UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de múltiplas soluções para classes de problemas elípticos com função peso mudando de sinal em domínios ilimitados

Márcio Luís Miotto

São Carlos - SP

Março de 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de múltiplas soluções para classes de problemas elípticos com função peso mudando de sinal em domínios ilimitados

Márcio Luís Miotto

Orientador: Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

Março de 2009

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

M669em

Miotto, Márcio Luís.
Existência de múltiplas soluções para classes de problemas elípticos com função peso mudando de sinal em domínios ilimitados / Márcio Luís Miotto. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
106 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. P-laplaciano. 2. Domínios ilimitados. 3. Multiplicidade de soluções. 4. Expoentes críticos. 5. Não linearidades concâvo convexas. I. Título.

CDD: 515.3 (20[a])

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
DMA- UFV

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Prof. Dr. Paulo César Carrião
UFMG

Prof. Dr. Rolci de Almeida Cipolatti
UFRJ

.

Aos meus pais Anselmo e Lourdes,

bem como à Taísa por tudo.

Agradecimentos

A Deus, que em Sua infinita bondade permitiu que mais esta etapa da minha vida fosse concluída.

Aos meus pais, por todo amor, educação, incentivo, compreensão, força, ... por seus exemplos. Esta meta foi atingida graças aos seus esforços.

À minha esposa Taísa, pelo amor, as alegrias, companhia, apoio, tolerância, paciência e por sua inigualável dedicação.

Ao professor Olímpio, pela orientação, amizade e o convívio prazeroso durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus irmãos, Eder e Anderson pela incentivo, auxílio força, paciência.

A todos os meus familiares. Em especial, ao "nono" José e a "nona" Teonésta, pelo incentivo e toda a bondade. Ao Luiz e a Neiva Rita pela confiança, os exemplos e incentivos.

Aos professores da banca examinadora e seus suplentes pelas correções e sugestões para a finalização deste trabalho.

Aos meus professores da UFSCar, em especial aos que serão sempre lembrados por dar o melhor de si.

Ao professor Xavier da UFPR, pelas oportunidades, por sua enorme atenção e incentivo.

Aos amigos da UFSCar pela agradável convivência e por estarem sempre prontos para auxiliar-me. Aos amigos da UNICAMP e UFV pela acolhida e troca de experiências.

A CAPES pelo apoio financeiro.

" No final tudo dá certo. Se não deu certo,

é por que ainda não chegou no final ..."

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar condições suficientes para a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos com função peso mudando de sinal em domínios ilimitados, utilizando para isso argumentos variacionais. Especificamente, no caso semilinear utilizamos argumentos de minimização sobre a variedade de Nehari. Para o caso quase linear, tanto para o caso escalar bem como para o sistema, utilizamos argumentos de minimização e uma variante do Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale.

Abstract

The aim of this work is to give some sufficient conditions for the existence and multiplicity of the solutions for a class of elliptic problems with sign-changing weight function in unbounded domains, using for this variational techniques. Specifically, in the semilinear case we use the minimization arguments on the Nehari manifold. For the quasilinear case, as in the scalar case as in the system, we use the minimization arguments and a variant of the mountain pass Theorem without the Palais-Smale condition.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, obtemos condições para a existência de múltiplas soluções (fracas) não negativas, para problemas da forma

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + a|u|^{p-1} &= \lambda f(x)|u|^{q-1} + h(x)|u|^{r-1}, \qquad \text{em} \qquad \Omega \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$-\Delta_p u = -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

é o operador $p-$Laplaciano, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio ilimitado com fronteira suave, as funções $a,\ f,\ h : \Omega \to \mathbb{R}$ sejam mensuráveis, com a e h não negativas, mas a função f pode mudar de sinal, $\lambda > 0$ é um parâmetro real positivo e os expoentes satisfazem

$$2 \le p \le N \quad \text{e} \quad 1 < q < p < r \le p^*.$$

Estabelecemos ainda condições sobre a função peso f, bem como para os valores de p e q, para obter resultados de existência e multiplicidade de soluções (fracas), da seguinte classe de sistema elíptico quase linear com crescimento crítico

$$(S) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= p_1 f(x)|u|^{p_1-1}|v|^{q_1} + \beta|u|^{\beta-1}|v|^{\gamma}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v &= q_1 f(x)|u|^{p_1}|v|^{q_1-1} + \gamma|u|^{\beta}|v|^{\gamma-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ 0 \lneq u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ 0 \lneq v \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde a dimensão, bem como os expoentes, satisfazem

$$1 \le p_1, q_1,\ \ \frac{p_1}{p} + \frac{q_1}{q} < 1,\ \ 2 \le p \le q < min\{p^*, N\},\ \ \frac{\beta}{p^*} + \frac{\gamma}{q^*} = 1.$$

O estudo de problemas que envolvem o operador $p-$Laplaciano deve-se ao fato que este operador elíptico aparece em vários problemas da Física e Mecânica, tais como: Glaciologia, Climatologia e Fluidos não-Newtonianos. Por exemplo, no estudo da sensitividade de um modelo estacionário não linear que aparece na climatologia com relação a constante solar (veja Días, Hernándes e Tello [40] e suas referências).

Pelo fato de considerarmos o problema (P) sobre domínios ilimitados, surgem algumas dificuldades para encontrarmos soluções para o mesmo, devido a falta de compacidade das imersões de Sobolev e da verificação da condição de Palais-Smale para os funcionais associados ao problema (P). Tecnicamente, o sistema (S) se comporta, em um certo sentido, da mesma forma que o problema (P). Mas é evidente que existem dificuldades adicionais decorrentes da ação mútua das variáveis u e v nas não linearidades $|u|^{\beta-1}|v|^{\gamma}$ e $|u|^{\beta}|v|^{\gamma-1}$. Além disso, como este sistema envolve expoente crítico de Sobolev, aparece novamente a questão da falta de compacidade, bem como a verificação da condição de Palais-Smale para o funcional associado ao sistema (S).

Por estas particularidades, durante as últimas décadas inúmeros trabalhos tratam de variantes do problema (P), bem como do sistema (S). Por exemplo, se $p \geq 2$ e Ω é limitado, podemos citar [1, 10, 22, 23, 24, 34, 36, 38, 51, 62], bem como suas referências. Para o caso em que $p \geq 2$ e Ω é um domínio ilimitado, mencionamos dentre outros [5, 9, 11, 15, 28, 41, 50, 61, 65] além de suas referências e as demais que se encontram no final deste trabalho.

No Capítulo 1, consideramos um caso particular do problema (P), onde $p = 2$, Ω é um cilindro infinito de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$ e a não linearidade em r possui crescimento subcrítico, ou seja $r < 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $2^* = \infty$ se $N = 2$. Supondo que $a \equiv 1$ e que as funções f e h satisfazem condições apropriadas, mais precisamente, as hipóteses (H_f) e (H_h) (veja página 6), mostramos através de argumentos variacionais sobre a variedade de Nehari, a existência de ao menos duas soluções, desde que a norma de

λf seja suficientemente pequena.

No Capítulo 2, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, provamos a existência de ao menos duas soluções para o problema (P), considerando o caso em que Ω é todo o espaço $\mathbb{R}^N$, $a \equiv 0$, $h \equiv 1$, $p \in [2, N)$ é qualquer e a função f satisfaz a condição $(\mathcal{H}_f)$ (veja página 36). Para obter tal resultado utilizamos técnicas de minimização e uma variante do Teorema do passo da montanha. Ressaltamos que para aplicar tal versão de teorema há a necessidade de obter estimativas "precisas" dos níveis de energia do funcional associado ao problema (P). Para tanto, fez-se necessário provar que as soluções tenham certa regularidade, condição esta que juntamente com algumas propriedades de uma classe de funções "especiais", nos oferecem estimativas razoáveis do níveis de energia do funcional associado ao problema (P).

No Capítulo 3, através de argumentos de minimização, garantimos inicialmente que o sistema (S) admite ao menos uma solução, desde que a função peso f possua norma suficientemente pequena e satisfaça a condição $(\mathbb{H}_f)$ (veja página 56). Para o caso $p = q$, através de uma versão do Teorema do passo da montanha, obtemos que o sistema (S) admite ao menos duas soluções desde que f satisfaça condições apropriadas (veja Teorema 3.2). Para garantir a existência da segunda solução, da mesma forma que no capítulo precedente, fez-se necessário obter algumas estimativas dos níveis de energia do funcional associado ao sistema (S). Contudo, neste caso não foi possível obter os resultados de regularidade das soluções, obtidos no Capítulo 2. Contornamos tal dificuldade obtendo uma estimativa uniforme em f dos níveis de energia do funcional associado ao sistema (S).

Concluímos o trabalho com um Apêndice, no qual listamos algumas desigualdades, resultados de regularidade, bem como alguns resultados gerais, que foram utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Problema semilinear com não linearidade subcrítica em um cilindro infinito

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos, através de métodos variacionais, a existência de múltiplas soluções (fracas) não negativas para uma classe de equações elípticas semilineares da forma

$$(P_{\lambda,f,h}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda f(x)|u|^{q-1} + h(x)|u|^{r-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{T} \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre} \quad \partial\mathbb{T}, \end{cases}$$

onde as funções peso $f,\, h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ satisfazem determinadas condições,

$(H_{\mathbb{T}})$ $\mathbb{T} = \Omega' \times \mathbb{R},$ com $\Omega' \subset \mathbb{R}^{N-1},\ N \geq 2,$ um domínio suave e limitado,

λ um parâmetro real positivo e os expoentes satisfazem a seguinte relação,

$$(H_{exp}) \qquad 1 < q < 2 < r < 2^*,\ (2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ se } N \geq 3,\ 2^* = \infty \text{ se } N = 2).$$

Equações elípticas semilineares com não linearidades do tipo côncavo e convexas, como acima, sobre domínios limitados foram amplamente estudadas.

Ambrosetti, Brézis e Cerami em [10] estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-1} + |u|^{r-1}, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, λ um parâmetro real positivo e $1 < q < 2 < r \leq 2^*$. Eles garantiram, utilizando o método de sub e super solução, a existência de $\lambda_0 > 0$ de modo que o problema (1.1) possui ao menos duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \lambda_0)$, possui ao menos uma solução positiva se $\lambda = \lambda_0$ e não admite solução positiva se $\lambda > \lambda_0$. Posteriormente, tanto Adimurthi, Pacella e Yadava [2], quanto Damascelli, Grossi e Pacella [32] bem como Tang em [67] provaram, no caso em que $\Omega = B(0,1)$, ou seja, Ω é a bola unitária de $\mathbb{R}^N$, que existem exatamente duas soluções positivas para o problema (1.1) se $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$. Citamos também o trabalho de Brown e Zhang [24], no qual usando argumentos variacionais sobre a variedade de Nehari, obtiveram resultados de existência e não existência, bem como multiplicidade de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) u + h(x)|u|^{r-2}u, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, o expoente $2 < r < 2^*$ e as funções peso f, $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sejam suaves e podem mudar de sinal. Para mais trabalhos relacionados, cujo domínio é limitado citamos [1, 12, 17, 25, 27, 29, 35, 36, 45] além de [58] e suas referências.

Hsu em [50], considera o problema $(P_{\lambda,f,h})$ sob as condições

$$N \geq 3, \quad f \equiv 0, \quad h \geq 0, \quad \text{com} \quad \lim_{|x| \to \infty} h(x) = h_\infty > 0,$$

e existem constantes positivas C_0, δ e R_0 de modo que

$$h(x', x_N) \geq h_\infty + C_0 e^{-\delta |x_N|}, \text{ para } |x_N| \geq R_0, \forall x' \in \Omega'.$$

Utilizando argumentos variacionais, ele prova que o problema $(P_{\lambda,f,h})$ admite ao menos duas soluções. Recentemente Wu [75], também via métodos variacionais, estudou o problema $(P_{\lambda,f,h})$ supondo que

$$f \text{ é uma função não negativa que pertence a } L^{\frac{2}{2-q}}(\mathbb{T}),$$

$$h \in C(\mathbb{T}) \text{ é estritamente positiva, com } \lim_{|x_N|\to\infty} h(x) = 1, \ \ \forall x' \in \Omega',$$

e existem constantes $\delta > 0$ e $C_0 \in (0,1)$ tais que

$$h(x', x_N) \geq 1 - C_0 e^{-2\sqrt{1+\theta_1+\delta}|x_N|}, \ \ \forall (x', x_N) \in \mathbb{T},$$

onde θ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω' com a condição de fronteira identicamente nula. Sob tais condições obteve a existência de $\lambda_0 > 0$, tal que o problema $(P_{\lambda,f,h})$ admite ao menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Para outros resultados relacionados em domínios ilimitados, mas com os pesos não mudando de sinal, mencionamos [16, 26, 30, 47, 48, 69], bem como suas referências.

Consideremos que $f, h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sejam funções mensuráveis e que satisfaçam as seguintes condições:

$$(H_f) \qquad \begin{array}{l} f \in L_1 \doteq L^{\frac{\gamma}{\gamma-q}}(\mathbb{T}), \text{ para alguma constante real } \gamma \in (q, 2^*], \\ f_+ \not\equiv 0 \text{ e } f_- \in L^\infty(\mathbb{T}) \text{ possui suporte compacto em } \mathbb{T}. \end{array}$$

$$(H_h) \qquad \begin{array}{l} h \in L^\infty(\mathbb{T}) \text{ é não negativa, com } h(x) > 0 \text{ se } f(x) > 0, \\ \lim_{|x_N|\to\infty} h(x', x_N) = 1, \ \ \forall x' \in \Omega' \text{ e existe } C_0 > 0 \text{ onde} \\ \quad h(x', x_N) \geq 1 - C_0 e^{-2\sqrt{1+\theta_1}|x_N|}, \ \ \forall (x', x_N) \in \mathbb{T}. \end{array}$$

A seguir enunciamos o resultado principal deste capítulo, o qual estende os resultados de existência e multiplicidade acima citados, principalmente os de [75].

Teorema 1.1 *[55, Teorema 1.1] Suponhamos que as condições $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) e (H_h) sejam satisfeitas. Então existe uma constante positiva $\Lambda = \Lambda(q, p, \|h\|_{L^\infty}, \gamma)$ tal que se $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$ o problema $(P_{\lambda,f,h})$ possui ao menos duas soluções não triviais.*

Sob nossas hipóteses, algumas estimativas para obter sequências (PS), que foram exploradas em [75] não podem mais ser aplicadas. Para contornarmos tais dificuldades, estabelecemos novas estimativas mais "refinadas", uma vez que a função peso f pode admitir mudança de sinal e h pode ser identicamente nula em uma região limitada de $\mathbb{T}$.

1.2 Resultados preliminares

Consideremos o espaço $H = H_0^1(\mathbb{T})$ munido com a norma

$$\|u\|_H = (< u, u >)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{T}} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

e a nossa notação para a norma do espaço de Lebesgue $L^s(\mathbb{T})$, para $s \in [1, \infty)$ como sendo

$$\|u\|_{L^s} = \left(\int_{\mathbb{T}} |u(x)|^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Neste capítulo, para cada $l \in [1, 2^*]$ consideremos o seguinte problema de maximização

$$S_l = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|u\|_{L^l}}{\|u\|_H} \right\}.$$

Como iremos demonstrar o Teorema 1.1 usando argumentos variacionais, consideremos então o funcional $I_\lambda : H \to \mathbb{R}$, associado ao problema $(P_{\lambda,f,h})$, onde para cada $u \in H$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx - \frac{1}{r} \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx. \tag{1.2}$$

É fácil verificar (veja Lema A.8) que o funcional I_λ é de classe C^1 com derivada $I'_\lambda(u)$ em cada $u \in H$ dada por

$$< I'_\lambda(u), \varphi >= \int_{\mathbb{T}} \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^{q-2} u\varphi \, dx - \int_{\mathbb{T}} h|u|^{r-2} u\varphi \, dx, \tag{1.3}$$

para cada $\varphi \in H$.

Temos que os pontos críticos do funcional I_λ são exatamente as soluções (fracas) do problema $(P_{\lambda,f,h})$. Pelo fato do funcional I_λ não ser limitado inferiormente sobre o espaço H consideremos, para cada $\lambda > 0$, a variedade de Nehari associada a $(P_{\lambda,f,h})$,

$$N_\lambda = \{u \in H\backslash\{0\} :< I'_\lambda(u), u >= 0\}.$$

Ressaltamos que qualquer solução não trivial de $(P_{\lambda,f,h})$ pertence a N_λ. Além disso, pela definição da variedade de Nehari e a relação (1.3), temos que $u \in N_\lambda$ se, e somente se,

$$\|u\|_H \neq 0 \quad \text{e} \quad \|u\|_H^2 - \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx - \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx = 0. \tag{1.4}$$

Decorre das condições (H_f) e (H_{exp}), da definição de S_γ e da desigualdade de Hölder que, para todo $u \in H$

$$\left|\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx\right| \leq \lambda \|f\|_{L_1} S_\gamma^q \|u\|_H^q. \tag{1.5}$$

Temos o seguinte resultado a respeito do comportamento do funcional I_λ sobre a variedade de Nehari N_λ:

Lema 1.1 *Suponhamos que as condições $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) e (H_h) sejam válidas. Então para cada $\lambda > 0$, o funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente sobre N_λ.*

Demonstração: Sejam $\lambda > 0$ e $u \in N_\lambda$ quaisquer. Segue das relações (1.4) e (1.5) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u\|_H^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u\|_H^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\lambda \|f\|_{L_1} S_\gamma^q \|u\|_H^q. \end{aligned}$$

Como $q < 2 < r$, segue que o funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente sobre N_λ. $\square$

Devido ao funcional I_λ ser limitado inferiormente sobre N_λ, consideremos para cada $\lambda > 0$,

$$\alpha_\lambda = \inf_{u \in N_\lambda} \{I_\lambda(u)\}.$$

Consideremos ainda, para cada $\lambda > 0$, a função $\psi_\lambda : H \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi_\lambda(u) = < I'_\lambda(u), u >= \|u\|_H^2 - \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx - \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx.$$

É fácil verificar que ψ_λ é de classe C^1 (veja Lema A.8) e para cada $u \in H$

$$< \psi'_\lambda(u), u >= 2\|u\|_H^2 - q\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx - r \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx.$$

Além disso, para cada $u \in N_\lambda$, devido a relação (1.4), obtemos que

$$\begin{aligned} < \psi'_\lambda(u), u > &= (2-q)\|u\|_H^2 - (r-q) \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx, & (1.6) \\ &= (2-r)\|u\|_H^2 - (q-r)\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx. & (1.7) \end{aligned}$$

Da mesma forma que Tarantello [68], dividimos a variedade de Nehari N_λ, convenientemente em três conjuntos, a saber,

$$N_\lambda^+ = \{u \in N_\lambda :< \psi'_\lambda(u), u >> 0\},$$

$$N_\lambda^0 = \{u \in N_\lambda :< \psi'_\lambda(u), u >= 0\},$$

$$N_\lambda^- = \{u \in N_\lambda :< \psi'_\lambda(u), u >< 0\}.$$

Temos pela relação (1.7) e pela hipótese (H_{exp}) que $\int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx > 0$, para cada $u \in N_\lambda^+$, donde segue pela hipótese (H_h) que

$$\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx > 0, \tag{1.8}$$

para todo $u \in N_\lambda^+$. Agora, pela definição de S_r e pela hipótese (H_{exp}), temos para todo $u \in N_\lambda^-$ que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx &\leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|u\|_{L^r(\mathbb{T})} \\ &\leq \tilde{C}^{-1} \|u\|_H^r, & (1.9) \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = (\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} S_r^r)^{-1}$. Então, para cada $u \in N_\lambda^-$, segue das relações (1.6), (1.9) e da hipótese (H_{exp}) que

$$\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx > 0, \tag{1.10}$$

$$\left[\tilde{C}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)\right]^{\frac{1}{r-2}} < \|u\|_H. \tag{1.11}$$

O resultado a seguir nos oferece uma condição para que os mínimos locais do funcional I_λ sobre N_λ sejam pontos críticos de I_λ.

Lema 1.2 *Suponha que u_0 é um mínimo local do funcional I_λ restrito a variedade de Nehari N_λ e que $u_0 \notin N_\lambda^0$, então $I'_\lambda(u_0) = 0$ em H^*.*

Demonstração: Pelo fato de u_0 ser mínimo local de I_λ sobre N_λ, existe uma vizinhança U de u_0 em H, de modo que

$$I_\lambda(u_0) = \min_{u \in U \cap N_\lambda} I_\lambda(u),$$

ou, pela definição de ψ_λ

$$I_\lambda(u_0) = \min_{\substack{u \in U \setminus \{0\} \\ \psi_\lambda(u) = 0}} I_\lambda(u).$$

Segue então, pela teoria de multiplicadores de Lagrange, que existe $\rho \in \mathbb{R}$, tal que $I'_\lambda(u_0) = \rho \psi'_\lambda(u_0)$. Então, como $u_0 \in N_\lambda$, por definição temos que

$$0 =< I'_\lambda(u_0), u_0 >= \rho < \psi'_\lambda(u_0), u_0 > .$$

Como $u_0 \notin N_\lambda^0$, segue da definição de N_λ^0 que $\rho = 0$ e consequentemente $I'_\lambda(u_0) = 0$ em H^*. $\square$

Motivados pelo resultado acima, iremos obter uma condição para que tenhamos $N_\lambda^0 = \emptyset$.

Lema 1.3 *Suponhamos que as condições $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) e (H_h) sejam satisfeitas. Então existe uma constante $\Lambda = \Lambda(q, r, \|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \gamma) > 0$, de modo que $N_\lambda^0 = \emptyset$ se*

$$0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \Lambda.$$

Demonstração: Suponhamos por absurdo que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$, onde $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e $N_{\lambda_n}^0 \neq \emptyset$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Para cada $u \in N_\lambda^0$, obtemos pelas relações (1.4), (1.6) e (1.7) que

$$0 < \|u\|_H^2 = \frac{r - q}{2 - q} \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx, \tag{1.12}$$

$$0 < \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx = \frac{r-2}{2-q} \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx. \tag{1.13}$$

Segue das relações (1.5), (1.12) e (1.13), que para cada $u \in N_\lambda^0$

$$\|u\|_H \leq \left(\frac{r-q}{r-2}\right)^{\frac{1}{2-q}} S_\gamma^{\frac{q}{2-q}} (\lambda \|f\|_{L_1})^{\frac{1}{2-q}}. \tag{1.14}$$

Seja $Z_h = \left\{ u \in H : \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx = 0 \right\}$. Para cada $\lambda > 0$, definimos a função $F_\lambda : H \backslash Z_h \to \mathbb{R}$ por

$$F_\lambda(u) = k \left(\frac{\|u\|_H^r}{\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx} \right)^{\frac{2}{r-2}} - \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx,$$

com $k = k(q,r) = \left(\frac{r-2}{2-q}\right) \left(\frac{2-q}{r-q}\right)^{\frac{r}{r-2}}$. Decorre da relação (1.12) que F_λ está bem definida sobre N_λ^0, para todo $\lambda > 0$. Ainda, por (1.12), (1.13) e pela definição de $k(q,r)$ segue que

$$F_{\lambda_n}(u) = 0, \tag{1.15}$$

para cada $u \in N_{\lambda_n}^0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Agora para cada $\lambda > 0$, se $u \in N_\lambda^0$, pelas relações (1.5), (1.9) e (1.14), temos que

$$\begin{aligned} F_\lambda(u) &\geq k\tilde{C}^{\frac{2}{r-2}} - \lambda \|f\|_{L_1} S_\gamma^q \|u\|_H^q \\ &= S_\gamma^q \|u\|_H^q (\lambda \|f\|_{L_1})^{\frac{-q}{2-q}} \left[k\tilde{C}^{\frac{2}{r-2}} S_\gamma^{-q} (\lambda \|f\|_{L_1})^{\frac{q}{2-q}} \|u\|_H^{-q} - (\lambda \|f\|_{L_1})^{\frac{2}{2-q}} \right] \\ &\geq S_\gamma^q \|u\|_H^q (\lambda \|f\|_{L_1})^{\frac{-q}{2-q}} \left[C_1 - (\lambda \|f\|_{L_1})^{\frac{2}{2-q}} \right], \end{aligned} \tag{1.16}$$

onde $C_1 = k(q,r)\tilde{C}^{\frac{2}{r-2}} S_\gamma^{\frac{-2q}{2-q}} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2-q}} \left(\frac{r-2}{r-q}\right)^{\frac{q}{2-q}}$.

Pelo fato de $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $0 < \lambda_n \|f\|_{L_1} < C_1^{\frac{2-q}{2}}$. Então por $N_{\lambda_n}^0 \neq \emptyset$, segue da relação (1.16) que $F_{\lambda_n}(u) > 0$ para cada $u \in N_{\lambda_n}^0$, o que contradiz a relação (1.15). Logo não existe $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$ com $N_{\lambda_n}^0 \neq \emptyset$ e $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto existe $\tilde{\lambda} > 0$ tal que $N_\lambda^0 \neq \emptyset$ se $0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \tilde{\lambda}$.

Para algumas estimativas futuras necessitamos de certas constantes, a saber,

$$C_2 = k(q,r) S_\gamma^{-q} \tilde{C}^{\frac{2-q}{r-2}},$$

$$C_3 = k(q,r) 2^{-1} S_\gamma^{-q} \tilde{C}^{\frac{2-q}{r-2}} \left(\frac{r-2}{2-q}\right)^{\frac{q}{r-2}},$$

$$C_4 = 4^{q-2} S_\gamma^{-q} \tilde{C}^{\frac{2-q}{r-2}} \left(\frac{r-2}{r-q}\right) \left(\frac{2-q}{r-q}\right)^{\frac{2-q}{r-2}}.$$

Considerando

$$0 < \Lambda = \Lambda(q, r, \|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \gamma) < \min\{\tilde{\lambda}, C_1^{\frac{2-q}{2}}, C_2, C_3, C_4\}, \tag{1.17}$$

temos que a demonstração está concluída. □

Segue-se então pelo Lema 1.2 que se $0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \Lambda$ e $u \in N_\lambda$ é um mínimo local do funcional I_λ restrito a N_λ, então u é uma solução de $(P_{\lambda,f,h})$. Portanto, nosso intuito será encontrar mínimos locais do funcional I_λ sobre a variedade de Nehari N_λ. Consideremos então para cada $\lambda > 0$, os valores

$$\alpha_\lambda^+ = \inf_{u \in N_\lambda^+} \{I_\lambda(u)\} \qquad \text{e} \qquad \alpha_\lambda^- = \inf_{u \in N_\lambda^-} \{I_\lambda(u)\}.$$

Segue das definições de N_λ^+ e N_λ^- e do Lema 1.1 que α_λ^+, $\alpha_\lambda^- \in \mathbb{R}$. Recordando que

$$Z_h = \left\{ u \in H : \int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx = 0 \right\},$$

consideremos para cada $u \in H \backslash Z_h$ a seguinte constante positiva

$$t_{max} = t_{max}(u) = \left[\left(\frac{2-q}{r-q}\right) \frac{\|u\|_H^2}{\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx} \right]^{\frac{1}{r-2}}.$$

Temos os seguintes resultados a respeito dos conjuntos N_λ^+ e N_λ^- e dos valores de α_λ^+ e α_λ^-:

Lema 1.4 *Suponhamos que as condições $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) e (H_h) sejam válidas. Então para quaisquer $\lambda \in (0, \Lambda \|f\|_{L_1}^{-1})$ e $u \in H \backslash Z_h$ temos*

i) se $\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx \leq 0$, existe um único $t^-(u) = t^- > t_{max}$, de modo que $t^- u \in N_\lambda^-$ e

$$I_\lambda(t^- u) = \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu) > 0.$$

ii) se $\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx > 0$, então existem únicos $0 < t^+(u) = t^+ < t_{max}$ e $t_{max} < t^- = t^-(u)$, tais que $t^+ u \in N_\lambda^+$, $t^- u \in N_\lambda^-$ e ainda

$$I_\lambda(t^+ u) = \inf_{0 \leq t \leq t_{max}} I_\lambda(tu) < 0,$$

$$I_\lambda(t^- u) = \sup_{t \geq t_{max}} I_\lambda(tu) > 0.$$

iii) $N_\lambda^- = \left\{u \in H\backslash Z_h : t^-(u) = \frac{1}{\|u\|_H} t^-\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right) = 1\right\}.$

iv) existe uma bijeção contínua entre $U = \{u \in H\backslash Z_h : \|u\|_H = 1\}$ *e* N_λ^-*. Em particular,* t^- *é uma função contínua sobre* $H\backslash Z_h$*.*

Além disso, temos que $\alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+ < 0 < \alpha_\lambda^-$*.*

Demonstração: Sejam λ e u tais que $\lambda \in (0, \Lambda\|f\|_{L_1}^{-1})$ e $u \in H\backslash Z_h$. Considere a função $s : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$s(t) = t^{2-q}\|u\|_H^2 - t^{r-q}\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx.$$

Note que $s \in C^\infty(0,\infty)$ e pela definição de t_{max}, obtemos que $s'(t) > 0$ se $t \in (0, t_{max})$, $s'(t_{max}) = 0$ e $s'(t) < 0$ se $t \in (t_{max}, \infty)$. Observemos ainda por (1.4) que $tu \in N_\lambda$ se, e somente se, $s(t) = \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx$. Considere também a função $m : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $m(t) = I_\lambda(tu)$. Note que $m \in C^\infty(0,\infty)$ e $m'(t) = 0$ se, e somente se, $tu \in N_\lambda$.

Suponhamos inicialmente que $\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx \leq 0$. Como $s(t_{max}) > 0$, $s(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ e por s ser uma função estritamente decrescente em (t_{max}, ∞), temos que existe única constante $t^-(u) = t^- > t_{max}$, tal que $s(t^-) = \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx$, ou seja, $t^- u \in N_\lambda$.

Como $t^- u \in N_\lambda$, segue da relação (1.6) e do fato de $s'(t^-) < 0$ que

$$\begin{aligned} < \psi_\lambda'(t^- u), t^- u > &= (2-q)(t^-)^2\|u\|_H^2 - (r-q)(t^-)^{r-q}\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx \\ &= (t^-)^{q+1} s'(t^-) < 0, \end{aligned}$$

donde obtemos que $t^- u \in N_\lambda^-$. Agora sendo $t = t^-$ o único ponto crítico da função m e $m(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, temos que t^- é máximo global da função m. Ainda, como $m(t^-) > 0$, temos que $I_\lambda(t^- u) = \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu) > 0$, o que conclui o item i).

Agora supomos que $\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx > 0$. Segue da definição de t_{max} e da relação (1.9) que

$$\begin{aligned} s(t_{max}) &= t_{max}^{2-q}\|u\|_H^2 - t_{max}^{r-q}\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx \\ &\geq \left[\tilde{C}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)\right]^{\frac{2-q}{r-2}} \|u\|_H^q - \tilde{C}^{\frac{2-q}{r-2}}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)^{\frac{r-q}{r-2}} \|u\|_H^q. \end{aligned}$$

Pela hipótese (H_{exp}) a desigualdade acima e as definições de $k(q,r)$ e C_2 temos

$$\begin{aligned} s(t_{max}) &\geq k(q,r)\tilde{C}^{\frac{2-q}{r-2}}\|u\|_H^q \\ &\geq \Lambda S_\gamma^q\|u\|_H^q \\ &> \lambda\|f\|_{L_1}S_\gamma^q\|u\|_H^q \\ &\geq \lambda\int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (1.5). Então devido às propriedades da função s, temos que existem únicos $t^+ = t^+(u) < t_{max} < t^-(u) = t^-$, tais que $s(t^\pm) = \lambda\int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx$. Segue da relação (1.6), pois $t^\pm u \in N_\lambda$, que

$$\begin{aligned} < \psi_\lambda'(t^\pm u), t^\pm u > &= (2-q)(t^\pm)^2\|u\|_H^2 - (r-q)(t^\pm)^{r-q}\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx \\ &= (t^\pm)^{q+1}s'(t^\pm), \end{aligned}$$

e por $s'(t^+) > 0$ e $s'(t^-) < 0$ temos que $t^+u \in N_\lambda^+$ e $t^-u \in N_\lambda^-$. Pode-se mostrar facilmente que $m'(t) < 0$ se $t \in (0,t^+)\cup(t^-,\infty)$ e $m'(t) > 0$ se $t \in (t^+,t^-)$ e ainda que $m(t^+) < 0 < m(t^-)$. Portanto

$$I_\lambda(t^+u) = \inf_{0\leq t\leq t_{max}} I_\lambda(tu) < 0 \quad \text{e} \quad I_\lambda(t^-u) = \sup_{t\geq t_{max}} I_\lambda(tu) > 0,$$

o que conclui o item ii).

Considere $u \in N_\lambda^-$ qualquer. Segue da relação (1.10) que $u \in H\backslash Z_h$ e, considerando $w = \frac{u}{\|u\|_H}$, obtemos pelos items acima que existe único $t^-(w)$ tal que $t^-(w)w \in N_\lambda^-$, ou seja, $t^-\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right)\frac{u}{\|u\|_H} \in N_\lambda^-$. Então pela unicidade de $t^-(u)$, segue que

$$\frac{1}{\|u\|_H}t^-\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right) = t^-(u) = 1,$$

pois $u \in N_\lambda^-$. Portanto

$$N_\lambda^- \subset \left\{u \in H\backslash Z_h : t^-(u) = \frac{1}{\|u\|_H}t^-\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right) = 1\right\}.$$

Reciprocamente, se $u \in H\backslash Z_h$ é tal que $\frac{1}{\|u\|_H}t^-\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right) = t^-(u) = 1$, então novamente pela unicidade do valor de $t^-(u)$, temos que $u \in N_\lambda^-$, o que conclui o item iii).

Para cada $u \in U$ definimos $G_u : (0, \infty) \times U \to \mathbb{R}$ por

$$G_u(t, w) = \psi_\lambda(tw) =< I'_\lambda(tw), tw > .$$

Pelo fato de $t^-(u)u \in N_\lambda^-$, segue que

$$G_u(t^-(u), u) =< I'_\lambda(t^-(u)u), t^-(u)u >= 0,$$

e, pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial G_u}{\partial t}(t^-(u), u) = [t^-(u)]^{-1} < \psi'_\lambda(t^-(u)u), t^-(u)u >< 0.$$

Então pelo Teorema da função implícita (veja Teorema A.1), temos que existe uma vizinhança W_u de u sobre U e uma única função $T_u : W_u \to (0, \infty)$ contínua, tal que $G_u(T_u(w), w) = 0$ para todo $w \in W_u$, em particular temos que $T_u(u) = t^-(u)$. Como $u \in U$ é qualquer, temos que a função $T : U \to (0, \infty)$ dada por $T(u) = t^-(u)$ é contínua e injetora. Sendo $T^- : U \to N_\lambda^-$ onde $T^-(u) = t^-(u)u$, temos que T^- é contínua e injetora. Para cada $u \in N_\lambda^-$, pelo item iii), segue que $T^-(w) = u$ onde $w = \frac{u}{\|u\|_H}$, o que mostra que T^- é uma função sobrejetora. Pelo fato de t^- ser contínua sobre o conjunto U segue, por uma composição de funções contínuas, que t^- é uma função contínua sobre $H \backslash Z_h$.

Para concluirmos a demonstração resta mostrar que $\alpha_\lambda^+ < 0 < \alpha_\lambda^-$. Temos pela condição (H_f) que $f_+ \not\equiv 0$ e f_- possui suporte compacto sobre $\mathbb{T}$. Consideremos uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $supp(u) \cap supp(f_-) = \emptyset$ e $\int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx > 0$. Segue pela condição (H_h) que $\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx > 0$, ou seja, $u \in H \backslash Z_h$. Pelo item ii) temos que $\alpha_\lambda^+ \leq I_\lambda(t^+(u)u) < 0$.

Agora, iremos mostrar que $\alpha_\lambda^- > 0$. Decorre da condição (H_h) e das relações (1.4) e (1.5) que para cada $u \in N_\lambda^-$

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \|u\|_H^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u|^q dx \\ &\geq \left(\frac{r-2}{2r}\right) \|u\|_H^2 - \left(\frac{r-q}{qr}\right) \lambda \|f\|_{L_1} S_\gamma^q \|u\|_H^q \\ &> \|u\|_H^q \left[\left(\frac{r-2}{2r}\right) \|u\|_H^{2-q} - \left(\frac{r-q}{qr}\right) S_\gamma^q \Lambda\right], \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato que $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$. Então pelas relações (1.11), (1.17) e as definições de $k(q,r)$ e C_3, para cada $u \in N_\lambda^-$ temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &> S_\gamma^q \left[\tilde{C}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)\right]^{\frac{q}{r-2}} \left(\frac{r-q}{qr}\right) \left[k(q,r) S_\gamma^{-q} \tilde{C}^{\frac{2-q}{r-2}} \left(\frac{r-2}{2-q}\right)^{\frac{q}{r-2}} - \Lambda\right] \\ &> S_\gamma^q \left[\tilde{C}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)\right]^{\frac{q}{r-2}} \left(\frac{r-q}{qr}\right) C_3 \\ &= c > 0, \end{aligned}$$

donde segue pela definição de α_λ^- que $\alpha_\lambda^- \geq c > 0$, o que conclui a demonstração. $\square$

Na sequência introduzimos algumas terminologias.

Definição 1.1 *Dados $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset H$ uma sequência que satisfaz $I_\lambda(u_n) \to c$ e $I'_\lambda(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Então (u_n) é chamada de sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ. Dizemos ainda que $c \in \mathbb{R}$ é um nível (PS) para o funcional I_λ se toda sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ admite subsequência que converge na topologia forte.*

A seguir iremos obter uma condição que garante a existência de sequências $(PS)_{\alpha_\lambda}$ e $(PS)_{\alpha_\lambda^-}$ para o funcional I_λ sobre N_λ e N_λ^- respectivamente:

Lema 1.5 *Suponhamos que as condições $(H_\mathbb{T})$, (H_{exp}), (H_f) e (H_h) sejam satisfeitas e que $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$. Então*

i) existe $(u_n) \subset N_\lambda$ sequência $(PS)_{\alpha_\lambda}$ para o funcional I_λ.

ii) existe $(u_n) \subset N_\lambda^-$ sequência $(PS)_{\alpha_\lambda^-}$ para o funcional I_λ.

Demonstração: Mostraremos primeiramente o item i). Pelo Princípio variacional de Ekeland (veja Teorema A.2), obtemos uma sequência $(u_n) \subset N_\lambda$, de modo que

$$I_\lambda(u_n) < \alpha_\lambda + \frac{1}{n}, \tag{1.18}$$

$$I_\lambda(u_n) < I_\lambda(w) + \frac{1}{n}\|u_n - w\|_H, \tag{1.19}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $w \in N_\lambda$. Devido à relação (1.18) e ao fato do funcional I_λ ser coercivo sobre N_λ (Lema 1.1), temos que (u_n) é uma sequência limitada em H. Agora como $\alpha_\lambda < 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ onde $2 \leq -n_0\alpha_\lambda$. Então para todo $n \geq n_0$, segue pela relação (1.18) que

$$I_\lambda(u_n) = \left(\frac{r-2}{2r}\right)\|u_n\|_H^2 - \left(\frac{r-q}{qr}\right)\lambda\int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx < \frac{\alpha_\lambda}{2} < 0.$$

Como $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$, pelas relações (H_{exp}), (1.5) e as desigualdades acima, podemos supor sem perda de generalidade, que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left[-\frac{\alpha_\lambda}{2S_\gamma^q\Lambda}\left(\frac{qr}{r-q}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|u_n\|_H \leq \left[S_\gamma^q\frac{2}{q}\left(\frac{r-q}{r-2}\right)\Lambda\right]^{\frac{1}{2-q}}. \tag{1.20}$$

Agora iremos mostrar que $\|I'_\lambda(u_n)\|_{H^*} \to 0$ quando $n \to \infty$, para tanto, necessitamos do seguinte resultado:

Afirmação 1.1 *Sob as condições do Lema 1.5 temos, para cada $u \in N_\lambda$ (respect. N_λ^-) que existem $0 < \varepsilon = \varepsilon(u) < \frac{\|u\|_H}{2}$ e $\eta : B(0,\varepsilon) \subset H \to (\frac{1}{2}, 2)$ diferenciável, tal que $\eta(0) = 1$, $\eta(w)(u-w) \in N_\lambda$ (respect. N_λ^-) para todo $w \in B(0,\varepsilon)$. Além disso, para cada $z \in H$, temos que*

$$< \eta'(0), z >= \frac{-2\int_{\mathbb{T}}\nabla u\nabla z + uz\,dx + q\lambda\int_{\mathbb{T}} f|u|^{q-2}uz\,dx + r\int_{\mathbb{T}} h|u|^{r-2}uz\,dx}{(2-q)\|u\|_H^2 - (r-q)\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx}. \tag{1.21}$$

Assumimos a Afirmação 1.1 por um instante. Sejam $u \in H\backslash\{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer. Aplicando a Afirmação 1.1 para $u_n \in N_\lambda$, obtemos uma função $\eta_n : B(0,\varepsilon_n) \subset H \to (\frac{1}{2}, 2)$ diferenciável, onde $0 < \varepsilon_n < \frac{\|u_n\|}{2}$, com $\eta_n(0) = 1$ e $\eta_n(w)(u_n - w) \in N_\lambda$ para todo $w \in B(0,\varepsilon_n)$. Consideremos ainda $0 < \rho < \varepsilon_n$ qualquer e $v_\rho = \eta_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)$ onde $w_\rho = \frac{\rho u}{\|u\|_H}$. Pelo fato de $v_\rho \in N_\lambda$, por (1.19) segue que

$$I_\lambda(v_\rho) - I_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\|_H,$$

e então pelo Teorema do valor médio, obtemos que

$$\langle I'_\lambda(u_n), v_\rho - u_n\rangle + o(\|v_\rho - u_n\|_H) \geq -\frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\|_H.$$

Pela definição de v_ρ e a relação acima obtemos que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\|v_\rho - u_n\|_H &\leq +o(\|v_\rho - u_n\|_H) - \rho\left\langle I'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|_H}\right\rangle \\
&\quad + [\eta_n(w_\rho) - 1]\left\langle I'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\right\rangle \\
&= +o(\|v_\rho - u_n\|_H) - \rho\left\langle I'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|_H}\right\rangle \\
&\quad + [\eta_n(w_\rho) - 1]\left\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(v_\rho), u_n - w_\rho\right\rangle .
\end{aligned}$$

Logo, para todo $0 < \rho < \varepsilon_n$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|_H}\right\rangle &\leq \frac{[\eta_n(w_\rho) - 1]}{\rho}\left\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(v_\rho), u_n - w_\rho\right\rangle \\
&\quad + \frac{\|v_\rho - u_n\|_H}{n\rho} + o(\|v_\rho - u_n\|_H).
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \dfrac{|\eta_n(w_\rho) - 1|}{\rho} \leq \|\eta'_n(0)\|$, a sequência (u_n) é limitada, o funcional I'_λ é de classe C^1 e $v_\rho \to u_n$ quando $\rho \to 0^+$, temos que existe uma constante $C > 0$, independente de n, que satisfaz

$$\left\langle I'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|_H}\right\rangle \leq \frac{C}{n}(1 + \|\eta'_n(0)\|). \tag{1.22}$$

Para concluirmos a demonstração do item i), pela relação acima, basta mostrar que $\|\eta'_n(0)\|$ é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelas relações (1.20) e (1.21), temos que existe $C > 0$, independente de $n \in \mathbb{N}$, tal que para todo $w \in H$

$$| < \eta'_n(0), w > | \leq C\frac{\|w\|_H}{\left|(2-q)\|u_n\|_H^2 - (r-q)\int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx\right|}.$$

Então para mostrarmos que $\|\eta'_n(0)\|$ é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$, é suficiente mostrar que existe $c > 0$ tal que

$$\left|(2-q)\|u_n\|_H^2 - (r-q)\int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx\right| > c. \tag{1.23}$$

Suponha por contradição que não existe $c > 0$ que satisfaça a relação (1.23). Então existe uma subsequência, a qual denotamos simplesmente por (u_n), onde

$$(2-q)\|u_n\|_H^2 - (r-q)\int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx = o(1). \tag{1.24}$$

Devido à relação (1.20) podemos assumir, sem perda de generalidade, que $(u_n) \subset H \backslash Z_h$. Pelo fato de $(u_n) \subset N_\lambda$ segue das relações (1.4) e (1.24) que

$$\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx = \left(\frac{r-2}{r-q}\right) \|u_n\|_H^2 + o(1). \tag{1.25}$$

Considerando a função $F_\lambda : H \backslash Z_h \to \mathbb{R}$ definida na demonstração do Lema 1.3, segue das relações (1.24) e (1.25) que

$$F_\lambda(u_n) = \left(\frac{r-2}{2-q}\right) \left(\frac{2-q}{r-q}\right)^{\frac{r}{r-2}} \left(\frac{\|u_n\|_H^r}{\int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx}\right)^{\frac{2}{r-2}} - \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx = o(1). \tag{1.26}$$

Mas, como $(u_n) \subset N_\lambda$, de modo semelhante a relação (1.16), combinando as relações (1.5), (1.9) e (1.20) com a definição de C_1 e por $0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \Lambda$, segue que

$$F_\lambda(u_n) \geq -\frac{\alpha_\lambda}{2} \left(\frac{qr}{r-q}\right) \Lambda^{\frac{-2}{2-q}} \left(C_1 - \Lambda^{\frac{2}{2-q}}\right) + o(1).$$

Agora pela relação (1.17), temos que $C_1 > \Lambda^{\frac{2}{2-q}}$ e por $\alpha_\lambda < 0$ e a condição (H_{exp}) ser satisfeita, obtemos que existem $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F_\lambda(u_n) > \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, o que contradiz a relação (1.26). Assim, temos que existe $c > 0$ de modo que a relação (1.23) é satisfeita. Portanto existe $C > 0$ onde $\|\eta_n'(0)\| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e então pela relação (1.22), obtemos que $I_\lambda'(u_n) = o(1)$ sobre H^*. Pelo fato de $(u_n) \subset N_\lambda$, temos que $I_\lambda(u_n) \geq \alpha_\lambda$ e pela relação (1.18) segue que $I_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda$. Portanto $(u_n) \subset N_\lambda$ é uma sequência $(PS)_{\alpha_\lambda}$ para o funcional I_λ.

Demonstração da Afirmação 1.1: Considere $u \in N_\lambda$ qualquer. Definimos a função $F : \mathbb{R}^+ \times H \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} F(\eta, w) &= \psi_\lambda(\eta(u-w)) = \langle I_\lambda' (\eta(u-w)), \eta(u-w) \rangle \\ &= \eta^2 \|u-w\|_H^2 - \eta^q \lambda \int_{\mathbb{T}} f|u-w|^q dx - \eta^r \int_{\mathbb{T}} h|u-w|^r dx. \end{aligned}$$

Temos que $F(1,0) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \eta}F(1,0) =< \psi'_\lambda(u), u >\neq 0$, pois pelo fato de $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$ e pelo Lema 1.3 temos que $u \notin N_\lambda^0$. Segue do Teorema da função implícita (Teorema A.1) que existem $\varepsilon > 0$ onde $\varepsilon = \varepsilon(u) < \frac{\|u\|_H}{2}$ e $\eta : B(0,\varepsilon) \subset H \to (\frac{1}{2}, 2)$ diferenciável, tal que $\eta(0) = 1$, $F(\eta(w), w) = 0$ para cada $w \in B(0,\varepsilon)$, ou seja, $\eta(w)(u - w) \in N_\lambda$, para todo $w \in B(0,\varepsilon)$. Ainda pelo Teorema da função implícita temos que $< \eta'(0), z >= -\frac{\frac{\partial F(1,0)}{\partial w}\cdot z}{\frac{\partial F(1,0)}{\partial \eta}}$, para todo $z \in H$, ou seja, a igualdade (1.21) é satisfeita.

Consideremos agora o caso em que $u \in N_\lambda^-$. Decorre da inclusão $N_\lambda^- \subset N_\lambda$, que existem $0 < \varepsilon = \varepsilon(u) < \frac{\|u\|_H}{2}$ e $\eta : B(0,\varepsilon) \subset H \to (\frac{1}{2}, 2)$ diferenciável, tal que $\eta(0) = 1$, $\eta(w)(u-w) \in N_\lambda$, para todo $w \in B(0,\varepsilon)$ a vale a relação (1.21). Suponhamos por absurdo que não existe $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ de modo que, $\eta(w)(u - w) \in N_\lambda^-$, para todo $w \in B(0,\tilde{\varepsilon})$. Então existe uma sequência $(w_n) \subset B(0,\varepsilon)$, onde $\|w_n\|_H \to 0$ quando $n \to \infty$ e $v_n \doteq \eta(w_n)(u - w_n) \notin N_\lambda^-$. Agora como $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$, pelo Lema 1.3 obtemos que $(v_n) \subset N_\lambda^+$. Então pelas relações (1.5), (1.7) e também por $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &< < \psi'_\lambda(v_n), v_n > \\ &\leq \|v_n\|_H^q S_\gamma^q (r-q)\left[\Lambda - \left(\frac{r-2}{r-q}\right)\left(\frac{\|v_n\|_H}{S_\gamma^{\frac{q}{2-q}}}\right)^{2-q}\right]. \end{aligned}$$

Segue do fato de $0 < \varepsilon < \frac{\|u\|_H}{2}$ e das definições de η_n e v_n que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{4}\|u\|_H \leq \|v_n\|_H \leq \frac{3}{2}\|u\|_H.$$

Pelas desigualdades acima, as relações (1.11), (1.17) e a definição de C_4, temos

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\frac{3}{2}\right)^q \|u\|_H^q S_\gamma^q (r-q)\left[\Lambda - \left(\frac{r-2}{r-q}\right)\frac{\|u\|_H^{2-q}}{S_\gamma^q 4^{2-q}}\right] \\ &\leq \|u\|_H^q (2S_\gamma)^q (r-q)\left[\Lambda - \left(\frac{r-2}{r-q}\right)\left[\tilde{C}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)\right]^{\frac{2-q}{r-2}} 4^{q-2} S_\gamma^{-q}\right] \\ &\leq \|u\|_H^q (2S_\gamma)^q (r-q)\left[\Lambda - C_4\right] \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Então existe $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ tal que $\eta(w)(u - w) \in N_\lambda^-$, para cada $w \in B(0,\tilde{\varepsilon})$, o que conclui a demonstração da

Afirmação 1.1. A demonstração do item ii) do Lema 1.5 é semelhante à do item i). □

1.3 Existência de uma solução

Primeiramente iremos obter uma solução u_λ^+ do problema $(P_{\lambda,f,h})$, satisfazendo $u_\lambda^+ \in N_\lambda^+$.

Proposição 1.1 *Suponhamos que as condições $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) e (H_h) sejam satisfeitas e que $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$. Então existe $u_\lambda^+ \in N_\lambda^+$, de modo que*

i) $I_\lambda(u_\lambda^+) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+ < 0$.

ii) u_λ^+ *é solução do problema* $(P_{\lambda,f,h})$, *com* $u_\lambda^+ \gneqq 0$ *em* $\mathbb{T}$.

iii) $\|u_\lambda^+\|_H \to 0$ *quando* $\lambda \to 0$.

Demonstração: Segue do Lema 1.5 i), que existe $(u_n) \subset N_\lambda$ sequência $(PS)_{\alpha_\lambda}$ para o funcional I_λ. Decorre do Lema 1.1 que a sequência (u_n) é limitada sobre H. Então, do fato de H ser reflexivo e das imersões compactas de Sobolev, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $u_\lambda \in H$ tal que $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ fracamente em H e $u_n \to u_\lambda$ fortemente em $L^s_{loc}(\mathbb{T})$ para $s \in (1, 2^*)$ e $u_n \to u_\lambda$ qtp em $\mathbb{T}$. Temos ainda que $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$.

Segue da definição de S_γ que $\||u_n|^q\|_{L^{\frac{\gamma}{q}}(\mathbb{T})} \leq S_\gamma^q \|u_n\|_H^q$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a sequência (u_n) é limitada em H, segue que $(|u_n|^q) \subset L^{\frac{\gamma}{q}}(\mathbb{T})$ é uma sequência limitada. Ainda por $|u_n|^q \to |u_\lambda|^q$ qtp em $\mathbb{T}$, segue pelo Lema $A.2$ que $|u_n|^q \rightharpoonup |u_\lambda|^q$ fracamente em $L^{\frac{\gamma}{q}}(\mathbb{T})$. Como $f \in L_1 = (L^{\frac{\gamma}{q}}(\mathbb{T}))^*$, segue que

$$\int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx = \int_{\mathbb{T}} f|u_\lambda|^q dx + o(1). \tag{1.27}$$

Suponha por contradição que $u_\lambda \equiv 0$, então pela relação acima temos que $\int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx = o(1)$. Logo, como $I'_\lambda(u_n) = o(1)$ em H^*, temos que

$$o(1) =< I'_\lambda(u_n), u_n >= \|u_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx + o(1).$$

Pelo Lema 1.4, segue que $\alpha_\lambda < 0$, então consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{r}\left|\|u_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx\right| + \frac{1}{q}\left|\lambda \int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q\right| < -\frac{\alpha_\lambda}{4},$$

$$I_\lambda(u_n) < \frac{\alpha_\lambda}{2},$$

para todo $n \geq n_0$. Logo para cada $n \geq n_0$, pelas desigualdades acima temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u_n\|_H^2 = I_\lambda(u_n) + \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx - \frac{1}{r}\|u_n\|_H^2 < 0,$$

o que é uma contradição, pois $2 < r$. Portanto $u_\lambda \not\equiv 0$ e como $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$ segue que $u_\lambda \in N_\lambda$ e, em particular, $I_\lambda(u_\lambda) \geq \alpha_\lambda$.

Agora iremos mostrar que, a menos de subsequência, $u_n \to u_\lambda$ fortemente em H. Suponha por contradição que $\|u_\lambda\|_H < \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_H$. Então como $(u_n) \subset N_\lambda$ e $u_\lambda \in N_\lambda$, pelas relações (1.4) e (1.27) temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_\lambda &\leq I_\lambda(u_\lambda) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u_\lambda\|_H^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\lambda\int_{\mathbb{T}} f|u_\lambda|^q dx \\
&< \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u_n\|_H^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\lambda\int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Então pelo Lema $A.4$, a menos de uma subsequência, $u_n \to u_\lambda$ fortemente em H. Note que $u_\lambda \in N_\lambda^+$, pois $u_\lambda \in N_\lambda$ e por I_λ ser contínuo, $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+ < \alpha_\lambda^-$. Considerando $u_\lambda^+ = |u_\lambda|$, temos que $u_\lambda^+ \gneq 0$ pois $u_\lambda \in H\backslash\{0\}$. Se $u \in N_\lambda^+$, segue das relações (1.4) e (1.6) que $|u| \in N_\lambda^+$. Logo por $u_\lambda^+ \in N_\lambda^+$ e $I_\lambda(u_\lambda^+) = I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$ obtemos que $u_\lambda^+ \in N_\lambda$ é um mínimo local do funcional I_λ sobre N_λ. Segue pelo Lema 1.2, que u_λ^+ é uma solução do problema $(P_{\lambda,f,h})$.

Agora pelas relações (1.5) e (1.7), temos que existe uma constante $C > 0$, independente de λ, tal que

$$\|u_\lambda^+\|_H \leq C(\lambda\|f\|_{L_1})^{\frac{1}{2-q}},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

1.4 Segunda solução

Com o objetivo de obter uma segunda solução para $(P_{\lambda,f,h})$, iremos explorar as propriedades da sequência $(PS)_{\alpha_\lambda^-}$ do funcional I_λ sobre N_λ^-. Consideremos $\xi \in C^\infty([0,\infty))$ onde $0 \leq \xi \leq 1$ e $\xi(t) = 0$ para $t \in [0,1]$ e ainda $\xi(t) = 1$ se $t \in [2,\infty)$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $\xi_n : \mathbb{R}^N \to [0,1]$, onde para cada $x \in \mathbb{R}^N$

$$\xi_n(x) = \xi\left(\frac{2|x|}{n}\right).$$

Definimos ainda os funcionais $I_{0,1}$, $I_{0,h} : H \to \mathbb{R}$ por

$$I_{0,1}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} |u|^r dx,$$

$$I_{0,h}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h|u|^r dx.$$

É fácil verificar que $I_{0,h}$ e $I_{0,1}$ são de classe C^1 (veja Lema $A.8$). Consideremos ainda $\tilde{\psi} : H \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{\psi}(u) = \|u\|_H^2 - \int_{\mathbb{T}} |u|^r dx.$$

Sendo

$$\alpha_{0,1} = \inf_{\substack{u \in H\setminus\{0\} \\ \tilde{\psi}(u)=0}} I_{0,1}(u),$$

afirmamos que tal número é positivo. De fato, pelas imersões de Sobolev, existe $C > 0$ de forma que

$$\int_{\mathbb{T}} |u|^r dx \leq C\|u\|_H^r,$$

para todo $u \in H$. Então se $u \in H\setminus\{0\}$ e $\tilde{\psi}(u) = 0$, pela desigualdade acima

$$\|u\|_H^2 = \int_{\mathbb{T}} |u|^r dx \leq C\|u\|_H^r,$$

donde segue que

$$\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{2}{r-2}} \leq \|u\|_H^2.$$

Logo pela relação acima temos

$$I_{0,1}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} |u|^r dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u\|_H^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{2}{r-2}}$$

para toda $u \in H\backslash\{0\}$ onde $\tilde{\psi}(u) = 0$, donde segue que $\alpha_{0,1} > 0$.

Temos então o seguinte resultado:

Lema 1.6 *Suponhamos que as condições* $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) *e* (H_h) *sejam verificadas. Sejam* $(u_n) \subset H$ *uma sequência* $(PS)_\sigma$ *para o funcional* I_λ *onde* $u_n \rightharpoonup 0$ *fracamente em* H *e* $w_n = \xi_n u_n$. *Então existe uma subsequência* (u_n), *tal que*

i) $\|u_n - w_n\|_H = o(1)$,

ii) $\int_{\mathbb{T}} h|u_n|^r dx = \int_{\mathbb{T}} h|w_n|^r dx + o(1) = \int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx + o(1)$,

iii) $\|w_n\|_H^2 = \int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx + o(1)$,

iv) $I_{0,1}(w_n) = I_{0,h}(w_n) + o(1) = \sigma + o(1)$.

Além disso, se existe $c > 0$, *onde* $\|u_n\|_H \geq c$ *para* n *suficientemente grande, então* $\sigma \geq \alpha_{0,1}$.

Demonstração: Pelo fato de $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em H, temos que existe uma subsequência, denotada simplesmente por (u_n), tal que $u_n \to 0$ em $L^l_{loc}(\mathbb{T})$ para $1 \leq l < 2^*$ e $u_n \to 0$ qtp em $\mathbb{T}$. Como $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em H temos, para cada $s \geq 0$, que $\xi_n^s u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em H. Então para cada $s \geq 0$, pelo Lema $A.2$ segue que

$$\int_{\mathbb{T}} f|u_n|^q dx = o(1) = \int_{\mathbb{T}} f\xi_n^s |u_n|^q dx. \tag{1.28}$$

Sendo $\mathbb{T}_n = \{(x', x_N) \in \mathbb{T} : |x_N| \leq n\}$ temos, a menos de subsequência que

$$\int_{\mathbb{T}_n} |u_n|^s dx = o(1), \tag{1.29}$$

para todo $1 \leq s < 2^*$. Agora pela definição de ξ_n e w_n, segue que

$$< u_n, w_n >= \int_{\mathbb{T}} \xi_n(|\nabla u_n|^2 + u_n^2)\, dx + \int_{\mathbb{T}} u_n \nabla u_n \nabla \xi_n dx.$$

Para todo $s > 0$, temos que existe $C_s > 0$, tal que $|\nabla \xi_n^s| \leq \frac{C_s}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então pela desigualdade de Hölder como (u_n) é limitada, obtemos que

$$\int_{\mathbb{T}} u_n \nabla u_n \nabla \xi_n^s dx = o(1), \tag{1.30}$$

para todo $s > 0$. Logo temos que

$$< u_n, w_n >= \int_{\mathbb{T}} \xi_n \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 \right) dx + o(1). \tag{1.31}$$

Do mesmo modo, podemos concluir que

$$\|w_n\|_H^2 = \int_{\mathbb{T}} \xi_n^2 \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 \right) dx + o(1). \tag{1.32}$$

Agora como (u_n) é limitada em H, segue que $(\xi_n^s u_n)$ é limitada em H para cada $s \geq 0$. Logo por $I'_\lambda(u_n) = o(1)$, para temos para cada $s \geq 0$ que

$$\begin{aligned} o(1) &= < I'_\lambda(u_n), \xi_n^s u_n > \\ &= \int_{\mathbb{T}} \nabla u_n \nabla (\xi_n^s u_n) + \xi_n^s u_n^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{T}} f \xi_n^s |u_n|^q dx - \int_{\mathbb{T}} h \xi_n^s |u|^r dx. \end{aligned}$$

Então pela igualdade acima e (1.28), (1.30), segue, para qualquer $s \geq 0$, que

$$\int_{\mathbb{T}} \xi_n^s \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 \right) dx = \int_{\mathbb{T}} h \xi_n^s |u_n|^r dx + o(1). \tag{1.33}$$

Pela condição (H_h), mais precisamente, pelo fato de $\lim\limits_{|x_N| \to \infty} h(x', x_N) \to 1$ para todo $x' \in \Omega'$ e pela relação (1.29), temos para todo $s > 0$ que

$$\int_{\mathbb{T}} h |u_n|^r dx = \int_{\mathbb{T}} h \xi_n^s |u_n|^r dx + o(1) = \int_{\mathbb{T}} \xi_n^s |u_n|^r dx + o(1). \tag{1.34}$$

Segue das relações (1.31) e (1.33) que

$$2 < u_n, w_n >= 2 \int_{\mathbb{T}} \xi_n \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 \right) dx + o(1) = 2 \int_{\mathbb{T}} h \xi_n |u_n|^r dx + o(1).$$

Então pelas relações (1.32), (1.33), (1.34) e a igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} 2 < u_n, w_n > &= \int_{\mathbb{T}} h |u_n|^r dx + \int_{\mathbb{T}} h \xi_n^2 |u_n|^r dx + o(1) \\ &= \|u_n\|_H^2 + \int_{\mathbb{T}} \xi_n^2 \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 \right) dx + o(1) \\ &= \|u_n\|_H^2 + \|w_n\|_H^2 + o(1), \end{aligned}$$

o que demonstra o item i). O item ii) segue da relação (1.34) para $s = r$. Pelas relações (1.32), (1.33) e (1.34), temos que

$$\|w_n\|_H^2 = \int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx + o(1),$$

o que demonstra o item iii). O item iv) segue das relações (1.28) e (1.34), pois

$$\begin{aligned} I_{0,1}(w_n) &= \frac{1}{2}\|w_n\|_H^2 - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h|w_n|^r dx + o(1) \\ &= I_{0,h}(w_n) + o(1) \\ &= I_\lambda(u_n) + o(1) \\ &= \sigma + o(1). \end{aligned}$$

Se existe $c > 0$ tal que $\|u_n\|_H \geq c$, para n suficientemente grande, então pelo item i) e o fato de (u_n) ser limitada em H, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $M > 0$, de modo que

$$\frac{c}{2} \leq \|w_n\|_H \leq M,$$

se $n \geq n_0$. Pelo item iii), a definição de S_r e pelas desigualdades acima, podemos considerar, sem perda de generalidade que

$$\frac{c^2}{4} \leq \int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx \leq S_r^r M^r,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotando $t_n = \left(\frac{\|w_n\|_H^2}{\int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx}\right)^{\frac{1}{r-2}}$, facilmente verifica-se que existem constantes positivas c_1 e c_2, onde $c_1 \leq t_n \leq c_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue da definição de (t_n) que

$$\|t_n w_n\|_H^2 = \int_{\mathbb{T}} |t_n w_n|^r dx.$$

Agora pelo fato de $\frac{c^2}{4} \leq \int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx$ segue, pelo item iii), que $t_n \to 1$ quando $n \to \infty$. Então pela definição de $\alpha_{0,1}$ e por $\int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx$ ser limitada, temos que

$$\alpha_{0,1} \leq I_{0,1}(t_n w_n) = t_n^2 I_{0,1}(w_n) - \frac{t_n^2}{r}\left(t_n^{r-2} - 1\right)\int_{\mathbb{T}} |w_n|^r dx = I_{0,1}(w_n) + o(1),$$

donde segue pelo item iv) que $\sigma \geq \alpha_{0,1}$. $\square$

A seguir iremos dar uma descrição detalhada das sequências (PS) do funcional I_λ sobre N_λ^-:

Lema 1.7 *Suponhamos que as condições* $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) *e* (H_h) *sejam satisfeitas e ainda que* $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$. *Se* $(u_n) \in N_\lambda^-$ *é uma sequência* $(PS)_\sigma$ *para o funcional* I_λ *onde*

$$\sigma < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1},$$

então (u_n) *possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Segue do Lema 1.1 e pelo fato do espaço H ser reflexivo, que existem uma subsequência, denotada simplesmente por (u_n), e $u_0 \in H$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em H.

Suponhamos por contradição que $u_0 \equiv 0$. Decorre da relação (1.11) e por $(u_n) \subset N_\lambda^-$ que existe $c > 0$ tal que $\|u_n\|_H \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então pelo Lema 1.6, obtemos que

$$\sigma \geq \alpha_{0,1},$$

o que é um absurdo, pois $\sigma < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}$ e pelo Lema 1.4 temos $\alpha_\lambda < 0$. Temos ainda que $I'_\lambda(u_0) = 0$, donde segue que $u_0 \in N_\lambda$ e $I_\lambda(u_0) \geq \alpha_\lambda$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\tilde{w}_n = u_n - u_0$. Temos que $I'_\lambda(\tilde{w}_n) = o(1)$ em H^*. Pelo fato de $(\tilde{w}_n)$ ser uma sequência limitada em H e o funcional I_λ ser contínuo, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $I_\lambda(\tilde{w}_n) = \rho + o(1)$ para algum $\rho \in \mathbb{R}$. Logo $(\tilde{w}_n)$ é uma sequência $(PS)_\rho$ do funcional I_λ, a qual satisfaz $\tilde{w}_n \rightharpoonup 0$ fracamente em H. Sendo $w_n = \xi_n \tilde{w}_n$, segue pelo Lema 1.6, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\|\tilde{w}_n - w_n\|_H^2 = o(1) \quad \text{e} \quad I_{0,1}(w_n) = \rho + o(1).$$

Seja $0 < \varepsilon < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1} - \sigma$. Então por I_λ ser contínuo, pela definição de $\tilde{w}_n$ e pela relação acima, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_\lambda + \alpha_{0,1} - \varepsilon > I_\lambda(u_n - \tilde{w}_n + w_n) = I_\lambda(u_0 + w_n),$$

para todo $n \geq n_0$. Pelo fato de $\tilde{w}_n \rightharpoonup 0$ fracamente em H, segue do Lema $A.3$ e do Lema $A.2$ que

$$I_\lambda(u_0 + w_n) = I_\lambda(u_0) + I_{0,h}(w_n) + o(1) \geq \alpha_\lambda + I_{0,1}(w_n) + o(1),$$

onde a última desigualdade segue do Lema 1.6 iv) e do fato que $I_\lambda(u_0) \geq \alpha_\lambda$. Então pelas relações acima e o fato de $\varepsilon > 0$, obtemos

$$\alpha_{0,1} > \lim_{n\to\infty} I_{0,1}(w_n) = \rho. \tag{1.35}$$

Afirmamos que (w_n) admite uma subsequência que converge fortemente a 0 em H. Caso contrário existe $c > 0$ tal que $\|w_n\|_H \geq c$, para n suficientemente grande, donde segue pelo Lema 1.6 que $\alpha_{0,1} \leq \rho$, o que contradiz a relação (1.35). Portanto (w_n) admite uma subsequência que converge fortemente a 0 em H, que resulta, passando a uma subsequência, $\tilde{w}_n \to 0$ fortemente em H, ou seja, a sequência (u_n) possui uma subsequência que converge fortemente a u_0 em H. $\square$

Com o objetivo de mostrar que $\alpha_\lambda^- < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}$, para $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$, iremos utilizar alguns resultados auxiliares. Argumentando como em Lien, Tzeng e Wang [53, Teorema 4.8], temos que existe $w_0 \in H$ solução do problema $(P_{0,0,1})$, tal que

$$I_{0,1}(w_0) = \alpha_{0,1} \quad \text{e} \quad w_0 > 0 \ \text{ em } \mathbb{T},$$

em particular, $\|w_0\|_H^2 = \int_{\mathbb{T}} |w_0|^r dx$. Agora do mesmo modo que Chen, Chen e Wang [31, Proposição 1], temos que para $0 < \varepsilon < 1 + \theta_1$, existem constantes $C_{i,\varepsilon} > 0$, $i = 1, 2$, de modo que

$$C_{1,\varepsilon}\phi_1(x')e^{-\sqrt{1+\theta_1+\varepsilon}|x_N|} \leq w_0(x', x_N) \leq C_{2,\varepsilon}\phi_1(x')e^{-\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}|x_N|}, \tag{1.36}$$

para todo $(x', x_N) \in \mathbb{T}$, onde θ_1 é o primeiro autovalor do problema de Dirichlet $-\Delta$ em Ω' e ϕ_1 é a autofunção positiva associada ao autovalor θ_1.

Munidos de tais informações temos o seguinte resultado crucial para o nosso trabalho.

Lema 1.8 *Suponhamos que as condições* $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) *e* (H_h) *sejam verificadas e que* $0 < \lambda\|f\|_{L_1} < \Lambda$, *então*

$$\alpha_\lambda^- < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}.$$

Demonstração: Para cada $y \in \mathbb{R}$ definimos $w_y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$w_y(x', x_N) = w_0(x', x_N - y),$$

para quaisquer $(x', x_N) \in \mathbb{T}$. Temos então para todo $y \in \mathbb{R}$ que

$$I_{0,1}(w_y) = I_{0,1}(w_0) = \alpha_{0,1}.$$

Consideremos por simplicidade, $u_\lambda \doteq u_\lambda^+ \in N_\lambda^+$ a solução do problema $(P_{\lambda,f,h})$ obtida na Proposição 1.1.

O nosso objetivo será encontrar $y \in \mathbb{R}$ e $l_0 > 0$ onde $u_\lambda + l_0 w_y \in N_\lambda^-$ e

$$I_\lambda(u_\lambda + l_0 w_y) < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}.$$

Pelo fato de $\|w_y\|_H = \|w_0\|_H$ para cada $y \in \mathbb{R}$ e por I_λ ser contínuo, com $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}$, obtemos uma constante $l_1 > 0$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda + l w_y) < \alpha_\lambda + \frac{\alpha_{0,1}}{2},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ e $l \in [0, l_1]$. Temos ainda que existe constante $c > 0$, tal que $\int_{\mathbb{T}} h w_y^r dx > c$, para todo $y \in \mathbb{R}$ e pela relação (1.5), segue que

$$I_\lambda(u_\lambda + l w_y) \leq \frac{1}{2}\|u_\lambda + l w_y\|_H^2 + \frac{\lambda}{q}\|f\|_{L_1}\|u_\lambda + l w_y\|_H^q - \frac{l^r}{r}\int_{\mathbb{T}} h w_y^r dx.$$

Como $q < 2 < r$, pela relação acima temos que existe uma constante $l_2 \geq l_1$, independente de $y \in \mathbb{R}$, de forma que para $l \geq l_2$

$$I_\lambda(u_\lambda + l w_y) < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1} - 1.$$

Portanto, para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$\sup_{l \in [0, l_1] \cup [l_2, \infty)} I_\lambda(u_\lambda + l w_y) < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}. \tag{1.37}$$

Devido a relação (1.37) é suficiente obter $y \in \mathbb{R}$ e $l_0 > 0$ tal que $u_\lambda + l_0 w_y \in N_\lambda^-$ e $I_\lambda(u_\lambda + l w_y) < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}$ para todo $l \in [l_1, l_2]$. Consideremos a função $m : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$m(t) = I_{0,1}(t w_0).$$

Observando que $t = 1$ é o máximo global da função m e que $m(t) = I_{0,1}(tw_y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, segue que

$$I_{0,1}(tw_y) \leq I_{0,1}(w_0) = \alpha_{0,1},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Agora pela relação acima, o fato que $lw_y \in H$ e $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$, segue da relação (1.3) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + lw_y) &= I_\lambda(u_\lambda) + I_{0,1}(lw_y) - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{T}} f\left[(u_\lambda + lw_y)^q - u_\lambda^q\right] dx \\ &\quad + < u_\lambda, lw_y > -\frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h\left[(u_\lambda + lw_y)^r - u_\lambda^r\right] dx + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h(lw_y)^r dx \\ &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \alpha_{0,1} - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{T}} f\left[(u_\lambda + lw_y)^q - u_\lambda^q - qu_\lambda^{q-1}lw_y\right] dx \\ &\quad -\frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}} h\left[(u_\lambda + lw_y)^r - u_\lambda^r - ru_\lambda^{r-1}lw_y\right] dx + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}}(1-h)(lw_y)^r dx, \end{aligned}$$

para todo $l > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Assim, pela desigualdade $(A.7)$, por $h \geq 0$ em $\mathbb{T}$ e $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$, temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + lw_y) &\leq \alpha_\lambda + \alpha_{0,1} + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}}(1-h)(lw_y)^r dx \\ &\quad -\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{T}} f\left[(u_\lambda + lw_y)^q - u_\lambda^q - qlw_y u_\lambda^{q-1}\right] dx, \qquad (1.38) \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ e $l \geq 0$. Segue da condição (H_f) que $f_+ \not\equiv 0$ e f_- possui suporte compacto em $\mathbb{T} = \Omega' \times \mathbb{R}$. Consideremos $K = K' \times [-M, M]$, um compacto em $\mathbb{T}$, onde $f_- \equiv 0$ em $\mathbb{T} \backslash K$ e $\int_K f_+ dx > 0$. Seja ainda

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{4 - q^2}{r^2 + q^2}\right)(1 + \theta_1),$$

qualquer. Então para todo $y \in \mathbb{R}$ e $l \in [l_1, l_2]$, pelas relações (1.36) e $(A.7)$ obtemos que

$$\frac{1}{q}\int_{\mathbb{T}} f_+\left[(u_\lambda + lw_y)^q - u_\lambda^q - qlw_y u_\lambda^{q-1}\right] dx \;\geq\; C_{f_+} e^{-q\sqrt{1+\theta_1+\varepsilon}|y|}, \quad (1.39)$$

onde $C_{f_+} = e^{-q\sqrt{1+\theta_1+\varepsilon}M}\left(l_1 C_{1,\varepsilon} \inf_{x' \in K'}\{\phi_1(x')\}\right)^q \frac{1}{q}\int_K f_+ dx$. Segue do Teorema do valor médio que existe $C > 0$, tal que para todo $l \in [l_1, l_2]$, $y \in \mathbb{R}$ e qualquer $x \in K_0 = K \cap \{x : u(x) > 0\}$ temos

$$[u_\lambda(x) + lw_y(x)]^q - u_\lambda^q(x) - qlw_y(x)u_\lambda^{q-1}(x) \leq Cw_y^2(x).$$

Logo por (1.36) existe $C_{f_-} \geq 0$, onde $C_{f_-} \geq 2Ce^{2\sqrt{1+\theta_1}M}\|f_-\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{K'}\phi_1^2(x')dx'$, tal que

$$\frac{1}{q}\int_{\mathbb{T}} f_-\left[(u_\lambda + lw_y)^q - u_\lambda^q - qlw_y u_\lambda^{q-1}\right]dx \;\; \leq \;\; C_{f_-}e^{-2\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}|y|}, \quad (1.40)$$

Agora pela condição (H_h), mais precisamente, o fato que

$$h(x', x_N) \geq 1 - C_0 e^{-2\sqrt{1+\theta_1}|x_N|},$$

para todo $(x', x_N) \in \mathbb{T}$ e pela relação (1.36), temos para todo $y \in \mathbb{R}$ e $l \in [l_1, l_2]$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}}(1-h)(lw_y)^r dx \\ &\leq C_0(l_2C_{2,\varepsilon})^r|\Omega'|\|\phi\|^r_{L^\infty(\Omega')}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sqrt{1+\theta_1}|x_N| - r\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}|x_N-y|}dx_N. \quad (1.41)\end{aligned}$$

Considerando $m_\varepsilon = \min\{2\sqrt{1+\theta_1},\, r\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}\}$, segue para todo $y \in \mathbb{R}$ que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sqrt{1+\theta_1}|x_N| - r\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}|x_N-y|}dx_N \leq \left(2|y| + \frac{2}{m_\varepsilon}\right)e^{-m_\varepsilon|y|}.$$

Então, pela estimativa acima e a relação (1.41) temos que existe $C_h > 0$, tal que para cada $y \in \mathbb{R}$ e $l \in [l_1, l_2]$

$$\frac{1}{r}\int_{\mathbb{T}}(1-h)(lw_y)^r dx \leq C_h(1+|y|)e^{-m_\varepsilon|y|}. \quad (1.42)$$

Pelo fato que $0 < \varepsilon < \left(\frac{4-q^2}{r^2+q^2}\right)(1+\theta_1)$, através de simples cálculos obtemos

$$q\sqrt{1+\theta_1+\varepsilon} < \min\{m_\varepsilon,\, 2\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}\}. \quad (1.43)$$

Consideremos a função $A : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$A(t) = -\lambda C_{f_+}e^{-qt\sqrt{1+\theta_1+\varepsilon}} + \lambda C_{f_-}e^{-2t\sqrt{1+\theta_1-\varepsilon}} + C_h(1+t)e^{-tm_\varepsilon}.$$

Segue pela relação (1.43) que existe $R_0 > 0$, tal que $A(t) < 0$, para $t \geq R_0$. Então se $|y| \geq R_0$, pelas relações (1.38), (1.39), (1.40) e (1.42) temos que

$$\sup_{l\in[l_1,l_2]} I_\lambda(u_\lambda + lw_y) < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}. \quad (1.44)$$

Portanto, pelas relações (1.37) e (1.44) obtemos, se $|y| \geq R_0$, que

$$\sup_{l\in[0,\infty)} I_\lambda(u_\lambda + lw_y) < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1}. \quad (1.45)$$

Fixemos $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y| \geq R_0$. Devido à relação acima, para completar a demonstração é suficiente encontrar uma constante $l_0 > 0$, de modo que $u_\lambda + l_0 w_y \in N_\lambda^-$. Consideremos os conjuntos

$$A_1 = \{u \in H \backslash Z_h : t^-(u) < 1\} \;\text{ e }\; A_2 = \{u \in H \backslash Z_h : t^-(u) > 1\} \cup Z_h.$$

Segue do Lema 1.4 que $H \backslash N_\lambda^- = A_1 \cup A_2$. Como $u_\lambda \in N_\lambda^+$, pelas relações (1.7) e (1.8) temos que $u_\lambda \in H \backslash Z_h$. Então pelo item ii) do Lema 1.4 temos que $1 = t^+(u_\lambda) < t^-(u_\lambda)$, ou seja, $u_\lambda \in A_2$. A seguir iremos encontrar $\tilde{l} > 0$ de modo que $u_\lambda + \tilde{l} w_y \in A_1$. Como $u_\lambda \in H \backslash Z_h$ e pelo fato de $w_y > 0$ em $\mathbb{T}$, então obtemos que $u_\lambda + l w_y \in H \backslash Z_h$ para todo $l \geq 0$. Temos que existe $c > 0$, de modo que

$$0 < t^- \left(\frac{u_\lambda + l w_y}{\|u_\lambda + l w_y\|_H} \right) \leq c,$$

para todo $l \geq 0$. Suponha por contradição que não existe tal $c > 0$. Então existe uma sequência $(l_n) \subset [0, \infty)$ onde $l_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e sendo $v_n = \frac{u_\lambda + l_n w_y}{\|u_\lambda + l_n w_y\|_H}$ temos que $t^-(v_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que

$$\int_{\mathbb{T}} h|v_n|^r dx \to \frac{\int_{\mathbb{T}} h|w_y|^r dx}{\|w_0\|_H^r} > 0,$$

pois $w_y > 0$ e $h \gneqq 0$ em $\mathbb{T}$. Agora como $(t^-(v_n)v_n) \subset N_\lambda^-$, segue do Lema 1.1 que $I_\lambda(t^-(v_n)v_n)$ é limitado inferiormente. Mas pela relação acima e o fato de $q < 2 < r$, temos

$$\begin{aligned} &I_\lambda(t^-(v_n)v_n) \\ &= \frac{1}{2}\left[t^-(v_n)\right]^2 - \frac{\lambda\,[t^-(v_n)]^q}{q} \int_{\mathbb{T}} f|v_n|^q dx - \frac{[t^-(v_n)]^r}{r} \int_{\mathbb{T}} h|v_n|^r dx \to -\infty, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Portanto existe $c > 0$ tal que $0 < t^- \left(\frac{u_\lambda + l w_y}{\|u_\lambda + l w_y\|_H} \right) \leq c$, para todo $l \geq 0$. Consideremos $\tilde{l} > 0$, onde $\tilde{l}^2 \|w_0\|_H^2 - 2\tilde{l}\|u_\lambda\|_H \|w_0\|_H > c^2$. Então pela desigualdade de Cauchy, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda + \tilde{l} w_y\|_H^2 &= \|u_\lambda\|_H^2 + \tilde{l}^2 \|w_y\|_H^2 + 2\tilde{l} < u_\lambda, w_y > \\
&\geq \|u_\lambda\|_H^2 + \tilde{l}^2 \|w_y\|_H^2 - 2\tilde{l} \|u_\lambda\|_H \|w_y\|_H \\
&> c^2 \\
&\geq \left[t^- \left(\frac{u_\lambda + \tilde{l} w_y}{\|u_\lambda + \tilde{l} w_y\|_H} \right) \right]^2,
\end{aligned}$$

donde pelo item iii) do Lema 1.4 segue que

$$t^-(u_\lambda + \tilde{l} w_y) = \frac{1}{\|u_\lambda + \tilde{l} w_y\|_H} t^- \left(\frac{u_\lambda + \tilde{l} w_y}{\|u_\lambda + \tilde{l} w_y\|_H} \right) < 1,$$

ou seja, $u_\lambda + \tilde{l} w_y \in A_1$. Consideremos a função $F : [0, 1] \to (0, \infty)$ definida por

$$F(s) = t^-(u_\lambda + s\tilde{l} w_y).$$

Temos que $F(0) = t^-(u_\lambda) > 1$ e $F(1) = t^-(u_\lambda + \tilde{l} w_y) < 1$, então segue do fato de F ser contínua que existe $s_0 \in (0, 1)$ tal que $F(s_0) = 1$, ou seja, $t^-(u_\lambda + s_0 \tilde{l} w_y) = 1$. Sendo $l_0 = s_0 \tilde{l}$, temos novamente pelo Lema 1.4 que $u_\lambda + l_0 w_y \in N_\lambda^-$. Segue da relação (1.45) que

$$\alpha_\lambda^- < \alpha_\lambda + \alpha_{0,1},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

A seguir iremos obter uma solução $u_\lambda^- \in N_\lambda^-$ do problema $(P_{\lambda,f,h})$.

Proposição 1.2 *Suponhamos que as condições* $(H_{\mathbb{T}})$, (H_{exp}), (H_f) *e* (H_h) *sejam satisfeitas e que* $0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \Lambda$. *Então existe* $u_\lambda^- \in N_\lambda^-$ *satisfazendo*

i) $I_\lambda(u_\lambda^-) = \alpha_\lambda^- > 0$.

ii) u_λ^- *é uma solução do problema* $(P_{\lambda,f,h})$, *onde* $u_\lambda^- \gneq 0$ *em* $\mathbb{T}$.

Demonstração: Segue do Lema 1.5 ii) que existe $(u_n) \subset N_\lambda^-$ sequência $(PS)_{\alpha_\lambda^-}$ para o funcional I_λ. Decorre do Lema 1.8 e do Lema 1.7, que existe $u_\lambda \in H$ onde, a menos de subsequência, $u_n \to u_\lambda$ fortemente em H. Então por

I_λ ser de classe C^1 temos que $< I'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda >= 0$ e também $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda^- > 0$, donde segue que $u_\lambda \in N_\lambda$. Como $(u_n) \subset N_\lambda^-$, pela relação (1.7) e por ψ_λ ser de classe C^1 temos

$$\langle \psi'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda \rangle \leq 0.$$

Pelo fato de $0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \Lambda$, temos pelo Lema 1.3 que $N_\lambda^0 = \emptyset$, donde segue pela relação acima que $\langle \psi'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda \rangle < 0$, ou seja, $u_\lambda \in N_\lambda^-$. Considerando $u_\lambda^- \doteq |u_\lambda|$ temos que $u_\lambda^- \not\equiv 0$, pois $u_\lambda \in H \backslash \{0\}$. Se $u \in N_\lambda^-$, segue pelas relações (1.4) e (1.7) que $|u| \in N_\lambda^-$. Logo $u_\lambda^- \in N_\lambda^-$ e por $I_\lambda(u_\lambda^-) = I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda^-$, temos que $u_\lambda^- \in N_\lambda$ é um mínimo local do funcional I_λ sobre N_λ. Segue então do Lema 1.2 que u_λ^- é solução do problema $(P_{\lambda, f, h})$. $\square$

Concluímos este capítulo com a demonstração do Teorema 1.1.

Demonstração do Teorema 1.1: Se $0 < \lambda \|f\|_{L_1} < \Lambda$, segue da Proposição 1.1 e Proposição 1.2 que existem duas soluções não triviais $u_\lambda^+ \in N_\lambda^+$ e $u_\lambda^- \in N_\lambda^-$ do problema $(P_{\lambda, f, h})$. Temos que tais soluções são distintas pois $N_\lambda^+ \cap N_\lambda^- = \emptyset$. $\square$

Capítulo 2

Problema quase linear com não linearidade crítica em $\mathbb{R}^N$

2.1 Introdução

Neste capítulo, garantimos através de métodos variacionais, mais precisamente, utilizando técnicas de minimização e uma variação do Teorema do passo da montanha, a existência de múltiplas soluções (fracas) para a seguinte classe de problema elíptico quase linear com crescimento crítico

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u \;=\; \lambda f(x)|u|^{q-1} + |u|^{p^*-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ 0 \lneq u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante e a dimensão, bem como os expoentes, satisfazem

$$(\mathcal{H}_{exp}) \qquad 1 < q < p, \qquad 2 \leq p < N \qquad \text{e} \qquad p^* = \frac{pN}{N-p}$$

e consideremos o espaço $\mathcal{D}^{1,p} = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ como o fecho de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A função peso $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é mensurável e satisfaz as seguintes condições

$$(\mathcal{H}_f) \qquad f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N\backslash\{0\}),\ 0 \not\equiv f_+ \in C(\mathbb{R}^N\backslash\{0\}) \text{ e existem } \ a < N\frac{(q-p^*)}{p^*} < b$$
$$f(x) = \begin{cases} O(|x|^b), & \text{quando} \quad |x| \to 0 \\ O(|x|^a), & \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases}$$

Tais restrições nas condições de crescimento da função peso f são necessárias para que tenhamos uma condição de compacidade. Condições semelhantes foram utilizadas por Szulkin e Willem [66]. Ainda Egnell [42, 43], bem como Noussair, Swanson e Yang [57] demonstraram que tais restrições nas condições de crescimento são necessárias para que haja solução não trivial.

Nos últimos anos, inúmeros trabalhos apresentaram resultados de existência e multiplicidade de soluções fracas para equações elípticas quase lineares com crescimento crítico. Por exemplo, Garcia e Peral em [46], estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-1} + |u|^{p^*-1}, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$E_{\lambda,p}$}$$

onde λ é um parâmetro real positivo, $1 < q < p < N$ e Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$. Eles provaram, utilizando o Teorema do passo da montanha, que para $\frac{2N}{N+2} < p < 3$ e $1 < q < p$, ou $p \geq 3$ e $p^* - \frac{2}{p-1} < q < p$, existe $\lambda_0 > 0$ de modo que o problema $(E_{\lambda,p})$ possui ao menos duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Huang [51], utilizando argumentos variacionais sobre a variedade de Nehari, estendeu os resultados de [46], apenas para $2 \leq p < N$, no sentido que tais resultados sejam válidos para quaisquer $1 < q < p$. Para demais resultados em domínios limitados citamos [7, 12, 18, 45, 62, 74] e suas referências.

Em todo o espaço, ou seja quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, Silva e Soares em [61], sob as hipóteses que $p^2 < N$, $\max\{1, p^* - \frac{p}{p-1}\} < q \leq p$ e ainda $f \in C(\mathbb{R}^N)$ com $0 \neq f_+ \in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ estabeleceram, através do Teorema do passo da montanha, a existência de $\lambda_0 > 0$ de modo que o problema (P_λ) admite ao menos uma solução não trivial para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Alves em [5], considerou o problema (P_λ) sob as condições que $f \in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ é uma função não negativa e que a condição $(\mathcal{H}_{exp})$ é satisfeita. Utilizando técnicas de minimização e o Teorema do passo da montanha, ele provou a existência de $\lambda_0 > 0$, de modo que se $\lambda \in (0, \lambda_0)$, então o problema (P_λ) possui ao menos duas soluções não triviais. Para outros resultados mais gerais em domínios ilimitados mencionamos [6, 8, 9, 11, 14, 15, 37, 41, 56, 73] bem como suas referências.

A seguir enunciamos o nosso resultado:

Teorema 2.1 *[54, Teorema 1.1, p=2] Suponhamos que as condições $(\mathcal{H}_{exp})$ e $(\mathcal{H}_f)$ sejam satisfeitas. Então existe uma constante positiva $\Lambda = \Lambda(q, p, f, N)$, tal que o problema (P_λ) possui ao menos duas soluções não triviais para $0 < \lambda < \Lambda$.*

Observação 2.1 *Obtemos um resultado semelhante com hipóteses mais gerais sobre a função peso f. Se ao invés da hipótese $(\mathcal{H}_f)$ supormos que a função mensurável $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz*

$$(\mathcal{H}'_f) \qquad \begin{array}{l} f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{Y}), \;\; 0 \not\equiv f_+ \in C(\mathbb{R}^N \backslash \overline{Y}), \;\; \textit{onde} \\ Y = (y_n) \subset \mathbb{R}^N \;\; \textit{e existem} \;\; a < N\frac{(q-p^*)}{p^*} < b_n, \\ f(x) = \begin{cases} O(|x - y_n|^{b_n}), & \textit{quando} \quad x \to y_n \\ O(|x|^a), & \textit{quando} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \end{array}$$

então as mesmas conclusões do Teorema 2.1 são válidas.

Ressaltamos que o nosso resultado estende os resultados citados anteriormente, no sentido que consideramos o problema sobre todo o $\mathbb{R}^N$ e/ou abrange uma classe mais ampla de funções peso, por exemplo, a função

$$f(x) = -|x|^{-p}\chi_A(|x|) + \chi_B(|x|)|3|x| - 6|^{-N} + |x|^{-N}\chi_D(|x|),$$

onde $A = (0, 1)$, $B = (2, 3]$, $D = (3, \infty)$ e χ é a função característica, satisfaz a hipótese $(\mathcal{H}_f)$. Como mencionamos anteriormente, para demonstrar tais resultados utilizaremos técnicas de minimização e uma variante do Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale. Ressaltamos que, para empregar tal resultado, há a necessidade de estimativas “precisas” dos níveis de energia do funcional associado ao problema (P_λ). Estas estimativas foram obtidas, provando inicialmente, que as soluções u do problema (P_λ), sob nossas hipóteses, possuem certa regularidade, a saber, $u \in C^{1,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$. Posteriormente, utilizando tais condições de regularidade, obtemos uma estimativa suficientemente "precisa" adaptando alguns argumentos utilizados por Yang [72] e também por Huang [51].

2.2 Resultados preliminares

Recordemos a nossa notação para a norma do espaço de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{L^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}, \quad 1 \leq s < \infty.$$

Neste capítulo, consideremos $u_+ = \max\{0, u\}$ e $u_- = \min\{0, u\}$, para toda $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ e denotaremos por S a seguinte constante positiva, denominada constante de Sobolev,

$$S = \inf \left\{ \frac{\|u\|^p}{\|u\|^p_{L^{p^*}}} : u \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\} \right\}.$$

Como utilizaremos argumentos variacionais para provar os resultados, consideramos o funcional associado ao problema (P_λ), a saber,

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f u_+^q dx - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_+^{p^*} dx,$$

para cada $u \in \mathcal{D}^{1,p}$. Segue da condição $(\mathcal{H}_f)$ que $I_\lambda \in C^1(\mathcal{D}^{1,p}, \mathbb{R})$ (veja Lema $A.8$), com derivada $I'_\lambda(u)$ em cada $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ dada por

$$\begin{aligned} &< I'_\lambda(u), \varphi >= \\ &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f u_+^{q-1} \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_+^{p^*-1} \varphi \, dx, \end{aligned} \tag{2.1}$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}$. Observemos que os pontos críticos do funcional I_λ são exatamente as soluções (fracas) do problema (P_λ). Ainda pela hipótese $(\mathcal{H}_f)$ e a desigualdade de Hölder, temos que existe uma constante $C_f > 0$, onde

$$\lambda \left| \int_{\mathbb{R}^N} f |u|^q dx \right| \quad \leq \quad \lambda C_f \|u\|^q, \tag{2.2}$$

para toda $u \in \mathcal{D}^{1,p}$.

A seguir apresentaremos alguns fatos relevantes para o estudo do problema (P_λ).

Observação 2.2 *i) Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}$ uma sequência que satisfaz $I_\lambda(u_n) \to c$ e $I'_\lambda(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Então (u_n) é chamada de sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um nível (PS) para o funcional I_λ se toda sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ admite subsequência que converge na topologia forte.*

ii) Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, então (u_n) é limitada. De fato, temos que

$$p^* I_\lambda(u_n) = \frac{p^*}{p}\|u_n\|^p - \frac{p^*\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f u_{n+}^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_{n+}^{p^*} dx,$$
$$\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|^p - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} f u_{n+}^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_{n+}^{p^*} dx.$$

Logo pelas igualdades acima e a relação (2.2), temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{p^*-p}{p}\right)\|u_n\|^p &\leq C(1+\|u_n\|) + \frac{p^*-q}{q}\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f u_{n+}^q dx\\ &\leq C(1+\|u_n\|+\|u_n\|^q),\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Como $q < p$, segue que a sequência (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$.

iii) Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, então (u_{n+}) também é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ.
De fato, segue pelo item acima que (u_{n-}) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$, e ainda pela relação (2.1) temos

$$o(1) = \langle I'_\lambda(u_n), u_{n-}\rangle = \|u_{n-}\|^p.$$

Além disso, novamente pela relação (2.1), temos para cada $\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}$ que

$$\begin{aligned}&< I'_\lambda(u_{n+}), \varphi >\\ =\ & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n+}|^{p-2}\nabla u_{n+}\nabla\varphi\, dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} f u_{n+}^{q-1}\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_{n+}^{p^*-1}\varphi\, dx\\ =\ & < I'_\lambda(u_n), \varphi > - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n-}|^{p-2}\nabla u_{n-}\nabla\varphi\, dx,\end{aligned}$$

donde segue que $I'_\lambda(u_{n+}) = o(1)$. Logo temos que (u_{n+}) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, pois pela definição do funcional I_λ, temos

$$I_\lambda(u_{n+}) = I_\lambda(u_n) - \frac{1}{p}\|u_{n-}\|^p = c + o(1).$$

iv) Na sequência iremos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que toda sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, (u_n), satisfaz as seguintes condições

$$u_n \geq 0 \ \ qtp \ em \ \mathbb{R}^N, \qquad u_n \rightharpoonup u \ \ fracamente \ em \ \mathcal{D}^{1,p},$$

$$u_n \to u \ \ qtp \ em \ \mathbb{R}^N, \qquad u \geq 0 \ \ qtp \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Como consequência da hipótese $(\mathcal{H}_f)$ temos a seguinte condição de compacidade.

Lema 2.1 *Suponhamos que as condições $(\mathcal{H}_{exp})$ e $(\mathcal{H}_f)$ sejam verificadas. Se $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, então existe uma subsequência (u_n), de modo que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f|u_n|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f|u|^q \, dx + o(1).$$

Demonstração: Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$ pelas imersões compactas de Sobolev, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_n \to u$ fortemente em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Temos ainda que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$, logo existe uma constante $C > 0$ onde $\|u_n\|_{L^{p^*}} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos para cada r, $R > 0$, os valores

$$A_r = \sup_{|x| \leq r} \left(\frac{|f(x)|}{|x|^b} \right) \left(\int_{|x| \leq r} 2|x|^{\frac{p^* b}{p^* - q}} \, dx \right)^{\frac{p^*-q}{q}},$$

$$A^R = \sup_{|x| \geq R} \left(\frac{|f(x)|}{|x|^a} \right) \left(\int_{|x| \geq R} 2|x|^{\frac{p^* a}{p^* - q}} \, dx \right)^{\frac{p^*-q}{q}}.$$

Segue da condição $(\mathcal{H}_f)$ que $A_r \to 0$ quando $r \to 0$ e $A^R \to 0$ quando $R \to \infty$. Fixado $\varepsilon > 0$ qualquer, sejam r_0, R_0 tais que $(A_{r_0} + A^{R_0}) < \frac{\varepsilon}{3C^q}$. Note que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f[|u_n|^q - |u|^q] \, dx \right| \leq C^q(A_{r_0} + A^{R_0}) + \sup_{r_0 \leq |x| \leq R_0} |f(x)| \left| \int_{r_0 \leq |x| \leq R_0} [|u_n|^q - |u|^q] \, dx \right|.$$

Como $u_n \to u$ fortemente em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e sendo f localmente limitada em $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{r_0 \leq |x| \leq R_0} |f(x)| \left| \int_{r_0 \leq |x| \leq R_0} [|u_n|^q - |u|^q] \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n \geq n_0$. Então para todo $n \geq n_0$, temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f[|u_n|^q - |u|^q] \, dx \right| < \varepsilon.$$

Pelo fato de $\varepsilon > 0$ ser qualquer segue o resultado. $\square$

Na sequência denotaremos por C_1 a seguinte constante positiva

$$C_1 = C_1(q,p) = (p^2)^{\frac{q-p^*}{p^*-p}} \frac{q}{C_f} \left(\frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \right)^{\frac{q-p}{p^*-p}} \left(\frac{p-q}{p^*-p} \right)^{\frac{p-q}{p^*-p}} \left(\frac{p^*-p}{p^*-q} \right)^{\frac{p^*-q}{p^*-p}}. \quad (2.3)$$

A seguir apresentamos um resultado que será extremamente útil para mostrarmos que o funcional I_λ satisfaz a geometria do Teorema do passo da montanha.

Lema 2.2 *Suponhamos que as condições $(\mathcal{H}_{exp})$ e $(\mathcal{H}_f)$ sejam válidas e que $0 < \lambda < C_1$. Então existem constantes ν, $\mu > 0$, independentes de λ, onde*

$$I_\lambda(u) \geq \nu, \quad \textit{se} \quad \|u\| = \mu.$$

Demonstração: Pelo fato de $0 < \lambda < C_1$, segue da relação (2.2) e da definição S que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \alpha\|u\|^q - \beta\|u\|^{p^*}, \quad (2.4)$$

onde $\alpha = \frac{C_f C_1}{q}$ e $\beta = \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}}$. Consideremos $Q : (0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por

$$Q(t) = \alpha t^{q-p} + \beta t^{p^*-p}.$$

Pela condição $(\mathcal{H}_{exp})$ temos que $Q(t) \to \infty$ quando $t \to 0$ ou se $t \to \infty$. Então como a função Q é contínua, temos que existe $\mu > 0$ de modo que

$$Q(\mu) = \min_{t>0} Q(t).$$

Fazendo os cálculos, obtemos que $\mu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p-q}{p^*-p}\right)^{\frac{1}{p^*-q}}$ e pela definição de α, β e C_1, segue que

$$\begin{aligned}
Q(\mu) &= \alpha^{\frac{p^*-p}{p^*-q}}\beta^{\frac{p-q}{p^*-q}}\left(\frac{p-q}{p^*-p}\right)^{\frac{q-p}{p^*-q}} + \alpha^{\frac{p^*-p}{p^*-q}}\beta^{\frac{p-q}{p^*-q}}\left(\frac{p-q}{p^*-p}\right)^{\frac{p^*-p}{p^*-q}} \\
&= C_1^{\frac{p^*-p}{p^*-q}}\left(\frac{C_f}{q}\right)^{\frac{p^*-p}{p^*-q}}\left(\frac{1}{p^*S^{\frac{p^*}{p}}}\right)^{\frac{p-q}{p^*-q}}\left(\frac{p^*-p}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p^*-q}}\left(\frac{p^*-q}{p^*-p}\right) \\
&= \left[(p^2)^{\frac{q-p^*}{p^*-p}}C_1C_1^{-1}\right]^{\frac{p^*-p}{p^*-q}} \\
&= \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

Então por (2.4) e a igualdade acima, temos se $\|u\| = \mu$, que

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|^p\left(\frac{1}{p} - Q(\|u\|)\right) = \mu^p\left(\frac{p-1}{p^2}\right) \doteq \nu.$$

Para estimativas futuras, pelo fato de Q ser contínua, consideremos $\tau \in \left(0, \frac{\mu}{2}\right)$, de modo que se $t > 0$ e $|\mu - t| \leq \tau$, então

$$Q(t) < Q(\mu) + \left(\frac{p-1}{2p^2}\right) = \frac{p+1}{2p^2}. \tag{2.5}$$

□

Sendo C_1 a constante definida pela relação (2.3) e $\tau \in \left(0, \frac{\mu}{2}\right)$ a constante obtida na demonstração acima, consideremos

$$0 < \Lambda = \Lambda(q,p,f,N) = \min\left\{C_1, \frac{qp^*\tau^{p-q}}{NC_f(p^*-q)}\right\}. \tag{2.6}$$

Para qualquer $\lambda \in (0,\Lambda)$ definimos

$$\alpha_\lambda = \inf_{u\in\overline{B}} I_\lambda(u),$$

onde $B \doteq B(0,\mu) \subset \mathcal{D}^{1,p}$. Segue pela relação (2.2) e as imersões de Sobolev que $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $\alpha_\lambda \in (-\infty, 0)$. De fato, consideremos $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ onde $u \geq 0$, $k = \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} fu^q dx > 0$ e seja ainda $0 < t < \min\left\{\frac{\mu}{\|u\|}, \left(\frac{pk}{\|u\|^p}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right\}$. Observemos que $tu \in B$ e pelo fato que

$$I_\lambda(tu) \leq \frac{t^p}{p}\|u\|^p - t^q k = t^q\left(\frac{t^{p-q}}{p}\|u\|^p - k\right) < 0,$$

donde segue que $\alpha_\lambda < 0$.

A seguir apresentamos uma condição, sobre os níveis de energia do funcional I_λ, para que uma solução do problema (P_λ) seja não trivial.

Lema 2.3 *Suponhamos que as condições* $(\mathcal{H}_{exp})$ *e* $(\mathcal{H}_f)$ *sejam satisfeitas e ainda que* $\lambda \in (0,\Lambda)$. *Se existe uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I_λ, *onde* $c \in (-\infty, 0) \cup (0, \alpha_\lambda + \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}})$, *então o problema* (P_λ) *admite uma solução* $u \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\}$. *Além disso se* $I_\lambda(u) \geq \alpha_\lambda$, *então* $I_\lambda(u) = c$.

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ. Devido a Observação 2.2 podemos considerar $u_n \geq 0$ e que existe $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ onde $u \geq 0$ e a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$.

Suponhamos por contradição que $u \equiv 0$. Então pelo Lema 2.1 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f u_n^q \, dx = o(1),$$

e então pelo fato de $\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle = o(1)$, obtemos

$$\|u_n\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx + o(1). \tag{2.7}$$

Logo, pelo fato de (u_n) ser uma sequência $(PS)_c$, segue das relações acima que

$$c = I_\lambda(u_n) + o(1) = \frac{1}{N}\|u_n\|^p + o(1).$$

Se $c \in (-\infty, 0)$, pela última relação temos um absurdo, o que implica $u \not\equiv 0$. Se $c \in (0, \alpha_\lambda + \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}})$, então temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_n\|^p \geq \frac{c}{2}$ se $n \geq n_0$. Mas pela relação (2.7), a definição de S, o fato de $\alpha_\lambda < 0$ e a igualdade acima, obtemos que

$$c < \alpha_\lambda + \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}} \leq \frac{1}{N}\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{\|u_n\|^N}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx\right)^{\frac{N}{p^*}}}\right\} = \frac{1}{N}\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p = c,$$

o que é uma contradição. Portanto temos que $u \not\equiv 0$.

Afirmamos que u é uma solução do problema (P_λ), para tanto basta mostrar que $I'_\lambda(u) = 0$. Primeiramente, mostremos que para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f u_n^{q-1}\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f u^{q-1}\varphi \, dx + o(1), \tag{2.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*-1}\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*-1}\varphi\,dx + o(1). \tag{2.9}$$

Considerando as constantes A_r, A^R definidas na demonstração do Lema 2.1, então pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^N} f[u_n^{q-1}\varphi - u^{q-1}\varphi]\,dx\right|\\ \leq\;& (A_r + A^R)\|u_n\|_{L^{p^*}}^{q-1}\|\varphi\|_{L^{p^*}} + \sup_{r\leq|x|\leq R}|f(x)|\left|\int_{r\leq|x|\leq R}\varphi[u_n^{q-1} - u^{q-1}]\,dx\right|.\end{aligned}$$

Note que $A_r \to 0$ quando $r \to 0$ e $A^R \to 0$ quando $R \to \infty$. Sendo $(\|u_n\|_{L^{p^*}})$ limitada, temos que o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima tende a zero, quando $r \to 0$ e $R \to \infty$. Fixados $r, R > 0$ convenientes, temos que o segundo termo também tende a zero, pois f é localmente limitada em $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ e pelo Lema $A.2$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi[u_n^{q-1} - u^{q-1}]\,dx = o(1),$$

pois $(u_n^{q-1}) \subset L^{\frac{p}{q-1}}(\mathbb{R}^N)$ é limitada e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{p}{p-q+1}}(\mathbb{R}^N) = (L^{\frac{p}{q-1}}(\mathbb{R}^N))^*$. Portanto a relação (2.8) é válida. A relação (2.9) também é consequência do Lema $A.2$, observando-se que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\mathbb{R}^N)$.

Considerando $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qualquer temos para cada $1 \leq i \leq N$, que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N) = (L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N))^*$ e ainda pelo Lema $A.5$ e o Lema $A.2$, obtemos

$$|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N),\;\; 1 \leq i \leq N,$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx + o(1). \tag{2.10}$$

Então por (u_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, segue pelas relações (2.8), (2.9) e (2.10) que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\langle I_\lambda'(u), \varphi\rangle = 0,$$

e então por $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser denso em $\mathcal{D}^{1,p}$, obtemos que $I_\lambda'(u) = 0$, donde segue que u é uma solução do problema (P_λ).

Suponhamos na sequência que $I_\lambda(u) \geq \alpha_\lambda$. Devemos mostrar que $I_\lambda(u) = c$, para tanto basta mostrar que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,p}$. Sendo $z_n = u_n - u$, é suficiente mostrar que (z_n) admite subsequência que converge fortemente a 0 em $\mathcal{D}^{1,p}$. Afirmamos que

$$\|z_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx = o(1). \tag{2.11}$$

Pelo fato $z_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, temos pelo Lema $A.3$ e o Lema $A.5$, que

$$\|u_n\|^p = \|z_n\|^p + \|u\|^p + o(1), \tag{2.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx + o(1). \tag{2.13}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, temos pelo Lema 2.1 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\left(u_n^q - u^q\right) dx = o(1). \tag{2.14}$$

Agora como $\langle I_\lambda'(u_n), u_n\rangle = o(1)$ e $\langle I_\lambda'(u), u\rangle = 0$, segue das relações (2.12), (2.13) e (2.14) que

$$\begin{aligned}
o(1) &= \|u_n\|^p - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f u_n^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx \\
&= \|u\|^p + \|z_n\|^p - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f u_n^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx + o(1) \\
&= \langle I_\lambda'(u), u\rangle + \|z_n\|^p - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f\left(u_n^q - u^q\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx + o(1) \\
&= \|z_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx + o(1),
\end{aligned}$$

o que mostra a relação (2.11).

Como o funcional I_λ é contínuo e $c < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}$, temos que existem $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que para todo $n \geq n_0$, temos

$$\alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} - \varepsilon > I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u + z_n).$$

Agora, por (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) e o fato de $I_\lambda(u) \geq \alpha_\lambda$, obtemos

$$I_\lambda(u + z_n) = I_\lambda(u) + \frac{1}{p}\|z_n\|^p - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx + o(1) \geq \alpha_\lambda + \frac{1}{N}\|z_n\|^p + o(1).$$

Então pelas relações acima, temos para n suficientemente grande que

$$\|z_n\|^p < S^{\frac{N}{p}}. \tag{2.15}$$

Afirmamos que $\|z_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Assuma por contradição que existe $\delta > 0$ e uma subsequência denotada simplesmente por (z_n), tal que $\|z_n\| \geq \delta$. Então pela definição de S e as relações (2.11), (2.15) obtemos que

$$S^{\frac{N}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|z_n\|^N}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{N}{p^*}}} \right\} = \liminf_{n\to\infty} \|z_n\|^p < S^{\frac{N}{p}},$$

o que é uma contradição. Portanto $\|z_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$, donde resulta que $u_n \to u$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,p}$. Pelo fato de (u_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, obtemos então que $I_\lambda(u) = c$. $\square$

2.3 Existência de uma solução

Consideremos $\lambda \in (0, \Lambda)$ qualquer. A seguir obteremos (u_n) sequência $(PS)_{\alpha_\lambda}$ para o funcional I_λ. Recordemos que $B \doteq B(0,\mu)$ e devido ao Lema 2.2, temos que $0 < \nu \leq \inf_{u\in\partial\overline{B}} I_\lambda(u)$, então considerando

$$0 < \varepsilon < \inf_{u\in\partial\overline{B}} I_\lambda(u) - \inf_{u\in B} I_\lambda(u),$$

temos, pelo Princípio variacional de Ekeland, (veja Teorema $A.2$), aplicado ao funcional $I_\lambda : \overline{B} \to \mathbb{R}$, que existe $u_\varepsilon \in \overline{B}$ de modo que

$$I_\lambda(u_\varepsilon) \leq \alpha_\lambda + \varepsilon \quad \text{ e } \quad I_\lambda(u_\varepsilon) < I_\lambda(v) + \varepsilon\|u_\varepsilon - v\|, \quad \forall\, v \in \overline{B}\backslash\{u_\varepsilon\}.$$

Agora pela definição de $\varepsilon > 0$ e o fato de $\alpha_\lambda < 0$, temos

$$I_\lambda(u_\varepsilon) \leq \alpha_\lambda + \varepsilon = \inf_{u\in B} I_\lambda(u) + \varepsilon < \inf_{u\in\partial\overline{B}} I_\lambda(u),$$

donde segue que $u_\varepsilon \in B$. Considerando $J_\lambda : \mathcal{D}^{1,p} \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = I_\lambda(u) + \varepsilon\|u_\varepsilon - u\|,$$

obtemos que u_ε é um mínimo estrito de J_λ restrito ao conjunto $\overline{B}$. Fixemos $v \in \mathcal{D}^{1,p}$ qualquer de modo que $\|v\| = 1$. Então para todo $t > 0$ satisfazendo $\|u_\varepsilon + tv\| \leq \mu$, temos

$$\frac{J_\lambda(u_\varepsilon + tv) - J_\lambda(u_\varepsilon)}{t} \geq 0,$$

ou ainda, pela definição de J_λ temos que

$$\frac{I_\lambda(u_\varepsilon + tv) - I_\lambda(u_\varepsilon)}{t} + \varepsilon\|v\| \geq 0.$$

Passando o limite quando $t \to 0^+$, obtemos que

$$\langle I'_\lambda(u_\varepsilon), v\rangle + \varepsilon\|v\| \geq 0,$$

donde segue que $\|I'_\lambda(u_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$. Considerando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(u_n) \subset B$, de modo que

$$\alpha_\lambda \leq I_\lambda(u_n) \leq \alpha_\lambda + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|I'_\lambda(u_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

ou seja, $(u_n) \subset B$ é uma sequência $(PS)_{\alpha_\lambda}$ para o funcional I_λ. Devido a Observação 2.2 podemos, sem perda de generalidade, considerar que $u_n \geq 0$ e que existe $0 \leq u_\lambda \in \overline{B}$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$. Em particular, $I_\lambda(u_\lambda) \geq \alpha_\lambda$ e pelo fato de $\alpha_\lambda < 0$, segue pelo Lema 2.3, passando a uma subsequência se necessário, que $u_n \to u_\lambda$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,p}$. Portanto temos $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$ e $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$, pois o funcional I_λ é de classe C^1. Em particular, $u_\lambda \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\}$ é solução do problema (P_λ).

Como $< I'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda >= 0$, segue pela relação (2.1) que

$$\frac{1}{N}\|u_\lambda\|^p - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} fu_\lambda^q\, dx = I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda < 0,$$

em particular por $q < p^*$, obtemos que $\int_{\mathbb{R}^N} fu_\lambda^q\, dx > 0$. Ainda, pela desigualdade acima, as relações (2.2) e (2.6), obtemos

$$\|u_\lambda\|^{p-q} < \lambda\left(\frac{p^* - q}{qp^*}\right)NC_f < \Lambda\left(\frac{p^* - q}{qp^*}\right)NC_f \leq \tau^{p-q},$$

ou seja, $\|u_\lambda\| < \tau$.

Em resumo, acabamos de provar o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Suponhamos que as condições* $(\mathcal{H}_{exp})$ *e* $(\mathcal{H}_f)$ *sejam satisfeitas e que* $\lambda \in (0, \Lambda)$. *Então existe* $u_\lambda \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$ *onde*

i) u_λ *é solução do problema* (P_λ).

ii) $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f u_\lambda^q dx > 0$ *e* $\|u_\lambda\| < \tau$.

Com o objetivo de obter outra solução para o problema (P_λ) necessitamos de algumas condições a respeito da regularidade de tais soluções. Para tanto, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2 *Suponhamos que as condições* $(\mathcal{H}_{exp})$ *e* $(\mathcal{H}_f)$ *sejam satisfeitas e que* $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *é uma solução (fraca) do problema* (P_λ). *Então para todo* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *aberto e limitado tal que* $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, *existe* $\gamma \in (0, 1)$ *tal que* $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$.

Demonstração: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado qualquer, tal que $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Seja ainda $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, tal que $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e ainda $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$. Segue pelo Lema $A.13$ que $u \in L^\infty(\mathcal{O})$ e então pelo Lema $A.12$ obtemos, que existe $\gamma \in (0, 1)$, onde $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$. $\square$

2.4 Existência da segunda solução

Com o objetivo de obter uma segunda solução para o problema (P_λ), utilizaremos uma variante do Teorema do passo da montanha, a qual não possui a condição de Palais Smale (veja Teorema $A.3$). No intuito de aplicar tal resultado ao nosso funcional, necessitamos obter e_1, $e_2 \in \mathcal{D}^{1,p}$ e constantes η e r convenientes. Devido a Proposição 2.1, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$, obtemos $u_\lambda \in \mathcal{D}^{1,p}$ solução não trivial do problema (P_λ), onde $\int_{\mathbb{R}^N} f_+ u_\lambda^q \, dx > 0$. Consideremos $y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, onde $\min\{f_+(y), u_\lambda(y)\} > 0$. Pelo fato de f_+ e u_λ serem contínuas, obtemos $R_0 \in (0, \frac{\|y\|}{4})$, onde $f_+(x) > 0$ e $u_\lambda(x) \geq \frac{u_\lambda(y)}{2} > 0$, para todo $x \in B(y, 2R_0)$. Seja ainda uma função corte $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, com

$0 \leq \phi \leq 1$, cujo suporte seja $B(y, 2R_0)$ e ainda ϕ é identicamente 1 sobre $B(y, R_0)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, definimos w_ε, $v_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ por

$$w_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{\left(\varepsilon + |x-y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}, \qquad v_\varepsilon(x) = \frac{w_\varepsilon(x)}{\|w_\varepsilon\|_{L^{p^*}}}.$$

Segue pelo Lema $A.10$, que para todo $p \in [2, N)$

$$\|v_\varepsilon\|^p = S + O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}}), \tag{2.16}$$

e ainda

$$\|v_\varepsilon\|_{L^{2^*-1}}^{2^*-1} \geq O(\varepsilon^{\frac{(N-2)}{4}}),\ \|v_\varepsilon\|_{L^1} \geq O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}}),\ \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^{p-1}}^{p-1} = O(\varepsilon^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}}). \tag{2.17}$$

Afirmamos que para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $l \geq 0$ temos

$$I_\lambda(lv_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}}). \tag{2.18}$$

Pelo fato de $f(x) \geq 0$, para cada $x \in B(y, 2R) = supp(v_\varepsilon)$, obtemos para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $l \geq 0$ que

$$I_\lambda(lv_\varepsilon) \leq I_\lambda(lv_\varepsilon) + \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(lv_\varepsilon)^q \, dx = \frac{l^p}{p} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{l^{p^*}}{p^*} \doteq m_\varepsilon(l).$$

Como $l_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|^{\frac{p}{p^*-p}}$ é o máximo global da função m_ε, segue pelas relações (2.16) e $(A.2)$ que

$$\sup_{l \geq 0} m_\varepsilon(l) = m_\varepsilon(\|v_\varepsilon\|^{\frac{p}{p^*-p}}) = \frac{1}{N} \|v_\varepsilon\|^N \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}}),$$

donde pelas desigualdades acima, obtemos que a relação (2.18) é satisfeita.

Temos o seguinte resultado, o qual é imprescindível para obtermos a segunda solução do problema (P_λ).

Lema 2.4 *Suponhamos que as condições $(\mathcal{H}_{exp})$ e $(\mathcal{H}_f)$ sejam verificadas e ainda que $\lambda \in (0, \Lambda)$. Temos que existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$, tal que se $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, então*

$$\sup_{l \geq 0} I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}. \tag{2.19}$$

Demonstração: Fixemos $\lambda \in (0, \Lambda)$ qualquer. Como $(v_\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{1,p}$ é limitada e I_λ é contínuo, com $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}$, temos que existe $l_1 > 0$, onde

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{S^{\frac{N}{p}}}{2N},$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $l \in [0, l_1]$. Temos ainda que existe $l_2 > l_1$, independente de $\varepsilon > 0$, tal que para $l \geq l_2$

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} - 1,$$

pois $\|v_\varepsilon\|_{L^{p^*}} dx = 1$ para todo $\varepsilon > 0$ e pela relação (2.2) temos que

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) \leq \frac{1}{p}\|u_\lambda + lv_\varepsilon\|^p + \frac{\lambda}{q} C_f \|u_\lambda + lv_\varepsilon\|^q - \frac{l^{p^*}}{p^*} \to -\infty,$$

quando $l \to \infty$. Portanto

$$\sup_{l \in [0, l_1] \cup [l_2, \infty)} I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}, \tag{2.20}$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Para completarmos a demonstração, pela relação acima, é suficiente encontrar $\varepsilon_0 \in (0,1)$, onde para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $l \in [l_1, l_2]$, temos

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}.$$

Vamos obter tal constante positiva considerando inicialmente o caso em que $p = 2$ e posteriormente o caso em que $p \in (2, N)$. Porém, independente do valor de $p \in [2, N)$, pelo fato que $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$, $v_\varepsilon \in \mathcal{D}^{1,p}$ e $u_\lambda \geq 0$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda \nabla v_\varepsilon \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f u_\lambda^{q-1} v_\varepsilon \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p^*-1} v_\varepsilon \, dx. \tag{2.21}$$

Supomos $p = 2$. Então para todo $l \geq 0$, segue da definição do funcional I_λ e da igualdade acima que

$$\begin{aligned}
& I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2}\|u_\lambda + lv_\varepsilon\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(u_\lambda + lv_\varepsilon)^q dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u_\lambda + lv_\varepsilon)^{2^*} dx \\
&= I_\lambda(u_\lambda) + l\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_\lambda \nabla v_\varepsilon \, dx - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f[(u_\lambda + lv_\varepsilon)^q - u_\lambda^q] \, dx \\
&\quad + \frac{l^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} [(u_\lambda + lv_\varepsilon)^{2^*} - u_\lambda^{2^*}] \, dx \\
&= I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(lv_\varepsilon) - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f[(u_\lambda + lv_\varepsilon)^q - u_\lambda^q - (lv_\varepsilon)^q - q l u_\lambda^{q-1} v_\varepsilon] \, dx \\
&\quad - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} [(u_\lambda + lv_\varepsilon)^{2^*} - u_\lambda^{2^*} - (lv_\varepsilon)^{2^*} - 2^* l u_\lambda^{2^*-1} v_\varepsilon] \, dx.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Agora pelas estimativas obtidas por Brézis e Nirenberg [22], mais precisamente, as estimativas (17) e (22), temos para todo $l \geq 0$ que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} [(u_\lambda + lv_\varepsilon)^{2^*} - u_\lambda^{2^*} - (lv_\varepsilon)^{2^*} - 2^* l u_\lambda^{2^*-1} v_\varepsilon]\, dx \\ &= 2^* l^{2^*-1} \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda v_\varepsilon^{2^*-1} dx + o(\varepsilon^{\frac{(N-2)}{4}}). \end{aligned}$$

Então pelo fato que $u_\lambda(x) \geq \frac{u_\lambda(y)}{2} > 0$, para todo $x \in B(y, 2R_0) = supp(v_\varepsilon)$, segue da igualdade acima e a relação (2.17) que

$$-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} [(u_\lambda + lv_\varepsilon)^{2^*} - u_\lambda^{2^*} - (lv_\varepsilon)^{2^*} - 2^* l u_\lambda^{2^*-1} v_\varepsilon]\, dx \leq -k_1(\varepsilon^{\frac{(N-2)}{4}}) + o(\varepsilon^{\frac{(N-2)}{4}}),$$

para todo $l \geq l_1$, onde $k_1 > 0$ é independente de $\varepsilon \in (0,1)$. Agora como $f(x) > 0$, para todo $x \in B(y, 2R_0) = supp(v_\varepsilon)$, temos pela relação $(A.7)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f[(u_\lambda + lv_\varepsilon)^q - u_\lambda^q - (lv_\varepsilon)^q - q l u_\lambda^{q-1} v_\varepsilon]\, dx \geq 0,$$

para todo $l \geq 0$ e $\varepsilon \in (0,1)$. Então pelas desigualdades acima e as relações (2.18) e (2.22), temos que existe $k_2 > 0$, independente de $l \geq 0$ e $\varepsilon \in (0,1)$, onde

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) \leq \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + k_2 \varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}} - k_1 \varepsilon^{\frac{(N-2)}{4}} + o(\varepsilon^{\frac{(N-2)}{4}}),$$

para todo $l \in [l_1, l_2]$, donde segue que existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$, tal que

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

para todo $l \in [l_1, l_2]$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ o que, juntamente com a relação (2.20), conclui a demonstração no caso em que $p = 2$.

Consideremos agora o caso em que $p \in (2, N)$. Então pelas desigualdades $(A.7)$, $(A.10)$ e a relação (2.21), obtemos para todo $l > 0$ que

$$\begin{aligned} & I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) \\ \leq\ & \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left\langle |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda + |l\nabla v_\varepsilon|^{p-2} l\nabla v_\varepsilon, \nabla u_\lambda + l\nabla v_\varepsilon \right\rangle dx \\ & -\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(u_\lambda + lv_\varepsilon)^q dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p^*} + (lv_\varepsilon)^{p^*} + p^* u_\lambda^{p^*-1} l v_\varepsilon\, dx \\ =\ & I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(lv_\varepsilon) - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f[(u_\lambda + lv_{y,\varepsilon})^q - u_\lambda^q - (lv_\varepsilon)^q - \frac{q}{p} u_\lambda^{q-1} l v_\varepsilon]\, dx \\ & + \frac{l^{p-1}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \nabla u_\lambda dx - \left(\frac{p-1}{p}\right) l \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p^*-1} v_\varepsilon dx. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Como $f(x) > 0$ para todo $x \in B(y, 2R_0) = supp(v_\varepsilon)$, então pela relação $(A.7)$ e o fato que $1 < q < p$, temos para todo $l \geq 0$ e $\varepsilon \in (0,1)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f[(u_\lambda + lv_\varepsilon)^q - u_\lambda^q - (lv_\varepsilon)^q - \frac{q}{p} l u_\lambda^{q-1} v_\varepsilon]\, dx \geq 0.$$

Pelo fato que $u_\lambda(x) \geq \frac{u_\lambda(y)}{2} > 0$, para todo $x \in B(y, 2R_0) = supp(v_\varepsilon)$, segue da relação (2.17) que

$$-\left(\frac{p-1}{p}\right) l \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p^*-1} v_\varepsilon dx \leq -k_1 \varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}},$$

para todo $l \geq l_1$, onde $k_1 > 0$ independe de l e $\varepsilon \in (0,1)$. Por $v_\varepsilon \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B(y, 2R_0)$ e como $u_\lambda \in C^{1,\gamma}(B(y, 2R_0))$, temos pela relação (2.17) que

$$\frac{l^{p-1}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^{p-2} \nabla v_\varepsilon \nabla u_\lambda dx \leq k_2 \varepsilon^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}},$$

para quaisquer $l \in [0, l_2]$, onde $k_2 > 0$ independe de l e $\varepsilon \in (0,1)$. Devido as desigualdades acima, as relações (2.18) e (2.23), tomando $k_2 > 0$ maior se necessário, obtemos

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) \leq \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} + k_2 \left(\varepsilon^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}} + \varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}} \right) - k_1 \varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}},$$

para todo $l \in [l_1, l_2]$ e $\varepsilon \in (0,1)$. Pelo fato que $p \in (2, N)$, temos que existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$, de forma que

$$k_2 \left(\varepsilon^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}} + \varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}} \right) < k_1 \varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, donde segue que

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}},$$

para todo $l \in [l_1, l_2]$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ o que, juntamente com a relação (2.20), conclui a demonstração. $\square$

A seguir iremos apresentamos uma condição sobre $\lambda > 0$, para que o funcional I_λ satisfaça a geometria do Teorema do passo da montanha.

Lema 2.5 *Suponhamos que as condições* $(\mathcal{H}_{exp})$ *e* $(\mathcal{H}_f)$ *sejam verificadas e que* $\lambda \in (0,\Lambda)$*. Seja ainda* $\mu > 0$ *a constante obtida o Lema 2.2. Então existe* $r > 0$*, independente de* $\lambda \in (0,\Lambda)$*, tal que*

$$I_\lambda(u) \geq r, \quad \textit{se} \quad \|u_\lambda - u\| = \mu.$$

Além disso, sendo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*, onde* $\varepsilon_0 > 0$ *é a constante positiva obtida no Lema 2.4, temos que existe* $T_\lambda > 0$ *onde* $e_\lambda = u_\lambda + T_\lambda v_\varepsilon$ *satisfaz* $\|u_\lambda - e_\lambda\| > \mu$ *e* $I_\lambda(e_\lambda) \leq \alpha_\lambda$*.*

Demonstração: Fixemos $\lambda \in (0,\Lambda)$ qualquer. A demonstração é em parte semelhante a demonstração do Lema 2.2. Consideremos $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ qualquer, onde $\|u_\lambda - u\| = \mu$. Do mesmo modo que no referido Lema, obtemos que

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|^p \left(\frac{1}{p} - Q(\|u\|)\right).$$

Agora como $|\mu - \|u\|\,| = |\,\|u_\lambda - u\| - \|u\|\,| \leq \|u_\lambda\|$ e recordando que pela Proposição 2.1 temos $\|u_\lambda\| < \tau < \frac{\mu}{2}$, segue então pela relação (2.5) que

$$Q(\|u\|) \leq \frac{p+1}{2p^2}.$$

Considerando $r = (\frac{\mu}{2})^p(\frac{p-1}{2p^2}) > 0$ e observando que $\|u\| \geq \frac{\mu}{2}$, obtemos

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|^p \left(\frac{1}{p} - Q(\|u\|)\right) \geq \left(\frac{\mu}{2}\right)^p \left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{2p^2}\right) = r.$$

Fixando $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ qualquer, como $\|v_\varepsilon\|_{L^{p^*}} = 1$, segue pela relação (2.2) que

$$I_\lambda(u_\lambda + lv_\varepsilon) \leq \frac{1}{p}\|u_\lambda + lv_\varepsilon\|^p + \frac{\lambda}{q}C_f\|u_\lambda + lv_\varepsilon\|^q - \frac{l^{p^*}}{p^*} \to -\infty,$$

quando $l \to \infty$. Portanto existe $T_\lambda > 0$, de modo que se $e_\lambda = u_\lambda + T_\lambda v_\varepsilon$, então $\|u_\lambda - e_\lambda\| > \mu$ e $I_\lambda(e_\lambda) \leq \alpha_\lambda$. $\square$

Estamos de posse dos argumentos necessários para demonstrar o resultado principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.1: Fixemos $\lambda \in (0,\Lambda)$ qualquer. Segue pela Proposição 2.1 que existe $u_\lambda \in \mathcal{D}^{1,p}$, solução não trivial do problema (P_λ), onde $I_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$. Consideremos a constante $r > 0$ e $e_\lambda = u_\lambda + T_\lambda v_\varepsilon \in \mathcal{D}^{1,p}$ obtidas no Lema 2.5. Seja ainda

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\lambda(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], \mathcal{D}^{1,p}) : \gamma(0) = u_\lambda,\ \gamma(1) = e_\lambda = u_\lambda + T_\lambda v_\varepsilon \right\}.$$

Observemos que a função $\gamma_\lambda : [0,1] \to \mathcal{D}^{1,p}$, definida por $\gamma_\lambda(t) = u_\lambda + tTv_\varepsilon$ pertence a Γ, donde segue pelo Lema 2.4 que

$$c_\lambda \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I_\lambda(\gamma_\lambda(t)) < \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}.$$

Decorre do Teorema $A.3$ que existe $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}$, sequência $(PS)_{c_\lambda}$ para o funcional I_λ e ainda $c_\lambda \geq r > 0$, em particular, $c_\lambda \in (0, \alpha_\lambda + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}})$.

Recordemos que pela Observação 2.2, podemos considerar que $u_n \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ e que existe $0 \leq U_\lambda \in \mathcal{D}^{1,p}$, tal que $u_n \rightharpoonup U_\lambda$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$. Segue pelo Lema 2.3 que $U_\lambda \in \mathcal{D}^{1,p}$ é uma solução não trivial do problema (P_λ).

Suponhamos por contradição que $u_\lambda = U_\lambda$, em particular obtemos que $\alpha_\lambda = I_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(U_\lambda)$. Então novamente pelo Lema 2.3 temos, a menos de subsequência, que $u_n \to U_\lambda$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,p}$, donde segue que $I_\lambda(U_\lambda) = c_\lambda$, o que é um absurdo. Portanto $u_\lambda \neq U_\lambda$, o que conclui a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Sistema quase linear com não linearidade crítica em $\mathbb{R}^N$

3.1 Introdução

Neste capítulo, utilizando argumentos variacionais, mais especificamente, técnicas de minimização e uma variante do Teorema do passo da montanha, estabeleceremos condições para a existência de solução (fraca), para a seguinte classe de sistema elíptico quase linear com crescimento crítico

$$
(S) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = p_1 f(x)|u|^{p_1-1}|v|^{q_1} + \beta|u|^{\beta-1}|v|^{\gamma}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = q_1 f(x)|u|^{p_1}|v|^{q_1-1} + \gamma|u|^{\beta}|v|^{\gamma-1}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ 0 \lneq u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ 0 \lneq v \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N), \end{cases}
$$

onde a dimensão, bem como os expoentes, satisfazem

$$
(\mathbb{H}_{exp}) \qquad \begin{array}{l} 1 \leq p_1, q_1, \beta, \gamma, \quad \frac{p_1}{p} + \frac{q_1}{q} < 1,\ \ 2 \leq p \leq q < min\{p^*, N\}, \\ p_2 \in (p_1, p),\ q_2 \in (q_1, q) \ \text{ onde } \frac{p_2}{p} + \frac{q_2}{q} = \frac{\beta}{p^*} + \frac{\gamma}{q^*} = 1 \end{array}
$$

e para cada $s \in [2, N)$, consideremos o espaço $\mathcal{D}^{1,s} = \mathcal{D}^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ como o fecho de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$
\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}.
$$

Considerando $p = q$ e $u = v$, o sistema (S) se reduz a um caso escalar, semelhante ao problema (P_λ) estudado no capítulo precedente. No intuito de obter múltiplas soluções (fracas) para o sistema (S), somos então induzidos a considerar funções peso f, que satisfazem condições semelhantes a hipótese $(\mathcal{H}_f)$ considerada no Capítulo 2, e que possuem "norma" suficientemente pequena. Contudo, observamos que os argumentos utilizados no Capítulo 2 para obter a segunda solução não podem mais ser empregados, principalmente nas estimativas dos níveis de energia do funcional associado ao sistema (S), pois neste caso não é possível provar que uma solução pertence a $(C^{1,\alpha}_{loc})^2$. Além disso, quando estamos trabalhando com sistemas envolvendo os operadores Δ_p e Δ_q, é difícil obter um "nível crítico" apropriado, ou seja, um número $\tilde{c}$ onde todo valor $c < \tilde{c}$ é um nível (PS) para o funcional I associado ao sistema (S). Na realidade Adriouch e El Hamidi [3], afirmaram que no caso $p \neq q$ esta é uma questão em aberto. Entretanto, mais recentemente Silva e Xavier [64], trataram em um certo contexto o caso $p \neq q$. Para mais trabalhos relacionados citamos, dentre outros [4, 28, 34, 49, 63, 65, 71], bem como suas referências.

Considerando que a função peso $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é mensurável e satisfaz

$$(\mathbb{H}_f) \qquad f \in L^{\frac{p^*}{p^*-p_1-q_1}}(\mathbb{R}^N) = L^\theta, \quad f_+ \not\equiv 0,$$

temos então o seguinte resultado a respeito da existência de soluções para o sistema (S):

Teorema 3.1 *Suponhamos que as condições $(\mathbb{H}_{exp})$ e $(\mathbb{H}_f)$ sejam satisfeitas. Então existe uma constante positiva $\Lambda_0 = \Lambda_0(q, q_1, p, p_1, \beta, \gamma, N)$, tal que o sistema (S) possui ao menos uma solução fraca, desde que $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$.*

Para o caso em que $p = q$, somos encorajados a obter condições sobre a função peso f, a fim de que o sistema (S) admita múltiplas soluções, pois neste caso de Morais Filho e Souto [38], obtiveram um nível crítico.

Dados c_0 e R_0 constantes positivas, motivados pelo trabalho de Alves, Gonçalves e Miyagaki [8], bem como Rodrigues [59], consideramos $\mathbb{E}$ como um subconjunto de L^θ, formado pelas funções $h \in L^\theta$ onde $h(x) \geq 0$ em $B(0, 2R_0)$

e existe $R \in (0, R_0)$ tal que

$$\inf_{B(0,2R)} h(x) \frac{R^N}{(1+R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)}{p}(p_1+q_1)}} \geq c_0.$$

Para cada $\lambda > 0$, definimos $\mathbb{E}_\lambda$ como um subconjunto de $\mathbb{E}$, da seguinte forma

$$\mathbb{E}_\lambda = \{h \in \mathbb{E} : \|h\|_{L^\theta} < \lambda\}.$$

Temos então o seguinte resultado a respeito da existência de múltiplas soluções para o sistema (S):

Teorema 3.2 *Suponhamos que as condições* $(\mathbb{H}_{exp})$ *com* $p = q$*. Então existe uma constante positiva* $\Lambda = \Lambda(p, p_1, q_1, \beta, \gamma, N)$*, tal que o sistema* (S) *possui ao menos duas soluções fracas para cada* $f \in \mathbb{E}_\lambda$*, desde que* $0 < \lambda < \Lambda$*.*

3.2 Resultados preliminares

Consideremos o espaço $\mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ munido com a norma

$$\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|.$$

Recordemos a nossa notação para a norma do espaço de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{L^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}, \ \ 1 \leq s < \infty.$$

Ainda da mesma forma que no capítulo anterior, sejam $u_+ = \max\{0, u\}$ e $u_- = \min\{0, u\}$, para quaisquer $u \in \mathcal{D}^{1,s}$.

Para demonstrar os resultados, utilizaremos argumentos variacionais. Consideramos então o funcional associado ao sistema (S), a saber,

$$I(u, v) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{1}{q}\|v\|^q - \int_{\mathbb{R}^N} f u_+^{p_1} v_+^{q_1} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_+^\beta v_+^\gamma dx, \tag{3.1}$$

para quaisquer $(u, v) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$. Obtemos pelas condições $(\mathbb{H}_f)$ e $(\mathbb{H}_{exp})$ que o funcional I é de classe C^1 (veja Lema $A.9$), com derivada em cada

$(u, v) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ dada por

$$
\begin{aligned}
< I'(u,v),(w,z) > \;=\; & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2}\nabla u \nabla z \, dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} f[p_1 u_+^{p_1-1} v_+^{q_1} w + q_1 u_+^{p_1} v_+^{q_1-1} z] \, dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_+^{\beta-1} v_+^{\gamma} w + \gamma u_+^{\beta} v_+^{\gamma-1} z \, dx, \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

para quaisquer $(w, z) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$. Ressaltamos que os pontos críticos do funcional I são exatamente as soluções (fracas) do sistema (S). Supondo que f satisfaça a hipótese $(\mathbb{H}_f)$ segue, da desigualdade de Hölder e das imersões de Sobolev, que existe uma constante $C > 0$, independente de f, de modo que

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^N} f |u|^{p_1} |v|^{q_1} \, dx \right| \;\leq\; C \|f\|_{L^\theta} \|u\|^{p_1} \|v\|^{q_1}, \qquad (3.3)
$$

para quaisquer $(u, v) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$.

Na sequência citamos alguns fatos relevantes para o estudo do sistema (S).

Observação 3.1 *i) Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n, v_n) \subset \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ uma sequência que satisfaz $I(u_n, v_n) \to c$ e $I'(u_n, v_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Então (u_n, v_n) é chamada de sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um nível (PS) para o funcional I se toda sequência $(PS)_c$ para o funcional I admite subsequência que converge na topologia forte.*

ii) Se (u_n, v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, então (u_n, v_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$.

De fato, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ onde para todo $n \geq n_0$ temos

$$
\begin{aligned}
& c + 1 + \|u_n\| + \|v_n\| \\
\geq\; & I(u_n, v_n) - \left\langle I'(u_n, v_n), (p^{*-1} u_n, q^{*-1} v_n) \right\rangle \\
=\; & \frac{1}{N}\|u_n\|^p + \frac{1}{N}\|v_n\|^q + \left(\frac{p_1}{p^*} + \frac{q_1}{q^*} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} f u_{n+}^{p_1} v_{n+}^{q_1} \, dx.
\end{aligned}
$$

Então pela desigualdade acima, a relação (3.3), a condição $(\mathbb{H}_{exp})$ e a desigualdade de Young, temos que existe $C > 0$ onde

$$
\frac{1}{N}(\|u_n\|^p + \|v_n\|^q) \;\leq\; C(1 + \|u_n\| + \|v_n\| + \|u_n\|^{\frac{p_1}{p_2}p} + \|v_n\|^{\frac{q_1}{q_2}q}),
$$

donde segue que a sequência (u_n, v_n) *é limitada, pois* $\frac{p_1}{p_2}, \frac{q_1}{q_2} < 1$.

iii) *Se* (u_n, v_n) *é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I*, então* (u_{n+}, v_{n+}) *também é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I*.*

De fato, segue pelo item acima que (u_{n-}, v_{n-}) *é limitada em* $\mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ *e ainda pela relação* (3.2)*, temos*

$$o(1) = \langle I'(u_n, v_n), (u_{n-}, v_{n-})\rangle = \|u_{n-}\|^p + \|v_{n-}\|^q.$$

Além disso, novamente pela relação (3.2)*, temos para cada* $(w, z) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ *que*

$$\begin{aligned} & < I'(u_{n+}, v_{n+}), (w, z) > \\ = & < I'(u_n, v_n), (w, z) > \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n-}|^{p-2}\nabla u_{n-}\nabla w\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n-}|^{q-2}\nabla u_{n-}\nabla z\, dx, \end{aligned}$$

donde segue que $I'(u_{n+}, v_{n+}) = o(1)$*. Portanto temos que* (u_{n+}, v_{n+}) *é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I*, pois pela definição do funcional* I*, obtemos*

$$I(u_{n+}, v_{n+}) = I(u_n, v_n) - \frac{1}{p}\|u_{n-}\|^p - \frac{1}{q}\|u_{n-}\|^q = c + o(1).$$

iv) *Na sequência iremos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que toda sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I*,* (u_n, v_n)*, satisfaz as seguintes condições*

$$\begin{array}{ll} u_n, v_n \geq 0 \;\; qtp \; em \; \mathbb{R}^N, & u_n \rightharpoonup u \;\; fracamente \; em \; \mathcal{D}^{1,p}, \\ u_n \to u \;\; qtp \; em \; \mathbb{R}^N, & v_n \rightharpoonup v \;\; fracamente \; em \; \mathcal{D}^{1,q}, \\ v_n \to v \;\; qtp \; em \; \mathbb{R}^N, & u, v \geq 0 \;\; qtp \; em \; \mathbb{R}^N. \end{array}$$

A seguir apresentamos um resultado que nos fornece condições sobre a norma de $\|f\|_{L^\theta}$, para que o funcional I satisfaça a geometria do Teorema do passo da montanha.

Lema 3.1 *Suponhamos que as condições* $(\mathbb{H}_{exp})$ *e* $(\mathbb{H}_f)$*. Então existe* $\Lambda_0 > 0$*, independente de* f*, de modo que se* $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$*, então existem constantes* $\nu = \nu(f) > 0$ *e* $\mu = \mu(f) \in (0,1)$ *onde*

$$I(u,v) \geq \nu, \quad \text{se} \quad \|(u,v)\| = \mu.$$

Demonstração: Considerando $m = \min\{p_1, q_1\}$, observemos que pela condição $(\mathbb{H}_{exp})$ temos $m < q < p^*$. Note ainda que

$$t^{s_1} \leq t^{s_2}, \ \ \forall\, t \in [0,1], \ \ s_2 \leq s_1. \tag{3.4}$$

Consideremos $(u,v) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ quaisquer, onde $\|(u,v)\| \leq 1$. Como $p \leq q$, segue das relações $(A.1)$, (3.3), (3.4), as imersões de Sobolev e as desigualdades de Hölder e Young, que

$$\begin{aligned}
I(u,v) &\geq \frac{1}{q}(\|u\|^q + \|v\|^q) - C\|f\|_{L^\theta}\|u\|^{p_1}\|v\|^{q_1} - C\|u\|^{\beta}\|v\|^{\gamma} \\
&\geq \frac{2^{1-q}}{q}\|(u,v)\|^q - C\|f\|_{L^\theta}\left(\frac{p_2}{p}\|u\|^{\frac{p}{p_2}p_1} + \frac{q_2}{q}\|v\|^{\frac{q}{q_2}q_1}\right) \\
&\quad -C\left(\frac{\beta}{p^*}\|u\|^{p^*} + \frac{\gamma}{q^*}\|v\|^{q^*}\right) \\
&\geq \frac{2^{1-q}}{q}\|(u,v)\|^q - C\|f\|_{L^\theta}\left(\|u\|^{p_1} + \|v\|^{q_1}\right) - C\left(\|u\|^{p^*} + \|v\|^{p^*}\right) \\
&\geq \frac{2^{1-q}}{q}\|(u,v)\|^q - C\|f\|_{L^\theta}\left(\|u\|^{m} + \|v\|^{m}\right) - C\|(u,v)\|^{p^*} \\
&\geq \|(u,v)\|^q\left(\frac{2^{1-q}}{q} - C\|f\|_{L^\theta}\|(u,v)\|^{m-q} - C\|(u,v)\|^{p^*-q}\right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

para alguma constante positiva C, a qual independente de f. Para cada $\lambda > 0$, consideremos a função $h_\lambda : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, onde

$$h_\lambda(t) = \lambda C t^{m-q} + C t^{p^*-q}.$$

Observemos que h_λ é contínua e pelo fato que $m < q < p^*$, obtemos que $h_\lambda(t) \to \infty$ quando $t \to 0$ ou $t \to \infty$. Temos que $t_\lambda = \left[\lambda\left(\frac{q-m}{p^*-q}\right)\right]^{\frac{1}{p^*-m}}$ é o mínimo global de h_λ e ainda

$$h_\lambda(t_\lambda) = \lambda^{\frac{p^*-q}{p^*-m}} C\left[\left(\frac{q-m}{p^*-q}\right)^{\frac{m-q}{p^*-m}} + \left(\frac{q-m}{p^*-q}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*-m}}\right].$$

Consideremos $\Lambda_0 > 0$, de modo que $t_\lambda < 1$ e $h_\lambda(t_\lambda) < \frac{2-q}{q}$, para quaisquer $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Para cada f que satisfaz $(\mathbb{H}_f)$, onde $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$, consideremos $\mu = \mu(f) = t_{\|f\|_{L^\theta}} \in (0,1)$ e $\nu = \nu(f) = \frac{2-q}{q}\mu^q$. Segue então pela relação (3.5) e a definição de $h_{\|f\|_{L^\theta}}$, que se $\|(u,v)\| = \mu$, então

$$I(u,v) \geq \mu^q \left(\frac{2^{1-q}}{q} - h_{\|f\|_{L^\theta}}(t_{\|f\|_{L^\theta}}) \right) \geq \mu^q \left(\frac{2^{1-q}}{q} - \frac{2^{-q}}{q} \right) = \nu > 0,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Seja f uma função qualquer satisfazendo $(\mathbb{H}_f)$. Caso $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$, consideremos

$$\alpha_f = \inf_{(u,v) \in B_f} I(u,v),$$

onde $B_f \doteq B(0, \mu(f)) \subset \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$. Devido a relação (3.3), a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, temos que $\alpha_f \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $\alpha_\lambda \in (-\infty, 0)$. De fato, consideremos $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ onde $\|(u,u)\| \leq 1$ e $k = \int_{\mathbb{R}^N} f u_+^{p_1+q_1} dx > 0$. Observemos que

$$I(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}u) \leq \frac{t}{p} + \frac{t}{q} - t^{\frac{p_1}{p} + \frac{q_1}{q}} k < 0,$$

desde que $t \in (0, t_0)$, onde $t_0 = \left(\frac{pqk}{p+q}\right)^{\frac{1}{1-\frac{p_1}{p}-\frac{q_1}{q}}}$. Tomando $t \in (0, t_0)$, de modo que $\|(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}u)\| < \mu(f)$, segue pela desigualdade acima que $\alpha_f < 0$.

A seguir apresentamos uma condição, sobre os níveis de energia do funcional I, para que cada componente de uma solução do sistema (S) seja não trivial.

Lema 3.2 *Suponhamos que as condições $(\mathbb{H}_{exp})$ e $(\mathbb{H}_f)$ sejam satisfeitas. Se existe uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, onde $c \in (-\infty, 0)$, então o sistema (S) admite uma solução $(u,v) \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\} \times \mathcal{D}^{1,q}\backslash\{0\}$. Em particular, $I'(u,v) = 0$.*

Demonstração: Fixemos f qualquer que satisfaça a condição $(\mathbb{H}_f)$. Seja (u_n, v_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Devido a Observação 3.1 podemos considerar $u_n, v_n \geq 0$ e que existe $(u,v) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ onde $u, v \geq 0$

e a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,q}$. Observemos que $(u_n^{p_1}v_n^{q_1})$ é limitada em $L^{\frac{p^*}{p_1+q_1}}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n^{p_1}v_n^{q_1} \to u^{p_1}v^{q_1}$ qtp em $\mathbb{R}^N$. Segue então pelo Lema $A.2$ que $u_n^{p_1}v_n^{q_1} \rightharpoonup u^{p_1}v^{q_1}$ fracamente em $L^{\frac{p^*}{p_1+q_1}}(\mathbb{R}^N) = (L^\theta(\mathbb{R}^N))^*$. Então pelo fato de $f \in L^\theta$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f u_n^{p_1} v_n^{q_1}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f u^{p_1} v^{q_1}\, dx + o(1).$$

Suponhamos por contradição que $u.v \equiv 0$. Então pela igualdade acima e o fato de (u_n, v_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, temos

$$o(1) =< I'(u_n, v_n), (u_n, 0) >= \|u_n\|^p - \beta \int_{\mathbb{R}^N} u_n^\beta v_n^\gamma\, dx + o(1),$$

$$o(1) =< I'(u_n, v_n), (0, v_n) >= \|v_n\|^q - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_n^\beta v_n^\gamma\, dx + o(1).$$

Logo existe $l \geq 0$ onde, a menos de subsequência,

$$l = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^\beta v_n^\gamma\, dx + o(1) = \frac{\|u_n\|^p}{\beta} + o(1) = \frac{\|v_n\|^q}{\gamma} + o(1).$$

Então novamente pelo fato de (u_n, v_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I e as igualdades acima, temos que

$$c = \lim_{n\to\infty} I(u_n, v_n) = \left(\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} - 1\right) l \geq 0,$$

pois, pela condição $(\mathbb{H}_{exp})$, temos $\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} > \frac{\beta}{p^*} + \frac{\gamma}{q^*} = 1$. Agora por hipótese $c < 0$ e então pela desigualdade anterior temos uma contradição. Portanto temos que $u.v \not\equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$, ou seja, $(u, v) \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\} \times D^{1,q}\backslash\{0\}$.

Para provarmos que (u, v) é uma solução do sistema (S), basta mostrar que $I'(u, v) = 0$. Afirmamos que para cada $(w, z) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f u_n^{p_1-1} v_n^{q_1} w\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f u^{p_1-1} v^{q_1} w\, dx + o(1), \tag{3.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f u_n^{p_1} v_n^{q_1-1} z\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f u^{p_1} v^{q_1-1} z\, dx + o(1), \tag{3.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{\beta-1} v_n^\gamma w\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{\beta-1} v^\gamma w\, dx + o(1), \tag{3.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^\beta v_n^{\gamma-1} z\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^\beta v^{\gamma-1} z\, dx + o(1). \tag{3.9}$$

Note que $(u_n^{p_1-1} v_n^{q_1} w)$ é limitada em $L^{\frac{p^*}{p_1+q_1}}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n^{p_1-1} v_n^{q_1} w \to u^{p_1-1} v^{q_1} w$ qtp em $\mathbb{R}^N$. Logo pelo Lema $A.2$ e o fato que $f \in L^\theta = (L^{\frac{p^*}{p_1+q_1}})^*$, segue que a relação (3.6) é válida. De maneira similar, temos que a relação (3.7) é satisfeita. Como $(u_n^{\beta-1} v_n^\gamma)$ é limitada em $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n^{\beta-1} v_n^\gamma \to u^{\beta-1} v^\gamma$ qtp em $\mathbb{R}^N$, temos novamente pelo Lema $A.2$ e a inclusão $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, que a relação (3.8) é satisfeita. Analogamente, a relação (3.9) é válida.

Considerando $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qualquer, temos para cada $1 \le i \le N$, que $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N) = (L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N))^*$ e ainda pelo Lema $A.6$ e o Lema $A.2$, obtemos

$$|\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N), \ \ 1 \le i \le N,$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla w\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w\, dx + o(1). \tag{3.10}$$

Do mesmo modo, para qualquer $z \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n \nabla z\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla z\, dx + o(1). \tag{3.11}$$

Então por (u_n, v_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I segue, pelas relações (3.2) e (3.6)−(3.11), que para toda $(w, z) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle I'_\lambda(u, v), (w, z) \rangle = 0,$$

e pela densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $\mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ segue que $I'_\lambda(u, v) = 0$, donde obtemos que (u, v) é solução do sistema (S). $\square$

3.3 Demonstração do Teorema 3.1

Já possuímos os argumentos necessários para demonstrar o primeiro resultado deste capítulo:

Demonstração do Teorema 3.1: Consideremos $\Lambda_0 > 0$ a constante obtida no Lema 3.1. Fixemos uma função f que satisfaz a condição $(\mathbb{H}_f)$ e ainda $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$.

Iremos mostrar que existe $(u,v) \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\} \times D^{1,q}\backslash\{0\}$, solução do sistema (S). Para tanto, devido ao Lema 3.2, basta mostrar que existe (u_n, v_n) sequência $(PS)_{\alpha_f}$ para o funcional I. Sendo $\mu = \mu(f) \in (0,1)$ a constante obtida no Lema 3.1, recordando que $B_f \doteq B(0,\mu(f)) \subset \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ e ainda $\inf_{(u,v)\in B_f} I(u,v) = \alpha_f < 0$, segue pelo Corolário $A.1$, pois $I \in C^1(B_f, \mathbb{R})$, que existe $(u_n, v_n) \subset B_f$ sequência $(PS)_{\alpha_f}$ para o funcional I. Logo pelo Lema 3.2, temos que o sistema (S) admite uma solução $(u,v) \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\} \times \mathcal{D}^{1,q}\backslash\{0\}$, onde em particular, $I'(u,v) = 0$.

Além disso, afirmamos que $I(u,v) = \alpha_f$. Suponhamos por contradição que $\|u\| < \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$ ou $\|v\| < \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|$. Então pelo fato de $(u_n, v_n) \subset B_f$, temos que $\|(u,v)\| < \mu(f)$, donde segue que $I(u,v) \geq \alpha_f$. Agora como $I'(u,v) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_f &\leq I(u,v) \\
&= \frac{1}{N}[\|u\|^p + \|v\|^q] - \left(1 - \frac{p_1}{p^*} - \frac{q_1}{q^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} f u^{p_1} v^{q_1}\, dx \\
&< \liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{N}[\|u_n\|^p + \|v_n\|^q] - \left(1 - \frac{p_1}{p^*} - \frac{q_1}{q^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} f u_n^{p_1} v_n^{q_1}\, dx\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} I(u_n, v_n) = \alpha_f,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto podemos concluir que $\|u\| = \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$ e $\|v\| = \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|$, donde segue pelo Lema $A.4$ que $(u_n, v_n) \to (u,v)$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$. Em particular, pelo fato de I ser contínuo, temos que $I(u,v) = \alpha_f < 0$. $\square$

3.4 Existência da segunda solução

Obtemos na seção anterior, se f satisfaz $(\mathbb{H}_f)$ e $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$, e a condição $(\mathbb{H}_{exp})$ é verificada, que existe $(u,v) \in \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q}$ solução do sistema

(S), onde cada componente é não trivial e não negativa.

No que se segue, no intuito de demonstrar o Teorema 3.2, consideremos $p = q$. Recordemos que S denota a constante de Sobolev a qual é definida por

$$S = \inf \left\{ \frac{\|u\|^p}{\|u\|^p_{L^{p^*}}} : u \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\} \right\},$$

e sendo $\tilde{W} = \{(u,v) \in (\mathcal{D}^{1,p})^2 : u.v \neq 0\}$, consideremos ainda

$$\tilde{S} = \inf \left\{ \frac{\|u\|^p + \|v\|^p}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^\beta |v|^\gamma \, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} : (u,v) \in \tilde{W} \right\}.$$

O resultado a seguir relaciona os valores de S e $\tilde{S}$. A sua demonstração pode ser encontrada em de Morais Filho e Souto [38, Lema 3].

Lema 3.3 *Suponhamos que a condição $(\mathbb{H}_{exp})$ seja satisfeita com $p = q$, então*

$$\tilde{S} = \left[\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{p^*}} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{-\frac{\beta}{p^*}} \right] S.$$

Além disso, se a constante S é atingida por $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}$, então a constante $\tilde{S}$ é atingida por $(su_0, tu_0) \in (\mathcal{D}^{1,p})^2$, para todo $s, t > 0$ onde $\frac{s}{t} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Consideremos o funcional $K : L^\theta(\mathbb{R}^N) \times (\mathcal{D}^{1,p})^2 \to \mathbb{R}$, definido por

$$K(h,u,v) = \left(1 - \frac{p_1 + q_1}{p^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{p_1}|v|^{q_1} \, dx.$$

Observemos que para cada $h \in L^\theta$, se $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, então temos

$$K(h,u_n,v_n) = K(h,u,v) + o(1).$$

A seguir apresentamos uma condição, sobre os níveis de energia $c > 0$ do funcional I, de modo que toda sequência $(PS)_c$ admita subsequência convergente.

Lema 3.4 *Suponhamos que a condição $(\mathbb{H}_{exp})$ é verificada com $p = q$ e f satisfaz a hipótese $(\mathbb{H}_f)$. Seja $(u_n, v_n) \subset (\mathcal{D}^{1,p})^2$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, onde $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$ e ainda*

$$0 < c < \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} - K(f,u,v).$$

Então (u_n, v_n) admite subsequência que converge fortemente a (u, v). Além disso, $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\}$.

Demonstração: Seja $(u_n, v_n) \subset (\mathcal{D}^{1,p})^2$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Devido a Observação 3.1 podemos considerar que $u_n, v_n, u, v \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Do mesmo modo que no Lema 3.2 temos que $I'(u, v) = 0$.

Consideremos $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) = (u_n - u, v_n - v) \in (\mathcal{D}^{1,p})^2$. O intuito será mostrar que $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \to 0$ fortemente em $(\mathcal{D}^{1,p})^2$.

Afirmação 3.1 *Temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^\beta v_n^\gamma \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^\beta |\tilde{v}_n|^\gamma \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^\beta v^\gamma \, dx + o(1). \tag{3.12}$$

Assumimos a Afirmação 3.1 por um instante. Observemos que pelo fato de $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, temos

$$K(h, u_n, v_n) = K(h, u, v) + o(1),$$

e ainda pelo Lema $A.6$ e o Lema $A.3$ obtemos, a menos de subsequência,

$$\|u_n\|^p = \|\tilde{u}_n\|^p + \|u\|^p + o(1),$$

$$\|v_n\|^p = \|\tilde{v}_n\|^p + \|v\|^p + o(1).$$

Então pelas relações acima, segue que

$$\begin{aligned} &\|\tilde{u}_n\|^p - \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^\beta |\tilde{v}_n|^\gamma \, dx = \\ &< I'(u_n, v_n), (u_n, 0) > - < I'(u, v), (u, 0) > + o(1) = o(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|\tilde{v}_n\|^p - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^\beta |\tilde{v}_n|^\gamma \, dx = \\ &< I'(u_n, v_n), (0, v_n) > - < I'(u, v), (0, v) > + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

Portanto existe $l \geq 0$ onde, passando a subsequência se necessário,

$$l = \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^\beta |\tilde{v}_n|^\gamma \, dx + o(1) = \frac{\|\tilde{u}_n\|^p}{\beta} + o(1) = \frac{\|\tilde{v}_n\|^p}{\gamma} + o(1).$$

Suponhamos por absurdo que $l > 0$. Então pela igualdade acima podemos supor, sem perda de generalidade, que $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \subset \tilde{W}$. Segue então, pelas relações acima e pelo fato de (u_n, v_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, que

$$\begin{aligned} c + o(1) &= I(u_n, v_n) - \frac{1}{p^*} < I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) > \\ &= \frac{1}{N}(\|u_n\|^p + \|v_n\|^p) + \left(\frac{p_1 + q_1}{p^*} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} f|u_n|^{p_1}|v_n|^{q_1}\, dx \\ &= \frac{1}{N}(\|\tilde{u}_n\|^p + \|\tilde{v}_n\|^p) - K(f, u, v) + o(1) \\ &= \frac{1}{N}(\beta + \gamma)l - K(f, u, v) + o(1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$c \geq \frac{1}{N} p^* l - K(f, u, v).$$

Agora pelas definições de $\tilde{S}$, l e o fato que $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \subset \tilde{W}$, segue que

$$\tilde{S} l^{\frac{p}{p^*}} = \tilde{S} \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^\beta |\tilde{v}_n|^\gamma\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \lim_{n\to\infty} (\|\tilde{u}_n\|^p + \|\tilde{v}_n\|^p) = (\beta + \gamma) l = p^* l,$$

ou seja, $l \geq p^{*-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}}$. Então pelas estimativas de l e c, obtemos que

$$c \geq \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} - K(f, u, v),$$

o que é um absurdo. Portanto $l = 0$, donde segue que $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \to 0$ fortemente em $(\mathcal{D}^{1,p})^2$, ou seja, (u_n, v_n) admite subsequência que converge fortemente a (u, v).

Mostremos que $u, v \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$. Suponhamos por contradição que $u = 0$, então como $I'(u, v) = 0$, segue que

$$0 =< I'(u, v), (0, v) >= \|v\|^p,$$

e consequentemente $(u, v) = (0, 0)$. Agora, como (u_n, v_n) admite subsequência que converge fortemente a (u, v) e o funcional I é contínuo, segue que $0 < c = I(u, v) = I(0, 0) = 0$, o que é um absurdo. Portanto temos que $u \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$. Analogamente obtemos $v \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$.

Para concluir a demonstração basta provar a Afirmação 3.1.

Demonstração da Afirmação 3.1: Afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$, de modo que para quaisquer $a, b, s, t \in \mathbb{R}$,

$$|(s+a)^\beta (t+b)^\gamma - s^\beta t^\gamma| \leq \varepsilon C(|s|^{p^*} + |t|^{p^*}) + C_\varepsilon C(|a|^{p^*} + |b|^{p^*}), \qquad (3.13)$$

onde $C > 0$ independe de ε. Temos pelo Teorema do valor médio que existe $r \in (0,1)$ tal que

$$|(s+a)^\beta (t+b)^\gamma - s^\beta t^\gamma| \leq \beta |s+ra|^{\beta-1} |t+rb|^\gamma |a| + \gamma |s+ra|^\beta |t+rb|^{\gamma-1} |b|.$$

Observando que $\frac{p^*-1}{\beta-1}, \frac{p^*-1}{\gamma-1} > 1$ e

$$\frac{\beta-1}{p^*-1} + \frac{\gamma}{p^*-1} = 1 = \frac{\beta}{p^*-1} + \frac{\gamma-1}{p^*-1},$$

segue pela desigualdade de Young que

$$\begin{aligned} |(s+a)^\beta (t+b)^\gamma - s^\beta t^\gamma| \;\leq\; & \frac{\beta(\beta-1)}{p^*-1} |s+ra|^{p^*-1} |a| + \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |t+rb|^{p^*-1} |a| \\ & + \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |s+ra|^{p^*-1} |b| + \frac{\gamma(\gamma-1)}{p^*-1} |t+rb|^{p^*-1} |b|. \end{aligned}$$

Então para cada $\varepsilon > 0$, seque da relação $(A.1)$ e a desigualdade de Young com ε,(veja relação $(A.3)$), que existe $C_\varepsilon > 0$ onde

$$\begin{aligned} & |(s+a)^\beta (t+b)^\gamma - s^\beta t^\gamma| \\ \leq\; & \varepsilon \frac{\beta(\beta-1)}{p^*-1} |s+ra|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\beta(\beta-1)}{p^*-1} |a|^{p^*} + \varepsilon \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |t+rb|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |a|^{p^*} \\ & + \varepsilon \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |s+ra|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |b|^{p^*} + \varepsilon \frac{\gamma(\gamma-1)}{p^*-1} |t+rb|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\gamma(\gamma-1)}{p^*-1} |b|^{p^*} \\ \leq\; & \varepsilon \frac{\beta(\beta-1)2^{p^*-1}}{p^*-1} |s|^{p^*} + \varepsilon \frac{\beta(\beta-1)2^{p^*-1}}{p^*-1} |a|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\beta(\beta-1)}{p^*-1} |a|^{p^*} \\ & + \varepsilon \frac{\beta\gamma 2^{p^*-1}}{p^*-1} |t|^{p^*} + \varepsilon \frac{\beta\gamma 2^{p^*-1}}{p^*-1} |b|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |a|^{p^*} + \varepsilon \frac{\beta\gamma 2^{p^*-1}}{p^*-1} |s|^{p^*} \\ & + \varepsilon \frac{\beta\gamma 2^{p^*-1}}{p^*-1} |a|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\beta\gamma}{p^*-1} |b|^{p^*} + \varepsilon \frac{\gamma(\gamma-1)2^{p^*-1}}{p^*-1} |t|^{p^*} \\ & + \varepsilon \frac{\gamma(\gamma-1)2^{p^*-1}}{p^*-1} |b|^{p^*} + C_\varepsilon \frac{\gamma(\gamma-1)}{p^*-1} |b|^{p^*}, \end{aligned}$$

o que mostra que a relação (3.13) é válida.

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ onde

$$\begin{aligned} g_n &= |u_n^\beta v_n^\gamma - |u_n - u|^\beta |v_n - v|^\gamma - u^\beta v^\gamma| \\ &\leq |u_n^\beta v_n^\gamma - (u_n - u)^\beta (v_n - v)^\gamma| + u^\beta v^\gamma. \end{aligned}$$

Tomando $s = u_n - u$, $t = v_n - v$, $a = u$ e $b = v$, segue pela relação (3.13) que

$$0 \leq g_n \leq \varepsilon C(|u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{p^*}) + C_\varepsilon C(|u|^{p^*} + |v|^{p^*}) + \frac{\beta}{p^*}|u|^{p^*} + \frac{\gamma}{p^*}|v|^{p^*}.$$

Consequentemente, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq W_{n,\varepsilon} &= [g_n - \varepsilon C(|u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{p^*})]_+ \\ &\leq C_\varepsilon C(|u|^{p^*} + |v|^{p^*}) + \frac{\beta}{p^*}|u|^{p^*} + \frac{\gamma}{p^*}|v|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

e pelo fato de $W_{n,\varepsilon}(x) \to 0$ qtp em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$, segue pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} W_{n,\varepsilon}\, dx = o(1).$$

Então como (u_n, v_n) é uma sequência limitada, temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |g_n|\, dx &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |W_{n,\varepsilon} + \varepsilon C(|u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{p^*})|\, dx \\ &\leq \varepsilon C \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{p^*}\, dx \\ &\leq M\varepsilon, \end{aligned}$$

onde $M > 0$ independe de $\varepsilon > 0$. Pelo fato de $\varepsilon > 0$ ser qualquer obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_n|\, dx = o(1),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Consideremos $s_0 = \frac{s_1}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{1}{p^*}}}$ e $t_0 = \frac{t_1}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{1}{p^*}}}$, onde $s_1, t_1 > 0$ sejam quaisquer com $\frac{s_1}{t_1} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}}$. Sendo para cada $\varepsilon > 0$, as funções $v_\varepsilon \in \mathcal{D}^{1,p}$ definidas no Lema $A.10$, temos então o seguinte resultado essencial para obtermos uma segunda solução para o sistema (S).

Lema 3.5 *Suponhamos que a condição* $(\mathbb{H}_{exp})$ *é satisfeita com* $p = q$. *Então existem* $\varepsilon, \eta > 0$ *tal que*

$$\sup_{l\geq 0} I(ls_0 v_\varepsilon, lt_0 v_\varepsilon) \leq \eta < \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}},$$

uniformemente para $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$.

Demonstração: Como $(v_\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{1,p}$ é limitada, temos que existe $l_1 > 0$ onde

$$I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) < \frac{1}{2N}p^{*1-\frac{N}{p}}\tilde{S}^{\frac{N}{p}},$$

para $l \in [0, l_1]$, independente de $\varepsilon \in (0,1)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, pois

$$\begin{aligned} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) &\leq \frac{l^p(s_0^p + t_0^p)}{p}\|v_\varepsilon\|^p + l^{p_1+q_1}s_0^{p_1}t_0^{q_1}C\|v_\varepsilon\|^{p_1+q_1}\Lambda_0 - l^{p^*} \\ &\leq C(l^p + l^{p_1+q_1}) - l^{p^*} \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, que independe de $\varepsilon \in (0,1)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$. Ainda pela desigualdade acima, temos que existe $l_2 > l_1$, independente de $\varepsilon \in (0,1)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, de modo que

$$I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) < 0,$$

para todo $l \in [l_2, \infty)$. Portanto, independente de $\varepsilon \in (0,1)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, obtemos

$$\sup_{l\in[0,l_1]\cup[l_2,\infty)} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) < \frac{1}{2N}p^{*1-\frac{N}{p}}\tilde{S}^{\frac{N}{p}}. \tag{3.14}$$

Consideremos $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$ qualquer. Temos para todo $\varepsilon \in (0,1)$ que

$$\begin{aligned} &I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \\ = \;& \frac{l^p(s_0^p + t_0^p)}{p}\|v_\varepsilon\|^p - l^{p_1+q_1}s_0^{p_1}t_0^{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} fv_\varepsilon^{p_1+q_1}\,dx - l^{p^*} \\ = \;& \frac{l^p}{p}\left(\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}\right)\|v_\varepsilon\|^p - l^{p^*} - l^{p_1+q_1}s_0^{p_1}t_0^{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} fv_\varepsilon^{p_1+q_1}\,dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Consideremos para cada $\varepsilon \in (0,1)$ a função $m_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, onde

$$m_\varepsilon(l) = \frac{l^p}{p}\left(\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}\right)\|v_\varepsilon\|^p - l^{p^*}.$$

Sendo $l_\varepsilon = p^{*-\frac{1}{p^*-p}}\left(\frac{s_1^p+t_1^p}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}\right)^{\frac{1}{p^*-p}}\|v_\varepsilon\|^{\frac{p}{p^*-p}}$ o máximo global de m_ε, obtemos

$$\sup_{l\geq 0} m_\varepsilon(l) = m_\varepsilon(l_\varepsilon) = \frac{1}{N}p^{*1-\frac{N}{p}}\left[\left(\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}\right)\|v_\varepsilon\|^p\right]^{\frac{N}{p}}.$$

Observando que

$$\left(\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\beta t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}\right) = \left[\left(\frac{s_1}{t_1}\right)^{\frac{p\gamma}{p^*}} + \left(\frac{s_1}{t_1}\right)^{\frac{-p\beta}{p^*}}\right] = \left[\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{p^*}} + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{-\beta}{p^*}}\right],$$

segue pelas igualdades acima, a estimativa $(A.24)$, a relação $(A.2)$ e o Lema 3.3 que

$$\sup_{l\geq 0} m_\varepsilon(l) \leq \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}}).$$

Logo pela definição de m_ε, pela estimativa acima e a relação (3.15), temos que

$$\sup_{l\in[l_1,l_2]} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}}) - k\int_{\mathbb{R}^N} f v_\varepsilon^{p_1+q_1}\, dx, \quad (3.16)$$

onde $k = l_1^{p_1+q_1} s_0^{p_1} t_0^{q_1}$, independente de $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$.

Suponhamos inicialmente que $p_1 + q_1 < \frac{N(p-1)}{N-p}$. Então temos pelas relações (3.16) e $(A.26)$ que existem $C_1, C_2 > 0$, independentes de $\varepsilon \in (0,1)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, tal que

$$\sup_{l\in[l_1,l_2]} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} + C_1\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}} - C_2\varepsilon^{\frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p^2}}.$$

Agora como $\frac{(N-p)}{p} > \frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p^2}$, temos que existe $\varepsilon_1 \in (0,1)$, onde para cada $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ existe $\eta_{1,\varepsilon} \in (0, \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}})$, de modo que

$$\sup_{l\in[l_1,l_2]} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \leq \eta_{1,\varepsilon}, \quad (3.17)$$

para cada $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$, independente de $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$.

Se tivermos $p_1 + q_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$, então pelas relações (3.16) e $(A.26)$, temos que existem $C_1, C_2 > 0$, independentes de $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, onde

$$\sup_{l\in[l_1,l_2]} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} + C_1\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}} - C_2\varepsilon^{\frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p^2}}|ln(\varepsilon)|.$$

Pelo fato de $\frac{(N-p)}{p} > \frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p^2}$, segue que existe $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$, onde para cada $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ existe $\eta_{2,\varepsilon} \in (0, \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}})$, tal que

$$\sup_{l\in[l_1,l_2]} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \leq \eta_{2,\varepsilon}, \quad (3.18)$$

para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$, independente de $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$.

Suponhamos agora que $p_1 + q_1 > \frac{N(p-1)}{N-p}$, então novamente pelas relações (3.16) e $(A.26)$, temos que existem $C_1, C_2 > 0$, independentes de $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ e $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, onde

$$\begin{aligned} &\sup_{l\in[l_1,l_2]} I(ls_0v_\varepsilon, lt_0v_\varepsilon) \\ \leq\ & \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} + C_1\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p}} - C_2\varepsilon^{\frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p^2} - \frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p} + \frac{N(p-1)}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{(N-p)}{p} > \frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p^2}$ e ainda por $-\frac{(N-p)(p_1+q_1)}{p} + \frac{N(p-1)}{p} < 0$, temos que existe $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$, onde para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ existe $\eta_{3,\varepsilon} \in (0, \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}})$ e

$$\sup_{l \in [l_1, l_2]} I(ls_0 v_\varepsilon, lt_0 v_\varepsilon) \leq \eta_{3,\varepsilon}, \tag{3.19}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, independente de $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$.

Fixemos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ qualquer e consideremos

$$\eta = \max\{\frac{1}{2N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}}, \eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon}, \eta_{3,\varepsilon}\}.$$

Observemos que pela definição de $\eta_{i,\varepsilon}$ temos que $\eta \in (0, \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}})$. Segue das relações $(3.14), (3.17), (3.18)$ e (3.19), que independentemente do valor de $p_1 + q_1 < p$ e de $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$, obtemos

$$\sup_{l \geq 0} I(ls_0 v_\varepsilon, lt_0 v_\varepsilon) \leq \eta < \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Já possuímos os argumentos necessários para demonstrar o resultado principal deste capítulo:

Demonstração do Teorema 3.2: Seja $\varepsilon > 0$ a constante obtida no Lema 3.5. Consideremos $l_0 > 0$ onde se $(w_0, z_0) = (l_0 s_0 v_\varepsilon, l_0 t_0 v_\varepsilon)$, obtemos que $\|(w_0, z_0)\| > 1$ e ainda

$$l_0(s_0^p + t_0^p)\|v_\varepsilon\|^p + l_0^{p_1+q_1} s_0^{p_1} t_0^{q_1} \Lambda_0 - l_0^{p^*} s_0^\beta t_0^\gamma < 0.$$

Afirmamos que $I(w_0, z_0) < 0$, independente de $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$. De fato, pela desigualdade de Hölder e como $\|v_\varepsilon\|_{L^{p^*}} = 1$, obtemos para cada $f \in \mathbb{E}_{\Lambda_0}$ que

$$I(w_0, z_0) \leq l_0(s_0^p + t_0^p)\|v_\varepsilon\|^p + l_0^{p_1+q_1} s_0^{p_1} t_0^{q_1} \|f\|_{L^\theta} - l_0^{p^*} s_0^\beta t_0^\gamma < 0.$$

Consideremos $M = \|(w_0, z_0)\| + 1$ e ainda $X = B(0, M) \subset (\mathcal{D}^{1,p})^2$. Seja $\eta \in (0, \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}})$ a constante obtida no Lema 3.5 e $\delta \doteq \frac{1}{N} {p^*}^{1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} - \eta$. Consideremos

$$0 < \Lambda = \min\left\{\Lambda_0, \delta\left(\frac{p^*}{p^* - p_1 - q_1}\right) \frac{S^{\frac{p_1+q_1}{p}}}{M^{p_1+q_1}}\right\},$$

e para cada $f \in \mathbb{E}_\Lambda$, definimos

$$c_f = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\le t\le 1} I(\psi(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\psi \in C([0,1], X) : \psi(0) = (0,0),\ \psi(1) = (w_0, z_0)\}.$$

Afirmamos que $c_f > 0$. De fato, segue pelo Lema 3.1 que existem $\mu(f) \in (0,1)$ e $\nu(f) > 0$, de modo que $I(u,v) > \nu(f)$ se $\|(u,v)\| = \mu(f)$, donde segue que $c_f \ge \nu(f) > 0$.

Recordando que $K : L^\theta(\mathbb{R}^N) \times (\mathcal{D}^{1,p})^2 \to \mathbb{R}$ é definido por

$$K(h,u,v) = \left(1 - \frac{p_1+q_1}{p^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{p_1}|v|^{q_1}\,dx,$$

afirmamos que $|K(f,u,v)| < \delta$ para quaisquer $(f,u,v) \in \mathbb{E}_\Lambda \times \overline{X}$. Temos pela desigualdade de Hölder e as definições de S e Λ que

$$\begin{aligned} |K(f,u,v)| &\le \left(1 - \frac{p_1+q_1}{p^*}\right) \|f\|_{L^\theta} \|u\|^{p_1}_{L^{p^*}} \|v\|^{q_1}_{L^{p^*}} \\ &< \Lambda \left(1 - \frac{p_1+q_1}{p^*}\right) S^{-\frac{p_1+q_1}{p}} \|u\|^{p_1}\|v\|^{q_1} \\ &\le \Lambda \left(\frac{p^* - p_1 - q_1}{p^*}\right) S^{-\frac{p_1+q_1}{p}} M^{p_1+q_1} \\ &\le \delta, \end{aligned}$$

para quaisquer $(f,u,v) \in \mathbb{E}_\Lambda \times \overline{X}$.

Temos ainda, para toda $f \in \mathbb{E}_\Lambda$ que

$$c_f + K(f,u,v) < \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}}, \tag{3.20}$$

para quaisquer $(u,v) \in \overline{X}$. Pelo fato de $|K(f,u,v)| < \delta \doteq \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} - \eta$, para toda $(f,u,v) \in \mathbb{E}_\Lambda \times \overline{X}$, basta mostrar que $c_f \le \eta$ para qualquer $f \in \mathbb{E}_\Lambda$. Fixada $f \in \mathbb{E}_\Lambda$ qualquer, consideremos $\psi_f : [0,1] \to X$, onde

$$\psi_f(t) = (tw_0, tz_0).$$

Segue que $\psi_f \in \Gamma$ e pelo Lema 3.5, obtemos que $c_f \le \eta$. Portanto a desigualdade (3.20) é válida.

Fixemos $f \in \mathbb{E}_\Lambda$ qualquer. Obtemos pelo Teorema $A.3$ que existe $(u_n, v_n) \subset X$, sequência $(PS)_{c_f}$ para o funcional I. Devido a Observação 3.1 podemos, sem perda de generalidade, considerar que $u_n \rightharpoonup U$ e $v_n \rightharpoonup V$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$ e ainda $U, V \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, em particular $(U, V) \in \overline{X}$. Então pela relação (3.20) e o fato que $c_f > 0$, segue que

$$0 < c_f < \frac{1}{N} p^{*1-\frac{N}{p}} \tilde{S}^{\frac{N}{p}} - K(f, U, V),$$

donde obtemos pelo Lema 3.4 que, a menos de subsequência, $(u_n, v_n) \to (U, V)$ fortemente em $(\mathcal{D}^{1,p})^2$. Em particular, $I'(U, V) = 0$ e $I(U, V) = c_f > 0$. Suponhamos por absurdo que $U = 0 \in \mathcal{D}^{1,p}$, então obtemos

$$0 =< I'(U, V), (U, V) >= \|V\|^p,$$

e consequentemente $0 < c_f = I(U, V) = I(0, 0) = 0$, o que é um absurdo. Portanto temos que $U \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$. Analogamente obtemos $V \in \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$.

Logo obtemos que (U, V) é solução do sistema (S) e ainda $I(U, V) = c_f > 0$. Observando que $\Lambda \leq \Lambda_0$, segue da demonstração do Teorema 3.1 que existe (u, v) solução do sistema (S) onde $I(u, v) = \alpha_f < 0$, o que conclui a demonstração. $\square$

Apêndice A

Apêndice

Faremos aqui um apanhado de resultados importantes que, embora já bem conhecidos, se fazem necessários para termos uma leitura mais prazerosa e compreensiva; isto porque, enunciados numa parte especial, evitam interrupções nas demonstrações dos teoremas (ou outros resultados) situados nos capítulos específicos. Assim, sempre que for necessário, mencionaremos eles por meio de referências cruzadas.

A.1 Algumas desigualdades

Nesta seção listaremos as principais desigualdades usadas neste trabalho. Consideremos quaisquer $a, b \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $s \in (0,1]$, $k, k' \geq 1$ expoentes conjugados. Temos que

$$(a+b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k), \tag{A.1}$$

$$(a+b)^k \leq a^k + k(a+b)^{k-1}b. \tag{A.2}$$

A seguir enunciamos a conhecida desigualdade de Young com ε. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $C = C(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$ab \leq \varepsilon a^k + Cb^{k'}. \tag{A.3}$$

Pode-se provar facilmente que para cada $k \in (1, 2]$, existe $C > 0$, onde

$$||x|^{k-2}x - |y|^{k-2}y| \leq C|x - y|^{k-1}. \tag{A.4}$$

Analogamente, no caso em que $k \in [2, \infty)$, existe $C > 0$, de modo que

$$||x|^{k-2}x - |y|^{k-2}y| \leq C|x - y|(|x| + |y|)^{k-2}. \tag{A.5}$$

Afirmamos que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$(a + b)^s \leq a^s + b^s. \tag{A.6}$$

De fato, fixado $b \geq 0$ qualquer, consideremos a função $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(a) = (a+b)^s - a^s + b^s$. Como $g(0) = 0$ e $g'(a) = s[(a+b)^{s-1} - a^{s-1}] \leq 0$ para todo $a \in [0, \infty)$, pois $s \in (0, 1]$, segue que a função g é decrescente, o que mostra a relação $(A.6)$.

A seguir enunciamos um resultado que foi extremamente útil para o desenvolvimento deste trabalho.

Lema A.1 *Sendo a, $b \geq 0$ e $k > 1$ quaisquer, então é válida a seguinte desigualdade*

$$(a + b)^k - a^k - b^k - ka^{k-1}b \geq 0. \tag{A.7}$$

Demonstração: Observe que para provar a desigualdade acima podemos, sem perda de generalidade, supor que a, $b > 0$. Note ainda que mostrar a relação $(A.7)$ é equivalente a provar que

$$(x + 1)^k - x^k - 1 - kx^{k-1} \geq 0, \tag{A.8}$$

para todo $x \geq 0$ e $k > 1$. Demonstraremos a relação acima por indução. Suponhamos inicialmente que $1 < k \leq 2$. Segue do Teorema fundamental do cálculo e a desigualdade $(A.6)$ que se $x \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
(x+1)^k - x^k &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(x+t)^k \, dt \\
&= k \int_0^1 (x+t)^{k-1} \, dt \\
&= -k \int_0^1 (x+t)^{k-1} \frac{d}{dt}(1-t) \, dt \\
&\geq -k \int_0^1 (x^{k-1} + t^{k-1}) \frac{d}{dt}(1-t) \, dt \\
&\geq kx^{k-1} - k \int_0^1 t^{k-1} \frac{d}{dt}(1-t) \, dt \\
&= kx^{k-1} + 1.
\end{aligned}$$

Portanto, para $1 < k \leq 2$ temos que a relação $(A.8)$ é válida.

Consideremos agora $n < k \leq n+1$, $(n \geq 2)$ e suponhamos que a relação $(A.8)$ é válida para $n-1 < k \leq n$. Seja $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (x+1)^k - x^k - 1 - kx^{k-1}$ para cada $x \geq 0$. Temos, pela hipótese de indução, que $h'(x) = k[(x+1)^{k-1} - x^{k-1} - (k-1)x^{k-2}] \geq k$, para todo $x \in (0, \infty)$, donde segue que 0 é mínimo global de h. Como $h(0) = 0$, temos que a desigualdade $(A.8)$ é satisfeita para $n < k \leq n+1$. $\square$

Podemos mostrar que existe $C > 0$, de forma que

$$\left| |\eta|^{p-2}\eta - |\eta'|^{p-2}\eta' \right| \leq C|\eta - \eta'| \left(|\eta| + |\eta'|\right)^{p-2} \tag{A.9}$$

para quaisquer $p \geq 2$ e η, $\eta' \in \mathbb{R}^N$. Segue por Yang [72, (4.15)] que para cada $p \geq 2$ e quaisquer η, $\eta' \in \mathbb{R}^N$ temos

$$\left\langle |\eta|^{p-2}\eta + |\eta'|^{p-2}\eta', \eta + \eta' \right\rangle \geq |\eta + \eta'|^p. \tag{A.10}$$

A.2 Resultados abstratos

A seguir enunciamos o Teorema da função implícita, cuja demonstração pode ser encontrada em Ambrosetti e Prodi [13].

Teorema A.1 *Seja* $F \in C^k(\Theta \times U, Y)$, $k \geq 1$, *onde* Y *é um espaço de Banach e* Θ *(respect.* U*) é subconjunto aberto do espaço de Banach* T *(respect.* X*). Suponha que* $F(\theta^*, u^*) = 0$ *e que* $F_u(\theta^*, u^*) \in Inv(X, Y)$. *Então existem vizinhanças* Θ^* *de* θ^* *em* T *e* U^* *de* u^* *em* X *e uma função* $g \in C^k(\Theta^*, X)$ *tal que*

i) $F(\theta, g(\theta)) = 0$, *para todo* $\theta \in \Theta^*$.

ii) $F(\theta, u) = 0$ *e* $(\theta, u) \in \Theta^* \times U^*$ *implicam* $u = g(\theta)$.

iii) $g'(\theta) = -[F_u(p)]^{-1} \circ F_\theta(p)$, *onde* $p = (\theta, g(\theta))$ *e* $\theta \in \Theta^*$.

Enunciamos também o Princípio variacional de Ekeland, cuja demonstração pode ser encontrada em de Figueiredo [33].

Teorema A.2 *Suponha* X *um espaço métrico completo com a métrica* d *e* $\Phi : X \to [-\infty, \infty]$ *um operador semi-contínuo inferiormente, com* $\Phi \not\equiv +\infty$ *e limitado inferiormente. Então para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $u_\varepsilon \in X$ *tal que*

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon,$$

$$\Phi(u_\varepsilon) < \Phi(u) + \varepsilon d(u_\varepsilon, u), \quad \forall\, u \in X \backslash \{u_\varepsilon\}.$$

A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em Ekeland [44].

Corolário A.1 *Se* X *é um espaço de Banach e* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é limitada inferiormente, então existe sequência* $(x_n) \subset X$ *tal que*

$$\Phi(x_n) \to \inf_{x \in X} \Phi(x), \quad e \quad \Phi'(x_n) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

O resultado a seguir é uma variação do Teorema do passo da montanha, no qual não há a necessidade da condição de Palais Smale (veja Brézis e Nirenberg [23]).

Teorema A.3 *Seja Φ uma função de classe C^1 sobre um espaço de Banach E com $\Phi(e_1) = c$. Suponha que existam $\eta > 0$, $r > c$ tais que $\Phi(u) \geq r$ quando $\|u - e_1\| = \eta$ e $\Phi(e_2) \leq c$ para algum $e_2 \in E$, com $\|e_2 - e_1\| > \eta$. Então existe uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que*

$$\Phi(u_n) = c^* + o(1) \quad e \quad \Phi'(u_n) = o(1),$$

onde

$$c^* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi(\gamma(t)), \quad c^* \geq r,$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = e_1,\ \gamma(1) = e_2\}.$$

O seguinte resultado foi provado por Kavian [52, Lema 4.8].

Lema A.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e (g_n) uma sequência limitada em $L^s(\Omega)$, para algum $1 < s < \infty$, tal que $g_n \to g$ qtp em Ω. Então $g \in L^s(\Omega)$ e $g_n \rightharpoonup g$ fracamente em $L^s(\Omega)$.*

O próximo lema é devido à Brézis e Lieb [21].

Lema A.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $s \in (0, \infty)$ quaisquer. Suponhamos que $(g_n) \subset L^s(\Omega)$, onde $g_n \to g$ qtp em Ω e existe $C > 0$ tal que $\|g_n\|_{L^s(\Omega)} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\|g_n - g\|^s_{L^s(\Omega)} = \|g_n\|^s_{L^s(\Omega)} - \|g\|^s_{L^s(\Omega)} + o(1).$$

A demonstração do resultado a seguir pode ser obtida em Brézis [20].

Lema A.4 *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Se $(x_n) \subset X$ é tal que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em X e $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, então $x_n \to x$ fortemente em X.*

Motivados pelo trabalho de Boccardo e Murat [19], temos o seguinte resultado a respeito da convergência pontual do gradiente.

Lema A.5 *Consideremos* $p \in [2, N)$ *e* $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I_λ*, tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*. Então a menos de subsequência,* $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$*, quando* $n \to \infty$*, qtp* $x \in \mathbb{R}^N$*.*

Demonstração: Consideremos, por simplicidade, $B_j = B(0, j) \subset \mathbb{R}^N$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por argumentos de diagonalização, é suficiente provar que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$, quando $n \to \infty$, qtp $x \in B_j$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $e_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, onde

$$e_n(x) = < |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla u_n(x) - \nabla u(x) > .$$

Segue pela relação $(A.10)$, que e_n é uma função não negativa e que para concluir a demonstração, é suficiente mostrar que $e_n(x) \to 0$, qtp $x \in B_j$. Agora pelo fato de $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}$ ser limitada e a relação $(A.9)$, segue que (e_n) é uniformemente limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma função corte, com $0 \leq \phi \leq 1$ onde o suporte esta contido B_{j+1} e ainda ϕ é identicamente 1 sobre B_j. Temos, para qualquer $k > 0$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx = \int_{\{|u|>k\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx + \int_{\{|u|\leq k\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx. \tag{A.11}$$

Devido a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\{|u|>k\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx &\leq \left(\int_{\{|u|>k\}} e_n\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|u|>k\}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} e_n\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|u|>k\}\cap B_{j+1}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C\left(\int_{\{|u|>k\}\cap B_{j+1}} 1\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Entretanto, novamente pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\{|u|>k\}\cap B_{j+1}} 1\, dx &\leq \int_{\{|u|>k\}\cap B_{j+1}} \frac{|u|}{k}\, dx \\ &\leq \frac{1}{k}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{B_{j+1}} 1\, dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \\ &\leq \frac{C_j}{k}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\int_{\{|u|>k\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx \;\;\leq\;\; \frac{CC_j}{k^{\frac{p-1}{p}}}. \tag{A.13}$$

Estimemos agora a segunda integral da soma na relação $(A.11)$. Fixado $\varepsilon > 0$ qualquer, consideremos

$$\int_{\{|u|\leq k\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx = \int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|<\varepsilon\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx + \int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx. \tag{A.14}$$

Porém, pela desigualdade de Hölder e a definição de ϕ, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx &\leq \left(\int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}} e_n\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C\left(\int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}\cap B_{j+1}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C\,|\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}\cap B_{j+1}|^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Agora, como $|B_{j+1}| < \infty$ e $u_n \to u$ qtp em $\mathbb{R}^N$, segue que $(u_n|_{B_{j+1}})$ converge em medida para $u|_{B_{j+1}}$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}\cap B_{j+1}| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Portanto obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\varepsilon\}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx \leq C\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}. \tag{A.15}$$

Considerando $S_{k,n,\varepsilon} = \{|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\leq\varepsilon\}\cap B_{j+1}$, obtemos pela definição da função e_n, a desigualdade de Hölder e o fato que $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$,

$$\begin{aligned}
\int_{S_{k,n,\varepsilon}} \phi\, e_n^{\frac{1}{p}}\, dx &\leq \left(\int_{S_{k,n,\varepsilon}} \phi\, e_n\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S_{k,n,\varepsilon}} \phi\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= C_j\left(\int_{S_{k,n,\varepsilon}} \phi\, e_n\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_j\Bigg(\int_{S_{k,n,\varepsilon}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n-u)\phi\, dx \\
&\quad - \int_{S_{k,n,\varepsilon}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_n-u)\phi\, dx\Bigg)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Observemos que o funcional linear $H : \mathcal{D}^{1,p} \to \mathbb{R}$ dado por

$$H(v) = \int_{S_{k,n,\varepsilon}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\,\phi\, dx,$$

é contínuo. Segue então pelo fato de $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$, que $\lim_{n\to\infty} H(u_n - u) = 0$, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_{k,n,\varepsilon}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u)\phi\, dx = 0. \tag{A.17}$$

Para cada $t > 0$, consideremos a função $\tau_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$\tau_t(s) = \begin{cases} s & \text{se} \quad |s| \leq t, \\ t\frac{s}{|s|} & \text{se} \quad |s| > t. \end{cases}$$

Temos que se $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $\tau_t(u) \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e ainda para $1 \leq i \leq N$ vale

$$\frac{\partial \tau_t \circ u}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{qtp em } \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x) < t\}, \\ 0 & \text{qtp em } \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x) \geq t\}. \end{cases}$$

Obtemos então pela definição de τ_ε que

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_{k,n,\varepsilon}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)\phi\, dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla[\tau_\varepsilon(u_n - u)]\phi\, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla[\phi\tau_\varepsilon(u_n - u)]\, dx \right| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\phi||\tau_\varepsilon(u_n - u)|\, dx, \end{aligned} \tag{A.18}$$

mas, novamente pela definição de τ_ε e a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\phi||\tau_\varepsilon(u_n - u)|\, dx &\leq \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\phi|\, dx \right) \\ &\leq \varepsilon\|u_n\|^{p-1}\|\phi\| \leq \varepsilon C_j. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Pelo fato (u_n) é um sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ, podemos pela Observação 2.2, considerar que $u_n, u \geq 0$ qtp em $\mathbb{R}^N$ e pela relação (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla[\phi\tau_\varepsilon(u_n - u)]\, dx \right| \\ = &\left| < I_\lambda(u_n), \phi\tau_\varepsilon(u_n - u) > + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f u_n^{q-1}\phi\tau_\varepsilon(u_n - u)\, dx \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*-1}\phi\tau_\varepsilon(u_n - u)\, dx \right| \\ \leq &\ o_n(1) + C\varepsilon, \end{aligned} \tag{A.20}$$

onde $\lim_{n\to\infty} o_n(1) = 0$ e $C > 0$ é independente de n. Então pelas relações $(A.18)$, $(A.19)$ e $(A.20)$, segue que existe $C > 0$, tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{S_{k,n,\varepsilon}} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u)\phi \, dx \right| \leq C\varepsilon. \tag{A.21}$$

Passando o limite superior na equação $(A.16)$ e utilizando as relações $(A.17)$ e $(A.21)$, obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{S_{k,n,\varepsilon}} \phi \, e_n^{\frac{1}{p}} \, dx \leq C\varepsilon. \tag{A.22}$$

Segue pela definição de $S_{k,n,\varepsilon}$ e as relações $(A.14)$, $(A.15)$ e $(A.22)$ que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|u|\leq k\}} \phi \, e_n^{\frac{1}{p}} \, dx \leq C(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}), \tag{A.23}$$

para alguma constante $C > 0$. Agora pelas relações $(A.11)$, $(A.13)$ e $(A.23)$, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi \, e_n^{\frac{1}{p}} \, dx \leq \frac{C}{k^{\frac{p-1}{p}}} + C(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}),$$

portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ e então, $k \to \infty$, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi \, e_n^{\frac{1}{p}} \, dx = 0,$$

donde segue que $e_n(x) \to 0$ qtp $x \in B_j$, o que conclui a demonstração. $\square$

De maneira similar podemos provar o seguinte resultado:

Lema A.6 *Consideremos $2 \leq p \leq q < min\{p^*, N\}$ e $(u_n, v_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, onde $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Então a menos de subsequência, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ e $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$, quando $n \to \infty$, qtp $x \in \mathbb{R}^N$.*

A.3 Operadores diferenciáveis

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em Deimling [39]. A idéia de diferenciabilidade sobre um espaço vetorial, distinto de

$\mathbb{R}^N$, segue a mesma idéia de diferenciabilidade que conhecemos em $\mathbb{R}^N$, intuitivamente são aproximações locais de um operador por operadores lineares com uma certa precisão. Nesta seção denotamos por X um espaço de Banach e por X^* o seu espaço dual.

Definição A.1 *Sejam $U \subset X$ um aberto e $\Phi : U \to \mathbb{R}$ um operador. Dizemos que Φ é diferenciável a Fréchet em $u \in U$ com derivada de Fréchet $\Phi'(u) \in X^*$ se*

$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + < \Phi'(u), v > + o(\|v\|),$$

onde $o(\|v\|)/\|v\| \to 0$ quando $v \to 0$. Além disso, dizemos que $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se Φ' a derivada de Fréchet existe e é contínua em U.

Definição A.2 *Sejam $U \subset X$ um aberto e $\Phi : U \to \mathbb{R}$ um operador. Dizemos que Φ é diferenciável a Gâteaux em $u \in U$ com derivada de Gâteaux $grad\Phi(u) \in X^*$ se*

$$\lim_{t \to 0^+} [\Phi(u+tv) - \Phi(u)] =< grad\Phi(u), v >, \ \forall\, v \in X.$$

Lema A.7 *Se o operador $\Phi : U \to \mathbb{R}$ tem a derivada de Gâteaux contínua em U, então $\Phi \in C^1(U, R)$.*

Lema A.8 *Sejam $\mathcal{O}$ um domínio suave (possivelmente ilimitado) de $\mathbb{R}^N$, $2 \leq p < N$ e ainda $1 < q < p < r \leq p^*$. Suponhamos que $h \in L^\infty(\mathcal{O})$ é não negativa e que as funções f_1, f_2 satisfazem as condições (H_f) e $(\mathcal{H}_f)$ respectivamente. Então os operadores $H_i : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 4$ definidos por*

$$H_i(u) = \int_{\mathcal{O}} f_i|u|^q dx, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad H_3(u) = \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p dx, \quad H_4(u) = \int_{\mathcal{O}} h|u|^r dx,$$

são de classe C^1, ou seja, $H_i \in C^1(W_0^{1,p}(\mathcal{O}), \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 4$. Além disso, suas derivadas de Fréchet em u são dadas por

$$< H_i'(u), v >= q \int_{\mathcal{O}} f_i|u|^{q-2}uv\, dx, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

$$< H_3'(u), v >= p \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx,$$
$$< H_4'(u), v >= r \int_{\mathcal{O}} h|u|^{r-2} uv \, dx.$$

Demonstração: Consideremos para cada $s > 1$ as funções $G : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $G_s : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$G(x,y) = p \int_0^{|y|} t^{p-1} \, dt \quad \text{e} \quad G_s(x,y) = s \int_0^y t^{s-1} \, dt.$$

Para quaisquer $u, v \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ e $t \in (0,1)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{H_i(u+tv) - H_i(u)}{t} &= \int_{\mathcal{O}} f_i \frac{[G_q(x, u+tv) - G_q(x,u)]}{t} dx, \\ \frac{H_3(u+tv) - H_3(u)}{t} &= \int_{\mathcal{O}} \frac{G(x, \nabla u + t\nabla v) - G(x, \nabla u)}{t} dx, \\ \frac{H_4(u+tv) - H_4(u)}{t} &= \int_{\mathcal{O}} h \frac{[G_r(x, u+tv) - G_r(x,u)]}{t} dx. \end{aligned}$$

Agora para cada $x \in \mathcal{O}$, segue pelo Teorema do valor médio que existe $\tau \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |f_i(x)| \frac{|G_q(x, u(x)+tv(x)) - G_q(x, u(x))|}{t} &\leq q|f_i(x)| \frac{|u(x) + \tau t v(x)|^{q-1} |tv(x)|}{t} \\ &\leq C|f_i(x)|(|u(x)|^q + |v(x)|^q) \in L^1(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

para algum $C > 0$ independente de u e v, para cada $1 \leq i \leq 2$, onde a última desigualdade segue da relação $(A.3)$. De modo semelhante obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{|G(x, \nabla u(x) + t\nabla v(x)) - G(x, \nabla u(x))|}{t} &\leq p \frac{|\nabla u(x) + \tau t \nabla v(x)|^{p-1} |t \nabla v(x)|}{t} \\ &\leq C(|\nabla u(x)|^p + |\nabla v(x)|^p) \in L^1(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |h(x)| \frac{|G_r(x, u(x)+tv(x)) - G_r(x, u(x))|}{t} &\leq r|h(x)| \frac{|u(x) + \tau t v(x)|^{r-1} |tv(x)|}{t} \\ &\leq C|h(x)|(|u(x)|^r + |v(x)|^r) \in L^1(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

para algum $C > 0$ independe de u e v.

Temos então pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{H_i(u+tv) - H_i(u)}{t} &= \int_{\mathcal{O}} f_i \lim_{t \to 0^+} \frac{G_q(x, u+tv) - G_q(x,u)}{t} dx \\ &= q \int_{\mathcal{O}} f_i |u|^{q-2} uv \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\frac{H_3(u+tv)-H_3(u)}{t} &= \int_{\mathcal{O}}\lim_{t\to 0^+}\frac{G(x,\nabla u+t\nabla v)-G(x,\nabla u)}{t}dx\\
&= p\int_{\mathcal{O}}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\,dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\frac{H_4(u+tv)-H_4(u)}{t} &= \int_{\mathcal{O}}h\lim_{t\to 0^+}\frac{G_r(x,u+tv)-G_r(x,u)}{t}dx\\
&= r\int_{\mathcal{O}}h|u|^{r-2}uv\,dx,
\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev que existe $C>0$, independentes de u e v, de modo que

$$|< H_1'(u),v>|\leq C\|f_1\|_{L_1}\|u\|^{q-1}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})}\|v\|_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})},$$

$$|< H_2'(u),v>|\leq C\|u\|^{q-1}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})}\|v\|_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})},$$

$$|< H_4'(u),v>|\leq p\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})}\|v\|_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})},$$

$$|< H_5'(u),v>|\leq C\|h\|_{L^\infty(\mathcal{O})}\|u\|^{r-1}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})}\|v\|_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})},$$

ou seja, $H_i'(u)$ são operadores lineares limitados.

Mostremos agora que H_i' é contínua. Seja $(u_n)\subset W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ tal que $u_n\to u$ em $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, mostremos que $H_i'(u_n)\to H_i'(u)$. Segue da relação $(A.4)$, a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev que

$$\begin{aligned}
\|H_1'(u_n)-H_1'(u)\| &= \sup_{\|v\|=1}|< H_1'(u_n)-H_1'(u),v>|\\
&\leq \sup_{\|v\|=1}\int_{\mathcal{O}}|f_1|\left||u_n|^{q-2}u_n-|u|^{q-2}u\right||v|dx\\
&\leq C\sup_{\|v\|=1}\int_{\mathcal{O}}|f_1||u_n-u|^{q-1}|v|dx\\
&\leq C\|f_1\|_{L_1}\|u_n-u\|^{q-1}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})},
\end{aligned}$$

o que mostra que H_1' é contínuo. Analogamente, temos que H_2' é contínuo. Segue pela relação $(A.9)$ que

$$\begin{aligned}
\|H_3'(u_n)-H_3'(u)\| &= \sup_{\|v\|=1} |< H_3'(u_n) - H_3'(u), v >| \\
&\leq \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathcal{O}} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right| |\nabla v| dx \\
&\leq C \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathcal{O}} |\nabla u_n - \nabla u| \left(|\nabla u_n| + |\nabla u|\right)^{p-2} |\nabla v| dx \\
&\leq C \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathcal{O}} |\nabla u_n - \nabla u| \left(|\nabla u_n|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}\right) |\nabla v| dx \\
&\leq C\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})} \left(\|u_n\|^{p-2}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})} + \|u|^{p-2}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})}\right),
\end{aligned}$$

onde a última relação segue pela desigualdade de Hölder, o que mostra que H_3' é contínuo. Agora pela relação $(A.5)$, a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev temos que

$$\begin{aligned}
\|H_4'(u_n)-H_4'(u)\| &= \sup_{\|v\|=1} |< H_4'(u_n) - H_4'(u), v >| \\
&\leq \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathcal{O}} |h| \left||u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right| |v| dx \\
&\leq C \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathcal{O}} |h||u_n - u|(|u_n| + |u|)^{r-2}|v| dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathcal{O}} |h||u_n - u| \left(|u_n|^{r-2} + |u|^{r-2}\right) |v| dx \\
&\leq C\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})} \left(\|u_n\|^{r-2}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})} + \|u\|^{r-2}_{W_0^{1,p}(\mathcal{O})}\right),
\end{aligned}$$

o que mostra que H_4' é contínuo. Portanto, pelo Lema A.7 obtemos para cada $1 \leq i \leq 4$, que $H_i \in C^1(W_0^{1,p}(\mathcal{O}), \mathbb{R})$. □

De maneira similar podemos provar o seguinte resultado:

Lema A.9 *Suponhamos que a condição* $(\mathbb{H}_{exp})$ *é satisfeita e* $f \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ *é qualquer. Então o funcional* $I : \mathcal{D}^{1,p} \times \mathcal{D}^{1,q} \to \mathbb{R}$*, definido pela relação* (3.1) *é de classe* C^1 *e ainda vale a igualdade* (3.2).

A.4 Algumas estimativas

Consideremos $y \in \mathbb{R}^N$ e R_0, c_0 constantes positivas quaisquer. Seja então $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma função corte, com $0 \leq \phi \leq 1$ onde o suporte esta contido $B(y, 2R_0)$ e ainda ϕ é identicamente 1 sobre $B(y, R_0)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ definimos u_ε,w_ε, $v_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ por

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\left(\varepsilon + |x-y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}\,, \qquad w_\varepsilon(x) = \phi(x) u_\varepsilon(x)\,, \qquad v_\varepsilon(x) = \frac{w_\varepsilon(x)}{\|w_\varepsilon\|_{L^{p^*}}}\,.$$

Temos então as seguintes propriedades a respeito das funções v_ε:

Lema A.10 *Sejam $p \in [2, N)$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$, $l \in [1, p^*)$, k, $k' \geq 1$ expoentes conjugados com $lk \leq p^*$ ($k' = \infty$ se $k = 1$). Temos que $\|v_\varepsilon\|_{L^{p^*}} = 1$,*

$$\|v_\varepsilon\|^p = S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}), \tag{A.24}$$

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^{p-1}}^{p-1} = O(\varepsilon^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}}), \tag{A.25}$$

e ainda

$$\|h^{\frac{1}{l}} v_\varepsilon\|_{L^l}^l \geq \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{(N-p)l}{p^2}}) & se \quad l < \frac{N(p-1)}{N-p}, \\ O(\varepsilon^{\frac{(N-p)l}{p^2}} |ln(\varepsilon)|) & se \quad l = \frac{N(p-1)}{N-p}, \\ O(\varepsilon^{\frac{[N(p-l)+lp]}{p^2}(p-1)}) & se \quad l > \frac{N(p-1)}{N-p}. \end{cases} \tag{A.26}$$

para toda $h \in L^{k'}$ com $\inf\limits_{B(y,2R)} h(x) > 0$ para algum $0 < R < \frac{R_0}{2}$ e $h(x) \geq 0$ em $B(y, 2R_0)$. Além disso, a desigualdade (A.26) é uniforme em $h \in L^{k'}$ com $h(x) \geq 0$ em $B(y, 2R_0)$, satisfazendo

$$\frac{R^N}{(1 + R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} \inf_{B(y,2R)} h(x) \geq c_0, \tag{A.27}$$

para algum $0 < R < \frac{R_0}{2}$.

Demonstração: Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $y = 0 \in \mathbb{R}^N$. A demonstração das relações $(A.24)$, $(A.25)$, bem como o fato que

$$O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}}) \|u_\varepsilon\|_{L^{p^*}} = S^{\frac{1}{p^*-p}}, \tag{A.28}$$

podem ser encontradas em Drábek e Huang [41] ou ainda em Huang [51].

Agora provaremos que $\|h^{\frac{1}{l}}v_\varepsilon\|_{L^l}^l$ satisfaz a relação $(A.26)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon\|_{L^{p^*}}^{p^*} &= O(1) + \int_{B(0,R_0)} |u_\varepsilon|^{p^*}\,dx \\ &= O(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{p^*}\,dx \\ &= O(1) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}} \left(O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}}) \right)^{-p^*}. \end{aligned} \tag{A.29}$$

Considerando a mudança de variável para coordenadas polares, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h|\phi u_\varepsilon|^l\,dx &\geq \int_{B(0,2R)} h|u_\varepsilon|^l\,dx \\ &\geq \inf_{B(y,2R)} h(x) \left(\int_{B(0,2R)\setminus B(0,R)} |u_\varepsilon|^l\,dx + \int_{B(0,R)} |u_\varepsilon|^l\,dx \right) \\ &= \omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) \left(\int_R^{2R} r^{N-1}|u_\varepsilon|^l\,dr + \int_0^R r^{N-1}|u_\varepsilon|^l\,dx \right) \end{aligned} \tag{A.30}$$

Na sequência estimaremos cada uma das integrais da soma acima. Temos que

$$\begin{aligned} \int_R^{2R} r^{N-1}|u_\varepsilon|^l\,dr &\geq \int_R^{2R} \frac{r^{N-1}}{(1+r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}}\,dr \\ &= \int_R^{2R} \frac{r^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}}}{(1+r^{-\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}}\,dr \\ &= (R^{-\frac{p}{p-1}}+1)^{-\frac{(N-p)l}{p}} \int_R^{2R} r^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}}\,dr. \end{aligned} \tag{A.31}$$

Agora fazendo a mudança de variável $s = R^{-1}\varepsilon^{-\frac{(p-1)}{p}}r$ na segunda integral da soma em $(A.30)$, temos

$$\int_0^R r^{N-1}|u_\varepsilon|^l\,dr = (R^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon)^{-\frac{(N-p)l}{p}+\frac{N(p-1)}{p}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}} \frac{s^{N-1}}{(R^{-\frac{p}{p-1}}+s^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}}\,ds. \tag{A.32}$$

Suponhamos $l < \frac{N(p-1)}{N-p}$. Neste caso, temos que

$$-\frac{(N-p)l}{p} + \frac{N(p-1)}{p} > 0,$$

e então pelas relações $(A.30)$, $(A.31)$ e $(A.32)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h|\phi u_\varepsilon|^l \, dx &\geq \frac{\omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x)}{(R^{-\frac{p}{p-1}}+1)^{\frac{(N-p)l}{p}}} \int_R^{2R} r^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}} \, dr \\
&\geq \omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) \left[\frac{R^{N-\frac{(N-p)l}{(p-1)}} \left(2^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}} - 1\right)}{(R^{-\frac{p}{p-1}}+1)^{\frac{(N-p)l}{p}} (N - \frac{(N-p)l}{(p-1)})} \right] \\
&\geq \left(\frac{R^N \omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x)}{(1+R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} \right) \left(\frac{2^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}} - 1}{N - \frac{(N-p)l}{(p-1)}} \right) \\
&= O_1(R,h).
\end{aligned}$$

Então pela relação $(A.28)$ e a estimativa acima obtemos, para $l < \frac{N(p-1)}{N-p}$, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h|v_\varepsilon|^l \, dx &= \frac{\|h^{\frac{1}{l}} \phi u_\varepsilon\|_{L^l}^l}{\|w_\varepsilon\|_{L^{p^*}}^l} \\
&\geq \frac{O_1(R,h)}{\left[O(1) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}} \left(O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}}) \right)^{-p^*} \right]^{\frac{l}{p^*}}} \\
&= \frac{O_1(R,h)}{O(\varepsilon^{\frac{-(N-p)l}{p^2}}) \left[O(\varepsilon^{\frac{(N-p)p^*}{p^2}}) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}} \right]^{\frac{l}{p^*}}} \\
&= O_1(R,h) O(\varepsilon^{\frac{(N-p)l}{p^2}}).
\end{aligned}$$

Além disso, se h satisfaz $(A.27)$, temos que

$$O_1(R,h) \geq \omega_N c_0 \left(\frac{2^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}} - 1}{N - \frac{(N-p)l}{(p-1)}} \right) = \tilde{c}_0 > 0,$$

e portando

$$\int_{\mathbb{R}^N} h|v_\varepsilon|^l \, dx \geq O(\varepsilon^{\frac{(N-p)l}{p^2}}),$$

uniformemente em h satisfazendo $(A.27)$.

Suponhamos agora que $l = \frac{N(p-1)}{N-p}$. Neste caso, temos que

$$-\frac{(N-p)l}{p} + \frac{N(p-1)}{p} = 0,$$

e então pelas relações $(A.30)$, $(A.31)$ e $(A.32)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h|\phi u_\varepsilon|^l\,dx &\geq \omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) \int_0^{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}} \frac{s^{N-1}}{(R^{-\frac{p}{p-1}} + s^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}}\,ds \\
&\geq \omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) \int_1^{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}} \frac{s^{N-1-\frac{(N-p)l}{(p-1)}}}{((Rs)^{-\frac{p}{p-1}} + 1)^{\frac{(N-p)l}{p}}}\,ds \\
&\geq \frac{\omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) R^{N-\frac{(N-p)l}{(p-1)}}}{(1 + R^{-\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} \int_1^{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}} s^{-1}\,ds \\
&= \frac{\omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) R^N}{(1 + R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} ln(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\
&= \frac{\omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) R^N}{(1 + R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} \int_1^{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}} s^{-1}\,ds \\
&= \frac{(p-1)\omega_N}{p} \frac{\inf_{B(y,2R)} h(x) R^N}{(1 + R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} |ln(\varepsilon)| \\
&= O_2(R,h)|ln(\varepsilon)|.
\end{aligned}$$

Então pela relação $(A.28)$ e a estimativa acima obtemos, para $l = \frac{N(p-1)}{N-p}$, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h|v_\varepsilon|^l\,dx &= \frac{\|h^{\frac{1}{l}}\phi u_\varepsilon\|_{L^l}^l}{\|w_\varepsilon\|_{L^{p^*}}^l} \\
&\geq \frac{O_2(R,h)|ln(\varepsilon)|}{\left[O(1) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}}\left(O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}})\right)^{-p^*}\right]^{\frac{l}{p^*}}} \\
&= \frac{O_2(R,h)|ln(\varepsilon)|}{O(\varepsilon^{\frac{-(N-p)l}{p^2}})\left[O(\varepsilon^{\frac{(N-p)p^*}{p^2}}) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}}\right]^{\frac{l}{p^*}}} \\
&= O_2(R,h)|ln(\varepsilon)|O(\varepsilon^{\frac{(N-p)l}{p^2}}).
\end{aligned}$$

Além disso, se h satisfaz $(A.27)$, temos que

$$O_2(R,h) \geq \frac{(p-1)}{p}\omega_N c_0 = \tilde{c}_0 > 0,$$

e portando

$$\int_{\mathbb{R}^N} h|v_\varepsilon|^l\,dx \geq |ln(\varepsilon)|O(\varepsilon^{\frac{(N-p)l}{p^2}}),$$

uniformemente em h satisfazendo $(A.27)$.

Suponhamos agora que $l > \frac{N(p-1)}{N-p}$. Neste caso, temos que

$$-\frac{(N-p)l}{p} + \frac{N(p-1)}{p} < 0,$$

e então pelas relações $(A.30)$, $(A.31)$ e $(A.32)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h|\phi u_\varepsilon|^l\,dx &\geq \omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x)(\varepsilon R^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{(N-p)l}{p}+\frac{N(p-1)}{p}} \\ &\quad\times \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{s^{N-1}}{(R^{-\frac{p}{p-1}} + s^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}}\,ds \\ &\geq \frac{\omega_N \inf_{B(y,2R)} h(x) R^N}{(1+R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)l}{p}}} \varepsilon^{-\frac{(N-p)l}{p}+\frac{N(p-1)}{p}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} s^{N-1}\,ds \\ &= O_3(R,h)O(\varepsilon^{-\frac{(N-p)l}{p}+\frac{N(p-1)}{p}}).\end{aligned}$$

Então pela relação $(A.28)$ e a estimativa acima obtemos, para $l > \frac{N(p-1)}{N-p}$, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h|v_\varepsilon|^l\,dx &= \frac{\|h^{\frac{1}{l}}\phi u_\varepsilon\|_{L^l}^l}{\|w_\varepsilon\|_{L^{p^*}}^l} \\ &\geq \frac{O_3(R,h)O(\varepsilon^{-\frac{(N-p)l}{p}+\frac{N(p-1)}{p}})}{\left[O(1) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}}\left(O(\varepsilon^{\frac{(N-p)}{p^2}})\right)^{-p^*}\right]^{\frac{l}{p^*}}} \\ &= \frac{O_3(R,h)O(\varepsilon^{-\frac{(N-p)l}{p}+\frac{N(p-1)}{p}})}{O(\varepsilon^{\frac{-(N-p)l}{p^2}})\left[O(\varepsilon^{\frac{(N-p)p^*}{p^2}}) + S^{\frac{p^*}{p^*-p}}\right]^{\frac{l}{p^*}}} \\ &= O_3(R,h)O(\varepsilon^{-\frac{(N-p)(p-1)l}{p^2}+\frac{N(p-1)}{p}}).\end{aligned}$$

Além disso, se h satisfaz $(A.27)$, temos que

$$O_3(R,h) \geq \omega_N c_0 = \tilde{c}_0 > 0,$$

e portando

$$\int_{\mathbb{R}^N} h|v_\varepsilon|^l\,dx \geq O(\varepsilon^{-\frac{(N-p)(p-1)l}{p^2}+\frac{N(p-1)}{p}}),$$

uniformemente em h satisfazendo $(A.27)$. $\square$

A.5 Regularidade de soluções fracas

Consideremos $\mathcal{O}$ um domínio qualquer de $\mathbb{R}^N$ e $A : \mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $B : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem certas condições. Estamos interessados em resultados de regularidade de soluções do problema

$$divA(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{O}. \tag{A.33}$$

Com relação a estimativas da norma L^∞, temos o seguinte resultado devido a Serrin [60]:

Lema A.11 *Suponha que Ω é um domínio limitado e $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$. Suponha que existem $p \in (1,N)$, a, $\varepsilon > 0$ e funções b, $e \in L^{\frac{N}{p-1}}(\mathcal{O})$, $c \in L^{\frac{N}{1-\varepsilon}}(\mathcal{O})$ e d, f, $g \in L^{\frac{N}{p-\varepsilon}}(\mathcal{O})$, tais que*

$$|A(x,z,\eta)| \leq a|\eta|^{p-1} + b(x)|z|^{p-1} + e,$$

$$|B(x,z,\eta)| \leq c(x)|\eta|^{p-1} + d(x)|z|^{p-1} + f,$$

$$A(x,z,\eta)\cdot\eta \geq |\eta|^p - d(x)|z|^p - g.$$

Então qualquer solução fraca u do problema (A.33) satisfaz $u \in L^\infty(\Omega)$.

Agora se supormos que $A \in C(\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ e que $B(x,z,\eta)$ é mensurável na variável x e contínua nas variáveis z e η, onde

$$A_j(x,z,0) = 0, \tag{A.34}$$

$$|B(x,z,\eta)| \leq C(k+|\eta|)^{p-2}, \tag{A.35}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_i}(x,z,\eta)\xi_i\xi_j \geq c(k+|\eta|)^{p-2}|\xi|^2, \tag{A.36}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left|\frac{\partial A_j}{\partial \eta_i}(x,z,\eta)\right| \leq C(k+|\eta|)^{p-2}, \tag{A.37}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left(\left|\frac{\partial A_j}{\partial \eta_i}(x,z,\eta)\right| + \left|\frac{\partial A_j}{\partial z}(x,z,\eta)\right| \right) \leq C(k+|\eta|)^{p-2}|\eta|, \tag{A.38}$$

para algum $2 \leq p < N$, $k \in [0,1]$ e constantes positivas c e C, então Tolksdorf [70] obteve o seguinte resultado:

Lema A.12 *Seja Ω um domínio suave e limitado de $\mathcal{O}$, tal que $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$. Suponha que as condições* $(A.34)$–$(A.38)$ *sejam válidas e que $u \in W^{1,p}(\mathcal{O}) \cap L^{\infty}(\mathcal{O})$ é uma solução fraca do problema* $(A.33)$. *Então existe $\gamma \in (0,1]$ tal que $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$.*

Com esses resultados provaremos a regularidade (local) para o caso em que $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$, $A(x,z,\eta) = |\eta|^{p-2}\eta$ e $B(x,z,\eta) = \lambda f(x)|z|^{q-1} + |z|^r$, isto é,

$$-\Delta_p u = \lambda f(x)|u|^{q-1} + |u|^r, \quad \text{em} \quad \mathcal{O} = \mathbb{R}^N, \tag{A.39}$$

onde λ é um parâmetro real positivo, $1 < q < p$, $2 \leq p < N$ e a função f satisfaz a condição $(\mathcal{H}_f)$.

A regularidade das soluções fracas do problema $(A.39)$ no caso em que $r \in [0, p^* - 1)$ é consequência dos Lemas $A.11$ e $A.12$.

Agora, o caso $r = p^* - 1$ é mais delicado, visto que não podemos aplicar os lemas acima citados para obter as estimativas L^{∞}, bem como as estimativas $C^{1,\gamma}$. Procedendo do mesmo modo que Garcia e Peral [46], obtemos o seguinte resultado a respeito das estimativas L^{∞} das soluções fracas do problema $(A.39)$:

Lema A.13 *Suponhamos que as condições $(\mathcal{H}_{exp})$ e $(\mathcal{H}_f)$ sejam satisfeitas e que $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca não negativa do problema* $(A.39)$. *Então $u \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}$ um domínio suave limitado qualquer de $\mathbb{R}^N$ tal que $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Seja ainda $\beta > 1$ de modo que $\beta p < p^*$. Durante esta demonstração denotaremos por C uma constante positiva que pode mudar de valor um número finito de vezes. Consideremos para cada $l > 0$ as funções F, $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = \begin{cases} t^{\beta}, & \text{se} \quad t \in [0, l], \\ \beta l^{\beta-1}(t - l) + l^{\beta}, & \text{se} \quad t \in (l, \infty), \end{cases}$$

$$G(t) = \begin{cases} t^{(\beta-1)p+1}, & \text{se} \quad t \in [0, l], \\ \beta((\beta+1)p+1) l^{(\beta-1)p}(t - l) + l^{(\beta-1)p+1}, & \text{se} \quad t \in (l, \infty), \end{cases}$$

Facilmente prova-se que F e G são funções Lipschitz e ainda

i) $G(t) \leq tG'(t)$.

ii) Existe uma constante $C > 0$, independente de l, onde $[F'(t)]^p \leq CG'(t)$.

iii) $t^{p-1}G(t) \leq C[F(t)]^p$, para alguma constante $C > 0$, independente de l.

iv) Se $u \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ então $F(u)$, $G(u) \in W^{1,p}(\mathcal{O})$, desde que F e G são funções Lipschitz.

Consideremos uma função teste $\xi = \chi^p G(u) \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, onde $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{O})$ é uma função não negativa qualquer. Então pela definição de solução fraca de $(A.39)$, temos que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(\chi^p G(u))\, dx = \int_{\mathcal{O}} B(x,u)\chi^p G(u)\, dx.$$

Pela regra do produto aplicada ao primeiro membro da igualdade acima e o item i) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p \chi^p G'(u)\, dx \\
\leq\ & -p\int_{\mathcal{O}} \chi^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\chi G(u)\, dx + \int_{\mathcal{O}} B(x,u)\chi^p G(u)\, dx \\
\leq\ & p\int_{\mathcal{O}} \chi^{p-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\chi|[G(u)]^{\frac{1}{p}}[G(u)]^{\frac{p-1}{p}}\, dx + \int_{\mathcal{O}} B(x,u)\chi^p G(u)\, dx \\
\leq\ & p\int_{\mathcal{O}} \chi^{p-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\chi|[u^{p-1}G(u)]^{\frac{1}{p}}[G'(u)]^{\frac{p-1}{p}}\, dx + \int_{\mathcal{O}} B(x,u)\chi^p G(u)\, dx \\
\leq\ & \varepsilon\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p \chi^p G'(u)\, dx + C\int_{\mathcal{O}} |\nabla\chi|^p(u^{p-1}G(u))\, dx + \int_{\mathcal{O}} B(x,u)\chi^p G(u)\, dx,
\end{aligned}$$

onde a última relação segue da relação $(A.3)$. Segue pela condição $(\mathcal{H}_f)$ que existe $C > 0$ de modo que

$$B(x,u) = \lambda f(x)u^{q-1} + u^{p^*-1} \leq C(1 + u^{p^*-1}), \tag{A.40}$$

para todo $x \in \mathcal{O}$. Tomando $\varepsilon \in (0,1)$ qualquer, pelas desigualdades acima a desigualdade de Hölder e os items ii) e iii) temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}} |\chi F'(u)\nabla u|^p\,dx \\
\leq\ & C\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p \chi^p G'(u)\,dx \\
\leq\ & C\int_{\mathcal{O}} |\nabla \chi|^p (u^{p-1}G(u))\,dx + C\int_{\mathcal{O}} B(x,u)\chi^p G(u)\,dx, \\
\leq\ & C\int_{\mathcal{O}} |\nabla \chi|^p (u^{p-1}G(u))\,dx + C\int_{\mathcal{O}} u^{p^*-1}\chi^p G(u)\,dx + C|supp(\chi)| \\
\leq\ & C\int_{\mathcal{O}} |\nabla \chi|^p [F(u)]^p\,dx + C\int_{\mathcal{O}} \chi^p u^{p^*-p}[F(u)]^p\,dx + C|supp(\chi)|.
\end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev, já que $\chi F(u) \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, e a última desigualdade, temos que existe $\tilde{C} > 0$, que depende apenas de χ e β, tal que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathcal{O}} \chi^{p^*}[F(u)]^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \\
\leq\ & C\int_{\mathcal{O}} |\nabla(\chi F(u))|^p\,dx \\
\leq\ & C\int_{\mathcal{O}} |\chi F'(u)\nabla u|^p\,dx + C\int_{\mathcal{O}} |\nabla\chi|^p [F(u)]^p\,dx \\
\leq\ & \tilde{C}\int_{\mathcal{O}} |\nabla \chi|^p [F(u)]^p\,dx + \tilde{C}\int_{\mathcal{O}} \chi^p u^{p^*-p}[F(u)]^p\,dx + \tilde{C}|supp(\chi)|.
\end{aligned}$$

Fixemos $x_0 \in \mathcal{O}$ qualquer e escolhemos $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ de modo que $supp(\chi) = B(x_0, R)$, com $\chi \equiv 1$ em $B(x_0, \frac{R}{2})$, onde $R > 0$ escolhido de forma a satisfazer

$$\|u\|_{L^{p^*}(B(x_0,R))}^{p^*-p} \leq \frac{1}{2\tilde{C}}.$$

Então pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{C}\int_{\mathcal{O}} \chi^p u^{p^*-p}[F(u)]^p\,dx &\leq \tilde{C}\left(\int_{\mathcal{O}} \chi^{p^*}[F(u)]^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{B(x_0,R)} u^{p^*}dx\right)^{\frac{p^*-p}{p^*}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_{\mathcal{O}} \chi^{p^*}[F(u)]^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\mathcal{O}} \chi^{p^*}[F(u)]^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \tilde{C}\int_{\mathcal{O}} |\nabla\chi|^p [F(u)]^p\,dx + \tilde{C}|supp(\chi)|.$$

Fazendo $l \to \infty$, temos que

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\mathcal{O}} \chi^{p^*}u^{\beta p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \tilde{C}(\chi,\beta)\int_{\mathcal{O}} |\nabla\chi|^p u^{\beta p}\,dx + \tilde{C}(\chi,\beta)|supp(\chi)|.$$

Pelo fato que $\beta p < p^*$ e sendo $x_0 \in \mathcal{O}$ e $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ quaisquer, segue pela relação acima que $u \in L^{\beta p^*}_{loc}(\mathcal{O})$. Considerando $\mathcal{O}'$ um domínio suave e limitado tal que $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}'$ e $\overline{\mathcal{O}'} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, do mesmo modo concluímos que $u \in L^{\beta p^*}_{loc}(\mathcal{O}')$, donde segue que $u \in L^{\beta p^*}(\mathcal{O})$.

Pelo fato da função u ser uma solução do problema $(A.39)$, temos que u é uma solução da equação

$$\Delta_p u = d(x)u^{p-1} + f(x), \qquad \text{em} \qquad \mathcal{O},$$

onde

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u < 1, \\ \frac{B(x,u)}{u^{p-1}}, & \text{se} \quad u \geq 1, \end{cases}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u > 1, \\ B(x,u), & \text{se} \quad u \leq 1. \end{cases}$$

Segue da relação $(A.40)$ que $f \in L^\infty(\mathcal{O})$. Se mostrarmos que $d \in L^s(\mathcal{O})$ para algum $s > \frac{N}{p}$, obtemos então pelo Lema $A.11$ que $u \in L^\infty(\mathcal{O})$.

Afirmamos que $d \in L^{\beta \frac{N}{p}}(\mathcal{O})$. De fato, como $u \in L^{\beta p^*}(\mathcal{O})$, por $\mathcal{O}$ ser limitado e pela relação $(A.40)$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} [d(x)]^{\beta \frac{N}{p}} dx &= \int_{\mathcal{O} \cap \{u \geq 1\}} [d(x)]^{\beta \frac{N}{p}} dx \\ &\leq C \int_{\mathcal{O} \cap \{u \geq 1\}} \left[\frac{1 + u^{p^*-1}}{u^{p-1}} \right]^{\beta \frac{N}{p}} dx \\ &\leq C|\mathcal{O}| + C \int_{\mathcal{O}} \left[u^{p^*-p} \right]^{\beta \frac{N}{p}} dx \\ &= C|\mathcal{O}| + C\|u\|^{\beta p^*}_{L^{\beta p^*}(\mathcal{O})} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $u \in L^\infty(\mathcal{O})$, e pelo fato de $\mathcal{O}$ ser qualquer, temos que o resultado está demonstrado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] E.A.M. Abreu, P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, Multiplicity of solutions for a convex-concave problem with a nonlinear boundary condition, Adv. Nonlinear Stud. 6 (2006) 133-148.

[2] Adimurthi, F. Pacella e S. Yadava, On the number of positive solutions of some semilinear Dirichlet problems in a ball, Differential Integral Equations 10 (1997) 1157-1170.

[3] K. Adriouch e A. El Hamidi, On local compactness in quasilinear elliptic problems, Differential Integral Equations 20 (2007), 77-92.

[4] K. Adriouch e A. El Hamidi, The Nehari manifold for systems of nonlinear elliptic equations, Nonlinear Anal. 64 (2006) 2149-2167.

[5] C.O. Alves, Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent, Electron. J. Differential Equations 13 (1997) 1-10.

[6] C.O. Alves, P.C. Carrião e E.S. Medeiros, Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions, Abstr. Appl. Anal. 3 (2004) 251-268.

[7] C.O. Alves e A. El Hamidi, Nehari manifold and existence of positive solutions to a class of quasilinear problems, Nonlinear Anal. 60 (2005) 611-624.

[8] C.O. Alves, J.V.A. Gonçalves e O.H. Miyagaki, Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical exponents, Nonlinear Anal. 34 (1998) 593-615.

[9] C.O. Alves, J.V. Gonçalves e C.A.P. Santos, Existence and asymptotic behavior of ground states for quasilinear singular equations involving Hardy-Sobolev exponents, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006) 298-315.

[10] A. Ambrosetti, H. Brézis e G. Cerami, Combined effects of concave e convex nonlinearities in some elliptic problems, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[11] A. Ambrosetti, J. Garcia e I. Peral, Elliptic variational problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth, J. Differential Equations 168 (2000) 10-32.

[12] A. Ambrosetti, J. Garcia e I. Peral, Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations, J. Funct. Anal. 137 (1996) 219-242.

[13] A. Ambrosetti e G. Prodi, A primer nonlinear analysis, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[14] R.B. Assunção, P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, Critical singular problems via concentration-compactness lemma, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 137-154.

[15] R.B. Assunção, P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, Multiplicity of solutions for critical singular problems, Appl. Math. Lett. 19 (2006) 741-746.

[16] A. Bahri e P.L. Lions, On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 14 (1997) 365-413.

[17] T. Bartsch e M. Willem, On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 3555-3561.

[18] I. Birindelli e F. Demengel, Existence of solutions for semi-linear equations involving the p-Laplacian: the non coercive case, Calc. Var. Partial Differential Equations 20 (2004) 343-366.

[19] L. Boccardo e F. Murat, Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations, Nonlinear Anal. 19 (1992) 581-597.

[20] H. Brézis, Analyse fonctionnelle: théorie et applications, Masson, Paris 1987.

[21] H. Brézis e E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

[22] H. Brézis e L. Nirenberg, A minimization problem with critical exponent e nonzero data, in "Symmetry in Nature", Scuola Norm. Sup. Pisa (1989) 129-140.

[23] H. Brézis e L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[24] K.J Brown e Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function, J. Differential Equations 193 (2003) 481-499.

[25] K.J. Brown e T.-F. Wu, A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem, Electron. J. Differential Equations 69 (2007) 1-9.

[26] D.M. Cao, Multiple solutions of a semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 10 (1993) 593-604.

[27] D.M. Cao e X. Zhong, Multiplicity of positive solutions for semilinear elliptic equations involving the critical Sobolev exponents, Nonlinear Anal. 29 (1997) 46-483.

[28] P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, Existence of non-trivial solutions of elliptic variational systems in unbounded domains, Nonlinear Anal. 51 (2002) 155-169.

[29] G. Cerami, R. Molle e D. Passaseo, Positive solutions of semilinear elliptic problems in unbounded domains with unbounded boundary, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 24 (2007) 41-60.

[30] J. Chabrowski e J.M.B. do Ó, On semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities, Math. Nachr. 233/234 (2002) 55-76.

[31] K.J. Chen, K.C. Chen e H.C. Wang, Symmetry of positive solutions of semilinear elliptic equations in infinite strip domains, J. Differential Equations 148 (1998) 1-8.

[32] L. Damascelli, M. Grossi e F. Pacella, Qualitative properties of positive solutions of semilinear elliptic equations in symmetric domains via the maximum principle, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16 (1999) 631-652.

[33] D.G de Figueiredo, Lectures on the Ekeland variational principle with applications ad detours, Springer-Verlag, Heidelberg 1989.

[34] D.G de Figueiredo, Nonlinear elliptic systems, An. Acad. Brasil. Ciênc. 72 (2000) 453-469.

[35] D.G. de Figueiredo, J.P. Gossez e P. Ubilla, Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems, J. Funct. Anal. 199 (2003) 452-467.

[36] D.G. de Figueiredo, J.P. Gossez e P. Ubilla, Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity, J. Eur. Math. Soc. 8 (2006) 269-286.

[37] D.C. de Morais Filho e O.H. Miyagaki, Critical singular problems on unbounded domains, Abstr. Appl. Anal. 6 (2005) 639-653.

[38] D.C. de Morais Filho e M.A.S. Souto, Systems of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees, Comm. Partial Differential Equations, 24 (1999) 1537-1553.

[39] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[40] J.I. Días, J. Hernándes e L. Tello, On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology, J. Math. Anal. Appl. 216 (1997) 593-613.

[41] P. Drábek e Y.X. Huang, Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent, J. Differential Equations 140 (1997) 106-132.

[42] H. Egnell, Asymptotic results for finite energy solutions of semilinear elliptic equations, J. Differential Equations 98 (1992) 34-56.

[43] H. Egnell, Existence results for some quasilinear elliptic equations, "Variational Methods", Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Birkhäuser, 1990, 61-76.

[44] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324-353.

[45] J. Garcia, J.J. Manfredi e I. Peral, Sobolev versus Hölder local minimizers e global multiplicity for some quasilinear elliptic equations, Commun. Contemp. Math. 2 (2000) 385-404.

[46] J. Garcia e I. Peral, Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994) 941-957.

[47] J.V. Gonçalves e O.H. Miyagaki, Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ involving subcritical exponents, Nonlinear Anal. 32 (1998) 41-51.

[48] J.V. Gonçalves, J.C. de Pádua e P.C. Carrião, Remarks on sublinear elliptic problems on unbounded cylinders, J. Math. Anal. Appl. 201 (1996) 417-429.

[49] P. Han, Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents, Nonlinear Anal. 64 (2006) 869-886.

[50] T.S. Hsu, Multiple solutions for semilinear elliptic equations in unbounded cylinder domains, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 134 (2004) 719-731.

[51] Y.X. Huang, Positive solutions of certain elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Nonlinear Anal. 33 (1998) 617-636.

[52] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[53] W.C. Lien, S.Y. Tzeng e H.C. Wang, Existence of solutions of semilinear elliptic problems on unbounded domains, Differential Integral Equations, 6 (1993) 1281-1298.

[54] M.L. Miotto, Multiple solutions for elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent and weight function, aceito para publicação em Commun. Pure Appl. Anal.

[55] M.L. Miotto e O.H. Miyagaki, Multiple positive solutions for semilinear Dirichlet problems with sign-changing weight function in infinite strip domains, Nonlinear Anal. (2009), doi10.1016j.na.2009.02.010.

[56] E.S. Noussair, C.A. Swanson e J. Yang, Positive finite energy solutions of critical semilinear elliptic problems, Canad. J. Math. 44 (1992) 1014-1029.

[57] E.S. Noussair, C.A. Swanson e J. Yang, Quasilinear elliptic problems with critical exponents, Nonlinear Anal. 20 (1993) 285-301.

[58] J.C.N. Pádua, E.A.B. Silva e S.H.M. Soares, Positive solutions of critical semilinear problems involving a sublinear term at the origin, Indiana Univ. Math. J. 55 (2006) 1091-1111.

[59] R.S. Rodrigues, Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev, UFSCar, São Carlos 2007.

[60] J. Serrin, Local behavior of solutions of quasilinear equations, Acta Math. 111 (1964) 247-302.

[61] E.A.B. Silva e S.H.M. Soares, Quasilinear Dirichlet problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth, Nonlinear Anal. 43 (2001) 1-20.

[62] E.A.B. Silva e M.S. Xavier, Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003) 341-358.

[63] E.A.B. Silva e M.S. Xavier, Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic systems with critical growth, Nonlinear Differential Equations Appl. 13 (2007) 619-642.

[64] E.A.B. Silva e M.S. Xavier, Quasilinear elliptic system with coupling on nonhomogeneous critical term, Nonlinear Anal. 69 (2008) 1164-1178.

[65] N.M. Stavrakakis e N.B. Zographopoulos, Existence results for quasilinear elliptic systems in $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations 39 (1999) 1-15.

[66] A. Szulkin e M. Willem, Eigenvalue problems with indefinite weights, Studia Math. 135 (1999) 191-201.

[67] M. Tang, Exact multiplicity for semilinear elliptic Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2003) 705-717.

[68] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 9 (1992) 281-304.

[69] H. Tehrani, Solutions for indefinite semilinear elliptic equations in exterior domains, J. Math. Anal. Appl. 255 (2001) 308-318.

[70] P. Tolksdorf, Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations, J. Differential Equations 51 (1984) 126-150.

[71] J. Velin, Existence results for some nonlinear elliptic system with lack of compactness, Nonlinear Anal. 52 (2003) 1017-1034.

[72] J. Yang, Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents, Nonlinear Anal. 25 (1995) 1283-1306.

[73] J. Yang e X. Zhu, The quasilinear elliptic equation on unbounded domain involving critical Sobolev exponents, J. Partial Differential Equations 2 (1989) 53-64.

[74] T.-F. Wu, On semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents e sign-changing weight function, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008) 383-405.

[75] T.-F. Wu, Multiple positive solutions for Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities, Nonlinear Anal. 69 (2008) 4301-4323.