

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Um problema parabólico com condição de
fronteira não-linear e peso indefinido:
existência, regularidade, bifurcação e
estabilidade de equilíbrios**

Gustavo Ferron Madeira

São Carlos
Abril/2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Um problema parabólico com condição de fronteira
não-linear e peso indefinido: existência, regularidade,
bifurcação e estabilidade de equilíbrios**

Gustavo Ferron Madeira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para
obtenção do título de DOUTOR EM MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento**

São Carlos
Abril/2008

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

M181pp

Madeira, Gustavo Ferron.

Um problema parabólico com condição de fronteira não-linear e peso indefinido : existência, regularidade, bifurcação e estabilidade de equilíbrios / Gustavo Ferron Madeira. -- São Carlos : UFSCar, 2008.

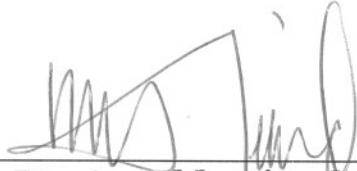
91 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.

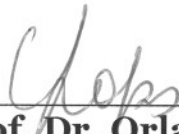
1. Equações diferenciais parciais. 2. Bifurcação de equilíbrios. 3. Estabilidade de equilíbrios. 4. Regularidade de soluções. 5. Traço (Convergência). 6. Condição de Neumann não-linear. I. Título.

CDD: 515.353 (20^a)

Banca Examinadora:



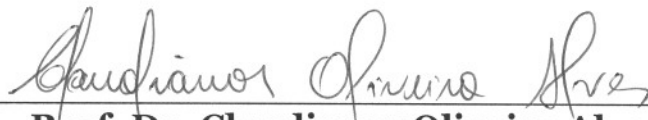
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
DM - UFSCAr



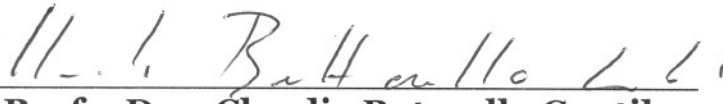
Prof. Dr. Orlando Lopes
IME - USP



Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
ICMC - USP



Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
DM - UFCG



Profa. Dra. Claudia Butarello Gentile
Dm - UFSCAr

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, agradeço:

primeiramente a Deus; aquele que É. Sempre misericordioso e fiel, presente e atuante.

ao Prof Dr. Arnaldo Simal do Nascimento; pela orientação segura e construtiva, pelo que aprendi e pelo que aprenderei; também pelo bom relacionamento e por incentivar e respeitar as autonomias pessoal e profissional.

aos Professores que compuseram a banca examinadora e sua suplência; pelas sugestões e críticas em benefício da clareza.

ao Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki; pelas discussões sempre valiosas e pelo exemplo estimulante.

a todos os Professores que tive e tenho, quer em sala de aula, quer na escola da vida; particularmente aos que me ensinaram e ensinam Matemática.

ao meu pai, José Claudio; a minha mãe, Maria Terezinha; a minha irmã Claudia; e a toda minha família; por tudo.

a minha querida Angela; sempre companheira e incentivadora. Por também fazer com que este trabalho tivesse constante bom sabor. Também a D. Josefina, ao Eduardo, as Patrícias, ao Fernando e ao Henrique, pela torcida e pelo bom convívio.

a todos os que colaboraram direta ou indiretamente com este trabalho. Em particular, a Ana, ao Laercio, a Lucy, a Elisandra, a Irma, a Célia, aos colegas do DM, aos amigos e professores de Viçosa, aos amigos do GPP e do MUR. Também a Jaque, a Paula, a Dayany, a PNSC, a Lola e aos amigos do “Xiquerinho”, a Vanda e aos amigos do “Open”, ao Mario e a Maria pelos livros; aos amigos de república, particularmente ao Elivelton e ao Helton que acompanharam o desenvolvimento deste trabalho. Aos amigos do Recanto, de forma particular ao Rodrigo que veio de Vitória para assentar-se na “arquibancada” da Sala de Conferências do DM. Enfim, a todos aqueles que torceram por mim e pelo meu trabalho, a quem trago na mente e no coração.

A Capes; pelo auxílio financeiro.

“...Que diremos depois disso? Se Deus é por nós, quem será contra nós?... Quem nos separará do amor de Cristo? A tribulação? A angústia? A perseguição? A fome? A nudez? O perigo? A espada?... Mas, em todas essas coisas, somos mais que vencedores pela virtude daquele que nos amou. Pois estou persuadido de que nem a morte, nem a vida, nem os anjos, nem os principados, nem o presente, nem o futuro, nem as potestades, nem as alturas, nem os abismos, nem outra qualquer criatura nos poderá apartar do amor que Deus nos testemunha em Cristo Jesus, nosso Senhor”.

(Epístola de Paulo aos Romanos)

“Os antigos que desejassem dar um exemplo da mais elevada virtude em todo império, em primeiro lugar punham em boa ordem os próprios estados. Desejando ordenar bem os próprios estados, primeiro ajustavam suas famílias. Desejando ajustar suas famílias, primeiro cultivavam a si próprios. Desejando cultivar a si próprios, em primeiro lugar purificavam seus corações. Desejando purificar seus corações, primeiro procuravam ser sinceros nos seus pensamentos. Desejando ser sinceros nos seus pensamentos, primeiro estendiam ao máximo seu conhecimento. Essa extensão do conhecimento reside na investigação das coisas.

As coisas sendo investigadas, o conhecimento se torna completo. O conhecimento sendo completo, os pensamentos são sinceros. Os pensamentos sendo sinceros, os corações, então, se purificam. Os corações sendo purificados, os seus próprios eus são cultivados. Os próprios eus sendo cultivados, as famílias se ajustam. As famílias estando ajustadas, os estados são governados corretamente. Os estados sendo corretamente governados, todo o império fica tranquilo e feliz”.

(Confúcio, *O Grande Ensino*)

OH! BENDITO QUE SEMEIA
LIVROS, LIVROS À MÃO CHEIA...
E MANDA O POVO PENSAR!
O LIVRO CAINDO NALMA
É GERME – QUE FAZ A PALMA,
É CHUVA – QUE FAZ O MAR

(Castro Alves)

“Trabalhai como se tudo dependesse de vós e rezai como se tudo dependesse de Deus.”

(Sto. Inácio de Loyola)

Resumo

É estudado neste trabalho um problema parabólico, oriundo de um modelo em genética populacional, com condição de fronteira de Neumann não-linear apresentando um peso com sinal indefinido e um parâmetro positivo. Considerando-se um espaço de fase adequado às questões de natureza física ligadas ao modelo, prova-se que o problema parabólico determina um sistema dinâmico não-linear, o qual é também um sistema gradiente. Desta forma, as soluções de equilíbrio desempenham um papel fundamental no que se concerne à dinâmica. O problema estacionário é então estudado sob diversos aspectos: é provada a existência de solução de equilíbrio fraca por meio do método variacional; a regularidade de soluções de equilíbrio fracas é estabelecida ao ser mostrado que quaisquer tais soluções são, na verdade, clássicas; as estruturas de bifurcação e estabilidade das soluções de equilíbrio são completamente determinadas, além do comportamento do traço da solução de equilíbrio não-trivial quando o parâmetro é arbitrariamente grande.

Abstract

This work is concerned with a parabolic problem, occurring in population genetics, under a nonlinear Neumann boundary condition with a weight of indefinite sign and a positive parameter. Considering a phase space appropriate to the physical nature intrinsic to the model, it is proved that the parabolic problem generates a nonlinear dynamical system, which is a gradient system. Therefore, its equilibrium solutions play a fundamental role in the long term dynamics. Then the stationary problem is studied under various aspects: it is proved the existence of a weak equilibrium solution using the variational method; it is established the regularity of weak equilibrium solutions by showing that they are classical ones; the bifurcation and stability structures of equilibria are completely determined. Furthermore the behavior of the trace of the nontrivial equilibrium solution when the parameter is large is established.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Espaços de Sobolev	6
1.2 Resolubilidade de alguns problemas elípticos em espaços de Sobolev	11
1.3 Algumas estimativas a priori	13
1.3.1 Estimativa de Agmon, Douglis e Nirenberg	13
1.3.2 Estimativa de Amann	14
1.4 O Princípio do máximo forte	15
1.4.1 Princípio do máximo elíptico	15
1.4.2 Princípio do máximo parabólico	16
1.5 Rudimentos de teoria da bifurcação	16
1.6 O Teorema da Função Implícita	18
1.7 Dois importantes resultados de Crandall-Rabinowitz	19
1.8 Operadores de Fredholm	21
1.9 Autovalores principais positivos de um problema de Steklov com peso de sinal indefinido	24
2 Existência de solução de equilíbrio não-trivial via método variacional	31
2.1 O sistema dinâmico não-linear gerado por (1)	31
2.2 Existência de solução de equilíbrio não-trivial	34
3 Regularidade das soluções de equilíbrio: argumentos de “bootstrap” com condições não-lineares na fronteira	41
3.1 O resultado principal e o Lema de Grisvard	42
3.2 Prova do Teorema 3.1	43
4 Bifurcação das soluções de equilíbrio	47
4.1 Unicidade dos equilíbrios triviais quando o parâmetro é pequeno	48
4.2 Condição necessária para bifurcação dos equilíbrios triviais e a não-sobrejetividade do operador linearizado	53
4.3 Bifurcação das soluções de equilíbrio triviais	58
4.4 Injetividade da linearização em torno de equilíbrios não-triviais	63
4.5 Conseqüências da injetividade do operador linearizado	65

5	Estabilidade das soluções de equilíbrio	70
5.1	Estabilidade dos equilíbrios triviais	71
5.2	Estabilidade das soluções bifurcadas	73
6	Convergência do traço quando o parâmetro é grande	81
7	Observações finais	85
	Referências Bibliográficas	87

Introdução

Um modelo em genética populacional descrevendo mudanças de freqüência genética em uma população habitando uma região do espaço, considerando efeitos de fluxo genético e da seleção natural atuando apenas no interior da região, foi introduzido por Fleming em [34] generalizando o modelo proposto por Fisher em [32] e estudado por vários autores em diversos trabalhos, como por exemplo em [17, 18, 19, 40, 42, 60] e nas referências lá citadas. Trata-se do problema parabólico com condição de Neumann homogênea

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \lambda a(x)g(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

com $a(\cdot)$ e g satisfazendo determinadas condições, estudado particularmente no capítulo décimo do célebre livro de Henry [40] numa abordagem bastante sintética e generalizando os resultados de Fleming. Tal abordagem permitiu que fosse traçado um paralelo entre o problema acima e aquele estudado nesta tese, análogo ao problema anterior porém apresentando uma condição não-linear na fronteira.

Quando se verifica fluxo de genes através da fronteira de uma região, um modelo análogo ao de [34] contemplando tal situação é dado por

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda s(x)f(u) & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1)$$

com dado inicial considerado em um espaço de fase adequado, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e ν o campo normal exterior a $\partial\Omega$.

No modelo acima $u(x, t)$ é a freqüência no tempo t e posição $x \in \bar{\Omega}$ e $\lambda > 0$ é um parâmetro. O termo não-linear na condição de fronteira significa que o fluxo é proporcional a $\lambda s(x)f(u)$, com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 satisfazendo

$$(H-1) \quad \begin{cases} \bullet f > 0 & \text{em } (0, 1), \\ \bullet f(0) = 0 = f(1), \\ \bullet f'(0) > 0, f'(1) < 0, \end{cases}$$

e com peso de fronteira $s : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, tal que

$$(H-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet s(\cdot) \text{ troca de sinal em } \partial\Omega, \\ \bullet \int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0, \end{array} \right.$$

sendo \mathcal{H}^{n-1} a medida $(n - 1)$ -dimensional de Hausdorff.

Problemas com condições de fronteira não-lineares têm sido alvo de pesquisa na área de equações diferenciais atraindo contínuo interesse. Existem muitos trabalhos no assunto e abordagens de abrangente generalidade encontram-se, por exemplo, em [3, 5, 6, 7, 10, 11, 21, 24, 62] e em suas referências.

Visto que $u(x, t)$ representa uma frequência genética no modelo acima, um espaço de fase adequado para se considerar (1) é

$$\mathfrak{X} \doteq \left\{ v \in H^1(\Omega) : 0 \leq v(x) \leq 1 \text{ a.e. } x \in \Omega \right\}.$$

Com efeito, do fato de (1) gerar um sistema dinâmico em $H^1(\Omega)$, veja [3, 6, 11], decorre do princípio do máximo a invariância de \mathfrak{X} e, assim, (1) determina um sistema dinâmico também em \mathfrak{X} , conforme será visto no Capítulo 2. Além disso, este sistema dinâmico é um sistema gradiente de forma que a dinâmica de (1) quando o tempo tende ao infinito depende fortemente dos equilíbrios, uma vez as soluções de (1) se aproximam das soluções de equilíbrio quando o tempo é arbitrariamente grande. Deste modo, para se compreender o comportamento das soluções do problema parabólico (1) a medida que o tempo torna-se grande, é necessário se conhecer suas soluções de equilíbrio.

As *soluções de equilíbrio* ou *equilíbrios* de (1) são as soluções do problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda s(x) f(u) \quad \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

pertencentes ao espaço de fase \mathfrak{X} . As únicas soluções constantes de (2) tomando valores entre 0 e 1 são $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$, os zeros de f em $[0, 1]$, chamadas *soluções de equilíbrio triviais* de (1).

Diversas características interessantes estão presentes no problema (2). Por exemplo, o parâmetro na condição de fronteira, o qual pode influenciar a estrutura do conjunto solução quando variar ao ser considerado parâmetro de bifurcação, como será feito no Capítulo 4; o peso de fronteira tendo sinal indefinido, isto é, tomando valores positivos e negativos, o que em geral torna-se fator complicador em problemas de valores de fronteira; além da não-linearidade, que indica que o fluxo através da fronteira se dá de forma não-linear. Alguns trabalhos interessantes apresentando pesos com sinal indefinido, presentes

em termos atuando no interior ou na fronteira, encontram-se em [15, 20, 45, 41, 61] e em suas referências. No entanto, não há muitos trabalhos na literatura possuindo todas as características supra citadas, embora devem ser destacados [12, 15, 51, 68, 69, 70] e suas referências.

O objetivo inicial desta tese foi estudar questões qualitativas a respeito das soluções de equilíbrio de (1), a saber, bifurcação e estabilidade. Mais precisamente, tendo como base o problema de Fleming [34], com a abordagem de Henry [40], objetivou-se investigar como se tornariam as estruturas de bifurcação e estabilidade das soluções de equilíbrio de (1) quando uma reação semelhante àquela que atuava no interior da região no modelo de Fleming ditasse o fluxo através da fronteira.

Trabalhando rumo ao objetivo acima mencionado, e motivado pela necessidade de se conhecer os equilíbrios em sistemas dinâmicos com estrutura gradiente, houve um questionamento sobre a possibilidade de se provar por meio do método variacional a existência de uma solução fraca não-trivial de equilíbrio de (1), ou seja, de uma solução fraca não-constante do problema elíptico (2) pertencente a \mathfrak{X} , e de se provar sua regularidade até a fronteira. Desta investigação resultaram [51] e os Capítulos 2 e 3. De fato, no Capítulo 2, a solução fraca foi obtida via método direto do Cálculo Variacional, pois o funcional energia associado a (2) é limitado inferiormente em \mathfrak{X} , e provada ser ponto crítico do funcional energia através de adaptação de um argumento devido a Struwe [64]. A não-trivialidade foi obtida ao inferir-se que seu nível de energia é inferior ao dos equilíbrios triviais através de uma solução adequada de um problema de tipo Steklov, estudado no Capítulo 1. A regularidade até a fronteira, tratada no Capítulo 3, foi obtida por meio de argumentos de “bootstrap” numa abordagem bastante direta, tornada funcional com o auxílio de uma estimativa a priori de Amann [5] e de um resultado de Grisvard [37].

Para estudarmos, no Capítulo 4, bifurcação dos equilíbrios de (1), introduzimos a aplicação suave não-linear $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, com $p > n$, dada por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) := \left(\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f(u) \right).$$

Assim, as soluções de equilíbrio de (1) são os zeros de \mathcal{F} em \mathfrak{X} e vice-versa.

O primeiro resultado a respeito da estrutura do conjunto solução dos equilíbrios de (1) prova a não-existência de soluções de equilíbrio não-triviais quando o parâmetro for suficientemente pequeno, ou seja, garante que as únicas soluções de (2) tomando valores no intervalo $[0, 1]$ são as constantes desde que $\lambda > 0$ seja pequeno, não havendo assim bifurcação se o parâmetro tiver tal propriedade.

Quando se vai à procura de pontos de bifurcação dos ramos triviais

$$\Gamma_0 := \{(\lambda, 0) : \lambda > 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 := \{(\lambda, 1) : \lambda > 0\}$$

surge a necessidade de se conhecer os autovalores de problemas de tipo Steklov

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda \omega_i(x)v & \text{em } \partial\Omega, \quad i = 0, 1 \end{cases} \quad (3)$$

sendo $\omega_0(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$ e $\omega_1(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$, que são os “problemas linearizados” em torno de Γ_0 e Γ_1 , estudados, dentre outros tópicos de caráter preliminar, no Capítulo 1. Os problemas em (3) são importantes pois uma condição necessária para que $\lambda > 0$ seja ponto de bifurcação com relação a Γ_0 ou Γ_1 é que $\lambda > 0$ seja autovalor principal de (3), isto é, esteja associado a uma autofunção positiva de (3). Assim, o número

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} \omega_i(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1}} : v \in H^1(\Omega) \text{ e } \int_{\partial\Omega} \omega_i(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0 \right\}$$

é candidato virtual a ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio de (1) com relação aos ramos triviais e, de fato, sob (H-1) e (H-2), é o único ponto de bifurcação com relação a Γ_0 . Com efeito, quando a média de $\omega_i(\cdot)$ é negativa, decorre do Capítulo 1 que $\lambda_0 > 0$ é o único autovalor principal positivo de (3) ao passo que quando a média de $\omega_i(\cdot)$ é não-negativa tem-se $\lambda_0 = 0$, de modo que (3) não possui autovalores principais positivos. Deste modo, segue imediatamente de (H-2) que não há pontos de bifurcação com relação a Γ_1 .

Como $\lambda_0 > 0$ é autovalor simples de (3) com $i = 0$, segue do Teorema de Crandall-Rabinowitz sobre bifurcação de autovalores simples, [27], a existência de uma curva local suave constituída de soluções não-triviais de (2) bifurcando de Γ_0 em $(\lambda_0, 0)$, as quais pertencem a \mathfrak{X} quando próximas de $(\lambda_0, 0)$, sendo então soluções de equilíbrio não-triviais de (1).

Introduzindo uma hipótese sobre a concavidade de f podemos inferir que a bifurcação com relação a Γ_0 ocorrendo em $(\lambda_0, 0)$ é transcítica e que a linearização de \mathcal{F} com respeito ao segundo argumento em torno de uma solução de equilíbrio não-trivial de (1) é injetora. Esta última informação, aliada ao fato de a linearização acima ser um operador de Fredholm de índice zero, abre espaço para aplicação do Teorema da Função Implícita, produzindo várias conseqüências tais como provar que a região de unicidade dos equilíbrios triviais mencionada anteriormente é o intervalo $(0, \lambda_0]$, inferir que não há ocorrência de bifurcação secundária e estender a curva local obtida acima à uma curva global suave contendo todas as soluções de equilíbrio não-triviais de (1). Daí derivamos também um resultado de unicidade e de bifurcação global, concluindo que a aplicação

$$(\lambda_0, +\infty) \ni \lambda \longmapsto u_\lambda \in [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}], \quad p > n$$

que associa a cada $\lambda > \lambda_0$ a correspondente solução de equilíbrio não-trivial de (1) é suave.

A análise das propriedades de estabilidade das soluções de equilíbrio de (1) é feita no Capítulo 5 e é baseada nos princípios da estabilidade linearizada, [24, 40, 31, 62, 50], e da transferência da estabilidade, [28, 29]. É provado localizando-se o primeiro autovalor do espectro dos problemas de autovalores associados à linearização de (2) em torno de $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ que o equilíbrio $u \equiv 0$ é assintoticamente estável para $0 < \lambda < \lambda_0$ e instável quando $\lambda > \lambda_0$, enquanto o equilíbrio $u \equiv 1$ é instável para todo $\lambda > 0$. No caso crítico de estabilidade quando $\lambda = \lambda_0$ a estabilidade de $u \equiv 0$ é provada explorando-se o fato de $u \equiv 0$ ser mínimo (global) do funcional energia de (2), o qual é funcional de Lyapunov para o sistema dinâmico gerado por (1) – fato este provado no Capítulo 2 – além da simplicidade algébrica do autovalor λ_0 de (3) com $i = 0$ – provada no Capítulo 1. A estabilidade assintótica das soluções no início do ramo global bifurcando de $(\lambda_0, 0)$ segue do princípio da transferência da estabilidade, e se estende para todo o ramo aliando-se um resultado de dependência contínua do primeiro autovalor do espectro de problemas de tipo Robin com relação ao coeficiente do termo de ordem zero do operador de fronteira, devido a Cano-Casanova e López-Gómez [20], com o fato de não haver bifurcação secundária para soluções de equilíbrio de (1).

Resulta dos Capítulos 4 e 5 o trabalho [52] e, combinando idéias de [51] e do Capítulo 4, obtem-se [53].

Por fim, estabelecemos no Capítulo 6 um resultado a respeito do traço da solução de equilíbrio não-trivial de (1) quando o parâmetro é arbitrariamente grande. De forma interessante a questão de se provar existência de solução fraca não-trivial de (2) em \mathfrak{X} mencionada acima, a priori desconexa do problema a que se dirige o Capítulo 6, mostrou-se essencial: para estabelecermos aquele resultado que afirma que o traço da solução de equilíbrio não-trivial de (1) converge na norma $L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, para a função característica do conjunto onde o peso $s(\cdot)$ é positivo quando λ tende ao infinito, foi fundamental o fato de tal solução minimizar globalmente o funcional energia de (2) em \mathfrak{X} , o que decorreu do método variacional empregado no Capítulo 2.

Observamos ainda que se o peso $s(\cdot)$ tiver média positiva sobre $\partial\Omega$ em (H-2), resultados perfeitamente análogos aos apresentados nesta tese podem ser obtidos trocando-se $u \equiv 0$ por $u \equiv 1$.

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo elencar resultados que serão necessários aos capítulos subsequentes. Especificamente, introduzimos os espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades como a aproximação por funções suaves, o operador traço, as imersões de Sobolev e alguns resultados operacionais como a Regra da Cadeia e condições sob as quais formam Álgebras de Banach.

Apresentamos também resultados de resolubilidade de problemas elípticos com condições de fronteira de Neumann, estimativas a priori bastante úteis, como a de Agmon, Douglis e Nirenberg e a de Amann, além do princípio do máximo forte, elíptico e parabólico, juntamente com o Lema de Hopf.

Abordamos rudimentos da teoria da bifurcação, incluindo o Teorema da Função Implícita, operadores de Fredholm e alguns resultados importantes de Crandall-Rabinowitz, como o teorema sobre bifurcação de um autovalor simples e o princípio da transferência da estabilidade.

Por fim, adaptando resultados de [17, 15], estudamos os autovalores principais de um problema de tipo Steklov com peso de sinal indefinido na fronteira, conforme demandará a investigação a respeito de bifurcação com relação aos ramos triviais de (2) feita no Capítulo 4.

1.1 Espaços de Sobolev

Introduziremos brevemente algumas idéias envolvendo os espaços de Sobolev, as quais revolucionaram o estudo das equações diferenciais desde que foram propostas.

Primeiramente, a noção de derivada fraca foi de extrema importância a fim de contornar-se problemas de continuidade e descontinuidade com respeito a diferenciação. Foi introduzida por S. L. Sobolev em seus trabalhos sobre equações diferenciais parciais do período entre 1936 e 1938.

A abordagem de Sobolev baseou-se na fórmula da integração por partes

$$\int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \phi \, dx$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Percebendo que o lado direito da última igualdade faz sentido para $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (o espaço das funções cujo valor absoluto é integrável sobre qualquer compacto contido em Ω), pôde introduzir a noção de derivada fraca.

Definição 1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e α um multi-índice. Então, v é a α -derivada fraca de u , de ordem $|\alpha|$, se*

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Esta idéia mostrou-se extremamente frutuosa para tratar-se problemas de valores de fronteira, pois formou a base para a definição dos espaços de Sobolev.

Definição 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, o **espaço de Sobolev** $W_p^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$.*

Observação 1.1 *Quando $p = 2$ é costumeiro denotar-se $W_2^k(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, pois $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Note também que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*

Definição 1.3 *A **norma** em $W_p^k(\Omega)$ é dada por*

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Muitas propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$ se transportam aos espaços $W_p^k(\Omega)$ como exemplifica o

Teorema 1.1 *São válidas as seguintes afirmações.*

- (i) $W_p^k(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $1 \leq p \leq \infty$, com a norma da Definição 1.3.
- (ii) $W_p^k(\Omega)$ é separável se, e somente se, $1 \leq p < \infty$.

Outra propriedade importante de funções em espaços de Sobolev é a aproximação por funções suaves, ou seja, o seguinte resultado de densidade.

Teorema 1.2 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe C^1 , então $C^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $W_p^k(\Omega)$, na norma $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$, para $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$.*

Uma questão de grande importância é associar valores de fronteira a funções em espaços de Sobolev. Restringiremos a discussão abaixo aos espaços $W_p^k(\Omega)$, $k = 1, 2$, tendo em vista simplificação de notação e as necessidades deste trabalho.

Note que qualquer função $u \in C(\overline{\Omega})$ tem valores em $\partial\Omega$, ou seja, sua restrição à $\partial\Omega$ pode ser considerada no sentido usual. Porém, funções em $W_p^1(\Omega)$ são consideradas a menos de conjuntos de medida nula em Ω e não são, em geral, contínuas. Assim, como $\partial\Omega$ tem medida de Lebesgue n -dimensional zero, a priori a restrição de funções de $W_p^1(\Omega)$ à $\partial\Omega$ não é bem definida. Felizmente, graças a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega})$ em $W_p^1(\Omega)$ dada no Teorema 1.2, o problema acima pode ser contornado através da noção de traço.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2 . A aplicação

$$\gamma_0(u) := u|_{\partial\Omega}$$

definida para funções em $C^1(\overline{\Omega})$ se estende, por densidade, a um operador contínuo $\gamma_0 : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, verificando

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

sendo $C > 0$ uma constante (cf. [33]). Assim, para $u \in W_p^1(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\gamma_0(u)$ é a restrição de u à $\partial\Omega$, chamado **traço** de u sobre $\partial\Omega$, e o operador γ_0 é o **operador traço de ordem zero**. Considerado como acima, o operador γ_0 não é sobrejetivo; de fato, γ_0 aplica $W_p^1(\Omega)$ num espaço menor do que $L^p(\partial\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$ conforme veremos abaixo.

Da mesma forma, como as derivadas fracas de $u \in W_p^2(\Omega)$ pertencem a $W_p^1(\Omega)$ podemos definir, para $1 \leq p < \infty$, a **derivada normal** de u na direção do campo normal ν exterior a $\partial\Omega$, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \gamma_0(\nabla u) \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\partial_{x_i} u) \nu_i,$$

também denotada por $\gamma_1(u) := \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Podemos então considerar o espaço dos traços de funções de $W_p^k(\Omega)$, definido como o conjunto das classes de equivalência

$$W_p^{k-1/p}(\partial\Omega) \doteq \left\{ \{u\} + \mathring{W}_p^k(\Omega) : u \in W_p^k(\Omega) \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W_p^{k-1/p}(\partial\Omega)} := \inf \left\{ \|v\|_{W_p^k(\Omega)} : u - v \in \mathring{W}_p^k(\Omega) \right\}$$

com $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Lembramos que o espaço $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_p^k(\Omega)$. Definido assim, $W_p^{k-1/p}(\partial\Omega)$ é um espaço de Banach.

Com as informações anteriores, estamos em condição de enunciar o

Teorema 1.3 (Teorema do traço) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2 . Então, a aplicação*

$$u \mapsto \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \right)$$

definida para funções $C^\infty(\bar{\Omega})$ tem uma única extensão contínua e sobrejetora

$$\gamma : W_p^2(\Omega) \longrightarrow W_p^{2-1/p}(\partial\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

com $1 \leq p < \infty$, dada por

$$\gamma(u) := (\gamma_0(u), \gamma_1(u)) = \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \right).$$

O operador γ tem uma inversa contínua a direita, a qual não depende de p .

O operador γ definido no Teorema 1.3 é chamado **operador traço de ordem um**. Se a fronteira do domínio for ainda mais suave, pode-se considerar o operador traço de ordem mais alta envolvendo derivadas na direção da normal exterior de ordens superiores. Para maiores detalhes, incluindo as demonstrações dos resultados anteriores, veja [16, 33, 37, 48, 56, 55, 67, 72].

Resultados de extrema importância e utilidade em equações diferenciais são as imersões de Sobolev por esclarecerem que, sob certas condições, funções em espaços de Sobolev podem possuir boas propriedades, como por exemplo, limitação e diferenciabilidade no sentido clássico, conforme os próximos teoremas.

Teorema 1.4 (Imersões de Sobolev, contínuas) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado satisfazendo a condição do cone e $k \geq 1$, $m \geq 0$, inteiros. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

$$(i) \quad W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow W_q^m(\Omega) \quad \forall 1 \leq q \leq \frac{np}{n - kp}, \quad \text{desde que } kp < n.$$

$$(ii) \quad W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow W_q^m(\Omega) \quad \forall q \geq 1, \quad \text{desde que } kp = n.$$

$$(iii) \quad W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow C_B^m(\Omega) \doteq \{v \in C^m(\Omega) : \partial^\alpha v \text{ é limitada para } |\alpha| \leq m\}, \quad \text{se } kp > n.$$

A inclusão do último item do teorema anterior deve ser interpretada no sentido que cada elemento de $W_p^{m+k}(\Omega)$ é uma classe de equivalência contendo uma função em $C_B^m(\Omega)$. As imersões compactas estão enunciadas no próximo

Teorema 1.5 (Imersões de Sobolev, compactas) *As imersões dos dois últimos itens do Teorema 1.4 são compactas, sendo que a primeira também o é para todo $1 \leq q < np/(n - kp)$.*

Além disso, se Ω é de classe $C^{0,1}$, as seguintes imersões são também compactas.

- (i) $W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ desde que $kp > n$.
- (ii) $W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \theta < k - \frac{n}{p}$, desde que $kp > n \geq (k-1)p$.

Para esclarecimentos e aprofundamentos adicionais, além de demonstrações para os resultados anteriores, indicamos as referências acima mencionadas.

Passamos agora a alguns resultados importantes do ponto de vista operacional, os quais serão úteis adiante.

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia) *Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se $u \in W_p^1(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, então $f \circ u \in W_p^1(\Omega)$ e*

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u.$$

A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [44], [67] ou [36].

Uma consequência da Regra da Cadeia dada no próximo resultado se refere as partes positiva e negativa de uma função u , $u^+ := \max\{u, 0\}$ e $u^- := -\min\{u, 0\}$, respectivamente, e a seu valor absoluto $|u| = u^+ + u^-$. Seu enunciado necessita da definição de suporte de uma função mensurável.

Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, consideremos a família de todos os abertos $U_i \subset \Omega$ tais que $u = 0$ a.e. em U_i . Então, $u = 0$ a.e. em $\bigcup_i U_i$ e definimos o **suporte** da função u como sendo o conjunto

$$\text{supp } u \doteq \Omega \setminus \bigcup_i U_i.$$

Note que se $u = v$ a.e. em Ω , tem-se $\text{supp } u = \text{supp } v$ de forma que a definição anterior é apropriada para espaços de classes de equivalência funções identificadas a menos de conjuntos de medida nula. Observe ainda que se u é contínua, seu suporte é simplesmente o conjunto

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Desta forma, podemos enunciar o

Corolário 1.1 *Se $u \in W_p^1(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, então $u^+, u^-, |u| \in W_p^1(\Omega)$.*

Além disso, denotando

$$\{u > 0\} \doteq \{x \in \text{supp } u : u(x) > 0\}$$

e

$$\{u < 0\} \doteq \{x \in \text{supp } u : u(x) < 0\}$$

tem-se

$$\nabla u^+ = \chi_{\{u>0\}} \nabla u \quad e \quad \nabla u^- = -\chi_{\{u<0\}} \nabla u$$

de forma que

$$\nabla|u| = \chi_{\{u>0\}}\nabla u - \chi_{\{u<0\}}\nabla u.$$

Utilizando-se as conhecidas relações $\max\{u, v\} = 1/2(u + v) + 1/2|u - v|$ e $\min\{u, v\} = 1/2(u + v) - 1/2|u - v|$, tem-se

Corolário 1.2 *Se $u, v \in W_p^1(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, então $\max\{u, v\} \in W_p^1(\Omega)$ e $\min\{u, v\} \in W_p^1(\Omega)$.*

Outra propriedade importante dos espaços de Sobolev é o fato de, sob certas condições, formarem Álgebras de Banach, conforme o

Teorema 1.7 (Álgebra de Banach) *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n satisfazendo a condição do cone. Se $kp > n$ ou $p = 1$ e $k \geq n$, então existe uma constante C , dependendo de k, p, n e do cone que determina a condição satisfeita por Ω , tal que para $u, v \in W_p^k(\Omega)$ tem-se*

$$\|uv\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)} \|v\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada em [1], p. 106.

Enunciaremos agora uma desigualdade, devida a Maz'ja, que possui várias utilidades. Uma delas é a conclusão de que uma sequência de $H^1(\Omega)$ tendo quadrado do módulo do gradiente uniformemente integrável em Ω e quadrado do traço uniformemente integrável em $\partial\Omega$, é limitada em $H^1(\Omega)$. Este argumento será utilizado algumas vezes no decorrer do trabalho.

Teorema 1.8 (Desigualdade de Maz'ja) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio limitado com fronteira suave. Então, existe uma constante $C = C(n, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}(\Omega)} \leq C \left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right]^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

A demonstração da Desigualdade de Maz'ja pode ser encontrada em [54].

Note em particular que, pela Desigualdade de Maz'ja, temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right]^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

1.2 Resolubilidade de alguns problemas elípticos em espaços de Sobolev

Esta seção é destinada a dois resultados gerais de existência e unicidade para alguns problemas elípticos postos em espaços de Sobolev que serão utilizados posteriormente. O primeiro deles se refere a classes de problemas com condições de fronteira não-homogêneas de tipo Neumann para um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente, e pode ser enunciado como

Teorema 1.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave. Considere um operador elíptico na forma divergente*

$$Au := \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u)$$

tal que $a_{ij} = a_{ji} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e exista $\vartheta > 0$ com

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ij}(x) \xi^i \xi^j \leq -\vartheta |\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Considere também um operador de fronteira

$$Bu := \sum_{i=1}^n b_i \partial_{x_i} u$$

com $b_i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$ e tal que $\partial\Omega$ seja não-característica para B , isto é,

$$\sum_{j=1}^n b_j \nu_j \neq 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

sendo $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ um campo normal exterior a $\partial\Omega$. Então, para todo $1 < p < \infty$, existe α_p de modo que o operador

$$\Upsilon : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

dado por

$$\Upsilon(u) = \left(Au + \alpha u, \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$$

é um isomorfismo para todo $\alpha \geq \alpha_p$.

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada em [37]. Veja também [36, 48, 66].

O próximo resultado, extraído de [71], também se refere a problemas de tipo Neumann. Para enunciá-lo, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^{2+m} , $m \geq 0$, e um número real $p > 1$. Considere o subespaço de $W_p^{m+2}(\Omega)$ definido por

$$\mathfrak{M} \doteq \left\{ u \in W_p^{m+2}(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0 \right\}$$

e o seguinte subespaço de $W_p^m(\Omega) \times W_p^{m+1-1/p}(\partial\Omega)$

$$\mathfrak{U} \doteq \left\{ (\phi, \psi) \in W_p^m(\Omega) \times W_p^{m+1-1/p}(\partial\Omega) : \int_{\Omega} \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \, d\mathcal{H}^{n-1} \right\}.$$

Assim, temos válido o seguinte

Teorema 1.10 *O operador $\mathcal{N} : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{U}$ dado por*

$$\mathcal{N}(u) = \left(-\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$$

é um homeomorfismo linear.

Observamos que o resultado anterior também é verdadeiro para funções a valores vetoriais e para operadores mais gerais do que o Laplaciano. Não obstante, optamos por um enunciado mais simplificado tendo em vista as necessidades deste trabalho. Para detalhes adicionais, veja [71].

1.3 Algumas estimativas a priori

1.3.1 Estimativa de Agmon, Douglis e Nirenberg

Enunciaremos nesta seção a célebre estimativa a priori devida a Agmon, Douglis e Nirenberg, [2]. Tendo em vista sua utilização neste trabalho faremos um enunciado para problemas envolvendo o Laplaciano, muito embora valha para problemas bem mais gerais.

Teorema 1.11 (Estimativa de Agmon, Douglis e Nirenberg) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^m e*

$$\mathcal{B} := \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} + b_0$$

um operador de fronteira de ordem 1 com coeficientes em $C^1(\partial\Omega)$. Se $\varphi \in L^p(\Omega)$ e $\psi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, com $1 < p < \infty$, existe uma constante $C > 0$ tal que qualquer solução $u \in W_p^2(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi & \text{em } \Omega \\ \mathcal{B}u = \psi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

satisfaz a estimativa

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C \left[\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right].$$

1.3.2 Estimativa de Amann

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio limitado com fronteira de classe $C^{3,\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$. Considere o operador linear \mathcal{A} dado por

$$\mathcal{A}u := - \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \partial_{x_i} \partial_{x_k} u + \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u + au$$

sendo a matriz (a_{ik}) simétrica e com coeficientes satisfazendo $a_{ik} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $a \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Suponha que \mathcal{A} seja fortemente uniformemente elíptico, isto é, que exista $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Dado um campo vetorial $\beta \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ não-tangente e exterior a $\partial\Omega$, sendo a derivada direcional de $u \in C^1(\overline{\Omega})$ com respeito a β dada por $\partial u / \partial \beta := \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_{x_i} u$, consideremos o operador de fronteira \mathcal{B} , também chamado **operador derivada oblíqua regular**, definido por

$$\mathcal{B}u := \frac{\partial u}{\partial \beta} + bu$$

com $b \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$.

Enquanto na estimativa a priori L^p clássica de Agmon, Douglis e Nirenberg se faz presente a norma $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ do operador de fronteira e a norma $L^p(\Omega)$ da função estimada, na estimativa a priori de Amann, que enunciaremos a seguir, a norma $W_p^1(\Omega)$ é estimada apenas por normas de tipo L^p envolvendo os operadores \mathcal{A} e \mathcal{B} . Desta forma, apesar da estimativa de Amann ser válida para funções bem suaves, ela é mais flexível quanto as normas que comparecem em seu lado direito.

Teorema 1.12 (Estimativa de Amann) *Suponha que $a, b \geq 0$ mas $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Então, se $1 < p < \infty$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C \left[\|\mathcal{A}u\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathcal{B}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \right]$$

qualquer que seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

A demonstração do teorema anterior se encontra em [5].

Nos capítulos seguintes será notório que a estimativa a priori de Amann é bastante útil para se estabelecer resultados de convergência.

1.4 O Princípio do máximo forte

Ferramentas extremamente importantes em equações diferenciais são os chamados princípios do máximo (cf. [33, 57]). Particularmente estaremos interessados no princípio do máximo forte, elíptico e parabólico, além do Lema de Hopf, o qual determina o sinal da derivada normal num ponto de máximo. Claramente, pela linearidade dos problemas de que trataremos, tem-se também princípios de mínimo.

1.4.1 Princípio do máximo elíptico

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave limitado e

$$\mathfrak{L}u := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_{x_i} u + cu$$

um operador com coeficientes contínuos, uniformemente elíptico, ou seja, satisfazendo (1.1), além de simétrico, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ para $i, j = 1, \dots, n$. Temos válido então o seguinte

Teorema 1.13 (Princípio do máximo forte) *Suponha que Ω seja conexo e que $c \geq 0$ em Ω .*

- (i) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é tal que $\mathfrak{L}u \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não-negativo sobre $\overline{\Omega}$ num ponto interior, então u é constante em Ω .*
- (ii) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é tal que $\mathfrak{L}u \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não-positivo sobre $\overline{\Omega}$ num ponto interior, então u é constante em Ω .*

É de grande utilidade se conhecer o que ocorre com a derivada normal em pontos de máximo ou mínimo de sub/super-soluções de expressões elípticas. O Lema de Hopf trata desta questão; para enunciá-lo, precisamos da seguinte condição. Dizemos que Ω satisfaz a **condição da bola interior em** $x_0 \in \partial\Omega$ se existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$. A condição da bola interior é automaticamente satisfeita em domínios com fronteira de classe C^2 (veja [33, 57]).

Sendo ν um campo normal exterior a $\partial\Omega$, temos

Teorema 1.14 (Lema de Hopf) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e suponha que $c = 0$ em Ω .*

- (i) *Se $\mathfrak{L}u \leq 0$ em Ω e existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

com Ω satisfazendo a condição da bola interior em x_0 , então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

(ii) Se $\mathfrak{L}u \geq 0$ em Ω e existe $y_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(y_0) < u(y) \quad \forall y \in \Omega$$

com Ω satisfazendo a condição da bola interior em y_0 , então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) < 0.$$

Se $c \geq 0$ em Ω , a conclusão em (i) permanece válida contanto que $u(x_0) \geq 0$. Se $c \leq 0$ em Ω , a conclusão em (ii) ainda é válida desde que $u(y_0) \geq 0$.

1.4.2 Princípio do máximo parabólico

Vamos assumir as mesmas hipóteses sobre Ω e \mathfrak{L} feitas quando tratamos do princípio do máximo elíptico acima, sendo que os coeficientes de \mathfrak{L} podem agora depender do tempo. Fixado $T > 0$, defina $\Omega_T \doteq \Omega \times (0, T]$. A fronteira parabólica de Ω_T é o conjunto $\partial\Omega_T \doteq \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$. Considerando o espaço

$$C_1^2(\Omega_T) \doteq \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j}^2 u, u_t \in C(\Omega_T), \quad i, j = 1, \dots, n \right\}$$

temos

Teorema 1.15 (Princípio do máximo forte) *Suponha Ω conexo e $c \geq 0$ em Ω .*

(i) *Se $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega_T})$ é tal que*

$$u_t + \mathfrak{L}u \leq 0 \quad \text{em } \Omega_T$$

e u atinge um máximo não-negativo sobre $\overline{\Omega_T}$ em $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, então u é constante em Ω_{t_0} .

(ii) *Se $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega_T})$ é tal que*

$$u_t + \mathfrak{L}u \geq 0 \quad \text{em } \Omega_T$$

e u atinge um mínimo não-positivo sobre $\overline{\Omega_T}$ em $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, então u é constante em Ω_{t_0} .

1.5 Rudimentos de teoria da bifurcação

Diversos problemas em Matemática e em suas aplicações à Física, Química, Biologia, dentre outras, estão estreitamente ligados a equações da forma

$$F(\lambda, u) = 0 \tag{1.2}$$

sendo $F : \Lambda \times X \longrightarrow Y$ um operador não-linear suave entre espaços de Banach.

Freqüentemente, $\Lambda = \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de natureza física, o qual se deseja manipular e determinar as conseqüências provocadas no conjunto solução

$$\Sigma \doteq \left\{ (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : F(\lambda, u) = 0 \right\}$$

de (1.2) a medida que varie. Uma das questões centrais da teoria da bifurcação é conhecer a estrutura de Σ em vizinhanças de soluções de (1.2).

Muitos problemas quotidianos apresentam um ou mais estados de equilíbrio, o elemento $u = 0$ a menos de mudança de variável, com a propriedade

$$F(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

o qual é chamado **solução trivial** de (1.2). Assim, a curva

$$\Gamma \doteq \{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

chamada **ramo trivial**, é formada por soluções de (1.2).

Observe que se F tiver características especiais numa vizinhança de um dado ponto de Γ pode ocorrer que, localmente, Γ seja o conjunto solução de (1.2), ou seja, que (1.2) não possua solução não-triviais, o que significa que a estrutura do experimento inicial não se alterou quando o parâmetro apresentou uma dada variação.

No entanto, não raro é se encontrar problemas cuja estrutura é drasticamente alterada por pequenas variações de um dado parâmetro, passando-se à introdução de uma ou mais novas soluções no modelo original. Estes tipos de fenômenos fornecem motivação para se introduzir o seguinte conceito.

Definição 1.4 *Um ponto λ_0 (ou $(\lambda_0, 0)$) é **ponto de bifurcação** de F com relação ao ramo trivial Γ se existe uma seqüência $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R} \times X$, com $u_k \neq 0$, tal que $F(\lambda_k, u_k) = 0$ e*

$$(\lambda_k, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\lambda_0, 0).$$

Uma maneira equivalente de se dizer que $(\lambda_0, 0)$ é ponto de bifurcação de F com relação a Γ é

$$(\lambda_0, 0) \in \overline{\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0 \text{ e } F(\lambda, u) = 0\}}$$

sendo o fecho tomado em $\mathbb{R} \times X$.

Note que o conceito definido acima não está relacionado apenas ao ramo trivial. Se \mathcal{C} é qualquer curva formada por soluções de (1.2), um ponto desta curva será ponto de bifurcação de F com relação a \mathcal{C} se qualquer vizinhança ambiente daquele ponto contiver uma solução de (1.2) que não estiver em \mathcal{C} .

Questões de interesse orgânico em teoria da bifurcação, dentre muitas outras, podem ser destacadas como

- (I) Que condições são necessárias e suficientes para que $(\lambda_0, 0)$ seja ponto de bifurcação de F com relação a Γ ?
- (II) Qual a estrutura de Σ numa vizinhança de um ponto de bifurcação?
- (III) Em problemas de evolução da forma

$$\frac{du}{dt} + F(\lambda, u) = 0$$

para os quais (1.2) determina os estados de equilíbrio, quais equilíbrios são estáveis? Quais são instáveis?

Uma resposta imediata à questão (I) quanto a condições necessárias para que $(\lambda_0, 0)$ seja ponto de bifurcação de F com relação a Γ provém do Teorema da Função Implícita, a saber, é necessário que o operador $D_u F(\lambda_0, 0)$ não seja invertível. De fato, se $D_u F(\lambda_0, 0)$ fosse invertível, decorreria do Teorema da Função Implícita, enunciado abaixo, a unicidade local da curva-solução Γ de (1.2) numa vizinhança de $(\lambda_0, 0)$.

Inferências às questões em (I), (II), (III), sob hipóteses adequadas, foram feitas por diversos autores, dentre os quais destacamos M. G. Crandall e P. H. Rabinowitz por seus resultados usados diretamente neste trabalho, e existem em larga escala na literatura, como por exemplo em [8, 12, 14, 17, 18, 19, 23, 26, 27, 28, 29, 34, 39, 40, 42, 46, 47, 49, 50, 51, 56, 58, 59, 60, 63, 68, 69, 70] e em suas referências.

Neste trabalho, relativamente aos problemas (1) e (2), nos dirigiremos às questões em (I), (II), (III).

1.6 O Teorema da Função Implícita

Enunciaremos nesta seção uma das ferramentas mais importantes da Análise, o Teorema de Função Implícita. Ao se estudar o conjunto solução de uma equação do tipo

$$T(\lambda, u) = 0 \tag{1.3}$$

sendo $T : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação suave entre espaços de Banach, devido a generalidade em que está posto o problema, não se deve esperar por um resultado preciso sobre a estrutura global de seu conjunto solução.

Porém, conhecida uma solução da equação acima, sob certas condições é possível conhecer *localmente* as soluções de (1.3) próximas daquela conhecida. Este é o conteúdo do Teorema da Função Implícita.

Teorema 1.16 (Teorema da Função Implícita) *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $U \subset X \times Y$ um aberto e $T : U \longrightarrow Z$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Suponha que $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in U$ satisfaça*

$$T(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$$

e que

$$D_u T(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) : Y \longrightarrow Z$$

seja uma bijeção. Então, existem uma vizinhança aberta \tilde{U} de $(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$ em $X \times Y$, uma vizinhança aberta \tilde{V} de $\tilde{\lambda}$ em X e uma função $\varphi : \tilde{V} \longrightarrow Y$ de classe C^k tais que

$$\{(\lambda, u) \in \tilde{U} : T(\lambda, u) = 0\} = \{(\lambda, u) : \lambda \in \tilde{V}, u = \varphi(\lambda)\}.$$

Além disso, \tilde{U} pode ser escolhida de forma que $D_u T(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$ seja uma bijeção de Y em Z para todo $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \tilde{U}$. Neste caso, se $\lambda \in \tilde{V}$ então

$$D\varphi(\lambda) = -[D_u T(\lambda, \varphi(\lambda))]^{-1} D_\lambda T(\lambda, \varphi(\lambda)).$$

A presente versão do Teorema da Função Implícita foi extraída de [13], e sua demonstração pode ser encontrada em [8, 46, 30], por exemplo.

1.7 Dois importantes resultados de Crandall-Rabinowitz

Dentre as contribuições de Crandall-Rabinowitz à teoria da bifurcação destacaremos particularmente duas nesta seção, a saber, o teorema sobre bifurcação de um autovalor simples e o princípio da transferência da estabilidade. Estes resultados de caráter local são ferramentas poderosas, sendo que o primeiro caracteriza a vizinhança de um autovalor simples do ponto de vista de soluções de uma determinada equação, e o segundo relaciona a forma da curva bifurcada com a estabilidade do problema de evolução associado.

Enunciaremos primeiramente o célebre teorema sobre bifurcação de autovalores simples, cuja demonstração pode ser encontrada em [27].

Teorema 1.17 (Bifurcação de um autovalor simples) *Sejam X, Y espaços de Banach, V uma vizinhança de 0 em X , $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $F : \mathcal{I} \times V \longrightarrow Y$ uma aplicação de classe C^2 no sentido de Fréchet.*

Para $\lambda_0 \in \mathcal{I}$, suponha que

- (i) $F(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathcal{I}$,
- (ii) $\dim \ker (D_x F(\lambda_0, 0)) = \dim (Y / R(D_x F(\lambda_0, 0))) = 1$,
- (iii) $D_\lambda D_x F(\lambda_0, 0) \cdot x_0 \notin R(D_x F(\lambda_0, 0))$, sendo x_0 gerador de $\ker (D_x F(\lambda_0, 0))$.

Seja Z qualquer complemento de $\ker (D_x F(\lambda_0, 0))$ em X , ou seja,

$$\ker (D_x F(\lambda_0, 0)) \oplus Z = X.$$

Então, existem um intervalo aberto $\tilde{\mathcal{I}}$ contendo 0 e funções continuamente diferenciáveis

$$\lambda : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad e \quad \psi : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow Z$$

tais que $\lambda(0) = \lambda_0$, $\psi(0) = 0$ e, se

$$x(r) = rx_0 + r\psi(r)$$

tem-se

$$F(\lambda(r), x(r)) = 0.$$

Além disso, o conjunto $F^{-1}(0)$ próximo de $(\lambda_0, 0)$ consiste precisamente das curvas

$$\{(\lambda(r), x(r)) : r \in \tilde{\mathcal{I}}\} \quad e \quad \{(\mu, 0) : \mu > 0\}.$$

Observação 1.2 Se no teorema anterior a aplicação não-linear F for de classe C^k , $k \geq 2$, então as funções λ e ψ obtidas naquele teorema serão de classe C^{k-1} (cf. [49]).

Mantendo-se a notação do teorema anterior, é possível mostrar (cf. [28]) que o autovalor crítico zero de $D_x F(\lambda_0, 0)$ pode ser perturbado ao longo dos ramos

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \simeq \lambda_0\} \tag{1.4}$$

e

$$\{(\lambda(r), x(r)) : r \simeq 0\}. \tag{1.5}$$

Antes de enunciarmos o resultado que diz respeito a perturbação acima mencionada, o qual é ingrediente importante para o princípio da transferência da estabilidade, necessitaremos de uma extensão da noção de simplicidade de um autovalor, encontrada na teoria de operadores compactos, para situações mais gerais (veja [23, 28]).

Definição 1.5 Sejam X, Y espaços de Banach e \mathcal{T}, \mathcal{K} operadores limitados aplicando X em Y . Dizemos que $\mu \in \mathbb{R}$ é um **autovalor \mathcal{K} -simples** de \mathcal{T} se

(i) $\dim \ker (\mathcal{T} - \mu\mathcal{K}) = \dim (Y/R(\mathcal{T} - \mu\mathcal{K})) = 1$,

(ii) $\mathcal{K}x_0 \notin R(\mathcal{T} - \mu\mathcal{K})$, sendo x_0 gerador de $\ker (\mathcal{T} - \mu\mathcal{K})$.

Fixando a notação empregada no Teorema 1.17, temos o

Teorema 1.18 Seja $\mathcal{K} : X \longrightarrow Y$ um operador limitado entre espaços de Banach e suponha que 0 seja um autovalor \mathcal{K} -simples de $D_x F(\lambda_0, 0)$. Então, existem $\epsilon, \delta > 0$ e funções continuamente diferenciáveis

$$\gamma : (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z : (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \longrightarrow X$$

tais que

$$\gamma(\lambda_0) = 0, \quad z(\lambda_0) = x_0, \quad z(\lambda) - x_0 \in Z$$

e funções continuamente diferenciáveis

$$\mu : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w : (-\delta, \delta) \longrightarrow X$$

tais que

$$\mu(0) = 0, \quad w(0) = x_0, \quad w(r) - x_0 \in Z$$

satisfazendo

$$(i) \quad D_u F(\lambda, 0) \cdot z(\lambda) = \gamma(\lambda) \mathcal{K}(z(\lambda)), \quad \forall \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$$

$$(ii) \quad D_u F(\lambda(r), u(r)) \cdot w(r) = \mu(r) \mathcal{K}(w(r)), \quad \forall r \in (-\delta, \delta).$$

Observação 1.3 *As funções γ , μ , z e w produzidas no teorema anterior serão de classe C^{k-1} se a aplicação não-linear F do Teorema 1.17 for de classe C^k , $k \geq 2$ (cf. [49]).*

O importante resultado que relaciona as perturbações do autovalor zero de $D_x F(\lambda_0, 0)$ ao longo dos ramos (1.5) e (1.4), o qual permite determinar a estabilidade (linearizada) das soluções bifurcadas de acordo com a forma da curva (1.5), é conhecido como princípio da transferência de estabilidade e pode ser enunciado no seguinte

Teorema 1.19 (Princípio da transferência de estabilidade)

Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.18, tem-se $\gamma'(\lambda_0) \neq 0$. Além disso, as funções $\mu(r)$ e $-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)$ têm os mesmos zeros para todo r suficientemente pequeno e o mesmo sinal quando $\mu(r) \neq 0$ (sendo $d/dr = \dot{}$ e $d/d\lambda = \prime$). Especificamente, tem-se

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \mu(r) \neq 0}} \frac{-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)}{\mu(r)} = 1$$

Para a demonstração do teorema anterior, veja [28].

Aplicações e informações adicionais relativas aos resultados desta seção encontram-se em [8, 14, 23, 29, 40, 46, 47, 49, 50, 58, 63].

1.8 Operadores de Fredholm

Sabemos que uma condição necessária para que $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times X$ seja ponto de bifurcação da equação

$$F(\lambda, x) = 0$$

é a não invertibilidade do operador $F_x(\lambda_0, 0)$. Um dos principais resultados da teoria de bifurcação, o teorema da bifurcação de um autovalor simples de Crandall-Rabinowitz, tem entre suas hipóteses a exigência que

$$\dim \ker (D_x F(\lambda_0, 0)) = \dim (Y/R(D_x F(\lambda_0, 0))) = 1.$$

A condição

$$\dim \ker (D_x F(\lambda_0, 0)) = \dim (Y/R(D_x F(\lambda_0, 0)))$$

é particularmente satisfeita quando $F_x(\lambda_0, 0)$ é um *operador de Fredholm*, de índice zero.

Nesta seção abordaremos alguns resultados sobre operadores de Fredholm e demonstraremos que o problema de Robin com coeficiente do termo de grau zero do operador de fronteira tendo sinal indefinido provém de um operador de Fredholm de índice zero.

Lembramos que $\mathcal{B}(X, Y)$ denota o espaço de todos os operadores lineares limitados entre os espaços de Banach X, Y e $R(T)$, $\ker(T)$ denotam, respectivamente, a imagem e o núcleo de T .

Definição 1.6 Dizemos que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é um **operador de Fredholm** se $R(T)$ é fechado e $\ker(T)$, $Y/R(T)$ têm dimensão finita.

Denotamos o espaço dos operadores de Fredholm por $\text{Fred}(X, Y)$.

Definição 1.7 O **índice** de um operador de Fredholm T é o número

$$\text{ind}(T) := \dim \ker(T) - \dim (Y/R(T)). \quad (1.6)$$

Os operadores de Fredholm podem ser caracterizados da seguinte forma.

Teorema 1.20 Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Então, T é um operador de Fredholm se, e somente se, existem $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(Y, X)$ tais que

$$S_1 T = I_X + K_1 \quad e \quad T S_2 = I_Y + K_2,$$

sendo K_1, K_2 operadores lineares compactos.

A demonstração do resultado anterior pode ser encontrada em [66], p. 507.

Uma consequência direta da caracterização anterior, que usa basicamente o fato da composição à esquerda de um operador compacto por um operador contínuo ser compacta, é dada pelo seguinte

Corolário 1.3 São válidas as seguintes afirmações.

- (i) Se $T \in \text{Fred}(X, Y)$ e $K : X \rightarrow Y$ é linear e compacto, então $T + K \in \text{Fred}(X, Y)$.
- (ii) A composição de operadores de Fredholm é um operador de Fredholm.

Um resultado fundamental sobre operadores de Fredholm, cuja demonstração pode ser encontrada em [66] p. 508, se refere a aplicação índice e pode ser enunciado como

Teorema 1.21 *A aplicação índice*

$$\text{ind} : \text{Fred}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definida por (1.6) é constante em cada componente conexa de $\text{Fred}(X, Y)$.

De posse dos resultados anteriores podemos provar um resultado sobre problemas de Robin com coeficiente de sinal indefinido na fronteira de um domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, necessário ao considerarmos bifurcação das soluções de equilíbrio de (1).

Teorema 1.22 *O operador linear*

$$\Psi : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega), \quad 1 < p < \infty,$$

dado por

$$\Psi(v) = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - b(x)v \right)$$

sendo $b(x) \in C^{1,\theta}(\partial\Omega)$, $0 < \theta < 1$, é um operador de Fredholm de índice zero.

Prova. Como $W_p^2(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^p(\Omega)$ e em $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ para todo $1 < p < \infty$ e $b(\cdot)$ é suave, vemos que Ψ é limitado. Note que considerando

$$\Lambda, K : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

dados por

$$\Lambda(v) := \left(\Delta v + \alpha v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \quad \text{e} \quad K(v) := (-\alpha v, -b(x)v),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\Psi = \Lambda + K.$$

Agora, as imersões acima mencionadas mostram que K é compacto e, sendo Λ um isomorfismo pelo Teorema 1.9 para α suficientemente grande, ao aplicarmos Λ^{-1} à direita e à esquerda na última equação obtemos pelo Teorema 1.20 que Ψ é um operador de Fredholm. Para mostrarmos que Ψ tem índice zero, defina a curva

$$\sigma : [0, 1] \longrightarrow \text{Fred}(W_p^2(\Omega), L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega))$$

pondo $\sigma(t) = \Lambda + tK$. Temos pelo Corolário 1.3 que σ é bem definida. Além disso, σ é contínua. De fato, fixado $0 \leq t_0 \leq 1$ e dado $\varepsilon > 0$, se $|t - t_0| < \varepsilon(\|K\|_{\mathcal{B}(X,Y)} + 1)^{-1}$ temos

$$\|\sigma(t) - \sigma(t_0)\| = |t - t_0| \|K\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \varepsilon.$$

Portanto, como Λ e $\Lambda + K$ pertencem ao conexo

$$\sigma([0, 1]) \subset \text{Fred}(W_p^2(\Omega), L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)),$$

pelo Teorema 1.21 concluimos que

$$\text{ind}(\Lambda + K) = \text{ind}(\Lambda).$$

Como $\text{ind}(\Lambda) = 0$ pois Λ é um isomorfismo, o teorema está provado. \square

Observação 1.4 *Note que o argumento usado no final da demonstração do teorema anterior permite uma conclusão mais geral sobre perturbações lineares compactas de operadores de Fredholm, a saber, se $T \in \text{Fred}(X, Y)$ e $K : X \rightarrow Y$ é linear e compacto, então T e $T + K$ têm o mesmo índice.*

1.9 Autovalores principais positivos de um problema de Steklov com peso de sinal indefinido

Considere o problema de Steklov

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda \omega(x)v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

sendo $\omega : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um peso suave com sinal indefinido, isto é, que mude de sinal em $\partial\Omega$. Nesta seção, adaptando resultados de [17, 15], determinaremos os possíveis valores positivos do parâmetro para os quais (1.7) possui uma solução (fraca) positiva. Qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ com esta propriedade é chamado **autovalor principal** de (1.7) e a solução de (1.7) associada é chamada **autofunção principal**.

Conhecer os autovalores principais de (1.7) é extremamente importante especialmente do ponto de vista de bifurcação das soluções de equilíbrio de (1), pois para cada $\lambda > 0$ o problema linearizado associado a (2) em torno de qualquer solução de equilíbrio é um caso particular de (1.7). Veremos que a existência de autovalores principais positivos dependerá do sinal da média do peso $\omega(\cdot)$ sobre $\partial\Omega$.

Para determinarmos os autovalores principais positivos de (1.7), considere para cada $\lambda > 0$ o operador \mathcal{L}_λ densamente definido em $L^2(\Omega)$ dado por

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u = -\Delta u \\ \text{D}(\mathcal{L}_\lambda) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \omega(\cdot)u \text{ em } \partial\Omega \right\}. \end{cases}$$

Sabemos que \mathcal{L}_λ é auto-adjunto e que seu espectro é discreto, consistindo somente de autovalores (veja [63], [24], [12], [65]). Para $v \in H^1(\Omega)$, defina o funcional

$$\mathcal{Q}_\lambda(v) := \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Uma condição necessária a ser satisfeita por um autovalor principal de (1.7) envolvendo o funcional acima é dada pelo

Lema 1.1 *Se λ é um autovalor principal de (1.7) então $\mathcal{Q}_\lambda(v) \geq 0$ para todo $v \in H^1(\Omega)$.*

Prova. Se $\lambda = 0$ o resultado é trivial. Suponha que u seja uma autofunção principal de (1.7) associada a $\lambda \neq 0$, isto é, $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz (1.7).

Note que, como $\omega(\cdot)$ muda de sinal, os resultados de regularidade clássicos como os de Gilbarg-Trudinger [36], por exemplo, não podem ser aplicados diretamente para se obter $u \in H^2(\Omega)$. No entanto, procedendo como no primeiro passo da demonstração do Teorema 3.1 do Capítulo 3, podemos mostrar que $u \in H^2(\Omega)$, ou seja, u é uma autofunção do operador \mathcal{L}_λ associada ao autovalor zero. Como o primeiro autovalor de \mathcal{L}_λ é

$$\mu_1(\lambda) = \inf_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\mathcal{Q}_\lambda(v)}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\}$$

e está associado a uma autofunção de um sinal em $\bar{\Omega}$ (cf. [63], [24]), do fato de autofunções associadas a autovalores distintos de \mathcal{L}_λ serem ortogonais obtemos $\mu_1 = 0$, e o resultado segue. \square

Note que o menor valor não-negativo do parâmetro associado a uma solução não-nula de (1.7) é

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1}} : v \in H^1(\Omega) \text{ e } \int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0 \right\}. \quad (1.8)$$

Vamos mostrar que $\lambda_0 > 0$ quando a média sobre $\partial\Omega$ do peso de fronteira $\omega(\cdot)$ for negativa. Nesta direção, o próximo resultado é de fundamental importância.

Lema 1.2 *Suponha $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0$. Então, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \alpha \int_{\partial\Omega} v^2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $\int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} > -\beta \int_{\partial\Omega} v^2 d\mathcal{H}^{n-1}$.

Prova. Se o resultado fosse falso, obteríamos uma sequência $\{v_k\} \subset H^1(\Omega)$ tal que

- $\int_{\partial\Omega} v_k^2 d\mathcal{H}^{n-1} = 1,$
- $\int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx \leq \frac{1}{k},$
- $\int_{\partial\Omega} \omega(x) v_k^2 d\mathcal{H}^{n-1} \geq -\frac{1}{k}.$

Usando a Desigualdade de Maz'ja, Teorema 1.8,

$$\int_{\Omega} v_{\lambda_k}^2 dx \leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla v_{\lambda_k}|^2 dx + \int_{\partial\Omega} v_{\lambda_k}^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right]$$

teríamos que $\{v_k\}$ seria limitada em $H^1(\Omega)$ e teria uma subsequência, ainda denotada por $\{v_k\}$, convergindo em $L^2(\Omega)$ para $v \in H^1(\Omega)$. Ainda, as condições acima e a desigualdade de Hölder implicariam que $\{v_k\}$ seria uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega)$ pois

$$\begin{aligned} \|v_m - v_k\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} (|\nabla v_m| + |\nabla v_k|)^2 dx + \int_{\Omega} (v_m - v_k)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla v_m| |\nabla v_k| dx + \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx + \int_{\Omega} (v_m - v_k)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{2}{\sqrt{m}\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \int_{\Omega} (v_m - v_k)^2 dx \xrightarrow{m,k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

e assim $\{v_k\}$ convergiria para v em $H^1(\Omega)$. Logo, novamente pela desigualdade de Hölder e pela compacidade da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ teríamos

- $\int_{\partial\Omega} v^2 d\mathcal{H}^{n-1} = 1,$
- $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0,$
- $\int_{\partial\Omega} \omega(x) v^2 d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0.$

As duas primeiras afirmações anteriores implicariam que v seria constante e, então, seguiria da terceira que $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0$, uma contradição, provando o lema. \square

Teorema 1.23 *Suponha $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0$. Então $\lambda_0 > 0$.*

Prova. Se $v \in H^1(\Omega)$ é tal que $\int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0$, pelo Lema 1.2 temos

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1}} &\geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\|\omega\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} v^2 d\mathcal{H}^{n-1}} \\ &\geq \frac{\alpha}{\|\omega\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}. \end{aligned}$$

Logo, pela maneira como λ_0 foi definido, obtemos

$$\lambda_0 \geq \frac{\alpha}{\|\omega\|_{L^\infty(\partial\Omega)}} > 0$$

e o resultado segue. \square

Observação 1.5 No caso $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0$, temos $\lambda_0 = 0$.

De fato, como $\lambda_0 \geq 0$ e

$$\mathcal{Q}_{\lambda_0}(v) \geq 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

basta mostrarmos que para cada $\lambda > 0$ existe $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $\mathcal{Q}_\lambda(v_\lambda) < 0$.

Se a média de $\omega(\cdot)$ sobre $\partial\Omega$ for positiva, basta tomarmos $v_\lambda \equiv 1$. Agora, se a média for zero, escolhendo $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\int_{\partial\Omega} \omega(x)v d\mathcal{H}^{n-1} > 0$ and $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\mathcal{Q}_\lambda(\varepsilon v + 1) = \varepsilon^2 \mathcal{Q}_\lambda(v) - 2\lambda\varepsilon \int_{\partial\Omega} \omega(x)v d\mathcal{H}^{n-1} < 0.$$

Os próximos resultados direcionam-se para a conclusão que quando houver um autovalor principal positivo de (1.7), ele deve ser λ_0 .

Teorema 1.24 Se $\lambda > \lambda_0$, então λ não é um autovalor principal de (1.7).

Prova. Para cada $\lambda > \lambda_0$ existe $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ tal que $\int_{\partial\Omega} \omega(x)v_\lambda^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0$ e

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla v_\lambda|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} \omega(x)v_\lambda^2 d\mathcal{H}^{n-1}} < \lambda,$$

ou seja, $\mathcal{Q}_\lambda(v_\lambda) < 0$. O Lema 1.1 produz então a conclusão desejada. \square

Teorema 1.25 Se $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0$ e $0 < \lambda < \lambda_0$, então λ não é um autovalor principal de (1.7).

Para provarmos o teorema anterior faremos uso do seguinte

Lema 1.3 *Se $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0$ e $0 < \lambda < \lambda_0$, então existe uma constante $\delta = \delta(\lambda) > 0$ tal que*

$$\mathcal{Q}_\lambda(v) \geq \delta \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Prova. Escrevendo $\lambda = (1 - \ell)\lambda_0$ para algum $0 < \ell < 1$ e dado $v \in H^1(\Omega)$, como $\mathcal{Q}_{\lambda_0}(v) \geq 0$ temos

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq \frac{\lambda}{\lambda_0} \mathcal{Q}_{\lambda_0}(v) + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \mathcal{Q}_\lambda(v)$$

e assim

$$\mathcal{Q}_\lambda(v) \geq \ell \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Agora, se $\alpha, \beta > 0$ são as constantes produzidas no Lema 1.2 e $v \in H^1(\Omega)$ satisfaz

$$\int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} > -\beta \int_{\partial\Omega} v^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

obtemos

$$\mathcal{Q}_\lambda(v) \geq \ell\alpha \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$$

ao passo que se $v \in H^1(\Omega)$ é tal que $\int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} \leq -\beta \int_{\partial\Omega} v^2 d\mathcal{H}^{n-1}$, então

$$\mathcal{Q}_\lambda(v) \geq \lambda\beta \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

Portanto, o lema estará provado ao tomarmos $\delta := \min\{\lambda\beta, \ell\alpha\} > 0$. \square

Prova do Teorema 1.25. Note que qualquer autovalor principal λ de (1.7) com autofunção v associada, ao multiplicarmos a primeira equação de (1.7) por v e integrarmos por partes, deve satisfazer

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \lambda \int_{\partial\Omega} \omega(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

ou seja, $\mathcal{Q}_\lambda(v) = 0$. Logo, se $0 < \lambda < \lambda_0$, pelo Lema 1.3 temos

$$\mathcal{Q}_\lambda(v) \geq \delta \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 > 0$$

de modo que o teorema está provado. \square

Estamos em condição de provarmos o principal resultado que descreve os autovalores principais positivos de (1.7) de acordo com o sinal da média sobre $\partial\Omega$ do peso de fronteira $\omega(\cdot)$, dado no seguinte

Teorema 1.26 *Com relação aos autovalores principais positivos de (1.7), temos*

(i) *Se $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0$ então (1.7) não possui autovalores principais positivos.*

(ii) *Se $\int_{\partial\Omega} \omega(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0$ então $\lambda_0 > 0$ é o único autovalor principal positivo de (1.7). Neste caso, autofunções associadas a λ_0 não trocam de sinal em $\bar{\Omega}$.*

Prova. A primeira parte é uma consequência direta do Teorema 1.24 e da Observação 1.5. Quanto a segunda, conforme observado no Lema 1.1, λ_0 é um autovalor de (1.7) se, e somente se, zero é um autovalor de \mathcal{L}_{λ_0} . Além disso, o primeiro autovalor de \mathcal{L}_{λ_0} é

$$\mu_1(\lambda_0) = \inf_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\mathcal{Q}_{\lambda_0}(v)}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\}.$$

Como para qualquer autofunção u associada a $\mu_1(\lambda_0)$

$$\mathcal{Q}_{\lambda_0}(|u|) = \mathcal{Q}_{\lambda_0}(u) \quad \text{e} \quad \| |u| \|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

temos que $|u|$ é também autofunção associada a $\mu_1(\lambda_0)$. Pelo princípio do máximo e Lema de Hopf, concluímos que $|u| > 0$ em $\bar{\Omega}$, ou seja, u não troca de sinal em $\bar{\Omega}$.

A demonstração estará completa ao provarmos que $\mu_1(\lambda_0) = 0$. Pela definição de λ_0 temos $\mu_1(\lambda_0) \geq 0$ e tomando uma sequência minimizante $\{v_k\} \subset H^1(\Omega)$, $v_k \neq 0$, em (1.8) tal que

$$\int_{\partial\Omega} \omega(x) v_k^2 d\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx$$

obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\lambda_0}(v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} \omega(x) v_k^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right\} = 0$$

e assim $\mu_1(\lambda_0) \leq 0$. Portanto, $\mu_1(\lambda_0) = 0$ e o teorema está provado. \square

Como λ_0 é um autovalor de (1.7) e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ compactamente, denotando por I o operador que fornece a inclusão, temos que 0 é um autovalor do operador limitado $\Psi : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ dado por

$$\Psi(v) = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda_0 \omega(\cdot) v \right)$$

ou seja, $\ker(\Psi - \mu I)$ é não-vazio para $\mu = 0$. O próximo teorema revela uma característica importante de λ_0 , a saber, que a multiplicidade geométrica de λ_0 é um, isto é, $\ker(\Psi - \mu I)$ tem dimensão um quando $\mu = 0$. Para demonstrá-lo, seguiremos [15] utilizando uma identidade de Piccone, provada em [4], que pode ser enunciada como

Lema 1.4 *Sejam $v > 0, u \geq 0$ funções contínuas em Ω , diferenciáveis em quase todo ponto. Definindo*

$$\begin{aligned} L(u, v) &:= |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v} \nabla v \cdot \nabla u \\ R(u, v) &:= |\nabla u|^2 - \nabla \left(\frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v \end{aligned}$$

temos

(i) $L(u, v) = R(u, v)$.

(ii) $L(u, v) \geq 0$ a.e. em Ω .

(iii) $L(u, v) = 0$ a.e. em Ω se, e somente se, $u = kv$ para algum $k \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.27 *O autovalor principal λ_0 de (1.7) tem multiplicidade geométrica um.*

Prova. A situação mais elaborada é o caso em que a média sobre $\partial\Omega$ do peso $\omega(\cdot)$ é negativa porque, no caso contrário, $\lambda_0 = 0$ de forma que o conjunto solução de (1.7) é \mathbb{R} . Assim, para a primeira situação, sejam u, v autofunções de (1.7) associadas a $\lambda_0 > 0$, positivas em $\bar{\Omega}$ pelo Teorema 1.26 sem perda de generalidade, e suaves por regularidade elíptica (o que pode ser provado analogamente a demonstração do Teorema 3.1 do Capítulo 3). Se L, R são definidos como no Lema 1.4, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(u, v) \, dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \lambda_0 \int_{\partial\Omega} \omega(x) u^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação de (1.7), quando v é solução, por u^2/v e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v \, dx = \lambda_0 \int_{\partial\Omega} \omega(x) u^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

de modo que pela parte (i) do Lema 1.4,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(u, v) \, dx &= \int_{\Omega} R(u, v) \, dx \\ &= \lambda_0 \int_{\partial\Omega} \omega(x) u^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a parte (iii) do Lema 1.4 implica a existência de $k \in \mathbb{R}$ tal que $u = kv$, provando a simplicidade algébrica de λ_0 . \square

Existência de solução de equilíbrio não-trivial via método variacional

Este capítulo é dedicado à questão da existência de solução de equilíbrio fraca não-trivial do problema (1) por meio do método variacional, seguindo [51].

Primeiramente, como consequência do princípio do máximo parabólico, vamos mostrar que (1) gera um sistema dinâmico não-linear num subconjunto fechado de $H^1(\Omega)$ ao mostrarmos sua invariância pelo sistema dinâmico não-linear definido pelas soluções de (1) com dados iniciais tomados em todo $H^1(\Omega)$. Este sistema dinâmico é um sistema gradiente, e assim, as órbitas se aproximam do conjunto dos equilíbrios quando o tempo é grande, de forma que fica evidenciada a importância de se conhecer as soluções de equilíbrio de (1).

Em seguida, lançando mão do fato de o funcional energia de (2) ser limitado inferiormente no espaço de fase, utilizamos o método direto do Cálculo Variacional para obtermos um mínimo global. Tal mínimo é então provado ser não-trivial ao inferirmos que seu nível de energia é inferior aos níveis de energia das soluções triviais. Porém, só seremos capazes de mostrarmos a existência de solução não-trivial quando o parâmetro não for pequeno. De fato, mostraremos no Capítulo 4 com o auxílio do Teorema da Função Implícita que (1) não possui soluções de equilíbrio não-triviais se o parâmetro for suficientemente pequeno.

2.1 O sistema dinâmico não-linear gerado por (1)

Uma vez que $u(x, t)$ satisfazendo (1) representa uma frequência genética, um espaço de fase adequado para considerarmos o problema (1) é

$$\mathfrak{X} \doteq \left\{ v \in H^1(\Omega) : 0 \leq v(x) \leq 1 \text{ a.e. } x \in \Omega \right\}. \quad (2.1)$$

O problema (1) gera um sistema dinâmico não-linear em $H^1(\Omega)$ para não-linearidades f em uma ampla classe, veja [3, 6, 11]. Além disso, tal sistema dinâmico é um sistema gradiente, de modo que as órbitas se aproximam das soluções de equilíbrio quando o

tempo é grande, veja também [3, 11, 21, 40].

Seremos capazes de considerar \mathfrak{X} como um espaço de fase para tratarmos o problema (1) devido ao seguinte resultado.

Teorema 2.1 *O conjunto \mathfrak{X} é invariante pelo sistema dinâmico não-linear gerado por (1) em $H^1(\Omega)$.*

Prova. Precisamos mostrar que se um dado inicial u_0 é tomado em \mathfrak{X} então a solução $u(\cdot, \cdot; u_0)$ de (1) tal que $u(\cdot, 0; u_0) = u_0$ satisfaz

$$0 \leq u(x, t; u_0) \leq 1 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Suponha que $u_0 \geq 0$ a.e. em Ω . Tome $\varphi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi_j > 0$ em $\overline{\Omega}$, tal que $\varphi_j \rightarrow u_0$ em $H^1(\Omega)$ quando $j \rightarrow \infty$, e considere as soluções correspondentes $u(\cdot, \cdot; \varphi_j)$ de (1), as quais são clássicas, [3, 10].

Por continuidade, existe $t_* = t_*(j) > 0$ tal que

$$u(x, t; \varphi_j) > 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_*]. \quad (2.2)$$

De fato, se o contrário fosse admitido poderíamos escolher $T_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e $(t_k, x_k) \in [0, T_k] \times \overline{\Omega}$ satisfazendo $u(x_k, t_k; \varphi_j) \leq 0$. Por causa da compacidade de $\overline{\Omega}$, extrairíamos uma subsequência de $\{x_k\}$, ainda denotada por $\{x_k\}$, convergindo para $\tilde{x} \in \overline{\Omega}$. Assim,

$$0 \geq u(x_k, t_k; \varphi_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(\tilde{x}, 0; \varphi_j) = \varphi_j(\tilde{x}),$$

uma contradição.

O próximo passo será mostrar que (2.2) se verifica globalmente no tempo.

AFIRMAÇÃO. $t_* = \infty$ para todo j .

Com efeito, provaremos a afirmação ao demonstrarmos o seguinte fato equivalente, a saber, que o conjunto

$$\mathcal{T}_j \doteq \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : u(x, t; \varphi_j) = 0 \text{ para algum } x \in \overline{\Omega} \right\}$$

é vazio para cada j .

Se $\mathcal{T}_{j_0} \neq \emptyset$ para algum j_0 , considerando

$$\mathfrak{t} := \inf \mathcal{T}_{j_0} \geq t_*$$

obteríamos $x_{j_0} \in \overline{\Omega}$ tal que $u(x_{j_0}, \mathfrak{t}; \varphi_{j_0}) = 0$. Além disso,

$$u(x, t; \varphi_{j_0}) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, \mathfrak{t}]$$

e assim, pelo princípio do máximo, (x_{j_0}, \mathfrak{t}) pertenceria a fronteira parabólica de $\overline{\Omega} \times [0, \mathfrak{t}]$

e satisfaria, pelo Lema de Hopf,

$$0 > \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_{j_0}, \mathbf{t}) = \lambda s(x_{j_0})f(u(x_{j_0}, \mathbf{t}; \varphi_{j_0})) = \lambda s(x_{j_0})f(0) = 0,$$

o que é impossível. Logo,

$$u(\cdot, \cdot; \varphi_j) > 0 \quad \text{em } \bar{\Omega} \times [0, \infty), \quad \forall j.$$

Agora, como u depende continuamente de dados iniciais em $H^1(\Omega)$, para cada $t > 0$ temos

$$\|u(\cdot, t; \varphi_j) - u(\cdot, t; u_0)\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

e portanto

$$u(x, t; u_0) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall t \geq 0.$$

O mesmo procedimento funciona ao supormos $u_0 \leq 1$ a.e. em Ω se considerarmos $w(\cdot, \cdot; u_0) := 1 - u(\cdot, \cdot; u_0)$, sendo u a solução de (1) com dado inicial u_0 , notando que $w(\cdot, 0; u_0) = 1 - u_0 \geq 0$ a.e. em Ω . Logo, argumentando como acima, a conclusão será

$$u(x, t; u_0) \leq 1 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall t \geq 0,$$

e o teorema está provado. \square

O teorema anterior nos permite considerar o sistema dinâmico não-linear

$$\left\{ \mathcal{S}(t) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \mid t \geq 0 \right\} \tag{2.3}$$

definido por meio das soluções de (1) por

$$\mathcal{S}(t)u_0 := u(\cdot, t; u_0), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Este sistema dinâmico herda as propriedades do sistema dinâmico gerado pelas soluções de (1) com dados iniciais em $H^1(\Omega)$ como, por exemplo, a restrição a \mathfrak{X} do funcional $\mathcal{J}_\lambda : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)F(u) d\mathcal{H}^{n-1} \tag{2.4}$$

sendo $F(u) = \int_0^u f(\tau) d\tau$, ser uma função de Lyapunov para (2.3), ou seja, decrescente ao longo das órbitas exceto nos equilíbrios. Além disso, o sistema dinâmico não-linear (2.3) é também um sistema gradiente e, desta forma, as soluções de equilíbrio desempenham um papel fundamental na análise da dinâmica do problema (1).

As **soluções de equilíbrio** ou **equilíbrios** de (1) são as soluções do problema elíptico (2) pertencentes ao espaço de fase \mathfrak{X} . As **soluções de equilíbrio triviais** ou **soluções**

de equilíbrio constantes de (1) são as soluções $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ de (2).

Serão importantes adiante as noções de estabilidade e instabilidade, no sentido de Lyapunov, das órbitas de um sistema dinâmico, dadas na seguinte

Definição 2.1 *Seja $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}$ um sistema dinâmico em um espaço métrico (\mathfrak{X}, d) .*

(i) *Uma órbita $\mathcal{S}(\cdot)x_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{X}$ é **estável** se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$y \in B_\delta(x_0) \implies d(\mathcal{S}(t)y, \mathcal{S}(t)x) < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \infty).$$

(ii) *Uma órbita é **instável** se não for estável.*

(iii) *Uma órbita $\mathcal{S}(\cdot)x_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{X}$ é **assintoticamente estável** se for estável e existir $\delta > 0$ tal que*

$$y \in B_\delta(x_0) \implies d(\mathcal{S}(t)y, \mathcal{S}(t)x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

ao passo que tal órbita é **exponencialmente estável** se existirem $\delta > 0$, $\alpha(\delta) > 0$, $M(\delta) < \infty$ tais que

$$y \in B_\delta(x_0) \implies d(\mathcal{S}(t)y, \mathcal{S}(t)x) \leq M e^{-\alpha t} d(y, x) \quad \forall t \in [0, \infty).$$

2.2 Existência de solução de equilíbrio não-trivial

Nesta seção provaremos que o problema (1) possui ao menos uma solução de equilíbrio fraca não-trivial desde que o parâmetro $\lambda > 0$ não seja pequeno. Precisamente, sob as hipóteses (H-1) e (H-2) provaremos que para cada $\lambda > \lambda_0$, com λ_0 dado por (1.8), o problema elíptico (2) possui uma solução fraca pertencente ao espaço de fase \mathfrak{X} . Como mostraremos no Capítulo 4, as únicas soluções de (2) tomando valores entre zero e um quando $0 < \lambda < \lambda_0$ são as constantes $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$.

O principal resultado deste capítulo é o próximo teorema.

Teorema 2.2 *Sob as hipóteses (H-1) e (H-2), (1) possui uma solução de equilíbrio fraca não-trivial para todo $\lambda > \lambda_0$.*

Prova. Dividiremos a demonstração em três passos. Primeiramente mostraremos que o funcional energia \mathcal{J}_λ de (2) dado por (2.4), quando restrito a \mathfrak{X} , possui um mínimo global para cada $\lambda > 0$. Em seguida, mostraremos que este ponto de mínimo em \mathfrak{X} é um ponto crítico em $H^1(\Omega)$ do funcional (2.4). Finalizaremos a demonstração ao mostrarmos que o ponto crítico obtido é não-constante para cada $\lambda > \lambda_0$.

PASSO 1. Minimização global de $\mathcal{J}_\lambda|_{\mathfrak{X}}$ para $\lambda > 0$.

Denotando

$$\{s \geq 0\} \doteq \{x \in \partial\Omega : s(x) \geq 0\}$$

e

$$\{s < 0\} \doteq \{x \in \partial\Omega : s(x) < 0\},$$

para cada $u \in \mathfrak{X}$ e $\lambda > 0$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)F(u) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \lambda \int_{\{s \geq 0\}} s(x)F(u) d\mathcal{H}^{n-1} - \lambda \int_{\{s < 0\}} s(x)F(u) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \lambda \int_{\{s \geq 0\}} s(x) \int_0^u f(\tau) d\tau d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - K \end{aligned}$$

sendo $K = K(\lambda, \Omega, s, f) > 0$ e assim \mathcal{J}_λ é limitado inferiormente em \mathfrak{X} .

Defina

$$\zeta := \inf_{u \in \mathfrak{X}} \mathcal{J}_\lambda(u)$$

e considere uma sequência minimizante $\{u_m\} \subset \mathfrak{X}$ tal que $\mathcal{J}_\lambda(u_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \zeta$.

Segue da última estimativa que $\{u_m\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$, de modo que, após passarmos à uma subsequência se necessário, existe $u_\lambda \in H^1(\Omega)$ satisfazendo, quando $m \rightarrow \infty$,

- $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$,
- $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$,
- $u_m \rightarrow u_\lambda$ a.e. em $\partial\Omega$.

Assim, $u_\lambda \in \mathfrak{X}$ e, pelas convergências acima, temos

$$\int_{\Omega} u_m^2 dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_\lambda^2 dx$$

e

$$\int_{\partial\Omega} s(x)F(u_m) d\mathcal{H}^{n-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} s(x)F(u_\lambda) d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo esta última obtida via Teorema da Convergência Dominada. Logo, organizando as informações acima e sabendo que

$$\|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{H^1(\Omega)}^2$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\zeta &\leq \mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) \\
&= \|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m^2 \, dx - \lambda \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} s(x)F(u_m) \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m^2 \, dx - \lambda \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} s(x)F(u_m) \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left[\|u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_m^2 \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)F(u_m) \, d\mathcal{H}^{n-1} \right] \\
&= \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\lambda(u_m) \\
&= \zeta.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) = \zeta$ para todo $\lambda > 0$, ou seja, u_λ é um mínimo global de $\mathcal{J}_\lambda|_{\mathfrak{X}}$ para todo $\lambda > 0$.

PASSO 2. Verificação de que $u_\lambda \in \mathfrak{X}$ é ponto crítico de \mathcal{J}_λ em $H^1(\Omega)$ para $\lambda > 0$.

Sabemos que o conjunto dos pontos críticos de \mathcal{J}_λ coincide com o conjunto das soluções fracas de (2), isto é, u é solução fraca de (2) se, e somente se, u satisfaz

$$\mathcal{J}'_\lambda(u) \cdot \phi \equiv \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)f(u)\phi \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega) \quad (2.5)$$

o que significa que u é um ponto crítico de \mathcal{J}_λ . No passo anterior mostramos que a restrição de \mathcal{J}_λ ao subconjunto fechado \mathfrak{X} de $H^1(\Omega)$ possui um mínimo global u_λ para cada $\lambda > 0$. Se \mathfrak{X} fosse aberto, um argumento bem conhecido forneceria que u_λ seria um ponto crítico de \mathcal{J}_λ em $H^1(\Omega)$, basicamente porque se poderia perturbar u_λ em qualquer direção sem sair de \mathfrak{X} e então a minimalidade de u_λ poderia ser usada livremente. No entanto, num conjunto fechado isto pode perfeitamente não ser satisfeito, por exemplo, não o é nos pontos de fronteira. Daí a necessidade de mostrarmos que u_λ satisfaz (2.5). Alcançaremos este objetivo por meio de uma adaptação de um argumento encontrado em [64].

Observe que, por densidade, é suficiente mostrarmos que $u_\lambda \in \mathfrak{X}$ satisfaz (2.5) para funções admissíveis $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Assim sendo, fixemos $\varepsilon > 0$ e $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Defina

$$v_\varepsilon := \min \{1, \max\{0, u_\lambda + \varepsilon\phi\}\}.$$

Pode-se mostrar diretamente que $v_\varepsilon \in \mathfrak{X}$ e que

$$v_\varepsilon = u_\lambda + \varepsilon\phi - \phi^\varepsilon + \phi_\varepsilon$$

sendo

$$\phi^\varepsilon := \max\{0, u_\lambda + \varepsilon\phi - 1\} \quad \text{e} \quad \phi_\varepsilon := -\min\{0, u_\lambda + \varepsilon\phi\}.$$

Note que $\phi^\varepsilon, \phi_\varepsilon \geq 0$ e que, pelo Corolário 1.2, $\phi^\varepsilon, \phi_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Também pode ser mostrado diretamente que $u_\lambda + \ell(v_\varepsilon - u_\lambda) \in \mathfrak{X}$ para todo $\ell > 0$ suficientemente pequeno, pois \mathfrak{X} é convexo.

Assim, como u_λ minimiza em \mathfrak{X} o funcional \mathcal{J}_λ que é suave em $H^1(\Omega)$, temos

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot (v_\varepsilon - u_\lambda) = \lim_{\ell \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ell} \left[\mathcal{J}_\lambda(u_\lambda + \ell(v_\varepsilon - u_\lambda)) - \mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) \right] \geq 0$$

de forma que

$$0 \leq \mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot (\varepsilon\phi - \phi^\varepsilon + \phi_\varepsilon) = \varepsilon \mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi - \mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi^\varepsilon + \mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi_\varepsilon$$

ou seja

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi \geq \frac{1}{\varepsilon} \left[\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi^\varepsilon - \mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi_\varepsilon \right]. \quad (2.6)$$

Agora, defina os conjuntos

$$\Omega^\varepsilon \doteq \{x \in \Omega : u_\lambda(x) + \varepsilon\phi(x) \geq 1 > u_\lambda(x)\}$$

e

$$\partial\Omega^\varepsilon \doteq \{x \in \partial\Omega : u_\lambda(x) + \varepsilon\phi(x) \geq 1 > u_\lambda(x)\}$$

sendo as funções que aparecem na definição de $\partial\Omega^\varepsilon$ compreendidas no sentido do traço. Observe que

$$\Omega \setminus \Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega : u_\lambda(x) + \varepsilon\phi(x) < 1\} \cup \{x \in \Omega : u_\lambda(x) \geq 1\} \cup \{x \in \Omega : \phi(x) \leq 0\}$$

e

$$\partial\Omega \setminus \partial\Omega^\varepsilon = \{x \in \partial\Omega : u_\lambda(x) + \varepsilon\phi(x) < 1\} \cup \{x \in \partial\Omega : u_\lambda(x) \geq 1\} \cup \{x \in \partial\Omega : \phi(x) \leq 0\}.$$

Desta forma, temos

$$\nabla u_\lambda \cdot \nabla \phi^\varepsilon = 0 \quad \text{a.e. em } \Omega \setminus \Omega^\varepsilon$$

e

$$f(u_\lambda)\phi^\varepsilon = 0 \quad \text{a.e. em } \partial\Omega \setminus \partial\Omega^\varepsilon$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi^\varepsilon &= \int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot \nabla \phi^\varepsilon \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x) f(u_\lambda) \phi^\varepsilon \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u_\lambda \cdot \nabla [u_\lambda + \varepsilon \phi - 1] \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega^\varepsilon} s(x) f(u_\lambda) [u_\lambda + \varepsilon \phi - 1] \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u_\lambda \cdot \nabla \phi \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega^\varepsilon \cap \{s \geq 0\}} s(x) f(u_\lambda) [u_\lambda + \varepsilon \phi - 1] \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u_\lambda \cdot \nabla \phi \, dx - \lambda \varepsilon \int_{\partial\Omega^\varepsilon \cap \{s \geq 0\}} s(x) f(u_\lambda) \phi \, d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Como as famílias $\{\Omega^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e $\{\partial\Omega^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ são tais que

$$\Omega^{\varepsilon_1} \supset \Omega^{\varepsilon_2} \supset \dots \quad \text{e} \quad \partial\Omega^{\varepsilon_1} \supset \partial\Omega^{\varepsilon_2} \supset \dots$$

quando $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0$, além de possuírem interseções vazias, suas medidas satisfazem

$$\mathcal{L}^n(\Omega^\varepsilon), \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

A continuidade absoluta da integral de Lebesgue implica que

$$\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u_\lambda \cdot \nabla \phi \, dx - \lambda \varepsilon \int_{\partial\Omega^\varepsilon \cap \{s \geq 0\}} s(x) f(u_\lambda) \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} = o(\varepsilon)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e assim

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi^\varepsilon \geq o(\varepsilon).$$

Procedendo como acima podemos mostrar que

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi_\varepsilon \leq o(\varepsilon)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e, em vista de (2.6), obtemos

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi \geq 0.$$

Observe que os cálculos anteriores não dependem do sinal de ϕ de modo que se repetirmos os mesmos com $-\phi$, poderemos concluir que

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi \leq 0.$$

Portanto,

$$\mathcal{J}'_\lambda(u_\lambda) \cdot \phi = 0 \quad \forall \phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

o que implica $u_\lambda \in \mathfrak{X}$ ponto crítico de \mathcal{J}_λ em $H^1(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$.

PASSO 3. Constatação de que u_λ é não constante para todo $\lambda > \lambda_0$.

A estratégia será mostrar que o nível de energia de u_λ é estritamente menor do que os níveis de energia das soluções de equilíbrio triviais $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ de (1).

Pela Fórmula de Taylor temos que

$$F(u) = f'(0)u^2/2 + \rho(u)$$

com $\rho(u) = o(u^2)$ quando $u \rightarrow 0$. Utilizando o Teorema 1.26-(ii), considere uma autofunção φ do problema (1.7) com $\omega(\cdot) = s(\cdot)f'(0)$ associada a λ_0 , positiva em $\bar{\Omega}$.

Escolha

$$0 < \varepsilon < \frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda\|s\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2} \int_{\partial\Omega} f'(0)s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Note que ε é bem definido pois $\lambda > \lambda_0 > 0$ e se multiplicarmos (1.7) por φ e integrarmos por partes, obteremos

$$\int_{\partial\Omega} f'(0)s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx > 0.$$

Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\delta\varphi \in \mathfrak{X}$ e

$$|\rho(\delta\varphi(x))| < \varepsilon\delta^2(\varphi(x))^2 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(\delta\varphi) &= \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)F(\delta\varphi) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{\lambda_0\delta^2}{2} \int_{\partial\Omega} f'(0)s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x) \left[\frac{f'(0)\delta^2\varphi^2}{2} + \rho(\delta\varphi) \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{\delta^2(\lambda_0 - \lambda)}{2} \int_{\partial\Omega} f'(0)s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)\rho(\delta\varphi) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \frac{\delta^2(\lambda_0 - \lambda)}{2} \int_{\partial\Omega} f'(0)s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda\varepsilon\delta^2\|s\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &< 0 \end{aligned}$$

para todo $\lambda > \lambda_0$. Logo,

$$\mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) \leq \mathcal{J}_\lambda(\delta\varphi) < 0, \quad \forall \lambda > \lambda_0.$$

Uma vez que os níveis de energia dos equilíbrios triviais $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ de (1) são

$$\mathcal{J}_\lambda(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_\lambda(1) = -\lambda F(1) \int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} > 0$$

concluimos que $u_\lambda \in \mathfrak{X}$ é uma solução fraca não-trivial de (2), e o teorema está provado. \square

Observação 2.1 *O Teorema 2.2 é também válido se $\int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} > 0$ em (H-2). Neste caso, λ_0 é dado por*

$$\inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} f'(1)s(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1}} : v \in H^1(\Omega) \text{ e } \int_{\partial\Omega} f'(1)s(x)v^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0 \right\}$$

e a autofunção usada para inferir que o nível do mínimo obtido é diferente daqueles dos equilíbrios constantes é uma solução positiva em $\bar{\Omega}$ do problema (1.7) com $\omega(\cdot) = s(\cdot)f'(1)$ e $\lambda = \lambda_0$.

Regularidade das soluções de equilíbrio: argumentos de “bootstrap” com condições não-lineares na fronteira

Uma questão importante no estudo de equações diferenciais é conhecer quão regular uma solução fraca de um dado problema de valor de fronteira pode ser.

Em problemas elípticos cujas condições de fronteira são lineares, por exemplo homogêneas, argumentos do tipo “bootstrap” são bem conhecidos; veja, por exemplo, os livros [14], [56] e as referências lá citadas. Estes argumentos consistem no aumento gradual da regularidade da dada solução por meio de imersões de Sobolev, explorando as propriedades da equação em questão.

Quando as condições de fronteira são do tipo acima citado, a teoria clássica de equações elípticas por meio de resultados de existência, unicidade e estimativas a priori fornece a alavanca necessária para que o “bootstrap” seja funcional. Por exemplo, segue de [2] (veja também [36]) que se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema de Dirichlet em um domínio suave limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e $f \in L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$, então $u \in W_p^2(\Omega)$ e existe $C > 0$ verificando a estimativa

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ou seja, estimativas L^p de Δu , quer dizer de f , alavancam imediatamente a solução u que inicialmente vivia num espaço de funções com uma derivada fraca introduzindo-a num espaço de funções que possuem duas. Tendo em mãos este resultado, o “bootstrap” funciona sem empecilhos na classe de problemas do tipo anterior desde que f , mesmo que dependa de forma não-linear de u , tenha suavidade e crescimento adequados.

No entanto, quando estamos diante de um problema que apresenta uma dependência

não-linear na condição de fronteira, perdemos a estrutura em que os resultados da teoria clássica são válidos. Além disso, possíveis resultados da teoria linear com as características do mencionado anteriormente, referentes a problemas com condições de fronteira mais gerais, que alavanquem uma solução que possua uma derivada fraca a um espaço de funções com duas derivadas fracas dependeria de técnicas de operadores pseudo-diferenciais, de árduo acesso ao leitor não familiarizado (cf. [22, 43]). Estas são dificuldades que se apresentam para aplicar-se diretamente o “bootstrap” convencional a problemas elípticos com condições de fronteira não-lineares.

Neste capítulo, seguindo [51], provaremos a regularidade das soluções do problema elíptico (2) e, em particular, das soluções de equilíbrio de (1) usando diretamente o “bootstrap”. Para contornarmos as dificuldades supra citadas, faremos uso de um resultado de caráter geral, devido a Grisvard [37], que funciona como alavanca – não do nível de uma derivada fraca para o de duas, mas no expoente de integrabilidade – se já estivermos no nível de duas derivadas fracas. Assim, antes de usarmos o resultado de Grisvard, devemos mostrar diretamente que nossa solução com uma derivada fraca tem na verdade duas. O Lema de Grisvard permitirá, então, que utilizemos o “bootstrap” para obtermos a regularidade das soluções fracas de (2) até a fronteira.

3.1 O resultado principal e o Lema de Grisvard

Nesta seção demonstraremos o principal resultado sobre a regularidade das soluções fracas de (2), que afirma que soluções fracas de (2) são de fato clássicas, especificamente, pertencentes a classe $C^{2,\theta}(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \theta < 1$. Vamos supor

$$(H-3) \quad f, f' \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Note que a hipótese anterior é supérflua para a regularidade das soluções de equilíbrio de (1). O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 3.1 *Seja $u \in H^1(\Omega)$ solução fraca de (2) e assumamos (H-1) – (H-3). Então, u é uma solução clássica de (2), ou seja, $u \in C^{2,\theta}(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \theta < 1$.*

Um resultado central na demonstração do teorema anterior é o

Lema 3.1 (Lema de Grisvard) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave limitado e $u \in W_q^2(\Omega)$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $\varphi \in L^p(\Omega)$ e $\psi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$. Suponha que $p \leq nq/(n-q)$ se $q < n$. Então $u \in W_p^2(\Omega)$.

A demonstração do resultado anterior utiliza métodos da teoria clássica de equações elípticas e pode ser encontrada em [37], p. 114.

3.2 Prova do Teorema 3.1

Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ seja solução fraca de (2). Dividiremos a demonstração em três passos.

PASSO 1. Vamos mostrar que $u \in H^2(\Omega)$.

Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + v = \psi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo $\psi := \lambda s(\cdot)f(u) + u$ (observe que usamos a mesma notação para funções definidas em Ω e para seus traços como funções definidas em $\partial\Omega$, sem perigo de confusão).

Como $s(\cdot)$ e $\partial\Omega$ são suaves, podemos estender a função $s(\cdot)$ a $\bar{\Omega}$ obtendo uma extensão suave

$$\tilde{s} : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\tilde{s}|_{\partial\Omega} = s$. Usando o Teorema do Traço e a Regra da Cadeia podemos demonstrar diretamente, a exemplo de como é feito abaixo no Passo 2, que $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Tome uma sequência $\{\psi_k\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ que aproxime $\lambda\tilde{s}(\cdot)f(u) + u$ na norma $H^1(\Omega)$, ou seja, tal que

$$\psi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda\tilde{s}(\cdot)f(u) + u \quad \text{em } H^1(\Omega),$$

e considere a família de problemas

$$\begin{cases} \Delta v_k = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v_k}{\partial \nu} + v_k = \psi_k & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

É provado em [36] que (3.2) tem uma única solução $v_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Usando a estimativa a priori de Amann, Teorema 1.12, e o fato de $\{\psi_k\}$ ser de Cauchy em $H^1(\Omega)$ juntamente com o Teorema do Traço, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_i - v_j\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left[\|\Delta(v_i - v_j)\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_i - \psi_j\|_{L^2(\partial\Omega)} \right] \\ &= C \|\psi_i - \psi_j\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq C \|\psi_i - \psi_j\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Logo, pela estimativa L^2 a priori de Agmon, Douglis e Nirenberg, [2], temos

$$\|v_i - v_j\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left[\|\psi_i - \psi_j\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \|v_i - v_j\|_{L^2(\Omega)} \right] \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0$$

e assim $\{v_k\}$ é de Cauchy em $H^2(\Omega)$. Isto assegura a existência $v \in H^2(\Omega)$ tal que

$$v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v \quad \text{em } H^2(\Omega)$$

de forma que v satisfaz (3.1) pontualmente, a menos de um conjunto de medida nula.

Para vermos que $u = v$, considerando as formas fracas de (2) e (3.1) temos que u e v satisfazem

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} u \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} v \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

o que implica

$$\int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} (v - u) \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Escolhendo $\phi = u - v$ na última expressão, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} (u - v)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

e assim $u = v$ a.e. em Ω , ou seja, $u \in H^2(\Omega)$.

PASSO 2. Por meio de argumentos de “bootstrap” e do Lema de Grisvard, vamos mostrar que $u \in C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \theta < 1$.

Consideraremos o caso $n > 2$. O caso $n = 1$ é óbvio da imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow u \in C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$ com $0 < \theta < 1/2$ e o caso $n = 2$ pode ser tratado com argumentação semelhante a que apresentaremos abaixo.

Pela imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow W_{q_1}^1(\Omega)$ com $q_1 := 2n/(n-2)$, [1], temos que $u \in W_{q_1}^1(\Omega)$. Pelo Teorema do Traço e pela Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\lambda s(\cdot)f(u)\|_{W_{q_1}^{1-1/q_1}(\partial\Omega)} \\
& \leq C\|\lambda\tilde{s}(\cdot)f(u)\|_{W_{q_1}^1(\Omega)} \\
& \leq \lambda C\left[\|\nabla(\tilde{s}(\cdot)f(u))\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|\tilde{s}(\cdot)f(u)\|_{L^{q_1}(\Omega)}\right] \\
& \leq \lambda C\left[\|f(u)\nabla\tilde{s}(\cdot)\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|\tilde{s}(\cdot)f'(u)\nabla u\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|\tilde{s}(\cdot)f(u)\|_{L^{q_1}(\Omega)}\right]
\end{aligned}$$

sendo as constantes nas estimativas anteriores denotadas por $C > 0$ e não dependentes das funções envolvidas. Por (H-3) e pela suavidade de $\tilde{s}(\cdot)$, o lado direito da última estimativa é finito o que implica $\lambda s(\cdot)f(u) \in W_{q_1}^{1-1/q_1}(\partial\Omega)$. Como $u \in H^2(\Omega)$, o Lema de Grisvard garante que $u \in W_{q_1}^2(\Omega)$.

- Se $n < 4$, pelo Teorema da Imersão de Sobolev, $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \theta < 1 - n/q_1$.
- Se $n = 4$, escolha $2 < q < q_1$ tal que

$$p_1 := \frac{4q}{(4-q)} > 4.$$

Neste caso, $q_1 = 4$ e a imersão $W_{q_1}^2(\Omega) \hookrightarrow W_{p_1}^1(\Omega)$ implica $u \in W_{p_1}^1(\Omega)$ de modo que, como acima, somos capazes de mostrar que $\lambda s(\cdot)f(u) \in W_{p_1}^{1-1/p_1}(\partial\Omega)$.

Aplicando o Lemma de Grisvard, temos

$$u \in W_{p_1}^2(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\theta}(\overline{\Omega}) \quad \text{para } 0 < \theta < 1 - 4/p_1.$$

Assim, podemos assumir $n > 4$ e a imersão $W_{q_1}^2(\Omega) \hookrightarrow W_{q_2}^1(\Omega)$, com $q_2 := 2n/(n-4)$, nos fornece $u \in W_{q_2}^1(\Omega)$. Como podemos mostrar que $\lambda s(\cdot)f(u) \in W_{q_2}^{1-1/q_2}(\partial\Omega)$, pelo Lemma de Grisvard obtemos $u \in W_{q_2}^2(\Omega)$.

- Se $n < 6$ então $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \theta < 1 - n/q_2$.
- No caso $n = 6$, escolhendo $3 < q < q_2$ de tal modo que

$$p_2 := \frac{6q}{(6-q)} > 6,$$

a imersão $W_{q_2}^2(\Omega) \hookrightarrow W_{p_2}^1(\Omega)$ mostra que $u \in W_{p_2}^1(\Omega)$. Como também podemos provar que $\lambda s(\cdot)f(u) \in W_{p_2}^{1-1/p_2}(\partial\Omega)$, o Lema de Grisvard implica

$$u \in W_{p_2}^2(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\theta}(\overline{\Omega}) \quad \text{para } 0 < \theta < 1 - 6/p_2.$$

Logo, podemos assumir que $n > 6$. Por indução, o procedimento acima produzirá

$$u \in W_p^2(\Omega), \quad p > n$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ fixado, isto é, $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \theta < 1 - n/p$.

PASSO 3. Conclusão de que $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \theta < 1 - n/p$.

Como $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ com $0 < \theta < 1 - n/p$, temos que o problema (3.1) possui uma solução $v \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ (cf. [36, 67]). O mesmo argumento do final do Passo 1 nos permite concluir que $u = v$, ou seja, $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \theta < 1 - n/p$ e o teorema está provado. \square

Observação 3.1 *Uma inspeção na demonstração do teorema anterior permite substituir-se (H-1) – (H-2) por $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $s \in C^{1,\theta}(\partial\Omega)$, com $0 < \theta < 1$.*

Observação 3.2 *Se estivéssemos trabalhando no “framework” $W_p^1(\Omega)$, com $p > n$, a hipótese (H-3) seria supérflua no Teorema 3.1, ou seja, se $u \in W_p^1(\Omega)$ é solução fraca de (2) e $p > n$, então $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ algum $0 < \theta < 1$.*

Bifurcação das soluções de equilíbrio

A questão principal para a qual nos dirigimos neste capítulo é determinar a estrutura do conjunto solução dos equilíbrios de (1) a medida que o parâmetro varie. Para abordar-se este tipo de questão, os métodos da teoria da bifurcação se apresentam como ferramentas de largo alcance, fornecendo, em muitos casos, respostas amplamente satisfatórias. Para aplicarmos aqueles métodos no estudo das soluções de equilíbrio de (1) é necessário uma estrutura adequada na qual (2) possa ser considerado.

Com este objetivo, considere a aplicação não linear

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega),$$

com $p > n$, dada por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) := \left(\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f(u) \right). \quad (4.1)$$

Observe que, sob as hipóteses (H-1) e (H-2), qualquer solução de (2) é clássica conforme o Teorema 3.1, de modo que os espaços utilizados na definição de \mathcal{F} são adequados. Além disso, o operador de superposição – também chamado operador de substituição ou de Nemytskij – induzido por f é bem definido e suave, de forma que \mathcal{F} é de classe C^3 no sentido de Fréchet (veja [9, 71]).

Assim, W_p^2 -soluções do problema elíptico (2) são zeros de \mathcal{F} e vice-versa. Desta forma, as soluções de equilíbrio de (1) são os zeros de \mathcal{F} pertencentes ao espaço \mathfrak{X} , dado por (2.1).

Na primeira seção deste capítulo, adaptando idéias de Ball *et al.* [13] sobre um problema elíptico com condição de Neumann homogênea, por meio do Teorema da Função Implícita provamos que as únicas soluções de equilíbrio de (1) quando o parâmetro é pequeno são os equilíbrios triviais, de modo que não há fenômenos de bifurcação quando $\lambda > 0$ é pequeno.

Em seguida, determinamos uma condição necessária para que $\lambda > 0$ seja ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio de (1) com relação aos ramos triviais

$$\Gamma_0 \doteq \{(\lambda, 0) : \lambda > 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 \doteq \{(\lambda, 1) : \lambda > 0\} \quad (4.2)$$

e concluimos que, quando (H-1) e (H-2) são satisfeitas, não há bifurcação do ramo Γ_1 .

Com relação a Γ_0 provamos, via Teorema de Crandall-Rabinowitz sobre bifurcação de autovalores simples [27], a existência de uma curva local formada por soluções de equilíbrio não-triviais de (1) emanando de Γ_0 . Esta bifurcação é transcítica quando uma hipótese sobre a concavidade de f no intervalo $[0, 1]$ é assumida, e então é provada a injetividade do operador linearizado de \mathcal{F} com relação ao segundo argumento em torno de uma solução de equilíbrio não-trivial de (1). Esta informação será crucial para determinarmos completamente a estrutura do conjunto solução de (2) em \mathfrak{X} : poderemos otimizar a região de unicidade das soluções de equilíbrio triviais mencionada acima, constataremos que não há bifurcações secundárias e estenderemos a curva local obtida à uma curva global suave, contendo todas as soluções de equilíbrio não-triviais de (1).

4.1 Unicidade dos equilíbrios triviais quando o parâmetro é pequeno

Nesta seção provaremos a não-existência de soluções de equilíbrio não-triviais de (1) para valores do parâmetro suficientemente pequenos. Com efeito, este fato poderia de certa forma ser suspeitado porque na demonstração que apresentamos para o Teorema 2.2 ficou evidenciada a necessidade de $\lambda > 0$ não ser pequeno.

Para estabelecermos o resultado de não-existência, provaremos primeiramente um resultado de unicidade local a respeito das soluções $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ do problema elíptico (2) através do Teorema da Função Implícita, a saber

Lema 4.1 *Suponha $\int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \neq 0$ e seja u_0 uma solução de equilíbrio constante de (1). Então, existe uma vizinhança de u_0 em $W_p^2(\Omega)$, $p > n$, na qual u_0 é a única solução de (2) para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.*

Prova. Considere o subespaço fechado de $L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $p > n$,

$$\mathfrak{U} \doteq \left\{ (\phi, \psi) \in L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) : \int_{\Omega} \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \, d\mathcal{H}^{n-1} \right\}$$

e defina $\Phi : \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{U} \times \mathbb{R}$ por

$$\Phi(\lambda, u) := \begin{pmatrix} \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f(u) + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x) f(u) \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ \int_{\partial\Omega} s(x) f(u) \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{pmatrix}$$

sendo que $\int_{\partial\Omega}$ denota a média sobre $\partial\Omega$. Assim, Φ é bem definida e $u \in W_p^2(\Omega)$ é uma solução de (2) se, e somente se, $\Phi(\lambda, u) = 0$. Note também que $\Phi(0, u_0) = 0$ e que todo ponto da curva

$$\{(\lambda, u_0) : \lambda > 0\} \subset \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \quad (4.3)$$

é um zero da aplicação não-linear Φ .

Para demonstrarmos o teorema, faremos uso do Teorema da Função Implícita após a verificação dos seguintes passos.

PASSO 1. Mostrar que $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega), \mathfrak{U} \times \mathbb{R})$ no sentido de Fréchet.

Note que, por (H-3) e pela Regra da Cadeia, a aplicação

$$W_p^1(\Omega) \ni u \longmapsto f(u) \in W_p^1(\Omega)$$

é bem definida. Assim, como f é suave, temos

$$f(u|_{\partial\Omega}) = f(u)|_{\partial\Omega} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

de forma que procedendo como no Passo 2 da demonstração do Teorema 3.1, e mantendo a notação lá fixada, podemos mostrar que

$$\|\lambda s(\cdot)f(u)\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} \leq C\|\lambda \tilde{s}(\cdot)f(u)\|_{W_p^1(\Omega)} < \infty$$

ou seja, a aplicação

$$W_p^1(\Omega) \ni u \longmapsto \lambda s(\cdot)f(u) \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

é bem definida. Logo, tendo em vista (H-3), é padrão mostrar que a derivada de Gateaux com relação ao segundo argumento de Φ num ponto $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W_p^2(\Omega)$ é dada por

$$D_u\Phi(\lambda, u) \cdot v = \begin{pmatrix} \Delta v \\ \partial v / \partial \nu - \lambda s(\cdot)f'(u)v + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)f'(u)v \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ \int_{\partial\Omega} s(x)f'(u)v \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{pmatrix}$$

para todo $v \in W_p^2(\Omega)$. Para verificarmos a continuidade da aplicação

$$\mathbb{R} \times W_p^2(\Omega) \ni (\lambda, u) \longmapsto D_u\Phi(\lambda, u) \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times W_p^2(\Omega), \mathfrak{U} \times \mathbb{R})$$

considere uma sequência

$$(\lambda_i, u_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} (\lambda, u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times W_p^2(\Omega).$$

Precisamos mostrar que

$$\vartheta_i := \sup \left\{ \|D_u \Phi(\lambda_i, u_i) \cdot v - D_u \Phi(\lambda, u) \cdot v\|_{\mathfrak{M} \times \mathbb{R}} : \|v\|_{W_p^2(\Omega)} \leq 1 \right\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Se $v \in W_p^2(\Omega)$, com $\|v\|_{W_p^2(\Omega)} \leq 1$, então usando o Teorema do Traço e o Teorema 1.7 temos

$$\begin{aligned} & \|D_u \Phi(\lambda_i, u_i) \cdot v - D_u \Phi(\lambda, u) \cdot v\|_{\mathfrak{M} \times \mathbb{R}} \\ & \leq C \left[\|s(\cdot)(\lambda f'(u) - \lambda_i f'(u_i))v\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} + \|s(\cdot)(\lambda_i f'(u_i) - \lambda f'(u))v\|_{L^1(\partial\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|s(\cdot)(f'(u_i) - f'(u))v\|_{L^1(\partial\Omega)} \right] \\ & \leq C \left[\|\tilde{s}(\cdot)(\lambda f'(u) - \lambda_i f'(u_i))\|_{W_p^1(\Omega)} \|v\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\lambda_i \tilde{s}(\cdot)(f'(u_i) - \lambda f'(u))\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_p^2(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|\tilde{s}(\cdot)(f'(u_i) - f'(u))\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_p^2(\Omega)} \right] \\ & \leq C \left[\|\lambda f'(u) - \lambda_i f'(u_i)\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\lambda_i f'(u_i) - \lambda f'(u)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|f'(u_i) - f'(u)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \right] \|v\|_{W_p^2(\Omega)} \\ & \leq C \left[\|\lambda f'(u) - \lambda_i f'(u_i)\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\lambda_i f'(u_i) - \lambda f'(u)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} + \|f'(u_i) - f'(u)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \right] \end{aligned}$$

sendo que as constantes nas estimativas anteriores, as quais não dependem de v , foram denotadas por $C > 0$ e p, p' são expoentes conjugados, isto é, satisfazem $1/p + 1/p' = 1$. Logo,

$$\vartheta_i \leq C \left[\|\lambda f'(u) - \lambda_i f'(u_i)\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\lambda_i f'(u_i) - \lambda f'(u)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} + \|f'(u_i) - f'(u)\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \right]$$

de modo que a convergência de (λ_i, u_i) para (λ, u) na norma de $\mathbb{R} \times W_p^2(\Omega)$ implica que o lado direito da última desigualdade converge para zero, pois

$$u_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u, \quad \nabla u_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \nabla u \quad \text{e} \quad u_i|_{\partial\Omega} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u|_{\partial\Omega}$$

uniformemente porque $p > n$. Segue então que $\vartheta_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$ e, assim, a aplicação $(\lambda, u) \mapsto D_u \Phi(\lambda, u)$ é contínua.

Analogamente, a derivada de Gateaux com relação ao primeiro argumento de Φ em

$(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W_p^2(\Omega)$ é

$$D_\lambda \Phi(\lambda, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -s(\cdot)f(u) + \int_{\partial\Omega} s(x)f(u) d\mathcal{H}^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual é contínua por argumentação semelhante a anterior. Portanto, Φ é continuamente diferenciável no sentido de Fréchet.

PASSO 2. Verificar que $D_u \Phi(0, u_0) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{U} \times \mathbb{R}$ é um homeomorfismo linear.

Com efeito, pelo Teorema da Aplicação Aberta, é suficiente provarmos que a aplicação contínua $D_u \Phi(0, u_0)$ é uma bijeção. Então, se v pertence ao núcleo de $D_u \Phi(0, u_0)$, v é solução de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ f'(u_0) \int_{\partial\Omega} s(x)v d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \end{cases}$$

As duas primeiras equações do problema anterior implicam v constante, enquanto a terceira implica que $v \equiv 0$ pois $f'(u_0) \neq 0$ e $\int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \neq 0$. Desta forma, a injetividade de $D_u \Phi(0, u_0)$ está provada.

Agora, dado $(\phi, \psi, c) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}$, como $\int_{\Omega} \phi dx = \int_{\partial\Omega} \psi d\mathcal{H}^{n-1}$ segue do Teorema 1.10 que o problema linear

$$\begin{cases} \Delta h = \phi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} = \psi & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

é resolúvel em $W_p^2(\Omega)$, com $p > n$. Por adição de uma constante, se necessário, podemos escolher uma solução $h \in W_p^2(\Omega)$ do problema anterior verificando a condição

$$\frac{f'(u_0)}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} s(x)h d\mathcal{H}^{n-1} = c$$

de modo que a sobrejetividade de $D_u \Phi(0, u_0)$ está provada. Logo, a aplicação $D_u \Phi(0, u_0)$ é uma bijeção e, assim, um homeomorfismo linear.

Portanto, os passos anteriores permitem que apliquemos o Teorema da Função Implícita de forma a obtermos, por (4.3), uma vizinhança de u_0 em $W_p^2(\Omega)$, com $p > n$, na qual u_0 é a única solução de (2) para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, provando o lema. \square

Estamos em condição de provarmos o principal resultado desta seção, o qual nos dará a conhecer o conjunto das soluções de equilíbrio de (1) para $\lambda > 0$ pequeno.

Teorema 4.1 *Suponha $\int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \neq 0$. Então, qualquer solução de equilíbrio de (1) é constante se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno.*

Prova. Argumentaremos por contradição. Suponhamos que existisse uma sequência $\{u_{\lambda_i}\}$ de soluções de equilíbrio não-constantes de (1) tais que $\lambda_i \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$. Como as soluções de (2) são clássicas pelo Teorema 3.1, $0 \leq u_{\lambda_i} \leq 1$ em Ω e assim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda_i}|^2 dx &= \lambda_i \int_{\partial\Omega} s(x) f(u_{\lambda_i}) u_{\lambda_i} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \lambda_i \|s\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|f\|_{L^\infty([0,1])} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Logo, $\{u_{\lambda_i}\}$ seria limitada em $H^1(\Omega)$ o que garantiria a existência de $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ e de uma subsequência, ainda denotada por $\{u_{\lambda_i}\}$, tal que quando $i \rightarrow \infty$

- $u_{\lambda_i} \rightarrow \tilde{u}$ em $H^1(\Omega)$,
- $u_{\lambda_i} \rightarrow \tilde{u}$ a.e. em Ω e $\partial\Omega$,
- $u_{\lambda_i} \rightarrow \tilde{u}$ em $L^2(\partial\Omega)$.

Considerando em $H^1(\Omega)$ a norma dada por $|u| := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}$, sendo os valores de fronteira compreendidos no sentido do traço, das convergências acima e da semicontinuidade inferior da norma em espaços de Banach, obteríamos

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(\partial\Omega)} = |\tilde{u}| &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} |u_{\lambda_i}| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} [\|\nabla u_{\lambda_i}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{\lambda_i}\|_{L^2(\partial\Omega)}] \\ &= \|\tilde{u}\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Então, $\|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} = 0$ e assim $0 \leq \tilde{u} \leq 1$ seria constante em Ω . Além disso, como u_{λ_i} seria solução de (2), teríamos

$$\int_{\partial\Omega} s(x) f(u_{\lambda_i}) d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

de modo que, por meio do Teorema da Convergência Dominada e lançando mão da hipótese $\int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \neq 0$, obteríamos $f(\tilde{u}) = 0$, ou seja, $\tilde{u} \equiv 0$ ou $\tilde{u} \equiv 1$.

Agora, para $p > n$, pela estimativa a priori de Amann, Teorema 1.12, existiria $C > 0$ tal

que

$$\begin{aligned} \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{W_p^1(\Omega)} &\leq C \left[\|\Delta(u_{\lambda_i} - \tilde{u})\|_{L^p(\Omega)} + \|\lambda_i s(\cdot) f(u_{\lambda_i}) + (u_{\lambda_i} - \tilde{u})\|_{L^p(\partial\Omega)} \right] \\ &\leq C \left[\lambda_i \|s(\cdot) f(u_{\lambda_i})\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{L^p(\partial\Omega)} \right] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_{\lambda_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \tilde{u} \quad \text{em } W_p^1(\Omega).$$

Pela estimativa L^p de Agmon, Douglis e Nirenberg, [2], e usando o Teorema do Traço e a Regra da Cadeia, mantendo-se a mesma notação para as constantes, as quais independem de i nas estimativas, seguiria que

$$\begin{aligned} \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{W_p^2(\Omega)} &\leq C \left[\|\lambda_i s(x) f(u_{\lambda_i})\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} + \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} \right] \\ &\leq C \left[\lambda_i \|f(u_{\lambda_i})\|_{W_p^1(\Omega)} + \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} \right] \\ &\leq C \left[\lambda_i \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{W_p^1(\Omega)} + \lambda_i \|f(u_{\lambda_i})\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{\lambda_i} - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} \right] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$u_{\lambda_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \tilde{u} \quad \text{em } W_p^2(\Omega), \quad p > n$$

e assim $(0, \tilde{u})$ seria ponto de bifurcação para as soluções de equilíbrio de (1) na topologia de $\mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$. Pelo Lema 4.1, concluiríamos que $u_{\lambda_i} \equiv \tilde{u}$ para todo i suficientemente grande, uma contradição. O teorema está provado. \square

4.2 Condição necessária para bifurcação dos equilíbrios triviais e a não-sobrejetividade do operador linearizado

É conhecido que uma condição necessária para que $\lambda > 0$ seja um ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio não-triviais de (1) com relação aos ramos triviais Γ_0 e Γ_1 , dados por (4.2), é que não sejam bijeções os operadores

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 0) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 1) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega),$$

dados por

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 0) \cdot v = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f'(0)v \right)$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 1) \cdot v = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f'(1)v \right)$$

respectivamente. No entanto, poderemos ser bem mais específicos: para que $\lambda > 0$ seja ponto de bifurcação com relação a Γ_0 ou Γ_1 é necessário que $\lambda > 0$ seja um autovalor do problema de Steklov (1.7), dado por

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda \omega(x)v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com pesos de fronteira $\omega(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$ e $\omega(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$, conforme o

Teorema 4.2 *Se $\lambda > 0$ é um ponto de bifurcação de soluções de equilíbrio não-triviais de (1) com relação ao ramo trivial Γ_0 (respect. Γ_1), então λ é um autovalor principal de (1.7) com $\omega(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$ (respect. $\omega(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$).*

Prova. Provaremos somente o caso de bifurcação com relação a Γ_0 , uma vez que aquele com relação a Γ_1 é análogo. Assim, se $\lambda > 0$ é um ponto de bifurcação com relação ao ramo Γ_0 , existe uma sequência $\{u_{\lambda_k}\}$ de soluções de (2) tais que $0 \leq u_{\lambda_k} \leq 1$ em Ω , $u_{\lambda_k} \not\equiv 0$, e satisfazendo

$$\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda \quad \text{e} \quad u_{\lambda_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

Considere a sequência

$$v_{\lambda_k} := \frac{u_{\lambda_k}}{\|u_{\lambda_k}\|_{L^2(\partial\Omega)}}$$

tal que $\|v_{\lambda_k}\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1$. Utilizando a formulação fraca de (2) temos, via Fórmula de Taylor, que para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_k} \cdot \nabla \varphi \, dx &= \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) f(u_{\lambda_k}) \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_{\lambda_k} \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) \rho_k u_{\lambda_k} \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo

$$\rho_k = \frac{1}{2} f''(\theta u_{\lambda_k}) u_{\lambda_k}, \quad \text{com } 0 < \theta < 1,$$

e assim $\rho_k = O(u_{\lambda_k})$. Multiplicando (4.4) por $1/\|v_{\lambda_k}\|_{L^2(\partial\Omega)}$, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\lambda_k} \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) v_{\lambda_k} \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) \rho_k v_{\lambda_k} \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (4.5)$$

Tomando $\varphi = v_{\lambda_k}$ como função teste em (4.5), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_{\lambda_k}|^2 dx &= \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) v_{\lambda_k}^2 d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda_k \int_{\partial\Omega} s(x) \rho_k v_{\lambda_k}^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \lambda_k M \|s\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

com a constante $M > 0$ dependendo somente de f . Assim, pela Desigualdade de Maz'ja, Teorema 1.8,

$$\int_{\Omega} v_{\lambda_k}^2 dx \leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla v_{\lambda_k}|^2 dx + \int_{\partial\Omega} v_{\lambda_k}^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right]$$

o que implica $\{v_{\lambda_k}\}$ limitada em $H^1(\Omega)$, de modo que existe $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ satisfazendo, quando $k \rightarrow \infty$,

- $v_{\lambda_k} \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$,
- $v_{\lambda_k} \rightarrow v_\lambda$ em $L^2(\partial\Omega)$,
- $v_{\lambda_k} \rightarrow v_\lambda$ a.e. em $\partial\Omega$.

Portanto, podemos passar ao limite em (4.5) e obter, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\int_{\Omega} \nabla v_\lambda \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\partial\Omega} f'(0) s(x) v_\lambda \varphi d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

ou seja, v_λ é uma solução fraca positiva do problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda f'(0) s(x) v & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e, portanto, autofunção principal de (1.7) com $\omega(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$. \square

Vimos na Seção 1.9, Teorema 1.26, que o problema de Steklov (1.7) possui um único autovalor principal positivo λ_0 , dado por (1.8), quando a média sobre $\partial\Omega$ do peso $\omega(\cdot)$ é negativa. Além disso, pelo Teorema 1.27, temos que o autovalor λ_0 tem multiplicidade geométrica um. Assim, devemos suspeitar que quando λ_0 é dado por (1.8) com $\omega(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$, λ_0 é um ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio não-triviais de (1) com relação a Γ_0 . De fato, tal suspeita é potencializada pois o operador

$$D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \quad p > n,$$

dado por

$$D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot v = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda_0 s(\cdot) f'(0) v \right),$$

sendo um operador de Fredholm de índice zero pelo Teorema 1.22, é então não-injetivo e não-sobrejetivo. Deste modo, o problema não-homogêneo

$$\begin{cases} \Delta v = \varphi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda_0 s(x) f'(0)v + \psi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

não admite solução para certas $\varphi \in L^p(\Omega)$ e $\psi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $p > n$. O próximo resultado permitirá maior especificidade, fornecendo uma classe de funções para a qual o problema (4.6) não possui solução.

Teorema 4.3 *O problema (4.6) não possui solução se $(\varphi, \psi) = (-\xi, \eta)$, sendo (ξ, η) qualquer elemento do conjunto*

$$\mathfrak{C} \doteq \left\{ (\xi, \eta) \in L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) : \xi \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega}), \eta \in C^{1,\theta}(\partial\Omega) \text{ e } 0 \neq \xi, \eta \geq 0 \right\}$$

com $0 < \theta < 1$ e $p > n$.

Prova. Suponha, por contradição, que v seja solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta v = -\xi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda_0 s(x) f'(0)v + \eta & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

para algum $(\xi, \eta) \in \mathfrak{C}$, ou seja, que v satisfaça

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) v \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega} \xi \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} \eta \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad (4.8)$$

para todo $\phi \in H^1(\Omega)$. Tomando $\phi = v^-$, a parte negativa de v , como função teste em (4.8), seu lado esquerdo se torna

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v^+ \cdot \nabla v^- \, dx - \int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 \, dx - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) v^+ v^- \, d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) (v^-)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ = - \int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) (v^-)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

pelo Corolário 1.1, de modo que (4.8) torna-se

$$\int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 \, dx - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) (v^-)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = - \int_{\Omega} \xi v^- \, dx - \int_{\partial\Omega} \eta v^- \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0$$

e assim

$$\int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 \, dx \leq \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) (v^-)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

No caso $v^- \neq 0$, segue da última desigualdade que v^- é admissível no conjunto que define λ_0 em (1.8), de forma que

$$\int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 dx \geq \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) (v^-)^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Logo, as duas últimas desigualdades implicam

$$\int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 dx = \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) (v^-)^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

ou seja, λ_0 é atingido em v^- e, assim, v^- é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v^- = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v^-}{\partial \nu} = \lambda_0 s(x) f'(0) v^- & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Por meio dos Teoremas 1.26 e 1.27, como v^- é suave por regularidade elíptica, podemos inferir que $v^- > 0$ em $\bar{\Omega}$, de modo que $v = -v^-$.

Segue, então, de (4.7) e (4.9) que

$$\xi \equiv 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \eta \equiv 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

uma contradição.

Agora, no caso $v^- \equiv 0$, temos $v = v^+$ e como argumentos de regularidade elíptica podem ser aplicados ao problema (4.7), obtemos $v > 0$ em Ω pelo princípio do máximo, e como $\eta \geq 0$ em $\partial\Omega$, $v > 0$ em $\bar{\Omega}$ pelo Lema de Hopf.

Assim, se v_0 é uma autofunção principal associada a λ_0 , tomando $v_0^2/v \in H^1(\Omega)$ como função teste em (4.8), pelo Lemma 1.4 temos

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{\Omega} \xi \frac{v_0^2}{v} dx + \int_{\partial\Omega} \eta \frac{v_0^2}{v} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \left(\frac{v_0^2}{v} \right) dx - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) v_0^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{v_0^2}{v} \right) \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} R(v_0, v) dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

novamente uma contradição. O teorema está provado. \square

4.3 Bifurcação das soluções de equilíbrio triviais

Quando $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, foi demonstrada no Teorema 4.1 a não-existência de soluções de equilíbrio não-triviais de (1). Desta forma, para todo $\lambda > 0$ pequeno, as únicas soluções do problema elíptico (2) que tomam valores no intervalo $[0, 1]$ são $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$.

Com relação ao ramo trivial Γ_1 , segue do Teorema 4.2 e do Teorema 1.26 que nenhum ramo de bifurcação pode emanar de Γ_1 em qualquer $\lambda > 0$. De fato, o problema linearizado em torno de $u \equiv 1$ associado a (2) é dado por

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda f'(1)s(x)v & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e é um caso particular de (1.7) com $\omega(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$. Como

$$\int_{\partial\Omega} f'(1)s(x) d\mathcal{H}^{n-1} > 0$$

pois $s(\cdot)$ tem média negativa sobre $\partial\Omega$ e $f'(1) < 0$ por hipótese, decorre diretamente dos Teoremas 4.2 e 1.26 que nenhum $\lambda > 0$ pode ser ponto de bifurcação de soluções de equilíbrio não-triviais de (1) com relação a Γ_1 .

Assim, no que diz respeito a bifurcação dos equilíbrios triviais, resta-nos analisar o ramo Γ_0 . A suspeita de que λ_0 dado por (1.8) com $\omega(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$ é um ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio não-triviais de (1) com relação a Γ_0 levantada na última seção, será nesta constatada.

Com efeito, o Teorema de Crandall-Rabinowitz sobre bifurcação de um autovalor simples, Teorema 1.17, nos fará capazes de provar que λ_0 é realmente um ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio não-triviais de (1) com relação a Γ_0 e nos fornecerá de forma explícita a curva consistindo de soluções não-triviais de (2) numa vizinhança de λ_0 . Este é o conteúdo do seguinte

Teorema 4.4 *O autovalor principal $\lambda_0 > 0$ é um ponto de bifurcação com relação a Γ_0 . Mais precisamente, numa vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$, $p > n$, as únicas soluções não-triviais do problema elíptico (2) estão numa curva de classe C^2*

$$\mathcal{C} = \left\{ (\lambda(r), u(r)) : r \in \tilde{\mathcal{I}} \subset \mathbb{R} \right\}$$

sendo

$$u(r) := ru_0 + r\rho(r),$$

u_0 um gerador de $\ker (D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))$, $\tilde{\mathcal{I}}$ um intervalo aberto contendo 0 e

$$\lambda : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow W_p^2(\Omega)$$

funções de classe C^2 tais que $\lambda(0) = \lambda_0$ e $\rho(0) = 0$. Além disso, a função $u(r)$ é a única solução de equilíbrio não-trivial de (1) com $\lambda = \lambda(r)$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno.

Prova. Verificaremos as hipóteses (i) – (iii) do Teorema 1.17. Note que sob as hipóteses de crescimento e suavidade satisfeitas por f e $s(\cdot)$, a aplicação não-linear

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

com $p > n$, dada por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = \left(\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f(u) \right)$$

é de classe C^3 no sentido de Fréchet.

Inicialmente, o fato de 0 ser uma solução de equilíbrio de (1) para todo $\lambda > 0$ prova (i). Para provarmos (ii), como o operador $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $p > n$, é dado por

$$D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot v = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda_0 s(\cdot) f'(0)v \right),$$

pelo Teorema 1.22 temos que $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ é um operador de Fredholm de índice zero, de modo que

$$\dim \ker (D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)) = \dim \left(L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) / R(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)) \right).$$

Agora, como pelo Teorema 1.27

$$\dim \ker (D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)) = 1$$

(ii) está provado. Para provarmos a condição de transversalidade (iii), isto é, para provarmos que

$$D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot u_0 \notin R(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))$$

sendo u_0 gerador de $\ker (D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))$, suponha-a falsa. Então, como

$$D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot u_0 = (0, -s(\cdot) f'(0) u_0)$$

temos a existência uma solução $v \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$, do problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda_0 s(x) f'(0) v = -s(x) f'(0) u_0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que u_0 satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \lambda_0 s(x) f'(0) u_0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.10)$$

de forma que pela Fórmula de Green temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u_0 \Delta v \, dx - \int_{\Omega} v \Delta u_0 \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0 v \, d\mathcal{H}^{n-1} - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0 v \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

e se multiplicarmos a primeira equação de (4.10) por u_0 e integramos por partes, obteremos

$$\int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx > 0$$

uma contradição, provando (iii).

Logo, pelo Teorema 1.17, existem um intervalo aberto $\tilde{\mathcal{I}}$ contendo 0 e funções de classe C^2

$$\lambda : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow W_p^2(\Omega)$$

satisfazendo $\lambda(0) = \lambda_0$, $\rho(0) = 0$ e tais que, numa vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$, $p > n$, as únicas soluções não-triviais do problema elíptico (2), a priori em $W_p^2(\Omega)$ mas clássicas pelo Teorema 3.1, têm a forma

$$u(r) := r u_0 + r \rho(r),$$

com $r \in \tilde{\mathcal{I}}$ e $\lambda = \lambda(r)$.

Para concluirmos a demonstração, como $W_p^2(\Omega)$ está compactamente imerso em $C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$

quando $p > n$ para $0 < \theta < 1 - n/p$, temos

$$\|u(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

e

$$\|\rho(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Portanto, uma vez que a autofunção suave u_0 satisfazendo (4.10) pode ser tomada positiva em $\bar{\Omega}$ pelo Teorema 1.26, além de “suficientemente pequena”, obtemos

$$0 \leq u(r) \leq 1 \quad \text{em } \bar{\Omega}$$

para todo r adequadamente pequeno, de modo que $u(r)$ é a única solução de equilíbrio não-trivial de (1) com $\lambda = \lambda(r)$, e o teorema está provado. \square

Observação 4.1 *Decorre diretamente do Teorema 4.2 e do Teorema 1.26 que λ_0 é o único ponto de bifurcação das soluções de equilíbrio de (1) com relação a Γ_0 .*

Precisaremos o tipo de bifurcação com relação a Γ_0 ocorrendo em λ_0 assumindo a seguinte hipótese sobre a concavidade de f

$$(H-4) \quad f''(u) < 0 \quad \text{em } [0, 1].$$

É importante do ponto de vista de estabilidade, conforme será visto no Capítulo 5, conhecer-se o sinal de $\dot{\lambda}(0)$ ($\dot{\cdot} = d/dr$) ou das derivadas de ordens superiores em $r = 0$ da curva $\lambda(r)$ dada no Teorema 4.4 passando por λ_0 , pois ele indica o tipo de bifurcação em questão. Por exemplo, dizemos que a bifurcação ocorrendo em λ_0 é **transcrítica** se $\dot{\lambda}(0) \neq 0$. Veremos ser este o tipo de bifurcação com relação a Γ_0 em λ_0 quando (H-4) é assumida no seguinte

Teorema 4.5 *A bifurcação ocorrendo em λ_0 é transcrítica quando (H-4) é satisfeita. Precisamente, temos*

$$\dot{\lambda}(0) > 0.$$

Prova. Pelo Teorema 4.4 temos que para todo $r \in \tilde{\mathcal{I}}$

$$\begin{cases} \Delta u(r) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u(r)}{\partial \nu} = \lambda(r)s(x)f(u(r)) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com $u(r) = ru_0 + r\rho(r)$. Aplicando d/dr ($= \dot{\cdot}$) nas equações acima, pela Regra da Cadeia obtemos

$$\begin{cases} \Delta(\rho(r) + r\dot{\rho}(r)) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(u_0 + \rho(r) + r\dot{\rho}(r)) = \dot{\lambda}(r)s(x)f(u(r)) + \lambda(r)s(x)f'(u(r))\dot{u}(r) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para todo $r \in \tilde{\mathcal{I}}$. Diferenciando, novamente com relação r , as equações do problema anterior em $r = 0$ e lançando mão do fato que $\dot{u}(0) = u_0$ e $\ddot{u}(0) = 2\dot{\rho}(0)$, temos

$$\begin{cases} \Delta\dot{\rho}(0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\dot{\rho}(0)}{\partial \nu} = \dot{\lambda}(0)s(x)f'(0)u_0 + \frac{\lambda_0}{2}s(x)f''(0)u_0^2 + \lambda_0s(x)f'(0)\dot{\rho}(0) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, como u_0 é solução de (4.10), por meio da Fórmula de Green segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Delta\dot{\rho}(0) u_0 \, dx - \int_{\Omega} \dot{\rho}(0) \Delta u_0 \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial\dot{\rho}(0)}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \dot{\rho}(0) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} \lambda_0 s(x) f'(0) u_0 \dot{\rho}(0) \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \dot{\lambda}(0) s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \frac{\lambda_0}{2} s(x) f''(0) u_0^3 \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \lambda_0 s(x) f'(0) u_0 \dot{\rho}(0) \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \dot{\lambda}(0) s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \frac{\lambda_0}{2} s(x) f''(0) u_0^3 \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{\lambda}(0) \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \frac{\lambda_0}{2} s(x) f''(0) u_0^3 \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

e como decorre de (4.10) que

$$\int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) u_0^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx,$$

obtemos

$$\dot{\lambda}(0) = - \frac{\lambda_0^2 f''(0)}{2} \frac{\int_{\partial\Omega} s(x) u_0^3 \, d\mathcal{H}^{n-1}}{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx}.$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (4.10) por u_0^2 e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} s(x) u_0^3 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{2}{\lambda_0 f'(0)} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 u_0 \, dx > 0.$$

Logo, quando (H-4) é válida concluímos que

$$\dot{\lambda}(0) > 0$$

de modo que a bifurcação ocorrendo em λ_0 é transcítica. \square

4.4 Injetividade da linearização em torno de equilíbrios não-triviais

Nesta seção estabeleceremos um resultado que será fundamental na compreensão da estrutura do conjunto das soluções de equilíbrio de (1) conforme $\lambda > 0$ varie. Ele será ingrediente chave para aplicarmos o Teorema da Função Implícita numa vizinhança de uma solução de equilíbrio não-trivial de (1) quando (H-4) é satisfeita.

O resultado referido acima é o seguinte

Teorema 4.6 (Injetividade do Operador Linearizado) *Assuma válida (H-4) e seja u_λ uma solução de equilíbrio não-trivial de (1) com $\lambda > 0$. Então, a derivada parcial*

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

com $p > n$, dada por

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda) \cdot v = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda s(\cdot) f'(u_\lambda) v \right)$$

é uma aplicação injetiva.

Prova. Primeiramente, decorre do princípio do máximo que

$$u_\lambda > 0 \quad \text{e} \quad 1 - u_\lambda > 0 \quad \text{em} \quad \bar{\Omega}.$$

De fato, suponha que exista $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $u_\lambda(x_0) = 0$. Então, como u_λ é solução clássica de

$$\begin{cases} \Delta u_\lambda = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \lambda s(x) f(u_\lambda) & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

pelo Teorema 3.1, não-constante e tal que $u_\lambda \in \mathfrak{X}$ por hipótese, o princípio do máximo elíptico implica que $x_0 \in \partial\Omega$ e o Lema de Hopf que

$$0 > \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0) = \lambda s(x_0) f(u_\lambda(x_0)) = \lambda s(x_0) f(0) = 0,$$

uma contradição. Logo, $u_\lambda > 0$ em $\bar{\Omega}$ e, de forma análoga, podemos mostrar que $u_\lambda < 1$ em $\bar{\Omega}$. Assim,

$$f(u_\lambda) > 0 \quad \text{em} \quad \bar{\Omega}.$$

Suponha, por contradição, que o operador $D_u \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)$ não seja injetivo. Então, existe uma solução $0 \neq \psi \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$, do problema

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \lambda s(x) f'(u_\lambda) \psi & \text{em} \quad \partial \Omega, \end{cases}$$

a qual é suave por regularidade elíptica. Considere a função suave

$$\zeta : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\zeta(x) := \frac{\psi(x)}{f(u_\lambda(x))}.$$

Cálculos diretos mostram que ζ é solução do seguinte problema de Neumann homogêneo

$$\begin{cases} \Delta \zeta + \sum_{i=1}^n \left(2 \frac{f'(u_\lambda)}{f(u_\lambda)} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{f''(u_\lambda) |\nabla u_\lambda|^2}{f(u_\lambda)} \zeta = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0 & \text{em} \quad \partial \Omega. \end{cases} \quad (4.11)$$

Note que a hipótese (H-4) garante que o coeficiente do termo de ordem zero da primeira equação de (4.11) é negativo, de forma que, pelo princípio do máximo e pelo Lema de Hopf, o máximo de ζ ocorreria num ponto de $\partial \Omega$ tal que $\partial \zeta / \partial \nu > 0$ se ζ não fosse constante. Assim, ζ tem de ser constante, de fato zero por causa da primeira equação de (4.11), e então (4.11) implica

$$f''(u_\lambda) |\nabla u_\lambda|^2 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

o que é equivalente a

$$\nabla(f'(u_\lambda(x))) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Logo, $f'(u_\lambda)$ é constante em Ω forçando u_λ a ser constante em $\bar{\Omega}$, pois f' é decrescente no intervalo $[0, 1]$ por (H-4). Com isso, concluímos que

$$\lambda s(\cdot) f(u_\lambda) \Big|_{\partial \Omega} \equiv 0,$$

uma contradição, uma vez que $s(\cdot)$ muda de sinal em $\partial \Omega$. \square

4.5 Conseqüências da injetividade do operador linearizado

A injetividade do operador linearizado em torno de uma solução de equilíbrio não-trivial de (1) provada na última seção é um dos principais ingredientes para aplicar-se o Teorema da Função Implícita, ferramenta capaz de caracterizar localmente o conjunto solução de uma determinada equação. Nesta seção derivaremos algumas conseqüências do Teorema 4.6 que fornecerão globalmente a estrutura do conjunto solução de (2) em \mathfrak{X} para todo $\lambda > 0$.

Um conseqüência imediata do Teorema 4.6 e do Teorema da Função Implícita é o seguinte resultado.

Corolário 4.1 *Não há bifurcação secundária de soluções de equilíbrio não-triviais de (1).*

Também é possível inferir quão pequeno $\lambda > 0$ deve ser de forma que o problema (1) não possua soluções de equilíbrio não-triviais. Ou seja, é possível otimizar o Teorema 4.1, conforme o

Corolário 4.2 *O Teorema 4.1 é válido para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$.*

Prova. Observe que é suficiente provarmos o teorema para $0 < \lambda < \lambda_0$.

Suponha, por contradição, que exista $0 < \tilde{\lambda} < \lambda_0$ tal que $u_{\tilde{\lambda}}$ seja solução de equilíbrio não-constante de (1), ou seja,

$$\mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}}) = 0$$

e $u_{\tilde{\lambda}} \in \mathfrak{X}$ é tal que $u \neq 0$ e $u \neq 1$, sendo \mathcal{F} dada por (4.1) e \mathfrak{X} dado por (2.1).

Pelo Teorema 4.6, o operador

$$D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}}) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

$p > n$, dado por

$$D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}}) \cdot v = \left(\Delta v, \frac{\partial v}{\partial \nu} - \tilde{\lambda} s(\cdot) f'(u_{\tilde{\lambda}}) v \right)$$

é injetivo. Agora, segue do Teorema 1.22 que $D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})$ é um operador de Fredholm de índice zero, de forma que

$$\dim \ker (D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})) = \dim \left(L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) / R(D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})) \right).$$

Assim,

$$\dim \left(L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) / R(D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})) \right) = 0$$

isto é,

$$R(D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})) = L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

e temos provada a sobrejetividade do operador $D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})$.

Logo, o operador $D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})$ é uma bijeção de modo que, pelo Teorema da Função

Implícita, Teorema 1.16, podemos providenciar um intervalo \mathcal{I} contendo $\tilde{\lambda}$ e soluções $u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$, da equação

$$\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda) = 0$$

tais que $u_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) = u_{\tilde{\lambda}}$. (Nos permitimos aqui um abuso de notação ao denotarmos a curva de soluções da equação anterior que aplica o intervalo \mathcal{I} em $W_p^2(\Omega)$ também por $u_{\tilde{\lambda}}$).

AFIRMAÇÃO. Para todo λ suficientemente próximo de $\tilde{\lambda}$, tem-se

$$0 < u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) < 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

De fato, segue do princípio do máximo elíptico, como feito no início da demonstração do Teorema 4.6, que

$$0 < u_{\tilde{\lambda}} < 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

Agora, como as soluções $u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$ de (4.1) produzidas pelo Teorema da Função Implícita satisfazem

$$\|u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) - u_{\tilde{\lambda}}\|_{W_p^2(\Omega)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} 0,$$

tendo em vista a imersão $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ com $0 < \theta < 1 - n/p$, válida para $p > n$, obtemos

$$\|u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) - u_{\tilde{\lambda}}\|_{C^{1,\theta}(\overline{\Omega})} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} 0$$

e, em particular, segue que

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)(x) - u_{\tilde{\lambda}}(x)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} 0.$$

Assim, dado

$$0 < \varepsilon \leq \min \left\{ \inf_{x \in \overline{\Omega}} u_{\tilde{\lambda}}(x), 1 - \sup_{x \in \overline{\Omega}} u_{\tilde{\lambda}}(x) \right\},$$

existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |\lambda - \tilde{\lambda}| < \delta$ tem-se

$$u_{\tilde{\lambda}}(x) - \varepsilon < u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)(x) < u_{\tilde{\lambda}}(x) + \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

de forma que

$$0 < u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) < 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}, \quad \forall \lambda \in (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta),$$

o que prova a afirmação.

Logo, para todo λ pertencente ao intervalo $\tilde{\mathcal{I}} \doteq (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta)$, a função $u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$ é solução de equilíbrio de (1), a qual é não-constante pela Observação 4.1.

Tomando $\{\sigma_i\} \subset \tilde{\mathcal{I}}$ convergindo para $\tilde{\lambda} - \delta$ e considerando as correspondentes soluções de equilíbrio $u_{\tilde{\lambda}}(\sigma_i)$ de (1), argumentando como no Teorema 4.1 podemos provar que a

sequência $\{u_{\tilde{\lambda}}(\sigma_i)\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$. Assim, existe $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ verificando quando $i \rightarrow \infty$

- $u_{\tilde{\lambda}}(\sigma_i) \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\Omega)$,
- $u_{\tilde{\lambda}}(\sigma_i) \rightarrow \tilde{u}$ a.e. em Ω e $\partial\Omega$.

As convergências acima implicam $\tilde{u} \in \mathfrak{X}$ solução fraca de (2) com $\lambda = \tilde{\lambda} - \delta$, a qual é não constante por causa da Observação 4.1. Desta forma, toda a argumentação acima pode ser aplicada a partir de \tilde{u} .

Por indução, poderíamos construir então uma sequência $\{u_{\lambda_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de soluções de equilíbrio não-constantes de (1), com $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$, tal que

$$\lambda_j \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad j \rightarrow \infty,$$

contradizendo o Teorema 4.1. \square

Com os resultados anteriores podemos provar a unicidade das soluções de equilíbrio de (1) para cada $\lambda > \lambda_0$ estendendo, via Teorema da Função Implícita, a curva local \mathcal{C} dada no Teorema 4.4.

Teorema 4.7 *Para cada $\lambda > \lambda_0$ o problema (1) possui uma única solução de equilíbrio não-trivial.*

Prova. Como $\dot{\lambda}(0) > 0$ pelo Teorema 4.5, escolha um intervalo $(0, \bar{r})$ com $\bar{r} > 0$ pequeno e tome uma sequência $r_j \rightarrow \bar{r}$ tal que

$$\lambda(r_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda_1 := \sup \{ \lambda(r) : r \in (0, \bar{r}) \} > \lambda_0.$$

Considerando a sequência de soluções de (2) correspondente $\{u(r_j)\} \subset \mathfrak{X}$, pode ser provado como no Teorema 4.1 que $\{u(r_j)\}$ converge fracamente em $H^1(\Omega)$ e fortemente em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$ para uma solução fraca $u_1 \in \mathfrak{X}$ de (2), a qual é não-constante pela Observação 4.1 e regular pelo Teorema 3.1.

Logo, procedendo como no Corolário 4.2, segue do Teorema 4.6 e do Teorema da Função Implícita, Teorema 1.16, a existência de um intervalo aberto (a_1, b_1) contendo λ_1 e de uma função $\Theta : (a_1, b_1) \rightarrow W_p^2(\Omega)$, $p > n$, de classe C^3 com $\Theta(\lambda_1) = u_1$ e tal que $\Theta(\lambda)$ resolve (2) para todo $\lambda \in (a_1, b_1)$. Diminuindo o intervalo (a_1, b_1) se necessário, podemos mostrar como no Corolário 4.2 que $\Theta(\lambda) \in \mathfrak{X}$, sendo assim solução de equilíbrio não-trivial de (1) qualquer que seja $\lambda \in (a_1, b_1)$.

A convergência da sequência de soluções de (2) acima pode ser consideravelmente melhorada utilizando-se as estimativas a priori de Amann e de Agmon, Douglis e Nirenberg como no Teorema 4.1, obtendo-se

$$u(r_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_1 \quad \text{em} \quad W_p^2(\Omega), \quad p > n.$$

Assim, por unicidade, $\Theta(\lambda(r)) = u(r)$ para todo $r < \bar{r}$ suficientemente próximo de \bar{r} , mas com argumentação semelhante a do Corolário 4.2, a função Θ pode ser estendida de forma que

$$\Theta(\lambda(r)) = u(r), \quad \forall r \in (0, \bar{r}) \quad (4.12)$$

ou seja, a curva local \mathcal{C} e o gráfico de Θ coincidem próximo de λ_0 .

Também pode ser mostrado que $\Theta(b_1)$ é solução de equilíbrio não-trivial de (1) de modo que, indutivamente, o Teorema 4.6 e o Teorema da Função Implícita permitem estender-se a função Θ ao intervalo (λ_0, ∞) .

Para concluirmos a prova, resta mostrarmos que toda solução de equilíbrio não-trivial de (1) pertence ao gráfico da função estendida $\Theta : (\lambda_0, \infty) \rightarrow W_p^2(\Omega)$, $p > n$, que é a extensão da curva \mathcal{C} . Quando λ está próximo de λ_0 , esta tese decorre de (4.12) e da unicidade local de \mathcal{C} providenciada pelo Teorema 4.4.

Suponha então a existência de $\tilde{\lambda} \gg \lambda_0$ tal que $u_{\tilde{\lambda}} \notin \mathcal{C}$ seja solução de equilíbrio não-trivial de (1). Pelo Teorema 4.6 e o Teorema da Função Implícita existem um intervalo aberto $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$ contendo $\tilde{\lambda}$ e uma função $\Upsilon : (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1) \rightarrow W_p^2(\Omega)$, $p > n$, tal que $\Upsilon(\tilde{\lambda}) = u_{\tilde{\lambda}}$, $\Upsilon(\lambda) \in \mathfrak{X}$ é solução de equilíbrio não-trivial de (1) e satisfaz

$$\Upsilon(\lambda) \neq \Theta(\lambda), \quad \forall \lambda \in (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1).$$

Argumentando como acima, podemos estender Υ mantendo válida a última relação para todo $\lambda > \lambda_0$ por causa do Corolário 4.1 e dos Teoremas 4.2 e 1.26, mas por (4.12) e pela unicidade de \mathcal{C} numa vizinhança de λ_0 isto é impossível. \square

Decorre da demonstração do Teorema 4.7 que a bifurcação ocorrendo em $(\lambda_0, 0)$ com relação ao ramo trivial Γ_0 , sendo λ_0 dado por (1.8) com $\omega(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$, não é apenas um fenômeno local, mas global. Com efeito, foi provado que as soluções de equilíbrio não-triviais de (1) formam não somente um contínuo que encontra o infinito no sentido de [58] mas uma curva suave ilimitada em $(\lambda_0, +\infty) \times [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}]$, $p > n$. Assim, foi provado também o seguinte resultado.

Teorema 4.8 *O autovalor principal λ_0 de (1.7) é um ponto de bifurcação global com relação a Γ_0 . Além disso, a aplicação*

$$(\lambda_0, +\infty) \ni \lambda \mapsto u_\lambda \in [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}], \quad p > n$$

que associa a cada $\lambda > \lambda_0$ a correspondente solução de equilíbrio não-trivial de (1) é três vezes continuamente diferenciável no sentido de Fréchet.

Organizando as informações obtidas, uma inferência sobre a estabilidade (cf. Definição 2.1) do ramo global bifurcando de $(\lambda_0, 0)$ pode ser feita no

Corolário 4.3 *A solução de equilíbrio não-trivial u_λ de (1) é assintoticamente estável para todo $\lambda > \lambda_0$.*

Prova. Temos que o conjunto dos equilíbrios de (1) é $\{0, u_\lambda, 1\}$ para cada $\lambda > \lambda_0$ e que u_λ minimiza (globalmente) $\mathcal{J}_\lambda|_{\mathfrak{X}}$ e tem energia menor do que as de $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$. Como o sistema dinâmico gerado por (1) é gradiente e u_λ é isolado para todo $\lambda > \lambda_0$, o resultado segue. \square

Observação 4.2 *Embora tenhamos provado a estabilidade assintótica (local) do ramo global emanando de $(\lambda_0, 0)$, seremos capazes de provar, no próximo capítulo, uma propriedade ainda mais forte a respeito de tal ramo, a saber, a estabilidade exponencial de cada um de seus pontos.*

Estabilidade das soluções de equilíbrio

Estudaremos neste capítulo as propriedades de estabilidade das soluções de equilíbrio de (1). Os métodos utilizados são o princípio da estabilidade linearizada e o princípio da transferência da estabilidade, os quais fornecem estabilidade ou instabilidade no sentido de Lyapunov, quando aplicáveis.

É conhecido que ao problema (1) está associado um princípio de estabilidade linearizada (veja, por exemplo, [24, 40, 31, 62, 50]). Assim, a estabilidade ou instabilidade, no sentido de Lyapunov, de uma solução de equilíbrio u_λ de (1) pode ser inferida conforme o espectro do problema de autovalores associado à linearização de (2) em torno de u_λ , dado por

$$\begin{cases} \Delta v = \mu v & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda s(x) f'(u_\lambda) v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

esteja no semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, quando o equilíbrio u_λ for estável, ou intercepte o semiplano complexo $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, quando o equilíbrio u_λ for instável. Se o espectro de (5.1) estiver contido em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a\}$ para algum $a < 0$, o equilíbrio u_λ será exponencialmente estável (cf. Definição 2.1). Na situação em que o espectro do problema linearizado em torno de um equilíbrio está contido em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ e zero é autovalor, temos o caso crítico de estabilidade sobre o qual não há inferência direta e que requer, portanto, uma análise particular.

Observe que o espectro do problema acima é da forma $\{\mu_k\}$, constituído por autovalores, todos reais, além de ser enumerável possuindo somente $-\infty$ como ponto de acumulação e apresentar um primeiro autovalor, o qual é o maior autovalor do espectro. Estas propriedades espectrais são verificadas por estarmos lidando com autovalores do Laplaciano com condição de fronteira de tipo Robin (para detalhes adicionais, veja [21, 24, 55, 72]).

Logo, para inferirmos sobre a estabilidade ou instabilidade das soluções de equilíbrio de (1) precisamos localizar o primeiro autovalor do espectro de (5.1). Este será nosso objetivo principal ao longo de todo este capítulo.

5.1 Estabilidade dos equilíbrios triviais

Para determinarmos as propriedades de estabilidade dos equilíbrios triviais de (1) devemos estudar os espectros dos problemas de autovalores

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = \mu v \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda s(x) f'(0) v \quad \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta v = \gamma v \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda s(x) f'(1) v \quad \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

associados à linearização de (2) em torno de $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$, respectivamente. A análise da estabilidade dos equilíbrios triviais é feita no seguinte

Teorema 5.1 *Com relação as soluções de equilíbrio triviais de (1), temos*

- (i) *Para $0 < \lambda < \lambda_0$, a solução $u \equiv 0$ é exponencialmente estável.*
- (ii) *Para $\lambda > \lambda_0$, a solução $u \equiv 0$ é instável.*
- (iii) *Para todo $\lambda > 0$, a solução $u \equiv 1$ é instável.*

Prova. Sabemos que o primeiro autovalor $\mu_1(\lambda)$ da linearização de (2) em torno de $u \equiv 0$ é dado por

$$\mu_1(\lambda) = \sup_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{- \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) v^2 d\mathcal{H}^{n-1}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\} \quad (5.2)$$

e satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = \mu_1(\lambda) \varphi \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \lambda s(x) f'(0) \varphi \quad \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

sendo $\varphi > 0$ em $\bar{\Omega}$ uma função suave, não-constante, que pode ser escolhida normalizada de forma que $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Se $\int_{\partial\Omega} s(x) \varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0$, via integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= \int_{\Omega} \Delta \varphi \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x) f'(0) \varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq - \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx < 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\int_{\partial\Omega} s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0$ temos que φ é admissível no conjunto que define λ_0 em (1.8) (com $\omega(\cdot) = s(\cdot)f'(0)$), de modo que

$$-\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx \leq -\lambda_0 f'(0) \int_{\partial\Omega} s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

e assim

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= \int_{\Omega} \Delta\varphi \varphi dx \\ &= -\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)f'(0)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq (\lambda - \lambda_0)f'(0) \int_{\partial\Omega} s(x)\varphi^2 d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, para cada $0 < \lambda < \lambda_0$ temos $\mu_1(\lambda) < 0$, de forma que $u \equiv 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável de (1), provando (i).

Agora, como pelo Teorema 1.26 λ_0 é atingido por uma função suave, digamos ψ , a qual pode ser normalizada com $\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$ e satisfaz

$$\int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx = \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x)f'(0)\psi^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

segue da caracterização variacional de $\mu_1(\lambda)$ acima que para cada $\lambda > \lambda_0$

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &\geq -\int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)f'(0)\psi^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= (\lambda - \lambda_0) \int_{\partial\Omega} s(x)f'(0)\psi^2 d\mathcal{H}^{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Assim, $\mu_1(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$ o que implica $u \equiv 0$ solução de equilíbrio instável de (1) quando $\lambda > \lambda_0$, provando (ii).

A instabilidade de $u \equiv 1$ para todo $\lambda > 0$ segue pois, como $f'(1) < 0$ e $\int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} < 0$, tem-se

$$-\int_{\Omega} |\nabla 1|^2 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)f'(1) d\mathcal{H}^{n-1} > 0 \quad \forall \lambda > 0$$

de modo que o primeiro autovalor da linearização de (2) em torno de $u \equiv 1$ é positivo qualquer que seja $\lambda > 0$, provando (iii). \square

Uma vez que o princípio da estabilidade linearizada não se aplica diretamente a $u \equiv 0$ no caso crítico $\lambda = \lambda_0$ pois $\ker(D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0))$ é 1-dimensional, precisamos de outro argumento para inferirmos sobre a estabilidade do equilíbrio $u \equiv 0$ quando $\lambda = \lambda_0$. Faremos uma análise baseada no funcional energia e na simplicidade do primeiro autovalor

do espectro do problema linearizado em torno de $u \equiv 0$ correspondentes a (2), utilizando o Teorema 2.1 de [25].

Teorema 5.2 *A solução de equilíbrio $u \equiv 0$ de (1) é estável quando $\lambda = \lambda_0$.*

Prova. Vimos no Capítulo 2 que (1) gera um sistema dinâmico não-linear no espaço de fase \mathfrak{X} definido por (2.1). Além disso, sabemos que a restrição a \mathfrak{X} do funcional $\mathcal{J}_\lambda : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda_0 \int_{\partial\Omega} s(x) F(u) d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo $F(u) = \int_0^u f(\tau) d\tau$, é uma função de Lyapunov para o sistema dinâmico acima mencionado. Como observado anteriormente, ao problema (1) também está associado um princípio de estabilidade linearizada.

Quando $\lambda = \lambda_0$ segue dos Teoremas 1.26 e 1.27 que o primeiro autovalor $\mu_1(\lambda_0)$, dado por (5.2), do espectro do problema linearizado em torno de $u \equiv 0$ é tal que $\mu_1(\lambda_0) \geq 0$. Porém, como a aplicação

$$\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$$

é contínua, [20], e $\mu_1(\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ pelo Teorema 5.1, obtemos $\mu_1(\lambda_0) \leq 0$, ou seja, $\mu_1(\lambda_0) = 0$. Note também que $\mu_1(\lambda_0) = 0$ é algebricamente simples pelo Teorema 1.27. Logo, todas as hipóteses do Teorema 2.1 de [25] estão satisfeitas (veja também a discussão feita na Seção 3 de [25]).

A conclusão que $u \equiv 0$ é um equilíbrio estável de (1) decorre do fato de $u \equiv 0$ ser mínimo (global) do funcional $\mathcal{J}_{\lambda_0}|_{\mathfrak{X}}$.

De fato, seguindo os Passos 1 e 2 da demonstração do Teorema 2.2 podemos encontrar um mínimo (global) u_{λ_0} do funcional $\mathcal{J}_{\lambda_0}|_{\mathfrak{X}}$, o qual é ponto crítico de \mathcal{J}_{λ_0} (em $H^1(\Omega)$). Se $u_{\lambda_0} \neq 0$ e $u_{\lambda_0} \neq 1$ teríamos uma solução de equilíbrio não-trivial de (1) para $\lambda = \lambda_0$, contrariando o Corolário 4.2.

Portanto, $u_{\lambda_0} \equiv 0$ pois

$$\mathcal{J}_{\lambda_0}(0) = 0 < -\lambda_0 \left[\int_0^1 f(\tau) d\tau \right] \int_{\partial\Omega} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{J}_{\lambda_0}(1)$$

de forma que $u \equiv 0$ é um equilíbrio estável de (1). \square

5.2 Estabilidade das soluções bifurcadas

Foi possível estabelecer no Capítulo 4, Corolário 4.3, a estabilidade assintótica do ramo global bifurcando de $(\lambda_0, 0)$. Assim, localmente, qualquer solução do problema parabólico

(1) começando próxima do equilíbrio não-trivial u_λ bifurcado de $(\lambda_0, 0)$ decai para u_λ quando o tempo é grande, para cada $\lambda > \lambda_0$. Porém, seremos capazes de provar, nesta seção, um resultado ainda mais forte: o decaimento é rápido, de ordem exponencial. Ou seja, provaremos que qualquer equilíbrio não-trivial de (1) pertencente ao ramo global emanando de $(\lambda_0, 0)$ é exponencialmente estável (cf. Definição 2.1). Para alcançarmos tal objetivo, utilizaremos o princípio da transferência de estabilidade, Teorema 1.19, devido a Crandall-Rabinowitz [28]. Tal método consiste basicamente na inferência da estabilidade dos equilíbrios não-trivias sobre a curva local que emana do autovalor simples produzida pelo Teorema 1.17, de certa forma, por meio de sua geometria. A partir desta análise local, infere-se então sobre a estabilidade do ramo global bifurcando de $(\lambda_0, 0)$.

Tendo em vista os problemas de autovalores que surgem na análise da estabilidade linearizada, consideremos o operador compacto

$$\mathcal{K} : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \quad p > n,$$

dado por $\mathcal{K}(u) := (u, 0)$. Este operador está relacionado com o operador $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ da seguinte forma.

Lema 5.1 *Zero é um autovalor \mathcal{K} -simples de $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$.*

Prova. A primeira parte da Definição 1.5 foi verificada na prova do Teorema 4.4, quando foi provado que 0 é um autovalor $D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ -simples de $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$.

Para provarmos a condição de transversalidade dada na segunda parte da Definição 1.5, suponha-a falsa, isto é, suponha que $\mathcal{K}x_0 \in R(D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0))$ para algum gerador x_0 de $\ker(D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0))$. Então, existe $\xi \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$, tal que

$$\begin{cases} \Delta\xi = x_0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\xi}{\partial\nu} = \lambda_0 s(x)f'(0)\xi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, como x_0 é solução de (4.10), pela fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x_0^2 dx &= \int_{\Omega} x_0 \Delta\xi dx \\ &= \int_{\Omega} x_0 \Delta\xi dx - \int_{\Omega} \xi \Delta x_0 dx \\ &= \int_{\partial\Omega} x_0 \frac{\partial\xi}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \xi \frac{\partial x_0}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} \lambda_0 x_0 s(x)f'(0)\xi d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \lambda_0 \xi s(x)f'(0)x_0 d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

de modo que $x_0 = 0$ a.e. em Ω , uma contradição, provando o lema. \square

Como consequência do lema anterior, visto que \mathcal{F} é de classe C^3 , temos pelo Teorema 1.18 e pela Observação 1.3 a existência de $\epsilon, \delta > 0$ e de funções de classe C^2

$$\begin{aligned} \gamma : (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}, & z : (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) &\longrightarrow W_p^2(\Omega) \\ \mu : (-\delta, \delta) &\longrightarrow \mathbb{R}, & w : (-\delta, \delta) &\longrightarrow W_p^2(\Omega), \end{aligned}$$

com $p > n$, satisfazendo

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 0) \cdot z(\lambda) = \gamma(\lambda) \mathcal{K}(z(\lambda)), \quad \forall \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \quad (5.3)$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) \cdot w(r) = \mu(r) \mathcal{K}(w(r)), \quad \forall r \in (-\delta, \delta) \quad (5.4)$$

e tais que

$$\gamma(\lambda_0) = 0 = \mu(0), \quad z(\lambda_0) = u_0 = w(0) \quad (5.5)$$

sendo u_0 e as funções $\lambda(r), u(r)$ como no Teorema 4.4.

Além disso, pelo Teorema 1.19, as funções $\mu(r)$ e $-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)$ têm os mesmos zeros para todo r suficientemente pequeno e o mesmo sinal quando $\mu(r) \neq 0$, além de verificarem a relação

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \mu(r) \neq 0}} \frac{-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)}{\mu(r)} = 1 \quad (5.6)$$

sendo $d/dr = \dot{}$, $d/d\lambda = \prime$.

De posse da relação (5.6), para conhecermos o sinal de $\mu(r)$ para $r \simeq 0$ precisamos determinar apenas o sinal de $\gamma'(\lambda_0)$, o que faz sentido porque $\gamma'(\lambda_0) \neq 0$ pelo Teorema 1.19, pois sabemos que $\dot{\lambda}(0) > 0$ pelo Teorema 4.5.

Note que (5.3) equivale ao problema

$$\begin{cases} \Delta z(\lambda) = \gamma(\lambda)z(\lambda) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \nu} = \lambda s(x)f'(0)z(\lambda) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Resulta das composições

$$(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \xrightarrow{z \in C^2} W_p^2(\Omega) \xrightarrow{\Delta \in C^\infty} L^p(\Omega)$$

e

$$(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \xrightarrow{z \in C^2} W_p^2(\Omega) \xrightarrow{\partial/\partial \nu \in C^\infty} W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

com $p > n$, que as aplicações

$$(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \ni \lambda \longmapsto \Delta z(\lambda) \in L^p(\Omega)$$

e

$$(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \ni \lambda \longmapsto \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \nu} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega).$$

são de classe C^2 . Assim, diferenciando com respeito a λ as equações do último problema em $\lambda = \lambda_0$, por meio de (5.5) obtemos

$$\begin{cases} \Delta z'(\lambda_0) = \gamma'(\lambda_0)u_0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial z'(\lambda_0)}{\partial \nu} = s(x)f'(0)u_0 + \lambda_0 s(x)f'(0)z'(\lambda_0) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pela fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \Delta u_0 z'(\lambda_0) dx - \int_{\Omega} \Delta z'(\lambda_0) u_0 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} z'(\lambda_0) d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z'(\lambda_0)}{\partial \nu} u_0 d\mathcal{H}^{n-1}$$

e do fato de u_0 resolver (4.10), temos

$$\begin{aligned} -\gamma'(\lambda_0) \int_{\Omega} u_0^2 dx &= \int_{\partial\Omega} \lambda_0 s(x)f'(0)u_0 z'(\lambda_0) d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} s(x)f'(0)u_0^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \lambda_0 s(x)f'(0)z'(\lambda_0)u_0 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\partial\Omega} s(x)f'(0)u_0^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma'(\lambda_0) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx}{\lambda_0 \int_{\Omega} u_0^2 dx} > 0. \quad (5.7)$$

Observe que (5.4) é equivalente ao problema de Robin com peso de fronteira de sinal indefinido

$$\begin{cases} \Delta \phi = \mu \phi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \lambda(r)s(x)f'(u(r))\phi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.8)$$

com $\phi = w(r)$ e $\mu = \mu(r)$ para todo $r \in (-\delta, \delta)$, o qual corresponde ao problema de autovalores associado a linearização de (2) em torno das soluções de equilíbrio de (1) bifurcadas, próximas de $(\lambda_0, 0)$.

Para obtermos alguma informação sobre a estabilidade daquelas soluções de equilíbrio bifurcadas, precisamos localizar o primeiro autovalor do espectro de (5.8), dado por

$$\mu_1(\lambda(r)) = \sup_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{- \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda(r) \int_{\partial\Omega} s(x) f'(u(r)) v^2 d\mathcal{H}^{n-1}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\}$$

para todo $r \in (-\delta, \delta)$, [24]. Uma vez que $\mu(r)$ é o único autovalor \mathcal{K} -simples de $D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r))$ para r próximo de zero de acordo com Lema 1.3 de [28], para concluirmos que $\mu(r) = \mu_1(\lambda(r))$ devemos provar o

Lema 5.2 *O primeiro autovalor $\mu_1(\lambda(r))$ do problema (5.8) é um autovalor \mathcal{K} -simples de $D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r))$ para todo $r \in (-\delta, \delta)$.*

Prova. Note inicialmente que pela formulação variacional de $\mu_1(\lambda(r))$ acima segue que se ξ é autofunção de (5.8) associada a $\mu_1(\lambda(r))$ então $|\xi|$ também o é, de forma que pelo princípio do máximo e pelo Lema de Hopf temos $|\xi| > 0$ em $\bar{\Omega}$.

Vamos provar primeiramente a simplicidade algébrica de que $\mu_1(\lambda(r))$, utilizando o Lema 1.4. Dadas ξ, η autofunções de (5.8) associadas $\mu_1(\lambda(r))$, positivas em $\bar{\Omega}$ sem perda de generalidade, se L, R são como no Lema 1.4 temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(\xi, \eta) dx &= \int_{\Omega} |\nabla \xi|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\xi^2}{\eta} \right) \cdot \nabla \eta dx \\ &= \lambda(r) \int_{\partial\Omega} s(x) f'(u(r)) \xi^2 d\mathcal{H}^{n-1} - \mu_1(\lambda(r)) \int_{\Omega} \xi^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\xi^2}{\eta} \right) \cdot \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Agora, via integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda(r)) \int_{\Omega} \xi^2 dx &= \int_{\Omega} \Delta \eta \frac{\xi^2}{\eta} dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla \left(\frac{\xi^2}{\eta} \right) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \frac{\xi^2}{\eta} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla \left(\frac{\xi^2}{\eta} \right) dx + \lambda(r) \int_{\partial\Omega} s(x) f'(u(r)) \xi^2 d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

e assim,

$$\int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla \left(\frac{\xi^2}{\eta} \right) dx = \lambda(r) \int_{\partial\Omega} s(x) f'(u(r)) \xi^2 d\mathcal{H}^{n-1} - \mu_1(\lambda(r)) \int_{\Omega} \xi^2 dx.$$

Organizando as informações obtidas, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} R(\xi, \eta) \, dx = 0$$

de modo que pelo Lema 1.4 obtemos

$$\int_{\Omega} L(\xi, \eta) \, dx = 0$$

e a existência de $t \in \mathbb{R}$ tal que $\xi = t\eta$, provando a simplicidade algébrica do autovalor $\mu_1(\lambda(r))$ de (5.8), isto é

$$\dim \ker (D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K}) = 1, \quad \forall r \in (-\delta, \delta).$$

Como o operador

$$D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K} : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

$p > n$, é dado por

$$(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K}) \cdot \phi = \left(\Delta \phi - \mu_1(\lambda(r)) \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \lambda(r) s(x) f'(u(r)) \phi \right),$$

segue do Teorema 1.22 e da Observação 1.4 que o mesmo é um operador de Fredholm de índice zero para todo $r \in (-\delta, \delta)$. Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= \dim \ker (D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K}) \\ &= \dim \left(L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) / R(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K}) \right) \end{aligned}$$

e a primeira parte da Definição 1.5 está provada.

Para provarmos a condição de transversalidade da segunda parte daquela definição suponha, por contradição, sua falsidade. Então,

$$\mathcal{K}(u_0(r)) \in R(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K}),$$

sendo $u_0(r) \in W_p^2(\Omega)$ um gerador de $\ker (D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K})$ para cada $r \in (-\delta, \delta)$. Logo, existe $h(r) \in W_p^2(\Omega)$ tal que

$$D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) \cdot h(r) - \mu_1(\lambda(r)) \mathcal{K}(h(r)) = \mathcal{K}(u_0(r)),$$

ou seja, $h(r)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta h(r) - \mu_1(\lambda(r))h(r) = u_0(r) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial h(r)}{\partial \nu} = \lambda(r)s(x)f'(u(r))h(r) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

para todo $r \in (-\delta, \delta)$. Utilizando-se a fórmula de Green

$$\int_{\Omega} u_0(r)\Delta h(r) dx - \int_{\Omega} h(r)\Delta u_0(r) dx = \int_{\partial\Omega} u_0(r)\frac{\partial h(r)}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} h(r)\frac{\partial u_0(r)}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1}$$

após alguns cálculos diretos análogos aos do Lema 5.1, pode-se concluir que

$$\int_{\Omega} u_0^2(r) dx = 0$$

para cada $r \in (-\delta, \delta)$, uma contradição. Portanto, a segunda parte da Definição 1.5 é satisfeita e o lema está provado. \square

Observação 5.1 *A simplicidade do primeiro autovalor $\mu_1(\lambda(r))$ de (5.8) poderia também ser obtida via Teorema de Krein-Rutman (cf. [16], p.100) como em [24], mas certamente por meio de uma demonstração não mais simples do que aquela apresentada para o teorema anterior.*

Decorre, então, do Lema 5.2 que

$$\mu_1(\lambda(r)) = \mu(r), \quad \forall r \in (-\delta, \delta).$$

Logo, $\mu(r) \neq 0$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno por causa do Corolário 4.1. Com efeito, se $\mu(\tilde{r}) = 0$ para algum $\tilde{r} > 0$ pequeno teríamos $\mu_1(\lambda(\tilde{r})) = 0$ e, pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz sobre bifurcação de autovalores simples, Teorema 1.17, haveria uma bifurcação secundária em $(\lambda(\tilde{r}), u(\tilde{r}))$, contradizendo o Corolário 4.1.

Assim, por (5.6), $\mu_1(\lambda(r)) < 0$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno de forma que as soluções não-triviais de equilíbrio bifurcadas de (1) no começo do ramo global emanando de λ_0 dado pelo Teorema 4.8 são exponencialmente estáveis.

Para concluirmos a estabilidade exponencial de todo o ramo global bifurcado de λ_0 , precisaremos do seguinte

Lema 5.3 *A aplicação $\mu_1 : (\lambda_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\mu_1(\lambda) = \sup_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{-\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)f'(u_{\lambda})v^2 d\mathcal{H}^{n-1}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\},$$

sendo u_λ a solução de equilíbrio não-trivial de (1) associada a $\lambda > \lambda_0$, é contínua.

Prova. Sabemos que $\mu_1(\lambda)$ é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} \Delta v = \mu v & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda s(x) f'(u_\lambda) v & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

Fixe $\tilde{\lambda} > \lambda_0$. Segue do Teorema 4.8 que

$$u_\lambda \longrightarrow u_{\tilde{\lambda}} \quad \text{em } W_p^2(\Omega)$$

com $p > n$, quando $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$. Assim, como $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ obtemos em particular que

$$\lambda s(x) f'(u_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} \tilde{\lambda} s(x) f'(u_{\tilde{\lambda}}) \quad \text{em } C^0(\partial\Omega).$$

Logo, pelo Teorema 8.2 de [20] obtemos

$$\mu_1(\lambda) \longrightarrow \mu(\tilde{\lambda}) \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$$

e o lema está provado. \square

Portanto, a análise da estabilidade do ramo global bifurcado de λ_0 pode ser concluída da seguinte maneira.

Teorema 5.3 *Para todo $\lambda > \lambda_0$ a solução de equilíbrio não-constante de (1) bifurcada de λ_0 é exponencialmente estável.*

Prova. Como o espectro de (5.8) para as soluções de equilíbrio não-constantes no começo do ramo global de bifurcação emanando de λ_0 está contido em

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \mu_1(\lambda(r))\}$$

e $\mu_1(\lambda(r)) < 0$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno, pelo Corolário 4.1 e pelo Lema 5.3 o mesmo ocorre com o espectro de (5.9) para todo $\lambda > \lambda_0$. Logo, a estabilidade exponencial do ramo global bifurcado de λ_0 segue. \square

Convergência do traço quando o parâmetro é grande

Estabeleceremos neste capítulo um resultado de convergência a respeito do traço da solução de equilíbrio não-trivial de (1) quando o parâmetro $\lambda > 0$ tender ao infinito ao provarmos que, sob certas hipóteses, o traço tende a se concentrar num subconjunto da fronteira da região Ω quando o parâmetro é grande.

Uma dessas condições envolve a noção de capacidade de um subconjunto de uma variedade Riemanniana suave. Vamos introduzi-la conforme nossa necessidade sem nela nos determos, indicando [36, 38] para maiores aprofundamentos.

Definição 6.1 *Sejam \mathcal{M} uma variedade Riemanniana conexa suave e $K \subset \mathcal{M}$ um compacto. A **capacidade** de K é definida por*

$$\text{cap}(K) := \inf \left\{ \int_{\mathcal{M}} |\nabla \phi|^2 d\mu : \phi \in C_0^\infty(\mathcal{M}) \text{ e } \phi = 1 \text{ numa vizinhança de } K \right\}$$

sendo μ o volume Riemanniano de \mathcal{M} .

Se K é um aberto pré-compacto, então a capacidade de K é definida por

$$\text{cap}(K) := \text{cap}(\overline{K}).$$

Suponha que o conjunto

$$\mathcal{Z} \doteq \{x \in \partial\Omega : s(x) = 0\}$$

tenha medida $(n - 1)$ -dimensional de Hausdorff zero e que o conjunto

$$\mathcal{M} \doteq \{x \in \partial\Omega : s(x) > 0\}$$

tenha capacidade finita. Nestas circunstâncias, provaremos que os traços das soluções de equilíbrio não-triviais de (1) convergem para a função característica do conjunto \mathcal{M} na topologia de $L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, quando λ tender ao infinito.

Este é o conteúdo do seguinte

Teorema 6.1 *Suponha que o conjunto \mathcal{M} tenha capacidade finita e o conjunto \mathcal{Z} tenha medida $(n-1)$ -dimensional de Hausdorff zero. Então, a solução de equilíbrio não-trivial u_λ de (1) satisfaz*

$$u_\lambda|_{\partial\Omega} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \chi_{\mathcal{M}} \quad \text{em } L^p(\partial\Omega)$$

para todo $1 < p < \infty$.

Prova. É suficiente provar que

$$u_\lambda|_{\partial\Omega} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \chi_{\mathcal{M}} \quad \text{em medida}$$

isto é, que para todo $\varepsilon > 0$ os conjuntos

$$N_\varepsilon^\lambda \doteq \{x \in \partial\Omega : |\chi_{\mathcal{M}}(x) - u_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}$$

são tais que $\mathcal{H}^{n-1}(N_\varepsilon^\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. De fato, em L^∞ , convergência em medida implica convergência em L^p (cf. [35]).

Como \mathcal{M} tem capacidade finita existe $\phi \in C_0^\infty(\partial\Omega)$ suportada em uma vizinhança aberta em $\partial\Omega$ contendo \mathcal{M} de forma que $\phi|_{\overline{\mathcal{M}}} \equiv 1$ e tal que $0 \leq \phi < 1$ no complementar de $\overline{\mathcal{M}}$ naquela vizinhança. Considere uma extensão $\Phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ de ϕ satisfazendo $0 \leq \Phi < 1$ em $\overline{\Omega}$ e o funcional energia $\mathcal{J}_\lambda : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado a (2), dado por

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\partial\Omega} s(x)F(u) d\mathcal{H}^{n-1}$$

com $F(u) = \int_0^u f(\tau) d\tau$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(\Phi^{\sqrt{\lambda}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 \Phi^{2(\sqrt{\lambda}-1)} dx - \int_{\mathcal{M}} s(x)F(1) d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega \setminus \mathcal{M}} s(x)F(\Phi^{\sqrt{\lambda}}) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} -F(1) \int_{\mathcal{M}} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned} \quad (6.1)$$

pelo Teorema da Convergência Dominada. Por outro lado, como u_λ minimiza \mathcal{J}_λ globalmente em \mathfrak{X} para cada $\lambda > \lambda_0$ pelo Teorema 2.2 e $\Phi^{\sqrt{\lambda}} \in \mathfrak{X}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(\Phi^{\sqrt{\lambda}}) &\geq \frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) \geq - \int_{\partial\Omega} s(x)F(u_\lambda) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\mathcal{M}} s(x)F(u_\lambda) d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega \setminus \mathcal{M}} s(x)F(u_\lambda) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \int_{\mathcal{M}} s(x)F(u_\lambda) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq -F(1) \int_{\mathcal{M}} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

de forma que por (6.1) obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} - \int_{\partial\Omega} s(x)F(u_\lambda) d\mathcal{H}^{n-1} &= -F(1) \int_{\mathcal{M}} s(x) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\partial\Omega} s(x)F(\chi_{\mathcal{M}}) d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial\Omega} s(x)[F(\chi_{\mathcal{M}}) - F(u_\lambda)] d\mathcal{H}^{n-1} \right| = 0.$$

Como o integrando na última expressão é não-negativo em $\partial\Omega$, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} |s(x)[F(\chi_{\mathcal{M}}) - F(u_\lambda)]| d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \quad (6.2)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |s(x)[F(\chi_{\mathcal{M}}) - F(u_\lambda)]| d\mathcal{H}^{n-1} &\geq \int_{N_\varepsilon^\lambda} |s(x)| \left| \int_{u_\lambda}^{\chi_{\mathcal{M}}} f(\tau) d\tau \right| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap \mathcal{M}} |s(x)| \left[\int_{u_\lambda}^1 f(\tau) d\tau \right] d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap (\partial\Omega \setminus \mathcal{M})} |s(x)| \left[\int_0^{u_\lambda} f(\tau) d\tau \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap \mathcal{M}} |s(x)| \left[\int_{1-\varepsilon}^1 f(\tau) d\tau \right] d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap (\partial\Omega \setminus \mathcal{M})} |s(x)| \left[\int_0^\varepsilon f(\tau) d\tau \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \min \left\{ \int_{1-\varepsilon}^1 f(\tau) d\tau, \int_0^\varepsilon f(\tau) d\tau \right\} \int_{N_\varepsilon^\lambda} |s(x)| d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

e assim segue de (6.2) que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{N_\varepsilon^\lambda} |s(x)| d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \quad (6.3)$$

AFIRMAÇÃO. $\mathcal{H}^{n-1}(N_\varepsilon^\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

De fato, se assumíssemos o contrário, existiria $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{\lambda_j\}$, $\lambda_j \rightarrow \infty$, tais que

$$\mathcal{H}^{n-1}(N_{\varepsilon_0}^{\lambda_j}) \geq \varepsilon_0, \quad \forall j.$$

Considerando a família de abertos contendo \mathcal{Z}

$$\mathcal{Z}_\delta \doteq \{x \in \partial\Omega : |s(x)| < \delta\}, \quad \delta > 0,$$

decorreria do Teorema da Convergência Dominada que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{Z}_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Escolhendo $\delta_0 > 0$ tal que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{Z}_{\delta_0}) < \varepsilon_0$, teríamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_0} \int_{N_\varepsilon^{\lambda_j}} |s(x)| d\mathcal{H}^{n-1} &\geq \frac{1}{\delta_0} \int_{N_\varepsilon^{\lambda_j} \cap (\partial\Omega \setminus \mathcal{Z}_{\delta_0})} |s(x)| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \mathcal{H}^{n-1}(N_\varepsilon^{\lambda_j} \cap (\partial\Omega \setminus \mathcal{Z}_{\delta_0})) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(N_\varepsilon^{\lambda_j}) - \mathcal{H}^{n-1}(N_\varepsilon^{\lambda_j} \cap \mathcal{Z}_{\delta_0}) \\ &\geq \mathcal{H}^{n-1}(N_\varepsilon^{\lambda_j}) - \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{Z}_{\delta_0}) \\ &\geq \varepsilon_0 - \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{Z}_{\delta_0}) > 0. \end{aligned}$$

Quando $j \rightarrow \infty$, graças a (6.3), obteríamos uma contradição. O teorema está provado.

□

Observações finais

Ao término deste trabalho percebe-se uma perspectiva de estudo futuro com relação a casos não contemplados ou possíveis generalizações dos problemas nele apresentados.

Um resultado não demonstrado mas esperado ser verdadeiro se refere a globalidade da estabilidade assintótica do ramo de bifurcação global, dado no Teorema 4.8, emanando de λ_0 . (Veja [40] para um resultado análogo relativo ao problema de Fleming, em que não há fluxo através da fronteira). De fato, dada uma condição inicial $u_0 \neq 0$ e $u_0 \neq 1$ em (1), espera-se que a solução $u(x, t)$ de (1) começando em u_0 convirja para a única solução de equilíbrio não-trivial de (2), quando t tender ao infinito, numa determinada topologia. Este resultado poderá ser obtido se, por exemplo, forem estabelecidas estimativas a priori para soluções de (1) limitando-as inferior e superiormente.

Outra questão qualitativa a respeito das soluções de equilíbrio de (1) surge conexa ao resultado obtido no Capítulo 6, onde foi provado que o traço da solução de equilíbrio u_λ de (1) converge, quando $\lambda \rightarrow \infty$, para a função característica do conjunto onde o peso de fronteira é positivo na topologia de $L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$. Deseja-se saber o que ocorre com u_λ no interior de Ω a medida que $\lambda \rightarrow \infty$. Uma possível direção de investigação pode se dar através da extensão harmônica da função característica acima mencionada, o que conduzirá ao estudo de um problema singular.

A análise feita neste trabalho relativamente as soluções de equilíbrio de (1) depende fortemente do sinal da média sobre $\partial\Omega$ do peso $s(\cdot)$. (Conforme observado anteriormente, resultados análogos aos descritos acima podem ser estabelecidos se $s(\cdot)$ tiver média positiva em (H-2)). Porém, um caso peculiar se dá quando o peso de fronteira $s(\cdot)$ tem média zero. Neste caso, a abordagem empregada para estudar-se bifurcação das soluções de equilíbrio triviais, via Teorema de Crandall-Rabinowitz, falha. Com efeito, tem-se então $\lambda_0 = 0$ e a ocorrência de uma degenerescência, pois zero é autovalor algebricamente simples de (1.7) mas não satisfaz a condição de transversalidade de Crandall-Rabinowitz (condição (iii) do Teorema 1.17) no contexto do Capítulo 4. Logo, para se estudar bifurcação dos ramos triviais é necessário empregar-se outro método, como por exemplo a redução de Lyapunov-Schmidt (cf. [60, 68, 69, 70]). Não só a estrutura de bifurcação deve ser alterada, como também o resultado de unicidade dos equilíbrios triviais para valores pequenos do parâmetro, Teorema 4.1, deve não ser mais válido, além de possíveis outras

alterações. Assim, fica posto um problema interessante como continuação natural da investigação iniciada nesta tese.

O problema mencionado no parágrafo anterior pode ainda ser generalizado não só na não-linearidade presente na condição de fronteira ou no operador principal envolvido na equação, o Laplaciano, mas ao permitir-se, mediante hipóteses adequadas, o aumento do nível de degenerescência da condição de transversalidade de Crandall-Rabinowitz. Desta forma, podem ocorrer bifurcações secundárias ou de ordens superiores, o que produziria, por exemplo, resultados de multiplicidade. Problemas deste tipo foram abordados em [60] e em suas referências.

De modo mais abrangente, pode-se também estudar questões de bifurcação para problemas elípticos com condições de fronteira não-lineares mais gerais, permitindo-se inclusive dependência não-linear do parâmetro, empregando-se recentes generalizações de resultados clássicos da teoria da bifurcação, como os de [49] e de suas referências.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A.; Fournier, J.J.F.; *Sobolev Spaces*, 2^a Ed., Elsevier, Netherlands, 2003.
- [2] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L.; *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure Appl. Math., v. 12, p. 623-727, 1959.
- [3] Alikakos, N.D.; *Regularity and asymptotic behavior for the second order parabolic equation with nonlinear boundary conditions in L^p* , J. Diff. Eqns., v. 39, p. 311-344, 1981.
- [4] Allegretto, W.; Huang, Y.X.; *A Picone's identity for the p -Laplacian and applications*, Nonlinear Anal., v. 32, p. 819-830, 1998.
- [5] Amann, H.; *Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, em: W. Eckhaus (Ed.), New developments in differential equations, Mathematical Studies, v. 21, North-Holland, Amsterdam, p. 43-63, 1976.
- [6] Amann, H.; *Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions*, J. Diff. Eqns., v. 72, p. 201-269, 1988.
- [7] Amann, H.; *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems*, em: H. Schmeisser e H. Triebel (Eds.), Functions spaces, differential operators and nonlinear analysis, Teubner, Leipzig, 9-126, 1993.
- [8] Ambrosetti, A.; Prodi, G.; *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [9] Appell, J.; Zabrejko, P.; *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [10] Arrieta, J.M.; Carvalho, A.N.; Rodríguez-Bernal, A.; *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities*, J. Diff. Eqns., v. 156, p. 376-406, 1999.
- [11] Arrieta, J.M.; Carvalho, A.N.; Rodríguez-Bernal, A.; *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds*, Comm. Part. Diff. Eqns., v. 25, p. 1-37, 2000.

- [12] Arrieta, J.M.; Pardo, R.; Rodríguez-Bernal, A.; *Bifurcation and stability of equilibria with asymptotically linear boundary conditions at infinity*, a aparecer em Proc. Royal Soc. Ed.
- [13] Ball, J.M.; Taheri, A.; Winter, M.; *Local minimizers in micromagnetics and related problems*, Calc. Var., v. 14, p. 1-27, 2002.
- [14] Berger, M.S.; *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, New York, 1977.
- [15] Bonder, J.F.; Rossi, J.D.; *A nonlinear eigenvalue problem with indefinite weights related to the Sobolev trace embedding*, Publ. Mat., v. 46, p. 221-235, 2002.
- [16] Brezis, H.; *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [17] Brown, K.J.; Lin, S.S.; *On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl., v. 75, p. 112-120, 1980.
- [18] Brown, K.J.; Lin, S.S.; *Bifurcation and stability results for an equation arising in population genetics*, Annali Mat. Pura Appl., v. 128, p. 375-387, 1980.
- [19] Brown, K.J.; Lin, S.S.; Tertikas, A.; *Existence and nonexistence of steady-state solutions for a selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., v. 27, p. 91-104, 1989.
- [20] Cano-Casanova, S.; López-Gómez, J.; *Properties of the principal eigenvalues of a general class of non-classical mixed boundary value problems*, J. Diff. Eqns., v. 178, p. 123-211, 2002.
- [21] Carvalho, A.N.; Oliva, S.M.; Pereira, A.L.; Rodríguez-Bernal, A.; *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., v. 207, p. 409-461, 1997.
- [22] Chazarain, J.; Piriou, A.; *Introduction to the theory of linear partial differential equations*, North-Holland, Amstendam, 1982.
- [23] Chow, S.-N.; Hale, J.K.; *Methods of bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [24] Cònsul, N.; *On equilibrium solutions of diffusion equations with nonlinear boundary conditions*, Z. Angew. Math. Phys., v. 47, p. 194-209, 1996.
- [25] Cònsul, N.; Solà-Morales, J.; *Stability of local minima and stable nonconstant equilibria*, J. Diff. Eqns., v. 157, p. 61-81, 1999.
- [26] Crandall, M. G.; *An introduction to constructive aspects of bifurcation and the implicit function theorem*, em: P. H. Rabinowitz (Ed.), Applications of Bifurcation Theory, Academic Press, 1-35, 1977.

- [27] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H.; *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Func. Anal., v.8, p. 321-340, 1971.
- [28] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H.; *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal., v. 52, p. 161-180, 1973.
- [29] Crandall, M.G.; Rabinowitz, P.H.; *The principle of exchange of stability*, em: A.R. Bednarek e L. Cesari (Eds.), Dynamical Systems, Academic Press, Gainesville, 27-41, 1977.
- [30] Dieudonné, J.; *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- [31] Drangeid, A.-K.; *The principle of linearized stability for quasilinear parabolic evolution equations*, Nonl. Anal., v. 13, p. 1091-1113, 1989.
- [32] Fisher, R.A.; *Gene frequencies in a cline determined by selection and diffusion*, Biometrics, v. 6, p. 353-361, 1950.
- [33] Evans, L.C.; *Partial differential equations*, AMS, Providence, 1998.
- [34] Fleming, W.H.; *A selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., v. 2, p. 219-233, 1975.
- [35] Folland, G.B.; *Real analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [36] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.; *Elliptic partial differential equations of second order*, 2ª Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [37] Grisvard, P.; *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, London, 1985.
- [38] Grygor'yan, A.; *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of brownian motion on riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), v. 36, p. 135-249, 1999.
- [39] Hale, J. K.; *Generic bifurcation with applications*, em: R.J. Knops (Ed.), Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, v.1, Great-Bretain, Pitman, 59-155, 1977.
- [40] Henry, D.; *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, 2ª Impressão, Lect. Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [41] Hess, P.; *On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with an indefinite weight function*, Math. Z., v. 179, p. 237-239, 1982.
- [42] Hoppensteadt, F.C.; *Analysis of a stable polymorphsm arising in a selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., v. 2, p. 235-240, 1975.

- [43] Hörmander, L.; *The analysis of linear partial differential operators*, v. 1–4, Springer-Verlag.
- [44] Jost, J.; *Postmodern analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [45] Hess, P.; Kato, T.; *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. Part. Diff. Eqns., v. 5, p. 999-1030, 1980.
- [46] Kesavan, S.; *Nonlinear functional analysis*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2004.
- [47] Kielhöfer, H.; *Bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [48] Lions, J.L.; Magenes, E.; *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, v. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [49] López-Gómez, J.; *Spectral theory and nonlinear functional analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [50] Lunardi, A.; *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic equations*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [51] Madeira, G.F.; *Existence and regularity for a nonlinear boundary flow problem of population genetics*, Nonl. Anal. (2008), doi:10.1016/j.na.2008.01.025.
- [52] Madeira, G.F.; Nascimento, A.S.; *Bifurcation of stable solutions of the Laplacian with nonlinear boundary condition and indefinite weight*, em fase final de redação.
- [53] Madeira, G.F.; Nascimento, A.S.; *Nonconstant stable solutions induced by spatial-dependence in nonlinear boundary conditions*, a ser submetido.
- [54] Maz'ja, V.G.; *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [55] Mikhailov, V.P.; *Partial Differential equations*, Mir, Moscow, 1978.
- [56] Mitrović, D.; Žubrinić, D.; *Fundamentals of applied functional analysis*, Addison Wesley Longman, Harlow, 1998.
- [57] Protter, M.; Weinberger, H.; *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, New York, 1967.
- [58] Rabinowitz, P.H.; *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Func. Anal., v. 7, p. 487-513, 1971.
- [59] Rabinowitz, P.H.; *A survey from bifurcation theory*, em: L. Cesari, J.K. Hale e J.P. LaSalle (Eds.), *Dynamical Systems*, v.1, Academic Press, 83-96, 1976.

- [60] Saut, J.C.; Scheurer, B.; *Remarks on a non linear equation arising in population genetics*, Comm. Part. Diff. Eqns., v. 3, p. 907-931, 1978.
- [61] Senn, S.; Hess, P.; *On positive solutions of a linear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions*, Math. Ann., v. 258, p. 459-470, 1982.
- [62] Simonett, G.; *Center manifolds and integral equations*, Diff. Int. Eqns., v. 4, p. 753-796, 1995.
- [63] Smoller, J.; *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [64] Struwe, M.; *Variational methods*, Springer-Verlag, 3^a Ed., Berlin, 2000.
- [65] Tanabe, H.; *Equations of evolution*, Pitman, London, 1979.
- [66] Taylor, M.E.; *Partial differential equations I*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [67] Troianiello, G.M.; *Elliptic differential equations and obstacle problems*, Plenum Press, New York, 1987.
- [68] Umezu, K.; *Global positive solution branches of positive problems with nonlinear boundary conditions*, Diff. Int. Eqns., v. 13, p. 669-686, 2000.
- [69] Umezu, K.; *Behavior and stability of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems arising in population dynamics*, Nonl. Anal., v. 49, p. 817-840, 2002.
- [70] Umezu, K.; *Multiplicity of positive solutions under nonlinear boundary conditions for diffusive logistic equations*, Proc. Ed. Math. Soc., v. 47, p. 495-512, 2004.
- [71] Valent, T.; *Boundary value problems of finite elasticity*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [72] Wloka, J.; *Partial Differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.