

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Medidas quânticas, descoerência e emaranhamento em cenários de física de neutrinos.**

Victor Augusto Sant Anna Valderramos Bittencourt

Orientador: Alex Eduardo de Bernardini

Coorientador: Celso Jorge Villas-Boas

Dissertação apresentada no Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos para a obtenção do título de Mestre em Física.

São Carlos, 11 de fevereiro de 2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

B624mq

Bittencourt, Victor Augusto Sant Anna Valderramos.  
Medidas quânticas, descoerência e emaranhamento em  
cenários de física de neutrinos / Victor Augusto Sant Anna  
Valderramos Bittencourt. -- São Carlos : UFSCar, 2014.  
80 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2014.

1. Mecânica quântica. 2. Neutrinos. 3. Medidas quânticas.  
4. Descoerência. 5. Emaranhamento. I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

**Victor Augusto Sant Anna Valderramos Bittencourt**

Dissertação de mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em física.

**Aprovado em: 11 de fevereiro de 2014**

**BANCA EXAMINADORA**



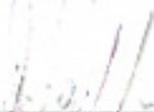
---

*Prof. Dr. Alex Eduardo Bernardini (Orientador)*  
*Universidade Federal de São Carlos - DF*



---

*Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda*  
*Universidade Estadual de Campinas - IFGW*



---

*Prof. Dr. Daniel T. Vanzella*  
*Universidade de São Paulo - IFSC*

*Science offers the boldest metaphysics of the age. It is a thoroughly human construct, driven by the faith that if we dream, press to discover, explain, and dream again, thereby plunging repeatedly into new terrain, the world will somehow come clearer and we will grasp the true strangeness of the universe. And the strangeness will all prove to be connected, and make sense.*

Edward O. Wilson

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Alex Eduardo de Bernardini pela paciência e tempo investidos em mim, por me guiar através de todos esses anos desde a iniciação científica até este trabalho, além do coleguismo e atenção constantes. Ao meu coorientador, Celso Jorge Villas-Boas, agradeço também à paciência, os atendimentos sempre atenciosos e pela ajuda decisiva neste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Angela Sant Anna Valderramos Bittencourt e Fernando Pereira Bittencourt, por sempre me apoiarem em minhas escolhas e estarem do meu lado de todas as maneiras possíveis. Agradeço à minha segunda mãe, minha madrinha, Carmem Luzia da Silva, que me apoiou de maneira decisiva em vários momentos. Minhas irmãs, Cristal Cremon Raduan Miguel Barzilai, que mesmo longe sempre esteve a par de todas as minhas atividades e sempre se dispôs a me ajudar com energia e amizade, Stephanie Sant Anna Valderramos Bittencourt e Maria Fernanda Sant Anna Valderramos Bittencourt, minhas queridas irmãs caçulas que me encheram de alegrias e bons momentos.

Agradeço à minha companheira Natália Lumi Watanabe pelo carinho, paciência, compreensão e alegria que tanto fizeram diferença no meu dia-a-dia e que me ajudaram a superar os momentos de tensão.

Agradeço aos docentes da Universidade Federal de São Carlos participaram de minha formação. Em especial, Giuliano Augustus Pavan Ribeiro, pelas lições de física matemática e mecânica quântica que jamais esquecerei, César Constantino, pelas conversas agradáveis de fim de tarde e pelas lições de eletrodinâmica, e Paulo Daniel Emmel, pela atenção e por diversos ensinamentos de física fundamental.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos, tanto os geograficamente próximos quanto os distantes. Ao Thiago Silva Tavares pelas diversas discussões de física que sempre abriram minha mente em diversas questões e também pelos momentos de descontração. À Marília Mancini agradeço pela atenção e pelos conselhos. Aos amigos que me ajudaram com conversas e opiniões em nível pessoal, André Donegá Gargantini, Alan Michel Franco, Pedro Cesar Zavitoski e Monique Deriggi. Agradeço, também, aos meus companheiros de sala Rodrigo

Alves Pimenta e Ricardo Soares Vieira pelas conversas interessantes sobre física.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

## Resumo

Na primeira parte deste trabalho descrevemos os neutrinos cosmológicos como um sistema quântico composto e utilizamos a teoria generalizada das medidas quânticas para obter uma correlação probabilística entre energias observáveis e autoestados de sabor. Associamos as energias média e ponderada de sabor a, respectivamente, esquemas de medidas quânticas seletivas e não seletivas e avaliamos o impacto destas diferentes definições de energia no cálculo de massa efetiva de um sabor que determinam a contribuição dos neutrinos para a densidade de energia do inventário cósmico. Nossos resultados estabelecem que se o estado dos neutrinos cosmológicos for uma mistura maximal todos os procedimentos de cálculo da densidade irão gerar o mesmo resultado. Na segunda parte voltamos nossa atenção à propagação livre de estados de sabor no formalismo de pacotes de ondas. Interpretando cada autoestado de massa, associado a uma distribuição de *momentum* Gaussiana, como um estado de três *qubits*, um estado de sabor é descrito como um sistema quântico composto de três subsistemas. Consideramos as diferentes correlações entre as componentes da superposição quântica em termos de quantificadores apropriados e obtemos uma escala de coerência compatível com a escala de amortecimento das oscilações presente nas probabilidades de sobrevivência de um sabor, indicando relação entre este amortecimento e as correlações estudadas. Investigamos mais a fundo essa relação em termos do desvio padrão entre o amortecimento e a densidade de estados associada aos quantificadores de correlação, desvio que é mínimo apenas para certos valores da largura da distribuição de *momentum* dos estados de massa.

# Abstract

In the first part of this work we describe the cosmological neutrinos as a composite quantum system and use the generalized theory of quantum measurements to acquire a probabilistic correlation between observable energies and flavor eigenstates. We associate flavor averaged and flavor weighted energies to, respectively, selective and non selective quantum measure schemes and evaluate the impact of these definitions in the calculation of a flavor effective mass that determines the neutrino contribution to the energy density of the cosmic inventory. Our results establish that if the cosmic neutrinos state is a maximal mixture all the procedures for the calculation of the energy density will generate the same results. In the second part we turn our attention to the free propagation of flavor states in the wave packet formalism. Interpreting each mass eigenstate, associated to a Gaussian *momentum* distribution, with a three qubit states, a flavor state is described as a quantum system composed of three subsystems. We consider the different correlations between the quantum superposition components in terms of subtle quantifiers and obtain a coherence scale compatible with the damping scale present in survival probabilities of a flavor, indicating a relation between the damping and the studied correlations. We investigate this relation in terms of the standard deviation between the damping and the density of states associated to the correlation quantifiers a deviation that is minimum only for certain values of the mass eigenstate *momentum* distribution width.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Formalismo de matriz densidade</b>	<b>5</b>
2.1	Matriz densidade . . . . .	5
2.1.1	Teoria quântica das medidas . . . . .	7
2.2	Sistemas quânticos compostos . . . . .	9
2.3	Estados de qubits e a entropia de von Neumann . . . . .	11
2.3.1	Entropia de von Neumann e medidas . . . . .	14
2.4	Emaranhamento e correlações . . . . .	15
2.4.1	A entropia de emaranhamento . . . . .	16
2.4.2	Negatividade logarítmica . . . . .	17
2.4.3	Emaranhamento de formação . . . . .	18
2.5	Informação mútua e discórdia quântica . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Oscilação quântica de sabores</b>	<b>21</b>
3.1	Estados de sabor e estados de massa . . . . .	22
3.2	Evolução livre de estados de sabor . . . . .	24
3.2.1	Probabilidade de sobrevivência e de transição . . . . .	25
3.2.2	Aproximações ultra relativísticas . . . . .	27
3.3	Tratamento da oscilação quântica de sabores no formalismo de matriz densidade	28
3.3.1	Tratamento da oscilação de dois sabores com o formalismo de operador densidade . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Teoria das medidas quânticas e a densidade de energia dos neutrinos cos- mológicos</b>	<b>33</b>
4.1	Conceitos básicos de cosmologia . . . . .	33
4.1.1	Expansão do universo e a equação de Friedmann-Robertson-Walker . .	33
4.1.2	Evolução da densidade de energia . . . . .	35

4.1.3	Desacoplamento . . . . .	37
4.2	Densidade de energia dos neutrinos cosmológicos . . . . .	39
4.3	Energia média e energia ponderada de estados de sabor . . . . .	43
4.3.1	Aplicação aos neutrinos cosmológicos . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Descoerência entre autoestados de massa no formalismo de pacotes de ondas.</b>	<b>53</b>
5.1	O formalismo de pacote de ondas em física de neutrinos . . . . .	54
5.1.1	Pacotes de ondas Gaussianos . . . . .	56
5.2	Emaranhamento e correlações entre dois estados de massa. . . . .	58
5.2.1	Quantificadores de emaranhamento para dois sabores . . . . .	60
5.2.2	Discórdia quântica e informação mútua para dois sabores . . . . .	61
5.3	Emaranhamento e correlações entre três estados de massa . . . . .	64
5.3.1	Quantificadores de emaranhamento . . . . .	65
5.3.2	Correlações quânticas e totais . . . . .	66
5.4	Relação fenomenológica entre probabilidade de sobrevivência e correlações entre os estados de massa . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>75</b>

# Lista de Figuras

1	Esquema de medidas segundo a teoria generalizada das medidas quânticas. . . . .	9
2	Probabilidade de sobrevivência de transição para um estado inicialmente eletrônico descrito em termos de uma superposição de dois autoestados de massa. . . . .	26
3	Representação diagramática das duas possíveis hierarquias de massa dos estados físicos de neutrinos. . . . .	28
4	Probabilidade de sobrevivência $P_{e \rightarrow e}$ e as probabilidades de transição $P_{e \rightarrow \mu}$ e $P_{e \rightarrow \tau}$ para o estado eletrônico em função do parâmetro $\Delta m_{21} t / 2p$ . . . . .	29
5	Probabilidade de medir um estado misto genérico de dois sabores como um estado eletrônico e como um estado muônico. . . . .	32
6	Esquemática da expansão do universo. . . . .	34
7	Diferença normalizada entre as densidades de energia calculada com a utilização da massa efetiva de um sabor e das energias dos estados de massa em função do <i>redshift</i> para as hierarquias normal e invertida . . . . .	42
8	Densidade de energia normalizada dos neutrinos $\Omega_\nu$ em função do menor autovalor de massa para os procedimentos utilizando a massa efetiva de um sabor e com os autovalores de massa para as hierarquias normal e invertida. . . . .	43
9	Desvios no cálculo da densidade de energia $\Delta\rho_\nu/\rho_\nu$ em função do <i>redshift</i> para os diferentes procedimentos de cálculo de energia apresentados. . . . .	50
10	Densidade de energia normalizada dos neutrinos cosmológicos em função do menor autovalor de massa para as diferentes procedimentos de cálculo de energia apresentados. . . . .	51
11	Erro relativo para as previsões da massa dos neutrinos em função do menor autovalor de massa para os diferentes procedimentos de cálculo de energia apresentados. . . . .	52
12	Probabilidades de sobrevivência no formalismo de pacotes de ondas para os sabores eletrônico, muônico e taônico. . . . .	58

13	Pureza quântica de um estado de sabor descrito como uma superposição de dois modos de massa no formalismo de pacotes de ondas. . . . .	59
14	Emaranhamento de formação e negatividade logarítmica de estados eletrônico e muônico descritos como superposição de dois modos de massa no formalismo de pacotes de ondas. . . . .	62
15	Discórdia quântica e informação mútua de estados eletrônico e muônico descritos como superposição de dois modos de massa no formalismo de pacotes de ondas.	63
16	Pureza quântica para estados inicialmente eletrônico muônico e taônico. . . . .	65
17	Probabilidades de sobrevivência, emaranhamento de formação médio e negatividade logarítmica média para estados inicialmente eletrônico, muônico e taônico.	71
18	Probabilidades de sobrevivência, discórdia quântica média e informação mútua média para estados inicialmente eletrônico, muônico e taônico. . . . .	72
19	Relação entre a probabilidade de sobrevivência e a negatividade logarítmica e entre a probabilidade de sobrevivência e o emaranhamento de formação. . . . .	73
20	Relação entre a probabilidade de sobrevivência e a informação mútua média e entre a probabilidade de sobrevivência e a discórdia quântica média. . . . .	74

## Lista de Tabelas

1	Valores fenomenológicos para os parâmetros de mistura. . . . .	24
2	Aproximação tribimaximal para os ângulos de mistura. . . . .	24

# 1 Introdução

A utilização de conceitos de informação quântica em diversas áreas da física tem se tornado cada vez mais comum, como no estudo de oscilação entre káon e anti káon através da desigualdade de Bell [1]. Por lidar com fundamentos intrínsecos à teoria quântica, a teoria de informação encontra diversas aplicações fora da área da computação quântica, levando a descrições e pontos de vista diferentes sobre fenômenos físicos nas mais diversas instâncias. Nesta dissertação utilizaremos de ferramental e ideias oriundas da teoria da informação quântica na descrição de fenômenos associados à física de neutrinos em dois cenários: em cosmologia e no estudo da descoerência entre autoestados de massa através do formalismo de pacotes de ondas.

Os primeiros trabalhos importantes em teoria de informação foram publicados na década de 1920. O primeiro deles, por H. Nyquist, lidava com transmissão de sinal por telégrafos e apresentava uma ideia seminal sobre velocidade de linha e inteligência, aspectos ligados à informação [2]. O segundo trabalho seminal, de autoria de R. Hartley, apresentava pela primeira vez o conceito de informação de uma maneira mais técnica quantificando-a através de uma função logarítmica de possibilidades [3]. Estes trabalhos serviram de base ao mais importante artigo da teoria da informação clássica publicado em 1948 e escrito por C. Shannon [4]. Utilizando conceitos de probabilidade relativamente novos, Shannon quantificou a incerteza em uma mensagem através da Entropia de Shannon, quantidade que assumiu certa relevância em teoria de informação.

A teoria da informação estuda a transmissão, armazenamento e processamento de informação e abrange as mais diversas áreas do conhecimento. Com o desenvolvimento da teoria quântica, a teoria de informação sofreu um grande desenvolvimento, em particular devido ao estudo e implementação de recursos quânticos em tarefas como criptografia. A teoria da informação quântica, portanto, se ocupa da implementação de recursos quânticos em processos de informação [5].

Por lidar com diversas questões fundamentais da teoria quântica, o estudo da teoria de informação fora de seu escopo usual proporciona nova visão e novos pontos de vista de fenômenos físicos. Em particular o estudo de correlações, principalmente o emaranhamento, e sua perda

(chamada de descoerência) encontra aplicações nas mais diversas áreas da física, como em cosmologia [6], física de partículas [1, 7, 8] e física da matéria condensada [9].

Outra questão adjacente à teoria de informação é a descrição teórica de processos de medidas em mecânica quântica [10]. A medição de sistemas está intimamente relacionada com dois aspectos essenciais à informação. Por um lado, processos de medida podem ser utilizados como uma forma de preparar um sistema de estado desconhecido em um estado conhecido. Por outro lado, as medidas estão intimamente associadas ao caráter probabilístico da mecânica quântica. A teoria geral das medidas quânticas lida com estes aspectos, e fornece um contexto rico para o estudo de diversos sistemas quânticos onde processos de medida são importantes, seja para uma interpretação probabilística associada à mecânica estatística ou à termodinâmica, seja para a determinação da história de preparação do sistema em questão [11].

Em diversos problemas na física de neutrinos é possível aplicar o ferramental típico da teoria da informação e da teoria das medidas quânticas. Proposto por W. Pauli como forma de explicar a conservação de *momentum* e *spin* em decaimentos beta, o neutrino é uma partícula elementar neutra, interagente apenas via força fraca, que segundo o modelo padrão da física de partículas, possui massa nula. Com o desenvolvimento da teoria das interações fracas, foram previstos três tipos, chamados sabores, diferentes de neutrinos, cada um associado a um lépton carregado: elétron ( $e$ ), múon ( $\mu$ ) e táon ( $\tau$ ). Neutrinos são produzidos em processos onde interações fracas são importantes, como decaimentos, fusão de núcleos, fissão de núcleos e espalhamentos via interação fraca e cada neutrino possui um antineutrino correspondente [12].

A maior revolução no estudo dos neutrinos ocorreu ao considerar o fluxo de neutrinos eletrônicos produzidos no Sol e detectados na Terra. As diversas reações de fusão nuclear que ocorrem no Sol geram neutrinos eletrônicos que se propagam até a Terra. O modelo solar padrão, que descreve as reações nucleares e outros aspectos da evolução de estrelas, permite a predição do fluxo de neutrinos eletrônicos que devem ser medidos na Terra, entretanto, apenas cerca de 50% deste fluxo é de fato medido [13]. Uma das maneiras de explicar esta depleção segue o modelo proposto por Pontecorvo em 1957 [14] no qual um neutrino de determinado

sabor pode ser descrito como uma superposição quântica dos chamados estados de massa. Tal ideia é baseada na explicação da oscilação entre káon e antikáon dada por M. Gell-Mann e A. Pais na qual um número quântico, chamado estranheza, oscilava [15]. No caso dos neutrinos, o caráter quântico de sabor oscila durante a propagação livre do estado, de modo que um neutrino inicialmente produzido em estado eletrônico pode ser detectado como outro sabor. Este fenômeno é chamado oscilação quântica de sabores e explica a depleção no fluxo de neutrinos solares. Neste contexto, o neutrino possui massa muito pequena, mas não nula, sendo sua medida precisa um dos maiores desafios da física de neutrinos experimental.

Os neutrinos também são importantes no contexto do modelo cosmológico padrão [16]. Em tempos cosmológicos primordiais toda a energia estava concentrada em um volume menor, de modo que todas as partículas elementares estavam em equilíbrio térmico. O universo evoluiu, tornando-se cada vez maior. Eventualmente, a taxa de crescimento do universo torna-se maior do que a taxa de interação entre uma partícula e o plasma constituído de todas as outras partículas. Quando isso ocorre a partícula em questão deixa de interagir com o resto das partículas do universo, ou seja, ela se desacopla. Tal fenômeno ocorreu com os fótons primordiais levando à formação da radiação cósmica de fundo, exaustivamente medida por diversos experimentos [16]. Os neutrinos, por sua vez, se desacoplam de maneira semelhante aos fótons e também formam um "mar" de partículas de fundo. Os neutrinos desacoplados são chamados de neutrinos cosmológicos e têm profunda influência em processos importantes em cosmologia, como o crescimento de estruturas de larga escala [17, 18].

Neste trabalho, iremos aplicar o ferramental de teoria de informação em dois aspectos da física de neutrinos.

O cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos é importante não apenas como *input* em cálculos de cosmologia, mas também para extrair dados relativos à massa dos neutrinos de dados cosmológicos [17]. Descrevendo o processo de desacoplamento como uma medida quântica no sistema constituído pelos neutrinos cosmológicos, e utilizando a teoria geral das medidas quânticas, podemos definir energias médias e ponderadas, resolvendo ambiguidades presentes no cálculo da densidade de energia dos neutrinos. A solução dos

problemas decorrentes destas ambiguidades constitui o primeiro resultado importante de nosso trabalho.

Em uma segunda etapa, no contexto do estudo de correlações quânticas entre autoestados de massa, outro aspecto da física de neutrinos foi abordado. Em particular, pressupondo a descrição de um estado de sabor como uma superposição de pacotes de ondas associados aos estados de massa. Como cada um destes pacotes possui massa diferente, há diferença na velocidade de propagação, levando à perda de interferência entre os pacotes de ondas e ao fim da oscilação de sabor. Tal fenômeno é bem conhecido e quantificado de maneira fenomenológica em diversos cenários [19, 20, 21]. Observando que um estado de sabor pode ser descrito como um sistema quântico composto e identificando-o como um estado emaranhado, iremos quantificar este efeito através do estudo das correlações entre os modos de massa descritos como pacotes de ondas Gaussianos, determinando a relação entre probabilidade de medir um estado de sabor e a quantidade de correlação no estado quântico que, como veremos, depende da largura do pacote de ondas.

A dissertação é estruturada em dois blocos, o primeiro composto pelos segundo e terceiro capítulo, introduzem as ferramentas básicas a serem utilizadas. No segundo capítulo iremos apresentar o ferramental básico da teoria da informação, desenvolvendo alguns conceitos de teoria de medidas e estudo e quantificação de correlações e emaranhamento. No terceiro capítulo apresentaremos a descrição da oscilação quântica de sabores segundo a mecânica quântica de uma partícula descrevendo um estado de sabor como uma superposição quântica de estados de massa e estudando a dinâmica livre deste sistema. O segundo bloco da dissertação apresenta as aplicações da ferramenta nos cenários de física de neutrino. O quarto capítulo ocupa-se da aplicação da teoria das medidas para determinar o cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos e a possível influência deste estudo na determinação da massa dos neutrinos e no cálculo de algumas quantidades relevantes à cosmologia. No quinto capítulo apresentamos o estudo sistemático da descoerência entre os autoestados de massa e como a perda de correlação é relacionada ao fim da oscilação de sabores no formalismo de pacotes de ondas. Por último apresentaremos as conclusões encerrando a dissertação.

## 2 Formalismo de matriz densidade

Neste capítulo introduziremos o formalismo do operador densidade que será utilizado em todos os estudos apresentados nesta dissertação. Na primeira parte do capítulo apresentaremos a definição, interpretação e propriedades do operador densidade. Assim como em outros formalismos da mecânica quântica, as medidas desempenham papel essencial no formalismo que será utilizado. A teoria quântica das medidas lida com essa questão e será introduzida na segunda parte do capítulo. Por último iremos introduzir o conceito de emaranhamento entre dois subsistemas e os quantificadores de emaranhamento e de correlações que serão utilizados no capítulo 5.

### 2.1 Matriz densidade

O formalismo da matriz densidade, ou operador densidade, é uma descrição da mecânica quântica útil em diversas situações como em termodinâmica e mecânica estatística [22], em computação quântica [5] e no estudo de sistemas quânticos abertos [11]. Definimos o operador densidade  $\rho$  associado a um sistema físico descrito por um vetor de estado  $|\psi\rangle$  como [11]:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1)$$

Estados descritos por operadores densidade como (1) são chamados **estados puros**.

O operador densidade descreve estados mais gerais do que os puros, os chamados estados **mistos** intimamente ligados com a interpretação estatística da matriz densidade. Estados mistos surgem ao considerarmos um *ensemble* de sistemas quânticos descritos por operadores  $\{\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\}$ . Seja  $N$  o número total de sistemas do *ensemble* e  $N_i$  o número de sistemas preparados no estado  $|\psi_i\rangle$ , o operador densidade  $\rho$  que descreve as propriedades desse conjunto de sistemas é

$$\rho = \sum_i \frac{N_i}{N} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2)$$

onde definimos  $p_i = N_i/N$ ,  $\sum_i p_i = 1$ . Estados mistos estão ligados à incerteza na preparação do estado do sistema, então, para dado estado misto sabemos apenas as probabilidades  $p_i$  do

sistema a ser medido como um estado puro  $|\psi_i\rangle$ . Em termos da ideia de *ensembles* de sistemas quânticos, em um estado puro todos os sistemas pertencentes ao *ensemble* são preparados no mesmo estado.

Da definição geral (2) temos

$$\rho^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho, \quad (3)$$

portanto, o operador densidade é um operador hermitiano. Como um vetor de estado é suposto normalizado

$$\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1 \rightarrow \text{Tr}[\rho] = 1. \quad (4)$$

É possível provar também que

$$\text{Tr}[\rho^2] \leq 1, \quad (5)$$

sendo a igualdade válida somente no caso em que  $\rho$  descreve um estado puro. Através da decomposição espectral de  $\rho$  temos que

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0 \quad (6)$$

para qualquer estado  $|\phi\rangle$ , ou seja, todo o operador densidade é positivo.

O valor médio de um operador  $A$  associado a um observável é

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho]. \quad (7)$$

Como a energia média do sistema é obtida através do valor médio do operador Hamiltoniano  $H$  temos

$$E = \langle H \rangle = \text{Tr}[H\rho]. \quad (8)$$

A evolução temporal da matriz densidade pode ser determinada em termos do operador de evolução temporal  $U(t_2, t_1)$  [5]:

$$\rho(t_2) = U(t_2, t_1)\rho(t_1)U^\dagger(t_2, t_1). \quad (9)$$

A evolução temporal de um operador densidade associado a um sistema fechado é obtida através de uma transformação unitária. Uma maneira equivalente de escrever (9) é em termos

da equação de Liouville-von Neumann [5, 11]:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{H\rho(t) - \rho(t)H}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho]. \quad (10)$$

### 2.1.1 Teoria quântica das medidas

Em mecânica quântica as medidas realizadas em um sistema desempenham papel importante em diversas situações. Descrevendo uma medida por uma coleção de operadores de projeção  $\{M_m\}$ , cada operador associado a um possível resultado  $m$ , é postulado que imediatamente após realizada uma medida em um sistema descrito pelo estado  $\rho$  com resultado  $m$ , o sistema passará a ser descrito por um novo estado  $\rho_m$  dado por [11]:

$$\rho_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m| = \frac{M_m\rho M_m}{Tr[M_m\rho]}. \quad (11)$$

A expressão acima é conhecida como o postulado de projeção de von Neumann-Lüders e define a chama **medida seletiva** [11]. O *ensemble* inicial descrito por  $\rho$  é, neste tipo de medida, dividido em sub-*ensembles*, cada um condicionado a um resultado  $m$  com probabilidade

$$P(m) = Tr[M_m\rho]. \quad (12)$$

É possível descrever uma medida em um arranjo experimental no qual os diferentes sub-*ensembles* resultantes de medidas seletivas em um estado  $\rho$  são misturados com respectivos pesos (12), gerando um novo estado descrito pelo operador densidade

$$\rho' = \sum_m P(m)\rho_m, \quad (13)$$

com  $\rho_m$  dado por (11). Esse tipo de medida é chamada de **medida não seletiva**. Desta maneira, o postulado de von Neumann-Lüders introduz dois tipos de medidas, as seletivas, descritas por (11), e as não seletivas descritas por (13).

As medidas descritas pelo postulado de von Neumann-Lüders são muito restritas e consideradas ideais. É suposto que qualquer medida possa ser descrita por um operador de projeção, o que não é verdade no caso mais geral. Existem diversos esquemas de medidas que diferem das medidas ideais, por exemplo aquelas incluindo efeitos de resolução finita do detector. A

teoria generalizada das medidas quânticas é uma espécie de generalização natural do postulado de von Neumann-Lüders para casos mais gerais. Consideramos um esquema de medidas quânticas em um *ensemble* de sistemas quânticos descrito por um operador densidade  $\rho$  que gera um conjunto de resultados  $\{m\}$ . A teoria generalizada das medidas quânticas é baseada nos seguintes conceitos [11]:

- O resultado  $m$  de uma medida representa um número aleatório com distribuição de probabilidade

$$P(m) = Tr[F_m \rho], \quad (14)$$

com  $F_m$  um operador positivo chamado **efeito** que satisfaz a condição de normalização

$$\sum_m F_m = 1, \quad (15)$$

de modo que

$$\sum_m P(m) = 1, \quad (16)$$

- Para uma medida seletiva, o sub-*ensemble* no qual  $\rho$  é colapsado após ser medido um valor  $m$  é descrito pelo operador  $\rho_m$

$$\rho_m = \frac{\Phi_m(\rho)}{P(m)}, \quad (17)$$

sendo  $\Phi_m(\rho)$  um super-operador positivo, chamado **Operação**, que mapeia operadores positivos em operadores positivos. Supõe-se que a operação satisfaz a condição

$$Tr[\Phi_m(\rho)] = Tr[F_m \rho], \quad (18)$$

para que o traço do operador  $\rho_m$  seja unitário.

- Uma medida não seletiva associada a medidas seletivas com resultados  $\{m\}$  descritas por efeitos  $\{F_m\}$  colapsa o estado na matriz densidade

$$\rho' = \sum_m P(m) \rho_m = \sum_m \Phi_m(\rho). \quad (19)$$

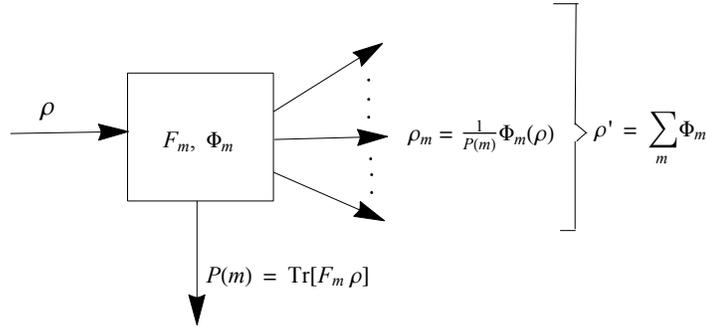


Figura 1: Esquema de medidas segundo a teoria generalizada das medidas quânticas. Um *ensemble* de sistemas quânticos descrito pelo operador densidade  $\rho$  é medido, tendo como resultado números  $m$  com distribuição de probabilidade  $P(m) = \text{Tr}[F_m \rho]$ . Os operadores positivos  $F_m$  são chamados efeitos. Após uma medida seletiva o sistema passa a ser descrito pelo operador  $\rho_m = \sum_m P^{-1}(m) \Phi_m(\rho)$ . O super operador  $\Phi_m(\rho)$  mapeia operadores positivos em operadores positivos e é chamado operação. Desta maneira, qualquer medida pode ser descrita através da noção de efeitos e operações. Figura reproduzida de [11].

Os conceitos apresentados nos itens acima são ilustrados esquematicamente na figura 1.

Podemos descrever qualquer processo de medida, ideal ou não, no contexto da teoria generalizada das medidas quânticas através dos conceitos introduzidos nos itens acima. As medidas ideais, descritas pelo postulado de von Neumann-Lüders, constituem o caso no qual o resultado  $m$  é consequência de uma medida descrita por operadores de projeção  $\{M_m = |\phi_m\rangle\langle\phi_m|\}$  que satisfazem uma relação de completude  $\sum_m M_m = 1$ , de modo que o efeito é dado por  $F_m = M_m$  e a operação por  $\Phi_m(\rho) = M_m \rho M_m$ .

## 2.2 Sistemas quânticos compostos

Sistemas quânticos compostos descrevem diversas situações físicas, por exemplo, problemas de mais de uma partícula. Este tipo de sistema é associado a um espaço de Hilbert composto

descrito através do produto tensorial de espaços de Hilbert associados a cada subsistema. Em um sistema constituído por duas partículas, o espaço de Hilbert associado ao sistema como um todo é composto por dois espaços, cada um associado a uma partícula. Também podemos utilizar sistemas compostos para descrever diferentes graus de liberdade de uma mesma partícula.

Matematicamente um espaço  $\mathcal{H}$  composto de  $N$  espaços  $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N\}$  é descrito por [11]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k, \quad (20)$$

sendo cada espaço  $\mathcal{H}_k$  associado a um subsistema em particular.

Em geral o operador densidade que descreve um sistema composto **não** pode ser decomposto como produto tensorial de operadores atuando em cada um dos espaços correspondentes. Para obter um operador que descreva as propriedades de um subsistema em particular, devemos utilizar o traço parcial. O exemplo mais simples é um sistema composto de dois subsistemas, para o qual temos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (21)$$

Se o operador densidade  $\rho$  representa o estado do sistema como um todo, o estado do sistema 1 será inteiramente representado pelo operador  $\rho_1$  obtido através do traço parcial com relação ao espaço 2 [5]:

$$\rho_1 = Tr_2[\rho]. \quad (22)$$

No capítulo 5 iremos estudar uma bipartição de um sistema composto, definida através do traço parcial do operador densidade  $\rho$  associado a um sistema composto de três ou mais subsistemas em todos os espaços exceto dois  $\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j\}$  de interesse:

$$\rho_{i,j} = Tr_{k \neq i,j}[\rho], \quad (23)$$

com o traço sendo tomado em todos os  $k$  diferentes de  $i$  e  $j$ .

## 2.3 Estados de qubits e a entropia de von Neumann

O formalismo do operador densidade apresentado e suas nuances possui diversas aplicações, em particular, em teoria da informação e computação quântica. A teoria da informação lida com o estudo da emissão, armazenamento, processamento e transmissão de informação. Um dos trabalhos mais importante na área da informação Clássica é de autoria de C. Shannon e quantifica o recurso clássico necessário para armazenar a informação emitida por uma fonte. Uma fonte de informação pode ser basicamente descrita por um conjunto de probabilidades  $\{p_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Cada uso da fonte resulta em uma informação  $i$  emitida com probabilidade  $p_i$ . O teorema de Shannon [5] estabelece que a informação emitida pela fonte descrita acima pode ser comprimida de modo que cada uso da fonte pode ser representado usando  $H(p_j)$  recursos clássicos:

$$H(p_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i). \quad (24)$$

A quantidade acima definida é chamada **entropia de Shannon**. A entropia de Shannon pode ser interpretada como a incerteza sobre uma variável aleatória descrita por uma distribuição de probabilidades  $\{p_i\}$  antes da medida da variável ou, complementarmente, a quantidade de informação ganha ao medi-la [5]. O recurso de informação clássico citado acima é chamado *bit* (anacrônimo de *Binary Digit*), que pode assumir dois valores: 0 ou 1. Qualquer tipo de informação pode ser armazenada em uma cadeia de vários *bits* que podem ser fisicamente implementados de diversas maneiras.

Com o desenvolvimento da física, tanto em nível experimental quanto em nível teórico, tornou-se natural explorar a utilização de recursos quânticos em tarefas de informação e computação, dando origem as áreas da informação e computação quântica. Em analogia com o *bit* clássico, o bit quântico (*quantum bit*, ou *qubit*) é a unidade elementar de informação quântica, descrita por um estado quântico. No caso mais simples, podemos representar um estado de um *qubit*  $|\psi\rangle$  como uma superposição quântica de um vetor  $|0\rangle$  e um vetor  $|1\rangle$ :

$$|\psi\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle, \quad (25)$$

sendo que

$$\begin{aligned}\langle 1 | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 1 | 1 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle &= 1, \\ |a|^2 + |b|^2 &= 1.\end{aligned}$$

Assim como no caso clássico, a medida de um bit quântico possui dois possíveis resultados, 0 ou 1, entretanto devemos interpretar os resultados sob uma perspectiva probabilística, como é comum ao lidar com estados quânticos. Para um estado geral de um *qubit* (25) teremos

$$\begin{aligned}|\langle 0 | \psi \rangle|^2 &= |a|^2, \\ |\langle 1 | \psi \rangle|^2 &= |b|^2,\end{aligned}$$

as probabilidades de, respectivamente, medir 0 ou 1. Devido ao princípio de superposição e a outras características intrínsecas a estados quânticos, os *qubits* abriram diversas novas possibilidades à teoria da informação e à computação [5].

Há a possibilidade de estados de mais de um *qubit*, que são descritos em termos de estados compostos. Por exemplo, um importante estado de dois *qubits* é o estado de Werner:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad (26)$$

No caso acima, sempre nos *kets* o primeiro dígito é relacionado ao subsistema 1, enquanto o segundo dígito é relacionado ao subsistema 2. Estados de mais *qubits* são representados de maneira semelhante, com cada dígito representando um subsistema.

A quantidade de recursos quânticos necessários para armazenar dada informação é quantificada através do análogo quântico da entropia de Shannon, a entropia de von Neumann. Para um estado de um número arbitrário de *qubits* representado pelo operador densidade  $\rho$ , a entropia de von Neumann  $S[\rho]$  é definida como [11]:

$$S[\rho] = -Tr[\rho \log(\rho)]. \quad (27)$$

A entropia de von Neumann também representa o grau de incerteza sobre um estado descrito pelo operador densidade  $\rho$  e não está completamente vinculada à ideia de estados de *qubits*.

Como o traço é uma operação independente da base escolhida para tomá-lo, podemos reescrever a expressão acima como

$$S[\rho] = - \sum_i \lambda_i \log(\lambda_i) \quad (28)$$

onde  $\{\lambda_i\}$  são os autovalores do operador densidade  $\rho$ .

Da definição da entropia de von Neumann seguem diversas propriedades importantes. Como todo o operador densidade é Hermitiano e positivo segue que

$$S[\rho] \geq 0, \quad (29)$$

sendo a igualdade válida apenas se o estado  $\rho$  for puro. Se  $\rho$  atua em um espaço de Hilbert de dimensão  $d$ , então

$$S[\rho] \leq \log d \quad (30)$$

com a igualdade válida no caso de um estado de **mistura maximal**  $\rho = I/d$ .

A entropia de von Neumann é um funcional côncavo com relação ao espaço das matrizes densidade, ou seja, dados operadores densidade  $\{\rho_i\}$  e números positivos  $\{p_i\}$ ,  $\sum_i p_i = 1$  a entropia satisfaz:

$$S[\sum_i p_i \rho_i] \geq \sum_i p_i S[\rho_i]. \quad (31)$$

Em termos físicos, a última desigualdade representa o fato da incerteza sobre um estado misto  $\rho = \sum_i p_i \rho_i$  ser maior ou igual à média ponderada das incertezas sobre cada um dos constituintes  $\rho_i$  da mistura. A igualdade é válida apenas no caso que todos os  $\rho_i$  são iguais entre si.

A última importante propriedade da entropia de von Neumann é relacionada a sistemas compostos. Para um estado  $\rho$  que representa um sistema composto de dois subsistemas 1 e 2 vale a desigualdade

$$S[\rho] \leq S[\rho_1] + S[\rho_2], \quad (32)$$

com  $\rho_1 = Tr_2[\rho]$  e  $\rho_2 = Tr_1[\rho]$  os operadores densidade de cada subsistema. A igualdade é válida apenas se  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$  e, como veremos adiante, este fato pode ser utilizado para quantificar emaranhamento em estados puros [11].

### 2.3.1 Entropia de von Neumann e medidas

A teoria generalizada das medidas quânticas postula que processos de medidas alteram o estado do sistema. Espera-se que a quantidade de informação associada ao estado se altere como consequência de uma medida, modificando o valor da entropia de von Neumann. Considerando um sistema inicialmente descrito pelo estado  $\rho$  sujeito a uma medida não seletiva parametrizada pelo conjunto operações  $\{\Phi_m\}$  que alteram o estado do sistema para  $\rho' = \sum_m \Phi_m(\rho)$ , a mudança na entropia de von Neumann induzida por esse processo de medida será:

$$\Delta S = S[\rho'] - S[\rho] = S\left[\sum_m \Phi_m(\rho)\right] - S[\rho]. \quad (33)$$

No caso de uma medida não seletiva ideal [11]

$$\Delta S \geq 0, \quad (34)$$

portanto uma medida quântica ideal não seletiva aumenta a entropia de von Neumann. Se a medida não alterar o estado do sistema,  $\Delta S = 0$ .

Outra diferença importante entre entropias está relacionada à transição entre medidas seletivas e não seletivas. Definimos a entropia de mistura como

$$\delta S = S\left[\sum_m P(m)\rho_m\right] - \sum_m P(m)S[\rho_m], \quad (35)$$

a diferença entre a entropia de um estado oriundo de uma medida não seletiva e a média ponderada das entropias dos estados obtidos através das medidas seletivas associadas. Essa entropia satisfaz a desigualdade [11]

$$0 \leq \delta S \leq H(P(m)), \quad (36)$$

ou seja,  $\delta S$  é sempre positiva e menor do que a entropia de Shannon associada à distribuição de probabilidades  $P(m)$  dos possíveis resultados das medidas seletivas. Neste contexto,  $H(P(m))$  é interpretada como a informação perdida pelo sistema na transição entre uma medida seletiva e uma não seletiva, ou como uma medida da informação ganha ao se medir um valor específico  $m$ .

## 2.4 Emaranhamento e correlações

Ao considerar sistemas compostos há a possibilidade de correlação entre os diferentes componentes do sistema. O emaranhamento é uma correlação de origem quântica de importância central em diversos protocolos de criptografia quântica, teletransporte e em diversos algoritmos de computação quântica [5].

Um sistema quântico composto de  $n$  subsistemas tal que o espaço de Hilbert a ele associado é  $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ , cada  $\mathcal{H}_i$  um espaço de Hilbert associado ao subsistema  $i$ , o vetor de estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  é separável se, e somente se, ele pode ser escrito na forma [11]

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (37)$$

com  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ . Se um vetor de estado não é separável, então ele é emaranhado. Como exemplo de estado puro separável temos

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle). \quad (38)$$

Um importante exemplo de estado emaranhado é o estado  $|W\rangle$  (26), que não pode ser fatorado em um produto tensorial de vetores em cada espaço.

O caráter separável de um estado puro representado por um vetor  $|\psi\rangle$  pode ser obtido através do teorema de Schmidt. Na situação mais simples de um sistema composto de dois subsistemas, o teorema de Schmidt garante a existência da decomposição [11]

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \alpha_i |\xi_i^1\rangle \otimes |\xi_i^2\rangle, \quad (39)$$

sendo  $\{|\xi_i^j\rangle\}$  bases do espaço  $\mathcal{H}_j$ ,  $j = 1, 2$  nesse caso. O número  $d$  de coeficientes  $\alpha_i$  não nulos é chamado número de Schmidt. O estado  $|\psi\rangle$  é emaranhado se, e somente se,  $d > 1$ .

Um estado representado um por operador densidade  $\rho$  que descreve um sistema composto de  $n$  subsistemas associados a um espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$  é separável se, e somente se, ele pode ser escrito como uma soma direta de produtos tensoriais [23]:

$$\rho = \sum_{i=1}^k p_i \bigotimes_{j=1}^n \rho_j^i, \quad (40)$$

com os coeficientes  $p_i$  satisfazendo as propriedades

$$\begin{aligned} p_i &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^k p_i &= 1, \end{aligned} \tag{41}$$

e os operadores  $\rho_j^i$  atuantes no espaço  $\mathcal{H}_i$  correspondente. Se um operador densidade não é separável, então ele é emaranhado. Um exemplo de estado misto não emaranhado é a mistura maximal de dois *qubits*

$$\rho = \frac{|11\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 00|}{2}. \tag{42}$$

A definição de emaranhamento está relacionada à forma do estado em questão não sendo sempre diretas as decomposições que tornam claras o caráter separável do estado, além disso, em muitas das aplicações do emaranhamento é necessário determinar o grau de emaranhamento entre determinados subsistemas de interesse. A quantidade de correlações entre dois subsistemas é importante para a determinação da utilidade de determinado estado em tarefas de computação quântica, por exemplo. A dinâmica de determinados sistemas pode levar também à perda de emaranhamento através de processos como a descoerência, sendo a correta quantificação do emaranhamento necessária para a caracterização do sistema. Foram propostos diversos quantificadores de emaranhamento com diferentes origens e interpretações. A seguir apresentaremos de maneira introdutória os quantificadores de emaranhamento e correlação que serão utilizados no capítulo 5 no estudo da descoerência entre estados de massa no formalismo de pacotes de ondas.

#### 2.4.1 A entropia de emaranhamento

Para um sistema quântico descrito por um estado  $\rho$  puro, o emaranhamento entre dois subsistemas pode ser quantificado através da entropia de von Neumann. Consideremos o caso mais simples de um sistema composto de dois subsistemas  $A$  e  $B$ . Para o estado em questão:

$$S[\rho] = 0. \tag{43}$$

Como  $\rho$  é um estado puro, os operadores densidade reduzidos a cada um dos espaços,  $\rho_A = Tr_B[\rho]$  e  $\rho_B = Tr_A[\rho]$ , possuem autovalores iguais e, portanto:

$$S[\rho_A] = S[\rho_B]. \quad (44)$$

Da desigualdade (32) teremos:

$$S[\rho_A] = S[\rho_B] \geq 0. \quad (45)$$

Sendo a igualdade válida apenas se os estados  $\rho_A$  e  $\rho_B$  forem puros e, conseqüentemente, o estado  $\rho$  for separável. Se os estados dos subsistemas forem mistos, o estado  $\rho$  será emaranhado e a entropia (45) será positiva.

Devido a estes fatos a entropia de von Neumann de um subsistema pode ser utilizada como quantificador de emaranhamento para sistemas compostos puros, não sendo adequada se o estado do sistema composto for misto [24].

#### 2.4.2 Negatividade logarítmica

A definição de emaranhamento é baseada na definição de separabilidade. Sendo assim a quantificação do emaranhamento pode também ser baseada em critérios de separabilidade. O critério de Peres [23] estabelece que, dado um sistema composto de  $n$  subsistemas descrito pelo estado  $\rho$ , um subsistema  $i$  será separável dos demais se a matriz

$$\tilde{\rho}_i \rightarrow \langle 1, 2, \dots, i, \dots, n \mid \rho \mid 1', 2', \dots, i', \dots, n' \rangle = \langle 1, 2, \dots, i', \dots, n \mid \tilde{\rho}_i \mid 1', 2', \dots, i, \dots, n' \rangle, \quad (46)$$

obtida através da transposição parcial do operador densidade do sistema com relação ao espaço  $i$  possuir apenas autovalores positivos. Baseado nesse critério a negatividade do subsistema  $i$  é definida como a soma dos autovalores negativos de  $\tilde{\rho}_i$  [25]:

$$\mathcal{N}_i = \sum_j | \mu_j |. \quad (47)$$

A negatividade logarítmica de uma bipartição  $\{i; \{j \neq i\}\}$ ,  $E_N^{\{i; \{j \neq i\}\}}$ , é definida como [25]

$$E_N^{\{i; \{j \neq i\}\}} = \log_2 [1 + 2\mathcal{N}_i]. \quad (48)$$

Se um subsistema for separável dos demais, a negatividade logarítmica da bipartição é nula, desta maneira esta quantidade fornece o grau de separabilidade entre um subsistema e os demais, quantificando o emaranhamento.

### 2.4.3 Emaranhamento de formação

O emaranhamento de formação é definido visando a correta quantificação do emaranhamento de estados mistos. Relacionado à quantidade de recursos necessários para a criação de um *ensemble* de um dado sistema quântico, para um estado misto o emaranhamento de formação é definido como [24]

$$E_f[\rho] = \inf \sum_i p_i S[\rho_i], \quad (49)$$

com  $S[\rho_i]$  a entropia de von-Neumann do estado puro  $\rho_i$ . Como a decomposição de um estado misto em estados puros não é única [5] não há forma geral para o emaranhamento de formação com exceção de alguns casos específicos. Para estados de dois qubits, sistemas compostos de dois subsistemas de dimensão dois, o emaranhamento de formação é relacionado à concorrência  $C[\rho]$  [26]:

$$C[\rho] = \max\{0, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4\}, \quad (50)$$

com os  $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ , as raízes quadradas dos autovalores do operador  $\rho\tilde{\rho}$  sendo

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (51)$$

O emaranhamento de formação é então dado por

$$E_f[\rho] = \mathcal{E}[C(\rho)], \quad (52)$$

onde [26]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C) &= h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \\ h(x) &= -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x). \end{aligned} \quad (53)$$

## 2.5 Informação mútua e discórdia quântica

O emaranhamento é um tipo específico de correlação quântica. Se considerarmos um sistema composto, existem diversos outros tipos de correlações possíveis entre subsistemas, quânticas e não quânticas, que são importantes [27].

Dado um sistema quântico composto, descrito pelo estado  $\rho$ , de dois subsistemas  $A$  e  $B$ , todas as correlações, clássicas e quânticas, entre esses dois subsistemas são quantificadas pela informação mútua  $\mathcal{I}$ , definida como [27]:

$$\mathcal{I} = S[\rho_A] + S[\rho_B] - S[\rho], \quad (54)$$

com  $\rho_A = Tr_B[\rho]$  e  $\rho_B = Tr_A[\rho]$  os operadores densidade reduzidos à cada subsistema.

Visando quantificar apenas as correlações quânticas entre dois subsistemas, introduziremos a quantidade chamada discórdia quântica, definida como a diferença entre todas as correlações, quantificadas por (54), e as correlações clássicas.

Se o operador densidade que descreve o sistema é  $\rho$ , o operador que descreve o subsistema  $A$  é  $\rho_A = Tr_B[\rho]$ . A informação total contida no subsistema  $A$  é dada por

$$S[\rho_A] = -Tr[\rho_A \log(\rho_A)]. \quad (55)$$

Se o subsistema  $B$  for medido por um projetor  $\Pi_k$  associado a um resultado  $p_k$ , o operador densidade que descreve o sistema como um todo após a medida, que é uma medida seletiva, é:

$$\rho_k = \frac{\Pi_k \rho \Pi_k}{Tr_{A,B}[\Pi_k \rho]}. \quad (56)$$

Após essa medida, o estado do subsistema  $A$  será:

$$\rho_{A|k} = Tr_B[\rho_k] = \frac{Tr_B[\Pi_k \rho \Pi_k]}{Tr_{A,B}[\Pi_k \rho]}. \quad (57)$$

A entropia  $S[\rho_{A|k}]$  associada a esse subsistema é chamada entropia condicional. Definimos as correlações clássicas entre os dois subsistemas a informação máxima que pode ser obtida sobre o subsistema  $A$  realizada uma medida não seletiva, parametrizada pelo conjunto de projetores  $\{\Pi_k\}$ , tal que  $\sum_k \Pi_k = I$ , no subsistema  $B$  [27]:

$$\mathcal{Q} = \max_{\{\Pi_k\}} \left\{ S[\rho_A] - \sum_k p_k S[\rho_{A|k}] \right\}. \quad (58)$$

A discórdia quântica  $\mathcal{D}[\rho]$  [28] é definida como a diferença entre a informação mútua e as correlações clássicas:

$$\mathcal{D}[\rho] = \mathcal{I}[\rho] - \mathcal{Q}[\rho]. \quad (59)$$

Como o processo de extremização necessário para o cálculo de (58) pode ser complicado costuma-se escolher um conjunto específico de projetores e calcular a discórdia quântica relacionada à informação clássica obtida através das medidas relacionadas a este conjunto particular. Neste caso, podemos escrever a discórdia quântica apenas em termos da entropia do sistema  $\rho$ , de um dos subsistemas e da entropia condicional:

$$\mathcal{D}[\rho] = S[\rho_A] + \sum_k p_k S[\rho_{B||k}] - S[\rho]. \quad (60)$$

### 3 Oscilação quântica de sabores

A história da física de neutrinos remete ao início do século 20, quando se estudavam aspectos elementares de decaimentos  $\beta$ . No final da década de 1920 supostamente se observa a não conservação de energia nesse tipo de decaimento levando à ideia da existência de uma nova partícula responsável por restabelecer a conservação de energia. Em 1930, E. Fermi propôs que a existência de um férmion neutro, fracamente interagente e de massa da ordem da massa do elétron, que poderia resolver não apenas a violação da conservação de energia mas também o problema de estatística de *spin* em decaimentos  $\beta$ . Alguns anos depois a partícula passou a ser chamada de neutrino e, em 1933, E. Fermi e J. B. Perrin concluíram, independentemente, que o neutrino poderia ser uma partícula de massa nula.

A partir deste ponto a descrição teórica do neutrino enquanto partícula está intimamente relacionada ao desenvolvimento da teoria eletrofraca. No final da década de 1950, T. D. Lee e C. N. Yang sugeriram diversos testes experimentais para verificar a violação do número quântico de paridade em processos fracos. Logo em seguida o fenômeno é observado levando ao desenvolvimento de uma teoria das interações fracas que só incluíam interações entre partículas *left-handed* em meados de 1958 por R. P. Feynmann e M. Gell-Mann, E. C. G. Sudarshan e R. E. Marshak e J. J. Sakurai.

Com a formulação do Modelo Padrão da física de partículas por Glashow, Weinberg e Salam foi prevista a existência do bóson  $Z$  responsável por interações fracas neutras. Ao modelo padrão foi adicionado o mecanismo de Higgs de geração de massa para bósons interagentes e em 1971 a renormalizabilidade da teoria foi demonstrada por G. T'Hooft e M. J. G. Veltman tornando o modelo padrão bem estabelecido.

O desenvolvimento da física de neutrinos em nível experimental apresentou um problema ao modelo padrão da física de partículas. Experimentos com detectores de neutrinos constataram que o fluxo medido de neutrinos produzidos no sol (neutrinos solares) correspondia a cerca de metade do fluxo previsto teoricamente. A explicação mais simples para o fenômeno é a da oscilação quântica de sabores, baseada na descrição da oscilação entre káon e antikáon de M. Gell-Mann e A. Pais [15]. A oscilação quântica de sabores em sua forma mais simples

consiste em supor que cada neutrino de sabor eletrônico, muônico e taônico é descrito como uma superposição linear dos chamados estados de massa. Nesse contexto os neutrinos possuem massa bem pequena e há a possibilidade de conversão de um sabor para outro, uma vez que o Hamiltoniana de propagação livre (sem potencial) é diagonal nos estados de massa.

Além de resolver o problema de neutrinos solares, a oscilação quântica de sabores também explica depleções envolvendo fluxo de neutrinos atmosféricos (gerados a partir do decaimento de partículas de raios cósmicos), de neutrinos de reatores [12] e é importante em diversas questões ligadas à cosmologia [17, 29].

Neste capítulo introduziremos a descrição da oscilação quântica de sabores em termos da mecânica quântica de uma partícula. Através da descrição de um estado de sabor como uma superposição quântica de estados de massa definiremos a probabilidade de oscilação de um sabor  $\alpha$  para um sabor  $\beta$  e a probabilidade de sobrevivência de determinado sabor. Trabalharemos no formalismo de vetores de estado e estenderemos o procedimento ao formalismo de matriz densidade, isto é, à mecânica quântica de sistemas compostos, tornando os procedimentos adotados nos capítulos subsequentes mais claros.

### 3.1 Estados de sabor e estados de massa

Visando explicar a depleção no fluxo de neutrinos e anti neutrinos eletrônicos foi proposta a descrição de um estado de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  como uma superposição quântica dos autoestados de massa  $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle\}$  [12], ou seja:

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha 1} |\nu_1\rangle + U_{\alpha 2} |\nu_2\rangle + U_{\alpha 3} |\nu_3\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (61)$$

Tanto os estados de sabor, quanto os estados de massa, são mutuamente ortogonais:

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle &= \delta_{\alpha,\beta}, \\ \langle \nu_i | \nu_j \rangle &= \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Distinguem-se, então, duas bases para o espaço de Hilbert associado ao sistema quântico que descreve um neutrino. A **base de sabor** constituída por estados de sabor  $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle\}$

é adequada para descrever interações. O Hamiltoniano de propagação livre, ou seja sem potencial de interação, não é diagonal na base de sabor mas é na **base de massa** construída pelos estados de massa, ou estados físicos,  $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle\}$ . Para o operador Hamiltoniano  $H$ , que não inclui nenhum potencial de interação, temos [12]:

$$H |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle, \quad (62)$$

com  $E_i$  a energia do estado de massa  $i$ .

Na equação (61) a matriz  $U$ , de elementos  $U_{\alpha i}$ , é uma matriz unitária, chamada matriz de mistura que faz a transformação entre as bases de sabor e de massa. Em diversas situações, como no estudo de neutrinos atmosféricos, é suficiente considerar a existência de apenas dois estados de sabor [12], cada um descrito como uma superposição de dois estados de massa. Nesse caso, a matriz de mistura tem a mesma forma de uma matriz de rotação entre as bases de sabor e de massa, parametrizada em termos de um ângulo  $\theta$  chamado ângulo de mistura [12]:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Ao considerarmos o caso de três estados de massa, a matriz de mistura possui forma mais complicada sendo parametrizada em termos de três ângulos de mistura,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$  e  $\theta_{23}$ , e uma fase complexa relacionada à violação CP,  $\delta$  [12]:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

com

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sin \theta_{ij}, \\ c_{ij} &= \cos \theta_{ij}. \end{aligned}$$

Os valores fenomenológicos dos ângulos de mistura obtidos através da análise estatística de experimentos é resumido na tabela 1 [30]:

Tabela 1: Valores fenomenológicos para os parâmetros de mistura [30].

Parâmetro de mistura	Melhor ajuste
$\sin^2(\theta_{12})$	0.306
$\sin^2(\theta_{13})$	0.021
$\sin^2(\theta_{23})$	0.42

Em muitos casos é considerada a aproximação tribimaximal para os ângulos de mistura [31] resumida na tabela 2

Tabela 2: Aproximação tribimaximal para os ângulos de mistura [31].

Parâmetro de mistura	Valor na aproximação tribimaximal
$\theta_{12}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\theta_{13}$	0
$\theta_{23}$	$\frac{\pi}{4}$

A fase de violação  $CP$ ,  $\delta$ , não possui valor fenomenológico definido, de modo que adotaremos, para os fins desta dissertação,  $\delta = 0$ .

### 3.2 Evolução livre de estados de sabor

Consideraremos que a evolução livre de um estado de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  pode ser obtida através do uso do operador de evolução temporal:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = U(t, 0) |\nu_\alpha(0)\rangle. \quad (65)$$

Sabemos que [32]

$$U(t, 0) = e^{-iHt}, \quad (66)$$

e que o estado de sabor  $|\nu_\alpha(0)\rangle$  pode ser escrito como uma superposição quântica de estados de massa. Substituindo (61) em (65) teremos

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} e^{-iHt} |\nu_i\rangle. \quad (67)$$

De (62) segue que

$$e^{-iHt} |\nu_i\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle. \quad (68)$$

A evolução temporal de um estado de sabor é dada, então, em termos da base de massa:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle. \quad (69)$$

### 3.2.1 Probabilidade de sobrevivência e de transição

Com os resultados de evolução temporal podemos deduzir duas quantidades importantes em física de neutrinos: a probabilidade de sobrevivência de um sabor e a probabilidade de transição de um sabor  $\alpha$  para um sabor  $\beta$ . A probabilidade de sobrevivência é a probabilidade de que, dado um estado inicialmente em um sabor  $\alpha$ , ele possa ser medido no mesmo sabor após determinado tempo e distância. Tal quantidade é importante, por exemplo, no cálculo da depleção de neutrinos que são produzidos no Sol e medidos na Terra [12].

Dado um estado inicialmente em um sabor  $\alpha$  conforme (61), a probabilidade de sobrevivência  $P_{\alpha \rightarrow \alpha}$  desse sabor é definida como:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) = |\langle \nu_\alpha(0) | \nu_\alpha(t) \rangle|^2. \quad (70)$$

Utilizando (61), (69) e lembrando que os estados de massa são mutualmente ortogonais escrevemos:

$$\langle \nu_\alpha(0) | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_{i=1}^3 |U_{\alpha i}|^2 e^{-iE_i t}. \quad (71)$$

Após algumas manipulações algébricas e utilizando a unitariedade da matriz de mistura teremos a expressão da probabilidade de sobrevivência:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) = 1 - 4 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 |U_{\alpha i}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta E_{ij}}{2} t \right), \quad (72)$$

dada em termos da diferença entre as energias dos estados de massa  $\Delta E_{ij}$ :

$$\Delta E_{ij} = E_i - E_j. \quad (73)$$

A probabilidade de transição de um sabor  $\alpha$  para um sabor  $\beta$ ,  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ , é definida como a probabilidade de um estado inicialmente no sabor  $\alpha$  ser medido como um sabor  $\beta$ :

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = |\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(t) \rangle|^2. \quad (74)$$

Através do mesmo procedimento utilizado para calcular a probabilidade de sobrevivência, obtemos a expressão para a probabilidade de transição em termos dos elementos da matriz de mistura e diferença de energia entre os estados de massa (73):

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = \sum_{i,j=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta i}^* e^{-i\Delta E_{ij}t} \quad (75)$$

De (72) e (75) segue que:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) + \sum_{\beta \neq \alpha} P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = 1. \quad (76)$$

Podemos visualizar esse fato ao considerarmos o caso de dois sabores. As probabilidades de sobrevivência e transição de um estado eletrônico são, neste caso, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e} &= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta E_{12}}{2}t\right), \\ P_{e \rightarrow \mu} &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta E_{12}}{2}t\right). \end{aligned} \quad (77)$$

Na figura 2 temos o gráficos destas duas probabilidades em função do parâmetro  $\Delta E_{12}t/2$  utilizando  $\sin^2(\theta) = \sin^2(\theta_{12}) = 0.306$ .

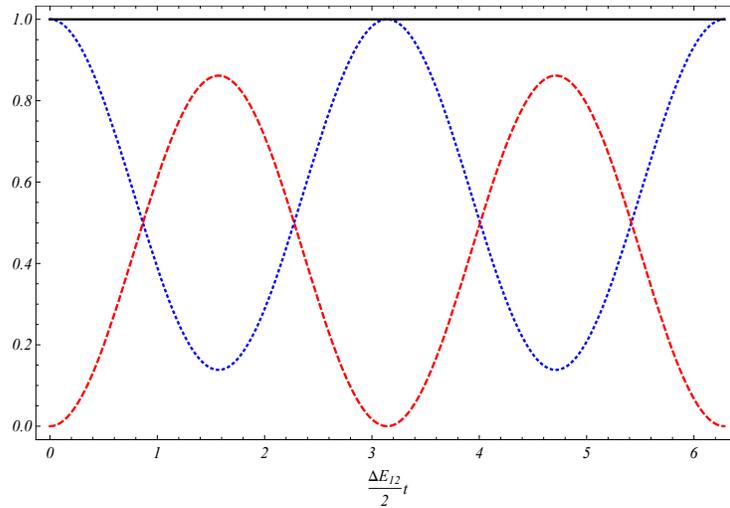


Figura 2: Probabilidade de sobrevivência de um estado inicialmente eletrônico  $P_{e \rightarrow e}$  (em linha pontilhada) e de transição do sabor eletrônico para o sabor muônico  $P_{e \rightarrow \mu}$  (em linha tracejada) em função do parâmetro  $\Delta E_{12}t/2$  utilizando  $\sin^2(\theta) = 0.306$ .

### 3.2.2 Aproximações ultra relativísticas

A descrição apresentada para a oscilação quântica de sabores requer que a massa de um neutrino seja não nula [12]. Como vimos, o Hamiltoniano de propagação livre é diagonal na base de massa, sendo cada estado de massa associado a um autovalor

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}. \quad (78)$$

A massa  $m_i$  de cada autoestado de massa é pequena, isto é,  $m_i c^2 \sim meV$ , cerca de 6 ordens de grandeza menor que a massa do elétron. Em diversas situações, como no estudo de neutrinos solares ou de reatores [12], a massa é muito pequena comparada ao *momentum* da partícula, de modo que podemos utilizar a seguinte aproximação

$$E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} + \mathcal{O}[m_i^4]. \quad (79)$$

Desprezando os termos de quarta ordem na massa obtemos para a diferença entre as energias de dois autoestados de massa:

$$\Delta E_{ij} = E_i - E_j = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2p}, \quad (80)$$

onde supomos iguais os *momenta* de dois estados de massa. Na equação acima definimos a diferença quadrática de massa  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ . Se considerarmos três sabores, encontramos dois tipos diferentes de disposição hierárquica das massas  $m_i$ , a hierarquia normal com  $m_1 < m_2 < m_3$  e a hierarquia invertida com  $m_3 < m_1 < m_2$ .

Experimentalmente são determinadas duas diferenças quadráticas de massa  $\Delta m_{atm}^2$  e  $\Delta m_{\odot}^2$  [30]:

$$\begin{aligned} \Delta m_{atm}^2 &= 2.35 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \\ \delta m_{\odot}^2 &= 7.58 \times 10^{-5} \text{ eV}^2. \end{aligned} \quad (81)$$

A disposição da hierarquia das massas esta esquematizada diagramaticamente na figura 3.

Substituindo a aproximação (80) em (72) e (75) teremos para as probabilidades de sobrevivência e transição, respectivamente:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) = 1 - 4 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 |U_{\alpha i}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{2p} t \right), \quad (82)$$

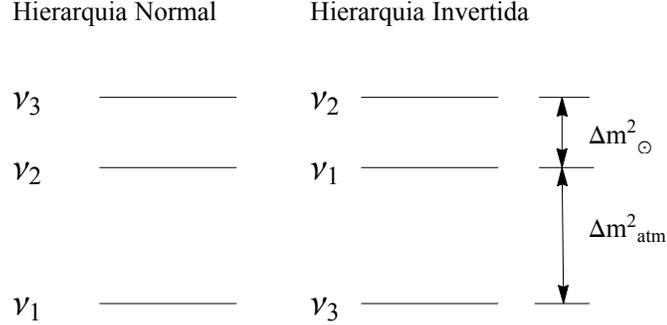


Figura 3: Representação diagramática das duas possíveis hierarquias de massa dos estados físicos de neutrinos. Na hierarquia normal a menor massa é do estado  $|\nu_1\rangle$  enquanto na hierarquia invertida o valor mais leve é o associado ao estado  $|\nu_3\rangle$ .

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = \sum_{i,j=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2p} t}. \quad (83)$$

Na figura 4 apresentamos o gráfico das probabilidade de sobrevivência e conversão do estado eletrônico em função do parâmetro adimensional  $\frac{\Delta m_{21}^2}{2p} t$  para a hierarquia normal.

### 3.3 Tratamento da oscilação quântica de sabores no formalismo de matriz densidade

Podemos tratar o fenômeno de oscilação quântica de sabores descrito acima pela perspectiva da matriz densidade. O interessante desse ponto de vista é a possibilidade de estudar estados mistos de sabor.

Para um estado puro de um determinado sabor  $\alpha$ , a partir de (61) obtemos a expressão para o operador densidade associado a esse sabor  $\rho_\alpha$  na base de massa:

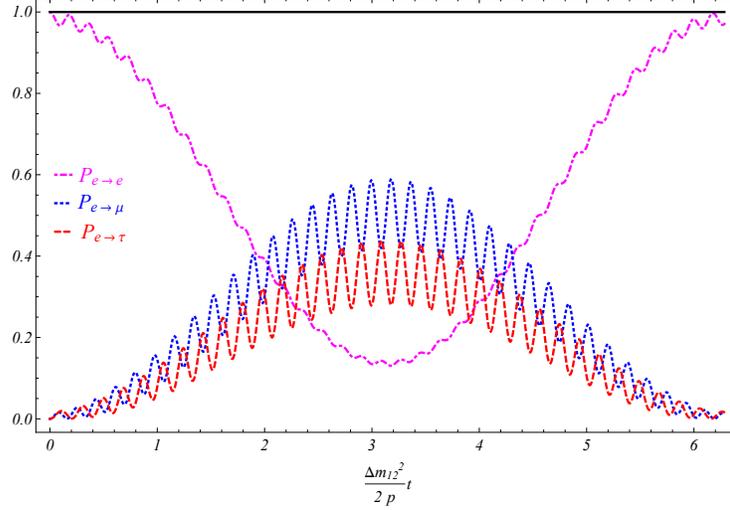


Figura 4: Probabilidade de sobrevivência  $P_{e \rightarrow e}$  e as probabilidades de transição  $P_{e \rightarrow \mu}$  e  $P_{e \rightarrow \tau}$  para o estado eletrônico em função do parâmetro  $\Delta m_{21} t / 2p$  utilizando os parâmetros experimentais para os ângulos de mistura da tabela 1 e as diferenças quadráticas de massa (81). Em linha sólida está  $P_{e \rightarrow e} + P_{e \rightarrow \mu} + P_{e \rightarrow \tau}$  que sempre é igual à unidade, confirmando a equação (76)

$$\rho_\alpha = |\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\alpha| = \sum_{i,j=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* |\nu_i\rangle\langle\nu_j|. \quad (84)$$

A evolução temporal de um operador densidade é facilmente obtida, conforme descrito no capítulo 2:

$$\rho_\alpha(t) = U(t)\rho_\alpha(0)U^\dagger(t). \quad (85)$$

Considerando a evolução livre do estado de sabor, o operador de evolução temporal  $U$  é diagonal na base de massa:

$$U(t) = \sum_{i=1}^3 e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle\langle\nu_i|. \quad (86)$$

Substituindo (86) em (85) e usando (84) obtemos:

$$\rho_\alpha(t) = \sum_{i,j=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* e^{-i\Delta E_{ij} t} |\nu_i\rangle\langle\nu_j|, \quad (87)$$

com  $\Delta E_{ij} = E_i - E_j$ .

Definindo o projetor em um sabor  $\beta$  como [33]

$$M_\beta = |\nu_\beta\rangle\langle\nu_\beta| = \sum_{i,j=1}^3 U_{\beta i} U_{\beta j}^* |\nu_i\rangle\langle\nu_j|, \quad (88)$$

a probabilidade de sobrevivência do sabor  $\alpha$  é dada por

$$P_{\alpha\rightarrow\alpha}(t) = Tr[M_\alpha\rho_\alpha(t)] = Tr[\rho_\alpha(0)\rho_\alpha(t)], \quad (89)$$

e a probabilidade de conversão para um sabor  $\beta$  é dada por

$$P_{\alpha\rightarrow\beta}(t) = Tr[M_\beta\rho_\alpha(t)]. \quad (90)$$

As duas quantidades acima se reduzem às fórmulas (72) e (75), respectivamente, conforme o esperado.

A evolução temporal de um operador de projeção é a mesma do operador densidade de um estado puro do sabor correspondente [33]:

$$M_\alpha(t) = \rho_\alpha(t). \quad (91)$$

Além disso, devido à unitariedade da matriz de mistura, os operadores de projeção satisfazem a relação de completeza:

$$\sum_{\alpha=1}^3 M_\alpha(t) = 1. \quad (92)$$

Neste contexto podemos considerar um sistema misto de todos os sabores descrito por um operador densidade  $\rho$  dado por:

$$\rho(t) = w_e M_e(t) + w_\mu M_\mu(t) + w_\tau M_\tau(t) = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} w_\alpha M_\alpha(t). \quad (93)$$

com  $\sum_\alpha w_\alpha = 1$ . Ao lidarmos com uma mistura estatística os conceitos de probabilidade de conversão e de sobrevivência perdem seu significado, entretanto, ainda podemos estudar a probabilidade de medir o estado  $\rho(t)$  acima como um estado eletrônico, muônico ou taônico. Dado um estado misto, a probabilidade de medi-lo como um sabor  $\beta$  é [33]

$$P_\beta = Tr[M_\beta(0)\rho(t)]. \quad (94)$$

Lembrando das definições de probabilidade de sobrevivência e de conversão para estados puros, teremos que

$$P_\beta = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} w_\alpha P_{\alpha \rightarrow \beta}. \quad (95)$$

Para as probabilidades acima definidas também é válida a igualdade:

$$\sum_{\beta=e,\mu,\tau} P_\beta = 1. \quad (96)$$

### 3.3.1 Tratamento da oscilação de dois sabores com o formalismo de operador densidade

Para ilustrar os conceitos apresentados acima trataremos o caso de apenas dois estados de sabor, eletrônico e muônico, com o formalismo de matriz densidade.

Como para dois sabores a matriz de mistura é dada por (63), teremos para o sabor eletrônico e muônico, respectivamente:

$$M_e(t) = \rho_e(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\Delta Et} \\ \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\Delta Et} & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (97)$$

$$M_\mu(t) = \rho_\mu(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) & -\sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\Delta Et} \\ -\sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\Delta Et} & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Das duas expressões acima observamos, explicitamente, que  $M_e(t) + M_\mu(t) = 1$ .

Dado um estado misto de dois sabores

$$\rho(t) = \sum_{\alpha=e,\mu} w_\alpha M_\alpha(t) = w M_e(t) + (1-w) M_\mu(t), \quad (99)$$

as probabilidades de medir o estado acima como um estado eletrônico e como um estado muônico são, respectivamente:

$$P_e(t) = w \left[ 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( \frac{\Delta E_{12} t}{2} \right) \right] + (1-w) \left[ \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( \frac{\Delta E_{12} t}{2} \right) \right] \quad (100)$$

$$P_\mu(t) = w \left[ \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( \frac{\Delta E_{12} t}{2} \right) \right] + (1-w) \left[ 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( \frac{\Delta E_{12} t}{2} \right) \right] \quad (101)$$

Na figura 5 apresentamos os gráficos de  $P_e$  e  $P_\mu$  para diversos valores de  $w$  em função de  $\Delta E_{12} t / 2$  com  $\sin^2(\theta) = 0.306$

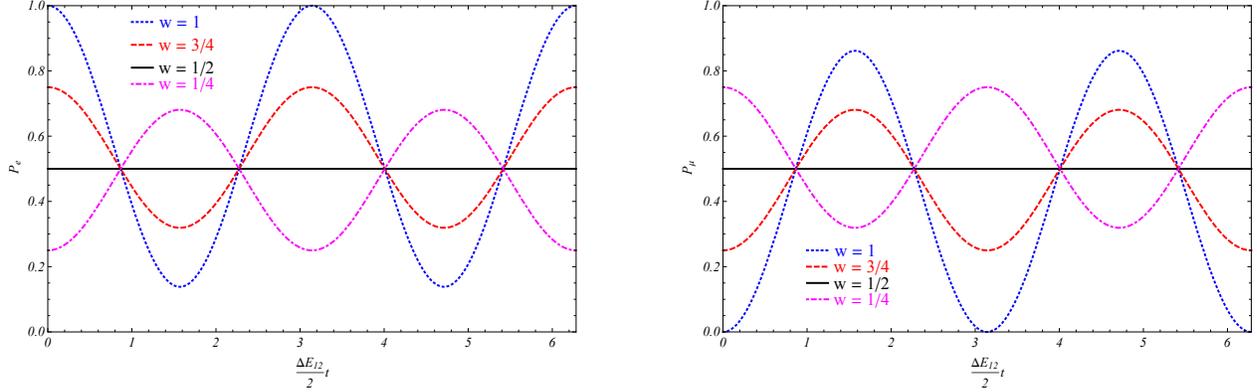


Figura 5: Probabilidade de um dado estado misto genérico de dois sabores (99) ser medido como um estado eletrônico (100) e como um estado muônico (101)  $\Delta E_{12}t/2$  utilizando  $\sin^2(\theta) = 0.306$ .

O formalismo de matriz densidade abre novas possibilidades no estudo da oscilação quântica de sabores em diversos níveis. Podemos estudar, neste formalismo, estados mistos de sabor e descrever processos de medidas em neutrinos. Conforme apresentaremos no próximo capítulo, este estudo tem diversas consequências ao considerarmos os neutrinos cosmológicos [33, 34], em particular, no cálculo de sua densidade de energia levando em conta o fenômeno de oscilação de sabores.

Nos cálculos apresentados neste capítulo não levamos em consideração a localização dos autoestados de massa. No capítulo 5 introduziremos o formalismo de pacotes de ondas no qual cada autoestado de massa possui uma distribuição de *momentum* Gaussiana. Se descrevermos, neste formalismo, um estado de sabor como um estado composto, sendo cada subsistema um modo de massa, podemos estudar a descoerência entre os pacotes de ondas através de quantificadores de emaranhamento e de correlações entre os modos de massa. Para tanto a descrição em termos da matriz densidade é imprescindível, uma vez que, ao menos nessa dissertação, todos os quantificadores de emaranhamento e correlações apresentados no capítulo 2 são dados em termos do operador densidade.

## 4 Teoria das medidas quânticas e a densidade de energia dos neutrinos cosmológicos

No universo, assim como os fótons geram um mar de partículas desacopladas, nomeadamente a radiação cósmica de fundo, os neutrinos também se desacoplam do resto do universo, os chamados neutrinos cosmológicos de fundo, ou simplesmente neutrinos cosmológicos. Diversos cálculos em cosmologia envolvem a densidade de energia dos neutrinos cosmológicos, por exemplo o cálculo da propagação de perturbações lineares e crescimento de estruturas de larga escala [17, 29]. Ao mesmo tempo, uma das maneiras de estimar a massa dos neutrinos é através de dados cosmológicos, sendo o processo de extração dessas medidas dependente do cálculo da densidade de energia dos neutrinos [17]. Neste contexto, a definição precisa de energia de um estado de sabor é importante [35, 17, 29], entretanto, o fenômeno de oscilação quântica de sabores introduz ambiguidades nessa definição [33].

Neste capítulo utilizaremos alguns elementos da teoria generalizada das medidas quânticas apresentada no Capítulo 02 no cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos. Antes de apresentar os resultados principais relacionados ao tópico, iremos introduzir conceitos básicos de cosmologia, como a evolução do universo e o desacoplamento. Em seguida, definindo as energias médias e ponderadas relacionadas, respectivamente, às medidas seletivas e não seletivas de sabores, determinaremos as fórmulas para a densidade de energia dos neutrinos desacoplados. Por último, iremos estudar a implicação destas definições na determinação da massa dos neutrinos através de dados cosmológicos.

### 4.1 Conceitos básicos de cosmologia

#### 4.1.1 Expansão do universo e a equação de Friedmann-Robertson-Walker

O estudo da velocidade de afastamento de galáxias distantes com relação à Terra revelou que quanto mais longe a galáxia se encontra maior a velocidade de afastamento, seguindo a famosa lei de Hubble [16]. Com base nessas medidas ficou estabelecido que o universo se

expande e para quantificar essa expansão introduzimos o sistema de coordenadas comóvel, no qual as coordenadas dos pontos não muda mas a escala muda. A distância física entre dois pontos  $d(t)$  é, então, proporcional ao chamado fator de escala  $a(t)$  que muda com o tempo e tem valor um no presente:

$$d(t) = a(t)x, \quad (102)$$

com  $x$  a chamada distância comóvel conforme esquematizado na figura 6.

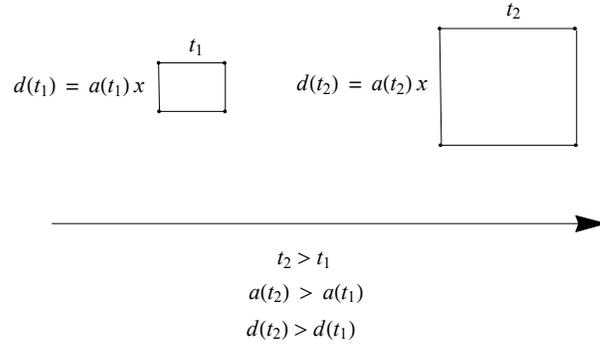


Figura 6: Esquematização da expansão do universo. A distância física  $d$  entre dois pontos aumenta com o tempo proporcionalmente ao fator de escala  $a$ , enquanto a distância comóvel  $x$  se mantém constante [16].

Através das equações de Einstein da relatividade geral, assumindo que o universo é composto de um fluido perfeito [36], obtemos a equação de Friedmann-Robertson-Walker [16]:

$$\left( \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho(t) - \frac{\rho_{cr} - \rho_0}{a^2(t)} \right]. \quad (103)$$

Na equação acima  $\rho(t)$  é a densidade de energia do universo,  $\rho_0$  é a densidade de energia no presente e  $\rho_{cr}$  é a densidade de energia para que a geometria do universo seja plana e é dada em termos da constante de Hubble  $H_0$ :

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (104)$$

Iremos sempre trabalhar no modelo cosmológico padrão que supõe universo plano, em outras palavras,  $\rho_{cr} = \rho_0$ . A taxa de Hubble  $H(t)$  é definida como a taxa de variação do parâmetro de escala:

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt}, \quad (105)$$

e seu valor no presente corresponde à constante de Hubble  $H_0$ . O valor da constante de Hubble é dado em termos de um parâmetro experimental  $h$ :

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$$

$$h \sim 0.72.$$

Como o universo se expande as galáxias medidas em experimentos astronômicos ligados à cosmologia se afastam da Terra gerando um desvio para o vermelho em suas linhas espectrais. O *redshift*  $z$  mede o quão desviadas estão as linhas espectrais e pode ser escrito em termos do parâmetro de escala:

$$1 + z = \frac{1}{a}, \quad (106)$$

que é muitas vezes utilizado no lugar do parâmetro de escala para descrever a evolução do universo.

#### 4.1.2 Evolução da densidade de energia

A equação de Friedmann-Robertson-Walker pode ser escrita em termos da constante de Hubble  $H_0$  e da densidade de energia crítica (104), assumindo universo plano:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}}. \quad (107)$$

O suposto fluido perfeito que permeia o universo é composto de diversas componentes  $\alpha$ , como por exemplo matéria bariônica não relativística, fótons sem massa, neutrinos e, no modelo cosmológico padrão, energia escura. Podemos decompor  $\rho(t)$  como uma soma de suas diversas componentes

$$\rho(t) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(t). \quad (108)$$

A obtenção da solução de (107) requer o conhecimento do comportamento de todos  $\rho_\alpha(t)$  dados pelas equações de continuidade obtidas das equações de Einstein:

$$\frac{d\rho_\alpha(t)}{dt} = -3H(t) (\rho_\alpha(t) + p_\alpha). \quad (109)$$

A pressão da componente  $\alpha$ ,  $p_\alpha$  pode ser obtida através da equação termodinâmica de estado e depende das características específicas da partícula que a compõe [16]. Por exemplo, para matéria não relativística  $\alpha = M$

$$p_M = 0, \quad (110)$$

e para radiação composta de fótons  $\alpha = R$

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R. \quad (111)$$

Nesses casos a equação de estado é uma relação linear entre pressão e densidade de energia. Escrevendo

$$p_\alpha = w_\alpha \rho_\alpha, \quad (112)$$

podemos obter a solução da equação (109)  $\rho_\alpha(a)$  em termos do parâmetro de escala:

$$\rho_\alpha(a) \propto a^{-3(1+w_\alpha)}. \quad (113)$$

Para matéria e radiação temos, respectivamente, os comportamentos

$$\begin{aligned} \rho_M(a) &\propto a^{-3} \\ \rho_R(a) &\propto a^{-4}. \end{aligned} \quad (114)$$

A fração da densidade de energia para a densidade crítica de uma dada espécie  $\alpha$ , que chamaremos de **densidade de energia normalizada**, é definida como:

$$\Omega_\alpha(t) = \frac{\rho_\alpha(t)}{\rho_{ct}}. \quad (115)$$

Sendo  $\Omega_\alpha(0)$  o valor da quantidade acima definida no presente, no caso mais simples em que vale (113) podemos escrever

$$\Omega_\alpha(t) = \frac{\Omega_\alpha(0)}{a^{3(1+w_\alpha)}}, \quad (116)$$

Podemos reescrever a equação de Friedmann-Robertson-Walker em termos das densidades de energia normalizadas de cada espécie:

$$H^2(t) = \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}(0)}{a^{3(1+w_{\alpha})}}. \quad (117)$$

Esta forma particular é interessante pois as quantidades  $\Omega_{\alpha}(0)$  podem ser obtidas através de dados astronômicos [16]. Como exemplo de solução da última equação consideramos o caso do universo inteiramente composto de radiação:

$$\left( \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{\Omega_R(0)}{a^4}, \quad (118)$$

para o qual temos

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (119)$$

Como esperávamos a densidade de energia do universo determina como a expansão se dá, consequência direta da utilização da teoria da relatividade geral. Não podemos sempre encontrar uma equação de estado simples para dada componente, sendo necessário apelar a métodos de mecânica estatística para determinar, de maneira precisa, sua forma. Neste cálculo são levadas em consideração diversas questões ligadas aos processos microscópicos, sendo o caso mais simples o de partículas livres, para os quais são obtidas, em geral, equações de estado simples.

### 4.1.3 Desacoplamento

Em tempos anteriores ao presente, o parâmetro de escala era menor que um e a distância física entre dois pontos era menor que a atual. Como consequência, a densidade de energia do universo era maior e, considerando tempos primordiais, todas as espécies de partículas estavam em equilíbrio térmico mantido por espalhamentos quânticos (vide equação de Boltzmann [16]). Conforme o universo evolui as distâncias físicas se tornam cada vez maiores e, eventualmente, a taxa de Hubble torna-se maior do que a taxa de interação entre um tipo de partícula e as demais. Quando isso ocorre a taxa de interação entre esse tipo de partícula e as demais não é rápida o suficiente para ajustar a distribuição de *momentum* da espécie à mudança

da temperatura do plasma constituído de todas as outras partículas e, como consequência, a espécie não mais fica em equilíbrio com o plasma, ela se *desacopla* dos outros componentes do universo evoluindo como um gás perfeito no regime chamado de *free streaming* [17].

A dinâmica de desacoplamento é complicada, sendo modelada por uma série de equações diferenciais que devem ser resolvidas numericamente. Deixando de lado essas complicações, se aproximarmos o processo de desacoplamento por um processo instantâneo, no momento do desacoplamento a espécie de partículas  $\alpha$ , dado em termos do parâmetro de escala  $a_\alpha^D$ , possui temperatura  $T_\alpha^D$ . Durante a evolução em *free streaming*, a espécie desacoplada apresenta distribuição de *momentum*  $f_\alpha(a)$  dada em termos da energia  $E_\alpha$ , do potencial químico  $\mu_\alpha$  e da temperatura  $T(a)$ :

$$f_\alpha(a) = \frac{1}{e^{(E_\alpha(a) - \mu_\alpha)/T(a)} \pm 1}, \quad (120)$$

sendo o sinal positivo para a distribuição de Fermi-Dirac e o negativo para a distribuição de Bose-Einstein. Para as partículas desacopladas a relação de dispersão é a mesma de uma partícula livre:

$$E_\alpha = \sqrt{p^2 + m_\alpha^2}. \quad (121)$$

Através da equação da geodésica da relatividade geral [36], encontramos a dependência do com o parâmetro de escala nesse caso específico:

$$p \propto a^{-1}, \quad (122)$$

então, após o desacoplamento teremos

$$E_\alpha = \sqrt{\left(\frac{q}{a}\right)^2 + m_\alpha^2}, \quad (123)$$

com  $q$  o *momentum* comóvel. Desta maneira, após o desacoplamento

$$f_\alpha(a) = f_\alpha(a_\alpha^D). \quad (124)$$

Em geral é impossível definir uma temperatura efetiva e um potencial químico efetivo que descrevam a evolução da distribuição de *momentum* após o desacoplamento. Nos limites ultra relativístico e não relativístico a descrição é mais simples, sendo possível definir tanto

temperatura quanto potencial químico efetivos. Estes dois limites são de extrema importância, pois partículas como neutrinos se desacoplam com energias relativísticas e, de (124), a função de distribuição irá se manter a mesma após o desacoplamento [37].

Com as ideias apresentadas acima podemos descrever o desacoplamento de partículas de maneira simplificada, que será suficiente para os fins desta dissertação.

## 4.2 Densidade de energia dos neutrinos cosmológicos

Em tempos primordiais, diversas partículas coexistiam em equilíbrio térmico mantido pelas interações fundamentais. Em particular, os neutrinos cosmológicos estavam em equilíbrio com o plasma primordial através de interações fracas com elétrons e pósitrons, que ocorriam a taxas significantes até temperaturas  $T > T_\nu^D \approx 1 \text{ MeV}$ . Para temperaturas bem menores, a taxa de espalhamento dos neutrinos com o plasma torna-se bem menor do que a taxa de expansão do universo e os neutrinos se desacoplam das demais espécies de partículas evoluindo em regime de *free streaming*, formando um mar de partículas semelhantes à radiação cósmica de fundo com temperatura atual  $T_\nu^0$  relacionada à temperatura da radiação cósmica de fundo  $T_\gamma^0 \simeq 2.725K = 2.348 \times 10^{-4} \text{ eV}$  através de [16]:

$$T_\nu^0 = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma^0 \simeq 1.945 \text{ K} = 1.676 \times 10^{-4} \text{ eV}. \quad (125)$$

O mar de neutrinos desacoplados desempenha importante papel em cosmologia. Além de sua densidade de energia contribuir, com uma pequena fração, para manter a geometria do universo plana, por se tratar de um tipo de matéria escura <sup>1</sup> os neutrinos cosmológicos ocupam importante papel na teoria de perturbações lineares [29] e o caráter massivo dos neutrinos influencia diretamente diversas medidas cosmológicas, como o espectro angular da radiação cósmica de fundo [17, 18].

Dados cosmológicos são importantes em física de neutrinos. Considerações cosmológicas impõem limites ao valor das massas dos neutrinos, como por exemplo o limite de Gerstein-Zeldovich [17, 29] e limites obtidos através do estudo da radiação cósmica de fundo. Análises

---

<sup>1</sup>Matéria Escura é constituída por todo o tipo de partículas que não interagem eletromagneticamente [16]

cosmológicas, entretanto, não fornecem nenhuma informação sobre os ângulos de mistura ou da fase de violação  $CP$ . Tais resultados são complementares a outros tipos de experimentos envolvendo neutrinos de outras origens, como neutrinos produzidos em decaimentos, em colisões de aceleradores de partículas e em reatores [12].

Antes do desacoplamento, os neutrinos cosmológicos eram mantidos em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T > T_D$  através de interações fracas que mantinham os estados de neutrino em estados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  com  $\alpha = e, \mu, \tau$ . O número de neutrinos de dado sabor  $\alpha$  que ocupavam um elemento infinitesimal do espaço de fases  $dn_{\nu_\alpha}$  com energia em um intervalo  $dE_{\nu_\alpha}$  é dado pela distribuição de Fermi-Dirac:

$$dn_{\nu_\alpha} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{p^2}{e^{E_{\nu_\alpha}/T - \eta_{\nu_\alpha}} + 1} \left( \frac{dE_{\nu_\alpha}}{dp} \right)^{-1} dE_{\nu_\alpha} \quad (126)$$

onde  $\eta_{\nu_\alpha}$  é a razão entre o potencial químico e a temperatura, que iremos supor nulo. Os neutrinos se desacoplam em estados de sabor de modo que, após o desacoplamento, as partículas propagam-se em regime de *free streaming* mantendo uma distribuição de *momentum* igual à distribuição na época do desacoplamento. Como em instantes antes do desacoplamento a temperatura de equilíbrio era  $T \sim 1MeV$ , muito maior que a massa dos neutrinos, podemos aproximar  $E_\nu(a) = p(a)$  na exponencial de (126), então teremos

$$dn_{\nu_\alpha} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{p^2}{e^{p(a)/T(a) - \eta_{\nu_\alpha}} + 1} dp = \frac{T^3(a)}{2\pi^2} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon - \eta_{\nu_\alpha}} + 1} d\epsilon, \quad (127)$$

com  $\epsilon = p(a)/T(a)$  uma quantidade comóvel.

Os neutrinos cosmológicos se propagam livremente estando sujeitos ao fenômeno de oscilação quântica de sabores descrito no capítulo 3. Em princípio, sua densidade de energia pode ser calculada como

$$\rho_\nu = \sum_\alpha \int E_{\nu_\alpha}(p) dn_{\nu_\alpha}, \quad (128)$$

faltando determinar a relação de dispersão  $E_{\nu_\alpha}(p)$  que descreve a energia associada a um estado de sabor. Podemos introduzir a massa efetiva de um sabor  $m_{eff,\nu_\alpha}$  em termos dos elementos da matriz de mistura  $U$  e das massas dos autoestados de massa:

$$m_{eff,\nu_\alpha}^2 = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 m_i^2, \quad (129)$$

de modo que a relação de dispersão pode ser escrita como

$$E_{\nu_\alpha}^{(0)}(a) \simeq (p^2 + m_{eff,\nu_\alpha}^2)^{1/2}. \quad (130)$$

Neste caso, a densidade de energia é calculada de maneira direta como

$$\rho_\nu^{(0)} = \sum_\alpha (p^2 + m_{eff,\nu_\alpha}^2)^{1/2} dn_{\nu_\alpha}. \quad (131)$$

Em [35] é argumentado que para o cálculo da densidade de energia ser consistente com o fenômeno de oscilação quântica de sabores descrito em termos da mecânica quântica de uma partícula devemos considerar a distribuição do estado de massa  $dn_{\nu_i}$ , composta por uma soma ponderada das distribuições de estados de sabor [35]:

$$dn_{\nu_i} = \sum_\alpha |U_{\alpha i}|^2 dn_{\nu_\alpha}. \quad (132)$$

A distribuição de  $dn_{\nu_i}$  é de Fermi-Dirac apenas se os parâmetros de degenerescência  $\eta_\alpha$  são iguais para todos os sabores. A densidade de energia seria dada por

$$\rho_\nu = \sum_{i=1}^3 \int (p^2 + m_i^2)^{1/2} dn_{\nu_i} = \sum_{\alpha,i} |U_{\alpha i}|^2 \int (p^2 + m_i^2)^{1/2} dn_{\nu_\alpha}. \quad (133)$$

Na figura 7 apresentamos o gráfico da diferença relativa

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_\nu^{(0)} - \rho_\nu}{\rho_\nu} \quad (134)$$

em função do *redshift* para as hierarquias normal e invertida. Neste gráfico utilizamos os valores tribimaximais para os ângulos de mistura, os valores fenomenológicos para as diferenças quadráticas de massa apresentados no capítulo 3 e para o autovalor de massa mais leve utilizamos  $m = 50 \text{ meV}$ . Do gráfico temos que para altos *redshifts* (em tempos anteriores ao presente) a diferença (134) é nula pois nestas épocas os neutrinos cosmológicos se propagam em regime ultra relativístico, tendo a massa pouca influência no cálculo da densidade de energia. Para *redshifts* baixos há a formação de platôs que indicam que a diferença no cálculo da massa, ou equivalentemente na definição de energia associada a dado sabor, influencia diretamente o cálculo da densidade de energia.

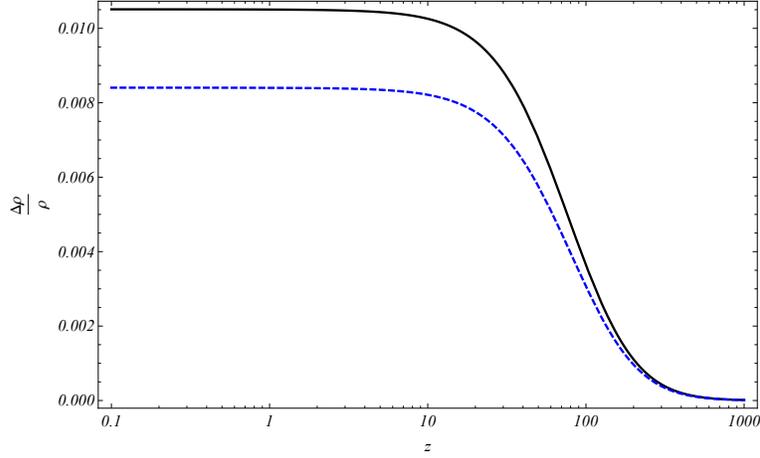


Figura 7: Diferença entre a densidade de energia calculada por (131) e (133) em função do *redshift* [35]. Para estes gráficos utilizamos os valores tribimaximais para ângulos de mistura e os valores fenomenológicos das diferenças quadráticas de massa dados no capítulo 3. Para o menor autovalor de massa utilizamos  $50 \text{ meV}$ . Em linha sólida está representada a quantidade (134) para a hierarquia normal e em linha tracejada para a hierarquia invertida. Para altos *redshifts* a diferença é nula pois nestas épocas os neutrinos cosmológicos se propagam em regime ultra relativístico, tendo a massa pouca influência no cálculo da densidade de energia. Para *redshifts* baixos há a formação de platôs que indicam que a diferença no cálculo da massa, ou equivalentemente na definição de energia associada a dado sabor, influencia diretamente o cálculo da densidade de energia.

Na figura 8 apresentamos o gráfico da densidade de energia normalizada dos neutrinos  $\Omega_\nu$  em função do menor autovalor de massa para as hierarquias normal e invertida. Novamente a influência do método de cálculo da densidade de energia é clara, **para valores de massa baixo diferentes métodos geram diferentes resultados** desta importante quantidade em diversas áreas da cosmologia.

As definições (131) e (133) são diferentes devido à definição de energia de estado de sabor utilizada. Os gráficos das figuras 7 e 8 mostram claramente como esses diferentes métodos influenciam diretamente o cálculo de quantidades importantes em cosmologia. Torna-se relevante, então, entender melhor a origem dessa ambiguidade para que possa ser definido o método correto para o cálculo da densidade de energia. A teoria generalizada das medidas

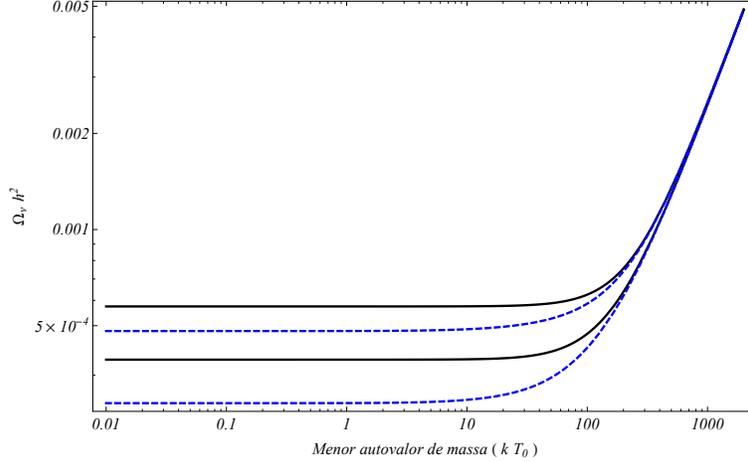


Figura 8: Densidade de energia normalizada dos neutrinos cosmológicos em função do menor autovalor de massa para as hierarquias normal e invertida de massa [35]. As linhas contínuas correspondem ao cálculo da densidade de energia através de (131), enquanto as linhas tracejadas correspondem ao método (133). Para valores pequenos da massa do menor autovalor de massa, os dois diferentes métodos (131) e (133) geram diferentes resultados desta quantidade que é importante em diversas áreas da cosmologia.

quânticas permitirá entender melhor as definições de energia de um sabor e relacioná-las a processos de medidas seletivos e não seletivos [33], e, desta maneira, auxiliar a clarificar a origem da ambiguidade apresentada acima bem como suas implicações ao cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos [38].

### 4.3 Energia média e energia ponderada de estados de sabor

No formalismo do operador densidade, podemos descrever estados de sabor como estados mistos ou puros e obter quantidades físicas observáveis de maneira direta. A energia média  $E_\alpha(t)$  de um estado puro de sabor  $\rho_\alpha$  é dada por

$$E_\alpha = \text{Tr}[H\rho_\alpha(t)], \quad (135)$$

com  $H$  o operador Hamiltoniano que, neste caso, será o operador de partícula livre utilizado no capítulo 3. Como o operador densidade de um estado puro de sabor é igual ao projetor

naquele estado podemos escrever:

$$E_\alpha = Tr[HM_\alpha(t)] = Tr[H | \nu_\alpha(t)\rangle\langle\nu_\alpha(t) |]. \quad (136)$$

Esta quantidade é independente do tempo e, utilizando a forma explícita do projetor  $M_\alpha(t)$  na base de massa<sup>2</sup> temos:

$$E_\alpha = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 E_i. \quad (137)$$

No caso de apenas dois sabores as expressões acima são dadas em termos da energia média dos estados de massa  $\bar{E} = (E_1 + E_2)/2$ , da diferença de energia entre os autoestados de massa  $\Delta E = E_2 - E_1$  e do ângulo de mistura  $\theta$ :

$$\begin{aligned} E_e(t) &= \bar{E} + \frac{1}{2}\Delta E \cos(2\theta), \\ E_\mu(t) &= \bar{E} - \frac{1}{2}\Delta E \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Um estado de determinado sabor durante sua evolução livre pode se converter parcialmente ou completamente em outro sabor. A projeção de um estado de um sabor  $|\nu_\alpha(t)\rangle$  em um estado de outro sabor  $|\nu_\beta(0)\rangle$  não é nula, portanto, a definição (135,136) é ambígua e inapropriada de energia associada a sabor, uma vez que essa quantidade não é unicamente correlacionada a um único sabor. Essa ambiguidade na "medida", ou "projeção" de energia associada a um sabor é consequência do Hamiltoniano de propagação livre ser diagonal na base de massa [33].

Para um sistema geral formado pela mistura quântica de diversos *ensembles* de sabor  $\rho$ , conforme descrito no capítulo 3, podemos definir, sem nenhuma ambiguidade, a energia total média  $E(t)$  como

$$E(t) = Tr[H\rho(t)]. \quad (138)$$

Como  $\rho(t) = \sum_\alpha w_\alpha M_\alpha(t)$ , temos que a energia total média é escrita em termos dos pesos estatísticos  $w_\alpha$  e das energias médias dos sabores definidas em (136):

$$E(t) = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} w_\alpha E_\alpha(t). \quad (139)$$

---

<sup>2</sup>vide equação (88) do capítulo 3

As energias médias dos sabores  $E_\alpha(t)$  não tem nenhuma dependência nos pesos estatísticos ligados à cada sabor e nem nas probabilidades de medir o sistema em determinado sabor  $P_\beta(t) = Tr[M_\beta(0)\rho(t)]$ .

Sob a perspectiva do formalismo da matriz densidade e utilizando conceitos oriundos da teoria generalizada das medidas quânticas, observamos que a energia média do sabor  $E_\alpha(t)$  é calculada através de um operador densidade obtido de uma medida seletiva de sabor. Partindo do sistema descrito como mistura de diferentes sabores, após uma medida não seletiva de sabor nesse *ensemble* o sistema será colapsado no estado:

$$\rho' = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(t)\rho_{\alpha}. \quad (140)$$

A energia total deste estado será dada por

$$E' = Tr[H\rho'] = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} P_{\alpha}(t)E_{\alpha}(t). \quad (141)$$

Definimos, neste contexto, a energia ponderada de sabor  $\varepsilon_{\alpha}(t)$  como:

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = P_{\alpha}(t)E_{\alpha}(t) = Tr[M_{\alpha}(0)HM_{\alpha}(0)\rho(t)]. \quad (142)$$

Esta energia está diretamente associada às probabilidades  $P_{\alpha}(t)$  que, por sua vez, são dadas em termos dos pesos estatísticos  $w_{\alpha}$ . Uma possível medição das probabilidades poderia, então, ser utilizada para recobrar os valores dos pesos estatísticos associados à mistura que compõe o *ensemble*.

De um estado misto de sabor geral podemos obter duas medidas de energia diferentes. A energia média de um sabor  $E_{\alpha}(t)$  é relacionada a processos de medida **seletivos** de sabor, e não é dada em termo dos pesos estatísticos  $w_{\alpha}$  e nem das probabilidades  $P_{\alpha}(t)$ . A energia ponderada de um sabor  $\varepsilon_{\alpha}(t)$  é relacionada a processos **não seletivos** de medida e é descrita em termos das probabilidades de medir o sistema em determinado sabor.

Cada uma dessas energias pode ser entendida como o observável que descreve a respectiva medida, sendo esta correlação melhor entendida em termos da entropia de mistura, definida na seção 2.3.1. Medidas seletivas de sabor, descritas por medidas da energia média de sabor, sempre produzem estados puros, de modo que uma medida seletiva não irá modificar a entropia

de von-Neumann do sistema. A medida de energias ponderadas, relacionadas a medidas não seletivas, mudam a entropia de von-Neumann, sendo a quantidade, então, importante como auxiliar na caracterização dessa relação entre energias médias e ponderadas e processos de medidas, estabelecendo claramente a relação entre elas e o número quântico de sabor [33].

A diferença entre medir a energia ponderada de sabor e a energia média de sabor pode ser calculada em termos da energia residual definida como

$$\xi(t) = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} (\varepsilon_\alpha(t) - w_\alpha E_\alpha(t)) = \sum_{\alpha \neq \beta} Tr[M_\alpha(0) H M_\beta(0) \rho], \quad (143)$$

cujo valor médio no tempo não é nulo. A média temporal da energia média de sabor introduz uma relação mal definida entre energia e sabor, enquanto a média temporal da energia ponderada de sabor fornece uma correlação probabilística entre energias observáveis e o número quântico de sabor [29, 38].

### 4.3.1 Aplicação aos neutrinos cosmológicos

Como vimos na seção 4.2, ambiguidades na definição da energia associada a um sabor implicam em diferenças no cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos. Do ponto de vista do formalismo da matriz densidade a energia total  $E(t)$  (138) é bem definida. Se o cálculo da densidade de energia for efetuado utilizando-se energia ponderada de sabor (142) ao menos uma energia residual dada por (143), calculada em termos dos pesos estatísticos, ainda irá persistir. Então, para o cálculo da densidade de energia é necessário que a relação de dispersão  $E_\nu$  seja determinada através do esquema de medida que produz o estado a ser medido.

Assumindo que o mar de neutrinos cosmológicos é um *ensemble* descrito como uma mistura de *subensembles* de sabor, cada um associado a um peso estatístico  $w_\alpha$  definido através de  $dn_{\nu_\alpha} = w_\alpha dn_{Total}$  para algum elemento de referência do espaço de fases  $dn_{Total}$ . Neste caso, a mistura maximal é obtida para  $dn_e = dn_\mu = dn_\tau$ , ou seja,  $w_e = w_\mu = w_\tau$  e a energia total definida em (138) é relacionada de maneira direta com as outras energias por uma série de

resultados convergentes:

$$E(t) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} E_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(t) E_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha} \langle \varepsilon_{\alpha}(t) \rangle = \bar{E}, \quad (144)$$

com  $\langle \varepsilon_{\alpha}(t) \rangle$  a média temporal das energias ponderadas de sabor e

$$\bar{E} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 E_i,$$

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2},$$

as energias dos autoestados de massa. Quando o estado de sabor é uma mistura maximal **todas** as definições de energia obtidas através da análise dos processos de medida reproduzem exatamente o mesmo resultado, o obtido de (133). No cenário dos neutrinos cosmológicos é necessário considerar a média temporal das energias ponderadas de sabor em (144) pois, nesse cenário, a dependência temporal de  $\varepsilon_{\alpha}$  oscila rapidamente [38]. Para o caso de um sistema maximamente misto de três sabores, por exemplo, teremos para os valores médios temporais das energias ponderadas de sabor:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_e \rangle &= \frac{\bar{E}}{3} + \frac{1}{36} \left[ 6\delta_{12} \cos(2\theta_{12}) \cos^2(\theta_{13}) - (\delta_{23} - \delta_{31})(1 - 3 \cos(2\theta_{13})) \right] \\ \langle \varepsilon_{\mu} \rangle &= \frac{\bar{E}}{3} + \frac{1}{9} [(\delta_{31} - \delta_{23}) \cos^2(\theta_{13}) \sin^2(\theta_{23}) \\ &\quad + (\delta_{12} - \delta_{31})(\sin(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) + \cos(\theta_{12}) \sin(\theta_{13}) \sin(\theta_{23}))^2 \\ &\quad + (\delta_{23} - \delta_{12})(\cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) - \sin(\theta_{12}) \sin(\theta_{13}) \sin(\theta_{23}))^2] \\ \langle \varepsilon_{\tau} \rangle &= \frac{\bar{E}}{3} + \frac{1}{9} [(\delta_{31} - \delta_{23}) \cos^2(\theta_{13}) \cos^2(\theta_{23}) \\ &\quad - (\delta_{12} - \delta_{31})(\sin(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) + \cos(\theta_{12}) \sin(\theta_{13}) \sin(\theta_{23}))^2 \\ &\quad - (\delta_{23} - \delta_{12})(\cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) - \sin(\theta_{12}) \sin(\theta_{13}) \sin(\theta_{23}))^2], \end{aligned}$$

onde  $\delta_{ij} = E_i - E_j$ , a diferença de energia de dois autoestados de massa. A soma das três equações acima reproduz a igualdade (144).

Dessa maneira, dado o operador densidade  $\rho$  que descreve o estado dos neutrinos cosmológicos desacoplados, podemos calcular a densidade de energia através de diferentes definições de energia associada a um autoestado de sabor. Como o último espalhamento força os

neutrinos a se desacoplarem em estados de sabor, a densidade de energia  $\rho_\nu$  deve ser calculada como

$$\rho_\nu = \sum_\alpha \int E_{\nu_\alpha} dn_{\nu_\alpha}, \quad (145)$$

com a relação de dispersão  $E_{\nu_\alpha}$  sendo determinada pela discussão acima apresentada. Desta maneira temos diferentes modos de determinar a relação de dispersão energia-*momentum*. Podemos usar  $\langle E(t) \rangle$ , a média da energia média total obtida de (138), a soma das energias médias de sabor  $\sum_\alpha E_\alpha$ , a soma das médias temporais das energias ponderadas de sabor  $\sum_\alpha \langle \varepsilon_\alpha(t) \rangle$  ou, a maneira mais simples, a energia média dos autoestados de massa  $\bar{E} = (E_1 + E_2 + E_3)/3$ . Ressaltamos que, no caso em que o estado dos neutrinos cosmológicos é um estado maximamente misto, i.e.  $w_e = w_\mu = w_\tau = 1/3$ , qualquer uma das definições de energia irá gerar o mesmo resultado, reproduzido pelo método descrito por (133). Em outros casos, diferentes definições de energia associada a um sabor irão, certamente, gerar diferentes resultados para a densidade de energia.

Na figura 9 apresentamos o gráfico das diferenças entre o cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos através das diferentes definições de energia apresentadas em função do *redshift* para o menor autovalor de massa  $m = 50 \text{ meV}$ . A figura 9(a) corresponde ao caso do estado logo após o desacoplamento ser um estado puramente eletrônico. Como é apenas parcialmente verdade que o último espalhamento dos neutrinos com o resto do plasma força-os ao estado eletrônico, na figura 9(b) apresentamos as mesmas funções de (a) calculadas para o estado inicialmente em uma mistura com pesos estatísticos obedecendo a proporção

$$w_e : w_\mu : w_\tau \Leftrightarrow 1 : 0.16 : 0.16, \quad (146)$$

que representa um caso mais real no qual os diferentes sabores atingem o equilíbrio térmico com temperatura aproximadamente igual através de um esquema de medida produzida pelo espalhamento elástico com o plasma primordial [39].

Assim como dos gráficos apresentados na figura 7, em *redshifts* altos o regime ultra relativístico suprime qualquer importância da massa no cálculo da densidade de energia e todas as definições de energia geram o mesmo resultado. Conforme o universo se expande e o *momentum*

o valor médio dos neutrinos cosmológicos diminui, a massa passa ser importante no cálculo da densidade de energia e o método como ela é inserida através da relação de dispersão influencia o resultado.

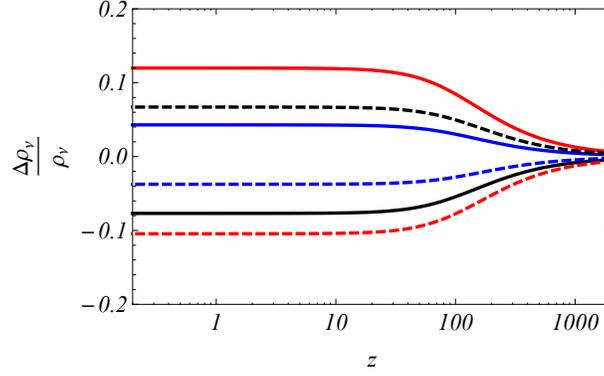
O gráfico da densidade de energia normalizada  $\Omega_\nu$  dos neutrinos é apresentado na figura 10 para os mesmos dois casos apresentados na figura 9 em função do menor autovalor de massa. Assim como foi discutido anteriormente, a definição utilizada para energia associada ao estado afeta diretamente o cálculo dessa quantidade quando o menor autovalor de massa é  $< 100 k_b T_\nu^0 \simeq 167 \text{ meV}$

Complementando o resultado das duas figuras anteriores, na figura 11 está o gráfico do erro relativo  $\Delta m/m$  para predições da massa efetiva do neutrino em função do menor autovalor de massa para as hierarquias normal e invertida. Para alguns resultados fenomenológicos de massa efetiva apresentados na literatura  $\sum_\alpha m_\alpha < 0.36 \text{ eV}$  [40] e  $\sum_\alpha m_\alpha \sim 0.1 - 0.6 \text{ eV}$  [41] podemos obter o erro relativo através da figura 11:

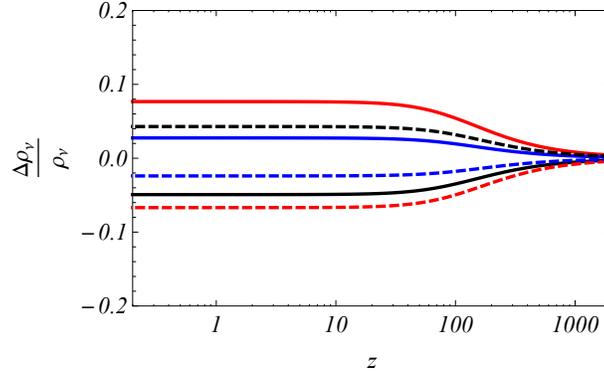
$$\begin{aligned}
 m = 0.1 \text{ eV} &\rightarrow \Delta m/m = 0.009(0.027) \text{ linhas azuis (vermelhas);} \\
 m = 0.36 \text{ eV} &\rightarrow \Delta m/m = 0.0008(0.002) \text{ linhas azuis (vermelhas);} \\
 m = 0.6 \text{ eV} &\rightarrow \Delta m/m = 0.0003(0.0008) \text{ linhas azuis (vermelhas)} \quad (147)
 \end{aligned}$$

para ambas as hierarquias. Do gráfico notamos que a correção aumenta exponencialmente conforme o menor autovalor de massa diminui e para escalas de massa  $> 0.1 \text{ eV}$  a correção das hierarquias normais e invertidas é da mesma magnitude.

Enfatizamos que a análise apresentada nesse capítulo só fornece a resposta correta para qual definição de energia deve ser utilizada no cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos se o procedimento de medida ligado à fenomenologia for determinado. **No caso de uma mistura maximal, entretanto, qualquer uma das definições irá gerar o mesmo resultado, consistente com o apresentado por (133) [35].**

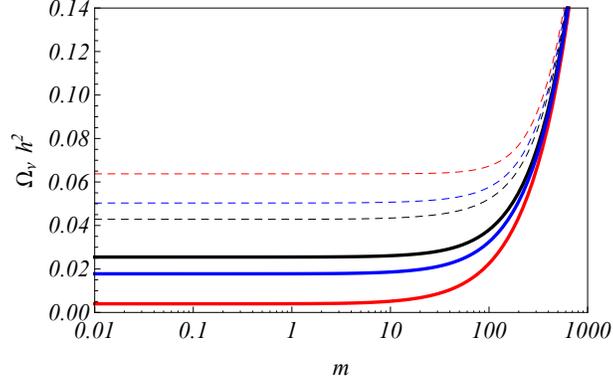


(a)

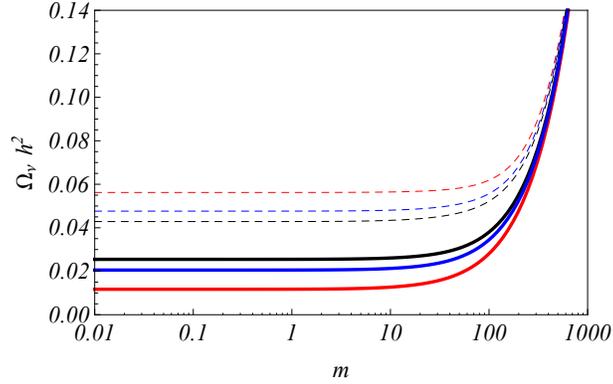


(b)

Figura 9: Desvios no cálculo da densidade de energia  $\Delta\rho_\nu/\rho_\nu$  em função do *redshift*,  $z$  [38]. As curvas sólidas correspondem à hierarquia normal enquanto as tracejadas correspondem à hierarquia invertida, em ambos os casos consideramos o menor autovalor de massa  $50 \text{ meV}$ . Utilizamos os valores tribimaximais para os ângulos de mistura e os valores fenomenológicos para as diferenças quadráticas de massa apresentados no capítulo 3. São representadas nesse gráfico a diferença relativa entre a densidade calculada com a média temporal da energia total ( $\langle E(t) \rangle$ ) e a média temporal da energia ponderada de sabor ( $\sum_\alpha \langle \varepsilon_\alpha \rangle$ ) (linhas pretas), entre a média das energias dos autoestados de sabor ( $\bar{E}$ ) e a média temporal da energia total ( $\langle E(t) \rangle$ ) (linas vermelhas) e entre a média das energias dos autoestados de sabor ( $\bar{E}$ ) e a média temporal da energia ponderada de sabor ( $\sum_\alpha \langle \varepsilon_\alpha \rangle$ ) (linhas azuis). No gráfico (a) o resultado é apresentado para um estado puro eletrônico que corresponde aos limites teóricos máximos, enquanto no gráfico (b) é apresentado o resultado para o caso mais realista de uma mistura estatística com  $w_e = 0.76$ ,  $w_\mu = w_\tau \simeq 0.12$ .



(a)  $w_e = 1$ ,  $w_\mu = 0$  e  $w_\tau = 0$



(b)  $w_e = 0.76$ ,  $w_\mu = 0.12$  e  $w_\tau = 0.12$

Figura 10: Densidade de energia normalizada dos neutrinos cosmológicos em função do menor autovalor de massa em unidades de  $k_b T_\nu^0 = 0.167 \text{ meV}$  [38]. As curvas sólidas correspondem à hierarquia normal, enquanto as curvas tracejadas correspondem à hierarquia invertida. Os valores dos ângulos de mistura e das diferenças quadráticas de massa utilizados são os mesmos da figura 9 e a cor das linhas está em correspondência com o apresentado na figura 9. No gráfico (a) os resultados apresentados correspondem ao caso de um estado puro eletrônico. No gráfico (b) é apresentado o resultado para o caso mais realístico com  $w_e \simeq 0.76$ ,  $w_\mu = w_\tau \simeq 0.12$ .

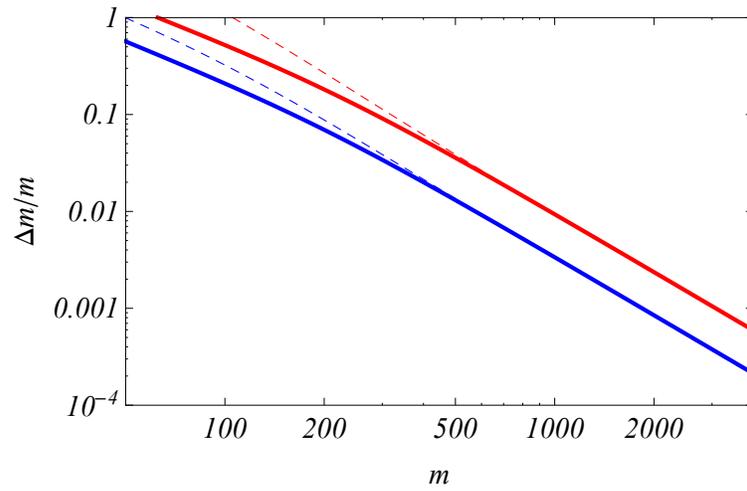


Figura 11: Erro relativo  $\Delta m/m$  para predições da massa dos neutrinos em função do menor autovalor de massa,  $m$ , em unidades de  $k_b T_\nu^0 = 0.167 \text{ meV}$  [38]. As linhas sólidas correspondem à hierarquia normal e as linhas tracejadas à hierarquia invertida. Os valores dos parâmetros de mistura e das diferenças quadráticas de massa, bem como as cores das linhas, estão em correspondência com as figuras 10 e 9.

## 5 Descoerência entre autoestados de massa no formalismo de pacotes de ondas.

Para explicar a depleção no fluxo de neutrinos atmosféricos e solares foi proposto o fenômeno de oscilação quântica de sabor, conforme explicado no capítulo 3. Os tratamentos mais simples do fenômeno supõe que os estados de massa  $|\nu_i\rangle$  são descritos através de ondas planas [12], ou seja

$$\langle x | \nu_i \rangle \propto e^{-ipx}, \quad (148)$$

com  $p$  o *momentum* do estado livre. Esta descrição, entretanto, apresenta alguns limitantes. Neste formalismo são utilizadas algumas aproximações inconsistentes, como assumir  $x \sim t$ , ou seja, a posição da partícula equivalente ao tempo de evolução. Ao supor ondas planas, também, abre-se mão da localização da partícula sendo impossível descrever fenômenos relacionados à produção e detecção.

Visando superar os limitantes intrínsecos ao formalismo de ondas planas, propôs-se a descrição dos estados de massa através de pacotes de ondas, no qual cada autoestado de massa é associado a uma distribuição de *momentum*. Nesse formalismo a partícula é localizada através de uma distribuição de posição dada pela função de onda, obtida através da transformada de Fourier da distribuição de *momentum* da partícula [42, 43, 44].

A utilização de pacotes de ondas em física de neutrinos possibilita grande compreensão sobre diversos fenômenos e características intrínsecas à dinâmica dessa partícula [12, 19, 20, 21, 43, 44]. Um estado de sabor é descrito como uma superposição de pacotes de ondas, cada um associado a um estado de massa. A dinâmica de evolução livre de cada pacote de ondas gera alguns efeitos interessantes, como a introdução de uma escala de coerência acima da qual a probabilidade de transição e sobrevivência é constante [45].

Deixando de lados as questões ligadas à criação e detecção dos pacotes de ondas, que são modeladas mais rigorosamente através da teoria quântica de campos [46], descreveremos o fenômeno de oscilação quântica de sabores no formalismo de pacotes de ondas através do estudo das diferentes correlações entre os estados de massa, descritos por pacotes de ondas

Gaussianos. Um estado genérico de sabor pode ser identificado como um estado emaranhado de três *qubits* que descreve um sistema composto. Cada subsistema, nesse cenário, corresponde a um estado de massa, tornando-se interessante quantificar emaranhamento, separabilidade e correlações entre esses diferentes subsistemas. Através do cálculo das quantidades apresentadas no capítulo 2 (negatividade logarítmica, emaranhamento de formação, etc) iremos determinar uma escala de coerência acima da qual a probabilidade de transição e da sobrevivência é constante. Investigaremos mais a fundo a relação entre probabilidade de sobrevivência e quantidade de emaranhamento/correlação entre os estados de massa determinando fenomenologicamente a dependência da correção entre essas duas quantidades em função da largura do pacote de ondas que representa um estado de massa.

## 5.1 O formalismo de pacote de ondas em física de neutrinos

No formalismo de pacotes de ondas, um autoestado de massa  $|\nu_i\rangle$  pertence a um espaço de Hilbert composto de um espaço contínuo, relacionado com a localização da partícula  $\mathcal{H}_x$  de base  $\{|\vec{x}\rangle\}$ , e um espaço discreto  $\mathcal{H}_m$  de base composta pelos estados de massa  $\{|\nu_i\rangle\}$ :

$$\begin{aligned} |\nu_i(\vec{x}, t)\rangle &\in \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_m, \\ |\nu_i(\vec{x}, t)\rangle &= |\psi_i(\vec{x}, t)\rangle \otimes |\nu_i\rangle. \end{aligned} \quad (149)$$

A projeção deste estado na base de posição  $|\vec{x}\rangle$  será

$$\langle \vec{x} | \nu_i(\vec{x}, t)\rangle = \psi_i(\vec{x}, t) |\nu_i\rangle, \quad (150)$$

com  $\psi_i(x, t)$  a função de onda associada ao autoestado de massa  $i$ . A função de onda  $\psi_i(\vec{x}, t)$  pode ser obtida através da transformada de Fourier da distribuição de *momentum*  $\psi_i(\vec{p})$  que, para estados livres, é estacionária:

$$\begin{aligned} \psi_i(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \psi_i(\vec{p}) e^{i[\vec{p}\cdot\vec{x} - E_i(\vec{p})t]}, \\ E_i(p) &= \sqrt{p^2 + m_i^2}. \end{aligned} \quad (151)$$

Em geral, um estado de sabor  $\alpha$  é dado pelo vetor  $|\nu_\alpha(\vec{x}, t)\rangle$  composto de uma superposição quântica dos estados de massa  $|\nu_i(\vec{x}, t)\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i(\vec{x}, t)\rangle, \\ |\nu_\alpha(\vec{x}, t)\rangle &= \langle \vec{x} | \nu_\alpha \rangle = \sum_i U_{\alpha i} \psi_i(\vec{x}, t) |\nu_i\rangle. \end{aligned} \quad (152)$$

Desta maneira identificamos um estado de sabor como uma superposição dos pacotes de ondas associados a cada um dos estados de massa. A descrição desse sistema físico em termos do operador densidade é imediata. Para um estado puro de um sabor  $\alpha$ , o operador  $\rho_\alpha(\vec{x}, t)$  irá representar o estado de um *ensemble* de sistemas quânticos preparados no mesmo sabor,

$$\rho_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* \psi_i(\vec{x}, t) \psi_j^*(\vec{x}, t) |\nu_i\rangle \langle \nu_j|. \quad (153)$$

Cabe ressaltar aqui que este operador densidade corresponde ao estado físico medido em determinada posição  $\vec{x}$ , observável obtido através da medida do operador de posição.

A formação do pacote de ondas está ligada aos processos de criação do neutrino, sendo o tempo  $t$  interpretado como a diferença entre o tempo de criação  $t_c$  e o tempo de detecção  $t_d$  do estado. Por interagir fracamente, os neutrinos sempre são detectados indiretamente após serem espalhados por outras partículas, como elétrons. Em geral a seção de choque da interação fraca para a maioria dos processos envolvendo neutrinos em condições experimentais comuns é muito pequena sendo necessário manter o detector em exposição a um fluxo contínuo de neutrinos de modo que é impossível ter controle do tempo de criação da partícula, não havendo resolução temporal [45]. Para levar em conta esta questão e descrever o sistema apenas em termos da posição, introduzimos a média temporal sobre o estado (153) como uma simples integração no tempo

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(\vec{x}) &= \int dt \rho_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* \left[ \int dt \psi_i(\vec{x}, t) \psi_j^*(\vec{x}, t) \right] |\nu_i\rangle \langle \nu_j|, \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* f_{ij}(\vec{x}) |\nu_i\rangle \langle \nu_j|, \end{aligned} \quad (154)$$

com  $f_{ij}(\vec{x}) = \int dt \psi_i(\vec{x}, t) \psi_j^*(\vec{x}, t)$ .

Com o operador densidade determinado em (154), podemos utilizar as ferramentas introduzidas no capítulo 3 para calcular as probabilidades de sobrevivência e de conversão de dado

sabor utilizando os projetores em cada sabor  $M_\alpha(0)$

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \alpha}(\vec{x}) &= Tr[M_\alpha(0)\rho_\alpha(\vec{x})] = \sum_{i,j} |U_{\alpha i}|^2 |U_{\alpha j}|^2 f_{ij}(\vec{x}), \\ P_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{x}) &= Tr[M_\beta(0)\rho_\beta(\vec{x})] = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta i}^* f_{ij}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (155)$$

Devido à normalização da distribuição de *momentum* é garantido que  $f_{ii}(\vec{x}) = 1$ . Para obter formas explícitas das probabilidades acima é necessário adotar uma forma para o pacote de ondas, ou seja, supor uma distribuição de *momentum*.

### 5.1.1 Pacotes de ondas Gaussianos

Para obter a dependência explícita das probabilidades de conversão e sobrevivência devemos adotar uma distribuição de momentum. Para os fins deste trabalho iremos supor que a distribuição de *momentum* de cada estado de massa é dada em termos de uma Gaussiana, que facilita diversos aspectos algébricos além de descrever bem a localização de uma partícula. Nesta aproximação, a função de onda no espaço dos *momenta*  $\psi_i(p)$  é dada por:

$$\psi_i(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} e^{-\frac{(p-p_i)^2}{4\sigma_p^2}}, \quad (156)$$

ou seja, uma distribuição gaussiana centrada em um *momentum*  $p_i$  com largura  $\sigma_p$ .

Uma vez suposta a distribuição de *momentum* Gaussiana, o cálculo das funções  $f_{ij}(\vec{x})$  reduz-se a integrações Gaussianas. No caso específico de estados de massa em física de neutrinos para diversos casos típicos  $p_i \gg m_i$  sendo razoável adotar aproximações ultra relativísticas para calcular (151), (154) e (155) [12]:

$$\begin{aligned} E_i(p) &\simeq \sqrt{p_i^2 + m_i^2} + v_i(p - p_i) = E_i + v_i(p - p_i), \\ E_i &\simeq E, \\ p_i &\simeq E - 1 \frac{m_i^2}{2E}, \\ v_i &\simeq 1 - \frac{m_i^2}{2E}, \end{aligned} \quad (157)$$

onde é suposta propagação unidimensional, aproximação suficiente para entender os fenômenos de interesse, e não levou-se em conta o processo de produção do estado [12]. Com estas

aproximações teremos  $f_{ij}(x)$  explicitamente:

$$f_{ij}(x) = \exp \left[ -i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} x - \left( \frac{\sigma_p \Delta m_{ij}^2 x}{2\sqrt{2}E^2} \right)^2 \right], \quad (158)$$

que possuem forma semelhante à da Gaussiana mas com um termo oscilatório em  $x$ . E o operador densidade que representa o estado do sistema  $\rho_\alpha(x)$  será:

$$\rho_\alpha(x) = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* \exp \left[ -i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} x - \left( \frac{\sigma_p \Delta m_{ij}^2 x}{2\sqrt{2}E^2} \right)^2 \right] | \nu_i \rangle \langle \nu_j |. \quad (159)$$

A localização de cada estado de massa  $i$  é descrita em termos de um pacote de ondas Gaussiano que propaga-se com velocidade  $v_i$  dada em (157) dependente da massa  $m_i$ . Um estado de sabor é, inicialmente, uma superposição quântica coerente dos pacotes de ondas Gaussianos. Durante a evolução os pacotes de ondas gradualmente se separam, pois suas velocidades de propagação são diferentes. Como consequência, os termos de superposição  $f_{ij}(x)$  entre dois estados de massa tendem à zero assintoticamente, e as probabilidades de conversão e sobrevivência tendem a uma constante determinada pelos parâmetros de mistura. No gráfico da figura 12 fica claro esse efeito: as probabilidades de sobrevivência de estados inicialmente puros de um sabor tendem a uma constante para determinada escala, consequência da separação entre os estados de massa.

Podemos interpretar este efeito de amortecimento da probabilidade de sobrevivência por outro ponto de vista. Identificando o estado inicial  $\rho_\alpha(0)$  como um estado emaranhado entre os modos de massa  $| \nu_i \rangle$ , durante a evolução há perda de emaranhamento, gerada pelo fato de o Hamiltoniano que governa a evolução livre do sistema ser diagonal na base de massa mas não na base de sabor. O amortecimento da probabilidade de oscilação é, então, relacionado à perda de emaranhamento e possivelmente de outras correlações, tornando-se interessante investigar o comportamento das diversas quantidades apresentadas no capítulo 2 para esse sistema, em particular, sua evolução com o parâmetro  $x$ . Faremos primeiro o caso mais simples, no estudo do sistema composto de apenas dois estados de massa, em seguida partindo para o caso mais complexo da mistura entre três estados.

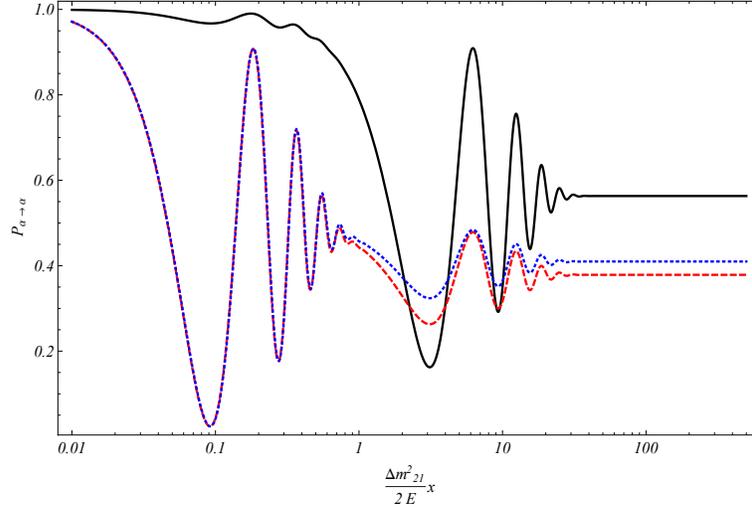


Figura 12: Probabilidades de sobrevivência para estados inicialmente eletrônico (linha contínua), muônico (linha tracejada) e taônico (linha pontilhada) em função do parâmetro adimensional  $\frac{\Delta m_{21}^2 x}{2E}$ . Para estes gráficos utilizamos os parâmetros de mistura e diferenças quadráticas de massa fenomenológicos apresentados no capítulo 3 e  $\frac{\sigma_p}{E} = 1$ . Para escalas  $\sim \frac{40\Delta m_{21}}{2E}$  as probabilidades de sobrevivência tendem a uma constante, consequência da gradual separação dos estados de massa que compõem a superposição e se propagam com diferentes velocidades.

## 5.2 Emaranhamento e correlações entre dois estados de massa.

No cenário de apenas dois sabores a superposição que gera um estado  $|\nu_\alpha\rangle$  é composta de dois modos de massa  $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$  mutuamente ortogonais. Podemos interpretar estes autoestados de massa como estados de dois *qubits* que descrevem um sistema composto de dois subsistemas associados aos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  [7]:

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 &\rightarrow |\nu_1\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle, \\ |\nu_2\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 &\rightarrow |\nu_2\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle. \end{aligned} \quad (160)$$

Para este caso mais simples a matriz densidade (159) se reduzirá a:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(x) &= |U_{\alpha 1}|^2 |10\rangle\langle 10| + U_{\alpha 1} U_{\alpha 2}^* f_{12}(x) |10\rangle\langle 01| \\ &+ |U_{\alpha 2}|^2 |01\rangle\langle 01| + U_{\alpha 2} U_{\alpha 1}^* f_{12}^*(x) |01\rangle\langle 10|, \end{aligned} \quad (161)$$

lembrando que sempre  $f_{ii}(x) = 1$  devido à normalização da distribuição de *momentum* e:

$$f_{12}(x) = \exp \left[ -i \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} x - \left( \frac{\sigma_p \Delta m_{21}^2 x}{2\sqrt{2}E^2} \right)^2 \right]. \quad (162)$$

Como  $f_{12}(0) = 1$ , este estado é inicialmente puro, mas durante a sua evolução ele possivelmente irá se tornar misto. Podemos facilmente quantificar esta transição de característica através da pureza definida como

$$\kappa_\alpha(x) = Tr[\rho_\alpha(x)^2], \quad (163)$$

quantidade que é igual a 1 apenas se  $\rho_\alpha$  for um estado puro. Através de (161) teremos:

$$\kappa_\alpha(x) = 1 - 2 |U_{\alpha 1} U_{\alpha 2}|^2 [1 - |f_{12}(x)|^2], \quad (164)$$

portanto, o estado é puro apenas em  $x = 0$ . Apresentamos o gráfico da pureza (164) na figura 13 onde vemos essa mudança de característica. Para uma escala  $\sim 40\Delta m_{21}/2E$  a pureza tende a uma constante e o estado mantém um grau de mistura que não é maximal.

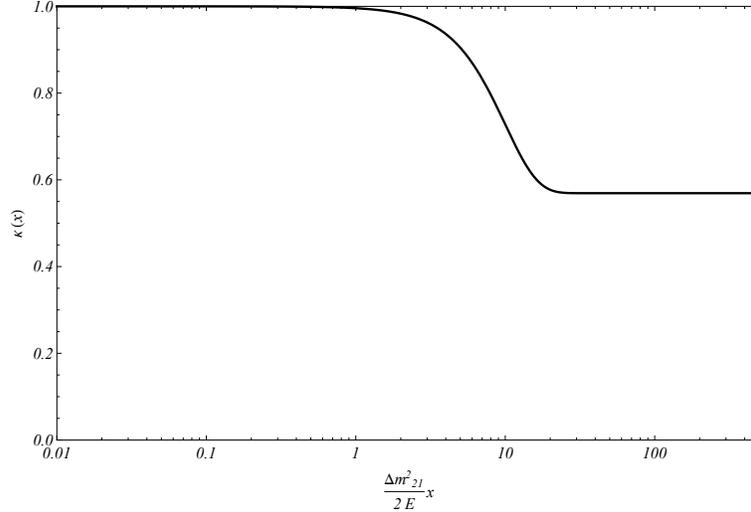


Figura 13: Pureza quântica de um estado de sabor em função do parâmetro adimensional  $\frac{\Delta m_{21}^2 x}{2E}$  para a superposição de dois modos de massa. Neste gráfico foi utilizado o ângulo de mistura  $\sin^2 \theta = 0.306$ . O estado, inicialmente puro de apenas um sabor evolui para uma mistura de grau dependente do parâmetro de mistura de modo que a entropia de von-Neumann de uma partição não será um quantificador adequado de emaranhamento entre subsistemas.

O estado inicialmente puro sempre irá evoluir para um estado misto. A descrição da oscilação quântica de sabores através das correlações entre os autoestados de massa não pode ser feita em termos da entropia de von Neumann de uma bipartição. Iremos, então, calcular a negatividade logarítmica e o emaranhamento de formação para quantificar o emaranhamento entre os estados de massa, a discórdia quântica e a informação mútua para quantificar, respectivamente, as correlações quânticas e as correlações totais entre os dois estados de massa.

### 5.2.1 Quantificadores de emaranhamento para dois sabores

Devido á diferença na velocidade de propagação dos pacotes de ondas, há amortecimento das oscilações das probabilidades de sobrevivência. O estado inicial  $\rho_\alpha(0)$  possui emaranhamento entre os modos de massa que será perdido durante a sua evolução em  $x$ . Quantificando o emaranhamento através da negatividade logarítmica e do emaranhamento de formação iremos descrever o amortecimento das probabilidades de sobrevivência.

A negatividade logarítmica é calculada através dos autovalores da matriz transposta com relação a um dos modos. No caso de dois sabores, o resultado é independente do modo transposto. A matriz transporta parcialmente com relação ao modo 1,  $\tilde{\rho}_\alpha^{\{1\}}$ , será:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\alpha^{\{1\}}(x) &= |U_{\alpha 1}|^2 |10\rangle\langle 10| + U_{\alpha 1} U_{\alpha 2}^* f_{12}(x) |00\rangle\langle 11| \\ &+ |U_{\alpha 2}|^2 |01\rangle\langle 01| + U_{\alpha 2} U_{\alpha 1}^* f_{12}^*(x) |11\rangle\langle 00|. \end{aligned} \quad (165)$$

Esta matriz é diagonalizável por blocos e possui apenas um autovalor negativo:

$$\mu_{\alpha,1} = - |U_{\alpha 1} U_{\alpha 2}| |f_{12}(x)| = - \frac{\sin(2\theta)}{2} \text{Exp} \left[ - \left( \frac{\sigma_p^2 \Delta m_{21}^2}{2\sqrt{2}E^2} x \right)^2 \right], \quad (166)$$

que, assim como a pureza, é independente do sabor  $\alpha$ . A negatividade logarítmica  $E_{\mathcal{N}}$  será:

$$E_{\mathcal{N}}(x) = \log_2 \left\{ 1 - \sin(2\theta) \text{Exp} \left[ - \left( \frac{\sigma_p^2 \Delta m_{21}^2}{2\sqrt{2}E^2} x \right)^2 \right] \right\}. \quad (167)$$

O emaranhamento de formação é calculado em termos da concorrência, obtida através dos autovalores da matriz

$$\begin{aligned} &\rho_\alpha(x) \tilde{\rho}_\alpha(x) \\ \tilde{\rho}_\alpha(x) &= (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_\alpha^*(x) (\sigma_y \otimes \sigma_y). \end{aligned}$$

O operador  $\rho_\alpha(x)\tilde{\rho}_\alpha(x)$  possui apenas dois autovalores não nulos:

$$\begin{aligned}\lambda_1(x) &= |U_{\alpha 1}U_{\alpha 2}|^2 (1 + |f_{12}|)^2, \\ \lambda_2(x) &= |U_{\alpha 1}U_{\alpha 2}|^2 (1 - |f_{12}|)^2,\end{aligned}\tag{168}$$

com os quais calculamos a concorrência  $C_\alpha(x) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\}$ :

$$C_\alpha(x) = 2 |U_{\alpha 1}U_{\alpha 2}| |f_{12}(x)| = \frac{\sin(2\theta)}{2} e^{-\left[\frac{\sigma_p^2 \Delta m_{21}^2}{2\sqrt{2}E^2} x\right]^2}.\tag{169}$$

O emaranhamento de formação é obtido em termos da concorrência com as fórmulas:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(C) &= h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \\ h(x) &= -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x).\end{aligned}$$

Na figura (15) apresentamos o gráfico do emaranhamento de formação e da negatividade logarítmica em função do parâmetro adimensional  $\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} x$ . Durante a evolução do estado em  $x$  o emaranhamento entre os dois modos de massa diminui gradualmente, atingindo o valor nulo em determinada escala. Esta escala corresponde à mesma escala na qual a probabilidade de sobrevivência do estado, inicialmente puro, torna-se constante, indicando que há uma relação entre a perda de emaranhamento e essa característica da probabilidade de sobrevivência no formalismo de pacotes de ondas. Diferente da probabilidade de sobrevivência, nenhum dos quantificadores de emaranhamento apresentam caráter oscilatório pois esses quantificadores dependem apenas do módulo da função  $f_{12}(x)$ , eliminando quaisquer características oscilatórias.

### 5.2.2 Discórdia quântica e informação mútua para dois sabores

É natural perguntar nesse ponto se o único tipo de correlação entre os estados de massa é o emaranhamento. A discórdia quântica e a informação mútua quantificam, respectivamente, as correlações quânticas e todas as correlações entre dois subsistemas.

A informação mútua  $\mathcal{I}(x)$  é calculada em termos das entropias de von-Neumann de cada um dos subsistemas e da entropia do sistema conjunto<sup>3</sup>. Para o estado de sabor  $\rho_\alpha(x)$  de

---

<sup>3</sup>vide equação 54 do capítulo 2.

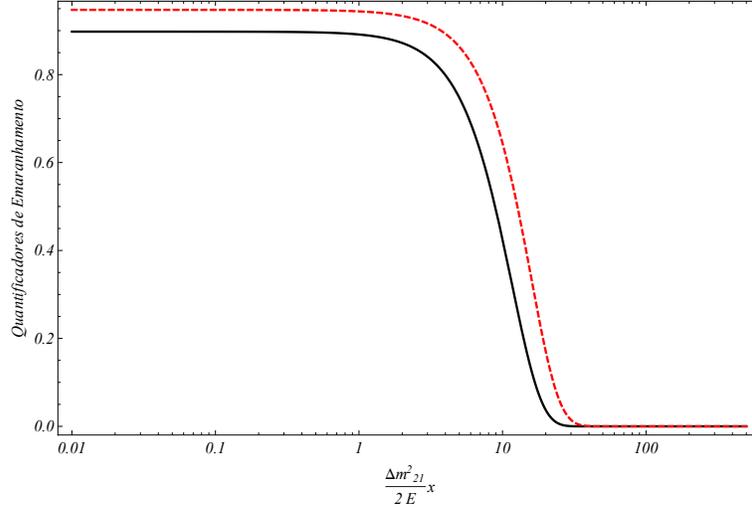


Figura 14: Emaranhamento de formação (linha contínua) e negatividade logarítmica (linha tracejada) em função do parâmetro adimensional  $\frac{\Delta m_{21}^2 x}{2E}$  para o caso de dois sabores. Neste gráfico foi utilizado o ângulo de mistura  $\sin^2(\theta) = 0.306$  e  $\frac{\sigma_p}{E} = 1$ . Durante sua evolução em  $x$  o estado perde gradativamente o emaranhamento que tende a zero para a mesma escala na qual a probabilidade de sobrevivência se torna constante, em outras palavras, a evolução livre do estado introduz descoerência entre os subsistemas.

interesse a informação mútua é:

$$\mathcal{I}_\alpha(x) = S[\rho_\alpha^{\{1\}}] + S[\rho_\alpha^{\{2\}}] - S[\rho_\alpha], \quad (170)$$

com  $\rho_\alpha^{\{1\}} = Tr_2[\rho_\alpha]$  e  $\rho_\alpha^{\{2\}} = Tr_1[\rho_\alpha]$ .

O cálculo da discórdia quântica  $\mathcal{D}$  é mais complexo, exigindo o cálculo da entropia do sistema após realizada uma medida não seletiva em um dos subsistemas:

$$\mathcal{D}_\alpha(x) = S[\rho_{\alpha,1}] + \sum_{k=1}^2 p_k S[\rho_{2||k}] - S[\rho_\alpha]. \quad (171)$$

A medida não seletiva no subsistema 2 será parametrizada em termos de projetores  $\Pi_k$  no espaço referente a esse subsistema:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= I \otimes |0\rangle\langle 0| = |10\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 00|, \\ \Pi_2 &= I \otimes |1\rangle\langle 1| = |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 01|, \end{aligned} \quad (172)$$

com as probabilidades  $p_k$  dadas por

$$p_k = \text{Tr}[\Pi_k \rho_\alpha]. \quad (173)$$

A matriz densidade obtida após a medida parametrizada pelos projetores será:

$$\rho_{2||k} = \frac{\text{Tr}_1[\Pi_k \rho_\alpha \Pi_k]}{\text{Tr}[\Pi_k \rho_\alpha]}. \quad (174)$$

Os gráficos da discórdia quântica e da informação mútua são apresentados na figura (16) em função de  $\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}x$  para um estado inicialmente eletrônico. Assim como no caso do emaranhamento, as correlações quânticas se anulam acima de determinada escala de coerência, ainda persistindo outras correlações como é indicado pelo gráfico da informação mútua.

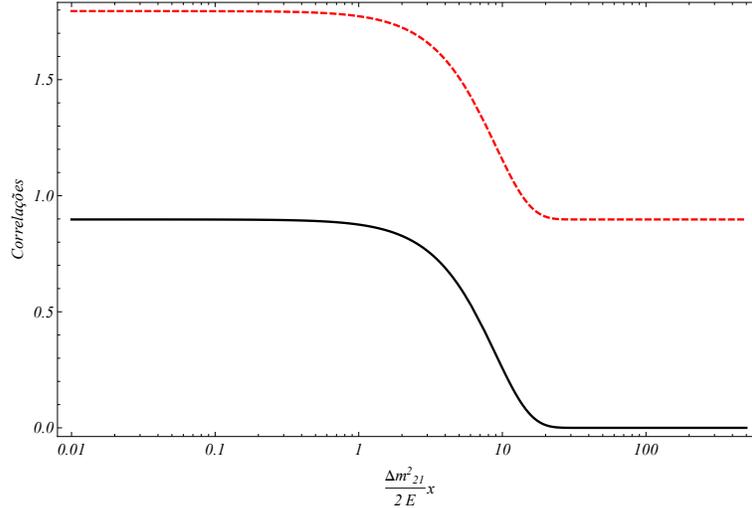


Figura 15: Discórdia quântica (linha contínua) e informação mútua (linha tracejada) entre os dois estados de massa para um estado inicialmente de sabor eletrônico em função de  $\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}x$ . Utilizamos o ângulo de mistura  $\theta = \theta_{12}$  igual ao dos demais gráficos apresentados e  $\frac{\sigma_p}{E} = 1$ . A discórdia quântica se anula acima de determinada escala, indicando que não há mais correlações quânticas entre os dois subsistemas, entretanto, a informação mútua se mantém constante havendo correlações de outros tipos.

Como escolhemos dois projetores bem específicos para o cálculo da discórdia, quantificamos as correlações quânticas entre os dois subsistemas se forem realizadas medidas parametrizadas por esses projetores. Tal cálculo não corresponde ao máximo das correlações quânticas

que é obtido através de um processo de extremização sobre todos os possíveis projetores no espaço. O resultado apresentado, entretanto, ilustra que as correlações quânticas também se anulam na mesma escala do emaranhamento de formação e da negatividade logarítmica, que correspondem à escala de coerência entre os pacotes de ondas.

### 5.3 Emaranhamento e correlações entre três estados de massa

Na seção anterior apresentamos os cálculos para o caso de apenas dois sabores. O caso mais real, entretanto, consiste em uma superposição de três modos de massa. Nesse caso, um estado de sabor pertence a um espaço de Hilbert composto de três espaços de dimensão dois, de maneira semelhante ao de dois sabores, mas cada estado de massa, nesse caso, é relacionado a um estado de três *qubits* [7]:

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = |100\rangle \\ |\nu_2\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = |010\rangle \\ |\nu_3\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle = |001\rangle. \end{aligned} \tag{175}$$

Neste caso mais complexo sempre iremos estudar uma bipartição do sistema e descreveremos o grau de emaranhamento e correlações entre dois subsistemas. Assim como no caso anterior, o estado inicialmente puro  $\rho_\alpha(x)$  irá evoluir para uma mistura. A pureza  $\kappa_\alpha(x)$  será:

$$\kappa_\alpha(x) = 1 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 2 |U_{\alpha i} U_{\alpha j}|^2 [1 - |f_{ij}(x)|^2], \tag{176}$$

com  $f_{ij}(x)$  dada por (158). O gráfico da pureza é apresentado na figura (16) para os três sabores. Assim como no caso de dois sabores, estados inicialmente puros tornam-se misturas de grau dependente dos parâmetros de mistura e, portanto, a entropia de von Neumann não irá quantificar emaranhamento entre dois subsistemas deste estado.

O cálculo do emaranhamento e de correlações entre os estados de massa fornece informações acerca da escala de coerência entre os subsistemas que compõe dado estado de sabor. Calcularemos, então, a negatividade logarítmica, o emaranhamento de formação, a discórdia associada a determinado conjunto de projetores e a informação mútua entre diferentes bipartições de um estado de sabor.

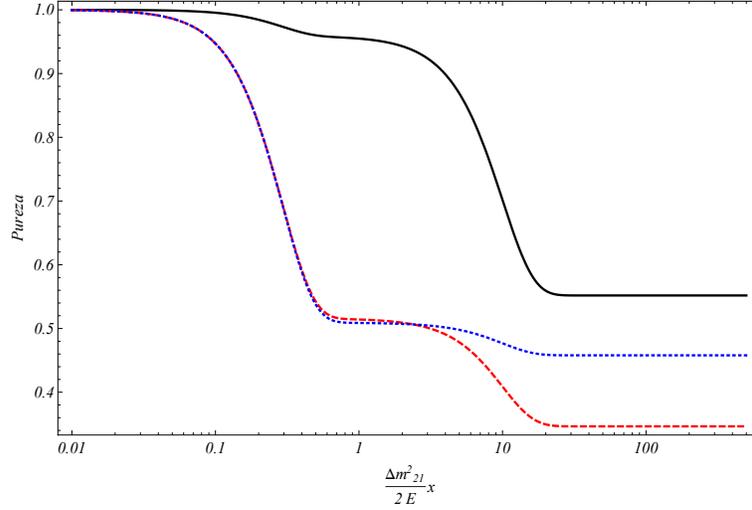


Figura 16: Pureza quântica (176) para sabores inicialmente eletrônico (linha contínua), muônico (linha tracejada) e taônico (linha pontilhada) em função de  $\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}x$ . Os valores dos ângulos de mistura e das diferenças quadráticas de massa estão em correspondência com os valores fenomenológicos apresentados no capítulo 3, a fase de violação  $CP$  é adotada nula e  $\frac{\sigma_p}{E} = 1$ . Os estados inicialmente puros tornam-se uma mistura gerada pelo decréscimo das funções  $f_{ij}(x)$ , com grau final determinado pelos valores dos ângulos de mistura.

### 5.3.1 Quantificadores de emaranhamento

Dado um estado de sabor  $\rho_\alpha(x)$ , calculamos a negatividade logarítmica de uma bipartição  $\{i, j; k\}$  através dos autovalores da matriz  $\tilde{\rho}_\alpha^{i,j;k}$  obtida pela transposição parcial com relação ao modo  $k$  do operador original [7]. A negatividade logarítmica desta bipartição  $E_{\mathcal{N},\alpha}^{\{i,j;k\}}$ , neste caso, quantificará o emaranhamento entre o modo  $k$  e o subsistema composto pelos modos  $i$  e  $j$ , com  $i, j, k = 1, 2, 3$ , e é dada por:

$$E_{\mathcal{N},\alpha}^{\{i,j;k\}}(x) = \log_2[1 + 2 |U_{\alpha k}| \sqrt{|U_{\alpha i}|^2 |f_{ki}(x)|^2 + |U_{\alpha j}|^2 |f_{kj}(x)|^2}]. \quad (177)$$

Definimos a negatividade logarítmica média  $\bar{E}_{\mathcal{N},\alpha}$  associada a um sabor como a média simples das negatividades sobre todas as possíveis bipartições [7]:

$$\bar{E}_{\mathcal{N},\alpha}(x) = \frac{1}{3}[E_{\mathcal{N},\alpha}^{\{1;2,3\}}(x) + E_{\mathcal{N},\alpha}^{\{2;1,3\}}(x) + E_{\mathcal{N},\alpha}^{\{3;1,2\}}(x)], \quad (178)$$

que será utilizada para quantificar a negatividade logarítmica total associada a um sabor  $\alpha$ .

O emaranhamento de formação não possui fórmula para o caso de três *qubits* e, além disso, estamos interessados em determinar emaranhamento entre dois modos específicos  $i$  e  $j$ . Isso pode ser feito através do emaranhamento de formação de uma bipartição  $\rho_\alpha^{\{i,j\}} = Tr_k[\rho_\alpha]$  calculado em termos da concorrência associada a essa bipartição  $C_\alpha^{\{i,j\}} = C[\rho_\alpha^{\{i,j\}}]$  que possui forma semelhante à concorrência para dois modos de massa (169):

$$C_\alpha^{\{i,j\}} = 2 | U_{\alpha i} U_{\alpha j} || f_{ij}(x) | . \quad (179)$$

O emaranhamento de formação de uma bipartição  $E_\alpha^{\{i,j;k\}}$  é calculado através das fórmulas (170). Assim como a negatividade logarítmica, definimos o emaranhamento médio associado a determinado sabor como:

$$\bar{E}_\alpha(x) = \frac{1}{3} [E_\alpha^{\{1;2,3\}}(x) + E_\alpha^{\{2;1,3\}}(x) + E_\alpha^{\{3;1,2\}}(x)]. \quad (180)$$

Na figura (17) apresentamos os gráficos da negatividade logarítmica média, do emaranhamento de formação médio e da probabilidade de sobrevivência (155) para os três sabores  $e$ ,  $\mu$  e  $\tau$ . Ambos os quantificadores de emaranhamento se anulam para uma escala acima de  $\sim 40 \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}$ , mesma escala para qual a probabilidade de sobrevivência se torna constante, deixando claro a relação entre o fenômeno de oscilação de sabor e o emaranhamento entre os modos de massa. Esse resultado também indica uma possível relação entre probabilidade de sobrevivência e emaranhamento que será investigada nas próximas seções.

### 5.3.2 Correlações quânticas e totais

Uma vez investigado o emaranhamento, quantificado em termos da negatividade logarítmica e do emaranhamento de formação, é interessante investigar outras correlações, como foi feito para o caso da superposição de dois modos de massa.

A informação mútua entre dois modos de massa  $\mathcal{I}_\alpha^{\{i,j\}}$  que compõe a superposição  $\rho_\alpha(x)$  é obtida através do operador densidade reduzido ao espaço associado a estes dois modos específicos  $\rho_\alpha^{\{i,j\}} = Tr_k[\rho_\alpha]$ :

$$\mathcal{I}_\alpha^{\{i,j\}} = S[\rho_\alpha^{\{i\}}] + S[\rho_\alpha^{\{j\}}] - S[\rho_\alpha^{\{i,j\}}], \quad (181)$$

com  $S[\rho_\alpha^{\{i\}}]$  correspondendo a entropia de von-Neumann do operador densidade reduzido ao modo  $i$ ,  $\rho_\alpha^{\{i\}} = \text{Tr}_j[\rho_\alpha^{\{i,j\}}]$ . Esta quantidade fornecerá todas as correlações (clássicas e quânticas) entre dois modos de massa  $i$  e  $j$ .

A discórdia quântica quantifica as correlações quânticas entre dois subsistemas, dada medida não seletiva efetuada em um dos subsistemas. No presente caso, calcularemos a discórdia entre dois modos de massa,  $\mathcal{D}_\alpha^{\{i,j\}}$ , dada por:

$$\mathcal{D}_\alpha^{\{i,j\}} = S[\rho_\alpha^{\{i\}}] + \sum_{l=1}^2 p_l S[\rho_{j||l}] - S[\rho_\alpha^{\{i,j\}}] \quad (182)$$

sendo, de maneira semelhante à (173, 174):

$$\begin{aligned} p_l &= \text{Tr}[\Pi_l \rho_\alpha^{\{i,j\}}], \\ \rho_{j||l} &= \frac{\Pi_l \rho_\alpha^{\{i,j\}} \Pi_l}{\text{Tr}[\Pi_l \rho_\alpha^{\{i,j\}}]}. \end{aligned} \quad (183)$$

Assim como no caso de dois sabores, a discórdia calculada é associada a medidas parametrizadas pelos projetores no modo  $j$ :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= I \otimes |0\rangle\langle 0| + |10\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 00|, \\ \Pi_2 &= I \otimes |1\rangle\langle 1| + |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 01|. \end{aligned} \quad (184)$$

Assim como no caso dos quantificadores de emaranhamento, definimos a informação mútua média  $\bar{\mathcal{I}}_\alpha$  e a discórdia quântica média  $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$  associadas a um sabor  $\alpha$  como a média sobre todas as bipartições possíveis:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}_\alpha &= \frac{1}{3}[\mathcal{I}_\alpha^{\{1,2\}} + \mathcal{I}_\alpha^{\{1,3\}} + \mathcal{I}_\alpha^{\{2,3\}}], \\ \bar{\mathcal{D}}_\alpha &= \frac{1}{3}[\mathcal{D}_\alpha^{\{1,2\}} + \mathcal{D}_\alpha^{\{1,3\}} + \mathcal{D}_\alpha^{\{2,3\}}], \end{aligned} \quad (185)$$

que, assim como os quantificadores de emaranhamento médios, quantificam, respectivamente, as correlações totais e quânticas associadas a cada sabor.

Os cálculos dessas duas quantidades são análogos ao caso de dois sabores, reduzindo-se ao cálculo de entropias associadas a cada um dos operadores reduzidos indicados. Na figura (18) apresentamos os gráficos da informação mútua, da discórdia e da probabilidade de

sobrevivência do estado para cada um dos três sabores. A discórdia quântica se anula na mesma escala em que os quantificadores de emaranhamento e na qual as probabilidades de sobrevivência se tornam constantes, indicando que acima desta escala não há mais correlações quânticas. A informação mútua não se anula, mas torna-se constante acima da mesma escala, logo, ainda há correlações de natureza não quântica entre os modos de massa.

#### 5.4 Relação fenomenológica entre probabilidade de sobrevivência e correlações entre os estados de massa

Os resultados apresentados nas figuras (17, 18) indicam uma possível relação entre probabilidade de sobrevivência e correlações. Entretanto, como todos os quantificadores calculados dependem de  $|f_{ij}(x)|$  é impossível escrever a probabilidade de sobrevivência apenas em termos deles. Iremos investigar de maneira fenomenológica para que situações a relação entre probabilidade de sobrevivência e os quantificadores de emaranhamento é máxima visando determinar quantitativamente a relação entre as duas quantidades.

À exceção da negatividade logarítmica, todos os quantificadores de emaranhamento apresentados são dados em termos de entropia. O emaranhamento de formação, por exemplo, é obtido através de um processo de extremização de entropias associadas a possíveis decomposições de estados mistos. Sendo assim, podemos introduzir um *ansatz* para associar uma densidade de estados  $\Omega_S$  a dado quantificador de correlação  $\Delta S$  como

$$\Omega_S = e^{\Delta S}, \quad (186)$$

com  $\Delta S$  o emaranhamento de formação, a negatividade logarítmica, a discórdia quântica ou a informação mútua.

Dos gráficos apresentados em (17,18) concluímos que deve haver alguma relação entre a variação da probabilidade. Iremos supor que essa relação se dá através da densidade de estados definida pelo *ansatz* da relação (186):

$$\chi_S = \frac{d}{dx}[P_\alpha(x) - e^{\Delta S_\alpha}]. \quad (187)$$

A relação acima apresentada depende explicitamente da coordenada  $x$  que parametriza a evolução do estado, dos parâmetros de mistura e da largura  $\sigma_p$  das distribuições de *momentum* dos autoestados de massa.

A largura  $\sigma_p$  do pacote de ondas é intimamente relacionada ao processo de produção do estado inicial [12]. Torna-se interessante, então, determinar para que valores de  $\sigma_p$  ou, equivalentemente, de  $\sigma_p/E$  a relação entre probabilidade de sobrevivência e dado quantificador de emaranhamento é máxima, ou seja, para qual (187) é mínimo. Se as duas quantidades são, para dada largura de pacote de ondas, máxima, o estudo da probabilidade de sobrevivência é equivalente ao estudo das correlações entre os estados de massa, em outras palavras, as duas quantidades serão relacionadas. Como os diferentes quantificadores de emaranhamento e correlações apresentados geram diferentes resultados, conforme podemos ver nas figuras (17, 18), o cálculo supracitado é importante para determinar o quantificador de correlação mais adequado a cada processo de produção ou a cada *setup* experimental.

Para cada valor de  $\sigma_p/E$  a quantidade  $\chi_S$  possui valores dependentes da posição, sendo assim, definimos o desvio padrão médio dessa grandeza  $\Delta\chi$  como o desvio padrão relativo à posição:

$$\Delta\chi_S(\sigma_p) = \sqrt{|\langle\chi_S^2\rangle_x - \langle\chi_S\rangle_x^2|}, \quad (188)$$

com  $\langle\rangle_x$  indicando a média em todos os valores de  $x$ , por exemplo:

$$\langle\chi_S\rangle = \int dx \chi_S. \quad (189)$$

A relação entre a probabilidade de sobrevivência e dado quantificador de emaranhamento será máxima quando o desvio padrão acima definido é mínimo, nessa situação o estudo do quantificador  $\Delta\mathcal{S}$  está correlacionado ao estudo da probabilidade de sobrevivência.

Na figura 19 apresentamos os gráficos de  $\Delta\chi_S$  calculado para os dois quantificadores de emaranhamento utilizados na seção anterior, a negatividade logarítmica média e o emaranhamento de formação médio, para cada um dos três sabores. Podemos ver o comportamento da quantidade que apresenta mínimos pronunciados, indicando que apenas para determinados valores de  $\sigma_p/E$  a relação entre os valores médios da probabilidade de sobrevivência e

emaranhamento, dada em termos de (187), é máxima.

Nos gráficos apresentados na figura 20 apresentamos  $\Delta\chi_S$  calculado para a discórdia quântica média e para a informação mútua média. Assim como para o caso dos quantificadores de emaranhamento, apenas para determinados valores de  $\sigma_p$  a relação entre probabilidade de sobrevivência e essas correlações é máxima, indicando que apenas em determinadas situações é adequado falar em relação entre as duas quantidades.

Em todos os resultados apresentados utilizamos valor nulo para a fase de violação  $CP$ . Tal suposição não iria mudar a escala de coerência obtida através dos quantificadores de emaranhamento<sup>4</sup> e nem os resultados apresentados para a relação entre probabilidade de sobrevivência e as correlações entre os modos de massa.

---

<sup>4</sup>Em [7] o autor calcula a negatividade logarítmica para os estados de sabor levando em conta uma fase de violação  $CP$ , não havendo mudança qualitativa na forma dos gráficos e nem na escala de coerência obtida.

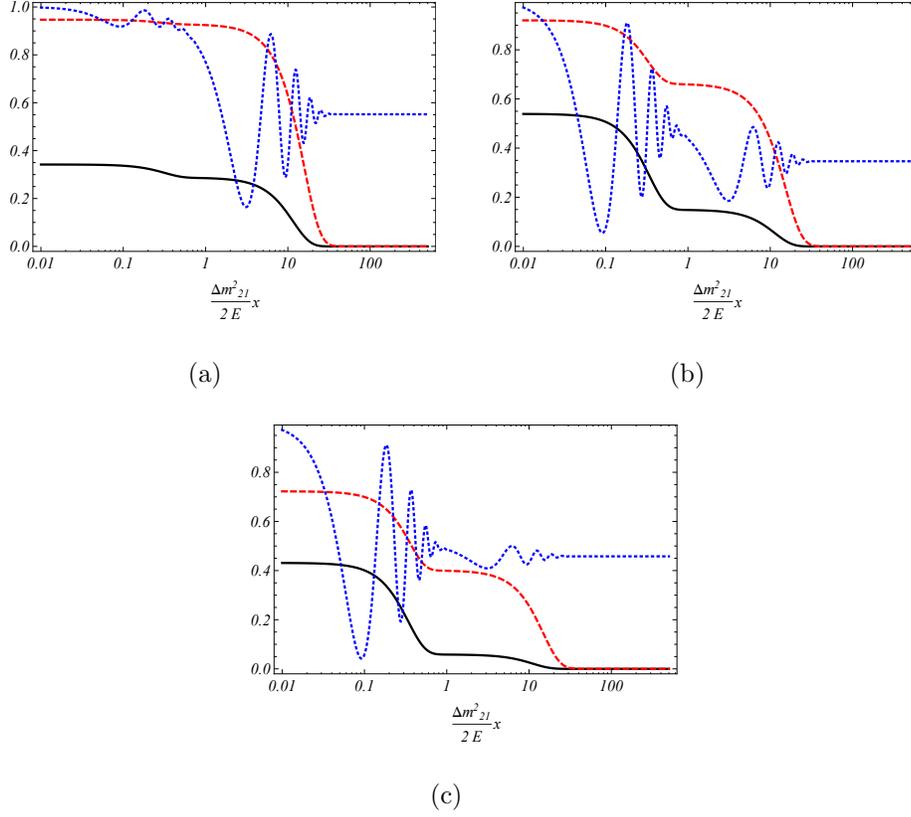


Figura 17: Probabilidades de sobrevivência (linha pontilhada), emaranhamento de formação médio (linha contínua) e negatividade logarítmica média [7] (linha tracejada) para estados inicialmente eletrônicos (a), muônicos (b) e taônicos (c). Os valores dos ângulos de mistura e das diferenças quadráticas de massa estão em correspondência com os valores utilizados no gráfico da figura 16, utilizou-se  $\frac{\sigma_p}{E} = 1$  e a fase de violação  $CP$  nula. Ambos os quantificadores de emaranhamento se anulam acima da escala  $\sim 40 \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}$ , mesma escala para qual a probabilidade de sobrevivência tende à uma constante, indicando que a escala de coerência é a mesma em ambos os casos e que pode haver algum tipo de relação entre emaranhamento e probabilidade de sobrevivência.

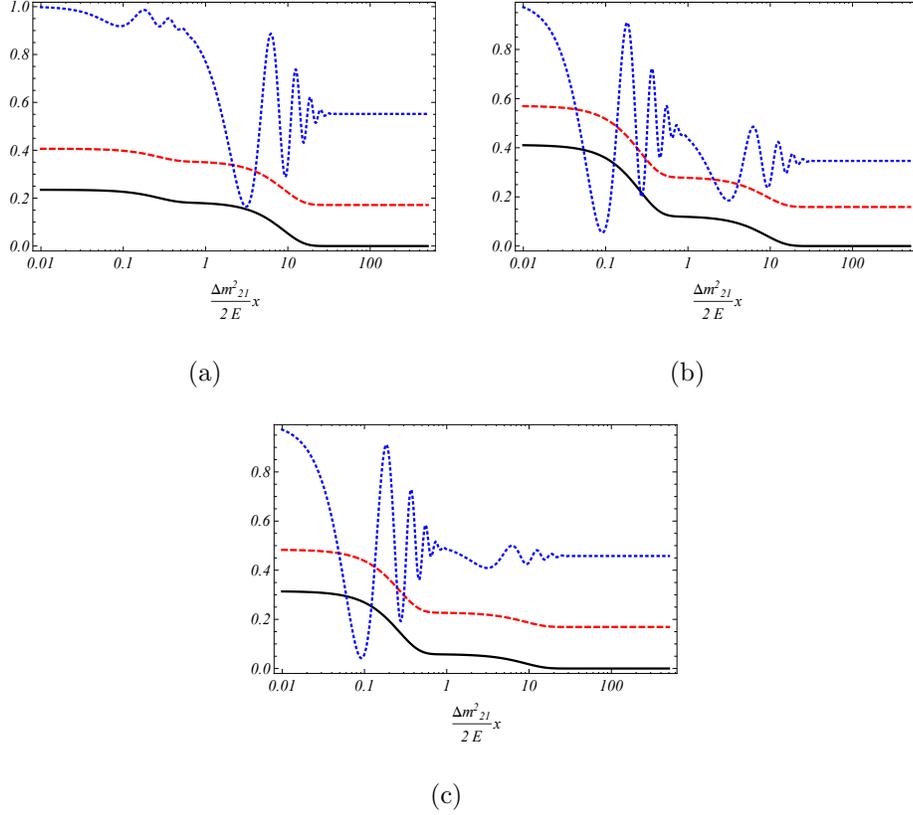


Figura 18: Probabilidades de sobrevivência (linha pontilhada), discórdia quântica média (linha contínua) e informação mútua média (linha tracejada) para estados inicialmente eletrônicos (a), muônicos (b) e taônicos (c). Os valores dos ângulos de mistura e das diferenças quadráticas de massa estão em correspondência com os demais gráficos deste capítulo, utilizou-se  $\frac{\sigma_P}{E} = 1$  e a fase de violação  $CP$  nula. A discórdia quântica anula-se acima da escala  $\sim 40 \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}$  indicando que, nessa região, não há mais correlações quânticas. Por outro lado, a informação mútua não se anula, mas tende a uma constante acima da mesma escala, logo, há apenas correlações clássicas entre os modos de massa nesse limite.

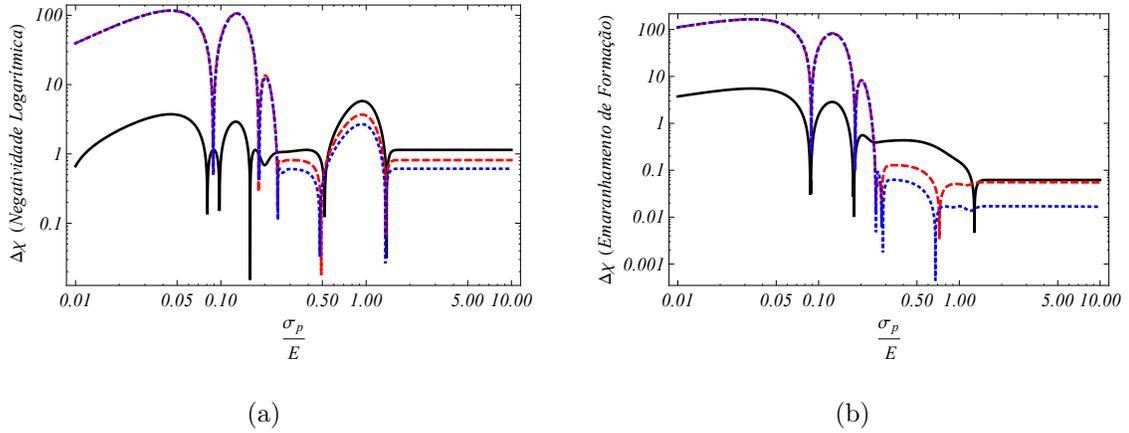


Figura 19: Relação entre probabilidade de sobrevivência e negatividade logarítmica média (a) e emaranhamento de formação média (b), dada em termos de (188), em função de  $\frac{\sigma_p}{E}$  para estados eletrônicos (linha contínua), muônicos (linha tracejada) e taônicos (linhas pontilhada). Os parâmetros de mistura utilizados estão em correspondência com os valores utilizados nos outros gráficos deste capítulo e supôs-se a fase de violação  $CP$  nula. Apenas para alguns valores da largura do pacote de ondas a relação entre emaranhamento e probabilidade de sobrevivência é máxima, no caso dos resultados apresentados na seção anterior  $\sigma_p/\bar{E} = 1$  e, graficamente, vemos que a relação entre as duas quantidades é grande corroborando a afirmação apresentada de que a escala de coerência é da mesma ordem que a escala acima da qual a probabilidade torna-se constante.

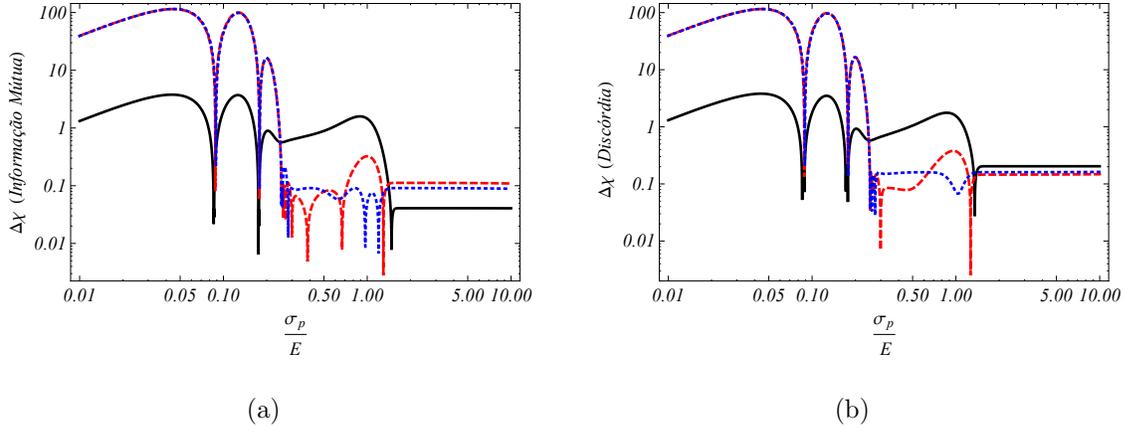


Figura 20: Relação entre probabilidade de sobrevivência e informação mútua média (a) e discórdia quântica média (b), dada em termos de (188), em função de  $\frac{\sigma_p}{E}$  para estados eletrônicos (linha contínua), muônicos (linha tracejada) e taônicos (linhas pontilhada). Os parâmetros de mistura utilizados estão em correspondência com os valores utilizados nos outros gráficos deste capítulo e supôs-se a fase de violação  $CP$  nula. Assim como no caso dos quantificadores de emaranhamento, apenas para alguns valores da largura do pacote de ondas a relação entre essas correlações e probabilidade de sobrevivência é máxima. No caso dos resultados apresentados na seção anterior  $\sigma_p/E = 1$  e, graficamente, vemos que a relação entre as duas quantidades é grande corroborando a afirmação apresentada de que a escala de coerência é da mesma ordem que a escala acima da qual a probabilidade torna-se constante.

## 6 Conclusões

Neste trabalho exploramos dois aspectos comumente associados à teoria da informação: a teoria generalizada das medidas quânticas e o cálculo da quantidade de emaranhamento e correlações entre subsistemas, em dois cenários específicos da física de neutrinos, no cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos e a determinação da relação entre probabilidade de sobrevivência e correlações entre autoestados de massa na segundo pacotes de ondas. Em ambos os cenários, a utilização dos conceitos supracitados proporciona um novo ponto de vista a questões associadas ao fenômeno da oscilação quântica de sabores, intrínseco à descrição padrão da propagação livre de estados de sabores.

A teoria geral das medidas quânticas foi utilizada para elucidar uma ambiguidade presente no cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos que pode ser calculada através da definição de uma massa efetiva associada a um estado de sabor ou diretamente através dos autovalores de energia dos autoestados de massa. Esses diferentes procedimentos geram diferentes resultados e influenciam o valor da massa dos neutrinos obtido através de dados cosmológicos. A teoria generalizada das medidas quânticas foi utilizada para entender melhor esta ambiguidade através da definição de energia média, associada a uma medida seletiva de sabor, e energia ponderada, associada a uma medida não seletiva de sabor. Mostramos que o estudo destes processos de medida a sua associação com energias médias e ponderadas fornece diversos procedimentos para o cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos e quantificamos a influência da utilização destes procedimentos na densidade de energia normalizada dos neutrinos cosmológicos  $\Omega_\nu$ , e na predição da massa dos neutrinos [38]. O resultado mais importante desta primeira parte é que todos os procedimentos reproduzem exatamente o mesmo resultado no caso específico dos neutrinos desacoplados serem uma mistura maximal de sabor. Enfatizamos que o procedimento mais adequado para o cálculo da densidade de energia só pode ser determinado uma vez que o processo de medida associado à fenomenologia tenha sido determinado, de modo que a nossa análise não fornece a resposta definitiva para qual energia deve ser utilizada para determinar o limite de massa dos neutrinos cosmológicos.

O cálculo correto da densidade de energia dos neutrinos cosmológicos influencia a caracte-

rização dos neutrinos como matéria escura quente ou fria, modificando o espectro de potências da matéria, importante no estudo do crescimento de estruturas de larga escala [47]. A expressão para a massa efetiva pode mudar sensivelmente a caracterização do tipo de matéria escura, sendo um aspecto relevante que deve ser incluído em procedimentos para a determinação da densidade de energia normalizada em épocas próximas ao presente. Neste cenário, os resultados apresentados no capítulo 4 proporcionam condições para entender melhor os fundamentos da mecânica quântica por trás de procedimentos de determinação de massas efetivas, levando a previsões fenomenológicas mais precisas em análises na qual a massa cosmológica dos neutrinos é considerada.

Outro aspecto que abordamos foi a propagação livre de estados de sabores no formalismo de pacotes de ondas. Visando determinar a escala de amortecimento das oscilações das probabilidades de sobrevivência, foram calculados dois quantificadores de emaranhamento, a negatividade logarítmica e o emaranhamento de formação, e quantificadores de correlações quânticas e totais, a discórdia quântica e a informação mútua, entre dois modos de massa que compõem um estado de sabor. Os resultados apresentados nas figuras (17) e (18) indicam que a escala de coerência obtida através dos quantificadores de emaranhamento e de correlação médios coincidem com a escala para a qual a probabilidade de sobrevivência tende à uma constante motivando-nos à estudar mais a fundo a possível relação quantitativa entre probabilidade de sobrevivência e correlações entre os modos de massa. Associando a probabilidade de sobrevivência à exponencial dos quantificadores estudados, determinamos a correlação entre as duas quantidades em função da largura do pacote de ondas. Nossa análise revelou que a relação entre a probabilidade de sobrevivência e os quantificadores de correlação é máxima apenas para determinados valores da largura do pacote de ondas, constituindo o segundo resultado definitivo deste trabalho.

A descrição do estado de sabor como uma superposição quântica de estados de massa gera as oscilações presentes na probabilidade de sobrevivência bem como as correlações entre os modos de massa. Nossos resultados estabelecem do ponto de vista fenomenológico a relação entre os dois fenômenos no contexto do formalismo de pacotes de ondas, amplamente utilizado

na análise da propagação livre de estados de sabores [12, 19, 20, 21, 42, 43, 44, 45]. Análises envolvendo emaranhamento ou correlações entre os modos de massa que compõe um estado de sabor devem levar em conta a largura das distribuições de *momentum*, intimamente ligadas à características específicas da fonte produtora de neutrinos.

Ressaltamos algumas limitações dos resultados apresentados nessa dissertação. Com relação a primeira parte, como já comentado, não foi estabelecido o procedimento único para o cálculo da densidade de energia dos neutrinos cosmológico, é necessário determinar o processo de medida associado à fenomenologia adotada. Na segunda parte adotamos distribuições Gaussianas de *momentum* para os estados de massa, essa aproximação facilita a álgebra e descreve bem a localização de pacotes de ondas, entretanto outras distribuições de *momentum* podem ser exploradas de modo a se verificar sua influência nas correlações e nas probabilidades de transição. Ressaltamos que todos os problemas abordados neste trabalho são aproximações para o fenômeno da oscilação quântica de sabores, tratada aproximadamente no *framework* da mecânica quântica padrão. A descrição mais completa da propagação de estados de sabores é dada pela teoria quântica de campos [46].

## Referências

- [1] A. Bertlmann, Lect.Notes Phys. **689** (2006) 1-45.
- [2] H. Nyquist, *Certain Factors Affecting Telegraph Speed*, Journal of the A. I. E. E., **23** (1924) 124.
- [3] R. V. L. Hartley, *Transmission of Information*, The Bell System Technical Journal, **7**(1928) 535 - 563.
- [4] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal, **27** (1948) 623 - 656.
- [5] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [6] E. Martín-Martínez and N. C. Menicucci, Class. Quantum Grav. **29** (2012).
- [7] M. Blasone, F. Dell'Anno, S. De Siena, M. Di Mauro and F. Illuminati, Phys. Rev. D **77**, 096002 (2008).
- [8] M. Blasone, F. Dell'Anno, S. De Siena and F. Illuminati, EPL **85**, 50002 (2009).
- [9] M. R. Dowling, A. C. Doherty and H. M. Wiseman, Phys. Rev. A **73**, 052323 (2006).
- [10] V. B. Braginsky, F. Ya. Khalili, *Quantum Measurement* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [11] H. P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, New York, 2002).
- [12] C. Giunti, C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press Inc., New York, 2007).
- [13] W. C. Haxton, *The Solar Neutrino Problem*, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **33** (1995) 459-503.

- [14] B. Pontecorvo, *Mesonium and anti-mesonium*, Sov. Phys. JETP **B 6** (1957).
- [15] M. Gell-Mann and A. Pais, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
- [16] S. Dodelson, *Modern Cosmology: Anisotropies and Inhomogeneities in the Universe*, (Academic Press, New York, 2003).
- [17] A. D. Dolgov, Phys. Rept. **370** (2002) 333.
- [18] A. E. Bernardini and E. L. D. Perico, JCAP **01** (2011) 10.
- [19] A. E. Bernardini and S. De Leo, Phys. Rev. D. **70**, 053010 (2004).
- [20] A. E. Bernardini and S. De Leo, Phys. Rev. D. **71**, 076008 (2005).
- [21] A. E. Bernardini, M. M. Guzzo and F. R. Torres, Eur. phys. J. C **48**, 613 - 623 (2006).
- [22] K. Huang, *Statistical Mechanics*, (John Wiley & Sons, New York, 1987).
- [23] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1413-1415.
- [24] W. K. Wootters, Quantum Information and Computation **1** (2001) 27-44.
- [25] G. Vidal and R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [26] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [27] L. Henderson and V. Vedral, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, (2001) 6899-6905.
- [28] H. Olliver and W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 1 (2002).
- [29] J. Lesgourgues and S. Pastor, Phys. Rep. **429**, 6 (2006) 307-379.
- [30] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo and A. M. Rotunno, Phys. Rev. D **84**, 053007 (2011).
- [31] P. F. Harrison, D. H. Perkins and W. G. Scott, Phys. Lett. B **530** (2002) 167-173.
- [32] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2011).

- [33] A. E. Bernardini, *Int. J. Mod. Phys.* **A25**, 1350065 (2013).
- [34] A. E. Bernardini, *EuroPhysics Lett.* **103**, 3 (2013).
- [35] G. M. Fuller and C. T. Kishimoto, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201303 (2009).
- [36] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 2010).
- [37] C. P.-Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **45** (1995) 7.
- [38] A. E. Bernardini and V. A. S. V. Bittencourt, *Astrop. Phys.* **41** (2013) 31-37.
- [39] G. Mangano et al., *Nucl. Phys. B* **729** 221 (2005) .
- [40] R. de Putter et al., arXiv:1201.1909 [astro-ph].
- [41] K. N. Abazajian et al., *Astrop. Phys.* **35** (2011) 177
- [42] B. Kayser, *Phys. Rev. D.* **24**, 110 (1981).
- [43] K. Kiers and N. Weiss, *Phys. Rev. D* **24**, 4318 (1998).
- [44] Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai and T. Yamazaki, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 471 (2001).
- [45] C. Giunti and C. W. Kim, *Phys. Rev. D* **58**, 017301 (1998).
- [46] A. E. Bernardini, M. M. Guzzo and C. C. Nishi, *Fortsch. Phys.* 59:372, (2011).
- [47] A. E. Bernardini and E. L. D. Perico, *JCAP* **06** (2011) 001.