

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*Solução numérica das equações de Maxwell
para cavidades dielétricas bidimensionais*

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

André Luis Rossi Melzi

Orientador:
Prof. Dr. Marcel Novaes

São Carlos
Agosto de 2012

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M532sn	<p>Melzi, André Luis Rossi. Solução numérica das equações de Maxwell para cavidades dielétricas bidimensionais / André Luis Rossi Melzi. -- São Carlos : UFSCar, 2012. 55 f.</p> <p>Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.</p> <p>1. Eletromagnetismo. 2. Teoria do caos. 3. Laser. I. Título.</p> <p>CDD: 537 (20^a)</p>
--------	--

André Luis Rossi Melzi

**Dissertação de Mestrado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física, da Universidade
Federal de São Carlos, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.**

Aprovada em 07/08/2012.

BANCA EXAMINADORA



*Prof. Dr. Marcel Novaes
Universidade Federal de São Carlos - DF*



*Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Boas
Universidade Federal de São Carlos - DF*



*Prof. Dr. Esmérindo de Souza Bernardes
Universidade de São Paulo - IFSC*

Aos meus pais.

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- ao professor Marcel Novaes, pela orientação, incentivo e paciência;
- aos meus pais, por sempre me apoiarem;
- à Hanay, por estar ao meu lado;
- ao Jonas, pela amizade construída;
- ao CNPq e à FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo encontrar soluções numéricas para as equações de Maxwell em cavidades dielétricas bidimensionais. Tais estruturas aprisionam a luz no seu interior por meio de reflexão interna total e podem ser utilizadas para a fabricação de um laser na escala de microns, os chamados microlasers. O formato da cavidade influencia a dinâmica dos raios aprisionados, de forma que esta pode ser regular ou caótica, e determina completamente o padrão de emissão da radiação. Durante o desenvolvimento de nossas rotinas computacionais, abordamos o problema do círculo, cuja dinâmica é integrável, e o do estádio, que possui dinâmica caótica. Reproduzimos parcialmente resultados da literatura. Além disso, consideramos também uma geometria nova, que tem potencial para apresentar emissão unidirecional, um objetivo que está sendo buscado pela comunidade.

Abstract

The objective of this work is to find numerical solutions for Maxwell's equations in two-dimensional dielectric cavities. Such structures can trap light by means of total internal reflections and can be used for constructing lasers in the micron scale, known as microlasers. The shape of the cavity affects the dynamics of rays inside it, so that it can be regular or chaotic, and completely determines the emission pattern of the radiation. During the development of our computational algorithms, we have considered the problem of the circle, whose dynamics is integrable, and the stadium, which has chaotic dynamics. We partially reproduced results in the literature. In addition, we also considered a new geometry, which probably can provide unidirectional emission, a goal that is being sought by the scientific community.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 9
2	Conceitos Básicos	p. 12
2.1	Ressonâncias	p. 12
2.2	Dinâmica Caótica	p. 18
3	Eletromagnetismo	p. 23
3.1	Equações de Maxwell	p. 23
3.2	Condições de Contorno	p. 24
3.3	Redução das equações de Maxwell	p. 29
3.4	Equações reduzidas	p. 36
3.5	Modos Transversos Eletromagnéticos	p. 39
4	Método Numérico	p. 41
5	Resultados e Discussões	p. 47
5.1	Círculo	p. 47
5.2	Estádio	p. 48
5.3	Três círculos não concêntricos	p. 50
	Conclusões	p. 52
	Referências	p. 54

Lista de Figuras

- 1 Amostra dielétrica onde se observa uma dinâmica clássica caótica (esquerda) e cálculo numérico de um modo ressonante com alto fator de qualidade e direcionalidade (direita). Retirado de [1]. p. 10
- 2 Espalhamento de um partícula que incide pela direita numa região onde existe uma barreira impenetrável e $x = 0$ e um potencial delta em $x = a$. p. 13
- 3 Comportamento do *phase shift* δ em função de ka . Retirado de [2]. . . p. 16
- 4 Função de onda para $ka = \pi(1 - \alpha)$, isto é, próximo de uma ressonância. Retirado de [2]. p. 16
- 5 Função de onda para $ka = \pi$. A função de onda se comporta como se não houvesse o potencial delta. Retirado de [2] p. 17
- 6 Esquema da estrutura de $S(k)$ no plano complexo ka . Retirado de [2]. p. 18
- 7 Bilhar do estádio. Representação esquemática de duas trajetórias clássicas com condições iniciais muito próximas que, após alguma reflexões, tornam-se completamente distintas. p. 19
- 8 Trajetórias clássicas de raios correspondentes aos modos “galerias dos sussurros” no bilhar circular. p. 19
- 9 Construção da seção de Poincaré para o bilhar do quadrupolo. Em a) observamos sucessivas colisões de uma partícula com a fronteira do bilhar. Cada colisão é representada por um ponto na seção de Poincaré, como vemos em b). Retirado de [3]. p. 21
- 10 Seção de Poincaré do bilhar do quadrupolo. Em a), observamos a representação do movimento regular no interior do bilhar. Em b), surgem regiões de movimento caótico representadas por um ruído. Em c) e em d), as regiões de movimento caótico passam a predominar no espaço de fase. Retirado de [3]. p. 22
- 11 Superfície cilíndrica na interface entre dois meios materiais. p. 25

12	Circuito retangular na interface entre dois meios materiais.	p. 26
13	Guia de ondas com seção transversal arbitrária formado por um dielétrico em forma de tubo. A figura mostra os vetores unitários \hat{t} e $\hat{\nu}$ definidos na superfície do guia ondas representando, respectivamente, as direções tangente e normal.	p. 29
14	Cavidade deformada representada pela região \mathcal{D} e delimitada pela fronteira Γ	p. 41
15	Representação esquemática dos vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}' e de sua diferença $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ definidos no interior da fronteira Γ	p. 42
16	Representação esquemática da discretização da fronteira do bilhar circular. Os quadrados representam os pontos que discretizam a fronteira e os círculos representam os pontos médios entre dois quadrados. . . .	p. 45
17	Intensidade do campo elétrico no interior da cavidade circular. Foram usados os valores $k = 3.81 - 0.08i$ e $n = 3$. A intensidade do campo elétrico aumenta da cor azul para a cor vermelha.	p. 48
18	Intensidade do campo elétrico no interior da cavidade circular para os valores $k = 3.86 - 0.34i$, $n = 1.5$. A intensidade do campo elétrico aumenta da cor azul para a cor vermelha.	p. 49
19	<i>Grid</i> de ressonâncias para o estádio. Essa figura mostra o menor autovalor associado à matriz M na Eq. (4.21) como função de k . É possível observar que entre eles existem dois mínimos, representados pelas regiões em azul. Esses valores correspondem às ressonâncias do estádio.	p. 50
20	Comportamento do campo elétrico no interior da cavidade do estádio para os valores $k = 4.35 - 0.067i$ e $n = 2$	p. 50
21	Representação esquemática de uma cavidade deformada construída a partir de três círculos de mesmo raio e não concêntricos.	p. 51

1 *Introdução*

Os lasers são compostos por dois elementos básicos. Um deles é o material ativo no qual a luz de um certo comprimento de onda é gerada a partir de uma fonte de energia externa. O outro é a cavidade ótica, um arranjo de componentes óticos que contém o material ativo e que permite que a luz percorra um caminho fechado. A cavidade ótica tem grande influência sobre as características da luz emitida: potência, direção do feixe e propriedades espectrais, bem como sobre as características físicas do laser como o tamanho e a forma. Atualmente a maioria das cavidades óticas são cavidades de Fabry-Perot, no qual dois planos de cristal semiconductor atuam como espelhos paralelos, refletindo a luz diversas vezes através do material ativo para que ela tenha sua potência amplificada.

A aplicação de lasers em escalas que se aproximam do próprio comprimento de onda da luz apresentou certos desafios já que a construção de estruturas refletoras nessa escala não é uma tarefa simples. Uma proposta que tem se mostrado eficiente é construir cavidades compactas baseadas na reflexão interna total em microestruturas dielétricas [4]. Tais dispositivos têm recebido certa atenção já que são componentes versáteis para fabricação de lasers em microescala, os chamados microlasers [5]. O interesse em tais dispositivos para aplicações ou para ótica física fundamental motivou o desenvolvimento da teoria sobre cavidades óticas.

Para que esse desenvolvimento fosse possível, foi necessária a compreensão dos modos óticos das microcavidades. Um modo ótico é definido como uma solução das equações de Maxwell com frequência de ressonância ω , da mesma forma que na mecânica quântica um autoestado é solução da equação de Schödinger com uma dada autoenergia. Entretanto, microcavidades são sistemas abertos uma vez que a luz escapa do seu interior. Assim, um modo ótico é um estado quase-ligado que decai exponencialmente com o tempo e cujo tempo de vida é denominado τ . Esse fato é comumente expresso em termos do fator de qualidade do modo: $Q = \omega\tau$. Um alto fator de qualidade é interessante pois corresponde à emissão de uma luz laser de alta potência.

Uma grande variedade de formatos de cavidades foi estudada no começo da década de 1990, porém as que despertaram maior interesse no início foram aquelas que possuíam simetria de rotação, tais como esferas [6] e discos [7, 8]. A razão para isso é que essas estruturas apresentavam alto fator de qualidade. Esses experimentos mostraram que o alto fator de qualidade é devido aos raios cuja trajetória é próxima da fronteira. A simetria dessas cavidades faz com que o ângulo de incidência χ de um raio seja conservado e, pela lei de Snell, um raio com $\sin \chi > 1/n$ (onde n é o índice de refração da amostra) permanecerá preso indefinidamente. Tais soluções são conhecidas como “galeria dos sussurros” (*whispering gallery*). Mesmo que a condição para reflexão interna total seja satisfeita, soluções exatas da equação de onda para discos e esferas mostram que o aprisionamento não é perfeito. A totalidade da reflexão interna só é possível no caso ideal de uma interface plana infinita. A curvatura na fronteira da cavidade leva a uma perda exponencial pequena e, por esse motivo, é possível obter emissão de luz nessas cavidades. Entretanto, observou-se que, devido à simetria de rotação, o feixe de luz emitido era isotrópico impossibilitando, assim, a construção de um microlaser direcional.

Em 1994[9] foi proposto um estudo sobre cavidades óticas baseadas em pequenas deformações de cilindros ou esferas que ficaram conhecidas como cavidades ressonantes assimétricas. A dinâmica dos raios de luz nessas cavidades é parcialmente ou totalmente caótica devido à quebra da simetria de rotação. A ideia é associar o alto fator de qualidade com a quebra da simetria levando à emissão direcional. Trabalhos experimentais [10, 11] e teóricos [12] confirmaram essa ideia embora os modos importantes nem sempre sejam do tipo “galeria do sussurros” [1]. Na Figura 1 vemos uma cavidade cuja geometria é conhecida como quadrupolo. Os experimentos com essas amostras confirmaram uma potência de emissão muito maior numa determinada direção. Em contraste com cavidades

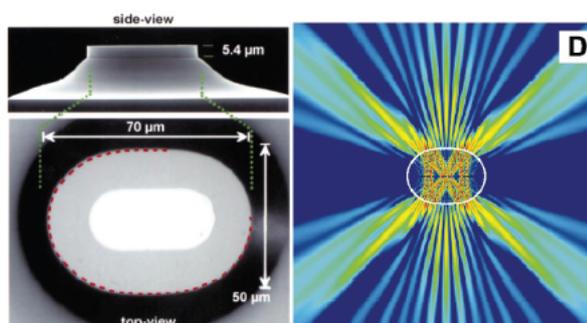


Figura 1: Amostra dielétrica onde se observa uma dinâmica clássica caótica (esquerda) e cálculo numérico de um modo ressonante com alto fator de qualidade e direcionalidade (direita). Retirado de [1].

de Fabry-Perot ou cavidades com simetria de rotação onde a função de onda é separável,

nas cavidades assimétricas as equações de Maxwell não são separáveis e, em geral, é necessário a utilização de métodos numéricos.

Neste trabalho pretendemos dar início a um estudo sobre microlasers. Nosso objetivo era tentar encontrar uma geometria simples, passível de fabricação, em que houvesse emissão direcional. Nossa principal dificuldade esteve na implementação do método numérico. Depois de pacientes esforços, conseguimos reproduzir resultados da literatura para as geometrias circular e do estádio. Além disso, obtivemos resultados preliminares para uma geometria nova.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 introduzimos conceitos básicos tais como o de ressonância e o de dinâmica caótica. No Capítulo 3 utilizamos as equações de Maxwell para mostrar que a equação de onda no interior de um microlaser pode ser reduzida para um problema bidimensional. No Capítulo 4 discutimos o método numérico escolhido para este trabalho. No Capítulo 5 apresentamos e discutimos os resultados obtidos. O Capítulo 6 contém a conclusão.

2 *Conceitos Básicos*

Um conceito muito importante no estudo dos microlasers é o de ressonância. Neste capítulo, introduziremos este conceito utilizando, para isso, um problema exatamente solúvel em mecânica quântica. Além disso, descreveremos ainda o comportamento dos raios de luz no interior dos microlasers do ponto de vista da mecânica clássica utilizando como modelo os bilhares dinâmicos.

2.1 Ressonâncias

Vamos considerar um problema no qual uma partícula de massa m se move somente ao longo do eixo x positivo devido a presença de uma barreira impenetrável localizada em $x = 0$. Vamos considerar também a presença de um potencial unidimensional do tipo delta repulsivo em $x = a$, ou seja,

$$U(x) = g_0\delta(x - a), \quad (2.1)$$

sendo $g_0 > 0$. A Fig. 2 ilustra o problema mencionado. Supondo que a partícula incida pela direita, o potencial delta e barreira farão com que ela seja espalhada e refletida para a região $x > a$. Como veremos a seguir, este problema possui uma característica importante: para determinados valores de energia, a partícula pode permanecer na região $0 < x < a$ por um tempo muito longo. Tais valores, chamados de ressonâncias, são próximos aos valores de energia dos estados ligados caso o potencial delta em $x = a$ fosse também uma barreira impenetrável.

Começaremos nosso estudo escrevendo a equação de Schrödinger independente do tempo para esse problema

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.2)$$

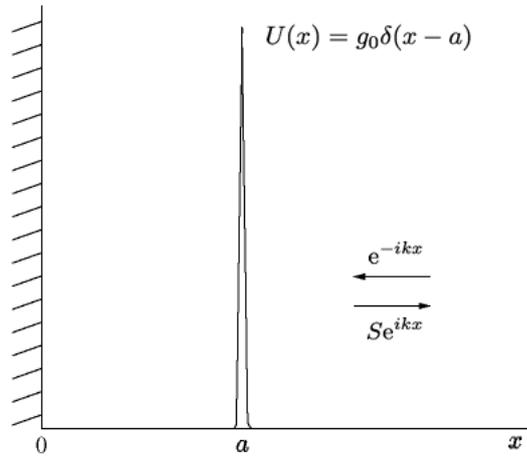


Figura 2: Espalhamento de uma partícula que incide pela direita numa região onde existe uma barreira impenetrável e $x = 0$ e um potencial delta em $x = a$.

onde $U(x)$ é dado por (2.1). A equação acima pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right)\psi(x) = u_0\delta(x-a)\psi(x), \quad (2.3)$$

onde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e $u_0 = 2mg_0/\hbar^2$. Devido à presença da barreira impenetrável em $x = 0$, uma das condições de contorno para este problema é

$$\psi(0) = 0. \quad (2.4)$$

Devido a forma da Eq. (2.3), suas soluções devem ser do tipo

$$\psi(x < a) = A \sin kx + B \cos kx, \quad (2.5)$$

$$\psi(x > a) = C e^{-ik(x-a)} + S e^{ik(x-a)}. \quad (2.6)$$

Aplicando a condição de contorno (2.4) na Eq. (2.5) encontramos $B = 0$. Além disso, como supomos que a onda incide somente pela direita, temos que $C = 1$. Assim, ficamos com

$$\psi(x < a) = A \sin kx, \quad (2.7)$$

$$\psi(x > a) = e^{-ik(x-a)} + S e^{ik(x-a)}. \quad (2.8)$$

O coeficiente S relaciona a onda refletida, descrita pelo termo $e^{ik(x-a)}$, e a onda incidente, dada pelo termo $e^{-ik(x-a)}$. Em geral, este coeficiente recebe o nome de matriz de espalhamento ou matriz S . Para este problema, S é uma matriz de ordem 1.

A outra condição de contorno pode ser obtida integrando a equação de Schrödinger,

dada em (2.3), num intervalo ϵ em torno do ponto $x = a$ e calculando o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Essa condição de contorno é dada pela seguinte expressão

$$\left. \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|_{a^-}^{a^+} = u_0 \psi(a). \quad (2.9)$$

Usando a continuidade da função de onda em $x = a$ e a descontinuidade de sua derivada nesse ponto, encontramos os coeficientes A e S em termos das quantidades k , a e u_0

$$A = -\frac{2ik/u_0}{(k/u_0) \cos ka + \sin ka - i(k/u_0) \sin ka}, \quad (2.10)$$

$$S = -\frac{(k/u_0) \cos ka + \sin ka + i(k/u_0) \sin ka}{(k/u_0) \cos ka + \sin ka - i(k/u_0) \sin ka}. \quad (2.11)$$

É possível observar que o coeficiente S é unitário, isto é, um número complexo com módulo igual a 1 e, por isso, pode ser reescrito em termos de uma fase θ

$$S = e^{i\theta} = -e^{2i\delta}, \quad (2.12)$$

ou ainda em termos de uma quantidade δ , conhecida como *phase shift*, que será analisada a seguir.

Por (2.10) e (2.11) é possível observar que, para $u_0 = 0$, ou seja, na ausência do potencial delta, encontramos $A = -2ie^{ika}$ e $S = -e^{2ika}$. A função de onda nesse caso fica

$$\psi(x) = -2ie^{ika} \sin kx, \quad (2.13)$$

para $0 \leq x < \infty$. Para um valor arbitrário de u_0 , a função de onda para a região $x > a$ pode ser reescrita em termos do *phase shift*, substituindo o valor de S dado por (2.12) na Eq. (2.8). Assim, obtemos

$$\psi(x > a) = -2ie^{i\delta} \sin [k(x - a) + \delta]. \quad (2.14)$$

As funções de onda encontradas podem ser escritas numa forma real. Dividindo (2.13) e (2.14) por $-2ie^{i\delta}$, encontramos, respectivamente,

$$\psi(x \leq a) = B \sin kx, \quad (2.15)$$

onde

$$B = \frac{1}{\sqrt{((u_0/k) \sin ka + \cos ka)^2 + \sin^2 ka}} \quad (2.16)$$

e

$$\psi(x \geq a) = \sin [k(x - a) + \delta]. \quad (2.17)$$

Usando as Eqs. (2.11) e (2.12), é possível obter uma expressão que forneça o valor de δ em termos de k , a e u_0 . Essa expressão é dada por

$$\tan \delta = \frac{\tan ka}{1 + (u_0/k) \tan ka}. \quad (2.18)$$

A inclinação de δ como função de k está relacionada com o conceito de tempo de delay de Wigner, que mede o atraso sofrido pelo pacote de onda devido ao processo de espalhamento. O tempo de delay de Wigner τ é dado por [2]

$$\tau = \hbar \frac{\partial \theta}{\partial E} = \frac{2}{v} \frac{\partial \delta}{\partial k}, \quad (2.19)$$

onde $v = \hbar k/m$ representa a velocidade da partícula.

Vamos considerar agora o caso em que o potencial delta seja aproximadamente uma barreira impenetrável, ou seja, $u_0 \gg k$. Caso o potencial delta fosse uma barreira impenetrável, o valor de energia para o n -ésimo estado ligado seria dado por

$$E = \frac{\hbar^2 (n\pi)^2}{2ma^2}. \quad (2.20)$$

Vamos analisar o comportamento da onda incidente cuja energia seja próxima à de um estado ligado, ou seja, vamos considerar $ka \approx n\pi$.

Usando a Eq. (2.18), é possível traçar o gráfico de δ como função de ka , como mostrado na Fig. 3. Como o valor de u_0/k é grande, a curva que representa δ na Fig. 3 é quase plana em todo o intervalo. Isso indica um pequeno *time delay*, exceto na vizinhança de um zero do denominador da Eq. (2.18), onde δ aumenta de forma abrupta indicando um *time delay* grande e, com isso, a presença do que é conhecido como ressonância. Os zeros no denominador da Eq. (2.18) são dados pela intersecção das curvas $\tan ka$ e $-ka/u_0a$. Nesses pontos, que denominaremos $k_n^\delta a$, temos que $\tan \delta = \infty$ e que $\delta = \pi/2, 3\pi/2$, etc. Devemos notar que é a grande variação de δ que caracteriza uma ressonância e não o seu valor. Para o caso de uma barreira impenetrável, $k_n^\delta a$ deve estar na vizinhança de um estado ligado $k_n^{BS} a = n\pi$.

Vamos analisar agora o comportamento da função de onda associada ao problema descrito acima. Primeiramente, vamos considerar um valor de ka próximo ao valor de uma ressonância. Nesse caso, a amplitude da função de onda na região $0 < x < a$ é maior

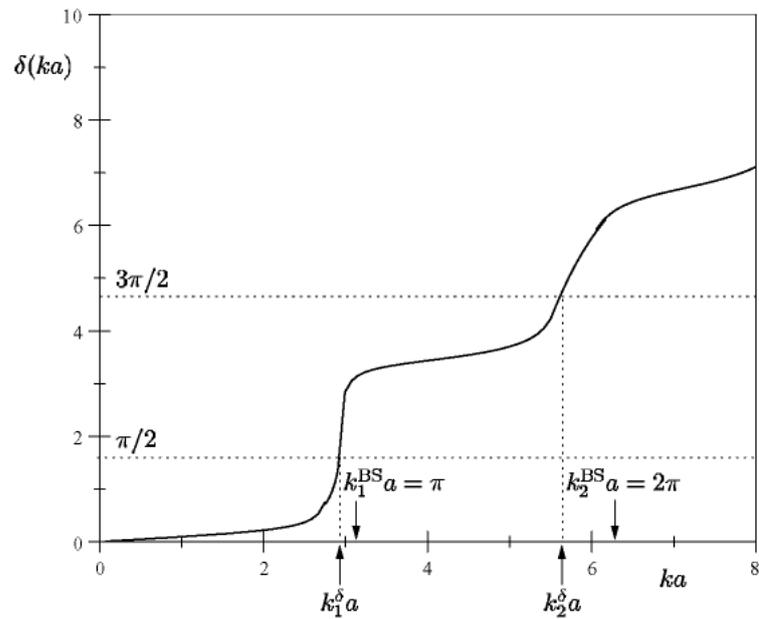


Figura 3: Comportamento do *phase shift* δ em função de ka . Retirado de [2].

que a amplitude da função de onda na região $x > a$. A Fig. 4 ilustra esta situação. Já para $ka = \pi$, ou seja, o valor do primeiro estado ligado caso o potencial delta fosse uma barreira impenetrável, a função de onda não sofre influência do potencial delta, como mostra a Fig. 5. Podemos observar ainda que a função de onda e a sua derivada são contínuas em $x = a$.

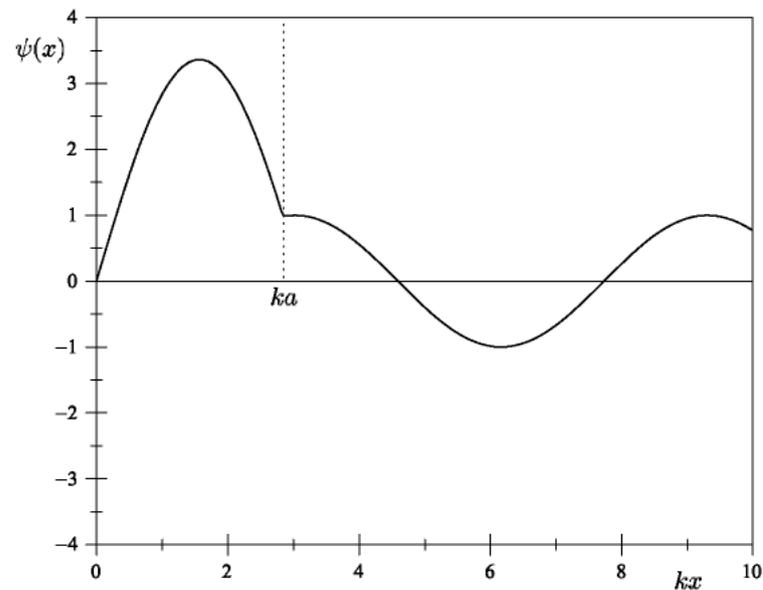


Figura 4: Função de onda para $ka = \pi(1 - \alpha)$, isto é, próximo de uma ressonância. Retirado de [2].

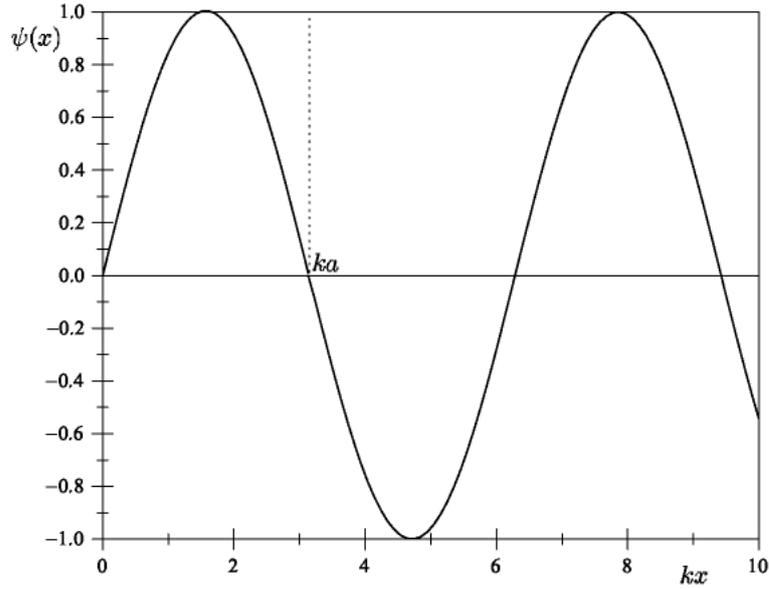


Figura 5: Função de onda para $ka = \pi$. A função de onda se comporta como se não houvesse o potencial delta. Retirado de [2]

Vamos analisar agora a estrutura do coeficiente $S(k)$. Primeiramente, vamos considerar os polos de $S(k)$, ou seja, os zeros no denominador de S na Eq. (2.11), que devem satisfazer a relação

$$\sin k_n a + \alpha k_n a \cos k_n a = i \alpha k_n a \sin k_n a, \quad (2.21)$$

onde $\alpha = 1/u_0 a$. Para cada solução k_n da equação acima, existe um zero no numerador da Eq. (2.11), dado pelo seu complexo conjugado k_n^* , localizado na posição refletida em torno do eixo real. Tomando o complexo conjugado da equação acima, é possível ver que para cada polo k_n , existe também um polo em $-k_n$, isto é, na posição refletida em torno do eixo imaginário.

Pela Eq. (2.21), vemos que para o caso em que o potencial delta for uma barreira impenetrável, ou seja, $u_a \rightarrow \infty$, temos que

$$k_n a \rightarrow n\pi = k_n^{BS} a, \quad (2.22)$$

que são os estados ligados de uma caixa de tamanho a . Vamos considerar a situação em que o potencial delta se aproxima de uma barreira impenetrável. Assim, esperamos que os polos de S sejam aproximadamente iguais àqueles dados pela Eq. (2.22). Para isso,

vamos reescrever a Eq. (2.21) na forma

$$(1 - i\alpha k_n a) \tan k_n a = -\alpha k_n a. \quad (2.23)$$

Usando a expressão acima, pode-se mostrar que $k_n a$ é dado por [2]

$$k_n a = n\pi(1 - \alpha + \dots) - i(n\pi)^2(\alpha^2 + \dots). \quad (2.24)$$

Vemos que para cada polo de ressonância associado com um n positivo, existe outro polo com n negativo, sendo os dois polos imagens refletidas com relação ao eixo imaginário. Como $\alpha > 0$, vemos ainda que k_n pode ser escrito como uma parte real e uma parte imaginária negativa.

A Fig. 6 mostra de forma esquemática a estrutura de $S(k)$ no plano complexo ka . Vemos que S é analítica na metade superior do plano complexo ka . Na metade inferior, S

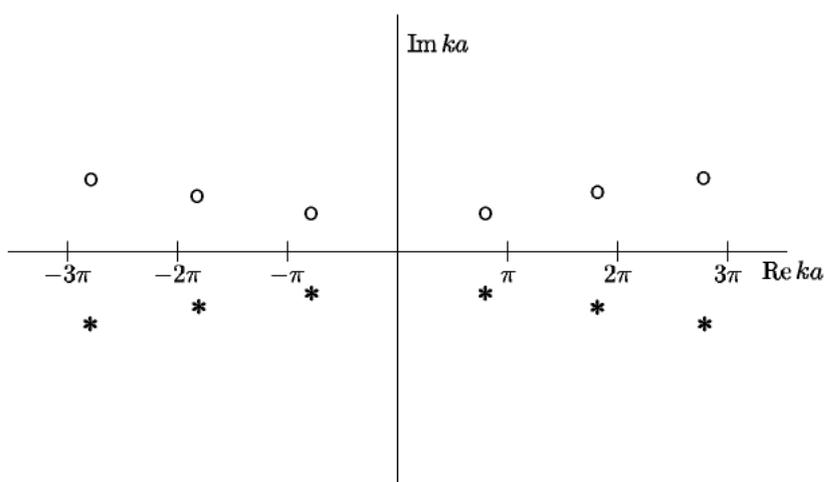


Figura 6: Esquema da estrutura de $S(k)$ no plano complexo ka . Retirado de [2].

possui polos que correspondem às ressonâncias obtidas usando o problema descrito acima.

2.2 Dinâmica Caótica

O comportamento das ondas eletromagnéticas no interior da cavidade dielétrica pode ser analisado do ponto de vista da mecânica clássica usando como artifício os bilhares dinâmicos. Num bilhar dinâmico clássico, uma partícula puntual se move livremente no plano bidimensional e sofre colisões elásticas nas suas paredes, sendo refletida de maneira especular. O formato do bilhar determina a trajetória da partícula no seu interior. A Fig. 7 mostra o bilhar do estádio, constituído de dois semi-círculos conectados por dois seg-

mentos de retas paralelos, e um par de trajetórias com condições iniciais muito próximas. Após algumas reflexões nas paredes, é possível observar que as duas trajetórias são completamente distintas. A sensibilidade às condições iniciais é uma das características dos sistemas caóticos. Existe ainda uma classe de bilhares integráveis como, por exemplo, o bilhar circular, que apresenta dinâmica regular e não possui dependência das condições iniciais. Bilhares genéricos apresentam dinâmica parcialmente caótica, isto é, movimento regular e caótico coexistem no espaço de fase. Um problema ondulatório equivalente pode ser definido se for imposta à solução da equação de onda uma condição de contorno de Dirichlet.

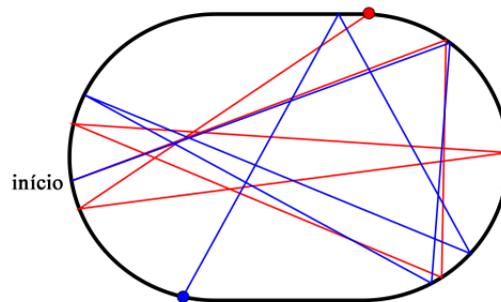


Figura 7: Bilhar do estádio. Representação esquemática de duas trajetórias clássicas com condições iniciais muito próximas que, após alguma reflexões, tornam-se completamente distintas.

Como mencionado, os primeiros experimentos com microcavidades foram realizados usando microdiscos circulares e microesferas, já que estes possuem alto fator de qualidade. A Fig. 8 ilustra a trajetória dos raios no interior de um microdisco circular de raio R aprisionado por reflexão interna total. Os modos eletromagnéticos correspondentes a esses raios são chamados de “galeria dos sussurros” (*whispering gallery*), em analogia ao fenômeno acústico que ocorre, por exemplo, numa catedral de Londres. Tais modos

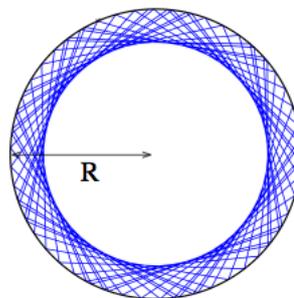


Figura 8: Trajetórias clássicas de raios correspondentes aos modos “galerias dos sussurros” no bilhar circular.

presentes no microdisco circular levam a uma emissão uniforme, o que é considerado uma desvantagem para a maioria das aplicações, principalmente para os microlasers. Ao

introduzir uma deformação no formato da cavidade, o que conseqüentemente quebra a simetria de rotação, Nöckel e Stone [9] mostraram que a dinâmica dos raios passa a ser parcialmente ou totalmente caótica, o que leva ao aumento na direcionalidade do padrão de emissão.

Para ilustrar a dinâmica dos raios no interior de uma cavidade deformada, vamos analisar uma geometria específica conhecida como bilhar do quadrupolo. A fronteira desse bilhar é descrita, em coordenadas polares (ρ, ϕ) , pela expressão

$$\rho(\phi) = R(1 + \epsilon \cos 2\phi). \quad (2.25)$$

Para o caso em que $\epsilon = 0$, temos um círculo de raio R onde é possível observar uma dinâmica regular. Entretanto, ao variar o parâmetro ϵ a partir de zero, observa-se uma transição para o caos. O bilhar do quadrupolo é uma geometria que apresenta transição para o caos de maneira gradual [3].

Ao se deformar gradativamente a cavidade, torna-se muito difícil a distinção entre o movimento de dois raios adjacentes. Uma ferramenta comumente utilizada em dinâmica não linear que se mostra muito útil para obter informações sobre o sistema, é a seção de Poincaré. No espaço de fase bidimensional, o movimento do raio é parametrizado registrando-se o par $(\phi_i, \sin \chi_i)$ a cada reflexão i , onde ϕ_i representa o ângulo polar que indica a posição da i -ésima reflexão na fronteira e $\sin \chi_i$ é o correspondente ângulo de incidência do raio com a normal (que aponta para fora) naquela posição. Cada uma das condições iniciais é propagada no tempo por meio da iteração do mapa $i \rightarrow i + 1$, gerando dois tipos de distribuições de pontos. Se a iteração resulta numa distribuição unidimensional, ou seja, uma curva invariante, então o movimentado representado é regular. Por outro lado, a exploração de uma região bidimensional é característica de movimento caótico. A Fig. 9 ilustra a construção da seção de Poincaré. Cada colisão na fronteira do bilhar é representada por um ponto na seção de Poincaré. Num bilhar dinâmico, a partícula sempre é refletida nas paredes e nunca escapa. Já numa cavidade dielétrica, se $\sin \chi > \sin \chi_c > 1/n$, onde n é o índice de refração da cavidade, ocorrerá reflexão interna mas, pela lei de Fresnel, também ocorrerá refração quando um raio de luz atingir a fronteira com um ângulo menor que o ângulo crítico χ_c (linha vermelha).

A Fig. 10 ilustra a transição para o caos no caso do bilhar do quadrupolo. Para $\epsilon = 0$, tem-se que $\sin \chi$ é conservado, o que resulta em trajetórias representadas por linhas retas na seção de Poincaré, evidenciando o movimento regular do sistema. Cadas uma das linhas representa uma condição inicial diferente. Estas são as órbitas do tipo “galeria dos

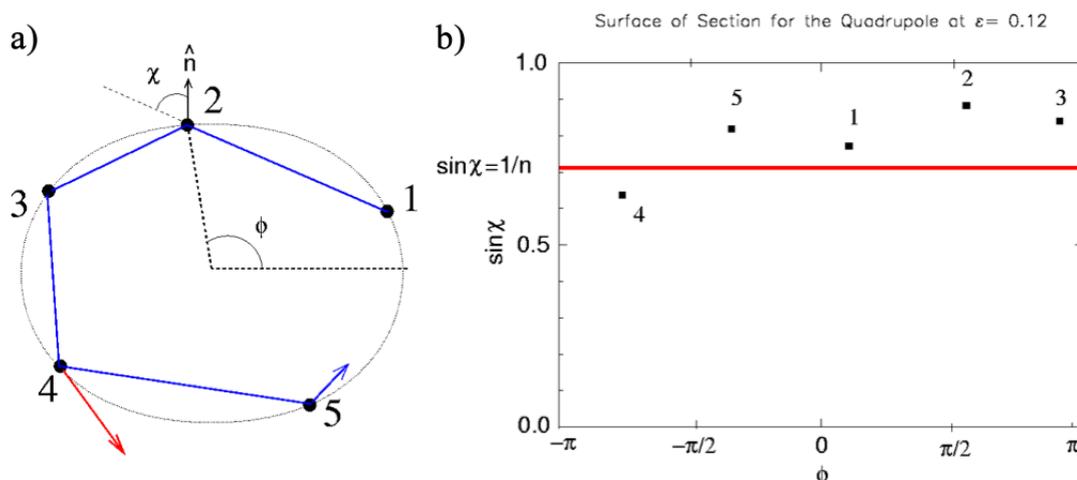


Figura 9: Construção da seção de Poincaré para o bilhar do quadrupolo. Em a) observamos sucessivas colisões de uma partícula com a fronteira do bilhar. Cada colisão é representada por um ponto na seção de Poincaré, como vemos em b). Retirado de [3].

sussurros” para o qual $\sin \chi > 1/n$. A medida que a deformação aumenta, o movimento dos raios passa a ser caótico e é representado por pontos na Fig. 10. Nesse caso, uma dada condição inicial pode explorar uma faixa maior de valores de $\sin \chi$, ou seja, um raio que inicialmente satisfaz a condição de reflexão interna total pode, devido ao caráter caótico do sistema, cruzar a linha crítica e ser emitido. Simultaneamente, ilhas de movimento estável aparecem, representadas por curvas fechadas, mas também existem curvas abertas que descrevem o movimento de raios do tipo “galeria dos sussurros” deformadas próximas ao perímetro da fronteira. Conforme ϵ aumenta ainda mais, a dinâmica caótica se torna dominante.

Como base nesses conceitos, diversos trabalhos tanto experimentais quanto teóricos foram apresentados. Mostrou-se que a emissão ressonante pode ser devida a modos localizados em ilhas de estabilidade [1] ou em órbitas periódicas instáveis [13, 14, 15]. Mostrou-se ainda que a origem da direcionalidade em alguns casos é devida à variedade instável de órbitas periódicas [16, 17]. O efeito de tunelamento dinâmico a partir de órbitas estáveis também foi considerado [18].

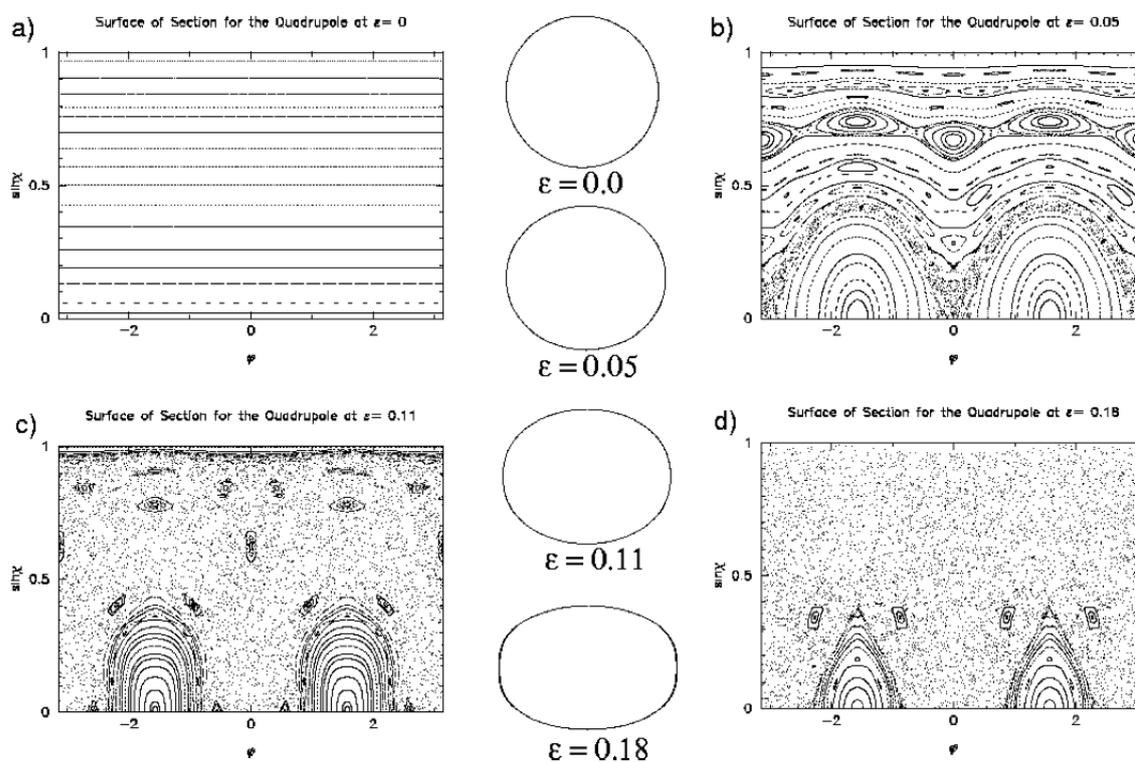


Figura 10: Seção de Poincaré do bilhar do quadrupolo. Em a), observamos a representação do movimento regular no interior do bilhar. Em b), surgem regiões de movimento caótico representadas por um ruído. Em c) e em d), as regiões de movimento caótico passam a predominar no espaço de fase. Retirado de [3].

3 *Eletromagnetismo*

Neste capítulo analisaremos as equações que descrevem o comportamento das ondas eletromagnéticas no interior das microcavidades dielétricas.

3.1 Equações de Maxwell

As equações fundamentais do eletromagnetismo são expressas pelas leis de Gauss elétrica e magnética, pela lei de Faraday e pela lei de Ampère–Maxwell, que reunidas formam as equações de Maxwell. Na sua forma diferencial, são dadas por [19]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.1d)$$

onde \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, \mathbf{B} é o vetor indução magnética, ρ é densidade de carga, \mathbf{J} é o vetor densidade superficial de corrente, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Para um meio macroscópico, as equações acima são reescritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.2d)$$

onde \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico e \mathbf{H} é o vetor campo magnético.

Caso o meio seja linear, os campos \mathbf{E} e \mathbf{D} , bem como \mathbf{B} e \mathbf{H} estão relacionados por

meio das equações constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

onde ϵ e μ são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio.

3.2 Condições de Contorno

Na interface entre dois meios, as equações de Maxwell estão sujeitas a certas condições de contorno. Tais condições, que devem ser satisfeitas pelos campos elétrico e magnético, são deduzidas usando-se a forma integral das equações de Maxwell [19]

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\nu} dA = \int_V \rho dV, \quad (3.3a)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\nu} dA = 0, \quad (3.3b)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\nu} dA, \quad (3.3c)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\nu} dA + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\nu} dA, \quad (3.3d)$$

onde S é uma superfície gaussiana que delimita um volume V , $\hat{\nu}$ é um versor normal à superfície e que aponta para fora dela, C é um caminho fechado que delimita a superfície S e $d\mathbf{l}$ é um elemento de comprimento sobre esse circuito. As equações de Maxwell na sua forma diferencial apresentadas na seção anterior podem ser obtidas a partir das equações acima. As Eqs. (3.2a) e (3.2b) são obtidas a partir das Eqs. (3.3a) e (3.3b), respectivamente, usando o teorema do divergente. Já as Eqs. (3.2c) e (3.2d) são obtidas a partir das Eqs. (3.3c) e (3.3d), respectivamente, usando o teorema de Stokes.

Vamos utilizar as equações apresentadas acima para obter as condições de contorno. Vamos considerar uma superfície cilíndrica de base dA e altura L , na interface entre dois meios distintos 1 e 2, como na Fig. 11. A superfície cilíndrica é formada por duas tampas planas circulares e uma superfície lateral curva. Cada uma das superfícies possui um vetor normal associado. Vamos começar deduzindo a condição de contorno para \mathbf{B} . Para isso, vamos aplicar a Eq. (3.3b), dada por

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\nu} dA = 0$$

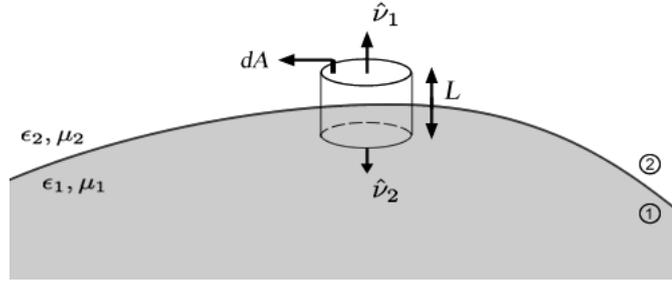


Figura 11: Superfície cilíndrica na interface entre dois meios materiais.

à superfície da Fig. 11. Assim, encontramos

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\nu}_1 dA_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\nu}_2 dA_2 + \int_{lateral} \mathbf{B}_l \cdot \hat{\nu}_l dA_l = 0.$$

Fazendo o limite $L \rightarrow 0$ na expressão acima, a integral se anula. Além disso, vemos que $\hat{\nu}_1 = -\hat{\nu}_2$ e que $dA_1 = dA_2$, assim encontramos que $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\nu}_2 dA_2 = 0$. Como a área dA_2 é arbitrária e o produto escalar é comutativo, ficamos com

$$\hat{\nu}_2 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (3.4)$$

A equação acima estabelece que a componente normal do vetor indução magnética é contínua através da interface. Isso se deve ao fato da inexistência de cargas magnéticas.

A próxima condição de contorno é obtida utilizando a Eq. (3.3a), dada por

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\nu} dA = \int_V \rho dV.$$

O lado direito da expressão acima representa a carga elétrica total armazenada no interior de uma superfície gaussiana S que delimita um volume V , ou seja,

$$Q = \int_V \rho dV.$$

Aplicando a Eq. (3.3a) à superfície cilíndrica da Fig. 11 obtemos

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\nu}_1 dA_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\nu}_2 dA_2 + \int_{lateral} \mathbf{D}_l \cdot \hat{\nu}_l dA_l = Q.$$

Como no caso anterior, ao aplicarmos o limite $L \rightarrow 0$ a integral se anula. Vemos também que $\hat{\nu}_1 = -\hat{\nu}_2$ e $dA_1 = dA_2$. Além disso, a carga contida na superfície circular pode ser escrita como $Q = \sigma dA_2$, onde σ é a densidade superficial de carga existente na interface. Usando o fato de que a área dA_2 é arbitrária e o produto escalar é comutativo, ficamos com

$$\hat{\nu}_2 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma,$$

ou seja, a componente normal do vetor deslocamento elétrico não é, em geral, contínua através da interface. Se não houver carga líquida na interface ($\sigma = 0$) temos que

$$\hat{\nu}_2 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0. \quad (3.5)$$

Para determinar as outras condições de contorno, precisamos definir um circuito C na interface entre os dois meios. O circuito possui lados dl e L como mostrado na Fig. 12.

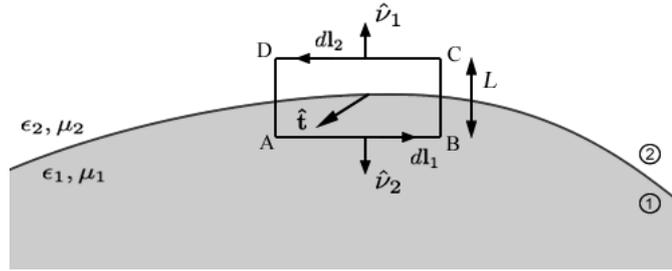


Figura 12: Circuito retangular na interface entre dois meios materiais.

A condição de contorno para \mathbf{E} é obtida aplicando a Eq. (3.3c)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dA,$$

ao contorno C . Isso nos leva a

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l}_2 + \int_B^C \mathbf{E}_{BC} \cdot d\mathbf{l}_{BC} + \int_D^A \mathbf{E}_{DA} \cdot d\mathbf{l}_{DA} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dA.$$

Ao aplicarmos o limite $L \rightarrow 0$, as duas integrais do lado esquerdo se anulam, bem como a integral do lado direito, que representa o fluxo magnético através da área retangular, já que a área definida pelo contorno retangular tende a zero. Além disso, temos ainda que $\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_2$. Substituindo, obtemos $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{l}_2 = 0$. A equação anterior pode ser escrita de outra forma. Pela Fig. 12, vemos que o versor $\hat{\mathbf{t}}$ é perpendicular ao plano definido pelo circuito e que, além disso, ele é dado por $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\nu}_2 \times \hat{\mathbf{l}}_2$. Vemos ainda que $\hat{\nu}_2 \perp \hat{\mathbf{l}}_2$. Com isso, podemos escrever

$$\hat{\mathbf{l}}_2 = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\nu}_2. \quad (3.6)$$

Substituindo, e usando o fato de que l_2 é arbitrário, obtemos

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\nu}_2) = 0. \quad (3.7)$$

Usando identidade vetorial para o produto misto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}, \quad (3.8)$$

e identificando na Eq. (3.7) $\vec{a} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$, $\vec{b} = \hat{\mathbf{t}}$, $\vec{c} = \hat{\nu}_2$, podemos escrever

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\nu}_2) = \hat{\mathbf{t}} \cdot [\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = \hat{\nu}_2 \cdot [(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{t}}].$$

Com isso obtemos

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot [\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0.$$

Como o circuito definido na interface entre os dois meios é arbitrário, temos que o versor $\hat{\mathbf{t}}$ também é arbitrário. Assim, para que a igualdade acima seja verdadeira, o termo entre colchetes deve ser nulo, o que leva a

$$\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (3.9)$$

ou seja, a componente tangencial do vetor campo elétrico é contínua através da interface.

A última condição de contorno é encontrada usando a Eq. (3.3d), dada por

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\nu} dA + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\nu} dA.$$

Aplicando a equação acima ao circuito retangular da Fig. 12, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l}_2 + \int_B^C \mathbf{H}_{BC} \cdot d\mathbf{l}_{BC} + \int_D^A \mathbf{H}_{DA} \cdot d\mathbf{l}_{DA} = \\ \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\nu} dA + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\nu} dA. \end{aligned}$$

Ao aplicarmos o limite $L \rightarrow 0$, as integrais do lado esquerdo se anulam. O fluxo do deslocamento elétrico através da área do retângulo também se anula já que a área tende a zero, o que faz com que a segunda integral do lado direito seja igual a zero. Além disso $\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_2$, o que nos leva a

$$-\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l}_2 = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\nu} dA.$$

A integral que restou na equação acima representa a corrente que atravessa a área do retângulo. Quando a área tende a zero, nenhuma corrente volumétrica pode atravessá-la. Entretanto, na interface pode haver uma corrente superficial, de forma que, mesmo que a área do retângulo tenda a zero, a corrente superficial na interface ainda atravessa a intersecção do retângulo com a interface. A densidade de corrente que atravessa a

superfície deixa de ser superficial e se torna linear. Com isso, a condição acima fica

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_2 = \mathbf{J}_l \cdot \hat{\mathbf{t}} l_2, \quad (3.10)$$

onde \mathbf{J}_l é o vetor densidade superficial de corrente, relacionado com a corrente superficial i_l por meio da expressão

$$i_l = \int_A^B \mathbf{J}_l \cdot \hat{\mathbf{t}} dl.$$

A Eq. (3.10) pode ser escrita de outra forma. Utilizando a relação obtida em (3.6), ficamos com $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\nu}_2) = \mathbf{J}_l \cdot \hat{\mathbf{t}}$. Usando identidade vetorial (3.8) e identificando na equação acima $\vec{a} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$, $\vec{b} = \hat{\mathbf{t}}$, $\vec{c} = \hat{\nu}_2$, podemos escrever

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\nu}_2) = \hat{\mathbf{t}} \cdot [\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \hat{\nu}_2 \cdot [(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{t}}].$$

E com isso obtemos

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot [\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \mathbf{J}_l \cdot \hat{\mathbf{t}},$$

ou ainda

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot [\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - \mathbf{J}_l] = 0.$$

Usando o mesmo argumento que antes, encontramos

$$\hat{\nu}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_l, \quad (3.11)$$

ou seja, a componente do campo \mathbf{H} tangente à interface entre dois meios não é, em geral, contínua, e sua descontinuidade é dada pela densidade linear de corrente que existe na interface entre os dois meios.

As quatro condições de contorno obtidas são dadas por

$$\hat{\nu} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (3.12a)$$

$$\hat{\nu} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (3.12b)$$

$$\hat{\nu} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (3.12c)$$

$$\hat{\nu} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_l, \quad (3.12d)$$

onde o índice do versor $\hat{\nu}$ foi desconsiderado. Se os meios forem lineares, podemos escrever as condições acima apenas em termos do campo elétrico e da indução magnética. Além disso, se não houverem cargas livres nem correntes na interface entre os dois meios, as

condições se tornam

$$\hat{\nu} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0, \quad (3.13a)$$

$$\hat{\nu} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (3.13b)$$

$$\hat{\nu} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (3.13c)$$

$$\hat{\nu} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = 0. \quad (3.13d)$$

3.3 Redução das equações de Maxwell

Estudaremos agora o comportamento dos campos elétrico e magnético no interior de um guia de ondas formado por um dielétrico, caracterizado por ϵ e μ , na forma de um tubo de seção transversal arbitrária e constante. Mostraremos que este problema pode ser reduzido a um problema bidimensional. Vamos supor que o eixo do guia está na direção z , como mostra a Fig. 13.

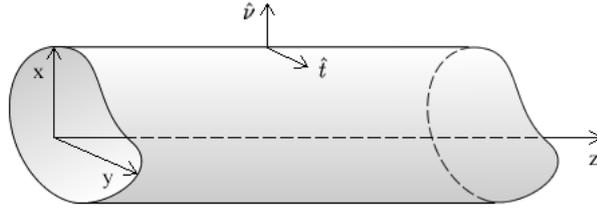


Figura 13: Guia de ondas com seção transversal arbitrária formado por um dielétrico em forma de tubo. A figura mostra os vetores unitários \hat{t} e $\hat{\nu}$ definidos na superfície do guia ondas representando, respectivamente, as direções tangente e normal.

Considerando que a dependência temporal dos campos elétrico e magnético seja dada por uma forma harmônica do tipo $e^{i\omega t}$ e que não existam cargas livres e correntes superficiais no interior do guia, as equações de Maxwell dadas por (3.1) tornam-se

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.14b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (3.14c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \mu \epsilon \mathbf{E}, \quad (3.14d)$$

Começaremos o nosso estudo obtendo a equação de Helmholtz para o campo elétrico e para o campo magnético. Essa equação descreve o comportamento espacial de tais campos no interior do guia de ondas. Para isso, vamos considerar o rotacional da Eq.

(3.14c), que é dado por $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \nabla \times \mathbf{B}$. Usando a Eq. (3.14d) ficamos com $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}$. Em seguida, usando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

onde \mathbf{A} é um vetor qualquer, encontramos a expressão $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}$. Pela Eq. (3.14a), vemos que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, e com isso obtemos a equação de Helmholtz para o campo elétrico \mathbf{E}

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0.$$

Lembrando que $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ é módulo do vetor de onda no vácuo e que $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ é o índice de refração do meio, podemos reescrever a equação acima como

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2 k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (3.15)$$

onde se assumiu $\mu = 1$, de modo que $n^2 = \epsilon$, e $c = 1$.

Analogamente, é possível obter outra equação de Helmholtz, agora para o campo \mathbf{B} , que é dada por

$$\nabla^2 \mathbf{B} + n^2 k^2 \mathbf{B} = 0. \quad (3.16)$$

A partir de agora, vamos mostrar que, conhecendo as componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético, podemos obter as componentes transversais desses campos. Vamos supor que as ondas eletromagnéticas no interior do guia de ondas se propagam na direção z e, além disso, vamos supor que as soluções sejam dadas por

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y) e^{-ik_z z - i\omega t}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y) e^{-ik_z z - i\omega t}, \quad (3.18)$$

onde k_z é o módulo do vetor de onda na direção z .

Primeiramente, vamos reescrever a equação de Helmholtz em termos de componentes transversais. Vamos definir o operador Laplaciano transversal como

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.19)$$

de modo que, em coordenadas retangulares, temos

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.20)$$

Com isso, a Eq. (3.15) pode ser escrita como

$$\left[\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \mathbf{E} + n^2 k^2 \mathbf{E} = 0.$$

Substituindo a Eq. (3.17), realizando os cálculos e as devidas simplificações, encontramos a equação

$$[\nabla_{\perp}^2 - k_z^2 + n^2 k^2] \mathbf{E}(x, y) = 0. \quad (3.21)$$

De forma análoga, substituindo as Eqs. (3.18) e (3.20) na Eq. (3.16) encontramos a equação

$$[\nabla_{\perp}^2 - k_z^2 + n^2 k^2] \mathbf{B}(x, y) = 0. \quad (3.22)$$

Vamos agora reescrever as equações de Maxwell em termos apenas das componentes longitudinais de \mathbf{E} e \mathbf{B} . Para isso, vamos decompor os campos elétrico e magnético numa componente transversal e numa componente na direção z , ou seja

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_z, \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_z, \quad (3.23b)$$

sendo que $\mathbf{E}_z = E_z \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{B}_z = B_z \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{E}_{\perp} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{B}_{\perp} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}}$.

Além disso, vamos definir o operador nabla transversal como

$$\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.24)$$

que, em coordenadas retangulares, é dado por

$$\nabla_{\perp} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.25)$$

Usando as Eqs. (3.23a) e (3.23b) podemos reescrever os campos dados por (3.17) e (3.18) na forma

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t) + \mathbf{E}_z(x, y, z, t) = [\mathbf{E}_{\perp}(x, y) + \mathbf{E}_z(x, y)] e^{-ik_z z - i\omega t}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_{\perp}(x, y, z, t) + \mathbf{B}_z(x, y, z, t) = [\mathbf{B}_{\perp}(x, y) + \mathbf{B}_z(x, y)] e^{-ik_z z - i\omega t}. \quad (3.27)$$

Utilizando as Eqs. (3.23)–(3.25), podemos reescrever a Eq. (3.14a), dada por $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ como

$$\left[\nabla_{\perp} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_z) = 0.$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

ou ainda

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t) = -\frac{\partial E_z(x, y, z, t)}{\partial z}. \quad (3.28)$$

Efetuando as derivações e simplificações, encontramos

$$\frac{\partial E_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y)}{\partial y} = ik_z E_z(x, y). \quad (3.29)$$

Já a equação de Maxwell (3.14b), dada por $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pode ser reescrita como

$$\left[\nabla_{\perp} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_z) = 0.$$

Fazendo os cálculos, encontramos

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

ou ainda

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{B}_z(x, y, z, t) = -\frac{\partial B_z(x, y, z, t)}{\partial z}. \quad (3.30)$$

Efetuando as derivações e simplificações, ficamos com

$$\frac{\partial B_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial B_y(x, y)}{\partial y} = ik_z B_z(x, y). \quad (3.31)$$

Manipulando a equação de Maxwell (3.14c), dada por $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$ ou ainda $\nabla \times \mathbf{E} = ik \mathbf{B}$, já que $k = \omega/c$ ($c = 1$), podemos reescrevê-la como

$$\left[\nabla_{\perp} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_z) = ik(\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_z).$$

Temos ainda que

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_z + \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} = ik \mathbf{B}_{\perp} + ik \mathbf{B}_z. \quad (3.32)$$

Vamos considerar agora o produto escalar da equação acima com o versor $\hat{\mathbf{k}}$. Assim, obtemos

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) + \hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_z) + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} \right] = ik \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}_{\perp} + ik \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}_z.$$

Como ∇_{\perp} é dado por (3.25), vemos que o segundo e terceiro termos do lado esquerdo e

o primeiro termo do lado direito da equação acima são nulos, o que nos leva a

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}(x, y, z, t)] = ikB_z(x, y, z, t). \quad (3.33)$$

Explicitando os termos

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \times (E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}}) e^{-ik_z z - i\omega t} \right] = ikB_z e^{-ik_z z - i\omega t},$$

ou ainda

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\left(\frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} = ikB_z(x, y) e^{-ik_z z - i\omega t}, \quad (3.34)$$

e, por fim,

$$\frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y} = ikB_z(x, y). \quad (3.35)$$

Calculando agora o produto vetorial da Eq. (3.32) com $\hat{\mathbf{k}}$, encontramos

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) + \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} \right] = ik\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{\perp} + ik\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_z.$$

Vemos que o último termo do lado direito se anula, o que nos leva a

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) + \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} \right] = ik\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{\perp}. \quad (3.36)$$

Agora, vamos analisar cada um dos termos do lado esquerdo da equação acima. Vemos que o primeiro termo, dado por

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) = \hat{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}},$$

é nulo. O segundo termo fica

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_z) = \hat{\mathbf{k}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \times E_z \hat{\mathbf{k}} \right] = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial E_z}{\partial y},$$

ou seja

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_z) = \nabla_{\perp} E_z(x, y, z, t). \quad (3.37)$$

Já para o terceiro termo encontramos

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left(\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} \right) = \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z}. \quad (3.38)$$

Assim, usando as Eqs. (3.37) e (3.38) em (3.36), obtemos

$$\nabla_{\perp} E_z(x, y, z, t) - \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t)}{\partial z} = ik\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{\perp}(x, y, z, t). \quad (3.39)$$

Explicitando os termos na equação acima

$$\left[\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} + ik_z \left[E_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + E_y(x, y) \hat{\mathbf{j}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} = ik \hat{\mathbf{k}} \times \left[B_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + B_y(x, y) \hat{\mathbf{j}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t},$$

ou ainda

$$\left[\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} + ik_z E_x(x, y) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + ik_z E_y(x, y) \right] \hat{\mathbf{j}} = -ik B_y(x, y) \hat{\mathbf{i}} + ik B_x(x, y) \hat{\mathbf{j}}.$$

Igualando as componentes, encontramos

$$\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} + ik_z E_x(x, y) = -ik B_y(x, y), \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + ik_z E_y(x, y) = ik B_x(x, y). \quad (3.41)$$

Por fim, a última equação de Maxwell (3.14d) dada por $\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu\epsilon\mathbf{E}$ ou ainda $\nabla \times \mathbf{B} = -in^2 k \mathbf{E}$, já que $k = \omega/c$ ($c = 1$) e $n^2 = \epsilon$, pode escrita como

$$\left[\nabla_{\perp} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_z) = -in^2 k (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_z).$$

Temos ainda que

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_z + \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} = -in^2 k \mathbf{E}_{\perp} - in^2 k \mathbf{E}_z. \quad (3.42)$$

Como antes, vamos considerar o produto escalar da equação acima com $\hat{\mathbf{k}}$. Assim, obtemos

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) + \hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_z) + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} \right] = -in^2 k \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\perp} - in^2 k \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_z.$$

Novamente, vemos que o segundo e o terceiro termos do lado esquerdo são nulos, bem como o primeiro lado direito. Portanto, ficamos com

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}(x, y, z, t)] = -in^2 k E_z(x, y, z, t), \quad (3.43)$$

ou, de forma explícita

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \times (B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}}) e^{-ik_z z - i\omega t} \right] = -in^2 k E_z(x, y) e^{-ik_z z - i\omega t},$$

ou ainda

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[e^{-ik_z z - i\omega t} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \right] = -in^2 k E_z(x, y) e^{-ik_z z - i\omega t}.$$

Efetuada as devidas simplificações, obtemos

$$\frac{\partial B_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(x, y)}{\partial y} = -in^2 k E_z. \quad (3.44)$$

Calculando agora o produto vetorial entre a Eq. (3.42) e $\hat{\mathbf{k}}$ temos

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) + \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} \right] = -in^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{\perp} - in^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_z.$$

Vemos que o primeiro termo do lado esquerdo e o segundo do lado direito são nulos. Assim, ficamos com

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} \right] = -in^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{\perp}. \quad (3.45)$$

A equação acima pode ser escrita de uma forma mais conveniente. Começando pelo primeiro termo, temos

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_z) = \hat{\mathbf{k}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \times B_z \hat{\mathbf{k}} \right] = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial B_z}{\partial y},$$

ou seja

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_z) = \nabla_{\perp} B_z(x, y, z, t). \quad (3.46)$$

Considerando o segundo termo, podemos escrever

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} \right] = \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z}. \quad (3.47)$$

Assim, usando as Eqs. (3.46) e (3.47) em (3.45) obtemos

$$\nabla_{\perp} B_z(x, y, z, t) - \frac{\partial B_{\perp}(x, y, z, t)}{\partial z} = -in^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t). \quad (3.48)$$

Explicitando os termos na equação acima

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} + ik_z \left[B_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + B_y(x, y) \hat{\mathbf{j}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} = \\ -in^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \left[E_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + E_y(x, y) \hat{\mathbf{j}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} + ik_z B_x(x, y) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} + ik_z B_y(x, y) \right] \hat{\mathbf{j}} = in^2 k E_y(x, y) \hat{\mathbf{i}} - in^2 k E_x(x, y) \hat{\mathbf{j}}.$$

Igualando as componentes, encontramos

$$\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} + ik_z B_x(x, y) = in^2 k E_y(x, y), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} + ik_z B_y(x, y) = -in^2 k E_x(x, y). \quad (3.50)$$

3.4 Equações reduzidas

Como o nosso objetivo é obter uma expressão que nos forneça a componente transversal de \mathbf{E} e \mathbf{B} em termos de suas componentes longitudinais, vamos reescrever as equações obtidas na seção anterior. Começaremos determinando as componentes E_x e E_y . Para isso, vamos reescrever a Eq. (3.40) na forma

$$B_y(x, y) = \frac{i}{k} \left[\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} + ik_z E_x(x, y) \right] \quad (3.51)$$

e substituí-la na Eq. (3.50). Assim, após algumas manipulações, obtemos

$$E_x(x, y) = \frac{ik}{n^2 k^2 - k_z^2} \left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} - \frac{k_z}{k} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \right]. \quad (3.52)$$

O próximo passo é reescrever a Eq. (3.41) como

$$B_x(x, y) = -\frac{i}{k} \left[\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + ik_z E_y(x, y) \right]. \quad (3.53)$$

Ao substituir a equação acima em (3.49) e depois de fazer alguns cálculos, encontramos

$$E_y(x, y) = -\frac{ik}{n^2 k^2 - k_z^2} \left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} + \frac{k_z}{k} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \right]. \quad (3.54)$$

Vamos agora determinar as componentes B_x e B_y . Substituindo a Eq. (3.52) em (3.51), encontramos como resultado

$$B_y(x, y) = \frac{ik}{n^2 k^2 - k_z^2} \left[n^2 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} - \frac{k_z}{k} \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} \right]. \quad (3.55)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.54) em (3.53), encontramos

$$B_x(x, y) = -\frac{ik}{n^2k^2 - k_z^2} \left[n^2 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + \frac{k_z}{k} \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} \right]. \quad (3.56)$$

Reunindo os resultados encontrados, vemos que

$$E_x(x, y) = \frac{ik}{n^2k^2 - k_z^2} \left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} - \frac{k_z}{k} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \right], \quad (3.57)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{ik}{n^2k^2 - k_z^2} \left[\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} + \frac{k_z}{k} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \right] \quad (3.58)$$

e

$$B_x(x, y) = -\frac{ik}{n^2k^2 - k_z^2} \left[n^2 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + \frac{k_z}{k} \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial x} \right], \quad (3.59)$$

$$B_y(x, y) = \frac{ik}{n^2k^2 - k_z^2} \left[n^2 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} - \frac{k_z}{k} \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial y} \right]. \quad (3.60)$$

Podemos encontrar a componente transversal do campo elétrico usando a expressão $\mathbf{E}_\perp = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}}$. Substituindo as Eqs. (3.57) e (3.58) na equação anterior encontramos como resultado

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{i}{n^2k^2 - k_z^2} \left[-k_z \nabla_\perp E_z - k \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_\perp B_z \right]. \quad (3.61)$$

Já a componente transversal do campo magnético é obtida usando $\mathbf{B}_\perp = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}}$. Substituindo as Eqs. (3.59) e (3.60) na última expressão, encontramos como resultado

$$\mathbf{B}_\perp = \frac{i}{n^2k^2 - k_z^2} \left[-k_z \nabla_\perp B_z + n^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_\perp E_z \right]. \quad (3.62)$$

Projetando a Eq. (3.61) nas direções tangencial e normal, dadas pelos vetores unitários \hat{t} e $\hat{\nu}$ definidos na superfície do guia de ondas, como mostra a Fig. 13, de modo que $\hat{t} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\nu}$, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} E_t = \hat{t} \cdot \mathbf{E}_\perp &= -\frac{i}{n^2k^2 - k_z^2} \hat{t} \cdot \left(k_z \nabla_\perp E_z + k \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_\perp B_z \right), \\ &= -\frac{i}{n^2k^2 - k_z^2} \left(k_z \hat{t} \cdot \nabla_\perp E_z + k \hat{\nu} \cdot \nabla_\perp B_z \right), \\ &= -\frac{i}{n^2k^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial t} + k \frac{\partial B_z}{\partial \nu} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

e

$$\begin{aligned}
E_\nu = \hat{\nu} \cdot \mathbf{E}_\perp &= \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} \hat{\nu} \cdot \left(-k_z \nabla_\perp E_z - k \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_\perp B_z \right), \\
&= \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} \left(-k_z \hat{\nu} \cdot \nabla_\perp E_z + k \hat{t} \cdot \nabla_\perp B_z \right), \\
&= \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} \left(-k_z \frac{\partial E_z}{\partial \nu} + k \frac{\partial B_z}{\partial t} \right), \tag{3.64}
\end{aligned}$$

onde usamos as definições $\partial/\partial t = \hat{t} \cdot \nabla_\perp$ e $\partial/\partial \nu = \hat{\nu} \cdot \nabla_\perp$. Utilizando a Eq. (3.62) e procedendo de maneira análoga, obtemos

$$B_t = \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} \left(-k_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + n^2 k \frac{\partial E_z}{\partial \nu} \right), \tag{3.65}$$

$$B_\nu = -\frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial B_z}{\partial \nu} + n^2 k \frac{\partial E_z}{\partial t} \right). \tag{3.66}$$

As equações acima nos mostram que os campos E_z e B_z contêm toda informação sobre as demais componentes dos campos eletromagnéticos. Assim, podemos reescrever a equação de Helmholtz em termos apenas desses campos

$$(\nabla_\perp^2 - k_z^2 + n^2 k^2) \begin{Bmatrix} E_z(x, y) \\ B_z(x, y) \end{Bmatrix} = 0. \tag{3.67}$$

Projetando as condições de contorno dadas em (3.13) nos versores \hat{t} e $\hat{\nu}$, obtemos as seguintes expressões

$$E_{1z} = E_{2z}, \quad B_{1z} = B_{2z}, \tag{3.68}$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad B_{1t} = B_{2t}, \tag{3.69}$$

$$n_1^2 E_{1\nu} = n_2^2 E_{2\nu}, \quad B_{1\nu} = B_{2\nu}. \tag{3.70}$$

Podemos ainda expressar as condições de contorno em termos E_z e B_z usando as equações (3.63)–(3.66) e as relações encontradas acima. Tais equações são dadas por

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \left(k_z \frac{\partial E_{1z}}{\partial t} + k \frac{\partial B_{1z}}{\partial \nu} \right) = \frac{1}{\gamma_2^2} \left(k_z \frac{\partial E_{2z}}{\partial t} + k \frac{\partial B_{2z}}{\partial \nu} \right), \tag{3.71}$$

$$\frac{n_1^2}{\gamma_1^2} \left(-k_z \frac{\partial E_{1z}}{\partial \nu} + k \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \right) = \frac{n_2^2}{\gamma_2^2} \left(-k_z \frac{\partial E_{2z}}{\partial \nu} + k \frac{\partial B_{2z}}{\partial t} \right), \tag{3.72}$$

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \left(-k_z \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} + n_1^2 k \frac{\partial E_{1z}}{\partial \nu} \right) = \frac{1}{\gamma_2^2} \left(-k_z \frac{\partial B_{2z}}{\partial t} + n_2^2 k \frac{\partial E_{2z}}{\partial \nu} \right), \tag{3.73}$$

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \left(k_z \frac{\partial B_{1z}}{\partial \nu} + n_1^2 k \frac{\partial E_{1z}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\gamma_2^2} \left(k_z \frac{\partial B_{2z}}{\partial \nu} + n_2^2 k \frac{\partial E_{2z}}{\partial t} \right). \tag{3.74}$$

onde $\gamma_l^2 = n_l^2 k^2 - k_z^2$, com $l = 1, 2$. Adicionando (3.71) multiplicada por k_z e (3.74)

multiplicada por $-k$ e, ainda, adicionando (3.72) multiplicada por k e (3.73) multiplicada por k_z , obtemos

$$\frac{\partial E_{1z}}{\partial t} = \frac{\partial E_{2z}}{\partial t}, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = \frac{\partial B_{2z}}{\partial t}, \quad (3.76)$$

que são as condições de contorno para a derivada tangente dos campos E_z e B_z . As condições de contorno para a derivada normal de E_z e B_z são obtidas a partir de (3.71) e (3.73) usando as condições para as derivadas tangente encontradas acima. Tais equações são dadas por

$$\frac{k}{\gamma_1^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \nu} - \frac{k}{\gamma_2^2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \nu} = - \left(\frac{k_z}{\gamma_1^2} - \frac{k_z}{\gamma_2^2} \right) \frac{\partial E_{1z}}{\partial t}, \quad (3.77)$$

$$\frac{n_1^2 k}{\gamma_1^2} \frac{\partial E_{1z}}{\partial \nu} - \frac{n_2^2 k}{\gamma_2^2} \frac{\partial E_{2z}}{\partial \nu} = \left(\frac{k_z}{\gamma_1^2} - \frac{k_z}{\gamma_2^2} \right) \frac{\partial B_{1z}}{\partial t}. \quad (3.78)$$

3.5 Modos Transversos Eletromagnéticos

Vamos considerar agora um tipo de solução que pode existir no interior do guia de ondas chamado de modo transversal eletromagnético, ou modo TEM. Neste tipo de solução, o campo eletromagnético possui componentes apenas na direção transversal à direção de propagação. Para o modo conhecido como transversal magnético, ou modo TM, temos que $B_z = 0$ em todo espaço. Já para o modo conhecido como transversal elétrico, ou modo TE, temos que $E_z = 0$ em todo espaço. Considerando esse tipo de solução, vemos que, para o modo TM, as expressões (3.61) e (3.62) obtidas na seção anterior, ficam dadas por

$$\mathbf{E}_{\perp, \text{TM}} = - \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} k_z \nabla_{\perp} E_z, \quad (3.79a)$$

$$\mathbf{B}_{\perp, \text{TM}} = \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} n^2 k \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_{\perp} E_z. \quad (3.79b)$$

Já para o modo TE, encontramos

$$\mathbf{E}_{\perp, \text{TE}} = - \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} k \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_{\perp} B_z, \quad (3.80a)$$

$$\mathbf{B}_{\perp, \text{TE}} = - \frac{i}{n^2 k^2 - k_z^2} k_z \nabla_{\perp} B_z. \quad (3.80b)$$

Uma característica importante das microcavidades é que elas podem ser consideradas quase-bidimensionais, isto significa que uma das suas dimensões é muito menor que as outras duas. Vamos supor que na direção z a microcavidade tenha tamanho desprezível.

Como consequência, temos que $k_z \ll nk$. Assim, vemos que, nesse caso, as Eqs. (3.79a) e (3.80b) se anulam, o que nos diz que apenas um dos campos, \mathbf{E}_\perp ou \mathbf{B}_\perp , pode existir no interior da microcavidade. Já as condições de contorno (3.77) e (3.78) ficam totalmente desacopladas.

Assim, a equação de Helmholtz fica reduzida à equação bidimensional

$$(\nabla_\perp^2 + n^2k^2) \psi(x, y) = 0, \quad (3.81)$$

onde $\psi(x, y)$ é um campo escalar, sendo que $\psi(x, y) = E_z(x, y)$ para o modo TM e $\psi(x, y) = B_z(x, y)$ para o modo TE. As condições de contorno, por sua vez, ficam dadas por

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu}, \quad (3.82)$$

para o modo TM e

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{1}{n_1^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} = \frac{1}{n_2^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu}, \quad (3.83)$$

para o modo TE.

4 *Método Numérico*

Este capítulo é dedicado a descrever o método numérico utilizado nesta dissertação, proposto por Wiersig [20]. Como mencionado no Capítulo 3, as equações de Maxwell nos levam à equação de onda bidimensional

$$(\nabla_{\perp}^2 + n^2 k^2) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.1)$$

com $\mathbf{r} = (x, y)$, índice de refração n e número de onda $k = \omega/c$, onde ω é a frequência angular e c é a velocidade da luz no vácuo ($c = 1$). Para o caso de polarização TM, a função de onda $\psi(\mathbf{r})$ representa a componente z do vetor campo elétrico $E_z(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$. Para a polarização TE, $\psi(\mathbf{r})$ representa a componente z do vetor campo magnético $B_z(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$.

O método em questão faz parte de uma classe conhecida como métodos de elementos de fronteira. A ideia central deste método é substituir uma equação diferencial bidimensional por uma equação integral unidimensional e então discretizar a fronteira.

Com o objetivo de encontrar a equação integral citada acima, vamos considerar uma cavidade ótica com índice de refração n situada numa região do espaço com índice de refração $n = 1$. Na Fig. 14 uma cavidade deformada é representada pela região \mathcal{D} e delimitada pela fronteira Γ .

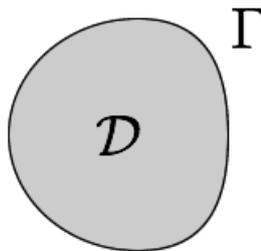


Figura 14: Cavidade deformada representada pela região \mathcal{D} e delimitada pela fronteira Γ .

Para reduzir a equação diferencial bidimensional (4.1), devemos introduzir a função de Green, que é definida como a solução da equação

$$[\nabla_{\mathbf{r}}^2 + n^2 k^2] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.2)$$

onde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é a função delta de Dirac bidimensional, \mathbf{r} e \mathbf{r}' são pontos arbitrários na região \mathcal{D} .

A função de Green pode ser determinada fazendo a mudança de variáveis $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, que equivale a deslocar a origem do sistema de coordenadas para \mathbf{r}' , como vemos na Fig. 15. Com isso, a equação anterior fica

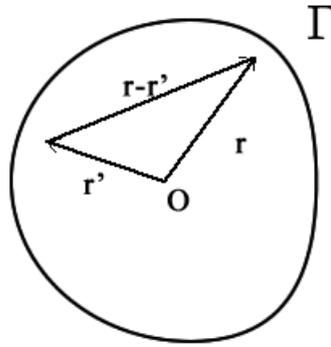


Figura 15: Representação esquemática dos vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}' e de sua diferença $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ definidos no interior da fronteira Γ .

$$[\nabla_{\mathbf{R}}^2 + n^2 k^2] G(\mathbf{R}; k) = \delta(\mathbf{R}). \quad (4.3)$$

A equação acima pode ser resolvida usando-se as representações de Fourier para $G(\mathbf{R}; k)$ e para $\delta(\mathbf{R})$, que são dadas, respectivamente, por

$$G(\mathbf{R}; k) = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{G}(\mathbf{q}; k) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \quad (4.4)$$

e

$$\delta(\mathbf{R}) = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}}. \quad (4.5)$$

Substituindo as duas últimas expressões em (4.3), temos

$$[\nabla_{\mathbf{R}}^2 + n^2 k^2] \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{G}(\mathbf{q}; k) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}}.$$

Efetuada as devidas simplificações, encontramos a expressão $(-q^2 + n^2 k^2) \tilde{G}(\mathbf{q}; k) = 1$.

Substituindo $\tilde{G}(\mathbf{R}; k)$ da equação anterior em (4.4)

$$G(\mathbf{R}; k) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{n^2k^2 - q^2}. \quad (4.6)$$

A integral bidimensional acima pode ser calculada usando coordenadas polares $\mathbf{q} = (q, \theta)$, fazendo

$$G(\mathbf{R}; k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{q dq}{n^2k^2 - q^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{iqR \cos \theta}. \quad (4.7)$$

A segunda integral do lado direito pode ser identificada como uma representação integral da função de Bessel de ordem zero $J_0(qR)$ [21]. Assim,

$$G(\mathbf{R}; k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dq \frac{q J_0(qR)}{n^2k^2 - q^2}. \quad (4.8)$$

É possível observar que a integral acima é singular para $q = \pm k'$, onde $k' = nk$. Entretanto, essa singularidade pode ser removida adicionando-se um termo imaginário infinitesimal a k' , ou seja, $k' \rightarrow k' + i\epsilon$. Nesse caso, $k'^2 \rightarrow (k' + i\epsilon)^2 = -(\epsilon - ik')^2$. Ao fazer essa substituição, a integral acima, de acordo com [21], é igual a $K_0((\epsilon - ik')R)$, onde K_0 é a função de Bessel modificada. Ao tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$G(\mathbf{R}; k) = -\frac{1}{2\pi} K_0(-inkR), \quad (4.9)$$

já que $k' = nk$. Por fim, usando a identidade [21]

$$K_0(z) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(iz),$$

onde z é um número complexo arbitrário e $H_0^{(1)}$ é a função de Hankel de ordem zero e primeiro tipo, determina-se a função de Green para o problema

$$G(\mathbf{R}; k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(nkR). \quad (4.10)$$

Como $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(nk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (4.11)$$

Conhecendo-se a função de Green é possível obter a equação integral procurada. Multiplicando a Eq. (4.1) por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k)$ temos

$$[(\nabla^2 + n^2k^2) \psi(\mathbf{r})] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = 0 \quad (4.12)$$

e, por sua vez, multiplicando (4.2) por $\psi(\mathbf{r})$ encontramos

$$[(\nabla^2 + n^2 k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k)] \psi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Subtraindo a Eq. (4.12) da Eq. (4.13) resulta em

$$\psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) \nabla^2 \psi(\mathbf{r}). \quad (4.14)$$

Usando a identidade $u \nabla^2 v = \nabla(u \nabla v) - \nabla u \nabla v$, válida para funções $u(\mathbf{r})$ e $v(\mathbf{r})$ diferenciáveis, o lado direito da equação acima pode ser reescrito como

$$\psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla \cdot [\psi(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) \nabla \psi(\mathbf{r})]. \quad (4.15)$$

Integrando a equação acima na região \mathcal{D} , o lado esquerdo resulta em $\psi(\mathbf{r}')$ já que $\mathbf{r}' \in \mathcal{D}$. Por fim, usando o teorema da divergência, a integral do lado direito pode ser escrita como uma integral de linha ao longo da fronteira Γ . Dessa forma, obtemos

$$\psi(\mathbf{r}') = \oint_{\Gamma} ds(\mathbf{r}) [\psi(s) \partial_{\nu} G(s, \mathbf{r}'; k) - G(s, \mathbf{r}'; k) \partial_{\nu} \psi(s)], \quad (4.16)$$

onde $ds(\mathbf{r})$ é o arco de comprimento infinitesimal ao longo de Γ no ponto $\mathbf{r} \in \Gamma$ e ∂_{ν} é a derivada normal definida como

$$\partial_{\nu} \equiv \hat{\nu}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_r,$$

com $\hat{\nu}(\mathbf{r})$ sendo o vetor unitário normal à curva Γ no ponto \mathbf{r} . A derivada da função de Green que aparece em (4.16) pode ser calculada usando a relação $dH_0^{(1)}(z)/dz = -H_1^{(1)}(z)$. Portanto

$$\partial_{\nu} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = \hat{\nu}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \left[-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(nk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right] \quad (4.17)$$

$$= \frac{ink}{4} \cos \alpha H_1^{(1)}(nk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (4.18)$$

onde $H_1^{(1)}$ é função de Hankel de primeira ordem e primeiro tipo, e

$$\cos \alpha \equiv \nu(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

É possível observar que, no limite $\mathbf{r}' \rightarrow \Gamma$, a Eq. (4.16) é singular já que a função de Green e sua derivada normal são singulares para $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Entretanto, pode-se mostrar que essas singularidades são integráveis para fronteiras suaves [22].

A integral em (4.16) pode ser reescrita de uma maneira mais conveniente como

$$\oint_{\Gamma} ds [B(s', s)\phi(s) + C(s', s)\psi(s)] = 0, \quad (4.19)$$

onde $B(s', s) = -2G(s, s'; k)$, $C(s', s) = 2\partial_{\nu}G(s, s'; k) - \delta(s - s')$ e $\phi(s) = \partial_{\nu}\psi(s)$. Uma das estratégias numéricas para resolver equações integrais como (4.16), é usar métodos de elementos de fronteira. Nesse caso, a fronteira é discretizada, ou seja, dividida em pequenos elementos. A Eq. (4.19) pode então ser aproximada por uma soma de N termos dada por

$$\sum_{l=1}^N (B_{il}\phi_l + C_{il}\psi_l) = 0, \quad (4.20)$$

onde $B_{il} = \int_l ds B(s_i, s)$, $C_{il} = \int_l ds C(s_i, s)$, $\phi_l = \phi(s_l)$, $\psi_l = \psi(s_l)$ e \int_l representa a integração sobre um elemento da fronteira com ponto médio s_l . A Fig. 16 mostra um trecho da fronteira do bilhar circular discretizado por um conjunto de pontos representados por quadrados. Vemos ainda um outro conjunto de pontos representados por círculos que correspondem aos pontos médios entre dois quadrados.

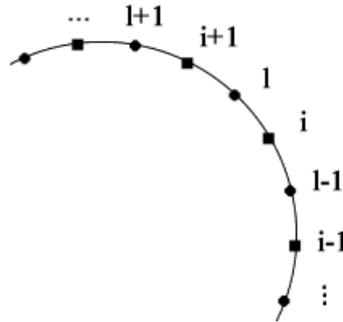


Figura 16: Representação esquemática da discretização da fronteira do bilhar circular. Os quadrados representam os pontos que discretizam a fronteira e os círculos representam os pontos médios entre dois quadrados.

A Eq. (4.20) pode ser entendida como a soma sobre todos os trechos que discretizam a fronteira da cavidade, dos elementos B_{il} calculados de i até $i + 1$ multiplicados pela derivada da função de onda no ponto l e dos elementos C_{il} também calculados de i até $i + 1$ multiplicados pelo valor da função de onda no ponto l . Essas integrais podem ser calculadas usando-se rotinas padrão de integração numérica como, por exemplo, integral por quadratura.

A soma obtida pode ser identificada como um produto matricial e, dessa forma, ser

escrita de uma forma simbólica como

$$\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

onde B e C representam operadores integrais na região \mathcal{D} . A metade inferior do vetor $(\phi, \psi)^t$ corresponde aos valores da função de onda na fronteira e a metade superior corresponde aos valores de sua derivada normal.

Para o caso de polarização TE, o termo $\psi(\mathbf{r})$ na Eq. (4.1) representa o campo magnético $B_z(\mathbf{r}, t)$. Nesse caso, temos que a função de onda é contínua na fronteira mas sua derivada normal possui uma descontinuidade. Pela equação (3.83) no Capítulo 3, a quantidade que é contínua na fronteira é $\partial_\nu \psi / n^2$, onde ∂_ν representa a derivada normal. Essa nova condição de contorno pode ser adicionada na equação integral definindo-se $\phi = \partial_\nu \psi / n^2$ e $B(s', s) = -2G(s, s'; k)n^2$.

Devido ao comportamento singular dos integrandos para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, os elementos diagonais C_{ll} e B_{ll} devem ser reescritos numa outra forma para que possam ser calculados sem que ocorra divergência. Expandindo as funções $H_0^{(1)}(z)$ e $H_1^{(1)}(z)$ para $z = nk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ muito pequeno e considerando Δs_l como o comprimento para pequenos elementos da fronteira, é possível escrever C_{ll} como

$$C_{ll} \approx -1 + \frac{\kappa}{2\pi} \Delta s_l,$$

onde κ é a curvatura no ponto s_l . Já B_{ll} pode ser escrito como

$$B_{ll} \approx \frac{\Delta s_l}{\pi} \left[1 - \ln \frac{nk\Delta s_l}{4} + i\frac{\pi}{2} - \gamma \right],$$

onde $\gamma = 0.577215\dots$ é a constante de Euler.

Uma solução não trivial da equação matricial (4.21) existe somente para o caso em que o determinante de M for zero. Utilizando essa condição é possível determinar o número de onda complexo k de ressonância. Tendo encontrado um valor k_{res} , as componentes do vetor ϕ_l e ψ_l são dados pelo autovetor associado ao autovalor nulo da matriz $M(k_{res})$. Esse autovetor pode ser obtido, por exemplo, usando decomposição em valores singulares.

A função de onda no domínio \mathcal{D} é então construída discretizando a Eq. (4.16)

$$\psi(\mathbf{r}') = \sum_l \psi_l \int_l ds \partial_\nu G(s, \mathbf{r}'; k_{res}) - \sum_l \phi_l \int_l ds G(s, \mathbf{r}'; k_{res}), \quad (4.22)$$

onde l varre todos os elementos da fronteira Γ .

5 Resultados e Discussões

5.1 Círculo

O primeiro problema abordado por nós foi o da cavidade circular. Historicamente, esta também foi uma das primeiras geometrias consideradas para a fabricação de um microlaser. Num dos primeiros trabalhos experimentais na área [7], McCall, S. L. *et al.* estudaram as características da luz emitida a partir dessas cavidades utilizando amostras com diâmetro entre $3\mu\text{m}$ e $10\mu\text{m}$ e espessura de 500Å . Já num trabalho teórico recente [23], Dettmann, C.P. *et al* analisaram o comportamento dos modos no interior da cavidade ao variar o valor do índice de refração. Vemos assim que, apesar de ser uma geometria simples, a cavidade circular ainda fornece resultados não triviais.

A solução para esse problema, bem como os elementos que compõem a matriz S podem ser encontrados analiticamente [23]. Assim, é possível encontrar uma expressão que nos forneça as ressonâncias para o círculo já que as ressonâncias, como vimos no Capítulo 2, são os polos da matriz S . Tais valores, para os modos TM e TE, são dados, respectivamente, pelas soluções das seguintes equações [23]

$$\begin{aligned} J_m(nkR) - H'_m(kR) - nJ'_m(nkR)H_m(kR) &= 0, \\ J_m(nkR) - H'_m(kR) - \frac{1}{n}J'_m(nkR)H_m(kR) &= 0, \end{aligned}$$

onde J_m e H_m são, respectivamente, a função de Bessel e a função de Hankel de primeiro tipo e de ordem m ($m = 0, 1, 2, \dots$), J'_m e H'_m são, respectivamente, a primeira derivada da função de Bessel e a primeira derivada da função de Hankel, n é o índice de refração, k é o vetor de onda e R é o raio do círculo.

Utilizando o método numérico descrito no capítulo anterior, obtivemos os resultados a seguir. A Fig. 17 mostra a intensidade do campo elétrico no interior do círculo para a ressonância $k = 3.81 - 0.08i$ e índice de refração $n = 3$. A intensidade do campo elétrico aumenta da cor azul para a cor vermelha. Encontramos um resultado satisfatório

considerando a fronteira da cavidade discretizada com 50 pontos. Esse resultado concorda com o da literatura [24].

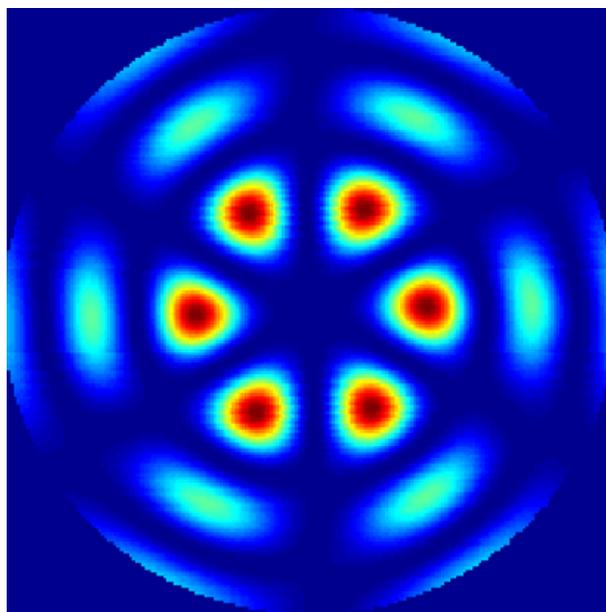


Figura 17: Intensidade do campo elétrico no interior da cavidade circular. Foram usados os valores $k = 3.81 - 0.08i$ e $n = 3$. A intensidade do campo elétrico aumenta da cor azul para a cor vermelha.

Reproduzimos ainda outro resultado utilizando o valor de ressonância $k = 3.86 - 0.34i$ e índice de refração $n = 1.5$, como mostra a Fig. 18. A intensidade do campo elétrico aumenta da cor azul para a cor vermelha. Aqui, foram necessários 100 pontos sobre a fronteira para que o resultado convergisse. Esse resultado também está de acordo com a literatura [23].

Os resultados apresentados acima correspondem ao comportamento do campo elétrico no interior da cavidade circular. Calculamos também a intensidade do campo elétrico na região externa à cavidade mas nossos resultados não foram satisfatórios uma vez que não obtivemos uma função contínua através da interface da cavidade, como era esperado.

5.2 Estádio

O outro problema abordado por nós foi o do estádio. Como se sabe, esta é uma geometria que apresenta dinâmica clássica caótica [25]. Esta cavidade foi construída experimentalmente por Lebental, M. *et. al.* [13] e mostrou uma alta direcionalidade na emissão da luz. Resultados numéricos obtidos por Shinohara, S. *et. al.* [26] também mostraram que a potência de emissão em determinadas direções é maior do que em outras.

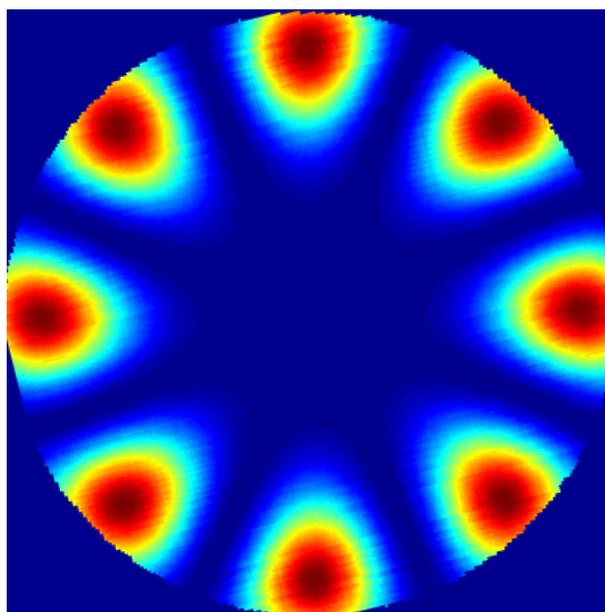


Figura 18: Intensidade do campo elétrico no interior da cavidade circular para os valores $k = 3.86 - 0.34i$, $n = 1.5$. A intensidade do campo elétrico aumenta da cor azul para a cor vermelha.

Para este problema, é impossível obter uma expressão analítica que nos forneça os valores de ressonância como no caso do círculo. É necessário, portanto, realizar uma busca desses valores no plano complexo $\text{Re}(kR)$ – $\text{Im}(kR)$. Para isso, resolvemos numericamente a equação de onda para um *grid* de valores de k e obtivemos dois valores de ressonâncias na região considerada. A Fig. 19 mostra o menor autovalor associado da matriz M na Eq. (4.21) como função de k .

O próximo passo foi determinar o comportamento do campo elétrico no interior da cavidade. Para isso, utilizamos o valor de ressonância $k = 4.35 - 0.067i$ dada na Fig. 19 e o índice de refração $n = 2$. As dimensões do estádio foram escolhidas de modo que o comprimento do segmento de reta fosse igual ao diâmetro do semi-círculo. A Fig. 20 mostra a intensidade do campo elétrico no interior da cavidade do estádio e é possível observar que o campo elétrico no interior da cavidade é simétrico em relação aos eixos horizontal e vertical que passam pelo centro da figura.

No caso do estádio, o comportamento do campo elétrico obtido por nós na região externa à cavidade também não foi o esperado uma vez que a função encontrada não era contínua através da interface da cavidade.

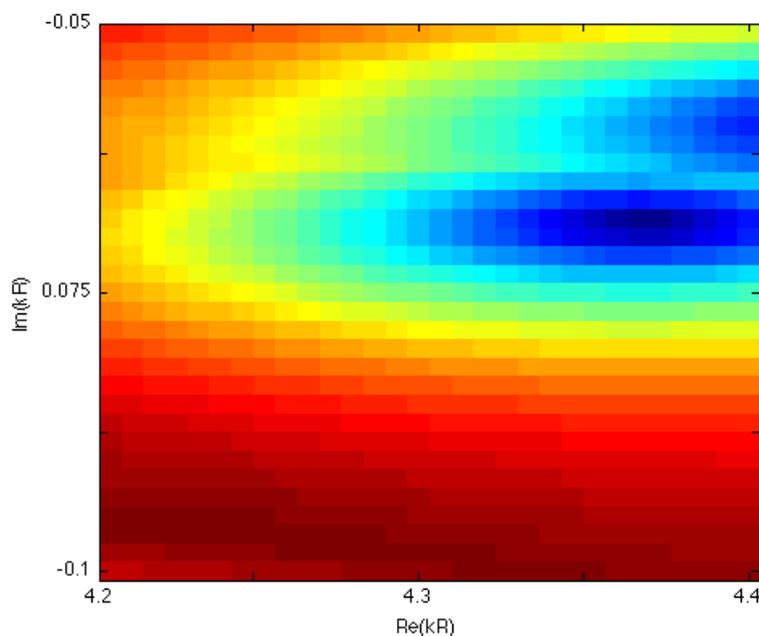


Figura 19: *Grid* de ressonâncias para o estádio. Essa figura mostra o menor autovalor associado à matriz M na Eq. (4.21) como função de k . É possível observar que entre eles existem dois mínimos, representados pelas regiões em azul. Esses valores correspondem às ressonâncias do estádio.

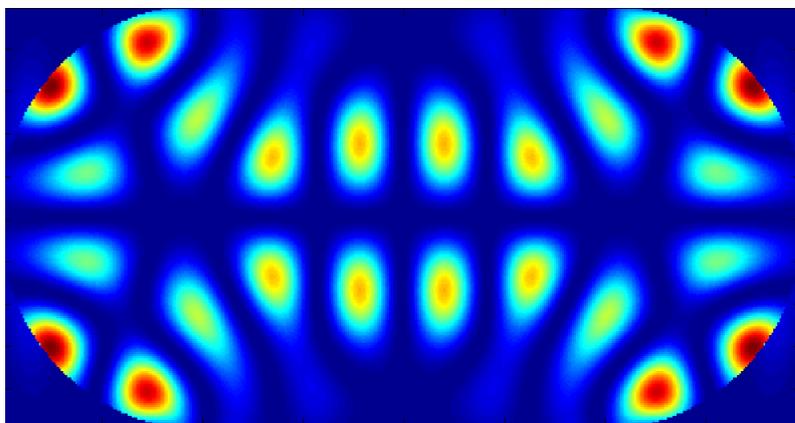


Figura 20: Comportamento do campo elétrico no interior da cavidade do estádio para os valores $k = 4.35 - 0.067i$ e $n = 2$.

5.3 Três círculos não concêntricos

A geometria nova que escolhemos estudar é constituída da fronteira externa de três círculos de mesmo raio e não concêntricos. Consideramos que os centros dos círculos estão posicionados nos vértices de um triângulo escaleno sendo que um desses vértices está na origem de um sistema de coordenadas. A Fig. 21 representa de forma esquemática essa geometria. A justificativa para essa escolha é que tal geometria é uma pequena deformação

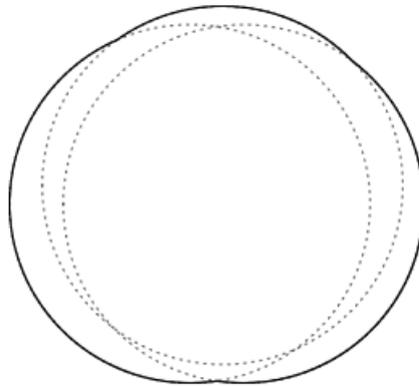


Figura 21: Representação esquemática de uma cavidade deformada construída a partir de três círculos de mesmo raio e não concêntricos.

do círculo e não apresenta nenhuma simetria. Com isso, esperamos associar o alto fator de qualidade dos modos do círculo com a quebra da simetria de rotação para obtermos emissão direcional.

O algoritmo computacional para esse caso já foi implementado e até o presente momento, obtivemos resultados preliminares para essa nova geometria.

Conclusões

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, abordamos o problema do aprisionamento da luz em microcavidades dielétricas. Tais estruturas podem ser utilizadas para a fabricação de lasers na escala de microns, os chamados microlasers. Podemos dizer que este é um problema que envolve basicamente três áreas da Física: o eletromagnetismo, a mecânica quântica e os sistemas caóticos.

Tínhamos como objetivo inicial reproduzir resultados para formatos de cavidades já estudados e, em seguida, abordar um problema cuja geometria ainda não tivesse sido considerada. Esses objetivos foram parcialmente alcançados uma vez que os resultados por nós obtidos para o caso do círculo e para o caso do estádio estão de acordo com aqueles da literatura.

Nossa principal dificuldade esteve na implementação do método numérico para a solução dos problemas. Por envolver elementos de geometria, este é um método que possui alguns detalhes que devem ser levados em conta, tais como o sentido do vetor normal em cada região (dentro e fora da cavidade) e a orientação da integral sobre a fronteira. Para o caso do círculo, a implementação não apresentou grandes obstáculos mas para o caso do estádio, foi necessário um tempo grande até que nosso código fornecesse os resultados desejados. Ademais, cada uma das imagens apresentadas no Capítulo anterior levava um tempo razoavelmente grande para ser obtida, podendo chegar, em alguns casos, a 14 horas.

Outra dificuldade enfrentada foi que o nosso algoritmo não reproduziu o resultado esperado para a região externa à cavidade. Devíamos encontrar um resultado no qual a função de onda fosse contínua na fronteira, entretanto, não obtivemos tal resultado. Mesmo aumentando o número de pontos utilizados na discretização da fronteira, nosso resultado não convergiu. Acreditamos que as dificuldades citadas acima teriam sido solucionadas se houvesse mais tempo para analisá-las.

Para o caso da geometria nova, constituída por três círculos não concêntricos, obtivemos resultados preliminares que nos levam a acreditar que este é um formato de cavidade que pode apresentar emissão direcional mas que por falta de tempo, não pudemos estudar

esse problema como proposto inicialmente.

Referências

- [1] C. Gmachl, F. Capasso, E.E. Narimanov, J.U. Nöckel, A.D. Stone, J. Faist, D.L. Sivco, and A.Y. Cho. High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators. *Science*, 280:1556, 1998.
- [2] P.A. Mello, N. Kumar, and N.K. Kumar. *Quantum transport in mesoscopic systems: complexity and statistical fluctuations: a maximum-entropy viewpoint*. Oxford University Press, 2004.
- [3] H.E. Türeci, H.G.L. Schwefel, P. Jacquod, and A.D. Stone. Modes of wave-chaotic dielectric resonators. *Progress in Optics*, 47:75–137, 2005.
- [4] Y. Yamamoto and R.E. Slusher. Optical processes in microcavities. *Physics Today*, 46:66, 1993.
- [5] K.J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 424:839–846, 2003.
- [6] L. Collot, V. Lefevre-Seguin, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Very high-q whispering-gallery mode resonances observed on fused silica microspheres. *Europhysics Letters*, 23:327, 1993.
- [7] S.L. McCall, A.F.J. Levi, R.E. Slusher, S.J. Pearton, and R.A. Logan. Whispering-gallery mode microdisk lasers. *Applied physics letters*, 60:289–291, 1992.
- [8] A.F.J. Levi, R.E. Slusher, S.L. McCall, T. Tanbun-Ek, D.L. Coblenz, and S.J. Pearton. Electrically pumped, room-temperature microdisk semiconductor lasers with submilliampere threshold currents. *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 39:2651, 1992.
- [9] J.U. Nöckel, A.D. Stone, and R.K. Chang. Q spoiling and directionality in deformed ring cavities. *Optics letters*, 19:1693–1695, 1994.
- [10] S. Chang, R.K. Chang, A.D. Stone, and J.U. Nöckel. Observation of emission from chaotic lasing modes in deformed microspheres: displacement by the stable-orbit modes. *Journal of the Optical Society of America B*, 17:1828–1834, 2000.
- [11] J.U. Nöckel, A.D. Stone, G. Chen, H.L. Grossman, and R.K. Chang. Directional emission from asymmetric resonant cavities. *Optics letters*, 21:1609–1611, 1996.
- [12] J.U. Nöckel and A.D. Stone. Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities. *Nature*, 385:45–47, 1997.
- [13] M. Leubenthal, J.S. Lauret, J. Zyss, C. Schmit, and E. Bogomolny. Directional emission of stadium-shaped microlasers. *Physical Review A*, 75:33806, 2007.

-
- [14] S.B. Lee, J.H. Lee, J.S. Chang, H.J. Moon, S.W. Kim, and K. An. Observation of scarred modes in asymmetrically deformed microcylinder lasers. *Physical Review Letters*, 88:33903, 2002.
- [15] W. Fang, H. Cao, and G.S. Solomon. Control of lasing in fully chaotic open microcavities by tailoring the shape factor. *Applied physics letters*, 90:081108, 2007.
- [16] H.G.L. Schwefel, N.B. Rex, H.E. Tureci, R.K. Chang, A.D. Stone, T. Ben-Messaoud, and J. Zyss. Dramatic shape sensitivity of directional emission patterns from similarly deformed cylindrical polymer lasers. *Journal of the Optical Society of America B*, 21:923–934, 2004.
- [17] J. Wiersig and M. Hentschel. Combining directional light output and ultralow loss in deformed microdisks. *Physical Review Letters*, 100:33901, 2008.
- [18] S. Shinohara, T. Harayama, T. Fukushima, M. Hentschel, T. Sasaki, and E.E. Narimanov. Chaos-assisted directional light emission from microcavity lasers. *Physical Review Letters*, 104:163902, 2010.
- [19] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1999.
- [20] J. Wiersig. Boundary element method for resonances in dielectric microcavities. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 5:53, 2003.
- [21] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 4th edition, 1979.
- [22] I. Kosztin and K. Schulten. Boundary integral method for stationary states of two-dimensional quantum systems. *International Journal of Modern Physics C*, 8:293–325, 1997.
- [23] C.P. Dettmann, G.V. Morozov, M. Sieber, and H. Waalkens. Internal and external resonances of dielectric disks. *Europhysics Letters*, 87:34003, 2009.
- [24] M. Hentschel and K. Richter. Quantum chaos in optical systems: The annular billiard. *Physical Review E*, 66:56207, 2002.
- [25] E.J. Heller. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems: scars of periodic orbits. *Physical Review Letters*, 53:1515–1518, 1984.
- [26] S. Shinohara, T. Fukushima, and T. Harayama. Light emission patterns from stadium-shaped semiconductor microcavity lasers. *Physical Review A*, 77:033807, 2008.
- [27] R.E. Slusher, A.F.J. Levi, U. Mohideen, S.L. McCall, S.J. Pearton, and R.A. Logan. Threshold characteristics of semiconductor microdisk lasers. *Applied physics letters*, 63:1310–1312, 1993.
- [28] S.Y. Lee, M.S. Kurdoglyan, S. Rim, and C.M. Kim. Resonance patterns in a stadium-shaped microcavity. *Physical Review A*, 70:23809, 2004.