UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estabilidade Dinâmica para Sistemas Quânticos Dependentes do Tempo

Mariza Stefanello Simsen

São Carlos - SP

2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estabilidade Dinâmica para Sistemas Quânticos Dependentes do Tempo

Mariza Stefanello Simsen

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Matemática, área de concentração: Matemática Aplicada

São Carlos - SP

Outubro de 2006

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

S614ed

Simsen, Mariza Stefanello.
Estabilidade dinâmica para sistemas quânticos dependentes do tempo / Mariza Stefanello Simsen. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
123 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Análise matemática. 2. Análise funcional. 3. Estabilidade. 4. Teoria espectral (Matemática). 5. Schrödinger, operadores de I. Título.

CDD: 515 (20ª)

.

Orientador

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

.

Banca Examinadora

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Prof. Dr. Mário Basílio de Matos

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Prof. Dr. Paulo Faria da Veiga

Prof. Dr. Pedro Paulo de Magalhães Rios

Dedico este trabalho ao meu marido Jacson.

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor César Rogério de Oliveira, por ter me dado oportunidade de realizar este trabalho, pela amizade e por ser exemplo de profissional a ser seguido, sempre atencioso, dedicado e paciente, que contribuiu muito com sua experiência, para o meu aprendizado.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos, que me incentivaram e acompanharam minha jornada, por todo amor, carinho que têm por mim, e que apesar da distância estiveram sempre presentes.

À Deus, por ter me dado saúde e força para enfrentar e superar as dificuldades e assim realizar este sonho.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFSCar e da UFSM, em especial, ao Marcus Vinícius de Araujo Lima pelas discusões e amizade, e ao João Batista Peneireiro que mais do que professor foi e continua sendo amigo.

Aos amigos Luiza, Francisco, Chiquinho, Kelly, Marcos, Tamara, Giuliano, Ivo, Josiane, Marcelo, Helena, Marciano e Gisele pela amizade e solidariedade nos momentos bons e nos difíceis.

Aos alunos do PPG-M pelo excelente ambiente de trabalho e amizade.

Ao Jacson, meu maravilhoso marido, por tudo.

As secretárias, Célia e Irma, por estarem sempre prontas a nos ajudar.

Resumo

Estudamos se um sistema dependente do tempo é dinamicamente estável ou instável, i.e., se o valor esperado de um observável positivo e discreto é uma função limitada do tempo ou não. Inicialmente consideramos propriedades topológicas das órbitas dos estados do sistema e como estas propriedades se relacionam com a estabilidade dinâmica. No caso de dependência temporal periódica apresentamos uma fórmula que permite decidir sobre a estabilidade conhecendo o comportamento dos elementos de matriz do resolvente do operador de Floquet em relação a uma determinada base do espaço de Hilbert. Finalmente, apresentamos um exemplo de operador de Floquet com espectro pontual puro e autofunções decaindo exponencialmente cujo sistema é dinamicamente instável.

Abstract

We study if a time-dependent system is either dynamically stable or unstable, i.e., if the expected value of a positive and discrete observable is a bounded function of time or not. Initially we consider topological properties of the orbits of the states of the system and how these properties are related to dynamical stability. In the case of periodic time dependence, we present a formula that allows one to decide about stability from the behavior of the matrix elements of the resolvent associated with the Floquet operator. Finally, we give an example of Floquet operator with purely point spectrum and exponentially decaying eigenfunctions and dynamical instability.

Sumário

Capítulo 0

Introdução

A evolução temporal dos estados de um sistema quântico com Hamiltoniana dependente do tempo é determinada pela equação de Schrödinger

$$i\frac{d\psi}{dt}(t) = H(t)\psi(t)$$

em que $H(t)$ é uma família de operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e $\psi(t) \in \mathcal{H}\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Sob condições adequadas em $H(t)$, como veremos no Capítulo 1, existe uma solução do problema de valor inicial $\psi(s) = \psi$: $\psi(t) = U(t,s)\psi$. Os propagadores, ou operadores de evolução temporal $U(t,s)$ formam uma família fortemente contínua de operadores unitários satisfazendo

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$$

$$U(t,t) = \mathrm{I_d} \quad \text{(operador identidade)}$$

para todo t, r, s.

Para estudar tais Hamiltonianas dependentes do tempo é comum considerar um espaço estendido $\mathcal{K} \doteq L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}, dt) \equiv L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H} \equiv \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H}$ de forma que a variável t passe a ser incorporada como variável espacial, e estudam-se as propriedades espectrais do operador auto-adjunto, formalmente dado por

$$K = -i\frac{d}{dt} + H(t)$$

agindo no espaço de Hilbert estendido $\mathcal{K}$. Tal operador é conhecido como operador quase-energia ("quasienergy"em inglês). Obtém-se assim a equação de Schrödinger estendida

$$i\frac{d\psi}{d\sigma} = K\psi$$

cuja solução é $\psi(\sigma) = e^{-i\sigma K}$ e como veremos no Capítulo 1, existe uma relação entre $e^{-i\sigma K}$ e os propagadores $U(t,s)$. O operador quase-energia K foi previamente definido para Hamiltonianas periódicas [34], [55], e então adaptado para Hamiltonianas $H(t) = H_0 + V(t)$ com $V(t) = V(\theta(t))$, em que $\theta(t)$ é uma trajetória de um sistema dinâmico invertível tendo uma medida ergódica invariante [42].

Neste trabalho estudaremos modelos cujas Hamiltonianas são da forma $H(t) = H_0 + V(t)$ em que H_0 é um operador auto-adjunto não-limitado em $\mathcal{H}$ e com espectro discreto, isto é, formado apenas por autovalores isolados de multiplicidade finita. A principal questão a ser investigada é: se $\psi_0 \in \text{dom } H_0$ e $\psi(t) = U(t,0)\psi_0$ é solução da equação de Schrödinger, como se comportam em t os valores

$$E^0_{\psi_0}(t) \doteq \langle \psi(t), H_0\psi(t)\rangle$$

e

$$E_{\psi_0}(t) \doteq \langle \psi(t), H(t)\psi(t)\rangle,$$

mais precisamente, $E^0_{\psi_0}(t)$ e $E_{\psi_0}(t)$ são funções limitadas de t? E se não forem limitadas como comportam-se quando $t \to \infty$? O fato do valor esperado da energia $E^0_{\psi_0}(t)$ ser uma função não-limitada de t corresponde a uma absorção ilimitada de energia pelo sistema não-perturbado sob a perturbação $V(t)$.

Motivado nesses modelos cuja Hamiltoniana pode ser posta da forma $H(t) = H_0 + V(t)$ é sugerido analisar o comportamento de uma "energia abstrata"ou "observável"que representaremos por um operador auto-adjunto, positivo, não-limitado e com espectro discreto $A : \text{dom } A \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $0 \le \lambda_n < \lambda_{n+1}$. Por simplicidade evitaremos algumas questões de domínio assumindo que se $\psi \in \text{dom } A$, então $U(t,0)\psi \in \text{dom } A \ \forall \ t \ge 0$, logo $E^A_\psi(t) \doteq \langle U(t,0)\psi, AU(t,0)\psi\rangle$ é finito para qualquer $t \geq 0$ fixado. Assim, no decorrer deste trabalho diremos que o sistema é A-dinamicamente estável quando $E_\psi^A(t)$ for uma função limitada de t, e A-dinamicamente instável caso contrário. Em geral usaremos apenas dinamicamente estável/instável. E quando o espectro do operador quase-energia K for pontual puro, diremos que o sistema é espectralmente estável, sendo espectralmente instável caso contrário.

Se a Hamiltoniana $H(t)$ é periódica no tempo com período T, ou seja, $H(t+T) = H(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então os propagadores têm as seguintes propriedades

$$U(t+T, s+T) = U(t,s) \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R}$$

$$U(t+nT, s) = U(t,s)[U(s+T,s)]^n \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Assim é suficiente conhecer $U(t,s)$ por um período $t \in [s, s+T]$, para qualquer s. Em particular $U_{\mathrm{F}}(s) \doteq U(s+T,s)$ é chamado de operador de Floquet em s ou operador de monodromia. Sabe-se que $U_{\mathrm{F}}(s_1)$ e $U_{\mathrm{F}}(s_2)$ para quaisquer $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ fixados são unitariamente equivalentes e portanto geralmente trabalha-se com o operador de Floquet $U_{\mathrm{F}} \doteq U_{\mathrm{F}}(0) = U(T,0)$. Outra propriedade interessante dos propagadores no caso periódico é que eles podem ser escritos da seguinte forma

$$U(t,0) = P(t)e^{-iGt}$$

em que G é um operador auto-adjunto e $P(t)$ são operadores unitários fortemente contínuos, T periódicos e satisfazem $P(0) = P(nT) = Id \ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

É conhecido que e^{-iTK} é unitariamente equivalente à $Id \otimes U(T,0)$ (Teorema 1.6). Assim, muitas vezes é equivalente estudar as propriedades espectrais de K ou U_{F}, e escolhe-se o mais apropriado em cada caso para decidir sobre a estabilidade ou instabilidade espectral. Para Hamiltonianas diferenciáveis, as propriedades espectrais são geralmente obtidas através do estudo do operador quase-energia K. No caso em que a Hamiltoniana é singular, entre outros, quando ela corresponde a um sistema kicked, freqüentemente trabalha-se diretamente com o operador de

Floquet, por ter-se uma expressão explícita. Em ambas as situações, estamos tipicamente confrontados com o problema em que um operador pontual puro, algumas vezes com espectro denso num intervalo, é perturbado ou pela adição de um operador auto-adjunto no primeiro caso, ou por uma perturbação unitária multiplicativa no segundo caso. Veja entre outros ([4], [26], [25], [31], [22], [33], [48], [38],[14]) para o caso diferenciável e ([13], [20], [7], [8], [9]) para o caso kicked. No caso diferenciável, quando um operador auto-adjunto com espectro pontual puro denso é perturbado pela adição de um operador auto-adjunto, geralmente é empregado um método, conhecido como método KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), para encontrar condições em que K tem espectro pontual puro. Tal método consiste em aplicar a $K = K_0 + V$, K_0 o operador com espectro pontual puro e denso e V a perturbação, uma seqüência infinita de transformações unitárias de forma que no s-ésimo passo

$$K_0 + V \simeq K_0 + G_s + V_s \quad \text{com } V_s = \mathcal{O}(\|V\|_{r-\sigma}^{2^{s-1}})$$

isto é, $K_0 + V$ é unitariamente equivalente a uma parte diagonal $K_0 + G_s$, na base de autovetores de K_0, mais uma parte não-diagonal V_s que é exponencialmente pequena na variável s desde que $\|V\|_r$ seja suficientemente pequena.

Ainda no caso periódico, quanto à estabilidade ou instabilidade dinâmica basta considerar o comportamento para $t = mT$, $m \in \mathbb{Z}$, ou seja, precisamos estudar o comportamento em m da seguinte grandeza

$$\langle U(mT,0)\psi, AU(mT,0)\psi\rangle = \langle U_{\mathrm{F}}^m\psi, AU_{\mathrm{F}}^m\psi\rangle$$

para $\psi \in \operatorname{dom} A$, A uma energia abstrata como acima. É uma conseqüência do Teorema RAGE (Ruelle-Amrein-Georgescu-Enss) (veja Teorema 2.3) que estabilidade dinâmica para algum A implica estabilidade espectral, pois no Capítulo 2 é mostrado (o resultado conhecido) que se o espectro do operador de Floquet é contínuo então o valor esperado da energia cresce no tempo para qualquer estado inicial. Já a implicação oposta não é verdadeira como mostra o exemplo, no caso autômomo, em [19] e nosso exemplo descrito no Capítulo 4, no caso não-autônomo.

Em [19] é mostrado que o operador auto-adjunto $H_{\theta,\alpha,\lambda} : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+)$, sendo $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ e $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ a base canônica de $l^2(\mathbb{Z}^+)$, dado por

$$(H_{\theta,\alpha,\lambda}u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V_{\theta,\alpha,\lambda}(n)u(n) \tag{1}$$

com uma condição de fronteira de Dirichlet em $n = -1$, e em que $V_{\theta,\alpha,\lambda}(n)$ é um potencial real em $\mathbb{Z}^+$ dado por

$$V_{\theta,\alpha,\lambda}(n) = 3\cos(\pi\alpha n + \theta) + \lambda\delta_{n0} \tag{2}$$

satisfaz:

(a) Para cada α irracional tem-se que para q.t.p. $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $H_{\theta,\alpha,\lambda}$ tem um conjunto completo de autofunções normalizadas e cada autofunção decai exponencialmente;

(b) Pode-se construir um α irracional de modo que para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [0, 1]$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\langle e^{-itH_{\theta,\alpha,\lambda}}e_0, X^2 e^{-itH_{\theta,\alpha,\lambda}}e_0\rangle}{F(t)} = \infty$$

em que $F(t) = \frac{t^2}{\ln t}$ e $X^2 : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+)$ é o momento de ordem 2 dado por $X^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} n^2\langle e_n, \cdot\rangle e_n$.

Neste caso estamos considerando $H(t) = H_{\theta,\alpha,\lambda}\ \forall\ t$, assim $U(t, 0) = e^{-itH_{\theta,\alpha,\lambda}}$. Logo para um α irracional adequadamente construído, q.t.p. $\theta \in [0, 2\pi)$ e q.t.p. $\lambda \in [0, 1]$ tem-se um sistema que é espectralmente estável mas que não é dinamicamente estável.

A estabilidade dinâmica de um sistema dependente do tempo foi estudada por exemplo nas referências [28], [11], [21], [49], [41], [18], [3], [1], [23], [30], [46], [29] e [2]. Em [1] é provado que a aplicabilidade do método KAM fornece um limite uniforme no crescimento da energia para Hamiltonianas como em [26], mais precisamente

Teorema 0.1 *Sejam $g, T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, $V : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H})$ uma função C^∞ de período T, em que $B(\mathcal{H})$ denota o conjunto dos operadores limitados em $\mathcal{H}$. Considere*

$H_0 = \sum_n E_n P_n$ com $\frac{E_{n+1}-E_n}{n^\alpha} \geq cte > 0$ para algum $\alpha > 0$. Então vale para o propagador $U(t,0)$ de $H(t) = H_0 + gV(t)$, $\psi \in Q(H_0)$ (= domínio de forma de H_0):

$$|\langle U(t,0)\psi, H_0 U(t,0)\psi\rangle| \leq cte$$

e

$$|\langle U(t,0)\psi, H(t) U(t,0)\psi\rangle| \leq cte$$

desde que g seja suficientemente pequeno e $\omega \in \Omega_\infty \subset [\omega_-, \omega_+] \subset (0,\infty)$, o conjunto construído pelo método KAM com medida de Lebesgue $|[\omega_-,\omega_+] \setminus \Omega_\infty| = O(\sqrt{g})$.

A mesma técnica se aplica para Hamiltonianas como em [25]. Veja [27].

Para Hamiltonianas da forma $H(t) = H_0 + V(t)$ com $V(t)$ limitado e diferenciável (não-necessariamente periódico) e H_0 operador auto-adjunto positivo com $\sigma(H_0) = \bigcup_{j=1}^\infty \sigma_j$ (não necessariamente discreto), denote $\Delta_j = \text{dist}(\sigma_{j+1}, \sigma_j)$ e $d_j = \sup_{\lambda,\mu\in\sigma_j} |\lambda - \mu|$, limites superiores do tipo

$$\langle U(t,0)\psi, H(t)U(t,0)\psi\rangle \leq cte\; t^{\frac{1+\alpha}{n\alpha}}$$

foram obtidos em [49] se $\psi \in Q(H_0) = \text{dom}\, H_0^{\frac{1}{2}}$,

$$cj^\alpha \leq \Delta_j \leq Cj^\alpha \quad c, \alpha > 0,\; C < \infty,$$

$$d_j \leq dj^\alpha$$

e $V \in C^n$ uniformemente em $\mathbb{R}$, com $n \geq [\frac{1+\alpha}{2\alpha}] + 1$ e $n < \infty$, isto é, $\max_{l=1,\ldots,n} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(\frac{d}{dt})^l V(t)\| < \infty$, e $[\cdot]$ denota a parte inteira do número real. A demonstração é baseada em técnicas adiabáticas não permitidas para dependências temporais não-diferenciáveis e portanto não se aplica a sistemas kicked.

Em [41] são obtidas estimativas superiores complementares àquela de Nenciu [49] descrita acima para $H(t) = H_0 + V(t)$, pois não se impõem condições de diferenciabilidade à perturbação V e não se restringem os tamanhos dos gaps no espectro de H_0, contudo pede-se que V seja “pequena”. Mais precisamente, sob as hipóteses

H1- $\sigma(H_0) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma_j$, com $\sigma_j \subset [\lambda_j, \Lambda_j]$, $\Lambda_j < \lambda_{j+1}$, $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$ e $\sup_j \frac{\Lambda_j}{\lambda_j} < \infty$. Denote por P_j o projetor espectral associado a σ_j relativo à H_0.

H2- A aplicação $t \mapsto V(t)$ é fortemente C^1 e existem $0 \leq a(t) < \infty$, $\forall\ t$, $0 \leq b < 1$ de forma que para $\xi \in \text{dom } H_0$

$$\|V(t)\xi\| \leq b\|H_0\xi\| + a(t)\|\xi\|$$

e sejam

$$V^d(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j V(t) P_j \qquad \text{e} \qquad V^o(t) = V(t) - V^d(t).$$

H3- Vale uma das alternativas:

(i) Existe $q \geq \frac{1}{2}$ com $t \mapsto \sum_j \lambda_j^q \|P_j V^o(t)\| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(ii) Existe $q \geq \frac{1}{2}$ com $t \mapsto \sum_j \lambda_j^{2q} \|P_j V^o(t)\|^2 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Tem-se que, definindo para $T \in B(\mathcal{H})$ e $p \geq 1$

$$\|T\|_{p,H_0} \doteq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \|P_j T\|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

se H1, H2 e H3(i) valem e $\xi \in \text{dom } H_0^{\frac{1}{2}}$ então

$$\langle U(t,0)\xi, H_0 U(t,0)\xi\rangle \leq \text{cte}\,\Big(\int_0^t \|V^o(s)\|_{1,H_0^q} ds\Big)^{\frac{1}{q}}$$

e se H1, H2 e H3(ii) valem e $\xi \in \text{dom } H_0^{\frac{1}{2}}$ então

$$\langle U(t,0)\xi, H_0 U(t,0)\xi\rangle \leq \text{cte}\,\Big(t\int_0^t \|V^o(s)\|^2_{2,H_0^q} ds\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Como prosseguimento desse trabalho de Joye tem-se [3] no qual um resultado similar é demonstrado.

Os trabalhos [49], [41] e [3] citados acima não fornecem estimativas inferiores. Poderemos talvez esperar obter estimativas inferiores no caso periódico, com $H(t) = H_0 + V(t)$ e H_0 com espectro discreto $H_0\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ e $\lambda_j \to \infty$, da teoria abstrata iniciada em [30] e melhorada em ([12], [46], [29], [2]). Escrevendo

$$U_{\text{F}} = \int e^{i\lambda} dE_\lambda$$

para a decomposição espectral de U_{F}, o resultado principal em [30] afirma o seguinte: Se a medida espectral $d\langle \xi, E_\lambda \xi\rangle \equiv d\mu_\xi(x)$ satisfaz $\forall\, x \in S^1$, $\mu_\xi(x-\epsilon, x+\epsilon) \leq cte\ \epsilon^\alpha$ para $0 < \epsilon$ suficientemente pequeno então

$$\langle M_{\xi,q}\rangle(T) \geq cte\ \lambda^q_{T^{\alpha-\epsilon}} \quad \forall\, \epsilon > 0 \tag{3}$$

em que $\langle M_{\xi,q}\rangle(T)$ é a média de Cesàro

$$\langle M_{\xi,q}\rangle(T) = \frac{1}{T}\sum_{m=0}^{T} \langle U_{\mathrm{F}}^m \xi, H_0^q U_{\mathrm{F}}^m \xi\rangle.$$

No caso $\lambda_j = j$ teremos

$$\langle M_{\xi,q}\rangle(T) \geq \text{cte}\ \ T^{(\alpha-\epsilon)q} \tag{4}$$

Em [46] é mostrado que (3) e (4) valem com $\epsilon = 0$ se μ_ξ é $\alpha-$contínua, isto é, $\mu_\xi(E) = 0$ para qualquer boreliano E com

$$h^\alpha(E) \doteq \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\delta-\text{coberturas de } E} \sum_j |I_j|^\alpha = 0$$

em que uma família $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ de intervalos abertos em $\mathbb{R}$ é uma $\delta-$cobertura de $E \subset \mathbb{R}$ se $E \subset \bigcup_j I_j$ e $|I_j| < \delta \ \ \forall\, j$. Sabe-se que para cada E existe um único $\alpha(E)$, chamado dimensão de Hausdorff de E e denotado $\alpha(E) = \dim_H(E)$, de forma que

$$h^\alpha(E) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \alpha < \alpha(E) \\ 0 & \text{se} \quad \alpha > \alpha(E) \end{cases}.$$

Finalmente em [2] mostra-se que dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$ de modo que

$$\langle M_{\xi,q}\rangle(T) \geq C(\epsilon)\lambda^q_{T^{(\dim_H \mu_\xi - \epsilon)}}$$

em que $0 \leq \dim_H \mu_\xi \leq 1$ denota a dimensão de Hausdorff de μ_ξ, definida por

$$\dim_H \mu_\xi \doteq \mu_\xi - \text{supess}_{x\in S^1} d^-_{\mu_\xi}(x)$$

sendo

$$d^-_{\mu_\xi}(x) \doteq \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\ln \mu_\xi(x-\epsilon, x+\epsilon)}{\ln \epsilon}.$$

O problema com tais limites inferiores é que a informação na medida espectral é difícil de checar; não conhecemos nenhum modelo com dependência temporal periódica em que isso tenha sido feito, a não ser numericamente ou para os casos triviais em que $\dim_H \mu_\xi = 0$ ou $\dim_H \mu_\xi = 1$.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 revisaremos alguns resultados preliminares sobre a existência da dinâmica, o formalismo de Howland para Hamiltonianas dependentes do tempo e a versão proposta por Jauslin-Lebowitz, em particular o caso quaseperiódico (um número finito de freqüências) para o qual existe uma generalização natural do operador de Floquet cujo espectro também está em correspondência com o espectro do operador quase-energia.

No Capítulo 2 trataremos de resultados topológicos na dinâmica das órbitas $\xi(t) = U(t,0)\xi$, faremos uma coletânea de resultados obtidos neste sentido em [28], [21], [23] e [42] e daremos alguns resultados novos complementares, em particular, mostraremos que no caso periódico uma órbita é peneperiódica se, e somente se, for precompacta, e daremos um exemplo, no caso quasiperiódico, de órbita precompacta que não é peneperiódica ("almost periodic"em inglês). Também no Capítulo 2, Seção 2.4, apresentamos resultados que garantem estabilidade dinâmica no caso de estabilidade espectral.

No Capítulo 3 trabalharemos com Hamiltonianas da forma $H(t) = H_0 + V(t)$, periódicas no tempo e com H_0 auto-adjunto, positivo, não-limitado e com espectro discreto. Introduziremos uma fórmula (Teorema 3.1) para a média temporal a la Laplace de $\langle U_F^m\xi, H_0 U_F^m\xi\rangle$ no tempo T, em termos dos autovalores de H_0 e da função de Green associada a U_F no circunferência de raio $e^{1/T}$, de modo que obtemos resultados em estabilidade através do comportamento de tais funções de Green. O restante do capítulo é dedicado a aplicações de tal resultado.

No Capítulo 4 daremos o primeiro exemplo de um operador de Floquet que tem espectro pontual puro mas o valor esperado da energia não é limitado

(Teorema 4.2). Consideramos uma escolha particular na família de operadores de Floquet estudados em [10]; tais operadores descrevem a dinâmica quântica de certos modelos físicos interessantes (veja [5, 10]), e apresentam uma estrutura pentadiagonal com respeito a uma base ortogonal $\{\varphi_k\}$ de $l^2(\mathbb{N})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$. A construção do nosso operador de Floquet é uma fusão dos operadores estudados em [10], agora sob adequadas perturbações de posto um, e os argumentos apresentados em [19] para o modelo (1)-(2). Para valores adequados dos parâmetros conseguimos as seguintes propriedades:

1. Os operadores unitários resultantes $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ (depois de uma perturbação de posto um; veja Eq. (4.7)) ainda pertence a família de operadores de Floquet considerada em [10].

2. $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ tem espectro pontual puro com autofunções decaindo exponencialmente.

3. A evolução temporal pelo operador de Floquet $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ na condição inicial φ_1 apresenta instabilidade dinâmica.

$U_\lambda(\beta,\theta)^+$ é obtido como uma perturbação de posto um da classe de operadores peneperiódicos estudados na Seção 7 de [10]. Para conseguir espectro pontual puro, utilizamos um argumento de [32] usado para demonstrar localização para operadores unitários aleatórios, tal argumento combina a teoria de perturbações de posto um e positividade dos expoentes de Lyapunov com autofunções generalizadas polinomialmente limitadas. Para demonstrar instabilidade dinâmica, embora adaptamos idéias de [19], destacamos que alguns resultados (Lema 4.6, Lema 4.7) necessitam de uma demonstração não-trivial e completamente diferente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre a existência da dinâmica, a formulação proposta por Howland-Yajima para estudar Hamiltonianas dependentes do tempo e também a formulação proposta por Jauslin-Lebowitz.

1.1 Existência da Dinâmica

Começaremos com a definição de propagador unitário.

Definição 1.1 *(a) Um propagador fortemente contínuo sobre o espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *é uma família de operadores* $U(t,s)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, *satisfazendo*

(i) $U(t,s) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *são invertíveis para cada* t, s;

(ii) $U(t,t) = Id \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$;

(iii) $U(t,r)U(r,s) = U(t,s) \quad \forall\, t, r, s$;

(iv) Para cada $\xi \in \mathcal{H}$ *a aplicação* $\mathbb{R}^2 \ni t, s \mapsto U(t,s)\xi$ *é contínua.*

(b) Uma tal família é um propagador unitário se além de (a) satisfaz $U(t,s)$ *é unitário para todo* t, s.

Note que de (iii) segue que $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$. Também $U(t,s) = U(t,0)U(0,s) = U(t,0)U(s,0)^{-1}$.

O seguinte resultado (Teorema X.70 em [50]) contém condições suficientes convenientes na Hamiltoniana $H(t)$ para a existência dos propagadores unitários

$U(t,s)$.

Teorema 1.1 *Considere a aplicação $H(t)$ que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa um operador auto-adjunto $H(t)$de modo que*

(a) O domínio $\mathcal{D}$ de $H(t)$, denso em $\mathcal{H}$, é independente de t.

(b) A função

$$t, s \mapsto (t-s)^{-1}[(i+H(t))(i+H(s))^{-1} - \mathrm{I_d}]$$

estende-se a uma função fortemente contínua em $\mathbb{R}^2$.

Então existe um único propagador unitário $U(t,s)$ de forma que $U(t,s)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ e

$$i\frac{d}{dt}U(t,s)\psi = H(t)U(t,s)\psi$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}$.

O teorema acima se aplica quando $H(t) = H$ para todo t e neste caso tem-se que $U(t,s) = e^{-i(t-s)H}$.

Observações. 1. Se para cada s existe uma única solução $U(t,s)$ de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}U(t,s) & = & -iH(t)U(t,s) \\ U(s,s) & = & Id \end{array}\right. \tag{1.1}$$

então para cada r tem-se $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$. De fato, se

$$V(t) \doteq U(t,r)U(r,s) - U(t,s)$$

então para $\xi \in \mathrm{dom}\ H(s)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|V(t)\xi\|^2 &= \langle -iH(t)U(t,r)U(r,s)\xi + iH(t)U(t,s)\xi, V(t)\xi\rangle + \\ &\quad \langle V(t)\xi, -iH(t)U(t,r)U(r,s)\xi + iH(t)U(t,s)\xi\rangle \\ &= \langle -iH(t)V(t)\xi, V(t)\xi\rangle + \langle V(t)\xi, -iH(t)V(t)\xi\rangle = 0 \end{aligned}$$

e como $V(r) = U(r,r)U(r,s) - U(r,s) = 0$ tem-se que $V(t) = 0\ \forall\ t$ e o resultado segue.

2. Se para cada s existe uma única solução de (1.1) e $H(t)$ é auto-adjunto para cada t então $U(t,s)$ são unitários. De fato, para $\xi \in \text{dom } H(s)$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\|U(t,s)\xi\|^2 &= i\frac{d}{dt}\langle U(t,s)\xi, U(t,s)\xi\rangle \\ &= \langle -H(t)U(t,s)\xi, U(t,s)\xi\rangle + \langle U(t,s)\xi, H(t)U(t,s)\xi\rangle = 0 \end{aligned}$$

como $\|U(s,s)\xi\| = \|\xi\|$ segue que $\|U(t,s)\xi\| = \|\xi\| \ \forall \ t$. Assim para cada $\xi \in \text{dom } H(s)$ denso em $\mathcal{H}$ tem-se que $\|U(t,s)\xi\| = \|\xi\|$ e como os $U(t,s)$ são invertíveis o resultado segue.

3. Se para cada s existe uma única solução de (1.1) e $H(t+T) = H(t)$ então $U(t+T, s+T) = U(t,s) \ \forall \ t, s$. De fato, se $V(t) \doteq U(t+T, s+T) - U(t,s)$ então para $\xi \in \text{dom } H(s)$

$$\frac{d}{dt}\|V(t)\xi\|^2 = 0$$

e como $V(s) = U(s+T, s+T) - U(s,s) = 0$ tem-se que $V(t) = 0 \ \forall \ t$ e o resultado segue.

Resultados mais gerais de existência e unicidade de propagadores unitários para a equação de Schrödinger correspondendo a uma Hamiltoniana $H(t)$ podem ser encontrados, entre outros, em [43], [44], [36], [37], [24] e [51]. Uma das condições que é enfraquecida é que o domínio de $H(t)$ não precisa ser constante. O seguinte exemplo mostra que a solução pode existir mesmo que $\text{dom}H(t) \cap \text{dom}H(s) = \{0\}$ para $t \neq s$.

Exemplo 1.1 *Sejam* $D = -i\frac{d}{dx}$ *em* $L^2(\mathbb{R})$, *com* $\text{dom } D = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \exists \ g \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}} \psi \frac{d\varphi}{dx} dx = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx \ \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\} \doteq H^1(\mathbb{R})$ *denso em* $L^2(\mathbb{R})$, $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ *com* $q(x)$ *real e sem derivada em qualquer ponto. Considere*

$$H(t) = e^{iq(x)t} D e^{-iq(x)t}$$

com $\text{dom } H(t) = \{e^{iq(x)t}\psi(x) : \psi \in \text{dom } D\}$ *denso em* $L^2(\mathbb{R})$, *então* $H(t)$ *é auto-adjunto para qualquer* t.

Agora se $t \neq s$ *então* $\text{dom } H(t) \cap \text{dom } H(s) = \{0\}$. *De fato, se* $\phi \in \text{dom } H(t) \cap \text{dom } H(s)$ *então* $\phi(x) = e^{iq(x)t}\psi(x) = e^{iq(x)s}\varphi(x)$ *para* $\psi, \varphi \in \text{dom } D$, *logo* $\psi(x) = e^{-iq(x)t}e^{iq(x)s}\varphi(x) \in \text{dom } D$ *e portanto* φ *só pode ser nula pois* q *não tem derivada em qualquer ponto e o resultado segue.*

Contudo para $\psi \in \text{dom } H(s)$, s *fixado, a equação de Schrödinger*

$$\begin{cases} i\frac{d\psi}{dt}(t) & = & H(t)\psi(t) \\ \psi(s) & = & \psi \end{cases}$$

possui uma solução

$$\psi(t) = \underbrace{e^{iq(x)t}e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}}_{U(t,s)}\psi$$

pois para $\psi \in \text{dom } H(s)$ *tem-se*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t,s)\psi &= iq(x)e^{iq(x)t}e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &\quad +e^{iq(x)t}(-i)(D+q(x))e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &= -ie^{iq(x)t}De^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &= -ie^{iq(x)t}De^{-iq(x)t}e^{iq(x)t}e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &= -iH(t)U(t,s)\psi \end{aligned}$$

e $U(t,s)$ *é propagador unitário.*

1.2 Integral Direta e Aplicações Peneperiódicas

As demonstrações dos resultados enunciados nessa seção podem ser encontradas em [47] e [50], no caso de integral direta, e em [15] para aplicações peneperiódicas.

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Seja a aplicação

$$\Omega \ni \omega \mapsto \xi_\omega \in \mathcal{H}$$

denotaremos $\xi \doteq \{\xi_\omega\}_{\omega\in\Omega} = \{\xi(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. Dizemos que ξ é mensurável se para todo $\eta \in \mathcal{H}$ a função

$$\Omega \ni \omega \mapsto \langle \eta, \xi_\omega \rangle$$

é mensurável.

Disto segue que para $\xi = \{\xi_\omega\}$ e $\eta = \{\eta_\omega\}$ mensuráveis o produto interno

$$\Omega \ni \omega \mapsto \langle \xi_\omega, \eta_\omega \rangle = \sum_k \langle \xi_\omega, e_k \rangle \langle e_k, \eta_\omega \rangle$$

em que $\{e_k\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, é mensurável. Defina $\xi + \eta = \{\xi_\omega + \eta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ e para $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\xi = \{\alpha\xi_\omega\}_\omega$.

Definição 1.2 *O espaço vetorial dos $\xi = \{\xi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ acima em que*

$$\int_\Omega \|\xi_\omega\|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

com produto interno $\langle \xi, \eta \rangle \doteq \int_\Omega \langle \xi_\omega, \eta_\omega \rangle d\mu(\omega)$ é um espaço de Hilbert chamado de integral direta ou soma direta contínua de $\mathcal{H}$ relativamente a $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, e denotado por $\int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\omega)$.

Um exemplo simples é $L^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}}^\oplus \mathbb{C}\, dt$.

Se $\{e^k\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}$, então cada vetor $\xi = \{\xi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ corresponde exatamente ao conjunto das seqüências numéricas

$$a_k(\omega) = \langle e^k, \xi_\omega \rangle$$

e $\|\xi\|^2 = \sum_k \int_\Omega |a_k(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty$.

Denotaremos $\mathcal{I} \doteq \int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\omega)$. Se $\phi : \Omega \to \mathbb{C} \in L_\mu^\infty(\Omega)$, define-se o operador de multiplicação $\mathcal{M}_\phi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ por

$$(\mathcal{M}_\phi \xi)_\omega = \phi(\omega)\xi_\omega \quad \omega \in \Omega$$

e verifica-se que

$$\|\mathcal{M}_\phi\| = \text{supess}\ |\phi(\omega)| = \|\phi\|_\infty$$

e $\mathcal{C}$ denotará o conjunto desses operadores de multiplicação.

Definição 1.3 *Um operador limitado T em $\mathcal{I} = \int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\omega)$ é dito ser fibrado se existe uma função $T(\cdot)$ de Ω em $B(\mathcal{H})$ de forma que para todo $\xi \in \mathcal{I}$*

$$(T\xi)_\omega = T(\omega)\xi_\omega.$$

Escreveremos $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega)d\mu(\omega) = \{T(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. *Diremos que* $T(\cdot)$ *é mensurável se para todas* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ *a aplicação* $\omega \mapsto \langle\varphi, T(\omega)\psi\rangle$ *é mensurárel. Tem-se que* $\|T\| = \text{supess } \|T(\omega)\|$.

Valem os seguintes resultados

Teorema 1.2 *Um operador limitado* $T : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ *é fibrado se, e somente se,* T *comuta com todo operador em* $\mathcal{C}$.

Proposição 1.1 *Seja* T *fibrado. Então:*

(a) T *é invertível se, e somente se,* $T(\omega)$ *é invertível para* ω $\mu-$*q.t.p. e* $\text{supess } \|T(\omega)^{-1}\| < \infty$.

(b) T *é unitário se, e somente se,* $T(\omega)$ *é unitário* $\mu-$*q.t.p.*

(c) No caso $\Omega = \mathbb{R}$ *e* $\mu = l$ *(medida de Lebesgue), para* $\sigma \in \mathbb{R}$ *denote por* T_σ *o operador em* $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H}dt$ *dado por*

$$(T_\sigma \xi)_t = \xi_{t-\sigma}.$$

Então T *é constante se, e somente se,* T *comuta com* T_σ $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4 *Uma função* $T(\cdot)$ *de um espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *no espaço dos operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *(não necessariamente limitados) é dita mensurável se a função* $(T(\cdot)+i)^{-1}$ *é mensurável. Dada uma tal função, definimos um operador* T *em* $\mathcal{I} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}d\mu$ *com*

$$\text{dom } T = \left\{\xi \in \mathcal{I} : \xi_\omega \in \text{dom } T(\omega)\ \mu - q.t.p.\ e \int_{\Omega} \|T(\omega)\xi_\omega\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\omega) < \infty\right\}$$

por

$$(T\xi)_\omega = T(\omega)\xi_\omega.$$

Escreve-se $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega)d\mu(\omega) = \{T(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$.

As propriedades de tais operadores são resumidas por:

Teorema 1.3 *Seja* $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega)d\mu(\omega)$ *em que* $T(\cdot)$ *é mensurável e* $T(\omega)$ *é auto-adjunto para cada* ω*. Então:*

(a) O operador T *é auto-adjunto.*

(b) Um operador auto-adjunto T *em* $\mathcal{I}$ *tem a forma* $\int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega)d\mu(\omega)$ *se, e somente se,* $(T+i)^{-1}$ *é um operador fibrado.*

(c) Para qualquer função de Borel limitada F *em* $\mathbb{R}$

$$F(T) = \int_{\Omega}^{\oplus} F(T(\omega))d\mu(\omega).$$

(d) $\lambda \in \sigma(T)$ *se, e somente se,* $\forall\, \epsilon > 0$

$$\mu(\{\omega : \sigma(T(\omega)) \cap (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq \emptyset\}) > 0.$$

(e) λ *é um autovalor de* T *se, e somente se,*

$$\mu(\{\omega : \lambda \text{ é um autovalor de } T(\omega)\}) > 0.$$

(f) Se cada $T(\omega)$ *tem espectro absolutamente contínuo puro então* T *também tem espectro absolutamente contínuo puro.*

A parte (f) do teorema acima diz que uma condição suficiente para $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega)d\mu(\omega)$ ter espectro absolutamente contínuo puro é que cada $T(\omega)$ tenha espectro absolutamente contínuo puro. Mas essa condição não é necessária. Na verdade, T pode ter espectro absolutamente contínuo puro e cada $T(\omega)$ ter espectro discreto. O seguinte exemplo ilustra este fenômeno.

Exemplo 1.2 *Sejam* $\Omega = [0,1]$ *com medida de Lebesgue,* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e* $T = \int_{[0,1]}^{\oplus} T(t)dt$ *com cada* $T(t)$ *auto-adjunto. Suponha que* $\{\psi_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ *são funções de* $[0,1]$ *em* $\mathcal{H}$ *de classe* C^1*, e* $\{\lambda_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ *são funções de* $[0,1]$ *em* $\mathbb{C}$ *de classe* C^1 *tais que:*

(i) $\frac{d\lambda_n}{dt}(t) > 0\ \forall\, n, t.$

(ii) $T(t)\psi_n(t) = \lambda_n(t)\psi_n(t)$ *para todo* $t \in [0,1]$*;* $n = 1, 2, \ldots$*.*

(iii) Para cada t*, o conjunto* $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma base ortonormal para* $\mathcal{H}$*.*

Então T *tem espectro absolutamente contínuo puro.*

Demonstração: Para cada n defina

$$\mathcal{I}_n = \{\xi \in \mathcal{I} : \xi = f\psi_n; f \in L^2([0,1])\}.$$

Então os $\mathcal{I}_n$ são subspaços fechados que são mutuamente ortogonais e $\mathcal{I} = \bigoplus \mathcal{I}_n$ pois cada $\xi \in \mathcal{I}$ tem uma expansão

$$\xi_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n(t), \xi_t \rangle \psi_n(t).$$

Além disso, $\mathcal{I}_n \subset \text{dom}\, T$ com $T(\mathcal{I}_n) \subset \mathcal{I}_n$. Considere a aplicação unitária $U_n : \mathcal{I}_n \mapsto L^2([0,1])$, dada por $U_n(f\psi_n) = f$. Então $T_n \equiv U_n T\big|_{\mathcal{I}_n} U_n^{-1}$ é dado por

$$(T_n f)_t = \lambda_n(t) f(t).$$

Basta mostrar que cada T_n tem espectro absolutamente contínuo puro. Defina $W : L^2([0,1]) \to L^2([\lambda_n(0), \lambda_n(1)])$ por

$$(Wf)(t) = \Big(\frac{d}{dt}\lambda_n^{-1}(t)\Big)^{\frac{1}{2}} f(\lambda_n^{-1}(t))$$

então

$$(WT_nW^{-1}g)(t) = tg(t).$$

Assim T_n é unitariamente equivalente à $\mathcal{M}_t$ e o resultado segue. ■

Definição 1.5 *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ é peneperiódica se, para cada $\epsilon > 0$ existe um número $l(\epsilon) > 0$ de forma que cada intervalo na reta real de comprimento $l(\epsilon)$ contém um número τ com a propriedade que*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \epsilon, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

São válidas, entre outras, as seguintes propriedades:

Teorema 1.4 *(a) Toda função peneperiódica é limitada.*

(b) Toda função peneperiódica é uniformemente contínua.

(c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ é peneperiódica então λf, em que λ é um número complexo, e

a função transladada $f_h : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ *dada por* $f_h(t) = f(t+h)$ *são peneperiódicas. A função* $t \mapsto \|f(t)\|$ *também é peneperiódica.*

(d) Se f_n *é uma seqüência de funções peneperiódicas com valores em* $\mathcal{B}$*, e se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

uniformemente em $\mathbb{R}$ *no sentido da convergência na norma, então* f *é peneperiódica.*

(e) Se $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ *é peneperiódica então* $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é precompacto em* $\mathcal{B}$*.*

(f) A soma de duas funções peneperiódicas é peneperiódica.

(g) Uma função $T : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$*, cujos valores são dados por* $T(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$ *em que* $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *e* $c_k \in \mathcal{B}$*, é um polinômio trigonométrico (ou aplicação quaseperiódica). Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ *de modo que para todo* $\epsilon > 0$ *existe um polinômio trigonomètrico* T_ϵ *de forma que*

$$\|f(t) - T_\epsilon(t)\| < \epsilon, \qquad t \in \mathbb{R}$$

é peneperiódica.

(h) Se $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ *é peneperiódica e* f' *(a derivada de* f*) é uniformemente contínua então* f' *é peneperiódica.*

(i) Se $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ *é contínua e para todo* t *satisfaz* $f(t+T) = e^{-i\alpha} f(t)$ *para algum* $0 < T < \infty$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *então* f *é peneperiódica.*

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é peneperiódica se, e somente se,* $\mathrm{Re}\, f(t)$ *e* $\mathrm{Im}\, f(t)$ *são peneperiódicas.*

(k) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *são peneperiódicas então* $f(x)g(x)$ *é peneperiódica. Além disso se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é peneperiódica e* a *é um número real então* $f(ax)$ *é peneperiódica.*

(l) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ *é peneperiódica,* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$*, então* $f_j(x)$ *é peneperiódica* $1 \le j \le n$*.*

Funções $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ que são peneperiódicas mas que não são quaseperiódicas podem ser obtidas considerando aplicações da forma $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t}$, tomando os coeficientes c_k de forma adequada para garantir convergência uniforme em $\mathbb{R}$ no sentido da convergência na norma de $\mathcal{B}$, e os λ_k's racionalmente independentes.

1.3 Formalismo de Howland

Nesta seção descreveremos um método devido a Howland e Yajima ([35], [34], [55]) tornando problemas dependentes do tempo em problemas independentes do tempo. As equações de Hamilton para um sistema com função Hamiltoniana $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ são

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Se H depende em t, a energia não é conservada para um tal sistema, mas pode-se montar um sistema correspondente que conserva energia introduzindo t como uma coordenada e a energia E como seu momento conjugado. A nova Hamiltoniana é

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, E) = E + H(\mathbf{p}; \mathbf{q}; t)$$

portanto se denotarmos por σ o novo parâmetro "temporal", as equações de Hamilton correspondentes são

$$\frac{dq_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\partial K}{\partial E} = 1, \qquad -\frac{dE}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Note que $t = \sigma + cte$ e, assim, essas duas formulações são equivalentes.

Pode-se reformular o problema em Mecânica Quântica similarmente. Seja $H(t)$ uma família de operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $\mathcal{K} \doteq L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}, dt) \equiv \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H} dt$. Definindo K em $\mathcal{K}$ por

$$(Kf)(t) = -i\frac{d}{dt}f(t) + H(t)f(t)$$

existiria (de acordo com a analogia clássica) uma correspondência entre as soluções de

$$\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma) = -iK\varphi(\sigma)$$

em $\mathcal{K}$ e as soluções do problema dependente do tempo

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -iH(t)\varphi_s(t) \qquad \varphi_s(s) = \psi$$

em $\mathcal{H}$. Os detalhes técnicos são:

Proposição 1.2 *Dado um propagador fortemente contínuo e limitado $U(t,s)$ sobre $\mathcal{H}$, tem-se que $W_\sigma : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ dado por,*

$$(W_\sigma f)_t = U(t, t-\sigma) f(t-\sigma)$$

é um grupo fortemente contínuo a um parâmetro σ. Se K é o operador auto-adjunto gerador infinitesimal de W_σ, então escreve-se $W_\sigma = e^{-iK\sigma}$.

Por exemplo, se $U(t,s) = Id \ \forall\ t,s$ então $(W_\sigma f)_t = Idf(t-\sigma) = (T_\sigma f)_t$ e portanto $e^{-iK\sigma} = T_\sigma$ e é conhecido que $K = -i\frac{d}{dt}$.

Definição 1.6 *Um grupo limitado fortemente contínuo $e^{-i\sigma K}$ sobre $\mathcal{K}$ é um grupo de evolução limitado se, para cada σ, $e^{-i\sigma K}T_\sigma^*$ é um operador fibrado e limitado.*

Note que pelo Teorema 1.2 esse operador é fibrado se, e somente se,

$$e^{-i\sigma K}T_\sigma^* \mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\phi e^{-i\sigma K} T_\sigma^*$$

para toda $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Isto é equivalente a

$$\mathcal{M}_{\phi_\sigma} = T_\sigma \mathcal{M}_\phi T_\sigma^* = e^{-i\sigma K}\mathcal{M}_\phi e^{i\sigma K}$$

sendo $\phi_\sigma(t) = \phi(t-\sigma)$.

Dado o propagador $U(t,s)$ fortemente contínuo nota-se pela Proposição 1.2 que

$$(e^{-iK\sigma} f)_t = U(t, t-\sigma) f(t-\sigma)$$

o qual é um grupo de evolução limitado, pois

$$e^{-iK\sigma}T_\sigma^* = \{U(t, t-\sigma)\}_t.$$

Além disso

$$\begin{aligned}(e^{-iK\sigma}T_\sigma^*)_t &= U(t,t-\sigma)f(t) = U(t,0)U(0,t-\sigma)f(t)\\ &= U(t,0)T_\sigma U(0,t)f(t+\sigma) = U(t,0)T_\sigma U(t,0)^{-1}T_\sigma^* f(t)\end{aligned}$$

e assim $e^{-i\sigma K} = \mathcal{U}T_\sigma\mathcal{U}^{-1}$ em que $\mathcal{U}$ é o operador fibrado $\mathcal{U} = \{U(t,0)\}_t$. Portanto tal grupo de evolução é similar a T_σ e o operador que faz a similaridade é fibrado. O próximo teorema afirma que isso permanece verdadeiro em geral.

Teorema 1.5 *Um grupo limitado fortemente contínuo $e^{-i\sigma K}$ em $\mathcal{K}$ é um grupo de evolução limitado se, e somente se, existe um operador fibrado $\mathcal{U} = \{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de forma que*

$$e^{-i\sigma K} = \mathcal{U}T_\sigma\mathcal{U}^{-1}.$$

Além disso, se $e^{-i\sigma K}$ é unitário, então $\mathcal{U}$ pode ser escolhido unitário.

Observação. Se no Teorema 1.5 $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_1$ são tais que $\mathcal{U}T_\sigma\mathcal{U}^{-1} = e^{-i\sigma K} = \mathcal{U}_1T_\sigma\mathcal{U}_1^{-1}$ então $T_\sigma\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}_1T_\sigma$ logo pela Proposição 1.1(c) $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}_1$ é um operador fibrado constante. Portanto, $U(t) = U_1(t)B$ em que B é invertível. Isso significa que o propagador $U(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$ é unicamente determinado e portanto existe uma correspondência bijetiva entre propagadores e grupos de evolução.

No caso $H(t+\tau) = H(t)$ sabemos que os propagadores satisfazem $U(t+\tau, s+\tau) = U(t,s)$ para todo $t,s \in \mathbb{R}$ e então $\forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$U(t+n\tau, s) = U(t,s)[U(s+\tau,s)]^n$$

e o operador $U_{\mathrm{F}}(s) \doteq U(s+\tau,s)$ é chamado de operador de Floquet em s ou operador de monodromia. Como $U_{\mathrm{F}}(t) = U(t+\tau,t) = U(t+\tau,s+\tau)U(s+\tau,s)U(s,t) = U(t,s)U_{\mathrm{F}}(s)U(t,s)^{-1}$ segue que $U_{\mathrm{F}}(t)$ e $U_{\mathrm{F}}(s)$ são unitariamente equivalentes e trabalhamos com o operador de Floquet como sendo $U_{\mathrm{F}} \doteq U_{\mathrm{F}}(0) = U(\tau,0)$.

Suponha que $Kf = \lambda f$, como $(e^{-iK\sigma}g)(t) = U(t,t-\sigma)g(t-\sigma)$ então

$$e^{-i\lambda\sigma}f(t) = U(t,t-\sigma)f(t-\sigma)$$

logo

$$f(t) = e^{i\lambda\sigma} U(t, t-\sigma) f(t-\sigma) \qquad \forall\, \sigma \in \mathbb{R}$$

denotando $t - \sigma = s$

$$f(t) = e^{i\lambda(t-s)} U(t, s) f(s)$$

e como $U(\cdot,\cdot)$ é fortemente contínuo conclui-se

Lema 1.1 *Se $Kf = \lambda f$ em $\mathcal{K}$, então a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in \mathcal{H}$ é contínua.*

Lema 1.2 *No caso de sistemas com período τ, valem:*

(a) Se $Kf = \lambda f$ então $U_{\mathrm{F}}(s) f(s) = e^{-i\lambda\tau} f(s)$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

(b) Se $U_{\mathrm{F}}(s)\xi_s = e^{-i\lambda\tau}\xi_s$, $\xi_s \in \mathcal{H}\ \forall\ s$, então a função $f_\xi(t) \doteq e^{i\lambda(t-s)} U(t,s)\xi_s \in \mathrm{dom}\, K$ e $Kf_\xi = \lambda f_\xi$.

Denote por $W \doteq \int_{[0,\tau]}^{\oplus} U(t,0)dt$ o operador unitário fibrado em $\mathcal{K} = \int_{[0,\tau]}^{\oplus} \mathcal{H} dt$ e $B \doteq \int_{[0,\tau]}^{\oplus} U_{\mathrm{F}} dt = Id \otimes U_{\mathrm{F}} = \int_{[0,\tau]}^{\oplus} U(\tau, 0) dt$, tem-se que

Teorema 1.6 *$W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* = e^{-iK\tau}$, ou seja, $Id \otimes U_{\mathrm{F}}$ e $e^{-iK\tau}$ são unitariamente equivalentes.*

Demonstração: Seja $\{\xi_j\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ e considere a base ortonormal de $\mathcal{K}$ $\{u_{n,j}\}$ dada por $(u_{n,j})(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi i n t}{\tau}} \xi_j$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
(W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* u_{n,j})(t) &= U(t,0)((Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* u_{n,j})(t) \\
&= U(t,0)U_{\mathrm{F}}(W^* u_{n,j})(t) \\
&= U(t,0)U(\tau,0)U(t,0)^{-1} u_{n,j}(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi i n t}{\tau}} U(t+\tau,\tau)U(\tau,0)U(0,t)\xi_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi i n t}{\tau}} U(t+\tau,t)\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi i n t}{\tau}} U(t,t-\tau)\xi_j
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$(e^{-iK\tau} u_{n,j})(t) = U(t, t-\tau) u_{n,j}(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi i n t}{\tau}} U(t, t-\tau)\xi_j$$

e assim

$$W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* u_{n,j} = e^{-iK\tau} u_{n,j} \qquad \forall\, n, j$$

e portanto $W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* = e^{-iK\tau}$. ■

1.4 Formulação de Jauslin-Lebowitz

Seja $g_t : \Omega \to \Omega$ um sistema dinâmico, em que Ω é métrico compacto, possui uma medida ergódica invariante μ e $g_{t+s} = g_t \circ g_s$, $g_t^{-1} = g_{-t}$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$.

Considera-se para $\theta \in \Omega$ a Hamiltoniana

$$H_\theta(t) = H(g_t(\theta)) = H_0 + V(g_t(\theta))$$

e

$$H_{g_r(\theta)}(t) = H_\theta(t + r).$$

Supondo a existência do propagador $U_\theta(t, s)$ tem-se

$$U_{g_r(\theta)}(t, s) = U_\theta(t + r, s + r).$$

O próximo passo é seguir as idéias de Howland-Yajima e construir um sistema autônomo. Contudo aqui toma-se como variáveis adicionais "θ" e o espaço estendido será

$$\tilde{\mathcal{K}} \doteq \int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\theta) = L^2(\Omega, \mathcal{H}, d\mu)$$

e o grupo a um parâmetro será

$$(\tilde{W}(t)f)_\theta = U_{g_{-t}(\theta)}(t, 0) f_{g_{-t}(\theta)}$$

agindo em $\tilde{\mathcal{K}}$.

Ou de outra forma:

$$(\tilde{W}(t)f)_\theta = \mathcal{F}_{-t} U_\theta(t, 0) f_\theta = U_\theta(0, -t) \mathcal{F}_{-t} f_\theta$$

sendo $\mathcal{F}_{-t} f_\theta = f_{g_{-t}(\theta)}$. O gerador infinitesimal $\tilde{K}$ de $\tilde{W}(t)$ age como

$$(\tilde{K}f)_\theta = i \frac{d}{dt} f_{g_{-t}(\theta)} \Big|_{t=0} + H_\theta f_\theta$$

em que $H_\theta = H_\theta(0)$.

No caso de Hamiltonianas periódicas $\Omega = S^1 \equiv [0, 2\pi)$ com a medida de Lebesgue normalizada $d\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$ e $g_t(\theta) = \theta + \omega t$, $\theta \in S^1$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, tem-se

$$(\tilde{W}(t)f)_\theta = U_\theta(0, -t) f_{g_{-t}(\theta)} = U_\theta(0, -t) f_{\theta - \omega t}$$

e

$$(\tilde{K} f)_\theta = -i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta + H_\theta f_\theta$$

agindo em $L^2(S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta}{2\pi})$.

No caso de Hamiltonianas quaseperiódicas com H dependendo quaseperiodicamente no tempo com duas frequêcias incomensuráveis ω_1, ω_2, $\Omega = S^1 \times S^1$, $\mu = \frac{d\theta_1}{2\pi}\frac{d\theta_2}{2\pi}$ e $g_t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \omega_1 t, \theta_2 + \omega_2 t)$ com $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ e $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$, tem-se

$$(\tilde{K} f)_{\theta_1, \theta_2} = \Big(- i\omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - i\omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + H(\theta_1, \theta_2) \Big) f_{\theta_1, \theta_2} \tag{1.2}$$

agindo em $L^2(S^1 \times S^1, \mathcal{H}, d\mu)$. E isto pode ser generalizado para um número finito de frequências.

Se f^λ é um autovalor do operador quase-energia generalizado $\tilde{K}$ então

$$U_\theta(t, 0) f^\lambda(\theta) = \mathcal{F}_t e^{-i\tilde{K}t} f^\lambda(\theta) = \mathcal{F}_t e^{-i\lambda t} f^\lambda(\theta) = e^{-i\lambda t} f^\lambda(g_t(\theta)) \tag{1.3}$$

A partir de (1.3) temos a indicação para se definir o operador de Floquet generalizado no caso em que $\Omega = S^1 \times S^1$ e $g_t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \omega_1 t, \theta_2 + \omega_2 t)$. Defina para $\phi \in L^2(S^1) \otimes \mathcal{H} \equiv L^2(S^1, \mathcal{H})$

$$(\mathcal{T}_{T_2} \phi)(\theta_1) = \phi(\theta_1 + \omega_1 T_2).$$

Então (1.3) torna-se

$$e^{-i\lambda t} f^\lambda(\theta_1 + \omega_1 t, \theta_2 + \omega_2 t) = U_{(\theta_1, \theta_2)}(t, 0) f^\lambda(\theta_1, \theta_2)$$

e fixando $\theta_2 = \theta_2^0$, define-se $h^\lambda(\theta_1) = f^\lambda(\theta_1, \theta_2^0)$, e para $t = T_2$

$$\begin{aligned} U_{(\theta_1, \theta_2^0)}(T_2, 0) h^\lambda(\theta_1) &= e^{-i\lambda T_2} f^\lambda(\theta_1 + \omega_1 T_2, \theta_2^0 + \omega_2 T_2) \\ &= e^{-i\lambda T_2} f^\lambda(\theta_1 + \omega_1 T_2, \theta_2^0) \\ &= e^{-i\lambda T_2} h^\lambda(\theta_1 + \omega_1 T_2) = e^{-i\lambda T_2} \mathcal{T}_{T_2} h^\lambda(\theta_1) \end{aligned}$$

portanto

$$e^{-i\lambda T_2} h^\lambda(\theta_1) = \mathcal{T}_{-T_2} U_{(\theta_1,\theta_2^0)}(T_2,0) h^\lambda(\theta_1)$$

e o operador de Floquet generalizado associado a θ_2^0 é o operador unitário

$$U_{\mathrm{F}}(\theta_2^0) = \mathcal{T}_{-T_2} U_{(\theta_1,\theta_2^0)}(T_2,0)$$

agindo em $\mathcal{K}_1 \doteq L^2(S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi})$. Quando nos referimos ao operador de Floquet generalizado estamos pensando em $U_{\mathrm{F}} \doteq U_{\mathrm{F}}(0)$ e suas propriedades espectrais são equivalentes àquelas do operador quase-energia generalizado. Algumas vezes, denotaremos

$$U_{\mathrm{F}} = \mathcal{T}_{-T_2} u_1 \tag{1.4}$$

em que $u_1(\theta_1) = U_{(\theta_1,0)}(T_2,0)$. Para mais detalhes e resultados veja [42] e [6].

Para Hamiltonianas quaseperiódicas com mais de duas frequências, ou seja, $\Omega = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots S^1}_{n \text{ vezes}}$ o operador de Floquet generalizado será

$$U_{\mathrm{F}} = \mathcal{T}_{-T_2} U_{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},0)}(T_n,0)$$

agindo em $L^2(S^1 \times S^1 \times \ldots S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi} \ldots \frac{d\theta_{n-1}}{2\pi})$ com, para $\phi \in L^2(S^1 \times S^1 \times \ldots S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi} \ldots \frac{d\theta_{n-1}}{2\pi})$

$$(\mathcal{T}_{-T_2}\phi)(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = \phi(\theta_1 + \omega_1 T_n, \ldots, \theta_{n-1} + \omega_{n-1} T_n).$$

O resultado a seguir foi demonstrado em [42] para o caso quaseperiódico, mas a mesma demonstração se adapta ao caso geral.

Teorema 1.7 *Seja $\varphi \in \mathcal{H}$ de maneira que $1 \otimes \varphi \in \mathcal{K}_{\mathrm{p}}(\tilde{K})$, o subspaço espectral pontual de $\tilde{K}$. Então a evolução temporal $\mathbb{R} \ni t \mapsto U_\theta(t,0)\varphi$ é peneperiódica para q.t.p. $\theta \in \Omega$.*

Demonstração: Como $1 \otimes \varphi \in \mathcal{K}_{\mathrm{p}}(\tilde{K})$ tem-se que

$$1 \otimes \varphi = \sum_m c_m \psi_m$$

em que ψ_m são as autofuncões de $\tilde{K}$, a saber, $\tilde{K}\psi_m = \lambda_m \psi_m$.

$$\begin{aligned} U_\theta(t,0)\varphi &= \mathcal{F}_t(\tilde{W}(t)(1\otimes\varphi))_\theta = \mathcal{F}_t(e^{-i\tilde{K}t}(1\otimes\varphi))_\theta \\ &= \mathcal{F}_t\Big(\sum_m c_m e^{-i\lambda_m t}\psi_m\Big)_\theta = \Big(\sum_m c_m e^{-i\lambda_m t}\mathcal{F}_t\psi_m\Big)_\theta \end{aligned}$$

Agora $\sum_m c_m e^{-i\lambda_m t}\mathcal{F}_t\psi_m$ é peneperiódica pois é a soma de funções peneperiódicas que convergem uniformemente, e como conseqüência existem $\eta_m \in \mathbb{R}$ e $\sigma_m \in \tilde{\mathcal{K}}$ de forma que

$$\begin{aligned} 0 &= \|\sum_m c_m e^{-i\lambda_m t}\mathcal{F}_t\psi_m - \sum_m \sigma_m e^{-i\eta_m t}\|^2_{\tilde{\mathcal{K}}} \\ &= \int_\Omega \|U_\theta(t,0)\varphi - \sum_m (\sigma_m)_\theta e^{-i\eta_m t}\|^2_{\mathcal{H}} d\theta \end{aligned}$$

o que implica que

$$U_\theta(t,0)\varphi = \sum_m (\sigma_m)_\theta e^{-i\eta_m t}$$

para q.t.p. θ, ou seja, $U_\theta(t,0)\varphi$ é peneperiódica para q.t.p. θ. ■

Capítulo 2

Estabilidade Via Propriedades Topológicas de Subespaços

Neste capítulo dado ξ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ estudaremos o comportamento da órbita de ξ, ou seja, de $\xi(t) = U(t,0)\xi$ em que $U(t,0)$ é um propagador unitário de um sistema quântico. De acordo com as propriedades de tais órbitas obteremos resultados na estabilidade dinâmica e espectral do sistema. Na Seção 2.1 isso será feito para Hamiltonianas gerais. Nas Seções 2.2 e 2.3 nos restringeremos a Hamiltonianas periódicas e quaseperiódicas, respectivamente. Em particular, na Seção 2.3, daremos um exemplo de órbita precompacta que não é peneperiódica, o que não ocorre no caso de Hamiltonianas periódicas e autônomas. Na Seção 2.4 trabalhamos no sentido de encontrar condições para obtermos limitação no valor esperado da energia.

2.1 Hamiltonianas Gerais

Considere uma família de operadores auto-adjuntos $H(t)$ para $t \in \mathbb{R}$, agindo em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Assumiremos que a equação de Schrödinger correspondente possua solução com propagadores unitários $U(t,s)$ que satisfazem $U(t,s)\text{dom } H(s) \subset \text{dom } H(t)$. Uma $H(t)$ dessa forma será chamada de Hamiltoniana geral. Além disso, seja $A : \mathrm{dom}\, A \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto, positivo, não-limitado e com espectro discreto, $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, $0 \le \lambda_n \le \lambda_{n+1}$, com dom A invariante sob a evolução temporal. Tal A será chamado de energia abstrata ou observável. $F(A > E)$ denotará a projeção espectral no subspaço gerado pelos autovetores de A correspondendo aos autovalores maiores do que $E \in \mathbb{R}$. Dado $\xi \in \mathcal{H}$ considere a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto \xi(t) = U(t,0)\xi \in \mathcal{H}$, vamos introduzir os seguintes subconjuntos de $\mathcal{H}$.

Definição 2.1 *(i) A órbita de $\xi \in \mathcal{H}$ é o conjunto $\mathcal{O}(\xi) \doteq \{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$.*

(ii) $\mathcal{H}_{pc} \doteq \{\xi \in \mathcal{H} : \mathcal{O}(\xi)$ é precompacta em $\mathcal{H}\}$.

(iii) $\mathcal{H}_{\mathrm{f}} \doteq \Big\{\xi \in \mathcal{H} : \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|CU(t,0)\xi\| dt = 0$ para qualquer operador compacto $C\Big\}$.

(iv) $\mathcal{H}_{\mathrm{pene}} \doteq \{\xi \in \mathcal{H} :$ a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto \xi(t)$ é peneperiódica$\}$.

(v) $\mathcal{H}_{\mathrm{be}} \doteq \{0 \ne \xi \in \mathcal{H} : \lim_{E\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\frac{\xi}{\|\xi\|}\| = 0\} \cup \{0\}$.

(vi) $\mathcal{H}_{\mathrm{ue}} \doteq \{0 \ne \xi \in \mathcal{H} : \lim_{E\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\frac{\xi}{\|\xi\|}\| = 1\} \cup \{0\}$.

(vii) $\mathcal{S}^{\mathrm{bd}}(A) \doteq \{\xi \in \mathrm{dom}\, A :$ a função $t \mapsto E_\xi^A(t)$ é limitada$\}$ em que $E_\xi^A(t) \doteq \langle U(t,0)\xi, AU(t,0)\xi\rangle$.

(viii) $\mathcal{S}^{\mathrm{un}}(A) \doteq \{\xi \in \mathrm{dom}\, A :$ a função $t \mapsto E_\xi^A(t)$ não é limitada$\}$.

Lema 2.1 *(a) $\mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ é subspaço fechado de $\mathcal{H}$.*

(b) $\mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ é subspaço fechado de $\mathcal{H}$.

(c) $\mathcal{H}_{\mathrm{pene}}$ é subspaço fechado de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{pene}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$.

Demonstração: (a) É fácil ver que $\mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ é subspaço linear de $\mathcal{H}$. Sejam $\xi \in \overline{\mathcal{H}_{\mathrm{f}}}$ e C um operador compacto. Dado $\epsilon > 0$, tome $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ de forma que $\|\psi - \xi\| < \epsilon$. Assim

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T \|CU(t,0)\xi\| dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \|CU(t,0)(\xi-\psi) + CU(t,0)\psi\| dt \\
&\le \frac{1}{T}\int_0^T \|CU(t,0)(\xi-\psi)\| + \|CU(t,0)\psi\| dt \\
&\le \frac{1}{T}\int_0^T \|C\|\|(\xi-\psi)\| + \|CU(t,0)\psi\| dt \\
&\le \|C\|\|(\xi-\psi)\| + \frac{1}{T}\int_0^T \|CU(t,0)\psi\| dt
\end{aligned}
$$

Se T é suficientemente grande,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|CU(t,0)\psi\|^2 dt < \epsilon$$

e vê-se que $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$. Isso implica que $\mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ é fechado e (a) está provado.

(b) $\mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ é subspaço vetorial pois:

(i) $\xi = 0 \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$.

(ii) Se $\xi, \psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ então dado $\epsilon > 0$ tem-se $\mathcal{O}(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^n B(\psi(t_j), \frac{\epsilon}{2})$ e $\mathcal{O}(\xi) \subset \bigcup_{i=1}^l B(\xi(s_i), \frac{\epsilon}{2})$. Assim para $t \in \mathbb{R}$ existem t_j e s_i tais que

$$\|\psi(t) - \psi(t_j)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|\xi(t) - \xi(s_i)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

logo

$$\|(\psi+\xi)(t) - \psi(t_j) - \xi(s_i)\| \leq \|\psi(t) - \psi(t_j)\| + \|\xi(t) - \xi(s_i)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja, $\mathcal{O}(\psi+\xi) \subset \bigcup_{i,j} B(\psi(t_j) + \xi(s_i), \epsilon)$ e portanto $\psi + \xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$.

(iii) Similarmente, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ então $\lambda\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$.

Para ver que $\mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ é fechado seja $\{\psi_j\} \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ com $\lim_{j\to\infty}\psi_j = \psi$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\forall\ j \geq N$ tem-se

$$\|\psi - \psi_j\| < \frac{\epsilon}{3}$$

como $\psi_N \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ tem-se $\mathcal{O}(\psi_N) \subset \bigcup_{i=1}^l B(\psi_N(t_i), \frac{\epsilon}{3})$. Assim dado $t \in \mathbb{R}$ existe $t_i \in \mathbb{R}$ com $\|\psi_N(t) - \psi_N(t_i)\| < \frac{\epsilon}{3}$ e

$$\begin{aligned}
\|\psi(t) - \psi(t_i)\| &= \|\psi(t) - \psi_N(t) + \psi_N(t) - \psi_N(t_i) + \psi_N(t_i) - \psi(t_i)\| \\
&\leq \|\psi(t) - \psi_N(t)\| + \|\psi_N(t) - \psi_N(t_i)\| + \|\psi_N(t_i) - \psi(t_i)\| \\
&\leq \|\psi - \psi_N\| + \frac{\epsilon}{3} + \|\psi - \psi_N\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

logo $\mathcal{O}(\psi) \subset \bigcup_{i=1}^l B(\psi(t_i), \epsilon)$ e portanto $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ é subspaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$.

(c) Das propriedades de funções peneperiódicas, Teorema 1.4(c) e (f), segue que $\mathcal{H}_{\mathrm{pene}}$ é subspaço vetorial. Suponha que $\{\xi_j\} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{pene}}$ com $\lim_{j\to\infty}\xi_j = \xi$. Dado

$\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que $\forall\ j \geq N$ tem-se $\|\xi_j - \xi\| < \epsilon$. Logo dado $\epsilon > 0$ existe N como acima de forma que se $j \geq N$ tem-se $\forall\ t \in \mathbb{R}$

$$\|\xi(t) - \xi_j(t)\| = \|U(t,0)\xi - U(t,0)\xi_j\| \leq \|\xi - \xi_j\| < \epsilon$$

logo $\xi_j \rightarrow \xi$ uniformemente e como cada $\xi_j(t)$ é peneperiódica segue que $\xi(t)$ é peneperiódica pelo Teorema 1.4(d) , e portanto $\mathcal{H}_{\text{pene}}$ é subspaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$. Do Teorema 1.4(e) segue que $\mathcal{H}_{\text{pene}} \subset \mathcal{H}_{\text{pc}}$. ■

As demonstrações de (a) e (b) do Lema 2.1 foram apresentadas em [21]. $\mathcal{H}_{\text{pene}}$ é um subspaço introduzido neste trabalho.

Tem-se a seguinte caracterização de $\mathcal{H}_{\text{pc}}$, demonstrada em [23],

Lema 2.2 $\psi \in \mathcal{H}_{\text{pc}}$ *se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$ *existe um projetor ortogonal* P_ϵ *que projeta em um subspaço de dimensão finita de* $\mathcal{H}$ *de forma que*

$$\|(Id - P_\epsilon)U(t,0)\psi\| < \epsilon \qquad\qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Demonstração: Suponha $\psi \in \mathcal{H}_{\text{pc}}$, como $U(t,0)$ é unitário, $\mathcal{O}(\psi)$ é um conjunto limitado (por $\|\psi\|$). Seja $\{\varphi_j\}$ uma seqüência ortogonal em $\mathcal{O}(\psi)$. Se a seqüência $\{\varphi_j\}$ é finita então $\mathcal{O}(\psi)$ está contida em um subspaço de dimensão finita e acabou. Se a seqüência $\{\varphi_j\}$ for infinita, seja

$$\lambda_n = \sup_{\varphi \in [\varphi_1,\ldots,\varphi_n]^\perp \cap \mathcal{O}(\psi)} \|\varphi\| \leq \|\psi\|$$

e neste caso basta mostrar que $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponha que $\lambda_n \nrightarrow 0$ então existe $\epsilon_0 > 0$ e uma subseqüência ortogonal $\psi_{n_j} \in ([\varphi_1,\ldots,\varphi_n]^\perp \cap \mathcal{O}(\psi))$ de modo que

$$\|\psi_{n_j}\| \geq \epsilon_0 > 0. \tag{2.1}$$

Como $\{\psi_{n_j}\}$ é ortogonal e limitada então $\psi_{n_j} \rightharpoonup 0$. Mas $\{\psi_{n_j}\}$ está no conjunto precompacto $\mathcal{O}(\psi)$ e assim $\{\psi_{n_j}\}$ tem uma subseqüência convergente, digamos $\{\psi_{n'_j}\}$ que é também convergente a zero, isto é, $\|\psi_{n'_j}\| \rightarrow 0$ e isso contradiz (2.1) e portanto $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$ temos, por hipótese, que $P_\epsilon \mathcal{O}(\psi)$ está contido em um subspaço de dimensão finita e $\|y\| < \epsilon \ \forall \ y \in (Id - P_\epsilon)\mathcal{O}(\psi)$. Sejam $p_1, \dots, p_{n(\epsilon)}$ de modo que

$$P_\epsilon \mathcal{O}(\psi) \subset \bigcup_{i=1}^{n(\epsilon)} B(p_i, \epsilon)$$

e tome $x \in (Id - P_\epsilon)\mathcal{O}(\psi)$. Se $v \in \mathcal{O}(\psi)$ $v = v_\epsilon \oplus v_\epsilon^\perp$ $v_\epsilon \in P_\epsilon \mathcal{O}(\psi)$ $v_\epsilon^\perp \in (Id - P_\epsilon)\mathcal{O}(\psi)$ então para algum j $\|v_\epsilon - p_j\| < \epsilon$ e obtemos

$$\begin{aligned} \|v - p_j \oplus x\|^2 &= \|v_\epsilon - p_j\|^2 + \|v_\epsilon^\perp - x\|^2 \\ &< \epsilon^2 + (\|v_\epsilon^\perp\| + \|x\|)^2 \\ &< \epsilon^2 + (\epsilon + \epsilon)^2 = 5\epsilon^2 \end{aligned}$$

logo $\mathcal{O}(\psi) \subset \bigcup_{i=1}^{n(\epsilon)} B(p_i \oplus x, 5\epsilon^2)$ e sendo ϵ arbitrário segue que $\psi \in \mathcal{H}_{\text{pc}}$. ■

Em [21] foi demonstrado que

Lema 2.3

$$\mathcal{H}_{\text{pc}} \perp \mathcal{H}_{\text{f}}.$$

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{f}}$ e $\xi \in \mathcal{H}_{\text{pc}}$. Então

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \varphi, \xi \rangle dt = \frac{1}{T} \int_0^T \langle U(t,0)\varphi, U(t,0)\xi \rangle dt$$

Para cada $\epsilon > 0$ existe P_ϵ que projeta em um subspaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$ tal que, $\forall \ t$, $\|(Id - P_\epsilon)U(t,0)\xi\| < \frac{\epsilon}{2\|\varphi\|}$; assim

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \xi \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle (P_\epsilon + Id - P_\epsilon)U(t,0)\varphi, U(t,0)\xi \rangle dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle P_\epsilon U(t,0)\varphi, U(t,0)\xi \rangle dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \langle (Id - P_\epsilon)U(t,0)\varphi, U(t,0)\xi \rangle dt \end{aligned}$$

e então

$$|\langle \varphi, \xi \rangle| \leq \|\xi\| \frac{1}{T} \int_0^T \|P_\epsilon U(t,0)\varphi\| dt + \|\varphi\| \frac{1}{T} \int_0^T \|(Id - P_\epsilon)U(t,0)\xi\| dt$$

Como $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_\epsilon U(t,0)\varphi\| dt < \frac{\epsilon}{2\|\xi\|}$$

se T é grande suficiente. Portanto, $|\langle \varphi, \xi \rangle| \leq \epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$, e o lema está demonstrado. ■

A mesma demonstração de [23] para Hamiltonianas periódicas é válida para demonstrar que

Teorema 2.1 *Tem-se que*

(a) $\mathcal{H}_{\mathrm{be}} = \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$*;*

(b) $\mathcal{H}_{\mathrm{f}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ue}}$*.*

Demonstração: (a) Seja $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe P_ϵ que projeta em um subspaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$ de forma que $\|(Id - P_\epsilon)U(t,0)\psi\| < \epsilon$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| \quad &\leq \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)P_\epsilon U(t,0)\psi\| \\ &\quad + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)(Id - P_\epsilon)U(t,0)\psi\|\end{aligned}$$

Como P_ϵ projeta em um subspaço de dimensão finita, o primeiro termo no lado direito da expressão acima se anula para E suficientemente grande, e o segundo termo é limitado por ϵ pois $\|F(A > E)(Id - P_\epsilon)U(t,0)\psi\| \leq \|(Id - P_\epsilon)U(t,0)\psi\| < \epsilon$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\lim_{E\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| \leq \epsilon,$$

para qualquer $\epsilon > 0$, e $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{be}}$.

Reciprocamente, seja $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{be}}$. Pela Definição 2.1,

$$\lim_{E\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| = 0,$$

logo para qualquer $\epsilon > 0$ existe E_ϵ de forma que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E_\epsilon)U(t,0)\psi\| < \epsilon$; portanto

$$\|(Id - F(A \leq E_\epsilon))U(t,0)\psi\| = \|F(A > E_\epsilon)U(t,0)\psi\| < \epsilon,$$

e, aplicando o Lema 2.2 com $P_\epsilon = F(A \le E_\epsilon)$, obtemos $\psi \in \mathcal{H}_{\rm pc}$.

(b) Seja $\psi \in \mathcal{H}_{\rm f}$ com $\|\psi\| = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
1 &= \|\psi\| = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|U(t,0)\psi\|dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [\|F(A > E)U(t,0)\psi + F(A \le E)U(t,0)\psi\|]dt \\
&\le \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|F(A > E)U(t,0)\psi\|dt + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|F(A \le E)U(t,0)\psi\|dt \\
&\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|F(A \le E)U(t,0)\psi\|dt.
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.1(iii) com $C = F(A \le E)$, o segundo termo no lado direito tende a zero quando τ tende ao infinito; assim $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| = 1$, para todo E, portanto $\psi \in \mathcal{H}_{\rm ue}$. ■

Conseguimos demonstrar que

Teorema 2.2 *Seja $H(t)$ uma Hamiltoniana geral e A como acima, então se $\psi \in$ dom A e $\psi \notin \mathcal{H}_{\rm pc}$ então $\psi \in \mathcal{S}^{\rm un}(A)$.*

Demonstração: Seja $\psi \in$ dom A de modo que $\psi \notin \mathcal{H}_{\rm pc}$. Lembre-se que $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$ denotam os autovalores de A (todos com multiplicidade finita e $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$) e seja P_N o projetor no subspaço gerado pelos autovetores de A cujos autovalores sejam menores ou igual a λ_N, logo $\dim {\rm Im} P_N < \infty$ e $AP_N = P_N A$ em dom$A$. Assim para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t), A\psi(t)\rangle &= \langle (P_N + (Id - P_N))\psi(t), (P_N + (Id - P_N))A\psi(t)\rangle \\
&= \langle P_N\psi(t), P_N A\psi(t)\rangle + \langle (Id - P_N)\psi(t), (Id - P_N)A\psi(t)\rangle \\
&= \langle P_N\psi(t), AP_N\psi(t)\rangle + \langle (Id - P_N)\psi(t), A(Id - P_N)\psi(t)\rangle \\
&\ge \langle (Id - P_N)\psi(t), A(Id - P_N)\psi(t)\rangle \\
&\ge \lambda_N\langle (Id - P_N)\psi(t), (Id - P_N)\psi(t)\rangle \\
&= \lambda_N\|(Id - P_N)\psi(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Como $\psi \notin \mathcal{H}_{\rm pc}$ pelo Lema 2.2 existe $\epsilon_0 > 0$ de modo que para qualquer projetor ortogonal P em um subspaço de dimensão finita existe t_P de forma que $\|(Id -$

$P)\psi(t_P)\| \geq \epsilon_0$. Assim para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $t_{P_N} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\|(Id - P_N)\psi(t_{P_N})\| \geq \epsilon_0$$

logo

$$\sup_t |\langle \psi(t), A\psi(t)\rangle| \geq \lambda_N \epsilon_0^2 \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

e como $\lambda_N \to \infty$ para $N \to \infty$ segue que $\langle \psi(t), A\psi(t)\rangle$ não é limitado. ■

Corolário 2.1 *(a)* $(\mathrm{dom}\ A \cap \mathcal{H}_{\mathrm{f}}) \setminus \{0\} \subset \mathcal{S}^{\mathrm{un}}(A)$*;*

(b) $\mathcal{S}^{\mathrm{bd}}(A) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$.

Demonstração: (a) Seja $0 \neq \xi \in \mathrm{dom}\ A \cap \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$, então $\xi \in \mathrm{dom}\ A$ e $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$. Pelo Lema 2.3 como $\xi \neq 0$ segue que $\xi \notin \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$ e pelo teorema acima segue que $\xi \in \mathcal{S}^{\mathrm{un}}(A)$.

(b) Segue facilmente do teorema. ■

Se a Hamiltoniana $H(t)$ for da forma $H(t) = H_0 + V(t)$ com H_0 auto-adjunto, positivo, não-limitado e com espectro discreto, então os resultados acima valem com $A = H_0$.

O resultado pode não valer se A possuir um autovalor λ_l de multiplicidade infinita, pois neste caso pode existir $\psi \in \mathcal{H}$ de forma que para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t)$ esteja no auto-espaço correspondente ao autovalor λ_l que tem dimensão infinita com $\mathcal{O}(\psi)$ não sendo precompacta, mas neste caso teríamos

$$\langle \psi(t), A\psi(t)\rangle = \langle \psi(t), \lambda_l \psi(t)\rangle = \lambda_l \|\psi(t)\|^2$$

que por sua vez seria limitado.

2.2 Hamiltonianas Periódicas

No caso periódico temos à nossa disposição o operador de Floquet $U_{\mathrm{F}} = U(T, 0)$ e denotaremos por $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}$ o subspaço espectral pontual de U_{F} e por $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ o subspaço espectral contínuo de U_{F}. Nesta seção o operador A é como na seção anterior.

Teorema 2.3 (RAGE) *Seja $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador compacto e $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, então*

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|CU(t,0)\psi\| dt = 0$$

A demonstração deste teorema é um tanto longa e pode ser encontrada no trabalho de Enss e Veselic [28]. Como conseqüência deste teorema conclui-se que, no caso periódico, se $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ então $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ e portanto pelo Corolário 2.1 segue que se A é uma “energia abstrata”e $0 \neq \xi \in \mathrm{dom}\ A$, então a aplicação $\langle U(t,0)\xi, AU(t,0)\xi\rangle$ não é limitada.

Em [23] é demonstrado que $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{p}}$ se, e somente se, $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$. Conseguimos demonstrar um pouco mais, como discutido no que segue.

Lema 2.4 *Seja $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{p}}$ um autovetor de U_{F}, isto é, $U_{\mathrm{F}}\xi = e^{-i\alpha}\xi$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pene}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$.*

Demonstração: Como $U(t,0)$ é fortemente contínuo tem-se que a aplicação $t \mapsto \xi(t)$ é contínua.

Qualquer $t \in \mathbb{R}$ pode ser escrito na forma $t = nT + s$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq s < T$, e temos $U_{\mathrm{F}}\xi = e^{-i\alpha}\xi$ e $U_{\mathrm{F}}^{-1}\xi = e^{i\alpha}\xi$. Como para $t \geq 0$ $(n \geq 0)$

$$\begin{aligned} U(t,0)\xi &= U(s+nT,nT)U(nT,(n-1)T)\ldots U(T,0)\xi \\ &= U(s,0)\underbrace{U(T,0)\ldots U(T,0)}_{n \text{ vezes}}\xi = U(s,0)e^{-in\alpha}\xi \end{aligned}$$

e para $t < 0$ $(n < 0)$

$$\begin{aligned} U(t,0)\xi &= U(s+nT,nT)U(nT,(n+1)T)\ldots U(-T,0)\xi \\ &= U(s,0)\underbrace{U(T,0)^{-1}\ldots U(T,0)^{-1}}_{-n \text{ vezes}}\xi = U(s,0)e^{-in\alpha}\xi \end{aligned}$$

tem-se, para $t = nT + s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq s < T$, que

$$U(t,0)\xi = U(s,0)e^{-in\alpha}\xi.$$

Portanto para cada $t = nT + s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \xi(t+T) &= U(t+T,0)\xi = U(s,0)e^{-i(n+1)\alpha}\xi \\ &= e^{-i\alpha}U(s,0)e^{-in\alpha}\xi = e^{-i\alpha}\xi U(t,0)\xi = e^{-i\alpha}\xi(t) \end{aligned}$$

e assim $t \to \xi(t)$ é peneperiódica pelo Teorema 1.4(i). ■

É uma conseqüência do Teorema RAGE e do Lema 2.3 que

Lema 2.5 $\mathcal{H}_{\rm pc} \perp \mathcal{H}_{\rm c}$.

Em [23] é demonstrado que $\mathcal{H}_{\rm p} = \mathcal{H}_{\rm be} = \mathcal{H}_{\rm pc}$ e $\mathcal{H}_{\rm c} = \mathcal{H}_{\rm ue} = \mathcal{H}_{\rm f}$, no caso periódico. Conseguimos demonstrar que $\mathcal{H}_{\rm pene} = \mathcal{H}_{\rm pc}$ e então temos

Teorema 2.4 *Se a Hamiltoniana é periódica no tempo então*

(a) $\mathcal{H}_{\rm p} = \mathcal{H}_{\rm be} = \mathcal{H}_{\rm pc} = \mathcal{H}_{\rm pene}$*;*

(b) $\mathcal{H}_{\rm c} = \mathcal{H}_{\rm ue} = \mathcal{H}_{\rm f}$*.*

Demonstração: (a) (i) $\mathcal{H}_{\rm pc} = \mathcal{H}_{\rm be}$. Já foi demonstrado no Teorema 2.1(a).

(ii) $\mathcal{H}_{\rm pene} \subset \mathcal{H}_{\rm pc}$. Foi demonstrado no Lema 2.1(c).

(iii) $\mathcal{H}_{\rm p} \subset \mathcal{H}_{\rm pc}$. É uma conseqüência imediata de (ii) e dos Lemas 2.4 e 2.1(b).

(iv) $\mathcal{H}_{\rm pc} \subset \mathcal{H}_{\rm p}$. Segue facilmente do Lema 2.5, e $\mathcal{H}_{\rm p}^{\perp} = \mathcal{H}_{\rm c}$; na verdade, $\mathcal{H}_{\rm pc} \subset \mathcal{H}_{\rm c}^{\perp} = \mathcal{H}_{\rm p}$.

(v) $\mathcal{H}_{\rm pc} \subset \mathcal{H}_{\rm pene}$. É uma conseqüência imediata dos Lemas 2.4 e 2.1(c) que $\mathcal{H}_{\rm p} \subset \mathcal{H}_{\rm pene}$. Como já demonstramos que $\mathcal{H}_{\rm p} = \mathcal{H}_{\rm pc}$ o resultado segue.

(b) (i) $\mathcal{H}_{\rm c} \subset \mathcal{H}_{\rm f}$. Segue facilmente do Teorema 2.3.

(ii) $\mathcal{H}_{\rm f} \subset \mathcal{H}_{\rm c}$. A demonstração é imediata do Lema 2.3 junto com (iii) e (iv) acima e $\mathcal{H}_{\rm p}^{\perp} = \mathcal{H}_{\rm c}$; na verdade, $\mathcal{H}_{\rm f} \subset \mathcal{H}_{\rm pc}^{\perp} = \mathcal{H}_{\rm p}^{\perp} = \mathcal{H}_{\rm c}$.

(iii) $\mathcal{H}_{\rm f} \subset \mathcal{H}_{\rm ue}$. Foi demonstrado no Teorema 2.1(b).

(iv) $\mathcal{H}_{\rm ue} \subset \mathcal{H}_{\rm f}$. Seja $\psi \in \mathcal{H}_{\rm ue}$ com $\|\psi\| = 1$, e suponha que $\psi = \psi_f \oplus \psi_p$, $\psi_f \in \mathcal{H}_{\rm f} = \mathcal{H}_{\rm c}$ e $\psi_p \in \mathcal{H}_{\rm p}$. Então,

$$\begin{aligned} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| &= \|F(A > E)U(t,0)(\psi_f \oplus \psi_p)\| \\ &\leq \|F(A > E)U(t,0)\psi_f\| + \|F(A > E)U(t,0)\psi_p\|, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\psi \in \mathcal{H}_{\text{ue}}$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{E \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi\| \\ &\leq \lim_{E \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi_f\| + \lim_{E \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(A > E)U(t,0)\psi_p\|. \end{aligned}$$

O último termo dessa identidade se anula pois $\psi_p \in \mathcal{H}_{\text{p}} = \mathcal{H}_{\text{be}}$, e vê-se imediatamente que $\psi = \psi_f \in \mathcal{H}_{\text{f}}$. ■

Se $H(t)$ é uma Hamiltoniana geral em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, não necessariamente periódica, como vimos no Capítulo 1 que temos associado à mesma o operador quase-energia $K = -i\frac{d}{dt} + H(t)$ agindo no espaço de Hilbert estendido $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}, dt)$. Pode-se então considerar a Hamiltoniana $\tilde{H}(t)$, independente do tempo, dada por $\tilde{H}(t) = K$ para todo t, a qual é, em particular, periódica e tem operador de Floquet e^{-iK}. A esta Hamiltoniana pode-se aplicar os resultados desta seção. Em particular, se $\mathcal{K}_{\text{p}}(K)$ e $\mathcal{K}_{\text{c}}(K)$ denotam, respectivamente, o subspaço espectral pontual e contínuo de K, obtém-se:

Corolário 2.2 *(a)* $\psi \in \mathcal{K}_{\text{p}}(K)$ *se, e somente se,* $\mathcal{O}(\psi) = \{e^{-iK\sigma}\psi : \sigma \in \mathbb{R}\}$ *é precompacto em* $\mathcal{K}$ *se, e somente se, a aplicação* $\sigma \mapsto e^{-iK\sigma}\psi$ *é peneperiódica.*
(b) $\psi \in \mathcal{K}_{\text{c}}(K)$ *se, e somente se, para cada operador compacto* C *em* $\mathcal{K}$ *tem-se*

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|Ce^{-iK\sigma}\psi\| d\sigma = 0$$

Lembrando que $(e^{-iK\sigma}f)(t) = U(t, t-\sigma)f(t-\sigma)$, conseguimos o seguinte resultado.

Proposição 2.1 *Seja* $\xi \in \mathcal{H}$ *de modo que* $1 \otimes \xi \in \mathcal{K}_{\text{p}}(K)$ *então a aplicação* $t \mapsto U(t,0)^{-1}\xi$ *é peneperiódica. Se os autovetores de* K *forem da forma* $\psi_m = 1 \otimes \xi_m$ *com* $\xi_m \in \mathcal{H}$ *então* $\xi \in \mathcal{H}_{\text{pene}}$.

Demonstração: Se $1 \otimes \xi \in \mathcal{K}_{\text{p}}(K)$ então

$$1 \otimes \xi = \sum_m c_m \psi_m$$

com $K\psi_m = \lambda_m \psi_m$. Logo

$$e^{iK\sigma}(1 \otimes \xi) = \sum_m c_m e^{i\lambda_m \sigma} \psi_m$$

e portanto para cada $t \in \mathbb{R}$

$$U(t, t+\sigma)\xi = (e^{iK\sigma}(1 \otimes \xi))(t) = \sum_m c_m e^{-i\lambda_m \sigma} \psi_m(t)$$

e conclui-se então, que para cada t fixo, a aplicação

$$\sigma \mapsto U(t, t+\sigma)\xi$$

é peneperiódica, em particular tomando $t = 0$ tem-se que $\sigma \mapsto U(0, \sigma)\xi$ é peneperiódica e o resultado segue.

Agora, se os autovetores de K forem da forma $\psi_m = 1 \otimes \xi_m$ então

$$\xi(t) = U(t, 0)\xi = (e^{-iKt}(1 \otimes \xi))(t) = \sum_m c_m e^{-i\lambda_m t} \psi_m(t) = \sum_m c_m e^{-i\lambda_m t} \xi_m.$$

Se a soma for finita segue que a aplicação $t \mapsto \xi(t)$ é peneperiódica pois é um polinômio trigonométrico. Se a soma for infinita tem-se que $\sum_{m=1}^{k} c_m e^{-i\lambda_m t} \xi_m \to \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-i\lambda_m t} \xi_m$ uniformemente quando $k \to \infty$; e portanto a aplicação $t \mapsto \xi(t)$ é peneperiódica, ou seja, $\xi \in \mathcal{H}_{\text{pene}}$. ■

Como vimos, para sistemas quânticos periódicos tem-se

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pc}} \oplus \mathcal{H}_{\text{f}}. \tag{2.2}$$

Apresentaremos agora um exemplo, que aparece em [21], o qual mostra que para Hamiltonianas gerais a relação (2.2) pode não valer. Embora um tanto peculiar, esse exemplo ilustra as possíveis propriedades não usuais de sistemas com dependência temporal arbitrária. Definimos o subspaço $\mathcal{H}_{\text{a}}$ pela relação

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pc}} \oplus \mathcal{H}_{\text{f}} \oplus \mathcal{H}_{\text{a}}.$$

Exemplo 2.1 *Seja $\{\epsilon_n\}$, $n \geq 1$, uma seqüência com $\epsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$. O modelo é dado pela Hamiltoniana kicked*

$$H(t) = p^2 + x \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \delta(t - n), \qquad x \in [0, 2\pi) \tag{2.3}$$

agindo em $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$, *em que* $p = -i\frac{d}{dx}$. *O operador evolução temporal até* $t = (n+1-0)$, $n \in \mathbb{N}$ *(um pouco antes do* $(n+1)-$*ésimo kick), é dado por*

$$U(n,0) \equiv V_n V_{n-1} \dots V_1$$

em que $V_j = e^{-ip^2} e^{-i\epsilon_j x}$. *Entre dois kicks consecutivos temos a evolução temporal livre. Se denotarmos os auto-estados da Hamiltoniana não perturbada* p^2 *por* $\psi_s = e^{-isx}$ *e* $\Gamma_j = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_j$, *temos*

$$U(n,0)\psi_s = \exp\Big[-i\sum_{j=1}^{n}(\Gamma_j + s)^2\Big] \exp[-i(\Gamma_n + s)x]$$

$$\langle U(n,0)\psi_s, p^2 U(n,0)\psi_s\rangle = (\Gamma_n + s)^2.$$

Sejam $u_n = 4(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10)$ *para* $n \geq 1$, $u_0 = 0$, *e escolha*

$$\epsilon_j \doteq \begin{cases} 1 & se \quad j \in A_n \doteq [u_n + 1, u_n + 10^{n+1}] \\ -1 & se \quad j \in B_n \doteq [u_n + 1 + 10^{n+1}, u_n + 2 \times 10^{n+1}] \\ 0 & se \quad j \in C_n \doteq [u_n + 1 + 2 \times 10^{n+1}, u_{n+1}] \end{cases} \tag{2.4}$$

Como $\epsilon_j = 0$ *se, e somente se,* $j \in C_n$ *e (o símbolo* $\#Z$ *denota a cardinalidade do conjunto* Z*)*

$$\frac{\#C_n}{\#A_n + \#B_n + \#C_n} = \frac{1}{2}$$

segue que

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \|P_s U(t,0)\psi_s\| dt = \frac{1}{2}$$

em que P_s *é o operador projeção (compacto) no subspaço gerado por* ψ_s. *Portanto,* $\psi_s \notin \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ *para todo* s, *como* $\{\psi_s : s \in \mathbb{Z}\}$ *é uma base de* $\mathcal{H}$ *e pelo Lema 2.1(a)* $\mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ *é subspaço fechado, segue que* $\mathcal{H}_{\mathrm{f}} = \{0\}$.

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq s$, *existe* $j \in \mathbb{N}$ *de forma que* $U(j,0)\psi_s = e^{i\theta(s,m)}\psi_m$ *para algum fator* $\theta(s,m)$, *o conjunto* $\{U(t,0)\psi_s : t \in \mathbb{R}\}$ *não é precompacto; então* $\psi_s \notin \mathcal{H}_{\mathrm{pc}}$, *para todo* s, *e podemos concluir que* $\mathcal{H}_{\mathrm{pc}} = \{0\}$. *Portanto para o modelo (2.3)-(2.4),* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{a}}$.

Assim, para o modelo (2.3)-(2.4) tem-se pelo Teorema 2.2 que se $0 \neq \psi \in \operatorname{dom} p^2$ então $\psi \in \mathcal{S}^{\mathrm{un}}(p^2)$. Ou seja, $\mathcal{H}_{\mathrm{a}} = \overline{\mathcal{S}^{\mathrm{un}}(p^2)}$.

2.3 Hamiltonianas Quaseperiódicas

Neste caso usaremos o formalismo de Jauslin-Lebowitz como na Seção 1.4 para Hamiltonianas quaseperiódicas, e temos à nossa disposição o operador de Floquet generalizado U_{F} (veja (1.4)), definido em $\mathcal{K}_1 = L^2(S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi})$, e o operador quase-energia generalizado $\tilde{K}$ (veja (1.2)) definido em $\tilde{\mathcal{K}} = L^2(S^1 \times S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi}\frac{d\theta_2}{2\pi})$, ambos com propriedades espectrais equivalentes. Nesta seção trabalharemos com apenas duas freqüências, mas os resultados permanecem válidos para um número finito de freqüências, em espaços adequados.

Para t fixo seja o operador unitário $U(t) : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_1$ dado por $(U(t)\psi)(\theta_1) = U_{(\theta_1,0)}(t,0)\psi(\theta_1)$, ou seja, $U(t) = \int_{S^1}^{\oplus} U_{(\theta_1,0)}(t,0)\frac{d\theta_1}{2\pi}$ e dada $\psi \in \mathcal{K}_1$ seja

$$\tilde{\mathcal{O}}(\psi) = \{\psi(t) = U(t)\psi : t \in \mathrm{I\!R}\}$$

a órbita de ψ. Seja A um operador em $\mathcal{K}_1$ auto-adjunto, positivo, não-limitado, com espectro discreto e com $U(t)\mathrm{dom}\ A \subset \mathrm{dom}\ A$ e $F(A > E)$ o operador projeção como anteriormente. Denotaremos

Definição 2.2 *(a) $\mathcal{K}_{1,p}$ o subspaço espectral pontual do operador de Floquet generalizado U_{F}.*

(b) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{c}}$ o subspaço espectral contínuo de U_{F}.

(c) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{f}} \doteq \big\{\psi \in \mathcal{K}_1 : \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|CU(t)\psi\|_{\mathcal{K}_1} dt = 0$ para qualquer operador compacto C em $\mathcal{K}_1\big\}$.

(d) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{pc}} = \{\psi \in \mathcal{K}_1 : \tilde{\mathcal{O}}(\psi)$ é precompacta em $\mathcal{K}_1\}$.

(e) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{pene}} \doteq \{\psi \in \mathcal{K}_1 :$ a aplicação $\mathrm{I\!R} \ni t \mapsto \psi(t)$ é peneperiódica$\}$.

(f) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{be}} \doteq \{0 \neq \psi \in \mathcal{K}_1 : \lim_{E\to\infty}\sup_{t\in\mathrm{I\!R}} \|F(A > E)U(t)\frac{\psi}{\|\psi\|}\| = 0\} \cup \{0\}$.

(g) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{ue}} \doteq \{0 \neq \psi \in \mathcal{K}_1 : \lim_{E\to\infty}\sup_{t\in\mathrm{I\!R}} \|F(A > E)U(t)\frac{\psi}{\|\psi\|}\| = 1\} \cup \{0\}$.

De forma análoga à Seção 2.1 demonstra-se:

Proposição 2.2 *(a) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{f}}$, $\mathcal{K}_{1,\mathrm{pc}}$ e $\mathcal{K}_{1,\mathrm{pene}}$ são subspaços fechados de $\mathcal{K}_1$.*

(b) $\psi \in \mathcal{K}_{1,\mathrm{pc}}$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe um projetor ortogonal P_ϵ que

projeta em um subspaço de dimensão finita de $\mathcal{K}_1$ *de forma que*

$$\|(Id - P_\epsilon)U(t)\psi\| < \epsilon \qquad\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(c) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{pc}} \perp \mathcal{K}_{1,\mathrm{f}}$.

Em [42] é demonstrado o análogo do Teorema RAGE para Hamiltonianas quaseperiódicas. A demonstração é uma adaptação da afirmação similar para o caso periódico do trabalho [28]. Assim, tem-se

Teorema 2.5 (RAGE) *Seja* $C : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_1$ *um operador compacto e* $\phi \in \mathcal{K}_{1,\mathrm{c}}$, *então*

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|CU(t)\phi\|_{\mathcal{K}_1} dt = 0.$$

Sendo tal resultado válido conclui-se

Corolário 2.3 *(a)* $\mathcal{K}_{1,\mathrm{c}} \subset \mathcal{K}_{1,\mathrm{f}}$;

(b) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{pc}} \perp \mathcal{K}_{1,\mathrm{c}}$.

Portanto, de forma análoga ao Teorema 2.4, foi demonstrado em [23] que

Teorema 2.6 *Para Hamiltonianas quaseperiódicas tem-se*

(a) $\mathcal{K}_{1,p} = \mathcal{K}_{1,\mathrm{pc}} = \mathcal{K}_{1,\mathrm{be}}$;

(b) $\mathcal{K}_{1,\mathrm{c}} = \mathcal{K}_{1,\mathrm{ue}} = \mathcal{K}_{1,\mathrm{f}}$.

De forma análoga ao Teorema 2.2 demonstra-se que

Teorema 2.7 *Seja* $H_\theta(t)$ *uma hamiltoniana quaseperiódica e* A *como acima, então se* $\psi \in \mathrm{dom}\ A$ *e* $0 \neq \psi \in \mathcal{K}_{1,\mathrm{c}}$ *então*

$$t \mapsto \langle U(t)\psi, AU(t)\psi\rangle_{\mathcal{K}_1}$$

não é limitado.

Assim, o fato de o operador de Floquet generalizado ter espectro contínuo implicará em crescimento não-limitado da energia no espaço estendido $\mathcal{K}_1$, mas não necessariamente no espaço de Hilbert original $\mathcal{H}$.

Na formulação de Jauslin-Lebowitz, para cada $\theta \in \Omega$ tem-se uma Hamiltoniana $H_\theta(t)$ e pode-se definir, naturalmente, os subconjuntos no espaço de Hilbert original $\mathcal{H}$, dependendo de θ; $\mathcal{O}_\theta(\xi) \doteq \{\xi_\theta(t) = U_\theta(t,0)\xi : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{H}^\theta_{\mathrm{pc}}$, $\mathcal{H}^\theta_{\mathrm{f}}$, $\mathcal{H}^\theta_{\mathrm{pene}}$, $\mathcal{H}^\theta_{\mathrm{be}}$, $\mathcal{H}^\theta_{\mathrm{ue}}$, $\mathcal{S}^{\mathrm{bd}}_\theta$ e $\mathcal{S}^{\mathrm{un}}_\theta$, sendo válidos os resultados da Seção 2.1 para cada $\theta \in \Omega$. No caso periódico, em que $\Omega = S^1$, tem-se em particular que $\mathcal{H}^\theta_{\mathrm{pene}} = \mathcal{H}^\theta_{\mathrm{pc}}$ para cada $\theta \in S^1$, pois $H_\theta(t + T_1) = H_{g_{T_1}(\theta)}(t) = H_\theta(t)$ e são válidos os resultados da Seção 2.2. O exemplo que segue mostrará que o mesmo não é verdadeiro para o caso quaseperiódico.

Primeiramente, vamos introduzir o modelo e alguns resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [6].

Uma Hamiltoniana quaseperiódica geral agindo em $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ é da forma

$$H_\theta(t) = h_0(t)Id + \sum_{j=1}^{3} h_j(t)\sigma_j \tag{2.5}$$

em que $h_j(t)$ são funções quaseperiódicas reais, isto é, $h_j(t) = \bar{h}_j(\omega_1 t + \theta_1, \omega_2 t + \theta_2)$ com $\bar{h}_j(\theta_1, \theta_2)$ contínua e 2π-periódica nos dois argumentos $\theta_1,\ \theta_2 \in S^1$; $\omega_1,\ \omega_2$ números reais positivos e σ_j são as matrizes de Pauli, ou seja,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \alpha$.

A Hamiltoniana é uma matriz hermitiana 2×2 com traço zero, e assim o propagador $U_\theta(t,s)$ é unitário com determinante um, isto é, $U_\theta(t,s) \in \mathrm{SU}(2)$.

Sabemos que $U_{\mathrm{F}} = \mathcal{T}_{-T_2} u_1$ em que $u_1(\theta_1) = U_{(\theta_1,0)}(T_2, 0) \in \mathrm{SU}(2)$ e portanto tem a forma

$$u_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

com $|a|^2 + |b|^2 = 1$, e $\bar{b}$ denota o complexo conjugado de b.

Para o próximo lema incluímos a demonstração apresentada em [6], pois a mesma é usada na construção de nosso exemplo.

Lema 2.6 *Para qualquer escolha de funções C^l, a, b de S^1 em $\mathbb{C}$, $l = 0, 1, \ldots, \infty$, com $|a|^2 + |b|^2 = 1$ existe algum $H_\theta(t)$ quaseperiódico da forma (2.5) de modo que (2.6) é o operador monodromia correspondente.*

Demonstração: 1° passo: Se o propagador $U_{(\theta_1,0)}(t,0)$ é dado para todo $\theta_1 \in S^1$ e para cada $t \in [0, T_2]$ então ele é completamente determinado para todo t: Seja $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} U_{(\theta_1,0)}(kT_2,0) &= U_{(\theta_1,0)}(kT_2,(k-1)T_2)\ldots U_{(\theta_1,0)}(T_2,0) \\ &= U_{(\theta_1+(k-1)2\pi\alpha,0)}(T_2,0)\ldots U_{(\theta_1+2\pi\alpha,0)}(T_2,0)U_{(\theta_1,0)}(T_2,0) \\ &= u_1(\theta_1+(k-1)2\pi\alpha)\ldots u_1(\theta_1+2\pi\alpha)u_1(\theta_1). \end{aligned}$$

Para $k = 0$, $U_{(\theta_1,0)}(0T_2, 0) = Id$ e para $k < 0$

$$\begin{aligned} U_{(\theta_1,0)}(kT_2,0) &= U_{(\theta_1,0)}(kT_2,(k+1)T_2)\ldots U_{(\theta_1,0)}(-T_2,0) \\ &= U_{(\theta_1+k2\pi\alpha,0)}(0,T_2)\ldots U_{(\theta_1-2\pi\alpha,0)}(0,T_2) \\ &= u_1(\theta_1+k2\pi\alpha)^{-1}u_1(\theta_1+(k+1)2\pi\alpha)^{-1}\ldots u_1(\theta_1-2\pi\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Agora dado $t \in \mathbb{R}$ tem-se $t = kT_2 + \delta_t$ com $0 \le \delta_t < T_2$ e então

$$\begin{aligned} U_{(\theta_1,0)}(t,0) &= U_{(\theta_1,0)}(kT_2+\delta_t,0) \\ &= U_{(\theta_1,0)}(kT_2+\delta_t,kT_2)U_{(\theta_1,0)}(kT_2,0) \\ &= U_{(\theta_1+k2\pi\alpha,0)}(\delta_t,0)U_{(\theta_1,0)}(kT_2,0). \end{aligned}$$

2^o passo: Construção do propagador para $t \in [0, T_2]$:

O conjunto $\{u_1(\theta_1) : \theta_1 \in S^1\} \subset \mathrm{SU}(2)$ é simplesmente conexo. Assim para $\theta_1 \in S^1$ fixado podemos construir uma função $v(t;\theta_1)$, $t \in [0, T_2]$, que é um caminho diferenciável em SU(2) que liga a Id em $t = 0$ com $u_1(\theta_1)$ em $t = T_2$. Com essa v definimos para $t = kT_2 + \delta_t$

$$U_{(\theta_1,0)}(t,0) = v(\delta_t;\theta_1 + k2\pi\alpha)U_{(\theta_1,0)}(kT_2,0).$$

3º passo: Construção da Hamiltoniana: Seja $h_{(\theta_1,0)}(t)$ dada por

$$\begin{aligned} h_{(\theta_1,0)}(t) &= \Big(i\frac{\partial}{\partial t}U_{(\theta_1,0)}(t,0)\Big)U_{(\theta_1,0)}(t,0)^{-1} \\ &= \Big(i\frac{\partial}{\partial t}v(\delta_t;\theta_1 + k2\pi\alpha)\Big)v(\delta_t,\theta_1 + k2\pi\alpha)^{-1} \\ &\doteq V(\delta_t;\theta_1 + k2\pi\alpha) \end{aligned}$$

Procedemos como segue para verificar que $h_{(\theta_1,0)}(t)$ é quaseperiódico e construir dele uma Hamiltoniana mais geral dependendo em dois parâmetros $\theta_1,\ \theta_2$: Levando em conta que

$$\delta_t = (t)_{\mathrm{mod}T_2} = \frac{1}{\omega_2}(\omega_2 t)_{\mathrm{mod}2\pi}, \qquad kT_2 = t - \frac{1}{\omega_2}(\omega_2 t)_{\mathrm{mod}2\pi}$$

e V é 2π-periódica no segundo argumento

$$\begin{aligned} h_{(\theta_1,0)}(t) &= V\left(\frac{1}{\omega_2}(\omega_2 t)_{\mathrm{mod}2\pi};\Big(\theta_1 + \omega_1 t - \frac{\omega_1}{\omega_2}(\omega_2 t)_{\mathrm{mod}2\pi}\Big)_{\mathrm{mod}2\pi}\right) \\ &= V\Big(\frac{1}{\omega_2}(\omega_2 t)_{\mathrm{mod}2\pi};(\theta_1 + \omega_1 t)_{\mathrm{mod}2\pi} - \frac{\omega_1}{\omega_2}(\omega_2 t)_{\mathrm{mod}2\pi}\Big). \end{aligned}$$

Definindo a função 2π-periódica nos dois argumentos

$$A(\vartheta_1,\vartheta_2) = V\Big(\frac{1}{\omega_2}(\vartheta_2)_{\mathrm{mod}2\pi};(\vartheta_1)_{\mathrm{mod}2\pi} - \frac{\omega_1}{\omega_2}(\vartheta_2)_{\mathrm{mod}2\pi}\Big)$$

podemos definir a Hamiltoniana quaseperiódica

$$H_\theta(t) = A(\omega_1 t + \theta_1;\omega_2 t + \theta_2)$$

que por construção tem u_1 como matriz monodromia. ■

Na Seção 2.2 (Teorema 2.4) demonstramos que para Hamiltonianas com dependência temporal periódica, uma órbita é precompacta se, e somente se, ela é peneperiódica. O próximo exemplo, que construímos, demonstra que já no caso de dependência temporal quaseperiódica podemos encontrar órbitas precompactas que não são peneperiódicas.

Exemplo 2.2 *Seja* $u_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}$, *é conhecido que o operador de Floquet correspondente tem espectro absolutamente contínuo puro para qualquer* $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ *irracional. Pelo Lema 2.6 existe uma Hamiltoniana* $H_\theta(t)$ *da forma (2.5) que tem* $u_1(\theta_1) = U_{(\theta_1,0)}(T_2, 0)$ *como operador monodromia, e pela construção feita em tal lema tem-se para* $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$

$$\begin{aligned} U_{(\theta_1,0)}(kT_2, 0) &= u_1(\theta_1 + (k-1)2\pi\alpha) \dots u_1(\theta_1 + 2\pi\alpha)u_1(\theta_1) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\theta_1+(k-1)2\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta_1+(k-1)2\pi\alpha)} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\theta_1+(k-1)2\pi\alpha)} \dots e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta_1+(k-1)2\pi\alpha)} \dots e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(k\theta_1+(1+2+\dots(k-1))2\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-i(k\theta_1+(1+2+\dots(k-1))2\pi\alpha)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{ik(\theta_1+(k-1)\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-ik(\theta_1+(k-1)\pi\alpha)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e para $k < 0$ *o mesmo é válido; portanto para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *tem-se que*

$$U_{(\theta_1,0)}(kT_2, 0) = \begin{pmatrix} e^{ik(\theta_1+(k-1)\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-ik(\theta_1+(k-1)\pi\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Além disso, para $\theta_1 \in S^1$ *defina para* $0 \le t \le T_2$

$$v(t; \theta_1) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)} \end{pmatrix}$$

então $v(t; \theta_1)$ *é diferenciável e satisfaz*

$$v(0; \theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id, \qquad v(T_2; \theta_1) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} = u_1(\theta_1).$$

e tem-se que para $t \in \mathbb{R}$, $t = kT_2 + \delta_t$, $0 \le \delta_t \le T_2$

$$U_{(\theta_1,0)}(t, 0) = v(\delta_t; \theta_1 + k2\pi\alpha)U_{(\theta_1,0)}(kT_2, 0),$$

ou seja, tem-se que

$$U_{(\theta_1,0)}(t,0) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)} \end{pmatrix}$$

Assim para $\xi \in \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ *tem-se*

$$U_{(\theta_1,0)}(t,0)\xi = \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)}\xi_1 \\ e^{-i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)}\xi_2 \end{pmatrix}$$

Como a aplicação, para $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin at^2$ *não é peneperiódica, pois não é uniformemente contínua (Teorema 1.4(b)), tem-se que a aplicação* $t \mapsto e^{iat^2}$ *não é peneperiódica (Teorema 1.4(j)). Disto conclui-se que a aplicação*

$$t \mapsto g(t) = e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1+(\frac{t}{T_2}-1)\pi\alpha)} = e^{i\frac{t}{T_2}\theta_1} e^{it^2\frac{\omega_1\omega_2}{4\pi}} e^{-it\frac{\omega_1}{2}}$$

não é peneperiódica, pois se fosse teríamos que $e^{-i\frac{t}{T_2}\theta_1}g(t)e^{it\frac{\omega_1}{2}} = e^{it^2\frac{\omega_1\omega_2}{4\pi}}$ *seria peneperiódica (Teorema 1.4(k)).*

Portanto se $\xi \neq 0$ *então a aplicação* $t \mapsto U_{(\theta_1,0)}(t,0)\xi$ *não é peneperiódica para todo* $\theta_1 \in S^1$ *(Teorema 1.4(l) e (c)). E temos um exemplo de órbita precompacta (fechado e limitado em* $\mathbb{C}^2$ *é compacto) e que não é peneperiódica.*

O exemplo descrito acima pode ser estendido para o espaço de Hilbert de dimensão infinita $\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}^2$ dos elementos $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que $\xi_n \in \mathbb{C}^2$ e $\sum_n |\xi_n|^2 < \infty$. Denote

$$\tilde{u_1}(\theta_1) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}$$

sabemos que existe $\tilde{H}_\theta(t)$ quaseperiódico de forma que $\tilde{u_1}(\theta_1)$ é o correspondente operador monodromia. Além disso $\sigma(\tilde{U_{\mathrm{F}}})$ é absolutamente contínuo para todo α

irracional. Seja

$$u_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ou, escrevendo de uma outra forma, $u_1(\theta_1) = \bigoplus \tilde{u_1}(\theta_1)$. Para $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se $u_1(\theta_1)\xi = \bigoplus \tilde{u_1}(\theta_1)\xi_n$. O operador de Floquet correspondente à $u_1(\theta_1)$, $U_{\mathrm{F}} = \mathcal{T}_{-T_2} u_1 : L^2(S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi}) \to L^2(S^1, \mathcal{H}, \frac{d\theta_1}{2\pi})$ tem espectro absolutamente contínuo para todo α irracional.

Se $H_\theta(t) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{H}_\theta(t)$ então o propagador de $H_\theta(t)$ é $U_\theta(t,0) = \bigoplus \tilde{U}_\theta(t,0)$ e assim $H_\theta(t)$ tem $u_1(\theta_1)$ como operador monodromia correspondente. Agora dado $\xi \in \mathcal{H}$ e $\theta = (\theta_1, 0) \in S^1 \times S^1$ tem-se pelo caso anterior que

$$\begin{aligned} U_{(\theta_1,0)}(t,0)\xi &= \bigoplus_n \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1 + (\frac{t}{T_2} - 1)\pi\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{T_2}(\theta_1 + (\frac{t}{T_2} - 1)\pi\alpha)} \end{pmatrix} \xi_n \\ &= \bigoplus_n \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1 + (\frac{t}{T_2} - 1)\pi\alpha)} \xi_n^1 \\ e^{-i\frac{t}{T_2}(\theta_1 + (\frac{t}{T_2} - 1)\pi\alpha)} \xi_n^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

logo $t \mapsto U_{(\theta_1,0)}(t,0)\xi$ não é peneperiódica. Se ξ for da forma $\xi = \oplus \xi_n$ com $\xi_n \neq 0$ se, e somente se, $n = l$ então

$$U_{(\theta_1,0)}(t,0)\xi = \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{T_2}(\theta_1 + (\frac{t}{T_2} - 1)\pi\alpha)} \xi_l^1 \\ e^{-i\frac{t}{T_2}(\theta_1 + (\frac{t}{T_2} - 1)\pi\alpha)} \xi_l^2 \end{pmatrix}$$

e portanto a órbita é precompacta pois não sai de um espaço de dimensão finita. Da mesma maneira se ξ é da forma $\xi = \oplus \xi_n$ com $\xi_n \neq 0$ apenas para finitos n, tem-se exemplo de órbita precompacta que não é peneperiódica.

2.4 Limitação do valor esperado da energia

Vamos considerar $H(t) = H_0 + V(t)$ em que H_0 é auto-adjunto em $\mathcal{H}$, não-limitado, positivo e com espectro discreto puro. Os autovalores de H_0 serão $0 \leq h_1 < h_2 < h_3 < \ldots$, com multiplicidades finitas.

Se $\psi_0 \in \text{dom } H_0$ e $\psi(t) = U(t,0)\psi_0$ é solução da equação de Schrödinger, sob quais condições

$$E^0_{\psi_0}(t) = \langle \psi(t), H_0\psi(t)\rangle$$

é uma função limitada de t? Também, quando

$$E_{\psi_0}(t) = \langle \psi(t), H(t)\psi(t)\rangle$$

é função limitada? Neste sentido obtemos os seguintes resultados:

Proposição 2.3 *Se $V(t)$ é operador limitado para todo t, e $\sup_t \|V(t)\| < \infty$ então $E^0_{\psi_0}(t)$ é limitado se, e somente se, $E_{\psi_0}(t)$ é limitado.*

Demonstração: Basta observar que

$$E_{\psi_0}(t) = \langle \psi(t), H(t)\psi(t)\rangle = E^0_{\psi_0}(t) + \langle \psi(t), V(t)\psi(t)\rangle$$

e que

$$\sup_t |\langle \psi(t), V(t)\psi(t)\rangle| \leq \sup_t \|\psi(t)\|^2 \|V(t)\| = \sup_t \|\psi_0\|^2 \|V(t)\| < \infty.$$

■

Proposição 2.4 *Se $\psi(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ é peneperiódica e sua derivada é uniformemente contínua, então $E_{\psi_0}(t)$ é limitado.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.4(h) tem-se que $\psi'(t)$ é peneperiódica e portanto $i\frac{d\psi}{dt}(t)$ bem como $\psi(t)$ são aplicações limitadas. Como

$$E_{\psi_0}(t) = \langle \psi(t), H(t)\psi(t)\rangle = \langle \psi(t), i\frac{d\psi}{dt}(t)\rangle$$

o resultado segue. ■

Proposição 2.5 *Se* $t \mapsto V(t)$ *é fortemente* C^1 *e* $\psi'(t) \in \text{dom}\, H(t)$ *para todo* t*, então:*

(a) A aplicação $t \mapsto E_\psi(t)$ *é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}E_\psi(t) = \langle \psi(t), V'(t)\psi(t) \rangle.$$

(b) $|E_\psi(t) - E_\psi(0)| \leq t \times \sup_s \|V'(s)\|$.

(c) Se $\|V'(t)\| \leq \frac{Cte}{(1+|t|)^a}$*, com* $a > 1$ *então* $E_\psi(t)$ *e* $E^0_\psi(t)$ *são limitados.*

Demonstração: (a) $E_\psi(t) = \langle \psi(t), (H_0 + V(t))\psi(t) \rangle$ e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_\psi(t) &= \langle \psi'(t), H(t)\psi(t) \rangle + \langle \psi(t), H(t)\psi'(t) \rangle + \langle \psi(t), V'(t)\psi(t) \rangle \\
&= \langle \psi'(t), i\psi'(t) \rangle + \langle i\psi'(t), \psi'(t) \rangle + \langle \psi(t), V'(t)\psi(t) \rangle \\
&= \langle \psi(t), V'(t)\psi(t) \rangle.
\end{aligned}$$

(b) Como

$$E_\psi(t) - E_\psi(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}E_\psi(s)ds = \int_0^t \langle \psi(s), V'(s)\psi(s) \rangle ds$$

o resultado segue.

(c) Análogo a (b). ■

Uma possibilidade para a proposição acima é $V(t) = B_1 \text{sen} t + \frac{B_2}{(1+|t|)^2}$ com $B_1,\ B_2 \in B(\mathcal{H})$ e auto-adjuntos. Disto vemos que certamente as escolhas de ψ_0 devem depender de B_1.

O próximo resultado fornece condições para que um sistema quântico periódico, com operador de Floquet possuindo espectro pontual, seja dinamicamente estável.

Proposição 2.6 *Se* V *é periódico de período* T*, então se o subconjunto* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *de autovetores de* U_{F} *está em* $\text{dom}\, H_0$*, se* $t \mapsto \xi_j(t)$ *é de classe* C^1*, então se* $\psi = \sum_{j=1}^n a_j \xi_j$ *tem-se que* $E_\psi(t)$ *é limitada. Se, além disso,* $V(t)$ *são limitados e* $\sup_t \|V(t)\| < \infty$ *então* $E^0_\psi(t)$ *também é limitada.*

Demonstração: Suponha $U_{\rm F}\xi_j = e^{i\lambda_j}\xi_j$ com $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Tem-se

$$E_{\xi_j,\xi_k}(t) \doteq \langle \xi_j(t), H(t)\xi_k(t)\rangle = \langle \xi_j(t), i\frac{d}{dt}\xi_k(t)\rangle$$

e segue que $t \mapsto E_{\xi_j,\xi_k}(t)$ é contínua. Agora

$$\begin{aligned} E_{\xi_j,\xi_k}(t+T) &= \langle U(t+T,0)\xi_j, H(t+T)U(t+T,0)\xi_k\rangle \\ &= \langle U(t+T,T)U_{\rm F}\xi_j, H(t)U(t+T,T)U_{\rm F}\xi_k\rangle \\ &= e^{-i\lambda_j}e^{i\lambda_k}\langle U(t,0)\xi_j, H(t)U(t,0)\xi_k\rangle \\ &= e^{i(\lambda_k-\lambda_j)}E_{\xi_j,\xi_k}(t) \end{aligned}$$

e segue que $t \mapsto E_\psi(t)$ é peneperiódica (Teorema 1.4(i) e (f)) e portanto é limitada. A segunda afirmação segue da Proposição 2.3. ∎

No caso periódico precisamos de condições para que os autovetores de $U_{\rm F}$ pertençam a dom H_0 e $t \mapsto \xi_j(t)$ de classe C^1. Obtemos os seguintes resultados:

Lema 2.7 *Seja $\xi \in \mathcal{H}$ de forma que $H(t)U(t,s)\xi$ esteja bem definido, então a aplicação $t \mapsto H(t)U(t,s)\xi$ é de classe C^r se, e somente se, $t \mapsto e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi$ é de classe C^{r+1} para $\lambda,\ s \in \mathbb{R}$ fixos.*

Demonstração: Observe que

$$\frac{d}{dt}(e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi) = i\lambda e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi - ie^{i\lambda(t-s)}H(t)U(t,s)\xi.$$

Assim se $t \mapsto H(t)U(t,s)\xi$ é C^r então $t \mapsto e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi$ é C^{r+1} e reciprocamente se $t \mapsto e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi$ é C^{r+1} então $t \mapsto H(t)U(t,s)\xi$ é C^r. ∎

Corolário 2.4 *Se $f^{(\lambda)}$ é autovetor de K, $Kf^{(\lambda)} = \lambda f^{(\lambda)}$ então a aplicação $t \mapsto f^{(\lambda)}(t)$ é de classe C^r se, e somente se, existe $s \in \mathbb{R}$ com $t \mapsto H(t)U(t,s)f^{(\lambda)}(s)$ de classe C^{r-1}.*

Demonstração: Da discusão anterior ao Lema 1.1 tem-se que $f^{(\lambda)}(t) = e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)f^{(\lambda)}(s)$ e o resultado segue do Lema 2.7. ∎

Corolário 2.5 *(a) Se $H(t+T) = H(t)$, e $\xi^{(\lambda)}$ é autovetor de $U_{\mathrm{F}}(s)$, $U_{\mathrm{F}}(s)\xi^{(\lambda)} = e^{-i\lambda T}\xi^{(\lambda)}$, então $\xi^{(\lambda)} \in \mathrm{dom}\, H(s)$ se, e somente se, existe um autovetor $f_{\xi^{(\lambda)}}$ de K, $Kf_{\xi^{(\lambda)}} = \lambda f_{\xi^{(\lambda)}}$ com $t \mapsto f_{\xi^{(\lambda)}}(t)$ contínua e diferenciável.*
(b) Em particular, $U_{\mathrm{F}}(s)$ possui uma base de autovetores em $\mathrm{dom}\, H(s)$ se, e somente se, K possui uma base de autovetores $\{f_j\}$ de forma que $t \mapsto f_j(t)$ é contínua e diferenciável para cada j.

Demonstração: (a) Suponha $\xi^{(\lambda)} \in \mathrm{dom}\, H(s)$. Pelo Lema 1.2(b) sabemos que $f_{\xi^\lambda}(t) = e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi^\lambda \in \mathrm{dom}\, K$ e $Kf_{\xi^\lambda} = \lambda f_{\xi^\lambda}$. Como $\xi^{(\lambda)} \in \mathrm{dom}\, H(s)$ tem-se $U(t,s)\xi^\lambda \in \mathrm{dom}\, H(t)$ e $H(t)U(t,s)\xi^\lambda$ faz sentido e tem-se $i\partial_t U(t,s)\xi^\lambda = H(t)U(t,s)\xi^\lambda$. Assim $t \mapsto f_{\xi^{(\lambda)}}(t)$ é contínua e diferenciável.

Reciprocamente, existe $f_{\xi^{(\lambda)}}$ autovetor de K com $t \mapsto f_{\xi^{(\lambda)}}(t)$ contínua e diferenciável. Assim $f_{\xi^\lambda}(t) = e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi^\lambda$ e $Kf_{\xi^{(\lambda)}} = \lambda f_{\xi^{(\lambda)}}$ implica $-i\partial_t f_{\xi^\lambda}(t) + H(t)f_{\xi^\lambda}(t) = \lambda f_{\xi^\lambda}(t)$ e portanto $\xi^\lambda \in \mathrm{dom}\, H(s)$.

(b) Segue de (a). ■

Na representação de Jauslin-Lebowitz vamos procurar o análogo para o valor esperado do operador auto-adjunto positivo e discreto $A : \mathrm{dom}\, A \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Se o operador quase-energia generalizado $\tilde{K}$ for pontual puro, existe uma base $B \doteq \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal de $\tilde{\mathcal{K}}$ com $\tilde{K}f_n = \lambda_n f_n$. Do Teorema 1.7, para toda $f \in \tilde{\mathcal{K}}$ tem-se que $t \mapsto U_\theta(t,0)f(\theta)$ é peneperiódica μ-q.t.p. Em particular, se $f = 1 \otimes \xi$ tem-se $t \mapsto U_\theta(t,0)\xi$ é peneperiódica μ-q.t.p.

Vamos denotar

$$B_{n,m}(A) \doteq \int_\Omega \langle f_n(\theta), Af_m(\theta)\rangle_{\mathcal{H}} d\mu(\theta) = \langle f_n, (1 \otimes A)f_m\rangle_{\tilde{\mathcal{K}}}.$$

Se $f \in \tilde{\mathcal{K}}$ então $f = \sum_n a_n f_n$, com $\sum_n |a_n|^2 = \|f\|^2_{\tilde{\mathcal{K}}}$. Para o valor esperado de A, no instante t, em relação à f e médio em Ω

$$\begin{aligned} A_f(t) &= \int_\Omega \langle U_\theta(t,0)f(\theta), AU_\theta(t,0)f(\theta)\rangle_{\mathcal{H}} d\mu(\theta) \\ &= \int_\Omega \langle (\mathcal{F}_t e^{-i\tilde{K}t}f)(\theta), A(\mathcal{F}_t e^{-i\tilde{K}t}f)(\theta)\rangle_{\mathcal{H}} d\mu(\theta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \mathcal{F}_t e^{-i\tilde{K}t} f, (1\otimes A)\mathcal{F}_t e^{-i\tilde{K}t} f\rangle_{\tilde{\mathcal{K}}} \\
&= \langle e^{-i\tilde{K}t} f, (1\otimes A) e^{-i\tilde{K}t} f\rangle_{\tilde{\mathcal{K}}} \\
&= \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m e^{-it(\lambda_m-\lambda_n)} \langle f_n, (1\otimes A) f_m\rangle_{\tilde{\mathcal{K}}} \\
&= \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m e^{-it(\lambda_m-\lambda_n)} B_{n,m}(A).
\end{aligned}
$$

Note que se essa soma for absolutamente convergente então $A_f(t)$ é função limitada e peneperiódica de t, e

$$t \mapsto \langle U_\theta(t,0) f(\theta), A U_\theta(t,0) f(\theta)\rangle_{\mathcal{H}}$$

é limitada μ-q.t.p.

Proposição 2.7 *Se $f = \sum_{j=1}^{m} a_j f_j$, em que f_j são autovetores de $\tilde{K}$ e $f_j(\theta) \in$ dom A, para todo θ, então $t \mapsto A_f(t)$ é limitada e peneperiódica, além disso,*

$$t \mapsto \langle U_\theta(t,0) f(\theta), A U_\theta(t,0) f(\theta)\rangle_{\mathcal{H}}$$

é limitada μ-q.t.p.

Na formulação de Jauslin-Lebowitz, supondo que o operador quase-energia generalizado $\tilde{K}$ tenha espectro pontual, obtemos o seguinte resultado geral:

Teorema 2.8 *Suponha que Ω seja uma variedade diferenciável compacta, $g_t : \Omega \to \Omega$ um fluxo C^1 com $\sup_{t,\theta} \|\partial_t g_t(\theta)\| < \infty$ e $\tilde{K} f^{(\lambda)} = \lambda f^{(\lambda)}$ com $\theta \mapsto f^{(\lambda)}(\theta)$ de classe C^1. Então $\mu-$q.t.p. em θ tem-se que $U_\theta(t,0) f^{(\lambda)}(\theta) \in \mathrm{dom}\ H_\theta(t)$ e a energia*

$$\left\langle U_\theta(t,0) f^{(\lambda)}(\theta), H_\theta(t) U_\theta(t,0) f^{(\lambda)}(\theta)\right\rangle$$

é uma função limitada de t. Além disso, se $H_\theta(t) = H_0 + V(g_t(\theta))$ com $V(g_t(\theta))$ limitado e $\sup_{t,\theta} \|V(g_t(\theta))\| < \infty$ então

$$\left\langle U_\theta(t,0) f^{(\lambda)}(\theta), H_0 U_\theta(t,0) f^{(\lambda)}(\theta)\right\rangle$$

também é limitada.

Demonstração: Como $\tilde{K}f^{(\lambda)} = \lambda f^{(\lambda)}$ tem-se que $f^{(\lambda)}(\theta) \in \text{dom } H_\theta(0)$ q.t.p. em θ e portanto $U_\theta(t,0)f^{(\lambda)}(\theta) \in \text{dom } H_\theta(t)$ q.t.p. em θ. Também temos que

$$U_\theta(t,0)f^{(\lambda)}(\theta) = \mathcal{F}_t e^{-i\tilde{K}t} f^{(\lambda)}(\theta) = \mathcal{F}_t e^{-i\lambda t} f^{(\lambda)}(\theta) = e^{-i\lambda t} f^{(\lambda)}(g_t(\theta))$$

e das hipóteses de diferenciabilidade segue

$$i\frac{\partial}{\partial t} U_\theta(t,0)f^{(\lambda)}(\theta) = \lambda e^{-i\lambda t} f^{(\lambda)}(g_t(\theta)) + ie^{-i\lambda t}\frac{d}{d\theta} f^{(\lambda)}(g_t(\theta))\frac{d}{dt} g_t(\theta)$$

o que implica que $i\frac{\partial}{\partial t} U_\theta(t,0)f^{(\lambda)}(\theta) = H_\theta(t)U_\theta(t,0)f^{(\lambda)}(\theta)$ é limitada e o primeiro resultado segue. A segunda parte segue como na Proposição 2.3. ∎

Podemos então concluir que:

Corolário 2.6 *Suponha válidas as hipóteses do teorema acima para Ω e g_t e que para todo autovetor $f^{(\lambda_n)} \in \tilde{\mathcal{K}}$ tenha-se $\theta \mapsto f^{(\lambda_n)}(\theta)$ de classe C^1. Então para θ $\mu-$q.t.p., para todo vetor em $\mathcal{H}$ da forma*

$$\xi = a_1 f^{(\lambda_1)}(\theta) + \ldots + a_k f^{(\lambda_k)}(\theta)$$

a energia

$$\langle U_\theta(t,0)\xi, H_\theta(t)U_\theta(t,0)\xi\rangle$$

é limitada.

No caso de $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f^{(\lambda_m)}(\theta)$ com $\sum |a_n|^2 < \infty$, uma condição suficiente para $U_\theta(t,0)\xi \in \text{dom } H_\theta(t)$ e energia limitada é

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \left(|\lambda_j| + \sup_\theta \|\partial_\theta f^{\lambda_j}(\theta)\| \right) < \infty$$

pois isto implica que

$$t \mapsto U_\theta(t,0)\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-i\lambda_j t} f^{\lambda_j}(g_t(\theta))$$

é de classe C^1 e $i\partial_t U_\theta(t,0)$ é limitada.

Capítulo 3

Energia Para Hamiltonianas Periódicas no Tempo

Neste capítulo estudaremos estabilidade para sistemas dependendo periodicamente do tempo. Como no estudo de modelos tight-binding ([17] e referências deles), vamos introduzir a média temporal à la Laplace de $\langle U_{\mathrm{F}}^m \xi, A U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle$, isto é,

$$\frac{2}{T} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} \langle U_{\mathrm{F}}^m \xi, A U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle$$

em que, ξ é um elemento do espaço de Hilbert, U_{F} é o operador de Floquet e A é uma energia abstrata. Demostraremos que a média acima é igual a

$$\frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_0^{2\pi} |\langle \varphi_j, \left(U_{\mathrm{F}} - e^{-iE} e^{1/T} \right)^{-1} \xi \rangle|^2 dE$$

em que $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$. Assim, conhecendo o comportamento dos elementos de matriz do operador resolvente $R_z(U_{\mathrm{F}}) = (U_{\mathrm{F}} - z\mathrm{I_d})^{-1}$ ($z = e^{-iE} e^{1/T}$) na base $\{\varphi_j\}$ do espaço de Hilbert, obtém-se informações sobre o valor esperado de energia. O restante do capítulo é dedicado a aplicações de tal resultado.

3.1 Energia Média via Função de Green

Considere uma Hamiltoniana $H(t)$ com $H(t+\tau) = H(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha a existência dos propagadores $U(t,s)$, e temos o operador de Floquet $U_{\mathrm{F}} = U(\tau, 0)$

à nossa disposição. Seja A um operador auto-adjunto, não-limitado, positivo e com espectro discreto, $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$, e vamos supor, primeiramente que cada autovetor tenha multiplicidade um, ou seja, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ e $\lambda_j \to \infty$, de forma que $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$.

O principal interesse é no estudo de

$$E_\xi^A(m) \doteq \langle U_{\mathrm{F}}^m \xi, A U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle$$

para $m \in \mathbb{N}$ supondo que dom A é invariante sob a evolução temporal. Outra grandeza de interesse é a dependência temporal do momento associado a A, ou seja

$$M_\xi^A(m) \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\langle \varphi_j, U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle|^2$$

Nosso primeiro resultado é:

Proposição 3.1 *Se* $U_{\mathrm{F}}^m \xi \in \mathrm{dom}\, A^{\frac{1}{2}}$*, para todo* m*, então*

$$E_\xi^A(m) = M_\xi^A(m).$$

Demonstração: Tem-se que

$$\begin{aligned} M_\xi^A(m) &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \lambda_j^{\frac{1}{2}} \varphi_j, U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle A^{\frac{1}{2}} \varphi_j, U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, A^{\frac{1}{2}} U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle|^2 = \| A^{\frac{1}{2}} U_{\mathrm{F}}^m \xi \|^2 \\ &= \langle A^{\frac{1}{2}} U_{\mathrm{F}}^m \xi, A^{\frac{1}{2}} U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle = \langle U_{\mathrm{F}}^m \xi, A U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle = E_\xi^A(m) \end{aligned}$$

que é o resultado afirmado. ■

Vamos considerar a média temporal de E_ξ^A à la Laplace

$$L_\xi^A(T) \doteq \frac{2}{T} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} E_\xi^A(m)$$

Temos que os expoentes de crescimento de ordem superior para tal média temporal e para a média Cesàro $C_\xi^A(T) = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{T} E_\xi^A(m)$ são iguais. Para os expoentes de ordem inferior não conseguimos demonstrar a igualdade, mais precisamente:

Lema 3.1 *Seja* $(h(m))_{m=0}^{\infty}$ *uma seqüência não-negativa, com* $h(m) \leq Cm^n$ *para algum* $C > 0$ *e* $n \geq 0$ *então*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{T} h(m))}{\log T} = \limsup_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m))}{\log T}$$

e

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{T} h(m))}{\log T} \leq \liminf_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m))}{\log T}.$$

Demonstração: Denote por

$$\beta_e^+ = \limsup_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{T} h(m))}{\log T}, \qquad \beta_e^- = \liminf_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{T} h(m))}{\log T},$$

$$\beta_d^+ = \limsup_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m))}{\log T}, \quad \beta_d^- = \liminf_{T\to\infty} \frac{\log(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m))}{\log T}.$$

Note que para $0 \leq m \leq T$ tem-se $e^{-2} \leq e^{-\frac{2m}{T}} \leq 1$ e daí vale a desigualdade

$$\sum_{m=0}^{T} h(m) \leq \sum_{m=0}^{T} e^2 e^{-\frac{2m}{T}} h(m) \leq e^2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m),$$

o que implica $\beta_e^{\pm} \leq \beta_d^{\pm}$.

Por outro lado, tem-se para cada $\epsilon > 0$, denotando $\lceil \cdot \rceil$ o menor inteiro maior ou igual que um número real dado,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m) &= \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon} \rceil} e^{-\frac{2m}{T}} h(m) + \sum_{m=\lceil T^{1+\epsilon} \rceil+1}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon} \rceil} h(m) + C \sum_{m=\lceil T^{1+\epsilon} \rceil+1}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} m^n.
\end{aligned}$$

Para ϵ e n fixados tem-se que para T suficintemente grande $\frac{nT}{2} < T^{1+\epsilon} \leq \lceil T^{1+\epsilon} \rceil$ e assim

$$\sum_{m=\lceil T^{1+\epsilon} \rceil+1}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} m^n \leq \int_{\lceil T^{1+\epsilon} \rceil}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}} t^n dt.$$

Portanto, para cada $\epsilon > 0$ e T suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m) &\leq \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon} \rceil} h(m) + C \int_{\lceil T^{1+\epsilon} \rceil}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}} t^n dt \\
&\leq \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon} \rceil} h(m) + \tilde{C} e^{-2T^{\epsilon}} T^n.
\end{aligned}$$

Como, para cada $\epsilon > 0$, $e^{-2T^\epsilon}T^n \to 0$ quando $T \to \infty$ segue que

$$\begin{aligned}
\beta_d^+ &= \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m}{T}} h(m)}{\log T} \\
&\le \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} h(m)}{\log T} \\
&= \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} h(m)}{\log\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} \frac{\log\lceil T^{1+\epsilon}\rceil}{\log T} \\
&\le \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} h(m)}{\log\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} \frac{\log(T+1)^{1+\epsilon}}{\log T} \\
&= (1+\epsilon) \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \sum_{m=0}^{\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} h(m)}{\log\lceil T^{1+\epsilon}\rceil} \\
&\le (1+\epsilon)\beta_e^+.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário $\beta_d^+ \le \beta_e^+$. ■

A função de Green $G_z^\xi(j)$ associada a A, U_F em $\xi \in \mathcal{H}$ e $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ é dada pelos elementos de matriz do operador resolvente $R_z(U_\mathrm{F}) = (U_\mathrm{F} - z\mathrm{I_d})^{-1}$ em relação à base ortonormal $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$, ou seja,

$$G_z^\xi(j) \doteq \langle \varphi_j, R_z(U_\mathrm{F})\xi \rangle.$$

A principal razão técnica para trabalhar com este tipo de média temporal de Laplace é o teorema que segue. Observe que devido a este resultado é possível obter resultados em estabilidade conhecendo o comportamento das funções de Green $G_z^\xi(j)$ para $z = e^{-iE}e^{1/T}$, $T > 0$, em uma vizinhança exterior a S^1. Destacamos que tal resultado não leva em conta as propriedades espectrais do operador de Floquet U_F, e podemos obter resultados em estabilidade diretamente sem passar explicitamente pelas propriedades espectrais de U_F.

Teorema 3.1 *Para $\xi \in \mathcal{H}$ de maneira que $U_\mathrm{F}^m\xi \in \mathrm{dom}\, A^{\frac{1}{2}}$ para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$L_\xi^A(T) = \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_0^{2\pi} |G_z^\xi(j)|^2 dE,$$

sendo $z = e^{-iE+\frac{1}{T}}$.

Demonstração: Denote por μ_j a medida espectral de U_{F} associada ao par (φ_j, ξ) e por $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2([0, 2\pi]) \to l^2(\mathbb{Z})$. Tem-se

$$\langle \varphi_j, U_{\mathrm{F}} \xi \rangle = \int_0^{2\pi} e^{-iE'} d\mu_j(E').$$

Para cada j seja $a^{(j)} = (a^{(j)}(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ a seqüência

$$a^{(j)}(m) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m < 0 \\ e^{-\frac{m}{T}} \int_0^{2\pi} e^{-iE'm} d\mu_j(E') & \text{se} \quad m \geq 0 \end{cases}.$$

Como $\mathcal{F}$ é unitário $\|a^{(j)}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|\mathcal{F}^{-1} a^{(j)}\|_{L^2([0,2\pi])}$ e como $a^{(j)} \in l^1(\mathbb{Z}) \cap l^2(\mathbb{Z})$, temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1} a^{(j)})(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iEm} a^{(j)}(m) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{iEm} e^{-\frac{m}{T}} \int_0^{2\pi} e^{-iE'm} d\mu_j(E') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} e^{im(E - E') + \frac{i}{T})} \Big) d\mu_j(E') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e^{i(E - E' + \frac{i}{T})}} d\mu_j(E') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_j(E')}{e^{i(E + \frac{i}{T})} (e^{-i(E + \frac{i}{T})} - e^{-iE'})} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{i(E + \frac{i}{T})}} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_j(E')}{e^{-iE'} - e^{-i(E + \frac{i}{T})}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{i(E + \frac{i}{T})}} \langle \varphi_j, R_{e^{-i(E + \frac{i}{T})}}(U_{\mathrm{F}}) \xi \rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{iE} e^{-\frac{1}{T}}} G_z^{\xi}(j),
\end{aligned}$$

sendo $z = e^{-iE + \frac{1}{T}}$. Portanto

$$|\mathcal{F}^{-1} a^{(j)}|^2(E) = \frac{1}{2\pi e^{-\frac{2}{T}}} |G_z^{\xi}(j)|^2,$$

ou seja

$$\|\mathcal{F}^{-1} a^{(j)}\|^2_{L^2([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi e^{-\frac{2}{T}}} \int_0^{2\pi} |G_z^{\xi}(j)|^2 dE,$$

e disto segue que

$$\begin{aligned}
L_\xi^A(T) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{T} e^{-\frac{2m}{T}} M_\xi^A(m) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{T} e^{-\frac{2m}{T}} |\langle \varphi_j, U_{\mathrm{F}}^m \xi \rangle|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{2}{T} \sum_{m=0}^{\infty} \left| e^{-\frac{m}{T}} \int_0^{2\pi} e^{-iE'm} d\mu_j(E') \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{2}{T} \|a^{(j)}\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{2}{T} \|\mathcal{F}^{-1} a^{(j)}\|_{L^2([0,2\pi])}^2 \\
&= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_0^{2\pi} |G_z^\xi(j)|^2 dE,
\end{aligned}$$

que é exatamente o resultado afirmado. ■

O Teorema 3.1 também vale se os autovalores λ_j possuírem multiplicidade finita. Neste caso a cada λ_j considere os autovetores ortonormais $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}$, então

$$L_\xi^A(T) = \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left(\sum_{n=1}^{k} \int_0^{2\pi} |\langle \varphi_{j_n}, R_z(U_{\mathrm{F}}) \xi|^2 dE \right),$$

em que z é como no Teorema 3.1.

No caso em que a condição inicial é $\xi = \varphi_1$, denote $\eta^{(z)} \doteq R_z(U_{\mathrm{F}})\varphi_1$. Assim, $(U_{\mathrm{F}} - z)\eta^{(z)} = \varphi_1$ implica que $U_{\mathrm{F}}\eta^{(z)} = z\eta^{(z)} + \varphi_1$ e portanto

$$\langle \varphi_j, U_{\mathrm{F}} \eta^{(z)} \rangle = z \langle \varphi_j, \eta^{(z)} \rangle + \delta_{j,1},$$

e denotando $G_z(j) \doteq G_z^{\varphi_1}(j)$, concluímos

Lema 3.2

$$G_z(j) = \begin{cases} \frac{1}{z}(\langle \varphi_1, U_{\mathrm{F}} \eta^{(z)} \rangle - 1), & se \quad j = 1 \\ \frac{1}{z} \langle \varphi_j, U_{\mathrm{F}} \eta^{(z)} \rangle, & se \quad j > 1 \end{cases}.$$

Na Seção 3.2 vamos considerar alguns operadores de Floquet conhecidos e analisar a equação

$$(U_{\mathrm{F}} - z)\eta^{(z)} = \varphi_1$$

na tentativa de explicitar $G_z(j)$ e aplicar o Teorema 3.1.

3.2 Aplicações

Esta seção é devotada para algumas aplicações da fórmula obtida no Teorema 3.1. A principal dificuldade é encontrar expressões e/ou limites das funções de Green.

3.2.1 Hamiltonianas Independentes do Tempo

Como um suporte para a fórmula apresentada no Teorema 3.1, consideramos o caso especial de Hamiltonianas autônomas. Neste caso $H(t) = H_0$ para todo t e assumimos que H_0 é um operador auto-adjunto positivo e com espectro discreto, $H_0\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, de forma que $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}$ e $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ com $\lambda_j \to \infty$. Para $q > 0$ podemos considerar H_0^q como nosso operador energia abstrata A. É conhecido que $U_{\mathrm{F}} = e^{-iH_0}$ e para $\xi \in \mathrm{dom}\, H_0^{\frac{q}{2}}$ tem-se

$$(e^{-iH_0} - z)R_z(e^{-iH_0})\xi = \xi,$$

e portanto para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\langle \varphi_j, (e^{-iH_0} - z)R_z(e^{-iH_0})\xi\rangle = \langle \varphi_j, \xi\rangle,$$

ou seja,

$$\langle e^{iH_0}\varphi_j, R_z(e^{-iH_0})\xi\rangle - z\langle \varphi_j, R_z(e^{-iH_0})\xi\rangle = \langle \varphi_j, \xi\rangle.$$

Como $e^{iH_0\varphi_j} = e^{i\lambda_j}\varphi_j$ tem-se

$$(e^{-i\lambda_j} - z)\langle \varphi_j, R_z(e^{-iH_0})\xi\rangle = \langle \varphi_j, \xi\rangle,$$

portanto

$$G_z^{\xi}(j) = \frac{\langle \varphi_j, \xi\rangle}{e^{-i\lambda_j} - z}.$$

Assim, para $z = e^{-iE}e^{\frac{1}{T}}$,

$$\begin{aligned} L_{\xi}^{q}(T) \doteq L_{\xi}^{H_0^q}(T) &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^q\int_0^{2\pi}|G_z^{\xi}(j)|^2 dE \\ &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^q\int_0^{2\pi}\frac{|\langle \varphi_j, \xi\rangle|^2}{|e^{-i\lambda_j} - z|^2}dE \qquad (3.1) \\ &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^q|\langle \varphi_j, \xi\rangle|^2\int_0^{2\pi}\frac{dE}{|e^{-i\lambda_j} - z|^2}. \end{aligned}$$

Vamos agora calcular $I_j \doteq \int_0^{2\pi} \frac{dE}{|e^{-i\lambda_j}-z|^2}$. Seja γ o caminho fechado em $\mathbb{C}$ dado por $\gamma(E) = e^{iE}$ com $0 \leq E \leq 2\pi$, $\alpha_j = e^{\frac{1}{T}}e^{i\lambda_j}$ e $\beta_j = e^{-\frac{1}{T}}e^{i\lambda_j}$ então

$$\begin{aligned}
I_j &= \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(e^{-i\lambda_j} - z)(e^{i\lambda_j} - \overline{z})} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(e^{-i\lambda_j} - e^{-iE}e^{\frac{1}{T}})(e^{i\lambda_j} - e^{iE}e^{\frac{1}{T}})} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{dE}{e^{\frac{2}{T}}(e^{-\frac{1}{T}}e^{-i\lambda_j} - e^{-iE})(e^{-\frac{1}{T}}e^{i\lambda_j} - e^{iE})} \\
&= -\frac{1}{e^{\frac{2}{T}}} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{e^{-iE}e^{-\frac{1}{T}}e^{-i\lambda_j}(e^{iE} - \alpha_j)(e^{iE} - \beta_j)} \\
&= -\frac{1}{e^{\frac{1}{T}}e^{-i\lambda_j}} \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{iE}dE}{(e^{iE} - \alpha_j)(e^{iE} - \beta_j)} \\
&= \frac{i}{e^{\frac{1}{T}}e^{-i\lambda_j}} \int_\gamma \frac{dw}{(w - \alpha_j)(w - \beta_j)}.
\end{aligned}$$

Como $|\alpha_j| > 1$ e $|\beta_j| < 1$, β_j é o único pólo no interior de γ e pelo Teorema dos Resíduos

$$I_j = \frac{i}{e^{\frac{1}{T}}e^{-i\lambda_j}} 2\pi i \frac{1}{(\beta_j - \alpha_j)} = \frac{2\pi}{e^{\frac{2}{T}} - 1}$$

e I_j independe de λ_j.

Com este cálculo obtemos de (3.1) que

$$\begin{aligned}
L_\xi^q(T) &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^q |\langle \varphi_j, \xi \rangle|^2 \frac{2\pi}{e^{\frac{2}{T}} - 1} \\
&= \frac{2}{e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \frac{1}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^q |\langle \varphi_j, \xi \rangle|^2 \\
&= \frac{2}{(1 - e^{-\frac{2}{T}})} \frac{1}{T} \|H_0^{\frac{q}{2}} \xi\|^2.
\end{aligned}$$

Como $(1 - e^{-\frac{2}{T}}) = \frac{2}{T} + \mathcal{O}(\frac{1}{T^2})$, para T grande obtém-se

$$L_\xi^q(T) \approx \|H_0^{\frac{q}{2}} \xi\|^2,$$

com (para $\xi \in \operatorname{dom} H_0^q$)

$$\lim_{T \to \infty} L_\xi^q(T) = \langle \xi, H_0^q \xi \rangle.$$

Então concluímos que a função $\langle e^{-iH_0 m}\xi, H_0^q e^{-iH_0 m}\xi \rangle$ é limitada para $\xi \in \operatorname{dom} H_0^{\frac{q}{2}}$, que é (claramente) um resultado esperado (veja Proposição 3.1).

3.2.2 Um Limite Inferior para as Funções de Green

Como uma primeira aplicação teórica, conseguimos instabilidade dinâmica a partir de limites inferiores das funções de Green.

Teorema 3.2 *Suponha que existam $K > 0$ e $\alpha > 0$ de modo que para qualquer $2N > 0$ suficientemente grande exista um conjunto de Borel não-vazio $A(N) \subset S^1$ de forma que*

$$|G_z^\xi(j)| \geq \frac{K}{N^\alpha}, \quad 1 \leq j \leq 2N,$$

e $z = e^{-iE+\frac{1}{T}}$ com $E \in B(T) = \{E'' \in S^1 : \exists\ E' \in A(N); |E'' - E'| \leq \frac{1}{T}\}$ (a $\frac{1}{T}-$vizinhança de $A(N)$). Então se $\delta = \frac{1}{1+\alpha}$ tem-se

$$L_\xi^A(T) \geq \text{cte } |B(T)| \lambda_{[T^\delta]} T^{\delta(1-2\alpha)-1}$$

em que $[\cdot]$ denota a parte inteira de um número real. Se além disso $\lambda_j \geq \text{cte } j^\gamma$, $\gamma \geq 0$, então

$$L_\xi^A(T) \geq \text{cte } T^{\delta(\gamma-2\alpha+1)-2}.$$

Demonstração: Escolha $2N(T) = [T^\delta]$. Assim

$$\begin{aligned}
L_\xi^A(T) &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_0^{2\pi} |G_z^\xi(j)|^2 dE \\
&\geq \frac{\text{cte}}{T} \sum_{j=N(T)}^{2N(T)} \lambda_j \int_0^{2\pi} |G_z^\xi(j)|^2 dE \\
&\geq \frac{\text{cte}}{T} \lambda_{N(T)} \sum_{j=N(T)}^{2N(T)} \int_{B(T)} |G_z^\xi(j)|^2 dE \\
&\geq \frac{\text{cte}}{T} \lambda_{N(T)} \sum_{j=N(T)}^{2N(T)} \frac{K^2}{N(T)^{2\alpha}} |B(T)| \\
&= \frac{\text{cte}}{T} |B(T)| \lambda_{N(T)} \frac{K^2}{N(T)^{2\alpha-1}} \\
&= \frac{\text{cte}}{T} |B(T)| \lambda_{[T^\delta]} \frac{1}{[T^\delta]^{2\alpha-1}} \\
&\geq \text{cte } |B(T)| \lambda_{[T^\delta]} T^{\delta(1-2\alpha)-1}.
\end{aligned}$$

Se $\lambda_j \geq \text{cte } j^\gamma$, como $|B(T)| \geq \frac{1}{T}$ tem-se que

$$L_\xi^A(T) \geq \text{cte } \frac{1}{T} T^{\delta\gamma} T^{\delta(1-2\alpha)-1} = \text{cte } T^{\delta(\gamma-2\alpha+1)-2},$$

e o resultado está demonstrado. ■

3.2.3 Perturbações Kicked de Posto 1

Agora considere

$$H(t) = H_0 + \kappa P_\phi \sum_n \delta(t - n2\pi),$$

em que H_0 é como na Subseção 3.2.1 com base de autovetores $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ e λ_j os autovalores correspondentes; $P_\phi(\cdot) = \langle \phi, \cdot \rangle \phi$ sendo ϕ cíclico para H_0 com $\|\phi\| = 1$ e $\kappa \in \mathbb{R}$. Seja

$$\phi = \sum_j b_j \varphi_j.$$

Neste caso sabe-se que, [9, 13],

$$U_{\mathrm{F}} = U_0(\mathrm{I_d} + \alpha P_\phi),$$

em que $U_0 = e^{-i2\pi H_0}$ e $\alpha = (e^{-i2\pi\kappa} - 1)$. Estamos interessados em $\eta^{(z)} = R_z(U_{\mathrm{F}})\varphi_1$. Como $|z| \neq 1$ tem-se $\eta^{(z)} \in \mathcal{H}$. Então podemos escrever

$$\eta^{(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j.$$

Note que $a_j = G_z(j)$ e temos que

$$U_{\mathrm{F}}\eta^{(z)} - z\eta^{(z)} = \varphi_1. \tag{3.2}$$

Também

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{F}}\eta^{(z)} &= U_0\eta^{(z)} + \alpha U_0 P_\phi \eta^{(z)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j U_0 \varphi_j + \alpha U_0 \langle \phi, \eta^{(z)} \rangle \phi \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-i2\pi\lambda_j} \varphi_j + \alpha \langle \phi, \eta^{(z)} \rangle \sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{-i2\pi\lambda_j} \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + \alpha \langle \phi, \eta^{(z)} \rangle b_j) e^{-i2\pi\lambda_j} \varphi_j, \end{aligned}$$

e de (3.2) segue

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j + \alpha \langle \phi, \eta^{(z)} \rangle b_j) e^{-i2\pi\lambda_j} \varphi_j - z \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j = \varphi_1,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\infty}[a_j(e^{-i2\pi\lambda_j}-z)+\alpha\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_j e^{-i2\pi\lambda_j}]\varphi_j=\varphi_1,$$

e conseguimos as equações

$$a_1(e^{-i2\pi\lambda_1}-z)+\alpha\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_1 e^{-i2\pi\lambda_1}=1,$$

$$a_j(e^{-i2\pi\lambda_j}-z)+\alpha\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_j e^{-i2\pi\lambda_j}=0 \qquad \text{para } \ j>1.$$

Assim

$$a_1=\frac{1-\alpha\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_1 e^{-i2\pi\lambda_1}}{e^{-i2\pi\lambda_1}-z}, \tag{3.3}$$

e

$$a_j=-\frac{\alpha\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_j e^{-i2\pi\lambda_j}}{e^{-i2\pi\lambda_j}-z} \qquad j>1. \tag{3.4}$$

Para o caso trivial $\alpha=0$, ou equivalentemente, $\kappa\in\mathbb{Z}$ tem-se

$$a_1=\frac{1}{e^{-i2\pi\lambda_1}-z}, \qquad\qquad a_j=0 \quad j>1,$$

e $\eta^{(z)}=\frac{\varphi_1}{e^{-i2\pi\lambda_1}-z}$. Neste caso a análise de $L^q_{\varphi_1}(T)$ se reduz a

$$\int_0^{2\pi}|a_1|^2dE=\int_0^{2\pi}\frac{dE}{|e^{-i2\pi\lambda_1}-z|^2}=\frac{2\pi}{e^{\frac{2}{T}}-1}$$

como calculado na Subseção 3.2.1. Assim $L^q_{\varphi_1}(T)\approx\|H_0^q\varphi_1\|$ para T grande e $\langle U_{\mathrm{F}}^m\varphi_1,H_0^qU_{\mathrm{F}}^m\varphi_1\rangle$ é limitado.

Voltando ao caso geral $\alpha\neq 0$, note que

$$\begin{aligned}\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty}\bar{b}_j a_j\\ &= \bar{b}_1\Big(\frac{1-\alpha\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_1 e^{-i2\pi\lambda_1}}{e^{-i2\pi\lambda_1}-z}\Big)+\sum_{j=2}^{\infty}\bar{b}_j\frac{(-\alpha)\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle b_j e^{-i2\pi\lambda_j}}{e^{-i2\pi\lambda_j}-z}\\ &= \frac{\bar{b}_1}{e^{-i2\pi\lambda_1}-z}-\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha|b_j|^2e^{-i2\pi\lambda_j}}{e^{-i2\pi\lambda_j}-z}.\end{aligned}$$

Logo

$$\langle\phi,\eta^{(z)}\rangle=\frac{\bar{b}_1}{(e^{-i2\pi\lambda_1}-z)}\Big[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha|b_j|^2e^{-i2\pi\lambda_j}}{e^{-i2\pi\lambda_j}-z}\Big]^{-1}.$$

Denotando

$$\tau(z)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha|b_j|^2e^{-i2\pi\lambda_j}}{e^{-i2\pi\lambda_j}-z},$$

por (3.3) e (3.4) obtemos, finalmente, as relações

$$a_1 = \frac{1}{e^{-i2\pi\lambda_1} - z} - \frac{\alpha|b_1|^2 e^{-i2\pi\lambda_1}\tau(z)^{-1}}{(e^{-i2\pi\lambda_1} - z)^2},$$

$$a_j = -\frac{\alpha b_j \bar{b}_1 e^{-i2\pi\lambda_j}\tau(z)^{-1}}{(e^{-i2\pi\lambda_1} - z)(e^{-i2\pi\lambda_j} - z)} \qquad j > 1.$$

Um Oscilador Harmônico

Apresentamos agora uma aplicação das relações acima para o kicked de um oscilador harmônico com freqüência natural igual a 1, ou seja,

Proposição 3.2 *Seja H_0 a Hamiltoniana de um oscilador harmônico com parâmetros apropriados de modo que seus autovalores sejam $\lambda_j = j$, $j \geq 1$, e $U_F = U_0(\mathrm{I_d} + \alpha P_\phi)$ como acima. Então para qualquer $\kappa \in \mathbb{R}$ e vetor cíclico ϕ para H_0, existe $C > 0$ tal que*

$$L^q_{\varphi_1}(T) \leq C, \quad \forall T > 0,$$

em que φ_1 é o autovetor associado a $\lambda_1 = 1$.

Demonstração: Usamos a notação acima. Neste caso temos

$$\tau(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha|b_j|^2}{1-z} = 1 + \frac{\alpha}{1-z}\|\phi\|^2 = \frac{1-z+\alpha}{1-z},$$

e portanto

$$a_1 = \frac{1}{1-z} - \frac{\alpha|b_1|^2}{(1-z)(e^{-i2\pi\kappa} - z)},$$

$$a_j = -\frac{\alpha b_j \bar{b}_1}{(1-z)(e^{-i2\pi\kappa} - z)} \qquad j > 1.$$

Calculemos agora $I_j \doteq \int_0^{2\pi} |a_j|^2 dE$. Para $j > 1$ e $\gamma(E) = e^{iE}$, $0 \leq E \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |a_j|^2 dE &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{\alpha b_j \bar{b}_1}{(1-z)(e^{-i2\pi\kappa} - z)} \right|^2 dE \\
&= |\alpha|^2 |b_j|^2 |\bar{b}_1|^2 \int_0^{2\pi} \frac{dE}{|(1 - e^{-iE}e^{\frac{1}{T}})(e^{-i2\pi\kappa} - e^{-iE}e^{\frac{1}{T}})|^2} \\
&= \frac{|\alpha|^2 |b_j|^2 |\bar{b}_1|^2}{ie^{\frac{2}{T}} e^{-i2\pi\kappa}} \int_\gamma \frac{w\,dw}{(w-\beta_1)(w-\beta_2)(w-\beta_3)(w-\beta_4)},
\end{aligned}$$

em que $\beta_1 = e^{\frac{1}{T}}$, $\beta_2 = e^{-\frac{1}{T}}$, $\beta_3 = e^{\frac{1}{T}} e^{i2\pi\kappa}$ e $\beta_4 = e^{-\frac{1}{T}} e^{i2\pi\kappa}$; β_2 e β_4 são os pólos no interior de γ. E pelo Teorema dos Resíduos, para $j > 1$,

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{2\pi|\alpha|^2|b_j|^2|\bar{b}_1|^2}{e^{\frac{2}{T}} e^{-i2\pi\kappa}} \times \\ &\quad \Big(\frac{\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_4)} + \frac{\beta_4}{(\beta_4 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_2)(\beta_4 - \beta_3)} \Big) \\ &= \frac{2\pi\alpha|b_j|^2|\overline{b_1}|^2}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)(e^{-i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}})} - \frac{2\pi\alpha|b_j|^2|\overline{b_1}|^2 e^{i2\pi\kappa}}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)(e^{i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}})} \\ &= \frac{2\pi\alpha|b_j|^2|\bar{b}_1|^2}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)} \Big(\frac{1}{e^{-i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}}} - \frac{e^{i2\pi\kappa}}{e^{i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}}} \Big), \end{aligned}$$

e para $j = 1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \Big| \frac{1}{1 - z} - \frac{\alpha|b_1|^2}{(1 - z)(e^{-i2\pi\kappa} - z)} \Big|^2 dE \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - z)(1 - \overline{z})} - \overline{\alpha}|b_1|^2 \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - z)(1 - \overline{z})(e^{i2\pi\kappa} - \overline{z})} \\ &\quad -\alpha|b_1|^2 \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - z)(1 - \overline{z})(e^{-i2\pi\kappa} - z)} \\ &\quad +|\alpha|^2|b_1|^4 \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - z)(1 - \overline{z})(e^{-i2\pi\kappa} - z)(e^{i2\pi\kappa} - \overline{z})}; \end{aligned}$$

calculando as integrais obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\pi}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)} - \frac{2\pi|b_1|^2}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)} - \frac{2\pi|b_1|^2}{(e^{i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}})} - \frac{2\pi\alpha|b_1|^2}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)(e^{-i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}})} \\ &\quad + \frac{2\pi\alpha|b_1|^4}{(e^{\frac{2}{T}} - 1)} \Big(\frac{1}{e^{-i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}}} - \frac{e^{i2\pi\kappa}}{e^{i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}}} \Big), \end{aligned}$$

e depois de substituir isso na expressão da média para a energia obtemos

$$\begin{aligned} L^q_{\varphi_1}(T) &= \frac{2}{(1 - e^{-\frac{2}{T}})T} \Big(1 - |b_1|^2 - \frac{\alpha|b_1|^2}{(e^{-i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}})} \Big) \\ &\quad - \frac{2|b_1|^2}{e^{-\frac{2}{T}}(e^{i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}})T} \\ &\quad + \frac{2\alpha|b_1|^2}{(1 - e^{-\frac{2}{T}})T} \Big(\frac{1}{e^{-i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}}} - \frac{e^{i2\pi\kappa}}{e^{i2\pi\kappa} - e^{\frac{2}{T}}} \Big) \langle \phi, H^q_0 \phi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, para T grande existe uma constante $C(\kappa, b_1) > 0$ tal que

$$L^q_{\varphi_1}(T) \leq C(\kappa, b_1) \left(1 + \langle \phi, H^q_0 \phi \rangle + \frac{1}{T} \right).$$

e o resultado segue. ■

É conhecido que o operador de Floquet associado ao modelo da Proposição 3.2 tem espectro pontual puro ([8, 9]), mas nada era conhecido sobre a estabilidade dinâmica de tal sistema quântico.

Para osciladores harmônicos com autovalores $\lambda_j = \omega j, \omega \neq 1$, o cálculo das integrais resultantes é mais complicado e não foram realizados.

3.2.4 Perturbações Kicked por V em $L^2(S^1)$

Kicked Linear Rotor

Considere

$$H(t) = \omega p + V(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n2\pi),$$

em que $p = -i\frac{d}{dx}$, $\omega \in \mathbb{R}$ e $V \in L^2(S^1)$. O espaço de Hilbert é $L^2(S^1)$; esse modelo foi considerado em [4, 22, 18] e referências deles. O operador de Floquet é

$$U_{\mathrm{F}} = U_V = e^{-i2\pi\omega p} e^{-iV(x)}.$$

Sejam $\varphi_j(x) = \frac{e^{ijx}}{\sqrt{2\pi}}$ para $j \in \mathbb{Z}$; p^2 tem autovalores $\lambda_j = j^2$ para $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$, λ_0 com multiplicidade um e autovetor correspondente φ_0 e os demais λ_j's com multiplicidade dois e autovetores correspondentes φ_j e φ_{-j}.

Considere o caso $\omega = 1$; então

$$((U_{\mathrm{F}} - z)^{-1}\varphi_0)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(e^{-iV(x)} - z)},$$

e portanto

$$G_z^{\varphi_0}(j) = \langle \varphi_j, R_z(U_{\mathrm{F}})\varphi_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ijx}}{e^{-iV(x)} - z} dx.$$

Denote $I_j \doteq \int_0^{2\pi} |G_z^{\varphi_0}(j)|^2 dE$. Segue que

$$\begin{aligned}
I_j &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \Big| \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ijx}}{e^{-iV(x)} - z} dx \Big|^2 dE \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ijx}}{e^{-iV(x)} - z} dx \Big) \overline{\Big(\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ijx}}{e^{-iV(x)} - z} dx \Big)} dE \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ijx}}{e^{-iV(x)} - z} dx \Big) \Big(\int_0^{2\pi} \frac{e^{ijy}}{e^{iV(y)} - \overline{z}} dy \Big) dE
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ijx}e^{ijy}}{(e^{-iV(x)}-z)(e^{iV(y)}-\overline{z})}\,dxdy\Big)dE\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ijx}e^{ijy}\Big(\int_0^{2\pi}\frac{dE}{(e^{-iV(x)}-z)(e^{iV(y)}-\overline{z})}\Big)dxdy.
\end{aligned}
$$

Para $x,y\in S^1$ fixados denote $I_{xy}\doteq\int_0^{2\pi}\frac{dE}{(e^{-iV(x)}-z)(e^{iV(y)}-\overline{z})}$. Se $\gamma(E)=e^{iE}$, $0\leq E\leq 2\pi$ tem-se

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_0^{2\pi}\frac{dE}{(e^{-iV(x)}-e^{-iE}e^{\frac{1}{T}})(e^{iV(y)}-e^{iE}e^{\frac{1}{T}})}\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{dE}{e^{-iE}e^{-iV(x)}(e^{iE}-e^{iV(x)}e^{\frac{1}{T}})e^{\frac{1}{T}}(e^{-\frac{1}{T}}e^{iV(y)}-e^{iE})}\\
&= -\frac{1}{e^{\frac{1}{T}}e^{-iV(x)}}\frac{1}{i}\int_\gamma\frac{dw}{(w-e^{iV(x)}e^{\frac{1}{T}})(w-e^{-\frac{1}{T}}e^{iV(y)})},
\end{aligned}
$$

e pelo Teorema dos Resíduos

$$
I_{xy}=-\frac{2\pi}{e^{\frac{1}{T}}e^{-iV(x)}(e^{-\frac{1}{T}}e^{iV(y)}-e^{iV(x)}e^{\frac{1}{T}})}=\frac{2\pi}{(e^{\frac{2}{T}}-e^{-iV(x)}e^{iV(y)})}.
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
I_j &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ijx}e^{ijy}\frac{2\pi}{(e^{\frac{2}{T}}-e^{-iV(x)}e^{iV(y)})}dxdy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ijx}\Big(\int_0^{2\pi}\frac{e^{ijy}dy}{(e^{\frac{2}{T}}-e^{-iV(x)}e^{iV(y)})}\Big)dx \qquad (3.5)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ijx}}{e^{-iV(x)}}\Big(\int_0^{2\pi}\frac{e^{ijy}dy}{(e^{\frac{2}{T}}e^{iV(x)}-e^{iV(y)})}\Big)dx.
\end{aligned}
$$

O cálculo dessas integrais não é uma tarefa fácil. Como uma ilustração, considere o potencial particular $V(x)=x$; pela Fórmula Integral de Cauchy

$$
\int_0^{2\pi}\frac{e^{ijy}dy}{(e^{\frac{2}{T}}e^{ix}-e^{iy})}=-\frac{1}{i}\int_\gamma\frac{w^{j-1}dw}{(w-e^{\frac{2}{T}}e^{ix})}=0 \qquad \text{se } j\geq 1,
$$

e pelo Teorema dos Resíduos

$$
\int_0^{2\pi}\frac{e^{ijy}dy}{(e^{\frac{2}{T}}e^{ix}-e^{iy})}=-\frac{1}{i}\int_\gamma\frac{dw}{w^{1-j}(w-e^{\frac{2}{T}}e^{ix})}=\frac{2\pi}{(e^{\frac{2}{T}}e^{ix})^{1-j}} \qquad \text{se } j\leq 0,
$$

e concluímos que

$$
I_j=0 \qquad \text{se } j\geq 1
$$

$$
I_j=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ijx}}{e^{-ix}}\frac{2\pi}{(e^{\frac{2}{T}}e^{ix})^{1-j}}dx=\frac{1}{e^{\frac{2}{T}(1-j)}}\int_0^{2\pi}dx=\frac{2\pi}{e^{\frac{2}{T}(1-j)}} \qquad \text{se } j\leq 0.
$$

Portanto, segue que para qualquer $q > 0$

$$L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T) = \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2q} I_{-j} = \frac{2}{T} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2q} e^{-\frac{2}{T} j}$$

e concluímos que neste caso

$$\langle U_{\mathrm{F}}^m \varphi_0, p^{2q} U_{\mathrm{F}}^m \varphi_0 \rangle = m^{2q}.$$

Esse é um resultado esperado visto que o espectro de U_F é absolutamente contínuo neste caso [4], mas aqui conseguimos o resultado explicitamente sem passar por argumentos espectrais, embora de uma maneira mais complicada. De qualquer maneira, é novamente um suporte para a fórmula no Teorema 3.1.

Para $V(x) = kx$ com $k \geq 2$, k inteiro, já complica um pouco, mas fazendo cálculos similares obtemos

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j = lk, \ l \geq 1 \\ \frac{2\pi}{e^{\frac{2}{T}(1-l)}} & \text{se} \quad j = lk, \ l \leq 0 \end{cases},$$

e portanto

$$L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T) \geq \frac{2k^{2q}}{T} \sum_{l=1}^{\infty} l^{2q} e^{-\frac{2}{T} l};$$

logo $\langle U_{\mathrm{F}}^m \varphi_0, p^{2q} U_{\mathrm{F}}^m \varphi_0 \rangle \geq C(k, q) m^{2q}$. O mesmo é válido se $V(x) = kx$ com $k \leq -1$.

Sistemas Kicked com Potência em p

Devido a dificuldade em calcular as integrais em (3.5), a fim de estimar $L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T)$, em algumas situações, consideraremos uma maneira alternativa.

Considere os modelos Kicked em $L^2(S^1)$ com operador de Floquet

$$U_{\mathrm{F}} = U_V = e^{-i2\pi\omega f(p)} e^{-iV(x)},$$

correspondendo a Hamiltoniana

$$H(t) = 2\pi\omega f(p) + V(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - 2\pi n)$$

em que p, V, φ_j são como anteriormente e $f(p) = p^s$ para algum $s \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to l^2(\mathbb{Z})$ a transformada de Fourier. Então $\mathcal{F}U_V\mathcal{F}^{-1} : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ e

$$\mathcal{F}U_V\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}e^{-i2\pi\omega f(p)}e^{-iV(x)}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}e^{-i2\pi\omega f(p)}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}e^{-iV(x)}\mathcal{F}^{-1}$$

em que $\mathcal{F}e^{-i2\pi\omega f(p)}\mathcal{F}^{-1}$ é representado por uma matriz diagonal D cujas entradas são

$$D(m, n) = e^{-i2\pi\omega f(n)}\delta_{mn},$$

e $\mathcal{F}e^{-iV(x)}\mathcal{F}^{-1}$ é representado pela matriz W cujas entradas são

$$W(m, n) = (\mathcal{F}\rho)(m - n) = \hat{\rho}(m - n),$$

em que $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iV(x)}$. Denote $B = DW$ então $B(m, n) = e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(m - n)$ e tem-se

$$U_V = \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}. \tag{3.6}$$

Seja $\eta^{(z)} = R_z(U_V)\varphi_0$ então

$$U_V\eta^{(z)} - z\eta^{(z)} = \varphi_0,$$

e usando (3.6) obtemos

$$B\mathcal{F}\eta^{(z)} - z\mathcal{F}\eta^{(z)} = \mathcal{F}\varphi_0.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$(B\mathcal{F}\eta^{(z)})(n) - (z\mathcal{F}\eta^{(z)})(n) = (\mathcal{F}\varphi_0)(n),$$

o que resulta em

$$e^{-i2\pi\omega f(n)}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\rho}(n - j)G_z^{\varphi_0}(j) - zG_z^{\varphi_0}(n) = \delta_{n0}. \tag{3.7}$$

A partir desta equação, para conseguirmos obter uma expressão para as funções de Green, vamos considerar os casos que seguem:

Caso Tridiagonal. Para lidar com tal equação, tentamos simplificá-la supondo que V seja tal que $\hat{\rho}(m - n) = 0$ se $|m - n| > 1$. Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$ fixado a equação (3.7) se reduz a

$$e^{-i2\pi\omega f(n)} \sum_{|n-j|\leq 1} \hat{\rho}(n-j) G_z^{\varphi_0}(j) - z G_z^{\varphi_0}(n) = \delta_{n0} \tag{3.8}$$

e $\mathcal{F}^{-1} U_V \mathcal{F} = B$ é tridiagonal e tem a forma

$$B = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & g(-1)\hat{\rho}(0) & g(-1)\hat{\rho}(-1) & & & \\ & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(0) & \hat{\rho}(-1) & & \\ & & g(1)\hat{\rho}(1) & g(1)\hat{\rho}(0) & g(1)\hat{\rho}(-1) & \\ & & & g(2)\hat{\rho}(1) & g(2)\hat{\rho}(0) & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

em que $g(n) = e^{-i2\pi\omega f(n)}$. Agora, se U é um operador unitário em $l^2(\mathbb{Z})$ tridiagonal então ou ele é unitariamente equivalente a um operador shift (bilateral), ou ele é a soma direta infinita de matrizes unitárias 2×2 e 1×1. (Lema 3.1 de [10]). Para demonstrar tal resultado foi usado apenas que se U é unitário e $Ue_k = \alpha_k e_{k-1} + \beta_k e_k + \gamma_k e_{k+1}$ em que $\{e_k\}$ é a base canônica de $l^2(\mathbb{Z})$, ou seja,

$$U = \begin{pmatrix} \ddots & \alpha_{k-1} & & & \\ & \beta_{k-1} & \alpha_k & & \\ & \gamma_{k-1} & \beta_k & \alpha_{k+1} & \\ & & \gamma_k & \beta_{k+1} & \\ & & & \gamma_{k+1} & \ddots \end{pmatrix}$$

então valem, dentre outras, as relações para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + |\gamma_k|^2 = 1,$$

$$\gamma_{k-1}\overline{\beta_{k-1}} + \beta_k \overline{\alpha_k} = 0,$$

$$\alpha_k \overline{\gamma_k} = 0.$$

Aplicando essas relações à $B = \mathcal{F}^{-1} U_V \mathcal{F}$ obtemos

- Se $\hat{\rho}(-1) \neq 0$ então $\hat{\rho}(1) = \hat{\rho}(0) = 0$ e $|\hat{\rho}(-1)| = 1$.

- Se $\hat{\rho}(1) \neq 0$ então $\hat{\rho}(-1) = \hat{\rho}(0) = 0$ e $|\hat{\rho}(1)| = 1$.

- Se $\hat{\rho}(0) \neq 0$ então $\hat{\rho}(1) = \hat{\rho}(-1) = 0$ e $|\hat{\rho}(0)| = 1$.

O próximo passo é investigar esses casos. O caso em que $\hat{\rho}(0) \neq 0$ reduz-se ao caso $H(t) = H_0$ já considerado anteriormente.

Os casos $\hat{\rho}(-1) \neq 0$ e $\hat{\rho}(1) \neq 0$ são similares, vamos considerar o caso $\hat{\rho}(1) \neq 0$. Para $n \in \mathbb{Z}$ fixado a equação (3.8) fica

$$e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(1)G_z^{\varphi_0}(n-1) - zG_z^{\varphi_0}(n) = \delta_{n0}, \tag{3.9}$$

e portanto pode-se escrever $G_z^{\varphi_0}(n)$ em termos de $G_z^{\varphi_0}(0)$ e $G_z^{\varphi_0}(-1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, a saber

$$G_z^{\varphi_0}(n) = \frac{e^{-i2\pi\omega(f(n)+\ldots+f(1))}\hat{\rho}(1)^n}{z^n}G_z^{\varphi_0}(0) \qquad n \geq 1,$$
$$G_z^{\varphi_0}(-n) = \frac{z^{n-1}}{e^{-i2\pi\omega(f(-n+1)+\ldots+f(-1))}\hat{\rho}(1)^{n-1}}G_z^{\varphi_0}(-1) \qquad n \geq 2;$$

além disso, para $n = 0$ em (3.9) tem-se $\hat{\rho}(1)G_z^{\varphi_0}(-1) - zG_z^{\varphi_0}(0) = 1$, logo para $z = e^{-iE}e^{1/T}$ com $E \in S^1$ e $T > 1$

$$\begin{aligned} 1 &\leq |G_z^{\varphi_0}(-1)| + |z||G_z^{\varphi_0}(0)| \\ &= |G_z^{\varphi_0}(-1)| + e^{1/T}|G_z^{\varphi_0}(0)| \\ &\leq e(|G_z^{\varphi_0}(-1)| + |G_z^{\varphi_0}(0)|), \end{aligned}$$

ou seja, para $z = e^{-iE}e^{1/T}$ com $E \in S^1$ e $T > 1$

$$|G_z^{\varphi_0}(-1)|^2 + |G_z^{\varphi_0}(0)|^2 \geq d > 0.$$

Portanto, para $T > 1$

$$\begin{aligned} L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T) &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2q}\left(\int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(n)|^2 dE + \int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(-n)|^2 dE\right) \\ &= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2q}\left(\frac{1}{e^{\frac{2n}{T}}}\int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(0)|^2 dE\right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{2(n-1)}{T}}\int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(-1)|^2 dE\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2q} e^{-\frac{2n}{T}} \int_0^{2\pi} \left(|G_z^{\varphi_0}(0)|^2 + |G_z^{\varphi_0}(-1)|^2\right) dE \\
&\geq d\frac{2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{2q} e^{-\frac{2n}{T}},
\end{aligned}
$$

logo $\langle U_V^m \varphi_0, p^{2q} U_V^m \varphi_0 \rangle \geq C(m+1)^{2q}$.

Caso Pentadiagonal. Suponha agora que V seja de forma que $\hat{\rho}(m-n) = 0$ se $|m-n| > 2$. Então para cada $n \in \mathbb{Z}$ fixado a equação (3.7) se reduz a

$$
e^{-i2\pi\omega f(n)} \sum_{|n-j|\leq 2} \hat{\rho}(n-j) G_z^{\varphi_0}(j) - z G_z^{\varphi_0}(n) = \delta_{n0}, \tag{3.10}
$$

e $\mathcal{F}^{-1} U_V \mathcal{F}$ é pentadiagonal e tem a forma similar a $\mathcal{F}^{-1} U_V \mathcal{F}$ do caso anterior, acrescentando os elementos cuja distância à diagonal principal é 2, os elementos acima da diagonal sendo da forma $e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(-2)$ e os abaixo da forma $e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(2)$. Para não recairmos no caso anterior, teremos de supor que $\hat{\rho}(2)$ ou $\hat{\rho}(-2)$ é não-nulo. Agora, se U é um operador unitário e pentadiagonal em $l^2(\mathbb{Z})$, ou seja, $Ue_k = \zeta_k e_{k-2} + \alpha_k e_{k-1} + \beta_k e_k + \gamma_k e_{k+1} + \theta_k e_{k+2}$ e em forma matricial

$$
U = \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & \\
& \beta_{k-2} & \alpha_{k-1} & \zeta_k & & & \\
& \gamma_{k-2} & \beta_{k-1} & \alpha_k & \zeta_{k+1} & & \\
& \theta_{k-2} & \gamma_{k-1} & \beta_k & \alpha_{k+1} & \zeta_{k+2} & \\
& & \theta_{k-1} & \gamma_k & \beta_{k+1} & \alpha_{k+2} & \\
& & & \theta_k & \gamma_{k+1} & \beta_{k+2} & \\
& & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

então são válidas as seguintes relações, para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$
|\zeta_k|^2 + |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + |\gamma_k|^2 + |\theta_k|^2 = 1
$$

$$
\overline{\zeta_k}\alpha_{k-1} + \overline{\alpha_k}\beta_{k-1} + \overline{\beta_k}\gamma_{k-1} + \overline{\gamma_k}\theta_{k-1} = 0
$$

$$
\overline{\gamma_{k-2}}\theta_{k-2} + \overline{\beta_{k-1}}\gamma_{k-1} + \overline{\alpha_k}\beta_k + \overline{\beta_{k+1}}\alpha_{k+1} = 0
$$

$$
\overline{\beta_{k-1}}\theta_{k-1} + \overline{\alpha_k}\gamma_k + \overline{\zeta_{k+1}}\beta_{k+1} = 0
$$

$$\overline{\zeta_{k+1}}\beta_{k-1} + \overline{\alpha_{k+1}}\gamma_{k-1} + \overline{\beta_{k+1}}\theta_{k-1} = 0$$

$$\overline{\alpha_{k-1}}\theta_{k-1} + \overline{\zeta_k}\gamma_k = 0$$

$$\overline{\zeta_{k+1}}\gamma_{k-2} + \overline{\alpha_{k+1}}\theta_{k-2} = 0$$

$$\overline{\zeta_k}\theta_k = 0$$

$$\overline{\zeta_{k+2}}\theta_{k-2} = 0.$$

Vamos supor $\hat{\rho}(2) \neq 0$. O caso $\hat{\rho}(-2) \neq 0$ é similar. Então pelas relações acima aplicadas ao nosso caso, obtém-se que $\hat{\rho}(-2) = \hat{\rho}(-1) = \hat{\rho}(0) = \hat{\rho}(1) = 0$ e portanto (3.10) fica

$$e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(2)G_z^{\varphi_0}(n-2) - zG_z^{\varphi_0}(n) = \delta_{n0}.$$

Para $n = 0$ tem-se $\hat{\rho}(2)G_z^{\varphi_0}(-2) - zG_z^{\varphi_0}(0) = 1$ e de forma análoga ao caso anterior

$$|G_z^{\varphi_0}(-2)|^2 + |G_z^{\varphi_0}(0)|^2 \geq d > 0,$$

para $z = e^{-iE}e^{1/T}$, $E \in S^1$ e $T > 1$. Como para $n \geq 1$

$$G_z^{\varphi_0}(2n) = \frac{e^{-i2\pi\omega(f(2n)+f(2n-2)+\cdots+f(2))}\hat{\rho}(2)^n}{z^n}G_z^{\varphi_0}(0),$$

$$G_z^{\varphi_0}(-2n) = \frac{z^{n-1}G_z^{\varphi_0}(-2)}{\hat{\rho}(2)^{n-1}e^{-i2\pi\omega(f(-2(n-1))+\cdots+f(-2))}},$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T) &\geq \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{2q}\left(\int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(2n)|^2dE + \int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(-2n)|^2dE\right)\\
&= \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{2q}\Bigg(\frac{1}{e^{\frac{2n}{T}}}\int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(0)|^2dE\\
&\quad +e^{\frac{2(n-1)}{T}}\int_0^{2\pi}|G_z^{\varphi_0}(-2)|^2dE\Bigg)\\
&\geq \frac{1}{\pi e^{-\frac{2}{T}}}\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{2q}e^{-\frac{2n}{T}}\int_0^{2\pi}\left(|G_z^{\varphi_0}(0)|^2 + |G_z^{\varphi_0}(-2)|^2\right)dE\\
&\geq d\frac{2}{T}\sum_{n=0}^{\infty}(2(n+1))^{2q}e^{-\frac{2n}{T}},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\langle U_V^m\varphi_0, p^{2q}U_V^m\varphi_0\rangle \geq C(2(m+1))^{2q}.$$

<u>*Caso N-diagonal*</u>. No caso de V ser de forma que $\hat{\rho}(m-n)=0$ se $|m-n|>N$, para não se recair nos casos anteriores tem-se que supor que $\hat{\rho}(N)$ ou $\hat{\rho}(-N)$ é não-nulo. No caso de $\hat{\rho}(N)\neq 0$ tem-se pela unitariedade e pela estrutura de $\mathcal{F}^{-1}U_V\mathcal{F}$ que $\hat{\rho}(N-1)=\ldots\hat{\rho}(0)=\hat{\rho}(-1)=\ldots=\hat{\rho}(-N)=0$ e portanto (3.7) se reduz, para cada $n\in\mathbb{Z}$, à

$$e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(N)G_z^{\varphi_0}(n-N)-zG_z^{\varphi_0}(n)=\delta_{n0},$$

logo

$$|G_z^{\varphi_0}(-N)|^2+|G_z^{\varphi_0}(0)|^2\geq d>0,$$

para $z=e^{-iE}e^{1/T}$, $T>1$ e além disso para $n\geq 1$

$$G_z^{\varphi_0}(nN)=\frac{e^{-i2\pi\omega(f(nN)+f((n-1)N)+\cdots+f(N))}\hat{\rho}(N)^n}{z^n}G_z^{\varphi_0}(0),$$

$$G_z^{\varphi_0}(-nN)=\frac{z^{n-1}G_z^{\varphi_0}(-N)}{\hat{\rho}(N)^{n-1}e^{-i2\pi\omega(f(-N(n-1))+\cdots+f(-N))}}.$$

Portanto, de forma similar aos casos anteriores concluímos que

$$L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T)\geq d\frac{2}{T}\sum_{n=0}^{\infty}(N(n+1))^{2q}e^{-\frac{2n}{T}}.$$

Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Para sistemas Kicked em $L^2(S^1)$ com*

$$U_V=e^{-i2\pi\omega f(p)}e^{-iV(x)}$$

em que $f(p)=p^s$, tem-se que $\mathcal{F}U_V\mathcal{F}^{-1}:l^2(\mathbb{Z})\to l^2(\mathbb{Z})$ é representado pela matriz B com entradas $B(m,n)=e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(m-n)$ sendo $\rho(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-iV(x)}$. Se V é de forma que $\hat{\rho}(m-n)=0$ se $|m-n|>N\in\mathbb{N}^*$ e $\hat{\rho}(N)$ ou $\hat{\rho}(-N)$ é não-nulo, isto é, $V(x)=\pm Nx+\theta$ com $\theta\in\mathbb{R}$, então $\mathcal{F}U_V\mathcal{F}^{-1}$ é unitariamente equivalente a T^N em que T é o operador shift bilateral (à direita ou à esquerda) e

$$L_{\varphi_0}^{p^{2q}}(T)\geq d\frac{2}{T}\sum_{n=0}^{\infty}(N(n+1))^{2q}e^{-\frac{2n}{T}}.$$

Demonstração: Falta demonstrar apenas que $\mathcal{F}U_V\mathcal{F}^{-1}$ é unitariamente equivalente a T^N. Vamos supor que $\hat{\rho}(N) \neq 0$ (o caso para $\hat{\rho}(-N) \neq 0$ é similar) então pela discusão precedente tem-se que

$$B(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n+N \\ e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(N) & \text{se} \quad m = n+N \end{cases}$$

ou seja, $Be_n = e^{-i2\pi\omega f(n)}\hat{\rho}(N)e_{n+N}$, em que $\{e_n\}$ é a base canônica de $l^2(\mathbb{Z})$. Como $|\hat{\rho}(N)| = 1$, vamos escrever $\hat{\rho}(N) = e^{-i\theta}$. Seja W um operador unitário definido por

$$We_n = e^{i\vartheta_n}e_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Se ϑ_n satisfaz para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\vartheta_{n+N} - \vartheta_n = 2\pi\omega f(n) + \theta \tag{3.11}$$

segue que $W^{-1}BW = T^N$. (3.11) é satisfeita tomando, por exemplo, $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \ldots = \vartheta_{N-1} = 0$ e os demais ϑ_n obedecendo (3.11). ■

Observamos que o resultado acima já é conhecido, visto que para $V(x) = x$ sabe-se que o espectro de $U_F = U_V$ é absolutamente contínuo puro, donde segue tal crescimento para o valor esperado da energia pela teoria desenvolvida em [2, 29, 30, 46].

Capítulo 4

Operador de Floquet com Espectro Pontual e Instabilidade

Em [10] são estudados uma classe de operadores Floquet em $l^2(\mathbb{Z})$ e $l^2(\mathbb{N}^*)$ que são pentadiagonais. Tais operadores em $l^2(\mathbb{N}^*)$ descrevem a dinâmica quântica de certos modelos, veja [5, 10] e referências lá citadas. Neste capítulo consideramos uma classe especial desses operadores e construiremos um exemplo de operador de Floquet com espectro pontual puro e energia não-limitada. Para mostrar que o espectro é pontual puro usaremos um argumento de [32] que foi usado para demonstrar a presença desse tipo espectral, com autofunções decaindo exponencialmente, para operadores unitários aleatórios; o argumento combina perturbação de posto 1 e positividade do expoente de Lyapunov com limitação polinomial das autofunções generalizadas. Para mostrar instabilidade dinâmica adaptaremos os resultados preliminares usados para conseguir instabilidade para o modelo em [19], alguns resultados possuem uma demonstração completamente diferente.

Este capítulo é organizado como segue: Na Seção 4.1 apresentaremos o modelo de operador de Floquet que iremos considerar, alguns resultados preliminares sobre eles são apresentados e o resultado principal deste capítulo (Teorema 4.2) é enunciado. Na Seção 4.2 demonstraremos que o operador de Floquet considerado tem espectro pontual puro. A Seção 4.3 é dedicada à demonstrar instabilidade dinâmica do modelo.

4.1 Apresentação dos Operadores Floquet

Neste capítulo o espaço de Hilbert é $l^2(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{N}^*)$, em que $\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos inteiros positivos, e denotaremos a base canônica de $l^2(\mathbb{Z})$ por $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e similarmente para $l^2(\mathbb{N}^*)$. Se S é uma matriz unitária 2×2 então S pode ser escrita como

$$S = e^{-i\theta}\begin{pmatrix} re^{-i\alpha} & ite^{i\gamma} \\ ite^{-i\gamma} & re^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

em que $\alpha,\gamma,\theta \in S^1$ e $t, r\in\mathbb{R}$ e satisfazem $t^2+r^2=1$; t é chamado de coeficiente de transmissão e r de coeficiente de reflexão.

Considere $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ um conjunto infinito de tais matrizes, em que S_k depende das fases $\alpha_k,\gamma_k,\theta_k$ e dos coeficientes de reflexão e transmissão t_k, r_k. Sejam P_j os projetores ortogonais nos subspaços gerados por φ_j,φ_{j+1} em $l^2(\mathbb{Z})$ e U_e e U_o os operadores unitários em $l^2(\mathbb{Z})$ definidos por

$$U_e = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_{2k}S_{2k}P_{2k} \qquad \text{e} \qquad U_o = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_{2k+1}S_{2k+1}P_{2k+1}$$

ou, em representação matricial na base canônica,

$$U_e = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & S_{-2} & & & \\ & & S_0 & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

e similarmente para U_o, com S_{2k+1} no lugar de S_{2k}.

Os operadores Floquet U, considerados em [10] e que estudaremos neste capítulo, são definidos por

$$U = U_oU_e$$

tal que, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
U\varphi_{2k} &= ir_{2k}t_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}e^{-i(\alpha_{2k}-\gamma_{2k-1})}\varphi_{2k-1} \\
&\quad + r_{2k}r_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}e^{-i(\alpha_{2k}-\alpha_{2k-1})}\varphi_{2k} \\
&\quad + ir_{2k+1}t_{2k}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}e^{-i(\gamma_{2k}+\alpha_{2k+1})}\varphi_{2k+1} \\
&\quad - t_{2k}t_{2k+1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}e^{-i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k+1})}\varphi_{2k+2}, \\
U\varphi_{2k+1} &= -t_{2k}t_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}e^{i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1})}\varphi_{2k-1} \qquad (4.1) \\
&\quad + ir_{2k-1}t_{2k}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}e^{i(\gamma_{2k}+\alpha_{2k-1})}\varphi_{2k} \\
&\quad + r_{2k}r_{2k+1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}e^{i(\alpha_{2k}-\alpha_{2k+1})}\varphi_{2k+1} \\
&\quad + ir_{2k}t_{2k+1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}e^{i(\alpha_{2k}-\gamma_{2k+1})}\varphi_{2k+2}.
\end{aligned}
$$

Em forma matricial, sem explicitar os elementos, temos a estrutura

$$
U = \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & & & & \\
* & * & * & * & & & & & & \\
* & * & * & * & & & & & & \\
 & & * & * & * & * & & & & \\
 & & * & * & * & * & & & & \\
 & & & & * & * & * & * & & \\
 & & & & * & * & * & * & & \\
 & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix} \tag{4.2}
$$

Considere $t_k = t$, $r_k = r$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ com $r^2 + t^2 = 1$ e $0 < r, t < 1$. Os casos extremos em que $rt = 0$ são espectralmente triviais; no caso $t = 0$, i.e., $r = 1$, U é pontual puro e se $t = 1$, i.e. $r = 0$, U é absolutamente contínuo. (Proposição 3.1 de [10]).

Denote a matriz (4.2) por $M(\{\theta_k\}, \{\alpha_k\}, \{\gamma_k\})$ e identifique U a ela, é conhecido que (Lema 3.2 de [10]) para quaisquer seqüências $\{\theta_k\}, \{\alpha_k\}, \{\gamma_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$
U \equiv M(\{\theta_k\}, \{\alpha_k\}, \{\gamma_k\}) \simeq M(\{\theta_k\}, \{\alpha_k\}, \{0\})
$$

em que $\simeq$ significa unitariamente equivalente, e pode-se substituir $\{\gamma_k\}$ na definição de U por qualquer outra seqüência $\{\gamma'_k\}$.

Considerando a equação de autovalores

$$U\psi = e^{iE}\psi,$$

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_k, \qquad c_k \in \mathbb{C},\ E \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

vê-se da estrutura (4.2) do operador U, que se ψ satisfaz (4.3) tem-se a seguinte relação entre os coeficientes (c_{2k}, c_{2k+1}) e (c_{2k-2}, c_{2k-1})

$$\begin{pmatrix} c_{2k} \\ c_{2k+1} \end{pmatrix} = T_k(E) \begin{pmatrix} c_{2k-2} \\ c_{2k-1} \end{pmatrix}$$

em que $T_k(E)$ é a matriz 2×2 cujas entradas são

$$\begin{aligned}
T_k(E)_{11} &= -e^{-i(E+\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2})}, \\
T_k(E)_{12} &= i\frac{r}{t}(e^{-i(E+\gamma_{2k-1}-\alpha_{2k-2}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2})} - e^{-i(\gamma_{2k-1}-\alpha_{2k-1})}), \\
T_k(E)_{21} &= i\frac{r}{t}(e^{-i(\theta_{2k-2}-\theta_{2k}+\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2}+\alpha_{2k-1})} \\
&\quad -e^{-i(E+\theta_{2k-2}+\theta_{2k-1}+\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2}+\alpha_{2k})}), \\
T_k(E)_{22} &= -\frac{1}{t^2}e^{i(E+\theta_{2k}+\theta_{2k-1}-\gamma_{2k}-\gamma_{2k-1})} \\
&\quad +\frac{r^2}{t^2}e^{-i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1})}(e^{i(\theta_{2k}-\theta_{2k-2}+\alpha_{2k-2}-\alpha_{2k-1})} + e^{-i(\alpha_{2k}-\alpha_{2k-1})}) \\
&\quad -\frac{r^2}{t^2}e^{-i(E+\theta_{2k-2}+\theta_{2k-1}+\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1}+\alpha_{2k}-\alpha_{2k-2})}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e

$$\det T_k(E) = e^{-i(\theta_{2k-2}-\theta_{2k}+\gamma_{2k}+2\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2})}.$$

Note que $|\det T_k(E)| = 1$, $\forall\, k$. Portanto para $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} c_{2k} \\ c_{2k+1} \end{pmatrix} = T_k(E)\dots T_2(E)T_1(E) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \Phi_k(E) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{-2k} \\ c_{-2k+1} \end{pmatrix} = T_{-k+1}(E)^{-1}\dots T_{-1}(E)^{-1}T_0(E)^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \Phi_{-k}(E) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

No contexto físico [5], o espaço de Hilbert natural é $l^2(\mathbb{N}^*)$, e a definição de acordo com [10] de operador de Floquet, denotado por U^+, é

$$\begin{aligned} U^+\varphi_1 &= re^{-i(\theta_0+\theta_1)}e^{-i\alpha_1}\varphi_1 + ite^{-i(\theta_0+\theta_1)}e^{-i\gamma_1}\varphi_2, \\ U^+\varphi_k &= U\varphi_k,\ k>1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

com $U\varphi_k$ como em (4.1). Neste caso a equação de autovalores é

$$U^+\psi = e^{iE}\psi$$

com $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$. Então começando de c_2, c_3, temos

$$\begin{pmatrix} c_{2k} \\ c_{2k+1} \end{pmatrix} = T_k(E)\ldots T_2(E)\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

em que as matrizes de transferência $T_k(E)$ são dadas por (4.4), com a condição adicional

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_1(E) \\ a_2(E) \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} a_1(E) &= \frac{i}{t}\left(e^{-i(E+\gamma_1+\theta_1+\theta_0)} - re^{-i(\gamma_1-\alpha_1)}\right), \\ a_2(E) &= -\frac{1}{t^2}e^{i(E+\theta_2+\theta_1-\gamma_2-\gamma_1)} \\ &\quad +\frac{r}{t^2}e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\left(e^{i(\theta_2-\theta_0-\alpha_1)} + re^{-i(\alpha_2-\alpha_1)}\right) \\ &\quad -\frac{r}{t^2}e^{-i(E+\theta_0+\theta_1+\gamma_2+\gamma_1+\alpha_2)}. \end{aligned}$$

Para mais detalhes e generalizações dessa classe de operadores unitários, referimos o leitor a [10, 39, 40, 32]. Em particular, quando as fases são variáveis aleatórias i.i.d., alguns resultados típicos àqueles obtidos para operadores de Schrödinger aleatórios, discretos e unidimensionais são mostrados em [10, 39] para o caso unitário acima. Por exemplo, a estrutura de um formalismo de matrizes de transferência para expressar autovalores generalizados permite introduzir um expoente de Lyapunov para demonstrar uma versão unitária do Teorema de Ishii-Pastur (e conseguir ausência de espectro absolutamente contínuo) e do Teorema de Oseledec [10].

Vamos considerar o exemplo peneperiódico $U \equiv M(\{\theta_k\}, \{\alpha_k\}, \{\gamma_k\})$ em que $\alpha_k = \alpha \ \forall\ k$, $\gamma_k = (-1)^{k+1}\alpha$ e a peneperiodicidade fica com as fases θ_k definidas por $\theta_k = 2\pi\beta k + \theta$, em que $\beta \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Denotaremos U por $U = U(\beta, \theta)$ que com as escolhas acima passa a ser dado por (veja (4.1))

$$\begin{aligned} U(\beta,\theta)\varphi_{2k} &= irte^{-i(2\pi\beta(4k-1)+2\theta)}\varphi_{2k-1} \\ &\quad + r^2e^{-i(2\pi\beta(4k-1)+2\theta)}\varphi_{2k} \\ &\quad + irte^{-i(2\pi\beta(4k+1)+2\theta)}\varphi_{2k+1} \\ &\quad - t^2e^{-i(2\pi\beta(4k+1)+2\theta)}\varphi_{2k+2} \\ U(\beta,\theta)\varphi_{2k+1} &= -t^2e^{-i(2\pi\beta(4k-1)+2\theta)}\varphi_{2k-1} \\ &\quad + itre^{-i(2\pi\beta(4k-1)+2\theta)}\varphi_{2k} \\ &\quad + r^2e^{-i(2\pi\beta(4k+1)+2\theta)}\varphi_{2k+1} \\ &\quad + itre^{-i(2\pi\beta(4k+1)+2\theta)}\varphi_{2k+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Let $U(\beta, \theta)^+$ o operador correspondente em $l^2(\mathbb{N}^*)$ definido por (4.5). O seguinte resultado foi demonstrado em [10].

Teorema 4.1 *(i) Para β racional e cada $\theta \in [0, 2\pi)$, $U(\beta, \theta)$ tem espectro absolutamente contínuo puro, $\sigma_{\mathrm{sc}}(U(\beta, \theta)^+) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{ac}}(U(\beta, \theta)^+) = \sigma_{\mathrm{ac}}(U(\beta, \theta))$ e o espectro pontual de $U(\beta, \theta)^+$ consiste de finitos autovalores simples no conjunto resolvente de $U(\beta, \theta)$.*
(ii) Sejam $T_k^\theta(E)$ as matrizes de transferência em E correspondendo a $U(\beta, \theta)$. Para β irracional, o expoente de Lyapunov $\gamma(E)$ satisfaz, para q.t.p. θ,

$$\gamma_\theta(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln \| \prod_{k=1}^N T_k^\theta(E) \|}{N} \geq \ln \frac{1}{t^2} > 0,$$

e portanto $\sigma_{ac}(U(\beta, \theta)) = \emptyset$. O mesmo é verdadeiro para $U(\beta, \theta)^+$.

Finalmente, introduziremos o modelo particular aqui estudado. Consideramos a perturbação de posto um de $U(\beta, \theta)^+$, $\lambda \in [0, 2\pi)$ (veja também [13])

$$U_\lambda(\beta,\theta)^+ := U(\beta,\theta)^+ e^{i\lambda P_{\varphi_1}} = U(\beta,\theta)^+ \left(\mathrm{I_d} + (e^{i\lambda} - 1)P_{\varphi_1}\right), \tag{4.7}$$

em que $P_{\varphi_1}(\cdot) = \langle\varphi_1, \cdot\rangle\varphi_1$. Observe que

$$U(\beta, \theta)^+ \equiv U^+ \left(\{\theta_k\}_{k=0}^\infty, \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty, \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty\right)$$

e $U_\lambda(\beta,\theta)^+ \equiv U^+ \left(\{\tilde{\theta_k}\}_{k=0}^\infty, \{\tilde{\alpha_k}\}_{k=1}^\infty, \{\tilde{\gamma_k}\}_{k=1}^\infty\right)$ em que $\tilde{\theta_0} = \theta_0 - \lambda$ e $\tilde{\theta_k} = \theta_k$, $\tilde{\alpha_k} = \alpha_k$, $\tilde{\gamma_k} = \gamma_k$ para $k \geq 1$. Portanto, o operador perturbado $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ também pertence à família de operadores Floquet estudadas em [10].

Seja X^m o operador momento de ordem $m > 0$ em $l^2(\mathbb{N}^*)$

$$X^m = \sum_{k\geq 1} k^m \langle\varphi_k, \cdot\rangle\varphi_k, \tag{4.8}$$

o qual é auto-adjunto e tem espectro discreto.

Podemos agora enunciar nossa principal contribuição neste capítulo:

Teorema 4.2 *(i) Para β irracional, $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ tem apenas espectro pontual para q.t.p. θ, $\lambda \in [0, 2\pi)$, e na base $\{\varphi_k\}$ suas autofunções decaem exponencialmente.*

(ii) β pode ser escolhido irracional de forma que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^n \varphi_1\|^2}{F(n)} = \infty,$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ e qualquer $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, em que $F(n) = \frac{n^2}{\ln(2+n)}$ e X é o momento de ordem $m = 1$ dado por (4.8).

Observações. 1. Juntando (i) e (ii) do teorema acima obtemos que, para algum β irracional, para q.t.p. $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ tem espectro pontual puro e a função

$$n \mapsto \left\langle \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^n \varphi_1, X^2 \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^n \varphi_1 \right\rangle$$

é não-limitada. Ou seja, tem-se espectro pontual puro e instabilidade dinâmica.

2. Podemos modificar a demonstração e substituir a função $f(n) = \ln(2 + n)$ por qualquer seqüêcia monótona f com $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

4.2 Espectro Pontual Puro

Nesta seção demonstraremos a parte (i) do Teorema 4.2. Precisamos do lema preliminar:

Lema 4.1 *Para qualquer β e θ, o vetor φ_1 é cíclico para $U(\beta,\theta)^+$.*

Demonstração: Fixe β e θ. Indicaremos que qualquer vetor φ_k, $k \in \mathbb{N}^*$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\left(U(\beta,\theta)^+\right)^n \varphi_1$, $n \in \mathbb{Z}$. Como $U(\beta,\theta)^+\varphi_1 = re^{-i(2\pi\beta+2\theta)}e^{-i\alpha}\varphi_1 + ite^{-i(2\pi\beta+2\theta)}e^{-i\alpha}\varphi_2$ então

$$\varphi_2 = -\frac{i}{t}e^{i(2\pi\beta+2\theta)}e^{i\alpha}U(\beta,\theta)^+\varphi_1 + \frac{ir}{t}\varphi_1. \tag{4.9}$$

Agora

$$\left(U(\beta,\theta)^+\right)^{-1}\varphi_1 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3, \tag{4.10}$$

em que a_1, a_2 e a_3 são números complexos não-nulos. Assim, usando (4.9) e (4.10), uma combinação linear adequada de $\left(U(\beta,\theta)^+\right)^{-1}\varphi_1$, φ_1 e $U(\beta,\theta)^+\varphi_1$ fornece φ_3. Como $U(\beta,\theta)^+\varphi_2 = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3 + b_4\varphi_4$ obtemos que φ_4 pode ser escrito como uma combinação linear desejada. Devido a estrutura de $U(\beta,\theta)^+$, o processo pode ser iterado para obter qualquer φ_k. $\blacksquare$

Estamos em condições de demonstrar espectro pontual puro para nosso modelo.

Demonstração: **(Teorema 4.2(i))** Fixe β irracional e seja $|\cdot|$ uma notação para a medida de Lebesgue em $[0,2\pi)$. Pelo Teorema 4.1*(ii)*, para qualquer $E \in [0,2\pi)$ existe $\Omega(E) \subset [0,2\pi)$ com $|\Omega(E)| = 1$ de forma que

$$\gamma_\theta(E) > 0, \qquad \forall\, \theta \in \Omega(E).$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} 1 = \int_0^{2\pi} |\Omega(E)| \frac{dE}{2\pi} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \chi_{\Omega(E)}(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}\right)\frac{dE}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \chi_{\Omega(E)}(\theta)\frac{dE}{2\pi}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

e para θ em um conjunto de medida um

$$\int_0^{2\pi} \chi_{\Omega(E)}(\theta)\frac{dE}{2\pi} = 1,$$

ou seja, $\theta \in \Omega(E)$ para quase todo $E \in [0, 2\pi)$. Então existe um conjunto $\Omega_0 \subset [0, 2\pi)$ com $|\Omega_0| = 1$ de modo que para qualquer $\theta \in \Omega_0$ existe $A_\theta \subset [0, 2\pi)$ com $|A_\theta| = 0$ e

$$\gamma_\theta(E) > 0, \qquad \forall\, E \in A_\theta^c := [0, 2\pi) \setminus A_\theta.$$

Seja $\mu^k_{\theta,\lambda}$ a medida espectral associada com

$$U_\lambda(\beta, \theta)^+ = \int_0^{2\pi} e^{iE} dF_{\theta,\lambda}(E)$$

e os respectivos vetores φ_k, de modo que para $k \in \mathbb{N}^*$ e todo conjunto de Borel $\Lambda \subset [0, 2\pi)$

$$\mu^k_{\theta,\lambda}(\Lambda) = \langle \varphi_k, F_{\theta,\lambda}(\Lambda)\varphi_k \rangle.$$

Agora, para perturbações de posto um de operadores unitários, como em perturbações de posto um de operadores auto-adjuntos (veja [53, 54] para o caso auto-adjunto e [8, 13] para o caso unitário) vale: Para qualquer $f \in L^1([0, 2\pi))$ tem-se

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} f(E) d\mu^1_{\theta,\lambda}(E) = \int_0^{2\pi} f(E) \frac{dE}{2\pi}. \tag{4.11}$$

Então, aplicando (4.11) com f a função característica de A_θ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= |A_\theta| = \int_0^{2\pi} \chi_{A_\theta}(E) \frac{dE}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} \chi_{A_\theta}(E) d\mu^1_{\theta,\lambda}(E) = \int_0^{2\pi} d\mu^1_{\theta,\lambda}(A_\theta) d\lambda, \end{aligned}$$

e portanto $\mu^1_{\theta,\lambda}(A_\theta) = 0$ para q.t.p. λ. Portanto, para cada $\theta \in \Omega_0$, existe $J_\theta \subset [0, 2\pi)$ com $|J_\theta^c| = 0$ de forma que

$$\mu^1_{\theta,\lambda}(A_\theta) = 0, \qquad \forall\, \lambda \in J_\theta. \tag{4.12}$$

Pelo Lema 4.1 e (4.12), segue que $F_{\theta,\lambda}(A_\theta) = 0$ para todo $\theta \in \Omega_0$ e $\lambda \in J_\theta$. Além disso, seja $S_{\theta,\lambda}$ o conjunto dos $E \in [0, 2\pi)$ de modo que a equação

$$U_\lambda(\beta, \theta)^+ \psi = e^{iE} \psi$$

tem uma solução não-trivial polinomialmente limitada. É conhecido que

$$F_{\theta,\lambda}\left([0, 2\pi) \setminus S_{\theta,\lambda}\right) = 0$$

(veja [10, 32]). Assim, concluímos que $S_{\theta,\lambda} \cap A_\theta^c$ é um suporte para $F_{\theta,\lambda}(\cdot)$ (veja observação abaixo) para todo $\theta \in \Omega_0$ e $\lambda \in J_\theta$.

Agora, se $E \in S_{\theta,\lambda} \cap A_\theta^c$ então $U_\lambda(\beta,\theta)^+\psi = e^{iE}\psi$ tem uma solução não-trivial polinomialmente limitada ψ e $\gamma_\theta(E) > 0$. Por construção $\gamma_{\theta,\lambda}(E) = \gamma_\theta(E)$ em que $\gamma_{\theta,\lambda}(E)$ é o expoente de Lyapunov associado com $U_\lambda(\beta,\theta)^+$. Assim, pelo Teorema de Oseledec, toda solução que é polinomialmente limitada tem que decair exponencialmente, logo ψ está em $l^2(\mathbb{N}^*)$ e é uma uma autofunção de $U_\lambda(\beta,\theta)^+$. Portanto, concluímos que cada $E \in S_{\theta,\lambda} \cap A_\theta^c$ é um autovalor de $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ com a autofunção correspondente decaindo exponencialmente. Como $l^2(\mathbb{N}^*)$ é separável, segue que $S_{\theta,\lambda} \cap A_\theta^c$ é contável e então $F_{\theta,\lambda}(\cdot)$ tem suporte contável para todo $\theta \in \Omega_0$ e $\lambda \in J_\theta$. Assim $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ tem espectro pontual puro para q.t.p. $\theta,\ \lambda \in [0, 2\pi)$. ■

Observação. Dizemos que um conjunto de Borel S suporta a projeção espectral $F(\cdot)$ se $F([0, 2\pi) \setminus S) = 0$.

4.3 Instabilidade Dinâmica

Nesta seção apresentaremos a demonstração do Teorema 4.2*(ii)*. A estratégia inicial é aquela do Apêndice 2 de [19]. No entanto, alguns resultados técnicos importantes precisam de argumentos diferentes, que são os casos do Lema 4.6 e do Lema 4.7. Iniciaremos com a discussão de uma série de lemas preliminares, adaptados do caso auto-adjunto para o caso unitário.

4.3.1 Lemas Preliminares

Seja $P_{n \geq a}$ a projeção sobre os vetores suportados por $\{n : n \geq a\}$, ou seja, para $\psi \in l^2(\mathbb{N}^*)$

$$(P_{n\geq a}\psi)(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n < a \\ \psi(n), & \text{se} \quad n \geq a \end{cases},$$

e similarmente para $P_{n<a}$. Seja $f(n)$ uma seqüência monótona crescente com $f(n) \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Lema 4.2 *Se existe $T_m \to \infty$, $T_m \in \mathbb{N}$ para todo m, de forma que*

$$\frac{1}{T_m+1}\sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n\geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \frac{1}{f(T_m)^2}\ , \tag{4.13}$$

então

$$\limsup_{j\to\infty} \|X\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \frac{f(j)^5}{j^2} = \infty.$$

Demonstração: Por hipótese existe $T_m \to \infty$ de forma que

$$\sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n\geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \frac{T_m+1}{f(T_m)^2} = \sum_{j=T_m}^{2T_m} \frac{1}{f(T_m)^2},$$

logo existe algum $j_m \in [T_m, 2T_m]$ de modo que

$$\|P_{n\geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^{j_m} \varphi_1\|^2 \geq \frac{1}{f(T_m)^2}$$

e então

$$\begin{aligned}
\|X\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^{j_m} \varphi_1\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2 |\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^{j_m} \varphi_1(n)|^2 \\
&\geq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{T_m}{f(T_m)}\left(P_{n\geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^{j_m} \varphi_1\right)(n)\right|^2 \\
&= \left(\frac{T_m}{f(T_m)}\right)^2 \|P_{n\geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^{j_m} \varphi_1\|^2 \\
&\geq \frac{T_m^2}{f(T_m)^4}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{f(j_m)^5}{j_m^2}\|X\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^{j_m} \varphi_1\|^2 &\geq \frac{f(j_m)^5}{j_m^2}\frac{T_m^2}{f(T_m)^4} \\
&= \left(\frac{T_m}{j_m}\right)^2\left(\frac{f(j_m)}{f(T_m)}\right)^4 f(j_m) \\
&\geq \frac{1}{4} f(j_m) \to \infty
\end{aligned}$$

e o lema está demonstrado. ■

Para demonstrar o Teorema 4.2*(ii)* queremos aplicar o lema acima com $f(n) = (\ln(n+2))^{1/5}$. Mantendo este interesse em mente, a estimativa na relação (4.13) é crucial, bem como os lemas seguintes.

Lema 4.3 *Seja ξ um vetor unitário, P uma projeção, e U um operador unitário. Se $\xi = \eta + \psi$ com $\langle \eta, \psi \rangle = 0$, então*

$$\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T} \|(\mathrm{I_d} - P)U^j\xi\|^2 \geq \|\psi\|^2 - 3\left(\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2\right)^{1/2}. \tag{4.14}$$

Demonstração: Denote $D := \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T} \|(\mathrm{I_d} - P)U^j\xi\|^2$. Então

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}(1 - \|PU^j\xi\|^2) \\
&= \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}(\|\psi\|^2 + \|\eta\|^2 - \|PU^j(\eta+\psi)\|^2) \\
&= \|\psi\|^2 + \|\eta\|^2 \\
&\quad -\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}(\|PU^j\eta\|^2 + \|PU^j\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle PU^j\eta, PU^j\psi\rangle)) \\
&= \|\eta\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\eta\|^2 \\
&\quad +\|\psi\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}(\|PU^j\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle PU^j\eta, PU^j\psi\rangle)) \\
&= A + B,
\end{aligned}$$

com $A = \|\eta\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\eta\|^2$ e $B = \|\psi\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}(\|PU^j\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle PU^j\eta, PU^j\psi\rangle))$. Claramente,

$$\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\eta\|^2 \leq \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|\eta\|^2 = \|\eta\|^2 \leq 1,$$

e o mesmo é verdadeiro com η substituído por ψ. Portanto

$$A \geq \|\eta\|^2 - \|\eta\|^2 = 0$$

e

$$\begin{aligned}
B &= \|\psi\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2 - \frac{2}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\mathrm{Re}\,(\langle PU^j\eta, PU^j\psi\rangle) \\
&\geq \|\psi\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2 - \frac{2}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}|\langle PU^j\eta, PU^j\psi\rangle| \\
&\geq \|\psi\|^2 - \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2 - \frac{2}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\eta\|\|PU^j\psi\| \\
&\geq \|\psi\|^2 - \Big(\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - 2\sum_{j=T}^{2T}\frac{\|PU^j\eta\|}{(T+1)^{\frac{1}{2}}}\frac{\|PU^j\psi\|}{(T+1)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \|\psi\|^2 - \Big(\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad -2\Big(\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\eta\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \|\psi\|^2 - 3\Big(\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\|PU^j\psi\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

O resultado segue imediatamente. ■

Lema 4.4 *Seja $U = \int_0^{2\pi} e^{it} dE_U(t)$ a decomposição espectral de um operador unitário U em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja $\xi \in \mathcal{H}$ um vetor absolutamente contínuo para U, i.e., a medida espectral μ_ξ, associada a U e ξ, é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, e denote por $g = \frac{d\mu_\xi}{dx} \in L^1([0, 2\pi))$ a correspondente derivada de Radon-Nikodym. Defina*

$$|||\xi||| = \|g\|_\infty^{1/2}.$$

Então, para qualquer $\eta \in \mathcal{H}$, tem-se

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle U^j\xi, \eta\rangle|^2 \leq 2\pi\, |||\xi|||^2\, \|\eta\|^2.$$

Demonstração: Se $|||\xi||| = \infty$ então o resultado é claro. Suponha $|||\xi||| < \infty$ e seja $\eta \in \mathcal{H}$. Denote por P_{ac} a projeção espectral no subespaço absolutamente contínuo $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ de U, $\eta_0 = P_{ac}\eta$ e $\tilde{g} = \frac{d\mu_{\eta_0}}{d\lambda}$; então $\mu_{\xi,\eta}$ é absolutamente contínua e sua derivada de Radon-Nikodym h é estimada por

$$|h(x)| \leq (g\tilde{g})^{\frac{1}{2}}(x) = g^{\frac{1}{2}}(x)\, \tilde{g}^{\frac{1}{2}}(x) \leq |||\xi|||\, \tilde{g}^{\frac{1}{2}}(x).$$

Portanto $h \in L^2([0, 2\pi))$ com norma L^2 estimada por

$$\|h\|_2 \leq |||\xi|||\Big(\int_0^{2\pi} \tilde{g}(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}} = |||\xi|||\Big(\int_0^{2\pi} d\mu_{\eta_0}\Big)^{\frac{1}{2}} = |||\xi||| \cdot \|\eta_0\| \leq |||\xi||| \cdot \|\eta\|.$$

Como

$$\langle U^j\xi, \eta\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ijt} d\mu_{\xi,\eta}(t) = \int_0^{2\pi} e^{ijt} h(t)dt = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}h)(j),$$

segue que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle U^j\xi, \eta\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2\pi|(\mathcal{F}h)(j)|^2 = 2\pi\|h\|_2^2 \leq 2\pi|||\xi|||^2\|\eta\|^2,$$

que é precisamente o resultado afirmado. ■

4.3.2 Transformadas de Borel e de Cauchy

Dada uma medida de probabilidade μ em $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, suas transformadas de Cauchy $F_\mu(z)$ e Borel $R_\mu(z)$ são, respectivamente, para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \neq 1$,

$$F_\mu(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)$$

e

$$R_\mu(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{e^{it} - z} d\mu(t).$$

R_μ está relacionada com F_μ por

$$F_\mu(z) = 2zR_\mu(z) + 1. \tag{4.15}$$

Além disso, F_μ tem as seguintes propriedades [52]:

- $\lim_{r\uparrow 1} F_\mu(re^{i\theta})$ existe para q.t.p. θ, e decompondo a medida em suas partes absolutamente contínua e singular

  $$d\mu(\theta) = \omega(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s(\theta),$$

  então

  $$\omega(\theta) = \lim_{r\uparrow 1} \text{Re } F_\mu(re^{i\theta}). \tag{4.16}$$

- $\mu(\{\theta_0\}) \neq 0$ se, e somente se, $\lim_{r\uparrow 1}(1 - r)\text{Re } F_\mu(re^{i\theta_0}) \neq 0$.

- $d\mu_s$ é suportada em $\{\theta : \lim_{r\uparrow 1} F_\mu(re^{i\theta}) = \infty\}$.

Agora, seja U um operador unitário em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e ϕ um vetor cíclico para U. Considere a perturbação de posto um de U

$$U_\lambda = Ue^{i\lambda P_\phi} = U(\text{I}_\text{d} + (e^{i\lambda} - 1)P_\phi),$$

em que $P_\phi(\cdot) = \langle\phi, \cdot\rangle\phi$ e $\lambda \in [0, 2\pi)$. Denote por $d\mu_\lambda$ a medida espectral associada com U_λ e ϕ, $F_\lambda = F_{\mu_\lambda}$ e $R_\lambda = R_{\mu_\lambda}$. Tem-se as seguintes relações entre R_λ e R_0, F_λ e F_0:

Lema 4.5 *Para* $|z| \neq 1$, *tem-se*

$$R_\lambda(z) = \frac{R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda} - 1)R_0(z)} \tag{4.17}$$

$$F_\lambda(z) = \frac{(e^{i\lambda} - 1) + (e^{i\lambda} + 1)F_0(z)}{(e^{i\lambda} + 1) + (e^{i\lambda} - 1)F_0(z)} \tag{4.18}$$

Em particular, para $\lambda \neq \pi$,

$$\text{Re } F_\lambda(z) = \frac{(1 + y^2)\text{Re } F_0(z)}{|1 + iyF_0(z)|^2}, \tag{4.19}$$

em que $y = \frac{\sin\lambda}{1+\cos\lambda}$, *e para* $\lambda = \pi$

$$\text{Re } F_\lambda(z) = \frac{\text{Re } F_0(z)}{|F_0(z)|^2}. \tag{4.20}$$

Demonstração: A relação (4.17) foi demonstrada em [13]. Para checar (4.18) usamos as relações (4.15) e (4.17). De fato,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(z) &= 2zR_\lambda(z) + 1 = 2z\frac{R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda} - 1)R_0(z)} + 1 \\
&= \frac{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda} - 1)R_0(z) + 2zR_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda} - 1)R_0(z)} \\
&= \frac{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda} + 1)R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda} - 1)R_0(z)} \\
&= \frac{2e^{i\lambda} + 2ze^{i\lambda}R_0(z) + 2zR_0(z)}{2e^{i\lambda} + 2ze^{i\lambda}R_0(z) - 2zR_0(z)} \\
&= \frac{e^{i\lambda} - 1 + e^{i\lambda} + 2e^{i\lambda}zR_0(z) + 1 + 2zR_0(z)}{e^{i\lambda} + 1 + e^{i\lambda} + 2e^{i\lambda}zR_0(z) - 1 - 2zR_0(z)} \\
&= \frac{(e^{i\lambda} - 1) + (e^{i\lambda} + 1)(1 + 2zR_0(z))}{(e^{i\lambda} + 1) + (e^{i\lambda} - 1)(1 + 2zR_0(z))} \\
&= \frac{(e^{i\lambda} - 1) + (e^{i\lambda} + 1)F_0(z)}{(e^{i\lambda} + 1) + (e^{i\lambda} - 1)F_0(z)}.
\end{aligned}$$

Agora, para $\lambda \neq \pi$ temos $e^{i\lambda} + 1 \neq 0$ e então

$$\begin{aligned}
F_\lambda(z) &= \frac{\frac{e^{i\lambda}-1}{e^{i\lambda}+1} + F_0(z)}{1 + \left(\frac{e^{i\lambda}-1}{e^{i\lambda}+1}\right) F_0(z)} \\
&= \frac{iy + F_0(z)}{1 + iyF_0(z)} \times \frac{1 - iy\overline{F_0(z)}}{1 - iy\overline{F_0(z)}} \\
&= \frac{iy + F_0(z) - iy|F_0(z)|^2 + y^2\overline{F_0(z)}}{|1 + iyF_0(z)|^2},
\end{aligned}$$

em que $\frac{e^{i\lambda}-1}{e^{i\lambda}+1} = iy$ e $y = \frac{\sin\lambda}{1+\cos\lambda}$. Logo, para $\lambda \neq \pi$,

$$\text{Re } F_\lambda(z) = \frac{(1 + y^2)\text{Re } F_0(z)}{|1 + iyF_0(z)|^2}$$

e (4.19) é obtida. Para $\lambda = \pi$ tem-se $F_\lambda(z) = \frac{1}{F_0(z)}$ e (4.20) segue. ■

Lema 4.6 *Fixe um número racional β. Então existem $C_1 > 0$ e $C_2 < \infty$, e para cada $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ uma decomposição*

$$\varphi_1 = \eta_{\theta,\lambda} + \psi_{\theta,\lambda}$$

de forma que

$$\langle \eta_{\theta,\lambda}, \psi_{\theta,\lambda} \rangle = 0, \tag{4.21}$$

$$\|\psi_{\theta,\lambda}\| \geq C_1, \tag{4.22}$$

$$|||\psi_{\theta,\lambda}|||_{U_\lambda(\beta,\theta)^+} \leq C_2. \tag{4.23}$$

Demonstração: Quebramos a demonstração em alguns passos.

1º Passo. Pelo Teorema 4.1, como β é racional,

$$\sigma_{\mathrm{sc}}(U(\beta,\theta)^+) = \emptyset, \quad \sigma_{\mathrm{ac}}(U(\beta,\theta)^+) = \sigma_{\mathrm{ac}}(U(\beta,\theta))$$

e o espectro pontual de $U(\beta,\theta)^+$ consiste de finitos autovalores no conjunto resolvente de $U(\beta,\theta)$. Denote por $\mu_{\theta,\lambda}$ a medida espectral associada a $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ e (o vetor cíclico) φ_1, e por μ_θ a medida espectral associada a $U(\beta,\theta)^+$ e φ_1 (i.e., o caso $\lambda = 0$). Escreva

$$d\mu_{\theta,\lambda}(E) = f_{\theta,\lambda}(E)\frac{dE}{2\pi} + d\mu_s^{\theta,\lambda}(E),$$
$$d\mu_\theta(E) = f_\theta(E)\frac{dE}{2\pi} + d\mu_p^\theta(E).$$

2º Passo. Relação entre $f_{\theta,\lambda}$ e f_θ: Pelo Lema 4.5, para $\lambda \neq \pi$ tem-se

$$\mathrm{Re}\ F_{\mu_{\theta,\lambda}}(z) = \frac{(1+y^2)\mathrm{Re}\ F_{\mu_\theta}(z)}{|1 + iyF_{\mu_\theta}(z)|^2},$$

em que $y = \frac{\sin\lambda}{1+\cos\lambda}$ e então

$$f_{\theta,\lambda}(E) = \frac{(1+y^2)f_\theta(E)}{|1 + iy\lim_{r\uparrow 1} F_{\mu_\theta}(re^{iE})|^2}.$$

3º Passo. Relação entre f_θ e f_0: Por (4.6) e (4.5) conseguimos

$$U(\beta,\theta)^+ = e^{-i2\theta}U(\beta,0)^+ \tag{4.24}$$

e usando essa relação tem-se que

$$\left(U(\beta,\theta)^+\right)^j = e^{-ij2\theta}\left(U(\beta,0)^+\right)^j$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Assim, pelo teorema espectral, para qualquer $j \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{-ijE} f_\theta(E)\frac{dE}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{-ijE} f_0(E-2\theta)\frac{dE}{2\pi}.$$

Portanto

$$f_\theta(E) = f_0(E-2\theta) \tag{4.25}$$

para q.t.p. E.

<u>4º Passo</u>. Limitação superior e inferior para $f_{\theta,\lambda}$: Temos

$$\lim_{r\uparrow 1} F_{\mu_\theta}(re^{iE}) = f_\theta(E) + i\lim_{r\uparrow 1}\mathrm{Im}\ F_{\mu_\theta}(re^{iE})$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{r\uparrow 1}\mathrm{Im}\ F_{\mu_\theta}(re^{iE}) &= \lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\ \left(\frac{e^{it}+re^{iE}}{e^{it}-re^{iE}}\right) f_\theta(t)\frac{dt}{2\pi}\\ &\quad+\lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\ \left(\frac{e^{it}+re^{iE}}{e^{it}-re^{iE}}\right) d\mu_p^\theta(t).\end{aligned}$$

Se denotarmos

$$g_\theta(E) = \lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\ \left(\frac{e^{it}+re^{iE}}{e^{it}-re^{iE}}\right) f_\theta(t)\frac{dt}{2\pi},$$

então por (4.25) obtemos $g_\theta(E) = g_0(E-2\theta)$ para q.t.p. E. Por outro lado, por (4.24) temos que E é um autovalor de $U(\beta,\theta)^+$ se, e somente se, $E-2\theta$ é um autovalor de $U(\beta,0)^+$. Seja $\{E_j^\theta\}_{j=1}^n$ o conjunto dos autovalores de $U(\beta,\theta)^+$ (lembre-se que $n<\infty$) e $d\mu_p^\theta = \sum_{j=1}^n \kappa_j^\theta \delta_{E_j^\theta}$ (δ_E é a medida de Dirac em E). Então

$$\begin{aligned}\lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\ \left(\frac{e^{it}+re^{iE}}{e^{it}-re^{iE}}\right) d\mu_p^\theta(t) &= \lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi}\frac{2r\sin(E-t)}{1+r^2-2r\cos(E-t)}d\mu_p^\theta(t)\\ &= \lim_{r\uparrow 1}\sum_{j=1}^n\frac{2r\sin(E-E_j^\theta)\kappa_j^\theta}{1+r^2-2r\cos(E-E_j^\theta)}\\ &= \sum_{j=1}^n\frac{2\sin(E-2\theta-E_j^0)\kappa_j^\theta}{\left|e^{iE_j^0}-e^{i(E-2\theta)}\right|^2}.\end{aligned}$$

Como $f_0 \in L^1([0,2\pi))$, por um resultado de [45] (Teorema 1.6 no Capítulo III), a função g_0 é do tipo L^1 fraco, i.e., g_0 é mensurável e existe uma constante $C > 0$ de forma que para todo $T > 0$ a medida de Lebesgue

$$|\{E : |g_0(E)| \leq T\}| \geq 1 - \frac{C}{T}. \tag{4.26}$$

Tome $S > 0$ de modo que $\Omega_S := \left\{E : \frac{1}{S} \leq f_0(E) \leq S\right\}$ satisfaz $|\Omega_S| > 0$ e dist $(\Omega_S, \{E_j^0\}_{j=1}^n) = L > 0$. Então escolha T suficientemente grande de forma que

$$A := \Omega_S \cap \{E : |g_0(E)| \leq T\}$$

satisfaz $|A| > 0$; por (4.26) isso é possível. Para $\theta \in [0, 2\pi)$ seja

$$I_\theta := \{E \in [0, 2\pi) : E - 2\theta \in A\};$$

assim $|I_\theta| = |A| > 0$. Então, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (equivalentemente $y \in [0, 1]$) e $E \in I_\theta$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left|1 + iy \lim_{r\uparrow 1} F_{\mu_\theta}(re^{iE})\right| &\leq 1 + |y| \Bigg(|f_\theta(E)| + |g_\theta(E)| \\
&\quad + \left| \sum_{j=1}^n \frac{2\sin(E - 2\theta - E_j^0)\kappa_j^\theta}{|e^{iE_j^0} - e^{i(E-2\theta)}|^2} \right| \Bigg) \\
&\leq 1 + |f_0(E - 2\theta)| + |g_0(E - 2\theta)| + \sum_{j=1}^n \frac{2|\kappa_j^\theta|}{L^2} \\
&\leq 1 + S + T + \frac{2}{L^2}.
\end{aligned}$$

Logo, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $E \in I_\theta$

$$\begin{aligned}
|f_{\theta,\lambda}(E)| &= \frac{(1 + y^2) f_\theta(E)}{|1 + iy \lim_{r\uparrow 1} F_{\mu_\theta}(re^{iE}))|^2} \\
&\geq \frac{f_0(E - 2\theta)}{(1 + S + T + 2/L^2)^2} \\
&\geq \frac{1}{S(1 + S + T + 2/L^2)^2}.
\end{aligned}$$

Para conseguir um limite superior, note que

$$\left|1 + iy \lim_{r\uparrow 1} F_{\mu_\theta}(re^{iE})\right| \geq |y f_\theta(E)|,$$

e assim, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ (equivalentemente $y \in \left[\frac{1}{2+\sqrt{3}}, 1\right]$) e $E \in I_\theta$

$$\begin{aligned} |f_{\theta,\lambda}(E)| &= \frac{(1+y^2)f_\theta(E)}{|1+iy\lim_{r\uparrow 1} F_{\mu_\theta}(re^{iE})|^2} \\ &\leq \frac{(1+y^2)f_\theta(E)}{y^2 f_\theta(E)^2} = \frac{(1+y^2)}{y^2 f_0(E-2\theta)} \\ &\leq 2(2+\sqrt{3})^2 S. \end{aligned}$$

Juntando as informações, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ e $E \in I_\theta$, demonstramos que

$$\frac{1}{S(1+S+T+2/L^2)^2} \leq |f_{\theta,\lambda}(E)| \leq 2(2+\sqrt{3})^2 S. \tag{4.27}$$

5º Passo. Conclusão: Para $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ sejam

$$\psi_{\theta,\lambda} = P_{I_\theta}^{\theta,\lambda}\varphi_1, \quad \eta_{\theta,\lambda} = (\mathrm{I_d} - P_{I_\theta}^{\theta,\lambda})\varphi_1,$$

em que $P_{I_\theta}^{\theta,\lambda}$ é a projeção espectral (de $U_\lambda(\beta,\theta)^+$) em I_θ. Então para cada $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ temos a decomposição $\varphi_1 = \psi_{\theta,\lambda} + \eta_{\theta,\lambda}$ que satisfaz (4.21). Além disso por (4.27)

$$\begin{aligned} \|\psi_{\theta,\lambda}\|^2 &= \langle \psi_{\theta,\lambda}, \psi_{\theta,\lambda}\rangle = \langle P_{I_\theta}^{\theta,\lambda}\varphi_1, P_{I_\theta}^{\theta,\lambda}\varphi_1\rangle \\ &= \langle \varphi_1, P_{I_\theta}^{\theta,\lambda}\varphi_1\rangle = \int_0^{2\pi} \chi_{I_\theta}(E) d\mu_{\theta,\lambda} \\ &= \int_{I_\theta} f_{\theta,\lambda}(E)\frac{dE}{2\pi} \geq \frac{|A|}{2\pi S(1+S+T+2/L^2)^2} \end{aligned}$$

logo (4.22) vale com

$$C_1 = \Big(\frac{|A|}{2\pi S(1+S+T+2/L^2)^2}\Big)^{1/2} > 0;$$

também

$$|||\psi_{\theta,\lambda}|||^2_{U_\lambda(\beta,\theta)^+} = |||P_{I_\theta}^{\theta,\lambda}\varphi_1|||^2_{U_\lambda(\beta,\theta)^+} = \|\chi_{I_\theta} f_{\theta,\lambda}\|_\infty \leq 2(2+\sqrt{3})^2 S$$

e (4.23) vale com $C_2 = (2(2+\sqrt{3})^2 S)^{1/2} < \infty$. O lema está demonstrado. ■

No caso auto-adjunto, o lema similar ao Lema 4.6 é demonstrado a partir de estimativas nas matrizes de transferência. Neste caso não foi possível adaptar tal argumento, e conseguimos demonstrar tal resultado considerando as transformadas de Borel e de Cauchy como explicitado na demonstração acima.

4.3.3 Variação de β

O próximo lema fornece uma estimativa da dependência da dinâmica em β. Sua demonstração usa fortemente a estrutura de $U_\lambda(\beta,\theta)^+$. O resultado similar no caso auto-adjunto é obtido aplicando a Fórmula de Duhamel, que não se aplica neste caso.

Lema 4.7 *Sejam $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$. Então, para $n \geq 1$,*

$$\left\| \left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^n \varphi_1 - \left(U_\lambda(\beta',\theta)^+\right)^n \varphi_1 \right\| \leq 2 \times 4^n (2n^2 - n) 2\pi \left|\beta - \beta'\right| .$$

Demonstração: É uma indução. Temos

$$\begin{aligned} U_\lambda(\beta,\theta)^+\varphi_j &= U(\beta,\theta)^+(\mathrm{I_d} + (e^{i\lambda} - 1)P_{\varphi_1})\varphi_j \\ &= \begin{cases} U(\beta,\theta)^+\varphi_j & \text{se} \quad j > 1 \\ U(\beta,\theta)^+\varphi_1 + (e^{i\lambda} - 1)U(\beta,\theta)^+\varphi_1 & \text{se} \quad j = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} U(\beta,\theta)^+\varphi_j & \text{se} \quad j > 1 \\ e^{i\lambda}U(\beta,\theta)^+\varphi_1 & \text{se} \quad j = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim

$$U_\lambda(\beta,\theta)^+\varphi_1 = e^{i\lambda}U(\beta,\theta)^+\varphi_1 = a_1 e^{-i(2\pi\beta)}\varphi_1 + a_2 e^{-i(2\pi\beta)}\varphi_2$$

em que $a_1 = re^{i\lambda}e^{-i(\alpha+2\theta)}$ e $a_2 = ite^{i\lambda}e^{-i(\alpha+2\theta)}$. Como

$$|e^{-ix} - e^{-ix'}| \leq 2|x - x'| \tag{4.28}$$

and $|a_j| \leq 1$, $j = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} \left\|U_\lambda(\beta,\theta)^+\varphi_1 - U_\lambda(\beta',\theta)^+\varphi_1\right\| &\leq 2\left|e^{-i(2\pi\beta)} - e^{-i(2\pi\beta')}\right| \\ &\leq 4 \times 2|2\pi\beta - 2\pi\beta'| = 2 \times 4 \times 2\pi \left|\beta - \beta'\right| \end{aligned}$$

e o lema está demonstrado para $n = 1$.

Agora

$$\begin{aligned}
\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^2\varphi_1 &= U_\lambda(\beta,\theta)^+U_\lambda(\beta,\theta)^+\varphi_1\\
&= U_\lambda(\beta,\theta)^+(a_1e^{-i(2\pi\beta)}\varphi_1+a_2e^{-i(2\pi\beta)}\varphi_2)\\
&= e^{i\lambda}a_1e^{-i(2\pi\beta)}U(\beta,\theta)^+\varphi_1+a_2e^{-i(2\pi\beta)}U(\beta,\theta)^+\varphi_2\\
&= e^{i\lambda}a_1e^{-i(2\pi\beta)}\left(b_1e^{-i(2\pi\beta)}\varphi_1+b_2e^{-i(2\pi\beta)}\varphi_2\right)\\
&\quad +a_2e^{-i(2\pi\beta)}\left(c_1e^{-i(3.(2\pi\beta))}\varphi_1+c_2e^{-i(3.(2\pi\beta))}\varphi_2\right.\\
&\quad \left.+c_3e^{-i(5.(2\pi\beta))}\varphi_3+c_4e^{-i(5.(2\pi\beta))}\varphi_4\right)
\end{aligned}$$

Como $|a_j|<1$, $|b_j|<1$, $|c_j|<1$ e temos $2+4<4\times 4$ termos na expansão de $\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^2\varphi_1$ em que o maior expoente (o qual fornece a maior contribuição por (4.28)) é obtido do produto das exponenciais $e^{-i(2\pi\beta)}e^{-i((2+3)2\pi\beta)}=e^{-i((1+2+3)2\pi\beta)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^2\varphi_1-\left(U_\lambda(\beta',\theta)^+\right)^2\varphi_1\right\| &\leq 4\times 4\times 2(1+2+3)2\pi\left|\beta-\beta'\right|\\
&= 2\times 4^2(1+2+3)2\pi\left|\beta-\beta'\right|,
\end{aligned}$$

e o lema está demonstrado para $n=2$. De uma maneira similar pela estrutura de $U_\lambda(\beta,\theta)^+$ concluímos que $\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^3\varphi_1$ tem no máximo $4^2\times 4$ termos em que o maior expoente está em $e^{-i(1+2+3)2\pi\beta}e^{-i((4+5)2\pi\beta)}=e^{-i((1+2+3+4+5)2\pi\beta)}$ e assim

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^3\varphi_1-\left(U_\lambda(\beta',\theta)^+\right)^3\varphi_1\right\|\leq\\
\leq\ & 4\times 4\times 4\times 2(1+2+3+4+5)2\pi\left|\beta-\beta'\right|\\
=\ & 2\times 4^3(1+2+3+4+5)2\pi\left|\beta-\beta'\right|.
\end{aligned}$$

Indutivamente obtemos que $\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^n\varphi_1$ tem no máximo 4^n termos, e de acordo com (4.28) a maior contribuição vem do produto

$$e^{-i(1+2+\ldots+2n-3)2\pi\beta}e^{-i(((2n-2)+(2n-1))2\pi\beta)}=e^{-i((1+2+\ldots+2n-1)2\pi\beta)}$$

e então

$$\left\|\left(U_\lambda(\beta,\theta)^+\right)^n\varphi_1-\left(U_\lambda(\beta',\theta)^+\right)^n\varphi_1\right\|$$

$$\leq 2 \times 4^n (1 + 2 + \ldots + 2n - 1) 2\pi \left|\beta - \beta'\right|;$$

como $2n^2 - n = 1 + 2 + \ldots + 2n - 1$, o resultado segue. ■

4.3.4 Demonstração do Teorema 4.2(ii)

Finalmente, usando esse conjunto preparatório de resultados, terminamos a demonstração do nosso resultado principal.

Seja $f(n) = (\ln(2 + |n|))^{\frac{1}{5}}$. Seqüências β_m, T_m, Δ_m serão construídas indutivamente, começando com $\beta_1 = 1$, de forma que

(i) $\beta_{m+1} - \beta_m = 2^{-\kappa_m !}$ para algum $\kappa_m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\frac{1}{T_m+1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \frac{1}{f(T_m)^2}$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ e β com $|\beta - \beta_m| \leq \Delta_m$;

(iii) $|\beta_{m+1} - \beta_k| < \Delta_k$ para $k = 1, 2, \ldots, m$.

Se (i), (ii) e (iii) são satisfeitos então concluímos por (i) que $\beta_\infty = \lim \beta_m$ é irracional (veja justificativa no final da demonstração), por (iii) que $|\beta_\infty - \beta_m| \leq \Delta_m$ e então por (ii) que

$$\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta_\infty, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \frac{1}{f(T_m)^2}$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Portanto pelo Lema 4.2

$$\limsup_{n \to \infty} \|X \left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^n \varphi_1\|^2 \frac{f(n)^5}{n^2} = \infty$$

para $\beta = \beta_\infty$ e o resultado está demonstrado.

Então construíremos β_m, T_m, Δ_m em que (i), (ii) e (iii) valem. Começamos com $\beta_1 = 1$. Dados $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $T_1, \ldots, T_{m-1}$ e $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m-1}$ mostraremos como escolher T_m, Δ_m e β_{m+1}.

Dado β_m, seja $\varphi_1 = \eta + \psi$ a decomposição dada pelo Lema 4.6 e sejam C_1, C_2 as constantes correspondentes. Escolha $T_m \geq 2T_{m-1}$ (e $T_1 \geq 2$) de forma que

$$C_1^2 - 3\sqrt{2\pi} C_2 (2f(T_m)^{-1} + T_m^{-1})^{\frac{1}{2}} \geq 2f(T_m)^{-1}. \tag{4.29}$$

Isso é possível pois C_1 e C_2 estão fixados (dado β_m) e $f(n) \to \infty$.

Note que

$$\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T} \|P_{n<\frac{T}{f(T)}}\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\|^2 \leq \frac{2\pi}{T+1}\#\Big\{n : n < \frac{T}{f(T)}\Big\}|||\psi|||^2; \quad (4.30)$$

de fato

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T} \|P_{n<\frac{T}{f(T)}}\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\|^2 = \\
= \;& \frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T}\sum_{n<\frac{T}{f(T)}}\left|\left(\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\right)(n)\right|^2 \\
= \;& \frac{1}{T+1}\sum_{n<\frac{T}{f(T)}}\sum_{j=T}^{2T}\left|\left(\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\right)(n)\right|^2 \\
\leq \;& \frac{1}{T+1}\sum_{n<\frac{T}{f(T)}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\langle\varphi_n, \left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\rangle\right|^2,
\end{aligned}$$

então pelo Lema 4.4

$$\frac{1}{T+1}\sum_{j=T}^{2T} \|P_{n<\frac{T}{f(T)}}\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\|^2 \leq \frac{1}{T+1}\sum_{n<\frac{T}{f(T)}} 2\pi|||\psi|||^2,$$

e (4.30) segue.

Pelo Lema 4.3 e (4.30)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T_m+1}\sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n\geq\frac{T_m}{f(T_m)}}\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\varphi_1\|^2 \geq \\
\geq \;& \|\psi\|^2 - 3\Big(\frac{1}{T_m+1}\sum_{j=T_m}^{2T_m}\|P_{n<\frac{T_m}{f(T_m)}}\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\psi\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\geq \;& \|\psi\|^2 - 3\Big(\frac{2\pi}{T_m+1}\#\Big\{n : n < \frac{T_m}{f(T_m)}\Big\}|||\psi|||^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\geq \;& C_1^2 - 3\Big(\frac{2\pi}{T_m+1}\#\Big\{n : n < \frac{T_m}{f(T_m)}\Big\}C_2^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
= \;& C_1^2 - 3\sqrt{2\pi}C_2\Big(\frac{1}{T_m+1}\#\Big\{n : n < \frac{T_m}{f(T_m)}\Big\}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $\#\Big\{n : n < \frac{T_m}{f(T_m)}\Big\} \leq 2\frac{T_m}{f(T_m)} + 1$ segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T_m+1}\sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n\geq\frac{T_m}{f(T_m)}}\left(U_\lambda(\beta_m,\theta)^+\right)^j\varphi_1\|^2 \\
\geq \;& C_1^2 - 3\sqrt{2\pi}C_2\Big(\frac{1}{T_m+1}\Big(\frac{2T_m}{f(T_m)}+1\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\geq \;& C_1^2 - 3\sqrt{2\pi}C_2\Big(\frac{2}{f(T_m)}+\frac{1}{T_m}\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Assim por (4.29), obtemos

$$\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta_m, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \frac{2}{f(T_m)}$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

Logo, pelo Lema 4.7, para $\beta \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\lambda \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \\
\geq\ & \left(\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{|n| \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|\right)^2 \\
=\ & \Bigg(\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \Big\|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta_m, \theta)^+\right)^j \varphi_1 \\
& + P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \Big(\left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^j \varphi_1 - \left(U_\lambda(\beta_m, \theta)^+\right)^j \varphi_1\Big) \Big\|\Bigg)^2 \\
\geq\ & \Bigg(\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \Big\|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta_m, \theta)^+\right)^j \varphi_1\Big\| \\
& - \Big\|\Big(\left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^j - \left(U_\lambda(\beta_m, \theta)^+\right)^j\Big) \varphi_1\Big\|\Bigg)^2 \\
\geq\ & \Big(\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} (\|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta_m, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \\
& - 4^{j+1}(2j^2 - j)\pi|\beta - \beta_m|)\Big)^2 \\
\geq\ & \left(\frac{2}{f(T_m)} - \frac{1}{T_m + 1}\Big(\sum_{j=T_m}^{2T_m} 4^{j+1}(2j^2 - j)\pi\Big)|\beta - \beta_m|\right)^2.
\end{aligned}$$

Tomando

$$\Delta_m = \frac{T_m + 1}{f(T_m) \sum_{j=T_m}^{2T_m} 4^{j+1}(2j^2 - j)\pi}$$

obtemos que, se $|\beta - \beta_m| < \Delta_m$,

$$\frac{1}{T_m + 1} \sum_{j=T_m}^{2T_m} \|P_{n \geq \frac{T_m}{f(T_m)}} \left(U_\lambda(\beta, \theta)^+\right)^j \varphi_1\|^2 \geq \frac{1}{f(T_m)^2}.$$

Finalente, tome β_{m+1} racional de modo que

$$|\beta_n - \beta_{m+1}| < \Delta_n \qquad n = 1, \ldots, m,$$

e $\beta_{m+1} = \beta_m + 2^{-\kappa_m!}$ para algum $\kappa_m \in \mathbb{N}$. Isso termina a demonstração do Teorema 4.2(ii).

Demonstração de que β_∞ é irracional: Lembremos que um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico de grau n se α é raiz de um polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ com $a_j \in \mathbb{Z}$ para todo j e $a_n \neq 0$. Se um número $\alpha \in \mathbb{R}$ não é raiz de nenhum polinômio como acima então ele é dito transcedente. Vê-se facilmente que se $\alpha \in \mathbb{R}$ é transcedente então α é irracional.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ algébrico de grau n, assim α é raiz de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_j \in \mathbb{Z}$ para todo j e $a_n \neq 0$. Seja $d > 0$ de modo que α seja a única raiz de f em $I \doteq [\alpha - d, \alpha + d]$ e $M \doteq \max_{x \in I} |f'(x)|$. Assim, para $\frac{p}{q} \in I$, $q > 0$, $\frac{p}{q} \neq \alpha$, pelo Teorema do Valor Médio

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) \right| \leq M \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|.$$

Por outro lado,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n}{q^n} \right| \geq \frac{1}{q^n}.$$

Juntando estas relações obtemos

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{|f(p/q)|}{M} \geq \frac{1}{M q^n},$$

para $\alpha \neq \frac{p}{q} \in I, q > 0$. Se $\frac{p}{q} \notin I$ então $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > d \geq \frac{d}{q^n}$. Portanto, para $A \doteq \min\{\frac{1}{M}, d\}$ segue que

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{A}{q^n} \qquad \forall \frac{p}{q} \neq \alpha, q > 0.$$

E concluímos que:

Se α é algébrico de grau n, então existe $A > 0$ de forma que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n} \qquad \forall \frac{p}{q} \neq \alpha, q > 0.$$

Vamos mostrar que β_∞ é transcedente e portanto irracional. Suponha que β_∞ não é transcedente, então β_∞ é algébrico de grau n, para algum n. Pelo cálculo acima existe $A > 0$ de forma que

$$\left|\beta_\infty - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n} \qquad \forall \frac{p}{q} \neq \beta_\infty, q > 0. \tag{4.31}$$

Por outro lado, como $\beta_\infty = \lim_{m\to\infty} \beta_m$ com $\beta_{m+1} = \beta_m + 2^{-\kappa_m!}$ e $\beta_1 = 1$ tem-se que $\beta_m = 1 + \frac{1}{2^{\kappa_1!}} + \ldots + \frac{1}{2^{\kappa_{m-1}!}} = \frac{p_m}{2^{\kappa_{m-1}!}}$ e $\kappa_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Assim, por (4.31) segue que

$$\frac{A}{(2^{\kappa_{m-1}!})^n} < |\beta_\infty - \beta_m| = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa_j!}}$$

e portanto para m suficientemente grande

$$A < \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^{(\kappa_j! - n\kappa_{m-1}!)}} \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Como $\sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \to 0$ quando $m \to \infty$ chegamos a uma contradição pois $A > 0$. Portanto β_∞ é transcedente.

Observação. Para o operador $U_\lambda(\beta,\theta) := U(\beta,\theta)(\mathrm{I_d} + (e^{i\lambda} - 1)P_{\varphi_1})$ em $l^2(\mathbb{Z})$ podemos demonstrar um resultado análogo. A demonstração de instabilidade dinâmica para algum β irracional praticamente não muda exceto pelo Lema 4.6 que é simplificado pois $U(\beta,\theta)$ tem espectro absolutamente contínuo puro para β racional. Por outro lado, com respeito a espectro pontual puro, a principal diferença neste caso é que φ_1 talvez não seja cíclico, e assim, não conseguimos espectro pontual puro para $U_\lambda(\beta,\theta)$ para q.t.p. θ e λ como obtido em $l^2(\mathbb{N}^*)$, mas conseguimos que φ_1 está no subespaço espectral pontual correspondente a $U_\lambda(\beta,\theta)$ para q.t.p. θ e λ.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho estudamos a questão de estabilidade dinâmica para Hamiltonianas dependentes do tempo. A maioria dos resultados obtidos foi para o caso de dependência temporal periódica, pois neste caso a presença do operador de Floquet, cujas propriedades espectrais estão diretamente relacionadas com a questão de estabilidade, ajuda-nos, e muito, a obter informações sobre a dinâmica do sistema. Destacamos as seguintes contribuições:

- Se $\xi \in \mathcal{H}$ é um autovetor de U_F então $\xi(t) = U(t,0)\xi$ é peneperiódica. Isto nos permite concluir que o subspaço H_{pene} que introduzimos satisfaz $\mathcal{H}_{\text{pene}} = \mathcal{H}_{pc} = \mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{ue}$ (no caso periódico). Veja Lema 2.4 na página 46 e Teorema 2.4 na página 47;

- Para Hamiltonianas gerais, se $\xi \in \mathcal{H}$ é tal que $1 \otimes \xi$ está no subspaço espectral pontual do operador quase-energia K, então a aplicação $U(t,0)^{-1}\xi$ é peneperiódica. Se $1 \otimes \xi$ é autovetor de K então $\xi \in \mathcal{H}_{\text{pene}}$. Veja Proposição 2.1 na página 48;

- Para Hamiltonianas com dependência temporal quaseperiódica, damos um exemplo de órbita precompacta que não é peneperiódica. Veja Exemplo 2.2 na página 56;

- Apresentamos várias condições na Seção 2.4 que garantem limitação no valor esperado da energia;

- A fórmula da energia média via função de Green no Capítulo 3 (Teorema 3.1, página 68), a qual permite obter resultados de estabilidade a partir de estimativas ou expressões do resolvente do operador de Floquet, sem se preocupar com as propriedades espectrais;

- Nosso exemplo no Capítulo 4 (Teorema 4.2, página 94) de Operador de Floquet com espectro pontual puro e instabilidade dinâmica, o primeiro no caso não-autônomo.

No caso de operadores de Schrödinger discretos unidimensionais em que a Hamiltoniana é dada por um operador auto-adjunto da forma $H_V : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ definido por $(H_V\xi)(n) = \xi(n+1) + \xi(n-1) + V(n)\xi(n)$ em que V é uma seqüência limitada, caso em que nos inspiramos para obter a fórmula do Capítulo 3, o problema similar é calcular

$$\int_{\mathbb{R}} |\langle e_n, R_{E+\frac{i}{T}}(H_V)e_1\rangle|^2 dE,$$

em que $\{e_n\}$ denota a base canônica $l^2(\mathbb{Z})$. Neste caso o resolvente $R_{E+\frac{i}{T}}(H_V)e_1$ está relacionado com as correspondentes matrizes de transferência $T(n,1;E+\frac{i}{T})$, que por sua vez estão conectadas com $T(n,1;E)$. Assim limites superiores adequados em n das matrizes de transferência $T(n,1;E)$ para algum conjunto de E's, resulta em estimativas no resolvente e então propriedades de transporte (crescimento em t dos momentos) são obtidas, isso foi estudado em [17] e referências lá citadas, como uma conseqüência existem interessantes aplicações para modelos não-triviais.

Nos operadores de Floquet descritos no Capítulo 4 temos um formalismo de matrizes de transferência, mas neste caso as matrizes são bem mais complicadas do que no caso descrito acima e conseguir estimativas adequadas não é muito fácil, de forma que ainda não obtivemos sucesso neste sentido.

Referências Bibliográficas

[1] ASCH, J.; DUCLOS, P.; EXNER, P. Stability of driven systems with growing gaps, quantum rings, and wannier ladders. *J. Stat. Phys.* **92** Nos. 5/6, p. 1053-1070, 1998.

[2] BARBAROUX, J. M.; COMBES, J. M.; MONTCHO, R. Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra. *Journ. Math. Anal. Appl.* **213**, p. 698-722, 1997.

[3] BARBAROUX, J. M.; JOYE, A. Expectation values of observables in time-dependent quantum mechanics. *J. Stat. Phys.* **90**, p. 1225-1251, 1998.

[4] BELLISSARD, J. Stability and instability in quantum mechanics. In: *Trends and Developments in the Eighties.* S. Albeverio, Ph. Blanchard (eds), Singapore: World Scientific, p. 1-106, 1985.

[5] BLATTER, G.; BROWNE, D. Zener Tunneling and Localization in small Conducting Rings. *Phys. Rev. B* **37**, p. 3856–3880, 1988.

[6] BLEKHER, P. M.; JAUSLIN, H. R.; LEBOWITZ, J. L. Floquet spectrum for two-level systems in quasiperiodic time-dependent fields. *J. Stat. Phys.* **68**, p. 271-310, 1992.

[7] BOURGAIN, J. Estimates on Green's functions, localization and the quantum kicked rotor model. *Ann. Math.* **156**, p. 249-294, 2002.

[8] BOURGET, O. Singular continuous Floquet operator for periodic quantum systems. *J. Math. Anal. Appl.* **301**, n.1, p. 65-83, 2005.

[9] BOURGET, O. Singular continuous Floquet operator for systems with increasing gaps. *J. Math. Anal. Appl.* **276**, p. 28-39, 2002; Erratum: *J. Math. Anal. Appl.* **289**, p. 722-723, 2004.

[10] BOURGET, O.; HOWLAND, J. S.; JOYE, A. Spectral Analysis of Unitary Band Matrices. *Commun. Math. Phys.* **234**, p. 191-227, 2003.

[11] BUNIMOVICH, L.; JAUSLIN, H. R.; LEBOWITZ, J. L.; PELLEGRINOTTI, A.; NIELABA, P. Diffusive energy growth in classical and quantum driven oscillators. *J. Stat. Phys.* **62**, p. 793-817, 1991.

[12] COMBES, J. M. Connection between quantum dynamics and spectral properties of time evolution operators. In: *Differential Equations and Applications in Mathematical Physics.* W. F. Ames, E. M. Harrel, and J. V. Herod, eds., p. 59-69, (Academic Press) 1993.

[13] COMBESCURE, M. Spectral properties of a periodically kicked quantum Hamiltonian. *J. Stat. Phys.* **59**, p. 679-690, 1990.

[14] COMBESCURE, M. The quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator. *Ann. Inst. H. Poincaré* **47**, p. 62-82, 1987; Erratum: *Ann. Inst. H. Poincaré* **47**, p. 451-454, 1987.

[15] CORDUNEANU, C. *Almost Periodic Functions.* Interscience Publishers, 1968.

[16] CYCON, H. L.; FROESE, R.; KIRSCH, W.; SIMON, B. *Schrödinger Operators.* Springer Verlag, 1987.

[17] DAMANIK, D.; SÜTŐ, A.; TCHEREMCHANTSEV, S. Power-Law Bounds on Transfer Matrices and Quantum Dynamics in One Dimension-II. *J. Funct. Anal.* **216**, p. 362-387, 2004.

[18] de BIÈVRE, S.; FORNI, G. Transport properties of kicked and quasi-periodic Hamiltonians. *J. Stat. Phys.* **90**, p. 1201-1223, 1998.

[19] del RIO, R.; JITOMIRSKAYA, S.; LAST, Y.; SIMON, B. Operators with singular continuous spectrum, IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. *J. d'Analyse Math.* **69**, p. 153-200, 1996.

[20] de OLIVEIRA, C. R. On kicked systems modulated along the Thue-Morse sequence. *J. Phys. A* **27**(22), p. 847-851, 1994.

[21] de OLIVEIRA, C. R. Some remarks concerning stability for nonstationary quantum systems. *J. Stat. Phys.* **78**, p. 1055-1066, 1995.

[22] de OLIVEIRA, C. R. Spectral properties of a simple Hamiltonian model. *J. Math. Phys.* **34**(9), p. 3878-3886, 1993.

[23] de OLIVEIRA, C. R.; de TOLEDO, M. C. Equivalence of some quantum stability concepts. *Rep. Math. Phys.* **41**, p. 145-153, 1998.

[24] DORROH, J. R. A linear evolution equation without a commum dense core for the generators. *J. Differential Equations* **31**(1), p. 109-116, 1979.

[25] DUCLOS, P.; LEV, O.; STOVICEK, P.; VITTOT, M. Weakly regular Hamiltonians with pure point spectrum. *Rev. Math. Phys.* **14**(6), p. 531-568, 2002.

[26] DUCLOS, P.; STOVICEK, P. Floquet Hamiltonians with pure point spectrum. *Commun. Math. Phys.* **177**, p. 327-347, 1996.

[27] DUCLOS, P.; SOCCORSI; STOVICEK, P.; VITTOT, M. Dynamical localization in periodically driven quantum systems. Operador Algebras Conference, Sinai, Romania, 2003.

[28] ENSS, V.; VESELIC, K. Bound states and propagating states for time-dependent Hamiltonians. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A **39**, p. 159-191, 1983.

[29] GUARNERI, I. Singular continuous spectra and discrete wave packet dynamics. *J. Math. Phys.* **37**(10), p. 5195-5206, 1996.

[30] GUARNERI, I. Spectral properties of quantum diffusion on discrete lattices. *Europhys Lett.* **10**(2), p. 95-100, 1989.

[31] GRAFFI, S.; YAJIMA, K. Absolute continuity of the floquet spectrum for a nonlinearly forced harmonic oscillator. *Commun. Math. Phys.* **215**(2), p. 245-250, 2000.

[32] HAMZA, E.; JOYE, A.; STOLZ, G. Localization for Random Unitary Operators. *Lett. Math. Phys.* **75**, p. 255-272, 2006.

[33] HOWLAND, J. S. Floquet operators with singular continuous spectrum, I. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **49** , p. 309-323, 1989; II, **49**, p. 325-334, 1989; III, **69** , p. 265-273, 1998.

[34] HOWLAND, J. S. Scattering theory for Hamiltonians periodic in time. *Indiana J. Math.* **28**, p. 471-494, 1979.

[35] HOWLAND, J. S. Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. *Math. Ann.* **207**, p. 315-335, 1974.

[36] ISHII, S. An approach to linear hyperbolic evolution equations by the Yosida approximation method. *Proc. Japan Acad.* **54**, Ser. A, p. 17-20, 1978.

[37] ISHII, S. Linear evolution equations $du/dt + A(t)u = 0$: a case where $A(t)$ is strongly uniform-measurable. *J. Math. Soc. Japan* **34**, p. 413-424, 1982.

[38] JOYE, A. Absence of absolutely continuous spectrum of Floquet operators. *J. Stat. Phys.* **75**, p. 929-952, 1994.

[39] JOYE, A. Density of States and Thouless Formula for Random Unitary Band Matrices. *Ann. Henri Poicaré* **5**, p. 347-379, 2004.

[40] JOYE, A. Fractional Moment Estimates for Random Unitary Band Matrices. *Lett. Math. Phys.* **72**, p. 51-64, 2005.

[41] JOYE, A. Upper bounds for the energy expectation in time dependent quantum mechanics. *J. Stat. Phys.* **85**, p. 575-606, 1996.

[42] JAUSLIN, H. R.; LEBOWITZ, J. L. Spectral and stability aspects of quantum chaos . *Chaos 1*, p. 114-121, 1991.

[43] KATO, T. Linear evolution equations of "hiperbolic"type. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, A Math.* **17**, p. 241-258, 1970.

[44] KATO, T. Linear evolution equations of "hiperbolic"type II. *J. Math. Soc. Japan* **25**(4), p. 648-666, 1973.

[45] KATZNELSON, Y. *An Introduction to Harmonic Analysis.* New York, John Wiley, 1968.

[46] LAST, Y. Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra. *J. Funct. Anal.* **142**, p. 406-445, 1996.

[47] NAIMARK, M. A.; FOMIN, S. V. Continuous direct sums of Hilbert spaces and some of their applications. *Am. Math. Soc. Translations* **5**, Ser.2, p. 35-66.

[48] NENCIU, G. Floquet operators without absolutely continuous spectrum. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **59**, p. 91-97, 1993.

[49] NENCIU, G. Adiabatic theory: Stability of systems with increasing gaps. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **67**, p. 411-424, 1997.

[50] REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics,* v. **I-IV**. Academic Press, New York, 1975-1979.

[51] SCHMIDT, G. On scattering by time-dependent perturbations. *Indiana Univ. Math. J.* **24**(10), p. 925-935, 1975.

[52] SIMON, B. Analogs of the M-Function in the Theory of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, *J. Comput. Appl. Math.* **171**, p. 411-424, 2004.

[53] SIMON, B. Spectral Analysis of rank one Perturbations and Applications. *CRM Lecture Notes* Vol. **8**, p. 109-149, 1995 (J. Feldman, R. Froese, L. Rosen, eds.).

[54] SIMON, B.; WOLF, T. Singular Continuous Spectrum under rank one Perturbations and Localization for Random Hamiltonians. *Commun. Pure Appl. Math.* **39**, p. 75-90, 1986.

[55] YAJIMA, K. Scattering theory for Schrödinger equations with potential periodic in time. *J. Math. Soc. Japan* **29**, p. 729-743, 1977.