm . Impondo tal consistência, a Eq.(A.1) requer a resolução da seguinte identidade,

$$\begin{aligned} & [(\Delta_{-} - \Gamma_{-}) a_{-}^{(i)} - b_{-}^{(i)}] [a_{+}^{(i)} - \Gamma_{+} b_{+}^{(i)}] b_{+}^{(i)} \\ & - [(\Delta_{+} - \Gamma_{+}) a_{+}^{(i)} - b_{+}^{(i)}] [a_{-}^{(i)} - \Gamma_{-} b_{-}^{(i)}] b_{-}^{(i)} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

enquanto a Eq.(A.3) implica que a compatibilidade para $d^{(i)}$ é,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\Lambda_{-} (1 - \Delta_{+} \Gamma_{+} + \Gamma_{+}^2)} [(-\Delta_{-} + \Gamma_{-}) a_{-}^{(i)} + b_{-}^{(i)}] b_{+}^{(i)} c_{+}^{(i)} - \\ & \sqrt{\Lambda_{+} (1 - \Delta_{-} \Gamma_{-} + \Gamma_{-}^2)} [(-\Delta_{+} + \Gamma_{+}) a_{+}^{(i)} + b_{+}^{(i)}] b_{-}^{(i)} c_{-}^{(i)} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A análise das Eqs.(A.4,A.5) para o índice $i = 1$ é imediata uma vez que os pesos $a_-^{(1)}$ e $c_-^{(1)}$ ainda permanecem livres. Portanto, Eqs.(A.4,A.5) para $i = 1$ são facilmente resolvidas via a eliminação dos pesos $a_-^{(1)}$ e $c_-^{(1)}$, a saber

$$a_-^{(1)} = \frac{\Gamma_-(\Delta_+ - \Gamma_+)a_+^{(1)}b_-^{(1)} - a_+^{(1)}b_+^{(1)} - \Gamma_-b_-^{(1)}b_+^{(1)} + \Gamma_+ \left[b_+^{(1)} \right]^2}{(\Delta_+ - \Gamma_+)a_+^{(1)}b_-^{(1)} - (\Delta_- - \Gamma_-)a_+^{(1)}b_+^{(1)} - b_-^{(1)}b_+^{(1)} + \Gamma_+(\Delta_- - \Gamma_-) \left[b_+^{(1)} \right]^2} b_-^{(1)} \quad (\text{A.6})$$

e

$$c_-^{(1)} = \frac{-\sqrt{\Lambda_-(1 - \Delta_- \Gamma_- + \Gamma_-^2)}(1 - \Delta_+ \Gamma_+ + \Gamma_+^2)b_-^{(1)}b_+^{(1)}c_+^{(1)}}{\sqrt{\Lambda_+} \left\{ (\Delta_+ - \Gamma_+)a_+^{(1)}b_-^{(1)} - (\Delta_- - \Gamma_-)a_+^{(1)}b_+^{(1)} - b_-^{(1)}b_+^{(1)} + \Gamma_+(\Delta_- - \Gamma_-) \left[b_+^{(1)} \right]^2 \right\}}. \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, a solução das Eqs.(A.4,A.5) para o índice $i = 2$ é mais complicada. Isso se deve ao fato de que as amplitudes $a_-^{(2)}$, $b_-^{(2)}$ e $c_-^{(2)}$ já foram eliminadas em termos de $a_+^{(2)}$, $b_+^{(2)}$, $c_+^{(2)}$, $f^{(2)}$ e $d^{(2)}$ graças às relações anteriores (85,99). Também os pesos $f^{(2)}$ e $d^{(2)}$ já foram eliminados em termos de $a_+^{(2)}$, $b_+^{(2)}$ e $c_+^{(2)}$ via as Eqs.(A.1,A.3). Considerando todas essas informações, além da possibilidade de se eliminar o peso $\left[c_+^{(2)} \right]^2$ através do invariante Δ_+ (75), concluímos que as Eqs.(A.4,A.5) são na verdade equações polinomiais nos pesos remanescentes $a_+^{(2)}$ e $b_+^{(2)}$. A equação polinomial associada à Eq.(A.4), após o uso das restrições (88,98), pode ser escrita como,

$$B_1 \left[a_+^{(2)} \right]^3 + B_2 a_+^{(2)} \left[b_+^{(2)} \right]^2 + B_3 \left[a_+^{(2)} \right]^2 b_+^{(2)} + B_4 \left[b_+^{(2)} \right]^3 = 0, \quad (\text{A.8})$$

em que os coeficientes são expressões envolvendo apenas constantes,

$$B_1 = \Psi \left[\Lambda_+^2 \Gamma_- (-\Delta_+ + \Gamma_+) + \Lambda_+ \Psi (\Delta_+ \Gamma_+ + \Gamma_- \Gamma_+ - \Gamma_+^2 + \Delta_+ \Omega + \Gamma_- \Omega - \Gamma_+ \Omega) - \Psi^2 (\Gamma_+^2 + \Delta_+ \Omega + 2\Gamma_+ \Omega + 2\Omega^2) \right], \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} B_2 = & \Lambda_+^3 \Gamma_+ (\Delta_+ + 2\Gamma_- - \Gamma_+) + \Lambda_+^2 \Psi (1 - 2\Delta_+ \Gamma_- - \Delta_+ \Gamma_+ + \Gamma_- \Gamma_+ - 4\Gamma_+ \Omega) \\ & + \Lambda_+ \Psi^2 (-1 - \Delta_+ \Gamma_- + \Delta_+ \Gamma_+ - \Gamma_- \Gamma_+ + \Delta_+^2 \Gamma_- \Gamma_+ + \Delta_+ \Omega + \Gamma_- \Omega \\ & - \Gamma_+ \Omega - \Delta_+^2 \Gamma_+ \Omega - \Delta_+ \Gamma_- \Gamma_+ \Omega + \Delta_+ \Gamma_+^2 \Omega - \Omega^2 - \Delta_+ \Gamma_+ \Omega^2 - 2\Gamma_- \Gamma_+ \Omega^2 + \Gamma_+^2 \Omega^2) \\ & - \Psi^3 (1 - 2\Delta_+ \Gamma_+ + \Gamma_+^2 + \Delta_+^2 \Gamma_+^2 - 2\Gamma_+ \Omega + \Delta_+ \Gamma_+^2 \Omega + 2\Omega^2 - 4\Delta_+ \Gamma_+ \Omega^2 - 4\Gamma_+ \Omega^3), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= -\Lambda_+^3(\Delta_+ + \Gamma_- - \Gamma_+) + \Lambda_+^2\Psi(\Gamma_- + \Delta_+^2\Gamma_- - \Gamma_+ - \Delta_+\Gamma_-\Gamma_+ + 2\Omega) \\
&+ \Lambda_+\Psi^2(\Delta_+ + 2\Gamma_- - 2\Gamma_+ - \Delta_+^2\Gamma_+ - 2\Delta_+\Gamma_-\Gamma_+ + \Delta_+\Gamma_+^2 - \Omega - \Gamma_-\Gamma_+\Omega) \\
&+ \Delta_+\Omega^2 + \Gamma_-\Omega^2 - \Gamma_+\Omega^2) + \Psi^3(2\Delta_+\Gamma_+^2 - 3\Omega + 4\Delta_+\Gamma_+\Omega + \Gamma_+^2\Omega \\
&- \Delta_+\Omega^2 + 2\Gamma_+\Omega^2 - 2\Omega^3), \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= -\Lambda_+^3\Gamma_+(1 + \Gamma_-\Gamma_+) + \Lambda_+^2\Psi(\Gamma_- - \Gamma_+ + \Delta_+\Gamma_+^2 + 2\Gamma_+^2\Omega) + \Lambda_+\Psi^2(\Gamma_- - \Delta_+\Gamma_-\Gamma_+ \\
&+ \Gamma_-\Gamma_+^2 - \Omega + \Delta_+\Gamma_+\Omega - \Gamma_-\Gamma_+\Omega + \Delta_+\Gamma_-\Gamma_+^2\Omega + \Gamma_+\Omega^2 + \Gamma_-\Gamma_+^2\Omega^2) \\
&- \Psi^3(\Omega - 2\Delta_+\Gamma_+\Omega + \Gamma_+^2\Omega + \Delta_+^2\Gamma_+^2\Omega\Psi^3 - 2\Gamma_+\Omega^2\Psi^3 + 3\Delta_+\Gamma_+^2\Omega^2\Psi^3 + 2\Gamma_+^2\Omega^3\Psi^3). \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Conforme argumentado no texto principal, estamos procurando por soluções em que as amplitudes $a_+^{(2)}$ e $b_+^{(2)}$ são independentes uma da outra, o que significa que todos os coeficientes B_j do polinômio (A.8) devem ser nulos. Do coeficiente B_1 , podemos obter uma expressão para o invariante Γ_- , que pode ser ainda simplificada utilizando-se o vínculo (89). O resultado final é de fato simples,

$$\Gamma_- = \frac{\Psi}{\Lambda_+} (\Gamma_+ + \Omega). \tag{A.13}$$

Substituindo o resultado (A.13) nas expressões para os coeficientes restantes (A.10-A.12) e mais uma vez levando em conta a restrição (89) observamos que B_2 , B_3 e B_4 são identicamente nulos.

A mesma análise acima pode ser repetida para o índice $i = 2$ da Eq.(A.5). Concluímos que tal equação não impõe nenhuma nova restrição aos invariantes além de Eq.(A.13).

Concluímos esse apêndice observando que os pesos $a_-^{(i)}$, $b_-^{(i)}$ e $c_-^{(i)}$ também podem ser escritos em termos das amplitudes $a_+^{(i)}$, $b_+^{(i)}$ e $c_+^{(i)}$. Para alcançar esse objetivo, substituímos em primeiro lugar os pesos $f^{(i)}$ e $d^{(i)}$, considerando o índice $+$ das Eqs.(A.4,A.5), nas expressões dos pesos $b_-^{(1)}$, $b_-^{(2)}$, $c_-^{(2)}$, $a_-^{(2)}$, $a_-^{(1)}$ e $c_-^{(1)}$, veja Eqs.(83,85,99,A.6,A.7). Em seguida, utilizamos o invariante Δ_+ (75) para eliminar $\left[c_+^{(i)}\right]^2$ além das formas explícitas das relações entre invariantes (80,88,89,98,A.13). Realizando esses passos podemos escrever expressões de fato simples para $a_-^{(i)}$, $b_-^{(i)}$, $c_-^{(i)}$, para ambos $i = 1, 2$, e que foram colocadas no texto principal, veja Eqs.(109-111).

Tabela 5: Valores dos invariantes para os ramos especiais 1S e 2S.

Invariantes	Ramo 1S	Ramo 2S
Δ_+	$\pm\sqrt{3}$	± 2
Δ_-	$\mp\sqrt{3}$	± 2
Λ_+	-1	-1
Λ_-	-1	-1
Ψ	1	-1
Ω	0	0
Γ_+	$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$	∓ 1
Γ_-	$\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$	∓ 1
Θ_+	0	± 1
Θ_-	$\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$	0
$\Delta_+^{(g)}$	0	± 3
$\Delta_-^{(g)}$	0	± 3
$\Delta_+^{(h)}$	$\pm\sqrt{3}$	0
$\Delta_-^{(h)}$	$\mp\sqrt{3}$	0
$\Delta_+^{(\tilde{h})}$	$\pm\sqrt{3}$	0
$\Delta_-^{(\tilde{h})}$	$\mp\sqrt{3}$	0

Apêndice B: Soluções Particulares

Descreveremos aqui soluções particulares provenientes do ramo 1A. Além de $\Psi = \Lambda_+ = 1$ temos duas outras possíveis soluções da equação de Yang-Baxter com todos os dezoito pesos diferentes de zero. Denominaremos essas soluções especiais como se segue,

- Ramo 1S : $\Psi = -\Lambda_+ = 1,$ (B.1)

- Ramo 2S : $\Psi = \Lambda_+ = -1.$ (B.2)

As escolhas (B.1,B.2) levam a soluções nas quais não há parâmetro livre. Na Tabela 5 mostramos os valores finais dos respectivos invariantes.

Comparando a Tabela 5 com a Tabela 2 é fácil ver que o ramo 1S é um caso particular do ramo 1B se $\Delta_+ = \pm\sqrt{3}$. Por outro lado, a comparação da Tabela 5 com a Tabela 3 nos revela que o ramo 2S é equivalente ao 2A se neste impusermos $\Delta_+ = \pm 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] BAXTER, R.J. Partition function of the Eight-Vertex lattice model. **Ann. Phys.**, v. 70, n. 1, p. 193-228, mar. 1972.
- [2] MCCOY, B.M.; WU, T.T. Hydrogen-bonded crystals and the anisotropic heisenberg chain. **Nuovo Cimento**, v. 56, n. 2, p. 311-315, ago. 1968.
- [3] SUTHERLAND, B. Two-Dimensional Hydrogen Bonded Crystals without the Ice Rule. **J. Math. Phys.**, v. 11, n. 11, p. 3183-3186, nov. 1970.
- [4] BAXTER, R.J. **Exactly Solved Models in Statistical Mechanics**. 2 ed. New York: Dover Publications, 2007. 498 p.
- [5] TAKHTADZHAN, L.A.; FADDEEV, L.D. The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model. **Russ. Math. Surv.**, v. 34, n. 5, p. 11-68, 1979.
- [6] SKLYANIN, E.K.; TAKHTADZHAN, L.A.; FADDEEV, L.D. Quantum Inverse Problem Method 1. **Theo. Math. Phys.**, v. 40, n. 2, p. 688-706, 1979.
- [7] KOREPIN, V.E.; IZERGIN, G.; BOGOLIUBOV, N.M. **Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions**. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 555 p.
- [8] MELO, C.S.; MARTINS, M.J. Algebraic Bethe ansatz for U(1) invariant integrable models: The method and general results. **Nucl. Phys. B**, v. 806, n. 3, p. 567-635, jan. 2009.
- [9] KASTELEYN, P.W. **Fundamental Problems in Statistical Mechanics**. 1 ed. Amsterdam: North-Holland, 1975. vol. 3.
- [10] KRICHEVER, I.M. Baxter's equations and algebraic geometry. **Func. Anal. App.**, v. 15, n. 2, p. 92-103, jun. 1981.
- [11] GALLEAS, W.; MARTINS, M.J. Yang-Baxter equation for the asymmetric eight-vertex model. **Phys. Rev. E**, v. 66, n. 4, p. 047103, out. 2002.

- [12] SUTHERLAND, B.; YANG, C.N.; YANG, C.P. Exact Solution of a Model of Two-Dimensional Ferroelectrics in an Arbitrary External Electric Field. **Phys. Rev. Lett.**, v. 19, n. 10, p. 588-591, set. 1967.
- [13] BAXTER, R.J. Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic heisenberg chain. I. Some fundamental eigenvectors. **Ann. Phys.**, v. 71, n. 1, p. 1-24, mar. 1973.
- [14] FAN, C.; WU, F.Y. General Lattice Model of Phase Transitions. **Phys. Rev. B**, v. 2, n. 3, p. 723-733, ago. 1970.
- [15] FELDERHOF, B.U. Diagonalization of the transfer matrix of the free-fermion model. II. **Physica**, v. 66, n. 2, p. 279-297, jun. 1973.
- [16] FELDERHOF, B.U. Diagonalization of the transfer matrix of the free-fermion model. III. **Physica**, v. 66, n. 3, p. 509-526, jun. 1973.
- [17] LIEB, E.H. Exactly Soluble Models. In: **Mathematical Methods in Solid State and Superfluid Theory, proceedings of the 1967 Scottish Universities' Summer School of Physics**. Oliver and Boyd: Edinburgh, 1969. p. 286-306.
- [18] BENDER, C.M.; BOETTCHER, S.; MEISINGER, P.N.. PT-symmetric quantum mechanics. **J. Math. Phys.**, v. 40, n. 5, p. 2201-2229, may. 1999.
- [19] SKLYANIN, E.K. Boundary-conditions for integrable quantum-systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 21, n. 10, p. 2375-2389, may. 1988.
- [20] MEZINCESCU, L.; NEPOMECHIE, R.I. Integrable open spin chains with nonsymmetrical r-matrices. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 24, p. L17-L23, jan. 1991
- [21] MEZINCESCU, L.; NEPOMECHIE, R.I. Integrability of open spin chains with quantum algebra symmetry. **Int. J. Mod. A**, v. 6, n. 29, p. 5231-5248, dec. 1991.
- [22] ZAMOLODCHIKOV, A.B.; FATEEV, V.A. A model factorized S -matrix and an integrable spin-1 Heisenberg chain. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 32, n. 2, p. 298-303, 1980.

- [23] IZERGIN, A.G. KOREPIN, V.E. The inverse scattering method approach to the quantum Shabat-Mikhailov model. **Comm. Math. Phys.**, v. 79, n. 3, p. 303-316, 1981.
- [24] DEGUCHI, T.; AKUTSU, Y. A General Formula for Colored Z_n Graded Braid Matrices and the Fusion Braid Matrices. **J. Phys. Soc. Jpn.**, v. 60, p. 2559-2570, 1991.
- [25] DEGUCHI, T.; AKUTSU, Y. Colored Braid Matrices from Infinite-Dimensional Representations of $U_q(g)$. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 7, n. 9, p. 767-779, 1992.
- [26] COUTURE, M. On some quantum R matrices associated with representations of $U_q(sl(2, C))$ when q is a root of unity. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 24, n.3, p. L103-L107, fev. 1991.
- [27] GOMEZ, C.; RUIZ-ALTABA, M.; SIERRA, G. New R -matrices associated with finite dimensional representations of $U_q(sl(2))$ at roots of unity. **Phys. Lett. B**, v. 265, n. 1-2, p. 95-98., ago. 1991.
- [28] GOMEZ, C.; SIERRA, G. A new solution to the star-triangle equation based on $U_q(sl(2))$ at roots of unity. **Nucl. Phys. B**, v. 373, n. 3, p. 761-778, abr. 1992.
- [29] WADATI, M.; DEGUCHI, T.; AKUTSU, Y. Exactly solvable models and knot-theory. **Phys. Rep.**, v. 180, n. 4-5, p. 247-332, sep. 1989.
- [30] KNOPS, Y.M.M.; NIENHUIS, B.; KNOPS, H.J.F.; BLÖTE, H.W.J. 19-vertex version of the fully frustrated XY model. **Phys. Rev. B**, v. 50, n. 2, p. 1061-1073, jul. 1994.
- [31] IDZUMI, M.; TOKIHIRO, T.; ARAI, M. Solvable nineteen-vertex models and quantum spin chains of spin one. **J. Phys. I France**, v. 4, n. 8, p. 1151-1159, abr. 1994.
- [32] ALCARAZ, F.C.; BARIEV, R.Z. New exact integrable spin-1 quantum chains. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 34, n. 33, p. L467-L471, ago. 2001;

- [33] ALCARAZ, F.C.; LAZO, M.J. Exact solutions of exactly integrable quantum chains by a matrix product ansatz. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 37, n. 14, p. 4149-4182, mar. 2004.
- [34] BABUJIAN, H.M.; TSVELICK, A.M. Heisenberg magnet with an arbitrary spin and anisotropic chiral field. **Nucl. Phys. B**, v. 265, n. 1, p. 24-44, out. 2002.
- [35] DE VEGA, H.J.; LOPES, E. Exact solution of the $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ and $E_6^{(2)}$ lattice models. **Nucl. Phys. B**, v. 362, n. 1-2, p. 261-293, set. 1991.
- [36] WARNAAR, S.O.; BATCHELOR, M.T.; NIENHUIS, B. Critical properties of the Izergin-Korepin and solvable $O(n)$ models and their related quantum spin chains. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 25, n. 11, p. 3077-3095, jun. 1992.
- [37] BERKOVICH, A.; GOMEZ, C; SIERRA, G. q -magnetism at roots of unity. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 26, n. 2, p. L45-L51, 1993.
- [38] BETHE, H.A. On the Theory of Metals. I. Eigenvalues and eigenfunctions of a linear chain of atoms. **The many-body problem: an encyclopedia of exactly solved models in one dimension**, p. 689.
- [39] TAKAHASHI, M. **Thermodynamics of one-dimensional solvable models**, 1 ed. Cambridge Cambridge University Press, 1999. 252 p..
- [40] SUTHERLAND, B. Model for a multicomponent quantum system. **Phys. Rev. B**, v. 12, n. 9, p. 3795-3805, nov. 1975.
- [41] FADDEEV, L.D.; TAKHTAJAN, L. What is the spin of a spin wave? **Phys. Lett. A**, v. 85, n. 6-7, p. 375-377, set. 2002.