UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MICRO-REGULARIDADE GEVREY DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS INVOLUTIVOS DE EDP'S NÃO LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Rafael Fernando Barostichi

São Carlos - SP
Março de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Micro-regularidade Gevrey de soluções de sistemas involutivos de edp's não lineares de primeira ordem

Rafael Fernando Barostichi

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

Março de 2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

B266mr

Barostichi, Rafael Fernando.
Micro-regularidade Gevrey de soluções de sistemas involutivos de edp's não lineares de primeira ordem / Rafael Fernando Barostichi. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
102 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Sistemas involutivos. 3. Regularidade microlocal Gevrey. 4. Transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gerson Petronilho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
IME - USP

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
DM - UFSCar

Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho
IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
IME - USP

Agradecimentos

A Deus, por me dar a vida e prover tudo aquilo de que necessito.

Aos meus pais, Otaide e Maria, a quem devo tudo o que sou e tenho.

Ao Professor Gerson, pela orientação e dedicação dispensadas ao longo de todo este período, bem como pela amizade, e ao Professor Paulo, também pela grande participação e preciosas sugestões que contribuiram largamente com a conclusão deste trabalho.

Aos Professores Jorge Hounie, Sérgio Zani e Milton Lopes, por terem aceitado o convite para participar da banca de minha defesa.

Às minhas irmãs Nalva e Márcia, meu cunhado Luska e minhas sobrinhas Karen e Ketlyn, por serem uma família fantástica, onde encontro todo o companheirismo e apoio.

À minha noiva Liane, pelo carinho, compreensão e presença constantes não apenas nos bons momentos mas também naqueles mais difíceis.

Aos preciosos amigos que tive o privilégio de conhecer no DM, dos quais gostaria de destacar a minha turma do mestrado e também do doutorado, Bruna, Patrícia, Juliano, Rômel e Tiago, pela amizade e pelos bons momentos que me fizeram viver nesses anos passados na UFSCar.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Seja u uma solução de classe C^2 de um sistema involutivo Gevrey de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem.

Neste trabalho, demonstramos que o conjunto frente de onda Gevrey de ordem s de u está contido no conjunto característico da estrutura involutiva gerada pelos operadores linearizados associados ao sistema dado.

Nossa abordagem inclui o estudo de soluções aproximadas Gevrey, um conceito que acreditamos ser de interesse independente, e que pode ser aplicado em situações muito mais gerais.

Abstract

Let u be a C^2 solution for a Gevrey involutive system of first order nonlinear partial differential equations.

In this work, we show that the Gevrey wave front set of order s of u is contained in the characteristic set of the involutive structure generated by the linearized operators associated to the given system.

Our approach includes the study of Gevrey approximate solutions, a concept which we believe is of independent interest and could be applied to much more general situations.

Sumário

Introdução

No presente trabalho, consideramos um sistema sobredeterminado de equações diferenciais parciais da forma

$$F_j(x, u, u_x) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

o qual é involutivo (ver definição 3.1.2) e generaliza o caso linear.

Esse estudo foi motivado pelos artigos de Barostichi-Petronilho [BP] e Berhanu [B1]. Em [BP], considera-se uma solução u de classe C^2 da equação diferencial parcial não linear de primeira ordem

$$u_t = f(x, t, u, u_x).$$

No caso em que $f(x, t, \zeta_0, \zeta)$ é uma função suave para (x, t, ζ_0, ζ) variando em um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$, holomorfa em (ζ_0, ζ), temos um resultado bastante conhecido devido a Chemin [Ch] que nos diz que o conjunto frente de onda C^∞ de u está contido no conjunto característico do operador linearizado

$$L^u = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(x, t, u, u_x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tal resultado é válido também no ambiente analítico. De fato, foi provado por Hanges e Treves [HT] que, sob a hipótese de que f é analítica real, o conjunto frente de onda analítico de u está também contido no conjunto característico de L^u.

O argumento chave no trabalho de Hanges e Treves é a construção de certas integrais primeiras através do Teorema de Cauchy-Kovalewsky. Embora sem possuir tal ferramenta no caso suave, Asano [As] a substituiu em seu trabalho por certas integrais primeiras *aproximadas* de modo que os argumentos de Hanges e Treves pudessem ser aplicados para obter o resultado provado por Chemin mencionado acima.

Dessa forma, em [BP] foi preenchida a lacuna existente entre os resultados de Chemin e Hanges–Treves, ou seja, assumindo que f é uma função Gevrey de ordem $s > 1$, holomorfa com respeito a (ζ_0, ζ), provou-se que, se u é uma solução de classe C^2 da edp dada acima, então seu conjunto frente de onda Gevrey de ordem s está contido no conjunto característico de L^u (ver Teorema 6.1 em [BP]). Para tanto, mostrou-se necessário um estudo de soluções aproximadas no ambiente Gevrey.

Em [B1], foi considerado o caso de sistemas com mais de uma equação, onde as funções F_j são analíticas em todas as variáveis. Provou-se neste caso que o conjunto frente de onda analítico de uma solução u de classe C^2 do sistema está contido no conjunto característico da estrutura involutiva gerada pelos operadores linearizados (ver Corolário 2.3 em [B1]).

Neste trabalho, provamos o equivalente ao Corolário 2.3 de [B1] para o caso em que as funções F_j são de classe Gevrey de ordem $s > 1$ na variável x e holomorfas nas demais variáveis (ver Teorema 3.1.1).

No caso linear, que corresponde às estruturas involutivas $(M, \mathcal{V})$, numa vizinhança U de um ponto $p \in M$, podemos sempre escolher coordenadas locais (x, t), $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, com $m + n = \dim M$ e campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

tais que $\{L_1, \ldots, L_n\}$ forma uma base de $\mathcal{V}$ em U. Neste caso, uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(U)$ é uma solução de $\mathcal{V}$ se, e somente se

$$L_j u = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

De modo análogo, para o sistema não linear $F_j(x, u, u_x) = 0$, $1 \leq j \leq n$, estudado aqui, podemos escolher um sistema local de coordenadas (x, t), $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ e funções $f_j(x, t, \zeta_0, \zeta)$, $1 \leq j \leq n$, definidas em uma vizinhança da origem, de classe G^s em (x, t) e holomorfas em $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$, de modo que o sistema pode ser descrito pelas equações

$$u_{t_j} = f_j(x, t, u, u_x), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ressaltamos que, em [B1], é usada também a existência de integrais primeiras para certos sistemas de equações lineares, obtida através do Teorema de Cauchy-Kovalewsky, tal como no caso de uma única equação, e assim, no caso Gevrey, necessitamos novamente da noção de solução aproximada, agora para sistemas.

Para explorar tal conceito, iniciamos por recordar uma questão clássica conhecida como *problema de Carleman* (ver também J. Bruna [Br] e T. Carleman [Ca]): *dada uma sequência de números complexos, $\{m_n\}$, satisfazendo $|m_n| \leq B^{n+1} n^{ns}$, $n = 0, 1, \ldots,$ onde B é uma constante positiva e $s > 1$, existe uma função Gevrey $f(x)$ de ordem s, definida em $[-1, 1]$,* *tal que* $f^{(n)}(0) = m_n,\ n = 0, 1, \ldots$ *?* Essa pergunta tem uma resposta afirmativa, conforme demonstrado por Mityagin [Mi]. Em Džanašija [Dz], uma construção explícita de tal função f pode ser encontrada.

Mostramos aqui que a construção de Džanašija pode ser estendida de modo a obter o seguinte: dados uma estrutura involutiva $(M, \mathcal{V})$ de classe G^s, com M uma variedade analítica real, uma subvariedade analítica real X de M, que é maximalmente real com respeito a $\mathcal{V}$, e uma função $u_0 \in G^s(X)$, é possível estender u_0 a uma função G^s, u, que é uma solução aproximada (em um sentido muito preciso) da estrutura $\mathcal{V}$. Essa extensão envolve, entre outras coisas, substituir a sequência $\{m_n\}$ no problema de Carleman por uma multi-sequência $\{u_\beta\} \in G^s(X)$. Gostaríamos ainda de observar que, para uma aplicação diferente, Adwan e Hoepfner [AH] também estudaram a existência de soluções aproximadas Gevrey, no caso de uma equação, para a mesma classe de campos vetoriais estudada aqui. Entretanto, o resultado obtido por eles é mais fraco, no sentido que a extensão de u_0 obtida por eles é de classe Gevrey $s^{'} > s + 1$, com $s^{'}$ arbitrário. Assim, como uma consequência do que é feito aqui, alguns dos resultados de [AH] podem ser melhorados.

Para mais resultados interessantes sobre regularidade analítica de equações diferenciais parciais quasilineares ou puramente não lineares de primeira ordem, referimos ao leitor os artigos de Berhanu [B2], Metivier [M] e Lerner, Morimoto e Xu [LMX] e algumas das referências lá citadas.

Nossa exposição está organizada da seguinte forma. No capítulo 1, recordamos algumas notações e definições básicas, entre elas os conceitos de funções Gevrey, estruturas involutivas de classe G^s, transformada FBI e conjuntos frente de onda Gevrey, além de alguns resultados básicos importantes no desenvolvimento do trabalho. No capítulo 2, definimos a noção de solução s-aproximada, e apresentamos uma extensão do resultado de Džanašija-Mityagin, que nos possibilitará construir uma solução s-aproximada para estruturas involutivas a partir de um dado inicial. No capítulo 3, damos a demonstração do nosso principal resultado. Para tanto, definimos a noção de sistemas involutivos de classe G^s, demonstramos os resultados auxiliares análogos aos de Asano, para sistemas, no ambiente Gevrey e utilizamos as ferramentas obtidas no capítulo 2 para provar o resultado de micro-regularidade Gevrey desejado. Finalmente, no capítulo 4, apresentamos como a teoria desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada a fim de demonstrar uma versão Gevrey do Teorema Edge do Wedge, e finalizamos com a demonstração de alguns resultados complementares utilizados, cujas demonstrações foram omitidas ao longo do texto.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Vamos, neste primeiro capítulo, tratar de alguns conceitos que formam a base para o estudo dos sistemas involutivos de classe Gevrey de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem, e que nos serão úteis nas demonstrações dos principais resultados deste trabalho.

1.1 Notações básicas

Se $x = (x_1, \dots, x_N)$ são as coordenadas usuais no espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, então, dado um N-multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, denotamos

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N},$$

onde $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ é a derivada parcial com relação à variável x_j.

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, usaremos a seguinte relação de ordem

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leq \alpha_j \ , \quad \forall\, j = 1, \dots, N \ .$$

Denotamos ainda

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

e

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!.$$

O coeficiente binomial é dado por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} \ , \ \forall \beta \leq \alpha \ ,$$

onde $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$.

Usaremos também a notação

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}.$$

Dadas funções $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale a fórmula de Leibniz

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} f \cdot \partial^\beta g.$$

Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$, definimos a série de Taylor de f por

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \ .$$

Denotamos por $C^\omega(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $f \in C^\infty(\Omega)$ que são analíticas, ou seja, para todo x_0 fixado em Ω, existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de x_0 onde f é dada por sua série de Taylor.

Seja agora $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto, uma função de classe C^∞ e fixemos $k \in \mathbb{N}$. Se $f^{(k)}(x)$ denota a derivada de ordem k de f no ponto $x \in \Omega$, vista como transformação k-linear, podemos escrever a **fórmula de Taylor** como

$$f(a + x) = f(a) + f^{(1)}(a) \cdot x + \frac{1}{2} f^{(2)}(a) \cdot x^{(2)} + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot x^{(k)} + r_k(x),$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$, $a, a + x \in \Omega$ e

$$x^{(k)} \doteq \underbrace{(x, \ldots, x)}_{k \text{ entradas}}.$$

Temos que, se $x = (x_1, \ldots, x_N)$, então

$$f^{(k)}(a) \cdot x^{(k)} = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{N} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (a) x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Denotamos ainda por $[a, a + x]$ o segmento em $\mathbb{R}^N$ que une os pontos a e $a + x$. Nestas condições, vale o seguinte

Teorema 1.1.1 *(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Se $[a, a + x] \subset \Omega$, então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$r_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a + \theta x) \cdot x^{(k+1)}.$$

A demonstração do teorema acima pode ser vista, por exemplo, em [L]. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, denotando $f_1 = \operatorname{Re} f$ e $f_2 = \operatorname{Im} f$, definimos a derivada de ordem k de f em $x \in \Omega$ por

$$f^{(k)}(x) \doteq f_1^{(k)}(x) + i f_2^{(k)}(x).$$

Assim, é fácil ver que o teorema acima vale também para funções de classe C^∞ a valores complexos.

Dado um operador diferencial parcial linear de ordem M

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha(x) D^\alpha,$$

com coeficientes $c_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N)$, definimos o **símbolo principal** de P como sendo a função

$$P_M(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = M} c_\alpha(x) \xi^\alpha \ .$$

Definimos então o **conjunto característico** de P, e denotamos por $\operatorname{Char}(P)$, o conjunto de todos os pontos (x, ξ) tais que $\xi \neq 0$ e $P_M(x, \xi) = 0$. É fácil ver que $\operatorname{Char}(P)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e cônico na segunda variável. No caso em que $\operatorname{Char}(P) = \emptyset$, dizemos que o operador P é **elíptico**.

1.2 Espaços Gevrey

Os espaços Gevrey são espaços intermediários entre o espaço das funções analíticas e o espaço das funções C^∞, e possuem um importante papel no estudo de equações diferenciais parciais. Nesta seção vamos dar sua definição e algumas de suas propriedades. Maiores detalhes, incluindo as demonstrações de resultados omitidos nesta seção, podem ser encontrados em [R].

Definição 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Dizemos que uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ é uma função Gevrey de ordem $s \geq 1$ ou simplesmente uma função de classe G^s em Ω se, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante $C > 0$ tal que, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ e $x \in K$,*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s. \tag{1.2.1}$$

Denotamos por $G^s(\Omega)$ o espaço das funções Gevrey de ordem s em Ω.

É fácil ver que $G^s(\Omega) \subset G^{s'}(\Omega)$, sempre que $s < s'$. Mudando a constante C, se necessário, vemos ainda que a desigualdade (1.2.1) é equivalente às seguintes:

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq RC^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \quad \text{para algum } R > 0, \tag{1.2.2}$$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s, \tag{1.2.3}$$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}|\alpha|^{s|\alpha|}, \tag{1.2.4}$$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}((|\alpha| + A)!)^s, \quad A \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2.5}$$

Observação 1.2.1 *O conjunto $G^1(\Omega)$ coincide com o conjunto das funções analíticas em Ω, $C^\omega(\Omega)$.*

O próximo exemplo mostra que existem funções Gevrey de ordem $s > 1$ arbitrária, que não são analíticas.

Exemplo 1.2.1 *Considere, para $s > 1$, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^{\frac{1}{s-1}}} & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases} .$$

Temos que $g \in G^s(\mathbb{R})$.

De fato, observemos inicialmente que g não é analítica em qualquer vizinhança da origem. Mostraremos que existe $C > 0$ tal que

$$|g^{(k)}(t)| \leq C^k(k!)^s, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}, \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2.6}$$

Mostremos que existe $\rho = \rho(s) \in (0, 1)$ tal que, para todo $t > 0$ e para qualquer número complexo $z \in \gamma_\rho(t) \doteq \left\{t\left(1 + \rho e^{i\theta}\right) : 0 \leq \theta < 2\pi\right\}$, temos

$$\text{Re}\, \frac{1}{z^{\frac{1}{s-1}}} > \frac{1}{2t^{\frac{1}{s-1}}} \ .$$

De fato, como

$$\text{Re}\, \frac{1}{z^{\frac{1}{s-1}}} = \frac{\text{Re}\, z^{\frac{1}{s-1}}}{\left|z^{\frac{1}{s-1}}\right|^2} = \frac{\text{Re}\left[t^{\frac{1}{s-1}}\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right]}{\left|t^{\frac{1}{s-1}}\,(1 + \rho e^{i\theta})^{\frac{1}{s-1}}\right|^2} = \frac{1}{t^{\frac{1}{s-1}}} \cdot \frac{\text{Re}\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}}}{\left|(1 + \rho e^{i\theta})^{\frac{1}{s-1}}\right|^2} \ ,$$

definindo

$$\psi(\rho) = \frac{\min\left\{\mathrm{Re}\left(1+\rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}} : 0 \leq \theta < 2\pi\right\}}{\max\left\{\left|(1+\rho e^{i\theta})^{\frac{1}{s-1}}\right|^2 : 0 \leq \theta < 2\pi\right\}},$$

obtemos

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z^{\frac{1}{s-1}}} \geq \psi(\rho)\frac{1}{t^{\frac{1}{s-1}}} \quad , \; \forall\; z \in \gamma_\rho(t) \;,\; \forall\; t > 0 \;.$$

Uma vez que ψ é contínua e $\psi(0) = 1$, dado $\epsilon = 1/2$ temos que existe δ, $0 < \delta < 1$, tal que, se $\rho < \delta$, então

$$1/2 < \psi(\rho) < 3/2.$$

Logo, fazendo $\rho = \delta/2$, segue que

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z^{\frac{1}{s-1}}} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{t^{\frac{1}{s-1}}} \quad , \; \forall\; z \in \gamma_{\frac{\delta}{2}}(t),\; \forall\; t > 0 \;.$$

Complexificando agora a variável t por $z = t + iy$, segue da fórmula de Cauchy que, para quaisquer $t > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}
\left|g^{(k)}(t)\right| &= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(t)} \frac{g_s(z)}{(z-t)^{k+1}}dz\right| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi}\frac{1}{(\rho t)^{k+1}}\sup_{\gamma_\rho(t)}\left|e^{-1/z^{\frac{1}{s-1}}}\right| 2\pi(\rho t) \\
&= \frac{k!}{(\rho t)^k}\sup_{\gamma_\rho(t)} e^{-\mathrm{Re}\;1/z^{\frac{1}{s-1}}} \\
&\leq k!\rho^{-k}\cdot\frac{e^{-1/(2t^{\frac{1}{s-1}})}}{t^k} \;.
\end{aligned}$$

Segue da desigualdade $e^{-x} \leq x^{-d} d^d e^{-d}$ (ver [R]) que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-1/(2t^{\frac{1}{s-1}})}}{t^k} &= \frac{e^{-1/(2t^{\frac{1}{s-1}})}}{(t^{\frac{1}{s-1}})^{(s-1)k}} \\
&\leq \frac{(\frac{1}{2t^{\frac{1}{s-1}}})^{-(s-1)k}[(s-1)k]^{(s-1)k}e^{-(s-1)k}}{(t^{\frac{1}{s-1}})^{(s-1)k}} \\
&= 2^{(s-1)k}[(s-1)k]^{(s-1)k}e^{-(s-1)k} = [2(s-1)k]^{(s-1)k}e^{-(s-1)k} \\
&= [2(s-1)]^{(s-1)k}k^{(s-1)k}e^{-(s-1)k} \\
&= \left[\frac{e}{2(s-1)}\right]^{-(s-1)k}\left(k^k\right)^{(s-1)} \\
&\leq \left[\frac{e}{2(s-1)}\right]^{-(s-1)k}\left(k!e^k\right)^{(s-1)} \\
&= \left[\frac{1}{2(s-1)}\right]^{-(s-1)k}(k!)^{(s-1)},
\end{aligned}$$

uma vez que $k^k \leq k!e^k$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|g^{(k)}(t)\right| &\leq k!\rho^{-k}\left[\frac{1}{2(s-1)}\right]^{-(s-1)k}(k!)^{(s-1)} \\
&= (k!)^s\left\{\left[\frac{1}{2(s-1)}\right]^{-(s-1)}\frac{1}{\rho}\right\}^k = C^k(k!)^s,\ \forall\, t>0,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração de (1.2.6). $\square$

Teorema 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, aberto.*

(i) $G^s(\Omega)$ é um espaço vetorial e um anel com relação ao produto de funções;

(ii) Se $g \in G^s(\Omega)$ e existe $B > 0$ tal que $|g(x)| \geq B^{-1}$, para todo $x \in \Omega$, então $\dfrac{1}{g} \in G^s(\Omega)$.

Demonstração:

Para a demonstração de *(i)*, provaremos apenas que, dadas $f, g \in G^s(\Omega)$, então $fg \in G^s(\Omega)$, uma vez que as propriedades de espaço vetorial e anel são facilmente verificadas.

Se $f, g \in G^s(\Omega)$, então dado $K \subset \Omega$ compacto, existe $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s$$

e

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s,$$

para quaisquer $x \in K$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Assim, segue da fórmula de Leibniz que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(fg)(x)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^{\alpha-\beta}f(x)||\partial^\beta g(x)| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^s((\alpha-\beta)!)^s(\beta!)^s C^{|\alpha|+2} \\
&= (\alpha!)^s C^{|\alpha|+1} C\sum_{\beta\leq\alpha} 1 \\
&\leq (\alpha!)^s C^{|\alpha|+1} C\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} \\
&= (\alpha!)^s C^{|\alpha|+1} C 2^{|\alpha|} = C_1^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{2C, C^2\}$.

Para demonstrar *(ii)*, denotemos $g_1(x) = \dfrac{1}{g(x)}$. Dado $K \subset \Omega$ compacto, como $g \in G^s(\Omega)$, existe $A \geq 1$ tal que

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq A^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \quad \forall\, x \in K,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^m. \tag{1.2.7}$$

Vamos mostrar que

$$|\partial^\alpha g_1(x)| \leq B(AM)^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \quad \forall\, x \in K,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, \tag{1.2.8}$$

onde $M > 1$ é uma constante a ser determinada.

Procederemos por indução sobre $|\alpha|$. Se $|\alpha| = 0$, então $\alpha = 0$ e, pela hipótese sobre g, temos que

$$|g_1(x)| \leq B \leq B(AM)^{0+1}(0!)^s, \quad \forall\, x \in K.$$

Suponhamos então que (1.2.8) vale para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$, tal que $|\beta| < |\alpha|$ e mostremos que vale para α. Como

$$g(x)g_1(x) = 1,$$

então, pela regra de Leibniz, temos

$$\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta g(x)\partial^{\alpha-\beta}g_1(x) = 0.$$

Logo,

$$\partial^\alpha g_1(x)g(x) = -\sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta\neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g(x)\partial^{\alpha-\beta} g_1(x).$$

Observando que $\beta \leq \alpha$ e $|\alpha| = |\beta|$ implica que $\alpha = \beta$, temos que, se $\beta \neq 0$ então $|\alpha - \beta| < |\alpha|$ e assim, segue de (1.2.7) e da hipótese de indução que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha g_1(x)| &\leq B \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta\neq 0}} \binom{\alpha}{\beta}^s A^{|\beta|+1}(\beta!)^s B(AM)^{|\alpha|-|\beta|+1}(\alpha-\beta)!^s \\
&= B(AM)^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s AB \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta\neq 0}} M^{-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta\neq 0}} M^{-|\beta|} &= \sum_{\beta\leq\alpha} M^{-|\beta|} - 1 \\
&= \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} M^{-\beta_1}\right) \cdots \left(\sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} M^{-\beta_m}\right) - 1 \\
&\leq \left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty} M^{-\beta_1}\right) \cdots \left(\sum_{\beta_m=0}^{\infty} M^{-\beta_m}\right) - 1 \\
&= \left(\frac{M}{M-1}\right)^m - 1.
\end{aligned}$$

Como a última expressão tende a zero quando $M \to \infty$, podemos encontrar $M > 1$ suficientemente grande tal que

$$AB \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta\neq 0}} M^{-|\beta|} < 1.$$

Portanto,

$$|\partial^\alpha g_1(x)| \leq B(AM)^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \quad \forall\, x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^m,$$

concluindo a demonstração do Teorema. $\square$

Observação 1.2.2 *Se Ω_1, Ω_2 são abertos de $\mathbb{R}^{N_1}$ e $\mathbb{R}^{N_2}$, respectivamente, e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é uma função analítica, então temos que $g \circ f \in G^s(\Omega_1)$, para toda $g \in G^s(\Omega_2)$ (ver [R]). Assim, se f é analítica, fica bem definido o* ***pullback*** *$f^* : G^s(\Omega_2) \to G^s(\Omega_1)$ dado por $f^*(g) \doteq g \circ f$.*

No caso em que $s > 1$, existem funções de classe G^s que possuem suporte compacto. Como um exemplo, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função do exemplo 1.2.1. Para $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$, definimos

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{m} g(r + x_j)g(r - x_j).$$

Pelo Teorema 1.2.1, segue que $\varphi \in G^s(\mathbb{R}^m)$. Além disso, é fácil ver que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-r, r]^m$.

Denotamos então por $G_0^s(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $f \in G^s(\Omega)$ com suporte compacto em Ω. Assim como feito no caso C^∞, podemos munir $G_0^s(\Omega)$ com uma topologia apropriada e considerar o dual topológico $\mathcal{D}_s'(\Omega)$, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares contínuos em $G_0^s(\Omega)$. Aos elementos de $\mathcal{D}_s'(\Omega)$ damos o nome de ultradistribuições. Propriedades análogas às propriedades satisfeitas pelas distribuições podem ser demonstradas para as ultradistribuições.

Vamos encerrar esta seção definindo um espaço de funções de especial interesse no presente trabalho.

Considere $s > 1$ e sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ um aberto e E um espaço vetorial localmente convexo. Denotamos por $G^s(\Omega, E)$ o espaço das funções $f : \Omega \to E$ de classe C^∞ que satisfazem a seguinte propriedade: Para todo compacto $K \subset\subset \Omega$ e toda seminorma contínua p definida em E, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in K} p(\partial^\alpha f(x)) \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s.$$

Estamos particularmente interessados no caso em que $E = H(\mathcal{N})$, o espaço das funções holomorfas em $\mathcal{N}$, com $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^N$ aberto. O espaço $G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$ descreve as funções $f = f(x, \zeta)$ que são de classe G^s em $x \in \Omega$ e holomorfas em $\zeta \in \mathcal{N}$.

1.3 Estruturas involutivas de Classe G^s

Nesta seção, vamos introduzir os conceitos de variedade Gevrey e estrutura involutiva Gevrey, além de outros tais como campos vetoriais, formas diferenciais, entre outros. Como as definições aqui são muito próximas do caso suave, eventualmente omitiremos alguns detalhes que podem ser encontrados, por exemplo, em [BCH].

Sejam $s \geq 1$ e M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Uma estrutura de classe G^s sobre M de dimensão N é uma coleção de pares $\mathcal{F} = \{(U, x)\}$, onde $U \subset M$ é um aberto não vazio, $x : U \to \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^N$ e as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\bigcup_{(U,x)\in\mathcal{F}} U = M$;

(ii) A aplicação $x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \to x'(U \cap U')$ é de classe G^s para cada par $(U, x), (U', x') \in \mathcal{F}$, com $U \cap U' \neq \emptyset$;

(iii) $\mathcal{F}$ é maximal com respeito a (i) e (ii), ou seja, se $V \subset M$ é aberto não vazio e $y : V \to y(V)$ é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^N$ tal que, para qualquer $(U, x) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, as composições $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ e $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ são de classe G^s, então $(y, V) \in \mathcal{F}$.

Observação 1.3.1 *Dada uma coleção $\mathcal{F}^*$ como acima satisfazendo as condições (i) e (ii), é fácil ver que existe uma única estrutura $\mathcal{F}$ de classe G^s sobre M, de dimensão N, tal que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.*

Definição 1.3.1 *Uma variedade Gevrey de ordem $s \geq 1$ ou variedade de classe G^s ou ainda simplesmente G^s-variedade de dimensão N é um espaço topológico de Hausdorff M, com base enumerável, equipado com uma estrutura de classe G^s de dimensão N.*

Um elemento $(U, x) \in \mathcal{F}$ é dito uma **carta local** ou um **sistema local de coordenadas** de M. Se escrevermos $x = (x_1, \ldots, x_N)$, então se $p \in U$, suas coordenadas locais, com respeito a essa carta local, são dadas por $(x_1(p), \ldots, x_N(p))$.

Se $M = \mathbb{R}^N$, considere a coleção $\mathcal{F}^* = \{(\mathbb{R}^N, r)\}$, sendo $r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a aplicação identidade. É claro que $\mathcal{F}^*$ satisfaz as condições (i) e (ii) acima. Assim, a estrutura de classe G^s, $\mathcal{F}$, que contêm $\mathcal{F}^*$, torna $\mathbb{R}^N$ uma G^s-variedade.

Dizemos que M é uma **variedade analítica real** se M é uma variedade de classe G^1. Vamos, ao longo deste trabalho, estabelecer nossos principais resultados no ambiente das variedades analíticas reais.

Definição 1.3.2 *Seja M uma variedade analítica real. Se $f : M \to \mathbb{C}$, então dizemos que f é uma função de classe C^k em M, e denotamos $f \in C^k(M)$ (com $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) se, para todo $(U, x) \in \mathcal{F}$, a composição $f \circ x^{-1}$ é C^k em $x(U)$. Analogamente, se $s \geq 1$, dizemos que f é de classe G^s em M, e denotamos $f \in G^s(M)$ se, para todo $(U, x) \in \mathcal{F}$, temos que $f \circ x^{-1}$ é de classe G^s em $x(U)$.*

É fácil ver pela definição acima que $G^{s_1}(M) \subset G^{s_2}(M)$ se $s_1 < s_2$ e $G^s(M) \subset C^\infty(M)$, para todo $s \geq 1$. Observe ainda que $G^s(M)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Assim como no caso de funções de variáveis reais, denotamos o conjunto $G^1(M)$ por $C^\omega(M)$ e o denominamos conjunto das funções analíticas reais de M.

Definição 1.3.3 *Um campo vetorial complexo em M é uma transformação $\mathbb{C}$-linear $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisfaz a regra de Leibniz*

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \quad f, g \in G^s(M).$$

De modo anánologo, podemos definir campos vetoriais complexos de classe C^k. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais complexos sobre M.

Definição 1.3.4 *Dizemos que $L \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vetorial complexo de classe G^s em M se $L(G^s(M)) \subset G^s(M)$. Denotamos o conjunto dos campos vetoriais complexos de classe G^s por $\mathfrak{X}_s(M)$.*

Vale a seguinte

Proposição 1.3.1 *(i) Se $L \in \mathfrak{X}_s(M)$ e f é constante, então $Lf = 0$.*
(ii) $\operatorname{supp}(Lf) \subset \operatorname{supp}(f)$, *para quaisquer $f \in G^s(M)$ e $L \in \mathfrak{X}_s(M)$.*

Dado um aberto $\Omega \subset M$, dizemos que $f \in G^s(\Omega)$ (respectivamente em $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) se $f \circ x^{-1}$ é G^s (respectivamente C^k) em $x(U)$ para toda carta local (U, x) com $U \subset \Omega$. Podemos então utilizar a proposição acima para definir a restrição de um campo $L \in \mathfrak{X}_s(M)$ ao aberto Ω. Tal restrição, a qual denotamos por $L_\Omega \in \mathfrak{X}_s(\Omega)$, é definida da seguinte forma:

$$L_\Omega(f)(p) = L(\tilde{f})(p),$$

com $\tilde{f} \in G^s(M)$ tal que $\tilde{f} = f$ em vizinhança de $p \in \Omega$. Em geral, denotamos L_Ω simplesmente por L para simplificar a notação.

Dados $g \in G^s(M)$ e $L \in \mathfrak{X}_s(M)$, definimos $gL \in \mathfrak{X}_s(M)$ por

$$(gL)(f) = g \cdot L(f), \quad f \in G^s(M).$$

Com tal multiplicação, $\mathfrak{X}_s(M)$ torna-se um módulo sobre $G^s(M)$.

Definição 1.3.5 *Dados $L_1, L_2 \in \mathfrak{X}_s(M)$, definimos o comutador de L_1 e L_2 por*

$$[L_1, L_2](f) = L_1(L_2(f)) - L_2(L_1(f)), \quad f \in G^s(M).$$

É fácil ver que $[L_1, L_2] \in \mathfrak{X}_s(M)$.

Seja agora (U, x) uma carta local em M e seja $L \in \mathfrak{X}_s(U)$. Fixado $p \in U$, para $f \in G^s(U)$, escrevemos $f^* = f \circ x^{-1}$. Observe que $f^* \in G^s(x(U))$. Então, de modo análogo ao caso C^∞, concluimos que

$$(Lf)(p) = \sum_{j=1}^{N} (Lx_j)(p) \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ x \right) (p).$$

Definimos então o elemento $\frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}_s(U)$ por

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f) = \frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ x.$$

Assim,

$$(Lf)(p) = \sum_{j=1}^{N} (Lx_j)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f)(p)$$

e como p é arbitrário, obtemos a representação de L nas coordenadas locais $(x_1, \dots, x_N)$:

$$L = \sum_{j=1}^{N} (Lx_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Observe que, como as coordenadas $(x_1, \dots, x_N)$ são analíticas em U (e portanto, de classe G^s, para todo $s \geq 1$), segue que os coeficientes $L(x_j)$ são todos de classe G^s.

Lembremos que um vetor tangente complexo em um ponto $p \in M$ é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear, $v : C^\infty(p) \to \mathbb{C}$, que satisfaz

$$v(\underline{fg}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f}), \quad \underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p),$$

onde $C^\infty(p)$ é o conjunto dos germes de funções de classe C^∞ em vizinhança de p e $\underline{f}$ denota o germe de f. Denotamos por $\mathbb{C}T_pM$ o conjunto dos vetores tangentes complexos em p e o denominamos espaço tangente a M no ponto p.

O fibrado tangente complexo de M é definido por

$$\mathbb{C}TM = \cup_{p\in M}\mathbb{C}T_pM.$$

Lembremos ainda que, a cada campo $L \in \mathfrak{X}(M)$, associamos um vetor $L_p \in \mathbb{C}T_pM$ por

$$L_p(\underline{f}) = L(f)(p), \quad \underline{f} \in C^\infty(p).$$

Suponha agora que $v \in \mathbb{C}T_pM$ e seja (U, x) carta local tal que $p \in U$. Se $x = (x_1, \ldots, x_N)$, podemos mostrar que

$$v = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x_j}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p.$$

Uma vez que o conjunto $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p : j = 1, \ldots, N\}$ é linearmente independente, segue que o mesmo forma uma base para $\mathbb{C}T_pM$.

Definição 1.3.6 *Um G^s-**subfibrado vetorial complexo** de $\mathbb{C}TM$ de posto n é uma união disjunta*

$$\mathcal{V} = \bigcup_{p\in M} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}TM$$

tal que

(i) Para todo $p \in M$, $\mathcal{V}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_pM$ de dimensão n.

(ii) Dado $p_0 \in M$, existe vizinhança U de p_0 e campos $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}_s(U)$ tais que $L_{1p}, \ldots, L_{np}$ geram $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in U$.

O subespaço $\mathcal{V}_p$ é chamado **fibra** de $\mathcal{V}$ em p. Definimos subfibrados vetoriais complexos de classe C^k simplesmente por substituir os campos vetoriais G^s na definição acima por campos vetoriais de classe C^k.

Dados um G^s-subfibrado $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}TM$, e um aberto W de M, dizemos que um elemento $L \in \mathfrak{X}_s(M)$ é uma **seção** de $\mathcal{V}$ sobre W se $L_p \in \mathcal{V}_p$, para todo $p \in W$.

Uma das principais definições desta seção é dada a seguir.

Definição 1.3.7 *Uma **estrutura formalmente integrável** de classe G^s sobre M é um G^s-subfibrado $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}TM$ que satisfaz a condição de Frobenius: Se $W \subset M$ é um aberto e $L_1, L_2 \in \mathfrak{X}_s(W)$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre W então $[L_1, L_2]$ também é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W.*

Dadas M uma variedade analítica real e $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável de classe G^s sobre M, dizemos que o par $(M, \mathcal{V})$ é uma G^s-estrutura involutiva.

Observamos que, dados $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável de classe G^s sobre M e $p \in M$, se U é um aberto coordenado com $p \in U$ e $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}_s(U)$ são geradores locais de $\mathcal{V}$ em U, então existem funções $c_{jk}^{\nu} \in G^s(U)$, $j, k, \nu = 1, \ldots, n$ tais que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^{n} c_{jk}^{\nu} L_{\nu}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Definição 1.3.8 *Uma solução clássica para a estrutura formalmente integrável de classe G^s $\mathcal{V}$ sobre M é uma função $u \in C^1(M)$ tal que $Lu = 0$ para toda seção L de $\mathcal{V}$ definida em um aberto de M.*

Denotaremos por $E_s^1(M)$ o dual do $G^s(M)$-módulo $\mathfrak{X}_s(M)$ e nos referiremos aos seus elementos como formas diferenciais G^s de grau um ou simplesmente 1-formas G^s. Ou seja, uma 1-forma G^s sobre M é uma aplicação $G^s(M)$-linear

$$\omega : \mathfrak{X}_s(M) \to G^s(M).$$

Vale o seguinte

Lema 1.3.1 *Sejam $\omega \in E_s^1(M)$, $L \in \mathfrak{X}_s(M)$ e suponha que $L_p = 0$. Então $\omega(L)(p) = 0$.*

De modo análogo ao caso dos campos vetoriais, podemos aqui também restringir as 1-formas a abertos de M, ou seja, podemos considerar 1-formas $\omega \in E_s^1(\Omega)$, onde Ω é um aberto de M.

Definimos

$$\mathbb{C}T_p^* M \doteq \text{dual de } \mathbb{C}T_p M$$

e introduzimos o fibrado cotangente complexificado como sendo a união disjunta

$$\mathbb{C}T^* M = \bigcup_{p \in M} \mathbb{C}T_p^* M.$$

Segue do Lema 1.3.1 que podemos associar, a cada $\omega \in E_s^1(M)$, um elemento $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^* M$, para todo $p \in M$, pela fórmula

$$\omega_p(v) = \omega(L)(p), \quad v \in \mathbb{C}T_p M,$$

onde $L \in \mathfrak{X}_s(M)$ é tal que $L_p = v$.

Reciprocamente, dada $\omega : M \to \mathbb{C}T^*M$ satisfazendo $\omega(p) \doteq \omega_p \in \mathbb{C}T_p^*M$, para todo $p \in M$, e tal que a aplicação $p \mapsto \omega_p(L_p)$ está em $G^s(M)$ para todo $L \in \mathfrak{X}_s(M)$, podemos definir $\omega \in E_s^1(M)$ por

$$\omega(L)(p) \doteq \omega_p(L_p).$$

Definição 1.3.9 *Dada $f \in G^s(M)$, definimos o diferencial de f como sendo a 1-forma $df \in E_s^1(M)$ dada por*

$$df(L) = L(f), \quad L \in \mathfrak{X}_s(M).$$

Sejam agora $p \in M$ e (U, x), $x = (x_1, \ldots, x_N)$, uma carta local em torno de p. Se $\omega \in E_s^1(U)$, então podemos escrever

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j. \tag{1.3.9}$$

Notemos ainda que $\{(dx_j)_p : \; j = 1, \ldots, N\} \subset \mathbb{C}T_p^*M$ é a base dual de $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p : \; j = 1, \ldots, N\} \subset \mathbb{C}T_pM$. Obtemos então, por meio de (1.3.9), a representação do diferencial df em coordenadas locais:

$$df = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Uma definição análoga de subfibrados pode ser dada para o fibrado cotangente:

Definição 1.3.10 *Um G^s-**subfibrado vetorial complexo** de $\mathbb{C}T^*M$ de posto m é uma união disjunta*

$$\mathcal{W} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{W}_p,$$

onde cada $\mathcal{W}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p^*M$ de dimensão m e tal que, para todo $p_0 \in M$, existe uma vizinhança U de p_0 e 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_m \in E_s^1(U)$ tais que $\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}$ geram $\mathcal{W}_p$, para todo $p \in U$.

Da mesma forma, chamamos aqui também o espaço $\mathcal{W}_p$ de fibra de $\mathcal{W}$ em p.

Proposição 1.3.2 *Seja $\mathcal{V} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{V}_p$ um G^s-subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}TM$ de posto n e considere, para cada $p \in M$,*

$$\mathcal{V}_p^{\perp} = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*M : \; \lambda = 0 \text{ em } \mathcal{V}_p\}.$$

Então $\mathcal{V}^{\perp} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{V}_p^{\perp}$ é um G^s-subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T^*M$, de posto m, onde $m \doteq N - n$.

Demonstração:

Dado $p_0 \in M$, existem uma carta local (U, x), $x = (x_1, \ldots, x_N)$, com $p_0 \in U$, e campos vetoriais

$$L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

tais que $a_{jk} \in G^s(U)$ e $L_{1p}, \ldots, L_{np}$ geram $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in U$.

Rearranjando os índices se necessário, podemos supor que a matriz $(a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ é inversível em U. Seja $(b_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ sua inversa. Diminuindo U, segue do Teorema 1.2.1 que $b_{jk} \in G^s(U)$, para $j, k = 1, \ldots, n$. Definindo então

$$L_j^{'} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu} L_\nu, \quad j = 1, \ldots, n,$$

temos que os vetores $L_{1p}^{'}, \ldots, L_{np}^{'}$ também geram $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in U$. Além disso,

$$L_j^{'} = \sum_{k=1}^{N} L_j^{'}(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} L_j^{'}(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} L_j^{'}(x_{n+k}) \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.$$

Note ainda que, para $k = 1, \ldots, n$,

$$L_j^{'}(x_k) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu} L_\nu(x_k) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu} a_{\nu k} = \delta_{jk}.$$

Logo, fazendo $c_{jk} = L_j^{'}(x_{n+k}) \in G^s(U)$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, temos que

$$L_j^{'} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.$$

Considere

$$\omega_\ell = dx_{n+\ell} - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma\ell} dx_\gamma, \quad \ell = 1, \ldots, m.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\omega_\ell(L_j^{'}) &= dx_{n+\ell}(L_j^{'}) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma\ell} dx_\gamma(L_j^{'}) \\
&= dx_{n+\ell}(L_j^{'}) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma\ell} L_j^{'}(x_\gamma) \\
&= L_j^{'}(x_{n+\ell}) - c_{j\ell} = 0,
\end{aligned}$$

donde segue que $\omega_{\ell p} \in \mathcal{V}_p^{\perp}$, para todo $\ell = 1, \ldots, m$ e para todo $p \in U$.

Vemos também que $\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}$ são vetores linearmente independentes para todo $p \in U$. Assim, como $\dim \mathcal{V}_p^\perp = m$, para todo $p \in U$, concluimos que $\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}$ geram $\mathcal{V}_p^\perp$, para todo $p \in U$ e, portanto, $\mathcal{V}^\perp$ é G^s-subfibrado de $\mathbb{C}T^*M$ de posto m. $\square$

Observação 1.3.2 *Na demonstração da Proposição 1.3.2, ficou claro o seguinte fato: Dado $p_0 \in M$, existe carta local (U, x) em torno de p_0, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, tal que $x(p) = 0$ e, em U, podemos encontrar geradores locais de $\mathcal{V}$ dados por*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Trocando x_j por t_j, para $j = 1, \ldots, n$ e x_{n+k} por x_k, $k = 1, \ldots, m$, encontramos então um sistema de coordenadas (x, t), $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $t = (t_1, \ldots, t_n)$, definido em vizinhança de p_0 e tal que $x(p_0) = 0$ e $t(p_0) = 0$, de modo que os geradores locais de $\mathcal{V}$ em vizinhança de p_0 podem ser tomados da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.3.10}$$

onde é claro que as funções $a_{jk} \in G^s(U)$. Segue de (1.3.10) e do fato de a estrutura ser involutiva, que os campos L_j comutam, ou seja, $[L_i, L_j] = 0$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Usaremos esses fatos nos capítulos posteriores.

Dado $L \in \mathfrak{X}_s(M)$, dizemos que L é um **campo vetorial real** se $L(G^s(M, \mathbb{R})) \subset G^s(M, \mathbb{R})$, onde $G^s(M, \mathbb{R})$ denota o conjunto das funções em $G^s(M)$ a valores reais.

Da mesma forma, se $p \in M$ e $v \in \mathbb{C}T_pM$, dizemos que v é um vetor tangente real se $v(G^s(p; \mathbb{R})) \subset \mathbb{R}$, sendo $G^s(p; \mathbb{R})$ o conjunto dos germes de funções de classe G^s a valores reais, definidas em vizinhança de p.

Definimos então

$$T_pM \doteq \{v \in \mathbb{C}T_pM : \ v \text{ é real}\}.$$

É fácil ver que T_pM é um espaço vetorial real de dimensão N e, se $x = (x_1, \ldots, x_N)$ é um sistema de coordenadas definido em vizinhança de p, então o conjunto $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p : j = 1, \ldots, N\}$ forma uma base de T_pM. Definimos o espaço T_p^*M como sendo o dual de T_pM como espaço vetorial real. Denotamos também:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM;$$

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Se $U \subset M$ é um aberto, denotamos $TM|_U \doteq \bigcup_{p \in U} T_pM$ e $T^*M|_U \doteq \bigcup_{p \in U} T_p^*M$.

Sejam agora M_1 e M_2 duas variedades analíticas reais, com $\dim M_1 = N_1$ e $\dim M_2 = N_2$. Dizemos que uma função $f : M_1 \to M_2$ é de classe G^s se, para todo $p \in M_1$, existirem cartas locais (U, x) de M_1 em torno de p e (V, y) de M_2 em torno de $f(p)$ tais que $f(U) \subset V$ e a composição $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^{N_1} \to y(V) \subset \mathbb{R}^{N_2}$ é de classe G^s.

Definição 1.3.11 *Sejam M_1, M_2 variedades analíticas reais e $f : M_1 \to M_2$ de classe G^s. Definimos a derivada de f no ponto p com sendo a transformação linear $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ dada por*

$$df_p(v)(\underline{g}) \doteq v(\underline{g \circ f}),$$

onde $v \in T_pM_1$ e $\underline{g} \in G^s(f(p); \mathbb{R})$.

Observação 1.3.3 *Se $f : \mathbb{R}^{N_1} \to M_2$ é de classe G^s, com M_2 como acima, então $df_p : T_p\mathbb{R}^{N_1} \to T_{f(p)}M_2$, para $p \in \mathbb{R}^{N_1}$. Fazendo a identificação de $T_p\mathbb{R}^{N_1}$ com $\mathbb{R}^{N_1}$ por meio do isomorfismo que leva a base canônica de $\mathbb{R}^{N_1}$ na base $\{\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right) : j = 1, \ldots, N_1\}$ de $T_p\mathbb{R}^{N_1}$, onde $(r_1, \ldots, r_{N_1})$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^{N_1}$, podemos considerar a derivada de f no ponto p como uma aplicação da forma*

$$df_p : \mathbb{R}^{N_1} \to T_{f(p)}M_2.$$

Dadas M_1, M_2 e M_3 variedades analíticas reais e funções $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ de classe G^s, é fácil ver que a função composta $g \circ f : M_1 \to M_3$ é de classe G^s e, além disso, vale a regra da cadeia:

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Sabendo que o Teorema da função inversa vale para funções de classe G^s definidas em abertos de $\mathbb{R}^N$ a valores em $\mathbb{R}^N$ (ver, por exemplo, [K]), podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.3.1 *(Função inversa) Sejam $f : M_1 \to M_2$ de classe G^s e $p \in M_1$. Se df_p é um isomorfismo de espaços vetoriais, então f é um G^s-difeomorfismo em vizinhança de p.*

Seja $f : M_1 \to M_2$ de classe G^s. Dizemos que f é uma imersão (respectivamente submersão) em $p \in M_1$ se $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ é injetora (respectivamente sobrejetora). Utilizando a versão Gevrey do Teorema da função inversa, podemos provar:

Proposição 1.3.3 *(Forma local das imersões) Sejam M_1 e M_2 variedades analíticas reais de dimensões N_1 e N_2, respectivamente, com $N_1 \leq N_2$. Se uma função de classe G^s, $f : M_1 \to M_2$ é uma imersão em $p \in M_1$, então existem sistemas de coordenadas (U, x) de M_1 em torno de p e (V, y) de M_2 em torno de $f(p)$, tais que $x(p) = 0$ e $y(f(p)) = 0$ e a aplicação $g \doteq y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^{N_1} \to y(V) \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2 - N_1}$ é dada por $g(x) = (x, 0)$.*

Uma versão semelhante da forma local das submersões, a qual não enunciaremos aqui, é também válida e pode ser demonstrada de modo análogo ao caso das imersões.

Vamos encerrar esta seção por definir o conjunto característico de uma G^s-estrutura formalmente integrável, conceito este que ocupa um papel central neste trabalho.

Se M é uma variedade analítica real e $\mathcal{V}$ é uma G^s-estrutura formalmente integrável sobre M, denotaremos o subfibrado $\mathcal{V}^{\perp}$ definido na proposição 1.3.2 por T'.

Definição 1.3.12 *Sejam M uma variedade analítica real e $\mathcal{V}$ uma G^s-estrutura formalmente integrável (ou uma estrutura de classe C^k, com $k = 1, 2, \dots$) sobre M. O* ***conjunto característico*** *de $\mathcal{V}$ é o subconjunto de T^*M definido por*

$$T^0M \doteq T' \cap T^*M.$$

Observemos que $T^0_pM = T'_p \cap T^*_pM$, para todo $p \in M$.

Definição 1.3.13 *Dizemos que a estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ é uma estrutura elíptica se $T^0_pM = \{0\}$, para todo $p \in M$.*

Definimos o **símbolo** de um campo vetorial $L \in \mathfrak{X}_s(M)$ como sendo a função

$$\sigma(L) : T^*M \to \mathbb{C}, \quad \sigma(L)(\xi) = \xi(L_p), \text{ se } \xi \in T^*_pM.$$

É válido o seguinte

Lema 1.3.2 *Seja $\xi \in T^*M$. Então $\xi \in T^0M$ se, e somente se, $\sigma(L)(\xi) = 0$, para toda seção L de $\mathcal{V}$.*

Seja agora (U, x) carta local de M, com $x = (x_1, \dots, x_N)$. Tome $p \in U$, $\xi \in T^*_pM$ e $L \in \mathfrak{X}_s(U)$. Se escrevermos

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j (dx_j)_p \qquad (\xi_j \in \mathbb{R})$$

e

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

então

$$\sigma(L)(\xi) = \xi(L_p) = \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j.$$

Assim, se $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{X}_s(U)$ são n seções linearmente independentes de $\mathcal{V}$ sobre U, então podemos descrever o conjunto característico de $\mathcal{V}$ em U pelo sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(p)\xi_k = 0, \quad p \in U,\ \xi_k \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,n.$$

Observação 1.3.4 *Segue do que fizemos acima que o conjunto característico da estrutura $\mathcal{V}$ pode ser visto, localmente, como a intersecção dos conjuntos característicos de seus geradores locais.*

Exemplo 1.3.1 *Escrevendo as coordenadas de $M = \mathbb{R}^2$ como (x,t), definimos o operador de Mizohata por*

$$L \doteq \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}_s(\mathbb{R}^2).$$

O conjunto característico da G^s-estrutura gerada por L é dado pela equação

$$\tau - it\xi = 0.$$

Assim, se $p = (x,t)$, temos que

$$T_p^0 M = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0 \\ \{\xi(dx)_p :\ \xi \in \mathbb{R}\}, & \text{se } p = (x,0). \end{cases}$$

1.4 O conjunto frente de onda Gevrey

Esta seção será dedicada à definição do conjunto frente de onda G^s de uma distribuição definida em uma variedade analítica real M e algumas de suas principais propriedades. Para um estudo da teoria de distribuições, bem como para as demonstrações dos resultados a serem mencionados nesta seção, sugerimos ao leitor a referência [H].

Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Lembremos que a transformada de Fourier de u é a função de classe C^∞ de $\mathbb{R}^N$ dada por

$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\cdot\xi}\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde a distribuição age com respeito à variável $x \in \mathbb{R}^N$.

Como sabemos, a regularidade C^∞ da distribuição u pode ser descrita em termos do decaimento de sua transformada de Fourier. Mais especificamente, u é uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^N$ se, e somente se, para todo $k = 1, 2, \ldots$, existe $C_k > 0$ tal que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{C_k}{|\xi|^k}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}. \tag{1.4.11}$$

Assim, para que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ seja C^∞ em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, é necessário e suficiente que encontremos uma função de corte $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, que vale 1 em vizinhança de x_0 e tal que a distribuição de suporte compacto φu tenha o decaimento descrito em (1.4.11). Dessa forma, a não validade de (1.4.11) para a distribuição de suporte compacto φu, para qualquer φ como acima, caracteriza as singularidades da distribuição u.

Dado um ponto $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, dizemos que u é **micro-regular** em (x_0, ξ_0) se existirem $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, igual a 1 em vizinhança de x_0 e uma vizinhança cônica Γ de ξ_0 tais que φu tem o decaimento dado por (1.4.11), para todo $\xi \in \Gamma$. Definimos então o **conjunto frente de onda** C^∞ de u como sendo o conjunto dos pontos (x, ξ) onde u não é micro-regular e denotamos por $WF(u)$.

Dessa forma, enquanto que o conjunto $\text{suppsing}(u)$ localiza as singularidades da distribuição u, o conjunto $WF(u)$ localiza as direções que provocam tais singularidades. A esse processo de localização de direções damos o nome de microlocalização.

Vamos agora dar a idéia de microlocalização de singularidades Gevrey. Lembremos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ é dita ser de classe G^s em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se existe $f \in G^s(\Omega)$ tal que, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Denotamos por $\text{suppsing}_s(u)$ o complementar do maior aberto onde u é de classe G^s, e o denominamos o **suporte singular Gevrey de ordem** s de u.

Proposição 1.4.1 *Sejam $s \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $x_0 \in \Omega$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então $u \in G^s$ em vizinhança de x_0 se, e somente se, existem uma vizinhança U de x_0 e uma sequência limitada $u_k \in \mathcal{E}'(\Omega)$, que é igual a u em U e tal que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo*

$$|\hat{u}_k(\xi)| \leq C \left(\frac{Ck^s}{|\xi|} \right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots,\ \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}. \tag{1.4.12}$$

A proposição acima, cuja demonstração pode ser vista em [H], torna natural a seguinte definição:

Definição 1.4.1 *Sejam $s \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, dizemos que u é **s-micro-regular** em (x_0, ξ_0) se existem uma vizinhança U de x_0, uma vizinhança cônica Γ de ξ_0 e uma sequência limitada $u_k \in \mathcal{E}'(\Omega)$, coincidindo com u em U, de modo que (1.4.12) vale para todo $\xi \in \Gamma$. Definimos o **conjunto frente de onda** G^s de u, e denotamos por $WF_s(u)$, o complemento em $\Omega \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ do conjunto dos pontos (x, ξ) tais que u é s-micro-regular em (x, ξ).*

Segue diretamente da definição acima que $WF_s(u)$ é um conjunto fechado em $\Omega \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e cônico na variável $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

No caso em que $s = 1$, denotamos $WF_1(u)$ por $WF_A(u)$ e o denominamos conjunto frente de onda analítico de u. Dizemos ainda que u é micro-analítica nos pontos $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tais que $(x, \xi) \notin WF_A(u)$.

A sequência u_k que aparece na Proposição 1.4.1 e na definição 1.4.1 pode sempre ser escolhida como produto de u por uma sequência apropriada de funções de corte (ver [H]). Entretanto, para o caso em que $s > 1$, caso este de especial interesse neste trabalho, essa caracterização pode ser melhorada, como vemos no próximo resultado.

Teorema 1.4.1 *Sejam $s > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $x_0 \in \Omega$, então para que u seja de classe G^s em vizinhança de x_0 é necessário e suficiente que existam uma função de corte $\varphi \in G_0^s(\Omega)$, que vale 1 numa vizinhança de x_0, e constantes C e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.4.13}$$

Além disso, a condição (1.4.13) é equivalente à seguinte:

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C \left(\frac{Ck}{|\xi|^{\frac{1}{s}}} \right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \ \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.4.14}$$

A demonstração do teorema acima pode ser vista em [R].

Observação 1.4.1 *A condição (1.4.14) é equivalente a:*

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C \left(\frac{Ck^s}{|\xi|} \right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \ \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}. \tag{1.4.15}$$

De fato, é suficiente mostrar a equivalência para o caso em que $|\xi| > 1$, pois o caso contrário segue facilmente do fato de que funções continuas são limitadas em conjuntos compactos. Seja k um inteiro positivo e suponha que vale (1.4.14). Tomando-se N o menor inteiro maior ou igual a sk e supondo, sem perda de generalidade, que $C \geq 1$, temos, para $|\xi| > 1$,

$$|\xi|^k|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq |\xi|^{\frac{N}{s}}|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C(CN)^N \leq C_1^{k+1}k^{sk},$$

pelo Lema 4.2.1 (ver Apêndice), para alguma constante $C_1 > 0$. Isso mostra (1.4.15).

Reciprocamente, se vale (1.4.15), tomando-se agora N o menor inteiro maior ou igual a $\frac{k}{s}$, temos, para $|\xi| > 1$,

$$|\xi|^{\frac{k}{s}}|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq |\xi|^N|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C(CN^s)^N = C^{N+1}N^{sN} \leq C_1(C_1k)^k,$$

novamente pelo Lema 4.2.1. A prova da observação está agora completa. $\square$

Enunciamos a seguir algumas importantes propriedades satisfeitas pelo conjunto frente de onda G^s.

Proposição 1.4.2 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $s \geq 1$.*

(i) A projeção de $WF_s(u)$ em Ω é igual ao suporte singular G^s de u, $\operatorname{suppsing}_s(u)$*;*

(ii) $WF(u) \subset WF_s(u) \subset WF_A(u)$ e, se $s_1 \leq s_2$, então $WF_{s_2}(u) \subset WF_{s_1}(u)$;

(iii) $WF_s\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \subset WF_s(u)$, para todo $j = 1, \ldots, N$;

(iv) Se $a \in G^s(\Omega)$ então $WF_s(au) \subset WF_s(u)$.

Se

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

é um operador diferencial com coeficientes em $G^s(\Omega)$, segue dos itens (*iii*) e (*iv*) da Proposição 1.4.2 que

$$WF_s(P(x, D)u) \subset WF_s(u).$$

No caso em que $P(x, D)$ é um operador diferencial com coeficientes analíticos em Ω, mostra-se que

$$WF_s(u) \subset \operatorname{Char}(P) \cup WF_s(Pu), \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Assim, se $P(x, D)$ é um operador elíptico com coeficientes analíticos em Ω, então, para toda distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$WF_s(u) = WF_s(Pu).$$

Vamos agora definir a transformada de Fourier-Brós-Iagolnitzer de uma distribuição com suporte compacto e dar uma caracterização de sua regularidade G^s em termos de tal transformada.

Como vimos anteriormente, enquanto que a regularidade G^s, $s > 1$ (e também a regularidade C^∞) de uma distribuição u pode ser caracterizada localmente através do comportamento da transformada de Fourier de uma distribuição de suporte compacto que coincide com u numa vizinhança, para caracterizar a analiticidade de u, necessitamos estudar o comportamento da transformada de Fourier de uma sequência de distribuições de suporte compacto, o que torna tal caracterização mais difícil nas aplicações. Neste sentido, uma nova transformada, introduzida primeiramente em [IS] e elaborada em [BI], a qual chamamos transformada de Fourier-Brós-Iagolnitzer (FBI), mostrou ser a ferramenta ideal para o estudo da analiticidade e micro-analiticidade de distribuições, dando uma caracterização para este caso similar à que obtemos para o caso G^s, $s > 1$, através da transformada de Fourier. Encontramos na literatura algumas pequenas variações na definição da transformada FBI; entretanto, suas propriedades se mantêm inalteradas sob tais variações. Vamos aqui dar a definição encontrada em [Chr].

Para $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^N$ definimos $\langle y \rangle = (1 + \sum_{j=1}^N y_j^2)^{1/2}$, o qual está bem definido e é holomorfo numa vizinhança cônica Γ de $\mathbb{R}^N$, (ver [Chr]). Sejam (x, ξ) coordenadas em $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$. Para cada $\gamma \in [0, 1]$ considere a forma diferencial ω definida em uma vizinhança cônica de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{C}^N$ por

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \wedge d(\xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle^\gamma) \wedge \cdots \wedge d(\xi_N + ix_N\langle\xi\rangle^\gamma).$$

Definimos ainda a função α_γ por

$$\omega = \alpha_\gamma(x, \xi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_N.$$

Assim, o coeficiente α_γ é holomorfo com respeito a x, e igual a $1 + O(\langle\xi\rangle^{\gamma-1})$ para x em qualquer aberto limitado de $\mathbb{C}^N$.

Definição 1.4.2 *Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $(x, \xi) \in \mathbb{C}^N \times \Gamma$ e $0 \leq \gamma \leq 1$, definimos a transformada de Fourier-Brós-Iagolnitzer, ou simplesmente transformada FBI de u por*

$$\mathcal{F}_\gamma u(x, \xi) = \langle u, e^{i(x-x')\cdot\xi - \langle\xi\rangle^\gamma |x-x'|^2} \alpha_\gamma(x - x', \xi) \rangle,$$

onde a distribuição u age com relação à variável x'.

Para mais detalhes sobre a transformada FBI, ver, por exemplo, [BCH].

Teorema 1.4.2 *Sejam $s \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $x_0 \in \Omega$ e $u \in D'(\Omega)$. São equivalentes:*

1. $u \in G^s$ *em* x_0.

2. Existem $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *coincidindo com* u *em vizinhança de* x_0, $\gamma \in [1/s, 1]$, $\delta > 0$, $C > 0$ *e uma vizinhança* $V \subset \Omega$ *de* x_0 *tal que*

$$|\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi)| \leq Ce^{-\delta\langle\xi\rangle^{1/s}}, \text{ para todo } (x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^N. \tag{1.4.16}$$

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [Chr]. Uma vez que, para $|\xi| \geq 1$, temos $|\xi| \leq \langle\xi\rangle \leq \sqrt{2}|\xi|$, é fácil ver que a condição (1.4.16) é equivalente à seguinte:

$$|\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi)| \leq Ce^{-\delta|\xi|^{1/s}}, \text{ para todo } (x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^N. \tag{1.4.17}$$

Dessa forma, se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $s > 1$, podemos descrever o conjunto frente de onda $WF_s(u)$ como o complemento em $\Omega \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ do conjunto dos pontos (x_0, ξ_0) para os quais vale o seguinte: Existe $\varphi \in G_0^s(\Omega)$, igual a 1 em vizinhança U de x_0 e existe uma vizinhança cônica Γ de ξ_0 em $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tais que a desigualdade (1.4.17) é satisfeita para $v = \varphi u$ e para $(x,\xi) \in U \times \Gamma$.

Utilizaremos a descrição acima nos capítulos posteriores.

Para finalizar esta seção, vamos definir o conjunto frente de onda G^s de distribuições definidas em variedades analíticas reais. Para tanto, necessitamos do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [H].

Teorema 1.4.3 *Considere* $s \geq 1$. *Sejam* Ω_1 *e* Ω_2 *abertos de* $\mathbb{R}^{N_1}$ *e* $\mathbb{R}^{N_2}$, *respectivamente e seja* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *uma função analítica real, com conjunto normal* N_f *dado por*

$$N_f \doteq \{(f(x), \eta) \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^{N_2} : {}^t f'(x)\eta = 0\}.$$

Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *é uma distribuição que satisfaz*

$$N_f \cap WF_s(u) = \emptyset,$$

então o pullback $f^*u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *pode ser definido de maneira única tal que* $f^*u = u \circ f$ *quando* $u \in C^\infty$ *e, além disso, temos*

$$WF_s(f^*u) \subset f^*WF_s(u),$$

onde

$$f^*WF_s(u) = \{(x, {}^t f'(x)\eta) : (f(x), \eta) \in WF_s(u)\}.$$

Sejam Ω_1 e Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^N$ e suponha que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é um difeomorfismo analítico. Segue então que a transformação linear $f'(x)$ é um isomorfismo, para todo $x \in \Omega_1$. Logo, neste caso, temos que $N_f = f(\Omega_1) \times \{0\} \subset \Omega_2 \times \mathbb{R}^N$. Assim, toda distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ satisfaz $N_f \cap WF_s(u) = \emptyset$. Logo,

$$WF_s(f^*u) \subset f^*WF_s(u),$$

para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$.

Aplicando o mesmo raciocínio para a aplicação $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$, com a distribuição $f^*u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, temos que

$$WF_s((f^{-1})^*f^*u) \subset (f^{-1})^*WF_s(f^*u)$$

e, como $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$, segue que

$$WF_s(u) \subset (f^*)^{-1}WF_s(f^*u),$$

ou ainda

$$f^*WF_s(u) \subset WF_s(f^*u).$$

Portanto, se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é um difeomorfismo analítico e $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, então

$$WF_s(f^*u) = f^*WF_s(u). \tag{1.4.18}$$

Segue, em particular, de (1.4.18), que $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ é s-micro-regular em $(f(x_0), \eta) \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ se, e somente se, $f^*u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ é s-micro-regular em $(x_0, {}^tf'(x_0)\eta) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

Vamos agora relembrar a definição de distribuição em variedades. Para mais detalhes, ver [H]. Sejam M uma variedade analítica real de dimensão N e (U, x) uma carta local de M. Se u é uma função contínua em M então, por definição, a função $u_x = u \circ x^{-1}$ é contínua em $x(U)$. Se (V, y) é outro sistema de coordenadas tal que $U \cap V \neq \emptyset$, então

$$u = u_x \circ x = u_y \circ y, \quad \text{em } \; U \cap V,$$

e assim,

$$u_y = u_x \circ (x \circ y^{-1}) = (x \circ y^{-1})^* u_x, \quad \text{em } \; y(U \cap V).$$

Uma vez que, como verificado acima, o conjunto normal de um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^N$ tem intersecção vazia com o conjunto frente de onda G^s de qualquer distribuição definida na imagem do difeomorfismo, segue do Teorema 1.4.3 que o pullback $(x \circ y^{-1})^* : \mathcal{D}'(x(U \cap V)) \to \mathcal{D}'(y(U \cap V))$ é unicamente definido.

Se, para todo sistema de coordenadas (U, x) de M, associamos uma distribuição $u_x \in \mathcal{D}'(x(U))$ tal que

$$u_y = (x \circ y^{-1})^* u_x, \quad \text{em} \ \ y(U \cap V), \tag{1.4.19}$$

para quaisquer cartas locais (U, x), (V, y), com $U \cap V \neq \emptyset$, então chamamos o sistema u_x uma distribuição u em M. Denotamos então por $\mathcal{D}'(M)$ o conjunto de todas as distribuições em M.

Usamos a notação $u_x \doteq u \circ x^{-1}$, em concordância com o caso em que u é contínua. Se, para toda carta local (U, x) de M, temos definida uma distribuição $u_x \in \mathcal{D}'(x(U))$ satisfazendo (1.4.19), então existe uma única distribuição $u \in \mathcal{D}'(M)$ tal que $u \circ x^{-1} = u_x$, para toda carta local (U, x) de M (ver [H]). Em particular, segue que a definição de distribuição em variedade dada acima coincide com a definição que já conhecemos, no caso em que M é um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Seja então $u \in \mathcal{D}'(M)$. Assim, fixada uma carta local (U, x) de M, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, temos que $u \circ x^{-1} \in \mathcal{D}'(x(U))$. Podemos considerar o conjunto frente de onda $WF_s(u \circ x^{-1})$ como um subconjunto do fibrado cotangente real de $\mathbb{R}^N$, identificando um elemento $(x, \xi) \in x(U) \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, com $\eta \in T^*\mathbb{R}^N\big|_{x(U)} \backslash \{0\}$ dado por

$$\eta = \xi_1 (dr_1)_x + \cdots + \xi_N (dr_N)_x,$$

onde $(r_1, \ldots, r_N)$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^N$. Da mesma forma, os elementos de $T^*M|_U$ podem ser identificados com elementos $(p, \xi) \in U \times T_pM$.

Definimos então

$$x^* WF_s(u \circ x^{-1}) \doteq \{(p, {}^t dx_p \eta) \in T^*M|_U \backslash \{0\} : (x(p), \eta) \in WF_s(u \circ x^{-1})\},$$

onde ${}^t dx_p \eta \in T_p^*M$ é dado por

$${}^t dx_p \eta(v) = \eta(dx_p(v)), \quad v \in T_pM.$$

Definição 1.4.3 *Sejam M uma variedade analítica real, $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $s \geq 1$. Definimos o conjunto frente de onda $WF_s(u) \subset T^*M \backslash \{0\}$ como o conjunto tal que sua restrição a cada carta local (U, x) de M é dada por $x^* WF_s(u \circ x^{-1})$.*

Segue do Teorema 1.4.3, juntamente com (1.4.18), que a definição de $WF_s(u)$ é independente da escolha das coordenadas locais. Além disso, a definição acima fica compatível, no caso em que $M = \mathbb{R}^N$, com o que já havíamos definido, considerando o conjunto frente de onda como subconjunto do fibrado cotangente de $\mathbb{R}^N$.

1.5 Teorema da função implícita para funções na classe $G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$

Sejam $s > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^M$, $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^N$ abertos. Estamos interessados em mostrar uma versão do teorema da função implícita para funções na classe $G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$.

Enunciamos primeiramente o Teorema da função implícita na versão Gevrey.

Teorema 1.5.1 *Se $F = (F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_N))$ é uma função de classe G^s definida em um aberto U contendo um ponto $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0)$ a valores em $\mathbb{R}^n$, com $n \leq N$, tal que $F(x_0) = 0$ e*

$$\det \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j,k \leq n}$$

é não nulo em x_0, então existe única função $f = (f_1(x_{n+1}, \ldots, x_N), \ldots, f_n(x_{n+1}, \ldots, x_N))$ de classe G^s de uma vizinhança V_0 de $(x_{n+1}^0, \ldots, x_N^0) \in \mathbb{R}^{N-n}$ em um aberto U_0 de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$x_j^0 = f_j(x_{n+1}^0, \ldots, x_N^0), \quad j = 1, \ldots, n$$

e

$$F(f(x_{n+1}, \ldots, x_N), x_{n+1}, \ldots, x_N) = 0.$$

O teorema acima é uma consequência do teorema da função inversa para funções de classe G^s, cuja demonstração pode ser vista, por exemplo, em [K].

Considere $F(x, z, w)$ uma função de classe G^s em $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ um aberto, e holomorfa nas variáveis $(z, w) \in \mathcal{N} \subset \mathbb{C}^2$. Se $w = y_1 + iy_2$ e $F = u + iv$, então as equações de Cauchy-Riemann ficam

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y_1} = -\frac{\partial u}{\partial y_2}.$$

Suponha que, em um ponto $p_0 = (x_0, z_0, w_0) \in \Omega \times \mathcal{N}$, temos $F(p_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$. Temos que

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} - i\frac{\partial u}{\partial y_2} + i\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2} \right) = \frac{\partial u}{\partial y_1} - i\frac{\partial u}{\partial y_2}.$$

Assim, em p_0 temos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} & \frac{\partial u}{\partial y_2} \\ \frac{\partial v}{\partial y_1} & \frac{\partial v}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial y_2} - \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial v}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 = \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right|^2 \neq 0.$$

Ainda, como F é holomorfa em (z, w), segue que u e v são analíticas em $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, y_1, y_2)$ e, portanto, de classe G^1 nessas variáveis. Uma vez que F é de classe G^s em x e $G^1 \subset G^s$, temos que u e v são funções de classe G^s. Assim, pelo Teorema 1.5.1, existem funções $f_1(x, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ e $f_2(x, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ definidas em vizinhança de $(x_0, \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$ e de classe G^s tais que $\operatorname{Re} w_0 = f_1(x_0, \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$, $\operatorname{Im} w_0 = f_2(x_0, \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$ e, se $f(x, z) = f_1(x, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) + i f_2(x, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, então

$$F(x, z, f(x, z)) = 0.$$

Segue daí que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(x, z, f(x, z)) = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Como F é holomorfa em w, temos que $\frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = 0$ e, uma vez que $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ em vizinhança de p_0, concluimos que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Portanto, f é de classe G^s em x e holomorfa em z.

Esse resultado é válido em dimensões maiores e será demonstrado a seguir.

Teorema 1.5.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^M$, $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^N$ abertos e $(x_0, \zeta') \in \Omega \times \mathcal{N}$. Suponha que $F = (F_1, \ldots, F_n)$ e $F_j = F_j(x, \zeta) \in G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$, para $j = 1, \ldots, n$ e $n \leq N$, onde $x \in \Omega$ e $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in V$. Se $F(x_0, \zeta') = 0$ e*

$$\det \left(\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_i}(x_0, \zeta') \right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0,$$

então existe vizinhança $U \subset \mathbb{C}^{N-n}$ de $(\zeta'_{n+1}, \ldots, \zeta'_N)$ tal que $\{(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)\} \times U \subset \mathcal{N}$ e existe uma única função $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de modo que $f_j = f_j(x, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) \in G^s(\Omega, H(U))$, $j = 1, \ldots, n$, $\zeta'_j = f_j(x_0, \zeta'_{n+1}, \ldots, \zeta'_N)$ para todo $j = 1, \ldots, n$ e

$$F(x, f(x, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N), \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) = 0, \qquad \forall\ (x, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) \in \Omega \times U.$$

Demonstração:

Como cada F_j é de classe G^s em x e holomorfa em ζ, escrevendo $F_j = u_j + iv_j$, segue que as funções $u_j(x, \operatorname{Re} \zeta, \operatorname{Im} \zeta)$ e $v_j(x, \operatorname{Re} \zeta, \operatorname{Im} \zeta)$ são analíticas nas variáveis $(\operatorname{Re} \zeta, \operatorname{Im} \zeta)$ e assim, temos que u_j, v_j são de classe G^s, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Fazendo $\zeta = t + iy = (t_1 + iy_1, \ldots, t_N + iy_N)$, temos que, no ponto (x_0, ζ'),

$$Z \doteq \left(\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}\right)_{n\times n} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_k}\right)_{n\times n} - i\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right)_{n\times n} \doteq A + iB.$$

Por hipótese, temos que Z é localmente inversível. Seja então $Z^{-1} = C + iD$, com C, D matrizes de ordem $n \times n$ com entradas reais. Como $Z^{-1}Z = Id_n$, temos que

$$\begin{cases} CA - DB = Id_n \\ CB + DA = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA - DB & -(CB + DA) \\ CB + DA & CA - DB \end{pmatrix} = Id_{2n}.$$

Logo, como $A = \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_k}\right)_{n\times n}$ e $B = -\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right)_{n\times n}$, segue pelas equações de Cauchy-Riemann que a matriz

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_k}\right)_{n\times n} & \left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right)_{n\times n} \\ \left(\frac{\partial v_j}{\partial t_k}\right)_{n\times n} & \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\right)_{n\times n} \end{pmatrix}$$

é inversível no ponto $(x_0, \zeta^{'})$.

Portanto, pelo Teorema 1.5.1, diminuindo Ω, existe vizinhança U de $(\operatorname{Re}\zeta^{'}_{n+1}, \operatorname{Im}\zeta^{'}_{n+1}, \ldots, \operatorname{Re}\zeta^{'}_N, \operatorname{Im}\zeta^{'}_N)$ tal que $\{(\operatorname{Re}\zeta^{'}_1, \operatorname{Im}\zeta^{'}_1, \ldots, \operatorname{Re}\zeta^{'}_n, \operatorname{Im}\zeta^{'}_n)\} \times U \subset V$ e existem funções $f_j^1, f_j^2 \in G^s(\Omega \times U)$, com

$$\operatorname{Re}\zeta^{'}_j = f_j^1(x_0, \operatorname{Re}\zeta^{'}_{n+1}, \operatorname{Im}\zeta^{'}_{n+1}, \ldots, \operatorname{Re}\zeta^{'}_N, \operatorname{Im}\zeta^{'}_N)$$

e

$$\operatorname{Im}\zeta^{'}_j = f_j^2(x_0, \operatorname{Re}\zeta^{'}_{n+1}, \operatorname{Im}\zeta^{'}_{n+1}, \ldots, \operatorname{Re}\zeta^{'}_N, \operatorname{Im}\zeta^{'}_N)$$

para todo $j = 1, \ldots, n$, e ainda, se $f_j = f_j^1 + i f_j^2 \equiv (f_j^1, f_j^2)$ e $f = (f_1, \ldots, f_n)$, então

$$F_j(x, f(x, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N), \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) = 0, \tag{1.5.20}$$

para $(x, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) \in \Omega \times U$ e $j = 1, \ldots, n$, onde usamos a notação

$$(\zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) = (\operatorname{Re}\zeta_{n+1}, \operatorname{Im}\zeta_{n+1}, \ldots, \operatorname{Re}\zeta_N, \operatorname{Im}\zeta_N).$$

Resta-nos portanto mostrar que cada f_j é holomorfa nas variáveis $(\zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N)$. Para tanto, é suficiente verificar que

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{\zeta}_k}(x, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N) = 0,$$

para todo $(x,\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N)\in\Omega\times U$ e $k=n+1,\ldots,N$.

De (1.5.20) temos, para $k=n+1,\ldots,N$ e $j=1,\ldots,n$,

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_k}F_j(x,f(x,\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N),\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N)=0.$$

Assim, uma vez que cada F_j é holomorfa em ζ, segue que

$$\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial\zeta_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial\bar{\zeta}_k}=0.$$

Escrevendo a equação acima matricialmente, obtemos

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial\zeta_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial\zeta_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial\zeta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\bar{\zeta}_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial\bar{\zeta}_N}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial\bar{\zeta}_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial\bar{\zeta}_N}\end{pmatrix}=0.$$

Uma vez que, diminuindo Ω e U se necessário, a matriz

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial\zeta_k}(x,f(x,\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N),\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N)\right)_{n\times n}$$

é inversível, segue que

$$\frac{\partial f_j}{\partial\bar{\zeta}_k}(x,\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N)=0,$$

para todo $(x,\zeta_{n+1},\ldots,\zeta_N)\in\Omega\times U$ e $k=n+1,\ldots,N$ e portanto, concluimos que $f_j\in G^s(\Omega,H(U))$, para todo $j=1,\ldots,n$. $\square$

Capítulo 2

Soluções aproximadas Gevrey para estruturas involutivas

Neste capítulo, vamos definir o conceito de solução s-aproximada e mostrar a existência de tais soluções para sistemas lineares formados por geradores de G^s-estruturas involutivas. Uma vez que o nosso problema é de caráter puramente local, vamos aqui dar as definições e demonstrar os resultados para campos vetoriais complexos definidos em vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$. No apêndice deste trabalho, damos uma definição intrínseca de soluções s-aproximadas para G^s-estruturas involutivas.

2.1 Problema de Carleman para funções de classe Gevrey

Esta seção será dedicada à demonstração do resultado abaixo. Embora demonstrado em [BP], incluimos sua demonstração aqui de modo a deixar completo o presente trabalho.

Lema 2.1.1 *Sejam $s > 1$ e $\{v_\beta(x)\}$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, uma multi-sequência de funções C^∞ definidas em vizinhança $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ da origem tais que, dado um compacto $K \subset \Omega$, existe $B > 1$ satisfazendo*

$$|\partial_x^\alpha v_\beta(x)| \leq B^{|\alpha|+|\beta|+1}(\alpha!)^s(\beta!)^s, \quad \forall x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{2.1.1}$$

Então, diminuindo Ω se necessário, existe $F \in G^s(\Omega \times (-1,1)^n)$ tal que $\partial_t^\gamma F(x,0) = v_\gamma(x)$, para todo $x \in \Omega, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$.

Para a demonstração do Lema acima, vamos inicialmente mostrar o caso em que $n = 1$, ou seja, mostraremos o seguinte

Lema 2.1.2 *Seja $s > 1$ e considere uma sequência $\{v_k(x)\}$ de funções definidas em uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^m$ da origem, C^∞ em V e tais que, dado $K \subset V$ compacto, existe $B > 0$ tal que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$,*

$$|\partial_x^\alpha v_k(x)| \leq B^{|\alpha|+k+1}(\alpha!)^s(k!)^s, \quad \forall x \in K, k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.1.2}$$

Então existe $f \in G^s(V \times (-1, 1))$ tal que

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x, 0) = v_n(x), \quad \forall x \in V, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

O Lema acima generaliza o que conhecemos como problema de Carleman, mencionado na introdução. A construção utilizada aqui é semelhante àquela encontrada em [Dz], substituindo a sequência numérica pela sequência de funções $v_k(x)$.

Demonstração:

Para $t \in [-1, 1]$, definimos $a_0(t) = 1$ e, se $k \geq 1$, considere

$$b_k(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq -\sigma_k \\ \exp\left(\frac{-k\sigma_k^{4r}}{t^{2r}(\sigma_k+t)^{2r}}\right), & -\sigma_k < t < 0 \\ 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

onde r é um inteiro tal que $\dfrac{1}{2r} < s - 1$ e $\sigma_k = D^{-1}k^{-(s-1)}$, para algum $D > 0$ a ser determinado.

Ainda para $k \geq 1$, definimos

$$a_k(t) = \frac{\int_{-1}^t b_k(y)dy}{\int_{-1}^1 b_k(y)dy}, \tag{2.1.4}$$

para $-1 \leq t \leq 0$ e $a_k(t) = a_k(-t)$, para $0 \leq t \leq 1$.

Consideremos a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(x)}{k!} a_k(t) t^k = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{k!} a_k(t) t^k. \tag{2.1.5}$$

Para mostrar que (2.1.5) define uma função f que satisfaz as condições do lema, é suficiente mostrarmos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{k!} a_k(t) t^k$$

define uma função $g(x,t)$ de classe G^s tal que

$$\frac{\partial^n g}{\partial t^n}(x,0) = v_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Iniciemos a prova estimando $\displaystyle\int_{-1}^{1} b_k(y)dy$. Para $-\sigma_k < u < 0$, temos que

$$b_k(y) = \exp\left(\frac{-k\sigma_k^{4r}}{y^{2r}(\sigma_k + y)^{2r}}\right).$$

Logo, derivando a função acima, concluimos que $b_k(y)$ cresce para $-\sigma_k < y < -\frac{\sigma_k}{2}$ e decresce para $-\frac{\sigma_k}{2} < y < 0$. Além disso, para $0 \leq y \leq \frac{\sigma_k}{2}$, é fácil ver que

$$b_k(-\frac{\sigma_k}{2} - y) = b_k(-\frac{\sigma_k}{2} + y).$$

Assim, tomando-se a partição $[-\sigma_k, -\frac{3\sigma_k}{4}]$, $[-\frac{3\sigma_k}{4}, -\frac{\sigma_k}{4}]$, $[-\frac{\sigma_k}{4}, 0]$ do intervalo $[-\sigma_k, 0]$, obtemos

$$\int_{-1}^{1} b_k(y)dy = \int_{-\sigma_k}^{0} b_k(y)dy \geq \frac{\sigma_k}{4} b_k(-\sigma_k) + \frac{\sigma_k}{2} b_k\left(-\frac{\sigma_k}{4}\right) + \frac{\sigma_k}{4} b_k(0) = \frac{\sigma_k}{2} b_k\left(-\frac{\sigma_k}{4}\right).$$

Assim,

$$\int_{-1}^{1} b_k(y)dy \geq \frac{\sigma_k}{2} \exp\left(-\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right). \tag{2.1.6}$$

Uma vez que $b_k(t)$ é analítica em $(-\sigma_k, 0)$, estendendo b_k a um aberto de $\mathbb{C}$ e aplicando a Fórmula de Cauchy para as derivadas $b_k^{(n)}(t)$, tomando como contorno uma circunferência C de raio $-ht$, onde $h > 0$, e centro $t \in [-\frac{\sigma_k}{2}, 0)$, obtemos

$$b_k^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{b_k(z)}{(z-t)^{n+1}} dz.$$

Se $z \in C$, então $z = t - hte^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $dz = -ihte^{i\theta} d\theta$. Logo,

$$b_k^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b_k(t - hte^{i\theta})}{(-hte^{i\theta})^n} d\theta.$$

Assim,

$$|b_k^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{h^n |t|^n} \int_0^{2\pi} |b_k(t - hte^{i\theta})| d\theta. \tag{2.1.7}$$

Usando a expressão que define b_k, após alguns cálculos, obtemos

$$|b_k(t - hte^{i\theta})| = \exp\left(\frac{-k\sigma_k^{4r}\cos(2\beta r + 2\gamma r)}{t^{2r}(1 - 2h\cos\theta + h^2)^r[(\sigma_k + t - ht\cos\theta)^2 + h^2t^2 \operatorname{sen}^2\theta]^r}\right),$$

onde

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{-h\operatorname{sen}\theta}{(1-2h\cos\theta+h^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{-ht\operatorname{sen}\theta}{[(\sigma_k+t-ht\cos\theta)^2+h^2t^2\operatorname{sen}^2\theta]^{\frac{1}{2}}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(\sigma_k+t-ht\cos\theta)^2+h^2t^2\operatorname{sen}^2\theta &= \sigma_k^2+2t\sigma_k+t^2-2\sigma_k ht\cos\theta-2t^2h\cos\theta+h^2t^2\\
&\leq \sigma_k^2+2\frac{\sigma_k^2}{2}+\frac{\sigma_k^2}{4}+2\frac{\sigma_k^2}{2}h+2\frac{\sigma_k^2}{4}h+\frac{\sigma_k^2}{4}h^2\\
&= \sigma_k^2\left(1+1+\frac{1}{4}+h+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right)\\
&\leq 4\sigma_k^2,
\end{aligned}$$

para h suficientemente pequeno. Além disso, também para h pequeno, temos

$$0<(1-h)^2 = 1+h^2-2h \leq 1-2h\cos\theta+h^2 \leq 1+2h+h^2 = (1+h^2) < 2.$$

Logo,

$$\frac{1}{(1-2h\cos\theta+h^2)^r[(\sigma_k+t-ht\cos\theta)^2+h^2t^2\operatorname{sen}^2\theta]^r} \geq \frac{1}{8^r\sigma_k^{2r}}.$$

Note ainda que, quando $h\to 0^+$, $\cos(2\beta r+2\gamma r)\to 1$ e assim,

$$\cos(2\beta r+2\gamma r)\geq \frac{1}{2},$$

para h pequeno.

Segue então que

$$|b_k(t-hte^{i\theta})| \leq \exp\left(\frac{-k\sigma_k^{4r}}{t^{2r}2.8^r\sigma_k^{2r}}\right) = \exp\left(\frac{-k\sigma_k^{2r}L}{t^{2r}}\right), \tag{2.1.8}$$

onde $L=\frac{1}{2.8^r}$.

Portanto, segue de (2.1.7) e (2.1.8) que

$$|b_k^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{h^n|t|^n}\exp\left(\frac{-Lk\sigma_k^{2r}}{t^{2r}}\right),$$

para $t\in[-\frac{\sigma_k}{2},0)$, com L dependendo apenas de r.

Se $n=0$ na última expressão, obtemos

$$|b_k(t)|\leq \exp\left(\frac{-Lk\sigma_k^{2r}}{t^{2r}}\right)\leq 1.$$

Assim, como

$$a_k^{'}(t) = \frac{b_k(t)}{\int_{-1}^{1}b_k(y)dy},$$

segue de (2.1.6) que, para $t \in [-\frac{\sigma_k}{2}, 0)$,

$$
\begin{aligned}
|a_k'(t)| &\leq \frac{2}{\sigma_k} \exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) \\
&= 2\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) Dk^{(s-1)} \\
&\leq 2\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) TDk^{(s-1)},
\end{aligned} \tag{2.1.9}
$$

para algum $T \geq 1$ a ser determinado.

Suponha agora que $n \geq 1$. Neste caso, a função

$$
f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t|^n} \exp\left(\frac{-Lk\sigma_k^{2r}}{t^{2r}}\right), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}
$$

atinge seu valor máximo nos pontos t tais que

$$
|t| = \left(\frac{L\sigma_k^{2r}k2r}{n}\right)^{\frac{1}{2r}}.
$$

Segue disto e do fato de que $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = 0$ que

$$
\max_{-\frac{\sigma_k}{2} \leq t \leq 0} \{f(t)\} \leq \frac{1}{\sigma_k^n}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2r}} \left(\frac{1}{2rL}\right)^{\frac{n}{2r}} e^{-\frac{n}{2r}}.
$$

Dessa forma, fazendo $T_1 = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2rL}\right)^{\frac{1}{2r}} e^{-\frac{1}{2r}}$, tomando-se $T = \max\{T_1, 1\}$ e lembrando que $n! \leq n^n$ e $\sigma_k = D^{-1}k^{-(s-1)}$, obtemos, para $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
|b_k^{(n)}(t)| &\leq \frac{n!}{h^n|t|^n} e^{-\frac{L\sigma_k^{2r}k}{t^{2r}}} \\
&\leq \frac{n!}{h^n}\frac{1}{\sigma_k^n}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{2r}}\left(\frac{1}{2rL}\right)^{\frac{n}{2r}} e^{-\frac{n}{2r}} \\
&= \frac{n!n^{\frac{n}{2r}}}{\sigma_k^n k^{\frac{n}{2r}}}\frac{1}{h^n}\left(\frac{1}{2rL}\right)^{\frac{n}{2r}} e^{-\frac{n}{2r}} \\
&= \frac{n!n^{\frac{n}{2r}}}{\sigma_k^n k^{\frac{n}{2r}}}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2rL}\right)^{\frac{1}{2r}} e^{-\frac{1}{2r}}\right)^n \\
&= T_1^n \frac{n!n^{\frac{n}{2r}}}{\sigma_k^n k^{\frac{n}{2r}}} \\
&\leq T_1^n \frac{n^n n^{\frac{n}{2r}}}{(D^{-1}k^{-(s-1)})^n k^{\frac{n}{2r}}} = \frac{T_1^n D^n n^n n^{\frac{n}{2r}} k^{n(s-1)}}{k^{\frac{n}{2r}}} \\
&\leq \frac{T^n D^n n^n n^{\frac{n}{2r}} k^{n(s-1)}}{k^{\frac{n}{2r}}},
\end{aligned} \tag{2.1.10}
$$

para todo $t \in [-\frac{\sigma_k}{2}, 0)$. Porém, devido à simetria de b_k no intervalo $(-\sigma_k, 0)$ e ao fato de que, fora desse intervalo, b_k se anula, concluimos que, de fato, a estimativa (2.1.10) é válida para todo $t \in [-1, 1]$.

Logo, da definição de $a_k(t)$ em (2.1.4) e das desigualdades (2.1.6) e (2.1.10), segue que, para cada $t \in [-1, 1]$ e para $n \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
|a_k^{(n)}(t)| &\leq \frac{\frac{2}{\sigma_k}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) T^{n-1} D^{n-1} (n-1)^{n-1} (n-1)^{\frac{n-1}{2r}} k^{(n-1)(s-1)}}{k^{\frac{n-1}{2r}}} \\
&\leq \frac{2\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) T^n D^n n^n n^{\frac{n-1}{2r}} k^{n(s-1)}}{k^{\frac{n-1}{2r}}},
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

visto que $\sigma_k = D^{-1}k^{-(s-1)}$, $T \geq 1$ e $(n-1)^{n-1} \leq n^n$. Ainda, tendo em vista (2.1.9), temos que, de fato, a estimativa (2.1.11) é válida para todo $n \geq 1$.

A derivada formal da série (2.1.5), de ordem $\alpha \in \mathbb{N}^m$ com relação a x e de ordem n com relação a t, coincide com a série cujo termo geral é

$$
w_k(x,t) = \frac{\partial_x^\alpha v_k(x)}{k!} \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a_k^{(n-i)}(t)(t^k)^{(i)}.
$$

Para o caso em que $n = 0$, fazendo $a = \frac{16^{2r}}{3^{2r}}$, temos de (2.1.6) que

$$
\begin{aligned}
|a_k(t)| &\leq \frac{2}{\sigma_k} e^{ak} \int_{-1}^{t} |b_k(y)| dy \\
&\leq \frac{2}{\sigma_k} e^{ak} \int_{-1}^{t} dy \\
&= \frac{2}{\sigma_k} e^{ak}(t+1) \leq \frac{4e^{ak}}{\sigma_k}.
\end{aligned}
$$

Assim, para $-\frac{\sigma_k}{2} \leq t \leq 0$, da definição de σ_k, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|v_k(x)|}{k!} |a_k(t)||t|^k &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1} |a_k(t)| \frac{\sigma_k^k}{2^k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1} \frac{4e^{ak}}{\sigma_k} \frac{\sigma_k^k}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1} \frac{2e^{ak}}{2^{k-1}} \sigma_k^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1} \frac{2e^{ak}}{2^{k-1}} \frac{1}{D^{k-1} k^{(k-1)(s-1)}} \\
&\leq 2e^a B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{k-1} \frac{e^{a(k-1)}}{D^{k-1}} \\
&= 2e^a B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{Be^a}{D} \right)^{k-1} \\
&\leq 2e^a B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \infty, \qquad (2.1.12)
\end{aligned}
$$

escolhendo $D \geq Be^a$.

Observe que $|(t^k)^{(i)}| \leq k^i \sigma_k^{k-i}$, para $t \in [-\sigma_k, \sigma_k]$. Assim, da desigualdade (2.1.11) temos, para $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
|w_k(x,t)| &\leq 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!} \exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^{n-i} D^{n-i} \frac{(n-i)^{n-i}(n-i)^{\frac{n-i-1}{2r}}}{k^{-(n-i)(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} k^i \sigma_k^{k-i} \\
&\leq 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!} \exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^{n} D^{n} D^{-k} \frac{(n-i)^{n-i+\frac{n-i-1}{2r}} k^i k^{-(k-i)(s-1)}}{k^{-(n-i)(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \\
&\leq 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!} \exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^{n} D^{n} D^{-k} \frac{n^{n-i} n^{\frac{n-i-1}{2r}} k^i k^{-k(s-1)}}{k^{-n(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \\
&= 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!} \exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right) D^{-k} k^{-k(s-1)} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^{n} D^{n} \frac{n^{n-i} n^{\frac{n-i-1}{2r}} k^i}{k^{-n(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \qquad (2.1.13)
\end{aligned}
$$

Suponha inicialmente $k \leq n$. Observe que, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$
i + n(s-1) - \frac{(n-i-1)}{2r} > i + n(s-1) - n(s-1) = i \geq 0,
$$

onde, para $i = n-1$ e $i = n$, a desigualdade é imediata e, para $i < n-1$, basta lembrar que $\frac{1}{2r} < s-1$. Assim,

$$
\left(\frac{k}{n}\right)^{i+n(s-1)-\frac{(n-i-1)}{2r}} \leq 1,
$$

donde segue que

$$
\frac{n^{n-i} n^{\frac{n-i-1}{2r}} k^i}{k^{-n(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \leq \frac{n^{n-i} n^{\frac{n-i-1}{2r}} n^i}{n^{-n(s-1)} n^{\frac{n-i-1}{2r}}}.
$$

Logo, para $k \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
|w_k(x,t)| &\leq 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} T^n D^n \frac{n^{n-i}n^{\frac{n-i-1}{2r}}n^i}{n^{-n(s-1)}n^{\frac{n-i-1}{2r}}} \\
&= 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} T^n D^n n^{ns} \\
&= 2^{n+1}\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}T^n D^n n^{ns}.
\end{aligned}$$

Seja então $K \subset V$ um compacto dado. Então, existe $B > 0$ tal que a desigualdade (2.1.2) se verifica, isto é,

$$|\partial_x^\alpha v_k(x)| \leq B^{|\alpha|+k+1}(\alpha!)^s(k!)^s, \quad \forall x \in K, k = 1, 2, \ldots.$$

Assim, para $x \in K$, $t \in [-1, 1]$ e $k \leq n$, do fato de $k! \leq k^k$ e $\frac{k^k}{k!} \leq e^k$, temos

$$\begin{aligned}
|w_k(x,t)| &\leq \frac{2^{n+1}B^{|\alpha|+k+1}(\alpha!)^s(k!)^s}{k!}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}T^n D^n n^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s 2^{n+1}\left(\frac{k^k}{k!}B^k\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}\right)T^n D^n n^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s 2^{n+1}\left(e^k B^k\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}\right)T^n D^n n^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s 2^{n-k+1}T^n D^n n^{ns},
\end{aligned}$$

para $D \geq 2eBe^a$. Dessa forma,

$$\sum_{k=1}^{n}|w_k(x,t)| \leq \sum_{k=1}^{n}B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s 2^{n-k+1}T^n D^n n^{ns} \leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s 2^{n+2}T^n D^n n^{ns}. \tag{2.1.14}$$

Agora, se $k > n$, então segue de (2.1.13) que

$$\begin{aligned}
|w_k(x,t)| &\leq 2\frac{|\partial_x^\alpha v_k(x)|}{k!}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} T^n D^n \frac{n^{n-i}n^{\frac{n-i-1}{2r}}k^i}{k^{-n(s-1)}k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \\
&\leq 2\frac{B^{|\alpha|+k+1}(\alpha!)^s(k!)^s}{k!}\exp\left(\frac{16^{2r}k}{3^{2r}}\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}T^n D^n\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\frac{n^{n-i}n^{\frac{n-i-1}{2r}}k^i}{k^{-n(s-1)}k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \\
&\leq 2^{n+1}\frac{B^{|\alpha|+k+1}(\alpha!)^s(k!)^s}{k!}\exp\left(\left(\frac{16^{2r}}{3^{2r}}+1\right)k\right)D^{-k}k^{-k(s-1)}T^n D^n k^{ns}.
\end{aligned}$$

Para justificar a última desigualdade, considere inicialmente $0 \leq i \leq n-1$. Daí,

$$\frac{n^{n-i} n^{\frac{n-i-1}{2r}} k^i}{k^{-n(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} \leq \frac{k^{n-i} k^{\frac{n-i-1}{2r}} k^i}{k^{-n(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} = k^{ns} \leq e^k k^{ns}.$$

Agora, para $i = n$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{n^{n-i} n^{\frac{n-i-1}{2r}} k^i}{k^{-n(s-1)} k^{\frac{n-i-1}{2r}}} &= \frac{n^{-\frac{1}{2r}} k^n}{k^{-n(s-1)} k^{-\frac{1}{2r}}} \\
&= \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2r}} k^{ns} \leq k^{\frac{1}{2r}} \leq k k^{ns} \leq e^k k^{ns},
\end{aligned}$$

donde segue a desigualdade.

Seja então $D \geq 2B \exp\left(\frac{16^{2r}}{3^{2r}} + 3\right)$. Daí,

$$\begin{aligned}
|w_k(x,t)| &\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s \frac{B^k k^{ks}}{k!} 2^{-k} B^{-k} e^{-2k} k^{-k(s-1)} 2^{n+1} T^n D^n k^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n \frac{2^{-k} e^{-2k} k^k k^{ns}}{k!} \\
&\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n 2^{-k} e^{-2k} e^k k^{ns} \\
&= B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n 2^{-k} e^{-k} k^{ns}.
\end{aligned}$$

Lembremos que, dados a, d reais positivos, $e^{-a} \leq a^{-d} d^d e^{-d}$. Assim,

$$e^{-k} \leq k^{-ns} (ns)^{ns} e^{-ns}$$

e, portanto, fazendo $M = \left(\frac{s}{e}\right)^s$, temos

$$\begin{aligned}
|w_k(x,t)| &\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n 2^{-k} (ns)^{ns} e^{-ns} \\
&= B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n 2^{-k} \left(\frac{s}{e}\right)^{ns} n^{ns} \\
&= B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n 2^{-k} M^n n^{ns}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} |w_k(x,t)| &\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n M^n n^{ns} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \\
&\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s 2^{n+1} T^n D^n M^n n^{ns}. \qquad (2.1.15)
\end{aligned}$$

Portanto, se $(x,t) \in K \times [-1,1]$, segue de (2.1.14) e (2.1.15) que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}|w_k(x,t)| &= \sum_{k=1}^{n}|w_k(x,t)| + \sum_{k=n+1}^{\infty}|w_k(x,t)| \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s 2^{n+2}T^nD^nn^{ns} + B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s2^{n+1}T^nD^nM^nn^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s2^{n+3}T^nD^nM^nn^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s(16TDM)^nn^{ns} \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s(16TDM)^ne^{ns}(n!)^s \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s(16TDMe^s)^n(n!)^s \\
&\leq A^{|\alpha|+n+1}(\alpha!)^s(n!)^s,
\end{aligned}
$$

onde $A = \max\{B, 16TDMe^s\}$ independe de α e n. Isso mostra que a série (2.1.5) converge em C^∞ e, além disso, se denotarmos

$$f(x,t) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{k!}a_k(t)t^k,$$

temos que $f \in G^s(V \times [-1,1])$ e, pela forma como as funções a_k foram definidas, é fácil ver que

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}f(x,0) = v_n(x), \quad \forall x \in V, \ n \in \mathbb{N},$$

conforme queríamos demonstrar. □

Demonstração do Lema 2.1.1:

Defina, para $x \in \Omega$ e $y \in [-1,1]^n$,

$$F(x,y) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\frac{v_\beta(x)}{\beta!}A_\beta(y)y^\beta, \tag{2.1.16}$$

onde $A_\beta(y) = a_{\beta_1}(y_1)\dots a_{\beta_n}(y_n)$ e a_{β_i} são as funções definidas no lema 2.1.2.

Considere $\{A_\alpha\}$ uma n-multi-sequência dada por $A_\alpha = a_{\alpha_1}\dots a_{\alpha_n}$, onde $\{a_k\}$ é uma sequência de reais positivos qualquer. Nessas condições, temos que

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}A_\alpha = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}a_{\alpha_1}\right)\left(\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}a_{\alpha_2}\right)\dots\left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_n}\right). \tag{2.1.17}$$

Para simplificar a notação, vamos justificar a afirmação acima para $n = 2$. Considere em $\mathbb{N}^2$ a σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e denotemos por μ e ν as medidas de contagem em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$, respectivamente. Sabemos que, dadas $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ e $g : \mathbb{N}^2 \to [0,\infty)$ funções mensuráveis,

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{N}^2} g d\nu = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} g(\alpha).$$

Afirmamos que $\nu = \mu \times \mu$. De fato, como μ é σ-finita, basta ver que as medidas coincidem nos retângulos $A \times B$, com $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Observe que

$$\nu(A \times B) = \mu(A)\mu(B) = \mu \times \mu(A \times B)$$

e assim, $\nu = \mu \times \mu$.

Seja agora $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $A_\alpha = a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}$ e denotemos $f(n) = a_n$ e $F(\alpha) = f(\alpha_1)f(\alpha_2)$. Assim, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} A_\alpha &= \int_{\mathbb{N}^2} F(\alpha) d(\mu \times \mu) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(\alpha_1) f(\alpha_2) d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) \\
&= \int_{\mathbb{N}} f(\alpha_1) d\mu(\alpha_1) \int_{\mathbb{N}} f(\alpha_2) d\mu(\alpha_2) \\
&= \left(\sum_{\alpha_1}^{\infty} f(\alpha_1) \right) \left(\sum_{\alpha_2}^{\infty} f(\alpha_2) \right) \\
&= \left(\sum_{\alpha_1}^{\infty} a_{\alpha_1} \right) \left(\sum_{\alpha_2}^{\infty} a_{\alpha_2} \right).
\end{aligned}$$

A derivada formal da série dada em (2.1.16), de ordem α com relação a x e de ordem γ com relação a y, é a série cujo termo geral é dado por

$$W_\beta(x, y) = \frac{\partial_x^\alpha v_\beta(x)}{\beta!} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} \partial_y^{\gamma - \gamma'} A_\beta(y) \partial_y^{\gamma'} (y^\beta).$$

Seja $K \subset \Omega$ um compacto dado. Tendo em vista a desigualdade (2.1.1) e supondo $B > 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|W_\beta(x, y)| &\leq \frac{B^{|\alpha|+|\beta|+1}}{\beta!} (\alpha!)^s (\beta!)^s \left| G_1(\gamma, \beta, y) \ldots G_n(\gamma, \beta, y) \right| \\
&\leq B^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{B^{\beta_j}}{\beta_j!} (\beta_j!)^s \left| G_j(\gamma, \beta, y) \right| \right),
\end{aligned}$$

onde

$$G_j(\gamma, \beta, y) = \sum_{\gamma_j' \leq \gamma_j} \begin{pmatrix} \gamma_j \\ \gamma_j' \end{pmatrix} \partial_{y_j}^{\gamma_j - \gamma_j'} a_{\beta_j}(y_j) \partial_{y_j}^{\gamma_j'}(y_j^{\beta_j}),$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Para estimar o termo acima, repetimos o que fizemos na prova do Lema 2.1.2. Assim, usando a igualdade (2.1.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta} |W_\beta(x,y)| &\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \sum_{\beta} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{B^{\beta_j}}{\beta_j!} (\beta_j!)^s \, |G_j(\gamma, \beta, y)| \right) \\
&= B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \prod_{j=1}^{n} \sum_{\beta_j=0}^{\infty} \frac{B^{\beta_j}}{\beta_j!} (\beta_j!)^s \, |G_j(\gamma, \beta, y)| \\
&\leq B^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \prod_{j=1}^{n} A_j^{\gamma_j} (\gamma_j!)^s \\
&\leq A^{|\alpha|+|\gamma|+1}(\alpha!)^s (\gamma!)^s,
\end{aligned}$$

para $(x, y) \in K \times [-1, 1]^n$.

Da definição de $F(x, y)$, é fácil ver que

$$\partial_y^\gamma F(x, 0) = v_\gamma(x), \quad \forall x \in V, \ \gamma \in \mathbb{N}^m.$$

A demonstração do Lema 2.1.1 está completa. $\square$

2.2 Existência de soluções s-aproximadas para estruturas involutivas

Em [BP], encontramos a demonstração da existência de soluções s-aproximadas para campos vetoriais complexos de classe G^s. O conteúdo desta seção generaliza o que está feito em [BP], no sentido de dar uma demonstração da existência de tais soluções aproximadas para G^s-estruturas involutivas, o que, localmente, equivale a encontrar soluções s-aproximadas para sistemas lineares formados por campos vetoriais de classe G^s, que comutam.

Seja $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, vizinhança da origem. Considere os seguintes campos vetoriais complexos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.2.18}$$

com $a_{jk} \in G^s(U \times V)$, e suponha que

$$[L_i, L_j] = 0, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.2.19}$$

Definição 2.2.1 *Dizemos que $u \in C^1(U \times V)$ é uma solução s-aproximada do sistema $L_j Z = 0$, $j = 1, \ldots, n$, se existe uma constante positiva C tal que, para todo $\nu \in \mathbb{N}$,*

$$|L_j u(x,t)| \leq C^{\nu+1}(\nu!)^{s-1}|t|^\nu, \qquad (x,t) \in U \times V, j = 1, \ldots, n.$$

Podemos definir soluções s-aproximadas de estruturas involutivas de classe G^s, definidas sobre variedades, de modo que, localmente, tal definição coincida com a definição acima (ver Apêndice).

Em [AH], para uma aplicação diferente do principal objetivo deste trabalho, foi introduzida uma noção de solução aproximada que no caso de apenas um campo L de classe G^s, pode ser localmente caracterizada pelo seguinte: Para todo $\varepsilon_0 > 0$, existe $C > 0$ tal que, para todo $\nu \in \mathbb{N}$,

$$|LZ(x,t)| \leq C^{\nu+1}(\nu!)^{s+\varepsilon_0}|t|^\nu, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega.$$

A partir de um dado incial $f(x) \in G^s(U)$, é construída em [AH] uma solução aproximada de $LZ = 0$, à qual pertence a $G^{s'}$, $s' > s+1$ arbitrário, e tal que, em $t = 0$, coincide com f. No nosso trabalho, tal solução é obtida no mesmo espaço G^s, o que nos permite mostrar nosso principal resultado, sem perda de regularidade.

Assim, se $f \in G^s(U)$, vamos construir uma solução s-aproximada $u \in G^s(U \times V)$ para o sistema $L_j u = 0$, satisfazendo $u(x,0) = f(x)$, para todo $x \in U$. Para isso, faremos uso do Lema 2.1.1, construindo uma multisequência $\{v_\beta\}$, $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, que satisfaz a condição (2.1.1).

Seja $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$. Se $\beta = 0$, definimos $u_0(x) = f(x)$. Para $\beta \neq 0$, suponha $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ e tome j o menor inteiro tal que $1 \leq j \leq n$ e $\beta_j = \max\limits_{1 \leq \nu \leq n} \{\beta_\nu\}$. Definimos então recursivamente

$$u_\beta(x) = -\frac{1}{\beta_j} \sum_{\gamma \leq \beta - e_j} \frac{1}{(\beta - e_j - \gamma)!} \sum_{k=1}^{m} \partial_t^{\beta - e_j - \gamma} a_{jk}(x,0) \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_k}(x). \tag{2.2.20}$$

Para a sequência $\{u_\beta\}$ definida acima, vale o seguinte

Lema 2.2.1 *Dado um compacto $K \subset U$, existem constantes $M, N > 1$ tais que*

$$|\partial_x^\alpha u_\beta(x)| \leq \frac{M^{|\beta|}}{|\beta|!} N^{|\alpha|+1}(|\alpha| + |\beta|)!^s, \quad \forall x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}^m_+, \beta \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{2.2.21}$$

Demonstração:

Uma vez que $f \in G^s(U)$ e $a_{jk} \in G^s(U \times V)$, existe $A > 1$ tal que, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in K$, $j = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., m$, temos

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq A^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \quad \text{and} \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^\gamma a_{jk}(x,0)| \leq A^{|\alpha|+|\gamma|+1}(\alpha!)^s(\gamma!)^s. \tag{2.2.22}$$

Vamos provar (2.2.21) por indução sobre $|\beta|$. Tome $M = AL$ and $N = 2A$, onde L é uma constante a ser escolhida. Segue de (2.2.22) que, para $x \in K$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$,

$$|\partial_x^\alpha u_0(x)| = |\partial_x^\alpha f(x)| \leq A^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \leq \frac{M^0}{0!} N^{|\alpha|+1}(|\alpha| + 0)!^s$$

e assim, (2.2.21) vale para $|\beta| = 0$.

Assumamos então que (2.2.21) é satisfeito para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $0 \leq |\gamma| < |\beta|$ e provemos que o mesmo vale para β.

Temos

$$|\partial_x^\alpha u_\beta(x)| \leq \frac{1}{\beta_j} \sum_{\gamma \leq \beta - e_j} \frac{1}{(\beta - e_j - \gamma)!} \sum_{k=1}^m \sum_{\delta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} |\partial_x^{\delta + e_k} u_\gamma(x)||\partial_x^{\alpha-\delta} \partial_t^{\beta - e_j - \gamma} a_{jk}(x,0)|. \tag{2.2.23}$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$|\partial_x^{\delta+e_k} u_\gamma(x)| \leq \frac{M^{|\gamma|}}{|\gamma|!} N^{|\delta|+2}(|\delta| + |\gamma| + 1)!^s \tag{2.2.24}$$

e de (2.2.22), temos

$$|\partial_x^{\alpha-\delta} \partial_t^{\beta-e_j-\gamma} a_{jk}(x,0)| \leq A^{|\alpha-\delta|+|\beta-e_j-\gamma|+1}(\alpha - \delta)!^s(\beta - e_j - \gamma)!^s. \tag{2.2.25}$$

Além disso, sabemos que, dados n_1, n_2, p_1, p_2 inteiros não negativos tais que $p_1 \leq n_1$ e $p_2 \leq n_2$,

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} n_1 + n_2 \\ p_1 + p_2 \end{pmatrix}$$

e então, para quaisquer multiíndices α e δ em $\mathbb{Z}_+^m$, com $\delta \leq \alpha$, temos que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} |\alpha| \\ |\delta| \end{pmatrix}.$$

Segue então da desigualdade $p!q! \leq (p+q)!$ que

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} \frac{(|\delta|+|\gamma|+1)!^s(\alpha-\delta)!^s(\beta-e_j-\gamma)!^s}{|\gamma|!(\beta-e_j-\gamma)!} \\
&\leq \frac{|\alpha|!(|\delta|+|\gamma|+1)!^s(|\alpha|-|\delta|)!^s(|\beta|-1-|\gamma|)!^{s-1}}{(|\alpha|-|\delta|)!|\delta|!|\gamma|!} \\
&\leq \frac{|\alpha|!(|\delta|+|\gamma|+1)!}{|\delta|!|\gamma|!}(|\alpha|+|\beta|)!^{s-1}. \qquad (2.2.26)
\end{aligned}
$$

Afirmamos agora que

$$
\frac{|\alpha|!(|\delta|+|\gamma|+1)!}{|\delta|!|\gamma|!} \leq \frac{(|\alpha|+|\beta|)!}{(|\beta|-1)!}. \qquad (2.2.27)
$$

De fato, se $|\gamma| = |\beta|-1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|\alpha|!(|\delta|+|\gamma|+1)!(|\beta|-1)!}{|\delta|!|\gamma|!(|\alpha|+|\beta|)!} &= \frac{|\alpha|!(|\delta|+|\beta|)!}{|\delta|!(|\alpha|+|\beta|)!} \\
&= \frac{|\alpha|!(|\delta|+|\beta|)(|\delta|+|\beta|-1)\ldots(|\delta|+1)|\delta|!}{|\delta|!(|\alpha|+|\beta|)(|\alpha|+|\beta|-1)\ldots(|\alpha|+1)|\alpha|!} \\
&= \frac{(|\delta|+|\beta|)(|\delta|+|\beta|-1)\ldots(|\delta|+1)}{(|\alpha|+|\beta|)(|\alpha|+|\beta|-1)\ldots(|\alpha|+1)} \leq 1,
\end{aligned}
$$

visto que $\delta \leq \alpha$.

Agora, se $0 \leq |\gamma| < |\beta|-1$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{|\alpha|!(|\delta|+|\gamma|+1)!(|\beta|-1)!}{|\delta|!|\gamma|!(|\alpha|+|\beta|)!} &= \frac{(|\delta|+|\gamma|+1)\ldots(|\delta|+1)(|\beta|-1)\ldots(|\gamma|+1)}{(|\alpha|+|\beta|)\ldots(|\alpha|+1)} \\
&= \frac{(|\delta|+|\gamma|+1)\ldots(|\delta|+1)(|\beta|-1)\ldots(|\gamma|+1)}{(|\alpha|+|\beta|)\ldots(|\alpha|+|\gamma|+2)(|\alpha|+|\gamma|+1)\ldots(|\alpha|+1)} \\
&= \frac{(|\delta|+|\gamma|+1)}{(|\alpha|+|\gamma|+1)}\ldots\frac{(|\delta|+1)}{(|\alpha|+1)}\frac{(|\beta|-1)}{(|\alpha|+|\beta|)}\ldots\frac{(|\gamma|+1)}{(|\alpha|+|\gamma|+2)} \\
&\leq 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (2.2.26) e (2.2.27), segue que

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} \frac{(|\delta|+|\gamma|+1)!^s(\alpha-\delta)!^s(\beta-e_j-\gamma)!^s}{|\gamma|!(\beta-e_j-\gamma)!} \leq \frac{(|\alpha|+|\beta|)!^s}{(|\beta|-1)!}. \qquad (2.2.28)
$$

De $(2.2.23), (2.2.24), (2.2.25)$ e $(2.2.28)$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha u_\beta(x)| &\leq \frac{1}{\beta_j}\sum_{\gamma\leq\beta-e_j}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\delta\leq\alpha} M^{|\gamma|}N^{|\delta|+2}A^{|\alpha|-|\delta|+|\beta|-|\gamma|}\frac{(|\alpha|+|\beta|)!^s}{(|\beta|-1)!}\\
&\leq \frac{nm}{|\beta|!}M^{|\beta|}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s\sum_{\gamma\leq\beta-e_j}\sum_{\delta\leq\alpha}M^{-(|\beta|-|\gamma|)}N^{|\delta|-|\alpha|+1}A^{|\alpha|-|\delta|+|\beta|-|\gamma|}\\
&= \frac{nm}{|\beta|!}M^{|\beta|}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s\sum_{\gamma\leq\beta-e_j}M^{-|\beta-\gamma|}A^{|\beta-\gamma|}\sum_{\delta\leq\alpha}N^{|\delta|-|\alpha|+1}A^{|\alpha|-|\delta|}\\
&= \frac{nm}{|\beta|!}M^{|\beta|}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s\sum_{\gamma\leq\beta-e_j}\left(\frac{1}{L}\right)^{|\beta-\gamma|}\sum_{\delta\leq\alpha}A2^{|\delta|-|\alpha|+1}\\
&= \frac{nm}{|\beta|!}M^{|\beta|}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s\frac{2A}{L}\sum_{\gamma\leq\beta-e_j}\left(\frac{1}{L}\right)^{|\beta-\gamma|-1}\sum_{\delta\leq\alpha}2^{-|\alpha-\delta|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{nm}{|\beta|!}M^{|\beta|}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s\frac{2A}{L}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\right)^{\nu}\right)^n\left(\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i}\right)^m\\
&= \frac{nm}{|\beta|!}M^{|\beta|}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s\frac{2^{m+1}A}{L}\left(\frac{L}{L-1}\right)^n\\
&\leq \frac{M^{|\beta|}}{|\beta|!}N^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)!^s,
\end{aligned}$$

para $L>1$ suficientemente grande. A prova do Lema 2.2.1 está completa. □

Sejam agora $U\subset\mathbb{R}^m$ aberto, $V\subset\mathbb{R}^n$ uma bola aberta centrada na origem, $\nu\geq 1$ um inteiro fixo e $g(x,t)$ uma função de classe G^s em $U\times V$. Suponha que $\partial_t^\beta g(x,0)=0$, para todo $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, com $|\beta|=0,1,\ldots,\nu-1$.

Para x fixado, denotemos $g_x(t)\doteq g(x,t)$. Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange (Teorema 1.1.1), temos que

$$g(x,t)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{g_x^{(k)}(0)\cdot t^{(k)}}{k!}+\frac{g_x^{(\nu)}(\bar{t})\cdot t^{(\nu)}}{\nu!},$$

para algum $\bar{t}$ no segmento de reta que une a origem ao ponto $t=(t_1,\ldots,t_n)$.

Uma vez que, para qualquer $t_0\in V$,

$$g_x^{(k)}(t_0)\cdot t^{(k)}=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k g_x}{\partial t_{i_1}\cdots\partial t_{i_k}}(t_0)t_{i_1}\ldots t_{i_k},$$

temos que $g_x^{(k)}(0) \cdot t^{(k)} = 0$, para $0 \leq k \leq \nu - 1$ e, sendo g de classe G^s, diminuindo U e V se necessário, existe uma constante $A > 0$, independente de ν, tal que

$$\left| \frac{\partial^\nu g_x}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_\nu}}(\bar{t}) \right| \leq A^{\nu+1}(\nu!)^s, \quad \forall (x,t) \in U \times V.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |g(x,t)| &\leq \frac{1}{\nu!} \sum_{i_1,\ldots,i_\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial^\nu g_x}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_\nu}}(\bar{t}) \right| |t_{i_1}| \ldots |t_{i_\nu}| \\ &\leq \frac{1}{\nu!} \sum_{i_1,\ldots,i_\nu=1}^{n} A^{\nu+1}(\nu!)^s |t|^\nu \\ &= A^{\nu+1}(\nu!)^{s-1}|t|^\nu n^\nu \\ &\leq C^{\nu+1}(\nu!)^{s-1}|t|^\nu, \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

onde $C = nA$.

Ou seja, se queremos que (2.2.29) seja válida para todo $\nu \in \mathbb{N}$, sendo g de classe G^s, basta exigir que $\partial_t^\beta g(x,0) = 0$, para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Usaremos este fato na demonstração do próximo resultado.

Lema 2.2.2 *Sejam L_j, $j = 1, ..., n$, os campos vetoriais dados em* (2.2.18)*, definidos em vizinhança $U \times V$ da origem em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e satisfazendo a hipótese* (2.2.19)*. Se $f \in G^s(U)$, então, diminuindo V, se necessário, existe uma solução s-aproximada $u \in G^s(U \times V)$ do sistema $L_j Z = 0$, $j = 1, ..., n$, tal que $u(x,0) = f(x)$, para todo $x \in U$.*

Demonstração:

Seja $\{u_\beta(x)\}$ a multisequência definida em (2.2.20). Se definirmos $v_\beta(x) = \beta! u_\beta(x)$, então segue do Lema 2.2.1 que a multi-sequência $\{v_\beta(x)\}$ satisfaz a condição (2.1.1). Assim, pelo lema 2.1.1, existe $u \in G^s(U \times V)$, diminuindo V se necessário, tal que $\partial_t^\beta u(x,0) = v_\beta(x)$.

Portanto, existe $u \in G^s(U \times V)$ tal que

$$u_\beta(x) = \frac{1}{\beta!}\partial_t^\beta u(x,0), \quad \forall x \in U, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{2.2.30}$$

Em particular, temos que $u(x,0) = f(x)$, para todo $x \in U$. Precisamos mostrar agora que u é uma solução s-aproximada do sistema $L_i Z = 0$. Para tanto, conforme observado acima, é suficiente mostrar que $\partial_t^\beta(L_i u)(x,0) = 0$, para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ e para todo $i = 1, \ldots, n$.

Fixemos $i = 1, ..., n$. Vamos provar que $\partial_t^\beta(L_i u)(x,0) = 0$ por indução sobre $|\beta|$. Para $\beta = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
L_i u(x,0) &= \partial_t^{e_i} u(x,0) + \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell}(x,0)\frac{\partial}{\partial x_\ell}u(x,0) \\
&= u_{e_i}(x) + \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell}(x,0)\frac{\partial}{\partial x_\ell}u_0(x) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.2.31}
$$

pela definição de $u_{e_i}(x)$, conforme dada em (2.2.20).

Seja $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \neq 0$ e suponha que $\partial_t^\gamma(L_i u)(x,0) = 0$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, com $0 \leq |\gamma| < |\beta|$. Seja $1 \leq j \leq n$ o inteiro que aparece na definição de $u_\beta(x)$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\partial_t^\beta L_i u &= \partial_t^{\beta-e_j}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}L_i u\right) \\
&= \partial_t^{\beta-e_j}\left(L_j(L_i u) - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}L_i u\right) \\
&= \partial_t^{\beta-e_j}(L_j(L_i u)) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma\leq\beta-e_j}\begin{pmatrix}\beta-e_j\\ \gamma\end{pmatrix}\partial_t^{\beta-e_j-\gamma}a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\partial_t^\gamma L_i u.
\end{aligned}
$$

Assim, usando a hipótese de indução, obtemos

$$
\partial_t^\beta(L_i u)(x,0) = \partial_t^{\beta-e_j}L_j(L_i u)(x,0). \tag{2.2.32}
$$

De modo análogo, temos

$$
\partial_t^{\beta-e_j+e_i}(L_j u)(x,0) = \partial_t^{\beta-e_j}L_i(L_j u)(x,0). \tag{2.2.33}
$$

Segue de (2.2.32), (2.2.33) e da condição (2.2.19) que

$$
\partial_t^\beta(L_i u)(x,0) = \partial_t^{\beta-e_j+e_i}(L_j u)(x,0). \tag{2.2.34}
$$

Considere $\beta' = \beta + e_i$. Temos as seguintes possibilidades:

(1) $\beta_i + 1 < \beta_j$ ou $\beta_i + 1 = \beta_j$ e $j \leq i$.

(2) $\beta_i + 1 = \beta_j$ e $j > i$ ou $\beta_i + 1 > \beta_j$.

Suponhamos que vale (1). Observe que, neste caso, $i \neq j$, sendo que a possibilidade $i = j$ está contemplada no caso (2). Temos então que

$$
\begin{aligned}
u_{\beta'}(x) &= -\frac{1}{\beta_j}\sum_{\gamma\le\beta'-e_j}\frac{1}{(\beta'-e_j-\gamma)!}\sum_{k=1}^{m}\partial_t^{\beta'-e_j-\gamma}a_{jk}(x,0)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_k}(x)\\
&= -\frac{1}{\beta_j}\sum_{\gamma\le\beta-e_j+e_i}\frac{1}{(\beta-e_j+e_i-\gamma)!}\sum_{k=1}^{m}\partial_t^{\beta-e_j+e_i-\gamma}a_{jk}(x,0)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_k}(x).
\end{aligned}
$$

Observemos ainda que, para $i\neq j$,

$$
(\beta-e_j+e_i)! = \frac{(\beta+e_i)!}{\beta_j}.
$$

Utilizando as fórmulas acima, temos

$$
\begin{aligned}
\partial_t^{\beta-e_j+e_i}(L_ju)(x,0) &= \partial_t^{\beta-e_j+e_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}+\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\Bigg|_{t=0}\\
&= \partial_t^{\beta+e_i}u(x,0)\\
&+ \sum_{\gamma\le\beta-e_j+e_i}\frac{(\beta-e_j+e_i)!}{(\beta-e_j+e_i-\gamma)!\gamma!}\sum_{k=1}^{m}\partial_t^{\beta-e_j+e_i-\gamma}a_{jk}(x,0)\frac{\partial}{\partial x_k}\partial_t^{\gamma}u(x,0)\\
&= (\beta+e_i)!u_{\beta+e_i}(x)\\
&+ \sum_{\gamma\le\beta-e_j+e_i}\frac{(\beta-e_j+e_i)!}{(\beta-e_j+e_i-\gamma)!}\sum_{k=1}^{m}\partial_t^{\beta-e_j+e_i-\gamma}a_{jk}(x,0)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_k}(x)\\
&= (\beta+e_i)!u_{\beta+e_i}(x)\\
&+ \frac{(\beta+e_i)!}{\beta_j}\sum_{\gamma\le\beta-e_j+e_i}\frac{1}{(\beta-e_j+e_i-\gamma)!}\sum_{k=1}^{m}\partial_t^{\beta-e_j+e_i-\gamma}a_{jk}(x,0)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_k}(x)\\
&= 0. \qquad (2.2.35)
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.2.34) concluímos que $\partial_t^{\beta}(L_iu)(x,0)=0$.

Se vale o caso (2), então

$$
\begin{aligned}
u_{\beta'}(x) &= -\frac{1}{\beta_i+1}\sum_{\gamma\le\beta'-e_i}\frac{1}{(\beta'-e_i-\gamma)!}\sum_{\ell=1}^{m}\partial_t^{\beta'-e_i-\gamma}a_{i\ell}(x,0)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\ell}(x)\\
&= -\frac{1}{\beta_i+1}\sum_{\gamma\le\beta}\frac{1}{(\beta-\gamma)!}\sum_{\ell=1}^{m}\partial_t^{\beta-\gamma}a_{i\ell}(x,0)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\ell}(x)
\end{aligned}
$$

e assim, como feito acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t^\beta (L_i u)(x,0) &= (\beta+e_i)!u_{\beta+e_i}(x) + \\
&\quad + \sum_{\gamma\le\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \sum_{\ell=1}^{m} \partial_t^{\beta-\gamma} a_{i\ell}(x,0) \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\ell}(x) \\
&= 0. \qquad (2.2.36)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\partial_t^\beta (L_i u)(x,0) = 0$, para cada $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ e $i = 1, ..., n$, completando assim a demonstração do Lema. □

Adaptando a idéia utilizada na demonstração do lema 2.2.2, podemos provar o próximo resultado.

Proposição 2.2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ abertos tais que $(0,0) \in \Omega$. Considere os campos vetoriais complexos*

$$
L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(x,t,\zeta_0,\zeta) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=0}^{m} b_{kj}(x,t,\zeta_0,\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_k}, \quad j = 1, \dots, n,
$$

onde $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ e os coeficientes a_{kj} e b_{kj} pertencem à classe $G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$. Suponha que $[L_i, L_j] = 0$, para $1 \le i, j \le n$. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^m$ tal que $U \times \{0\} \subset \Omega$ e seja $f(x,\zeta_0,\zeta) \in G^s(U, H(\mathcal{N}))$. Então, diminuindo Ω se necessário, existe $u(x,t,\zeta_0,\zeta) \in G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$ tal que u é uma solução s-aproximada de $L_j w = 0$, $j = 1, \dots, n$ e $u(x,0,\zeta_0,\zeta) = f(x,\zeta_0,\zeta)$.

A proposição acima é uma importante ferramenta e será utilizada no próximo capítulo.

Capítulo 3

Micro-regularidade Gevrey de soluções de sistemas involutivos de edp's não lineares de primeira ordem

Neste capítulo, provaremos os principais resultados deste trabalho.

3.1 Sistemas involutivos Gevrey de edp's não lineares de primeira ordem

Dada $(M, \mathcal{V})$ uma G^s-estrutura involutiva, procurar soluções u para a G^s-estrutura $\mathcal{V}$ equivale a procurar, localmente, soluções de um sistema de equações diferenciais parciais lineares, com coeficientes de classe G^s. Vamos, neste capítulo, dar uma definição global de sistemas involutivos de edp's não lineares de primeira ordem que generaliza o caso linear dado pelas G^s-estruturas formalmente integráveis. As definições e resultados desta seção são análogos ao caso analítico, conforme pode ser encontrado, por exemplo, em [B1].

Seja $s > 1$ um número real e considere M uma variedade analítica real de dimensão N.

Definição 3.1.1 *O um-jato fibrado complexo de M, denotado por $\mathbb{C}J^1(M)$, é definido como sendo o conjunto de todas as triplas da forma (x, a, ω), onde $x \in M$, $a \in \mathbb{C}$ e $\omega \in \mathbb{C}T_x^*M$.*

Observe que $\mathbb{C}J^1(M)$ pode ser identificado com $\mathbb{C} \times \mathbb{C}T^*M$. Considere (U, x) uma carta local de M, com $x = (x_1, \ldots, x_N)$, e sejam $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ as correspondentes coordenadas complexas em $\mathbb{C}T_x^*M$, para $x \in U$, ou seja, se $\omega \in \mathbb{C}T_x^*M$, então

$$\zeta_j(\omega) = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x\right), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Observe ainda que $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}T^*M|_U) \cong U \times \mathbb{C}^{N+1}$, onde associamos a cada $(\zeta_0, \omega) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}T^*M|_U)$ o elemento $(x, \zeta_0, \zeta(\omega)) \in U \times \mathbb{C}^{N+1}$, se $\omega \in \mathbb{C}T_x^*M$, onde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$.

Denotamos então por $\mathcal{O} = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}T^*M|_U) \cong U \times \mathbb{C}^{N+1}$ e o denominamos o subconjunto aberto do um-jato fibrado que mora em U.

Sejam $F_1(x, \zeta_0, \zeta), \ldots, F_n(x, \zeta_0, \zeta)$ funções definidas em $\mathcal{O}$, que são G^s em $x \in U$ e holomorfas em (ζ_0, ζ). Estamos interessados em estudar sistemas de edp's da forma

$$F_j(x, u, u_x) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{3.1.1}$$

De modo a obter uma independência linear para o sistema acima, assumimos que

$$d_\zeta F_1 \wedge \cdots \wedge d_\zeta F_n \neq 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{O}. \tag{3.1.2}$$

Note que a condição (3.1.2) implica que $n \leq N$. Ainda, se existe $p \in \mathcal{O}$ tal que $F_j(p) = 0, j = 1, \ldots, n$, então o conjunto

$$\Sigma = \{(x, \zeta_0, \zeta) \in \mathcal{O} : F_j(x, \zeta_0, \zeta) = 0, 1 \leq j \leq n\} \tag{3.1.3}$$

é uma subvariedade de $\mathcal{O}$ cuja intersecção com cada fibra $\{x\} \times \mathbb{C}^{N+1} \cong \mathbb{C}^{N+1}$ é uma subvariedade holomorfa de dimensão complexa $N + 1 - n$.

Vamos agora caracterizar a involutividade do sistema (3.1.1). Se $F(x, \zeta_0, \zeta)$ é uma função suave em $\mathcal{O}$, de classe G^s em x e holomorfa em (ζ_0, ζ), definimos o Hamiltoniano holomorfo de F por

$$\begin{aligned} H_F &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \zeta_i \frac{\partial F}{\partial \zeta_0}\right)\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} - F\right)\frac{\partial}{\partial \zeta_0} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_0}. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Se $G(x, \zeta_0, \zeta)$ é outra função tal como F, definimos o colchete de Poisson holomorfo $\{F, G\}$ por

$$\{F, G\} = H_F G = -H_G F. \tag{3.1.5}$$

Observe que, para a classe de funções que estamos considerando, a definição do colchete de Poisson holomorfo é independente da escolha das coordenadas locais $x_1, \ldots, x_N$, uma vez que o mesmo vale para cada um dos três campos vetoriais

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}, \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \text{ e } \frac{\partial}{\partial \zeta_0}.$$

Expressamos então a condição de involutividade do sistema (3.1.1) por

$$\{F_j, F_k\} = 0 \text{ em } \Sigma, \text{ para todo } j, k = 1, \ldots, n. \tag{3.1.6}$$

Proposição 3.1.1 *A condição* (3.1.6) *é uma condição necessária para a integrabilidade formal do sistema* (3.1.1)*, ou seja, se supusermos que, para cada* $(x_0, \zeta_0^{'}, \zeta^{'}) \in \Sigma$*, existe uma solução* u *de classe* C^2 *das equações* $F_j(x, u, u_x) = 0$*,* $j = 1, \ldots, n$*, perto de* x_0*, satisfazendo* $u(x_0) = \zeta_0^{'}$ *e* $u_x(x_0) = \zeta^{'}$*, então necessariamente a condição* (3.1.6) *se verifica.*

Demonstração:

Suponha que para cada $(x_0, \zeta_0^{'}, \zeta^{'}) \in \Sigma$, existe uma solução u de classe C^2 das equações $F_j(x, u, u_x) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, perto de x_0, satisfazendo

$$u(x_0) = \zeta_0^{'} \text{ e } u_x(x_0) = \zeta^{'}.$$

Sejam $F = F_\nu$ e $G = G_k$, para $\nu, k = 1, \ldots, n$. Derivando as equações $F(x, u, u_x) = 0$ e $G(x, u, u_x) = 0$, com relação a x_i, $i = 1, \ldots, N$, uma vez que F e G são holomorfas em (ζ_0, ζ), obtemos

$$F_{x_i} + F_{\zeta_0} u_{x_i} + \sum_{j=1}^{N} F_{\zeta_j} u_{x_j x_i} = 0, \tag{3.1.7}$$

nos pontos $(x, u(x), u_x(x))$ e, analogamente,

$$G_{x_i} + G_{\zeta_0} u_{x_i} + \sum_{j=1}^{N} G_{\zeta_j} u_{x_j x_i} = 0. \tag{3.1.8}$$

Multiplicando (3.1.7) por $-G_{\zeta_i}$, (3.1.8) por F_{ζ_i} e somando em i, obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} F_{\zeta_i}(G_{x_i} + G_{\zeta_0} u_{x_i}) - \sum_{i=1}^{N} G_{\zeta_i}(F_{x_i} + F_{\zeta_0} u_{x_i})$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (G_{\zeta_i} F_{\zeta_j} - G_{\zeta_j} F_{\zeta_i}) u_{x_j x_i} = 0.$$

Como $(x, u(x), u_x(x)) \in \Sigma$, a última equação implica que, em tais pontos,

$$\sum_{i=1}^{N} F_{\zeta_i}(G_{x_i} + G_{\zeta_0} u_{x_i}) - \sum_{i=1}^{N} G_{\zeta_i}(F_{x_i} + F_{\zeta_0} u_{x_i}) + F_{\zeta_0} G - F G_{\zeta_0} = 0.$$

Portanto,

$$H_F G = \{F, G\} = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma$$

e a demonstração está completa. □

A definição global de sistemas involutivos Gevrey pode então ser dada como segue:

Definição 3.1.2 *Um sistema involutivo de classe G^s de equações diferenciais parciais de primeira ordem de posto n sobre M é uma G^s-subvariedade Σ de $\mathbb{C}J^1(M)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) a projeção $\pi : \mathbb{C}J^1(M) \to M$ satisfaz $\pi(\Sigma) = M$;

(ii) cada ponto de Σ possui uma vizinhança $\mathcal{O}$ sobre a qual existem n funções C^∞ $F_1(x, \zeta_0, \zeta), \ldots, F_n(x, \zeta_0, \zeta)$, de classe G^s em x e holomorfas em (ζ_0, ζ), tais que $\Sigma \cap \mathcal{O}$ é o conjunto (3.1.3) *e valem as condições* (3.1.2) *e* (3.1.6)*.*

Definição 3.1.3 *Seja Σ um sistema involutivo de classe G^s de equações diferenciais parciais de primeira ordem. Uma função u de classe C^1 definida sobre um aberto $\Omega \subset M$ é dita uma solução de Σ se $(x, u(x), u_x(x)) \in \Sigma$, para todo $x \in \Omega$.*

Exemplo 3.1.1 *Toda G^s-estrutura involutiva define um sistema involutivo de equações diferenciais parciais de primeira ordem.*

De fato, seja $(M, \mathcal{V})$ uma G^s-estrutura involutiva. Seja Σ a imagem inversa de $\mathcal{V}^\perp$ sob a projeção

$$\mathbb{C}J^1(M) \to \mathbb{C}T^*M.$$

Seja ainda $\{L_1, \ldots, L_n\}$ um conjunto de geradores de $\mathcal{V}$ sobre um aberto U tal que $[L_i, L_j] = 0$, para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$.

Suponha que (U, x) é uma carta local, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, e

$$L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Definimos então as funções

$$F_j(x, \zeta) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x) \zeta_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Sobre U, temos a seguinte caracterização: Se $\omega \in \mathbb{C}T_x^*M$, então $\omega \in \mathcal{V}^\perp$ se, e somente se, $\omega(L_{jx}) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Assim, se $\omega = \sum_{k=1}^N \zeta_k (dx_k)_x$ e $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$, então

$$\Sigma\big|_U = \{(x, \zeta_0, \zeta) \in \mathbb{C}J^1(M)\big|_U \cong U \times \mathbb{C}^{N+1} : \; F_j(x, \zeta) = 0, \; j = 1, \ldots, n\}.$$

É fácil ver que $d_\zeta F_1 \wedge \cdots \wedge d_\zeta F_n \neq 0$ em U, uma vez que $L_1, \ldots, L_n$ são linearmente independentes. Vamos mostrar que $\{F_j, F_k\} = 0$ em $\Sigma|_U$, para todo $j, k = 1, \ldots, n$.

Considerando $x \in \mathbb{R}^N$, por meio do sistema de coordenadas, definimos

$$g(x, \zeta) = x \cdot \zeta = x_1\zeta_1 + \cdots + x_N\zeta_N.$$

Note que $L_k g = F_k$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Assim, se $F = F_j$ e $G = F_k$,

$$\begin{aligned}
\{F, G\} &= H_F G \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} G - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \zeta_i \frac{\partial F}{\partial \zeta_0} \right) \frac{\partial G}{\partial \zeta_i} + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} - F \right) \frac{\partial G}{\partial \zeta_0} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_0} \\
&= \sum_{i=1}^N a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} G - \sum_{i=1}^N a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} F \\
&= L_j F_k - L_k F_j \\
&= L_j L_k(g) - L_k L_j(g) = [L_j, L_k](g) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, Σ é um sistema involutivo de classe G^s de equações diferenciais parciais de primeira ordem. □

Seja Σ um sistema involutivo de classe G^s de edp's de primeira ordem de posto n e fixe $(x_0, \zeta_0^{'}, \zeta^{'}) \in \Sigma$. Sejam $\mathcal{O}$ vizinhança de $(x_0, \zeta_0^{'}, \zeta^{'})$ e $F_j(x, \zeta_0, \zeta)$, $j = 1, \ldots, n$, como na definição (3.1.2). Considere (U, x), $x = (x_1, \ldots, x_N)$, carta local de M tal que $x_0 \in U$ e $x(x_0) = 0$. Podemos assumir que $\pi(\mathcal{O}) = U$.

Seja u uma solução C^2 de Σ definida sobre M, tal que $u(x_0) = \zeta_0^{'}$ e $u_x(x_0) = \zeta^{'}$. Considere os seguintes campos vetoriais em U

$$L_j^u = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x, u(x), u_x(x)) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{3.1.9}$$

Nos referimos aos campos L_j^u como os **operadores linearizados** do sistema $F_j(x, u(x), u_x(x)) = 0$ em U. Dadas uma função $v \in C^1(U)$ e $F(x, \zeta_0, \zeta)$ de classe C^1 e holomorfa em (ζ_0, ζ), denotaremos por F^v a função dada por

$$F^v(x) = F(x, v(x), v_x(x)).$$

Denotamos ainda por H_F^o a parte principal do Hamiltoniano holomorfo H_F definido em (3.1.4), ou seja,

$$H_F^o = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \zeta_i \frac{\partial F}{\partial \zeta_0} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_i} + \left(\sum_{i=1}^{N} \zeta_i \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} - F \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_0}.$$

Lema 3.1.1 *Sejam u, F_j e L_j^u como acima. Se $G(x, \zeta_0, \zeta)$ é uma função C^1, holomorfa em (ζ_0, ζ), então*

$$L_j^u(G^u) = \left(H_{F_j}^o G \right)^u, \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Demonstração:

Uma vez que u é solução de Σ, segue que $F_j(x, u, u_x) = 0$. Assim, para $i = 1, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(F_j(x, u, u_x) \right) \\ &= \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x, u, u_x) + \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_0}(x, u, u_x) u_{x_i} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x, u, u_x) \frac{\partial}{\partial x_i} u_{x_k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x, u, u_x) + \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_0}(x, u, u_x) u_{x_i} = - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x, u, u_x) \frac{\partial}{\partial x_i} u_{x_k}. \tag{3.1.10}$$

Temos ainda que

$$H_{F_j}^o G = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k} \frac{\partial G}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \zeta_i \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_0} \right) \frac{\partial G}{\partial \zeta_i} + \left(\sum_{k=1}^{N} \zeta_k \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k} - F_j \right) \frac{\partial G}{\partial \zeta_0}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
(H^o_{F_j}G)^u &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial G}{\partial x_k}(x,u,u_x)+\\
&+\left(\sum_{k=1}^{N}u_{x_k}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)-F_j(x,u,u_x)\right)\frac{\partial G}{\partial \zeta_0}(x,u,u_x)+\\
&-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x,u,u_x)+u_{x_i}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_0}(x,u,u_x)\right)\frac{\partial G}{\partial \zeta_i}(x,u,u_x).
\end{aligned}
$$

Portanto, segue de (3.1.10) que

$$
\begin{aligned}
(H^o_{F_j}G)^u &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial G}{\partial x_k}(x,u,u_x)+\\
&+\sum_{k=1}^{N}u_{x_k}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial G}{\partial \zeta_0}(x,u,u_x)+\\
&+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_{x_k}\right)\frac{\partial G}{\partial \zeta_i}(x,u,u_x)\\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial G}{\partial x_k}(x,u,u_x)+\\
&+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial G}{\partial \zeta_0}(x,u,u_x)u_{x_k}+\\
&+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial \zeta_i}(x,u,u_x)\frac{\partial}{\partial x_k}u_{x_i}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_k}(x,u,u_x)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(G^u(x)\right)\\
&= L^u_j(G^u),
\end{aligned}
$$

onde a penúltima igualdade se deve ao fato de que a função G é holomorfa em (ζ_0,ζ). A demonstração do lema está completa. □

O próximo lema, cuja demonstração pode ser vista em [B1] ou [T], nos possibilita mostrar a involutividade do sistema formado pelos operadores linearizados.

Lema 3.1.2 *Ainda sob as mesmas condições acima, sobre o conjunto $\Sigma\cap\mathcal{O}$ vale a seguinte relação*

$$
[H_{F_j},H_{F_k}]=\sum_{\ell=1}^{N}a^{\ell}_{jk}(x,\zeta_0,\zeta)H_{F_\ell}.
$$

Lema 3.1.3 *Seja $\mathcal{V}^u$ o fibrado gerado por $L_1^u, \ldots, L_n^u$. Então $\mathcal{V}^u$ é involutivo.*

Demonstração:

Segue do lema 3.1.2 que

$$[H_{F_j}^o, H_{F_k}^o] = \sum_{\ell=1}^{N} a_{jk}^{\ell}(x, \zeta_0, \zeta) H_{F_\ell}^o.$$

Ainda, pelo lema 3.1.1, uma vez que os coeficientes dos Hamiltonianos H_{F_j} são holomorfos em (ζ_0, ζ), temos

$$\left[H_{F_j}^o\left(H_{F_k}^o(x_r)\right)\right]^u = L_j^u\left(\left(H_{F_k}^o(x_r)\right)^u\right) = L_j^u\left(L_k^u(x_r)\right),$$

para todo $r = 1, \ldots, N$.

Logo, para todo $r = 1, \ldots, N$,

$$[L_j^u, L_k^u](x_r) = \left(\left[H_{F_j}^o, H_{F_k}^o\right](x_r)\right)^u = \left(\sum_{\ell=1}^{N} a_{jk}^{\ell}(x, \zeta_0, \zeta) H_{F_\ell}^o(x_r)\right)^u = \sum_{\ell=1}^{N} a_{jk}^{\ell}(x, u(x), u_x(x)) L_\ell^u(x_r),$$

completando a demonstração. $\square$

Lema 3.1.4 *Podemos encontrar coordenadas (x, t) de M, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ tais que $x(x_0) = 0$, $t(x_0) = 0$ e, se u é a solução de classe C^2 do sistema Σ dada anteriormente, então*

$$u_{t_j} = f_j(x, t, u, u_x), \quad 1 \leq j \leq n,$$

com f_j definida em um aberto $\Omega \times \mathcal{N}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ vizinhança da origem e $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^{m+1}$, de classe G^s em (x, t) e holomorfa em (ζ_0, ζ), para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração:

Tendo em vista a hipótese (3.1.2), rearranjando os índices das coordenadas x_j, se necessário, temos que

$$\det\left(\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_i}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema 1.5.2, podemos substituir as funções F_j por novas funções da forma $\zeta_j - f_j(x, \zeta_0, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_N)$, definidas em vizinhança de $(0, \zeta_0', \zeta')$ e munidas com as mesmas propriedades satisfeitas por F_j, ou seja, são de classe G^s em (x,t) e holomorfas em (ζ_0,ζ), para $j=1,\dots,n$.

Escrevendo t_j em lugar de x_j e τ_j em lugar de ζ_j, se $1\le j\le n$ e substituindo x_{i+n} por x_i e ζ_{i+n} por ζ_i, se $1\le i\le m=N-n$, temos que $\Sigma\cap\mathcal{O}$ é dado pelas equações

$$\tau_j=f_j(x,t,\zeta_0,\zeta),\quad 1\le j\le n,$$

onde $(x,t)=(x_1,\dots,x_m,t_1,\dots,t_n)$ e $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_m)$. Portanto, uma vez que u é solução de Σ,

$$u_{t_j}=f_j(x,t,u,u_x),\quad 1\le j\le n,$$

completando a demonstração. $\square$

De posse desses lemas, podemos enunciar o nosso principal resultado:

Teorema 3.1.1 *Seja Σ um sistema involutivo de classe G^s de edp's de primeira ordem de posto n em uma variedade analítica real M. Seja u uma solução de classe C^2 de Σ. Então*

$$WF_s(u)\subset(\mathcal{V}^u)^\perp\cap T^*M=T^0M.$$

As próximas seções serão dedicadas à demonstração do teorema acima.

3.2 Resultados preliminares

Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ uma vizinhança da origem. Definimos os seguintes campos vetoriais complexos

$$L_j=\frac{\partial}{\partial t_j}+\sum_{k=1}^m a_{kj}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k},\qquad j=1,\dots,n,\tag{3.2.11}$$

onde $a=(a_{kj})_{m\times n}\in C^1(\Omega)$, $j=1,\dots,n$ e $k=1,\dots,m$.

Seja $\Psi(x,t)=(\Psi_{kj}(x,t))_{m\times n}\in C^1(\Omega)$ tal que, para todo $\ell=1,\dots,m$, as funções

$$Z_\ell(x,t)=x_\ell+\sum_{j=1}^n\Psi_{\ell j}(x,t)t_j$$

são soluções s-aproximadas do sistema $L_jZ=0$, $j=1,\dots,n$. Fazendo $Z=(Z_1,\dots,Z_m)$, podemos escrever $Z(x,t)=x+\Psi(x,t)t$. Observe que $Z_x(x,0)=Id_m$, para todo x tal que $(x,0)\in\Omega$.

Se denotarmos $a_j(x,t) = (a_{1j}(x,t), \ldots, a_{mj}(x,t))$, uma vez que L_jZ é t-flat em $t=0$, temos que

$$0 = L_jZ(x,0) = Z_{t_j}(x,0) + Z_x(x,0)a_j(x,0) = Z_{t_j}(x,0) + a_j(x,0)$$

e assim

$$-a_j(x,0) = \Psi^j(x,0), \tag{3.2.12}$$

onde $\Psi^j(x,t) = (\Psi_{1j}(x,t), \ldots, \Psi_{mj}(x,t))$. Logo,

$$-a(x,0) = \Psi(x,0). \tag{3.2.13}$$

Como $Z_x(x,0) = Id_m$, diminuindo Ω se necessário, podemos assumir que Z_x é não-singular em Ω. Definimos então $b(x,t) = (b_{kj}(x,t))_{m\times n}$ por

$$b = -Z_x^{-1}Z_t. \tag{3.2.14}$$

Consideremos agora novos campos vetoriais $L_j^{'}$, $j = 1, \ldots, n$, dados por

$$L_j^{'} = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} b_{kj}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{3.2.15}$$

É fácil ver de (3.2.14) que

$$L_j^{'}Z = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2.16}$$

Notemos também que, de (3.2.14),

$$b(x,0) = -Z_x^{-1}(x,0)Z_t(x,0) = -Z_t(x,0) = a(x,0), \tag{3.2.17}$$

ou seja, os campos L_j e L_j' coincidem em $t = 0$.

O conjunto característico de L_j é definido por

$$\begin{aligned}\mathrm{Char}(L_j) &= \{(x,t,\xi,\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m+n} : \tau_j + \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(x,t)\xi_k = 0\} \\ &= \{(x,t,\xi,\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m+n} : \tau_j + a_j(x,t)\cdot\xi = 0\}\end{aligned}$$

e, analogamente, o conjunto característico de L_j' é dado por

$$\mathrm{Char}(L_j') = \{(x,t,\xi,\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m+n} : \tau_j + b_j(x,t)\cdot\xi = 0\},$$

onde $b_j(x,t) = (b_{1j}(x,t), \dots, b_{mj}(x,t))$.

Como $a(x,0) = b(x,0)$, os conjuntos característicos de L_j e L'_j coincidem em $t = 0$.

Temos ainda de (3.2.17) que, para $t = 0$, o conjunto característico de L'_j(e de L_j) é dado pela equação

$$\tau_j - Z_{t_j}(x,0) \cdot \xi = 0. \qquad (3.2.18)$$

Mostremos agora que, se $h \in C^1(\Omega)$ é uma solução s-aproximada de $L_j h = 0$, $j = 1, \dots, n$, então h também é uma solução s-aproximada de $L'_j h = 0$, $j = 1, \dots, n$. De fato, uma vez que $L'_j Z = 0$, temos que

$$L_j Z = L_j Z - L'_j Z = Z_{t_j} + Z_x a_j - Z_{t_j} - Z_x b_j = Z_x(a_j - b_j).$$

Assim,

$$-Z_x^{-1} L_j Z = b_j - a_j.$$

Logo,

$$L'_j h = L_j h + (L'_j - L_j)h = L_j h + (b_j - a_j) \cdot h_x = L_j h - (Z_x^{-1} L_j Z) \cdot h_x.$$

Segue da definição de solução s-aproximada que existe $C > 0$ tal que, dado $\nu > 0$,

$$|L_j h(x,t)| \leq C^{\nu+1} (\nu!)^{s-1} |t|^\nu, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega$$

e

$$|L_j Z(x,t)| \leq C^{\nu+1} (\nu!)^{s-1} |t|^\nu, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega.$$

Como $h \in C^1(\Omega)$, diminuindo Ω se necessário, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|h_x(x,t)| \leq C_1, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega.$$

Da mesma forma, como $Z_i \in C^1(\Omega),\ i = 1, \dots, m\ e\ Z = (Z_1, \cdots, Z_m)$, existe C_2 tal que $|Z_x^{-1}(x,t)| \leq C_2$, para todo $(x,t) \in \Omega$.

Portanto, aumentando a constante C se necessário, temos

$$|L'_j h(x,t)| \leq |L_j h(x,t)| + |Z_x^{-1}(x,t)||L_j Z(x,t)||h_x(x,t)| \leq C^{\nu+1} (\nu!)^{s-1} |t|^\nu \ \ \forall\ (x,t) \in \Omega,$$

o que completa a demonstração da afirmação. $\square$

Seja agora $V(x,t) = (V_{kl}(x,t))_{m\times m} = ({}^tZ_x(x,t))^{-1}$, onde ${}^tZ_x(x,t)$ denota a matriz transposta de $Z_x(x,t)$. Definimos assim, para $k = 1,\ldots,m$,

$$M_k = \sum_{\nu=1}^{m} V_{k\nu}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{3.2.19}$$

Segue imediatamente da definição acima que

$$M_k Z_\ell = \delta_{\ell k}, \quad 1 \le \ell, k \le m. \tag{3.2.20}$$

Assim, os campos vetoriais $L_j^{'}$ podem ser reescritos como

$$L_j^{'} = L_j - \sum_{k=1}^{m} L_j Z_k(x,t) M_k, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3.2.21}$$

De fato, segue de (3.2.16) que

$$L_j Z_k(x,t) = \sum_{\ell=1}^{m}(a_{\ell j}(x,t) - b_{\ell j}(x,t))\frac{\partial}{\partial x_\ell} Z_k(x,t)$$

e então

$$\begin{aligned}
L_j - \sum_{k=1}^{m} L_j Z_k(x,t) M_k &= L_j - \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}(a_{\ell j}(x,t) - b_{\ell j}(x,t))\frac{\partial}{\partial x_\ell} Z_k(x,t) M_k \\
&= L_j - \sum_{\ell=1}^{m}(a_{\ell j}(x,t) - b_{\ell j}(x,t))\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\ell} Z_k(x,t) M_k\right) \\
&= L_j - \sum_{\ell=1}^{m}(a_{\ell j}(x,t) - b_{\ell j}(x,t))\frac{\partial}{\partial x_\ell} \\
&= \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{\ell=1}^{m} b_{\ell j}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_\ell} = L_j^{'}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $L_1^{'},\ldots,L_n^{'},M_1,\ldots,M_m$ são campos linearmente independentes definidos em Ω, eles geram o conjunto dos campos de classe C^0 em Ω. Observe agora que $L_j^{'}t_i = \delta_{ij}$, para $1 \le i,j \le n$ e assim, segue de (3.2.16) e (3.2.20) que $\{dt_1,\ldots dt_n, dZ_1,\ldots dZ_m\}$ é a base dual de $\{L_1^{'},\ldots,L_n^{'},M_1,\ldots,M_m\}$.

Logo, dado $H \in C^1(\Omega)$, seu diferencial pode ser escrito como

$$dH(x,t) = \sum_{j=1}^{n} L_j^{'}H(x,t)dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k H(x,t) dZ_k.$$

Assim, considerando a m-forma

$$\omega(x,t) = H(x,t)dZ(x,t) = H(x,t)dZ_1(x,t) \wedge \cdots \wedge dZ_m(x,t),$$

temos

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} L_j^{'} H(x,t)dt_j \wedge dZ(x,t). \tag{3.2.22}$$

Estamos em condições de demonstrar nosso próximo resultado.

Lema 3.2.1 *Seja $\Psi(x,t) = \left(\Psi_{kj}(x,t)\right)_{m\times n} \in C^1(\Omega)$ tal que $Z(x,t) = x + \Psi(x,t)t$ é uma solução s-aproximada do sistema $L_j Z = 0$, $j = 1,\ldots,n$. Seja $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ e suponha que exista $T \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi^0 \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)T < 0$. Se $h \in C^1(\Omega)$ é uma solução s-aproximada de $L_j h = 0$, $j = 1,\ldots,n$, então $(0,\xi^0) \notin WF_s(h(\cdot,0))$.*

Demonstração: Definimos $\gamma : [0, r_0] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\gamma(r) = rT.$$

Considere $B \subset \mathbb{R}^m$ uma bola aberta centrada na origem e r_0 suficientemente pequeno tal que $\overline{B \times \gamma} \subset \Omega$, onde $\gamma = \gamma[0, r_0]$.

Seja $\phi \in G_0^s(\mathbb{R}^m)$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset B$ e $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem. Considere ainda

$$H(y,\xi,x,t) = e^{i\xi\cdot(y-Z(x,t)) - \langle\xi\rangle[y-Z(x,t)]^2} \alpha(y - Z(x,t),\xi)\phi(x)h(x,t),$$

onde $h(x,t)$ vem da hipótese, α é a função que aparece na definição 1.4.2 no caso em que $\gamma = 1$ e, para $z \in \mathbb{C}^m$, $[z]^2 = \sum_{j=1}^{m} z_j^2$. As variáveis (y,ξ) são consideradas como parâmetros.

Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int_\gamma \int_B d(HdZ) = \int_{\partial(B\times\gamma)} HdZ. \tag{3.2.23}$$

De (3.2.22), podemos escrever a equação (3.2.23) como

$$\begin{aligned} \int_B H(y,\xi,x,0)dx &= \int_B H(y,\xi,x,r_0T) \det Z_x(x,r_0T)dx \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B L_j^{'} H(y,\xi,x,t)dt_j \wedge dZ. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Seja $Q(y,\xi,x,t) = i\xi\cdot(y - Z(x,t)) - \langle\xi\rangle[y - Z(x,t)]^2$.

Temos que

$$Q(y,\xi,x,t) = -i\xi \cdot (x - y + \Psi(x,t)t) - \langle\xi\rangle[x - y + \Psi(x,t)t]^2$$

e assim,

$$\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) = \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t - \langle\xi\rangle \operatorname{Re}[x - y + \Psi(x,t)t]^2.$$

Notemos que

$$\operatorname{Re}[x - y + \Psi(x,t)t]^2 = |x - y + \operatorname{Re} \Psi t|^2 - |\operatorname{Im} \Psi t|^2.$$

Daí, para $(x,t) \in \Omega$, existe $K_1 > 0$ tal que, para $|\xi| \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) &= \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t - \langle\xi\rangle \left(|x - y + \operatorname{Re} \Psi t|^2 - |\operatorname{Im} \Psi t|^2\right) \\
&\leq \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t + \langle\xi\rangle |\operatorname{Im} \Psi(x,t)t|^2 - |\xi||x - y + \operatorname{Re} \Psi t|^2 \\
&\leq \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t + K_1|t|^2|\xi| - |\xi||x - y + \operatorname{Re} \Psi t|^2,
\end{aligned}$$

uma vez que $|\xi| \leq \langle\xi\rangle \leq \sqrt{2}|\xi|$, para todo $|\xi| \geq 1$.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
-|\xi||x - y + \operatorname{Re} \Psi t|^2 &= -|\xi||x - y|^2 - |\xi||\operatorname{Re} \Psi t|^2 - 2|\xi|(x - y) \cdot \operatorname{Re} \Psi t \\
&\leq -|\xi||x - y|^2 + 2|\xi|\frac{|x - y|}{2}(2|\operatorname{Re} \Psi t|) \\
&\leq -|\xi||x - y|^2 + |\xi|\frac{|x - y|^2}{4} + 4|\xi||\operatorname{Re} \Psi t|^2 \\
&\leq -|\xi|\frac{|x - y|^2}{2} + K_2|t|^2|\xi|,
\end{aligned}$$

para algum $K_2 > 0$.

Logo, existe uma constante $K > 0$ tal que, se $|\xi| \geq 1$,

$$\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) \leq \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t + K|t|^2|\xi| - \frac{|x - y|^2}{2}|\xi|. \tag{3.2.25}$$

Segue da desigualdade do valor médio, diminuindo Ω se necessário, que existe $M > 0$ tal que

$$|\Psi(x,t) - \Psi(0,0)| \leq M|(x,t)| \leq M(|x| + |t|), \quad (x,t) \in \Omega.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t - \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(0,0)t &\leq |\xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t - \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(0,0)t| \\
&\leq |\xi||\Psi(x,t) - \Psi(0,0)||t| \\
&\leq M|\xi||t|(|x| + |t|),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(x,t)t \leq \xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)t + M|\xi||t|(|x|+|t|). \tag{3.2.26}$$

Assim, de (3.2.25) e (3.2.26), temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) &\leq \xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)t + M|\xi||t|(|x|+|t|) + K|t|^2|\xi| \\ &= \xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)t + M|\xi||t||x| + (M+K)|t|^2|\xi|.\end{aligned}$$

Definamos $C_0 = -\xi^0 \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)T > 0$. Logo,

$$\xi^0 \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)T = -C_0 < -\frac{3C_0}{4}.$$

Assumindo, sem perda de generalidade, que $|\xi^0| = 1$ e $|T| = 1$, podemos encontrar vizinhança W de ξ^0 tal que

$$\xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)T \leq -\frac{3C_0}{4}, \quad \forall\, \xi \in W \cap S^{m-1}.$$

Daí, se $t = rT \in \gamma$, com $0 < r < r_0$, temos

$$\xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)t = r\xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)T \leq -\frac{3C_0}{4}|t|, \quad \forall\, \xi \in W \cap S^{m-1},$$

uma vez que $|t| = |rT| = r$.

Consideremos então a vizinhança cônica de ξ^0 dada por

$$\Gamma = \{\eta \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\} : \frac{\eta}{|\eta|} \in W \cap S^{m-1}\}.$$

Então, para todo $\xi \in \Gamma$, temos

$$\xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)t = |\xi|\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \Psi(0,0)t \leq -\frac{3C_0}{4}|\xi||t|.$$

Tomando-se então $\delta = \frac{C_0}{4(M+K)}$ e assumindo que $0 < |t| < \delta$ e $|x| < \delta$, temos, para $\xi \in \Gamma$, $|\xi| \geq 1$, que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) &\leq \xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)t + M|\xi||t||x| + (M+K)|t|^2|\xi| \\ &\leq -\frac{3C_0}{4}|\xi||t| + M\delta|\xi||t| + (M+K)\delta|\xi||t| \\ &\leq \left(-\frac{3C_0}{4} + \frac{C_0}{4} + \frac{C_0}{4}\right)|\xi||t| \\ &= -\frac{1}{4}C_0|\xi||t|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{Re} Q(y, \xi, x, t) \leq -\frac{1}{4} C_0 |\xi||t|, \tag{3.2.27}$$

para $t \in \gamma$, com $0 < |t| < \delta$, $y \in \mathbb{R}^m$, $|x| < \delta$ e $\xi \in \Gamma$, com $|\xi| \geq 1$.

Assim, podemos encontrar uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_B H(y, \xi, x, r_0 T) \det Z_x(x, r_0 T) dx \right| \qquad (3.2.28)\\
&\leq \int_B e^{\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,r_0T)} \left| \alpha(y - Z(x, r_0 T), \xi) \phi(x) h(x, r_0 T) \det Z_x(x, r_0 T) \right| dx \\
&\leq C\, e^{-\frac{C_0 r_0 |T||\xi|}{2}},
\end{aligned}$$

para todo $(y, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma$, diminuindo r_0 se necessário.

De (3.2.16), podemos ver que

$$\begin{aligned}
L_j^{'} H(y, \xi, x, t) &= e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x, t), \xi) \phi(x) L_j^{'} h(x, t) \\
&\quad + e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x, t), \xi) (L_j^{'} \phi(x)) h(x, t).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B (L_j^{'} H) dt_j \wedge dZ \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x, t), \xi) \phi(x) L_j^{'} h(x, t) (\det Z_x(x, t)) dx dt_j \right| \qquad (3.2.29)\\
&+ \left| \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x, t), \xi) (L_j^{'} \phi(x)) h(x, t) (\det Z_x(x, t)) dx dt_j \right|.
\end{aligned}$$

Vamos agora estimar o segundo termo do lado direito de (3.2.29). Uma vez que $\phi(x)$ é constante em uma vizinhança da origem, existe $a > 0$ tal que $L_j^{'} \phi(x) \equiv 0$ em $B(0, 3a) \subset B$. Considere $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $|y| < a$. Assim, se $x \in B \backslash B(0, 3a)$,

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq 3a - a = 2a$$

e assim, $|x - y|^2 \geq 4a^2$, para todo $x \in B \backslash B(0, 3a)$ e para y em vizinhança da origem.

Logo, para $x \in B\backslash B(0,3a)$, $|y| < a$ e $t = rT \in \gamma$, com $0 < r < r_0$, assumindo $r_0 < 1$, temos de (3.2.25) que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) &\leq \xi \cdot \operatorname{Im} \Psi(x,t)t + K|t|^2|\xi| - \frac{|x-y|^2}{2}|\xi| \\ &\leq r_0 c_1|\xi| + r_0 K|\xi| - 2a^2|\xi| \\ &= r_0(c_1+K)|\xi| - 2a^2|\xi|, \end{aligned}$$

onde $|\operatorname{Im} \Psi(x,t)| \leq c_1$ e $|\xi| \geq 1$. Escolhendo $r_0 < \min\{1, \frac{a^2}{c_1+K}\}$, temos

$$\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t) \leq -a^2|\xi|,$$

para $\xi \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$, $x \in B\backslash B(0,3a)$, $t = rT \in \gamma$, com $0 < r < r_0$, r_0 como antes e y numa vizinhança V da origem em $\mathbb{R}^m$.

Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x,t),\xi)(L_j^{'}\phi(x))h(x,t)(\det Z_x(x,t))dxdt_j\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{\operatorname{Re} Q(y,\xi,x,t)} \left|\alpha(y - Z(x,t),\xi)(L_j^{'}\phi(x))h(x,t)d_xZ(x,t)\right| dt \qquad (3.2.30) \\ &\leq C\ e^{-a^2|\xi|} \end{aligned}$$

e portanto, esse termo tem decaimento exponencial para $\xi \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ e y em vizinhança da origem.

Finalmente, estimemos o primeiro termo do lado direito em (3.2.29).

Como h é solução s-aproximada de $L_j h = 0$, temos que h é também uma solução s-aproximada de $L_j' h = 0$. Dado $\nu \in \mathbb{N}$, considere M o menor inteiro maior ou igual que $\frac{\nu}{s}$. Assim, para $\xi \in \Gamma$, com $|\xi| \geq 1$, tendo em vista a desigualdade (3.2.27) e lembrando que $|T| = 1$, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
&|\xi|^{\frac{\nu}{s}} \left| \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x,t), \xi)\phi(x) L_j' h(x,t)(\det Z_x(x,t)) dx dt_j \right| \\
&\leq C_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{-c|t||\xi|} |L_j' h(x,t)||\xi|^M dx dt_j \\
&\leq C^M (M-1)!^{s-1} C_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{-c|t||\xi|} |t|^{M-1} |\xi|^M dx dt_j \\
&\leq C^M (M-1)!^{s-1} C_2 \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma e^{-c|t||\xi|} |t|^{M-1} |\xi|^M dt_j \\
&= C^M (M-1)!^{s-1} C_2 \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_0} e^{-c|\gamma(r)||\xi|} |\gamma(r)|^{M-1} |\xi|^M T_j dr \\
&\leq C^M (M-1)!^{s-1} C_2 \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_0} e^{-c|\gamma(r)||\xi|} (|\gamma(r)||\xi|)^{M-1} |\xi| T_j dr \\
&= C^M (M-1)!^{s-1} C_2 \left(\frac{2}{c}\right)^{M-1} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_0} e^{-c|\gamma(r)||\xi|} \left(\frac{c|\gamma(r)||\xi|}{2}\right)^{M-1} |\xi| T_j dr \\
&\leq C^M (M-1)!^{s-1} C_2 \left(\frac{2}{c}\right)^{M-1} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_0} e^{-c|\gamma(r)||\xi|} (M-1)! e^{\frac{c|\gamma(r)||\xi|}{2}} |\xi||T_j| dr \\
&\leq C^M (M-1)!^{s} C_2 \left(\frac{2}{c}\right)^{M-1} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_0} e^{-\frac{c|\gamma(r)||\xi|}{2}} |\xi| dr.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $\lambda = \frac{c|\gamma(r)||\xi|}{2} = \frac{c|\xi| r}{2}$, segue da desigualdade acima que

$$
\begin{aligned}
&|\xi|^{\frac{\nu}{s}} \left| \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \int_B e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x,t), \xi)\phi(x) L_j' h(x,t)(\det Z_x(x,t)) dx dt_j \right| \\
&\leq C^M (M-1)!^{s} C_2 \left(\frac{2}{c}\right)^{M} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda} d\lambda \\
&= C^M (M-1)!^{s} C_3 \left(\frac{2}{c}\right)^{M} \\
&\leq D^{M+1} M^{sM} \\
&\leq C^{'} (C^{'} \nu)^{\nu},
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade vem do Lema 4.2.1 (Apêndice).

Portanto, existe $C > 0$ tal que

$$I \doteq \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma} \int_{B} e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x,t), \xi) \phi(x) L'_j h(x,t) (\det Z_x(x,t)) dx dt_j \right| \leq C(C\nu)^{\nu} |\xi|^{-\frac{\nu}{s}}, \tag{3.2.31}$$

para todo $\xi \in \Gamma$, $|\xi| \geq 1$.

Note que

$$C(C\nu)^{\nu}|\xi|^{-\frac{\nu}{s}} \leq C^{\nu+1} e^{\nu} \nu! |\xi|^{-\frac{\nu}{s}} \leq C_1^{\nu+1} \nu! |\xi|^{-\frac{\nu}{s}},$$

com $C_1 = \max\{C, Ce^{\nu}\}$.

Assim,

$$C_1^{-\nu} (\nu!)^{-1} |\xi|^{\frac{\nu}{s}} I \leq C_1, \quad \forall\ \nu = 1, 2, \ldots.$$

Definindo $\varepsilon = \frac{1}{2C_1}$, obtemos

$$2^{\nu} \varepsilon^{\nu} (\nu!)^{-1} |\xi|^{\frac{\nu}{s}} I \leq C_1, \quad \forall\ \nu = 1, 2, \ldots$$

e portanto,

$$\varepsilon^{\nu} (\nu!)^{-1} |\xi|^{\frac{\nu}{s}} I \leq C_1 \frac{1}{2^{\nu}}, \quad \forall\ \nu = 1, 2, \ldots.$$

Logo,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} (\nu!)^{-1} |\xi|^{\frac{\nu}{s}} I \leq C_2,$$

isto é, $I \leq C_2 e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}$.

Observe que, embora tenhamos estimado apenas para $|\xi| \geq 1$, o caso $|\xi| \leq 1$ segue simplesmente do fato de que funções contínuas são limitadas em compactos. Assim,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma} \int_{B} e^{Q(y,\xi,x,t)} \alpha(y - Z(x,t), \xi) \phi(x) L'_j h(x,t) (\det Z_x(x,t)) dx dt_j \right| \leq C_2 e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}, \tag{3.2.32}$$

para todo $\xi \in \Gamma$.

Portanto, de (3.2.24), (3.2.28), (3.2.29), (3.2.30) e (3.2.32), encontramos uma vizinhança cônica Γ de $\xi_0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^m$ da origem, $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{B} H(y, \xi, x, 0) dx \right| \leq C e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}, \tag{3.2.33}$$

para todo $(y, \xi) \in V \times \Gamma$.

Como a transformada FBI, com $\gamma = 1$ na definição 1.4.2, da função $u(x) = \phi(x) h(x, 0)$, é dada por

$$\mathcal{F}_1(y,\xi) = \int_B e^{Q(y,\xi,x,0)}\alpha(y-x,\xi)u(x)dx = \int_B H(y,\xi,x,0)dx,$$

segue de (3.2.33) que $\mathcal{F}_1(y,\xi)$ tem um decaimento s-exponencial para $(y,\xi) \in V \times \Gamma$. Assim, como $\phi \in G_0^s(\Omega)$ e $\phi(x) = 1$ para x em vizinhança da origem, temos que $(0,\xi^0) \notin WF_s(h(\cdot,0))$, o que completa a demonstração do lema. $\square$

Sejam L_j, $j = 1,\ldots,n$ e $Z = (Z_1,\ldots,Z_m)$ como no lema 3.2.1. Para $\theta \in [0,2\pi)$, definimos novos campos vetoriais da forma

$$L_j^\theta = \frac{\partial}{\partial r_j} - e^{-i\theta}L_j, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{3.2.34}$$

onde $r = (r_1,\ldots,r_n)$ é uma nova variável em $\mathbb{R}^n$.

Seja V uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$ e suponha que, para cada $\theta \in [0,2\pi)$ e para $k = 1,\ldots,m$, existem funções $\Psi_k^\theta(x,t,r) = (\Psi_{k1}^\theta(x,t,r),\ldots,\Psi_{kn}^\theta(x,t,r)) \in C^1(\Omega \times V)$ tais que $Z_k^\theta(x,t,r) = x_k + r\cdot\Psi_k^\theta(x,t,r)$ é uma solução s-aproximada de $L_j^\theta u = 0$, $j = 1,\ldots,n$, com r substituindo t na definição 2.2.1.

Definimos também, para $j = 1,\ldots,n$,

$$Z_{m+j}^\theta(x,t,r) = t_j + r\cdot\Psi_{m+j}^\theta(x,t,r), \tag{3.2.35}$$

onde $\Psi_{m+j}^\theta = e^{-i\theta}e_j$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

É fácil ver que

$$L_i^\theta Z_{m+j}^\theta = 0,$$

para todo $1 \leq i,j \leq n$. Assim, se tomarmos $\Psi^\theta = (\Psi_{kj}^\theta)_{(m+n)\times n}$ e $Z^\theta = (Z_1^\theta,\ldots,Z_{m+n}^\theta)$, então

$$Z^\theta(x,t,r) = (x,t) + \Psi^\theta(x,t,r)r, \tag{3.2.36}$$

e Z^θ é uma solução s-aproximada do sistema $L_j^\theta u = 0$, $j = 1,\ldots,n$, em $r \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que, para $j = 1,\ldots,n$ e $k = 1,\ldots,m$,

$$
\begin{aligned}
L_j^\theta Z_k^\theta(x,t,r) &= \frac{\partial}{\partial r_j} Z_k^\theta(x,t,r) - e^{-i\theta} L_j Z_k^\theta(x,t,r) \\
&= r \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \Psi_k^\theta(x,t,r) + \Psi_{kj}^\theta(x,t,r) \\
&\quad - e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} Z_k^\theta(x,t,r) + \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell j}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_\ell} Z_k^\theta(x,t,r) \right) \\
&= r \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \Psi_k^\theta(x,t,r) + \Psi_{kj}^\theta(x,t,r) - e^{-i\theta} r \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} \Psi_k^\theta(x,t,r) \\
&\quad - e^{-i\theta} \left(a_{kj}(x,t) \left(1 + r \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi_k^\theta \right) + \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{m} a_{\ell j}(x,t) r \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell} \Psi_k^\theta \right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
0 = L_j^\theta Z_k^\theta(0,0,0) = \Psi_{kj}^\theta(0,0,0) - e^{-i\theta} a_{kj}(0,0)
$$

e então

$$
\Psi^\theta(0,0,0) = -e^{-i\theta} \begin{pmatrix} -a(0,0) \\ -Id_n \end{pmatrix} = -e^{-i\theta} \begin{pmatrix} \Psi(0,0) \\ -Id_n \end{pmatrix}, \tag{3.2.37}
$$

uma vez que vale (3.2.13).

Lembremos agora que, para todo $j = 1, \ldots, n$, o conjunto característico do campo vetorial L_j é dado por

$$
\mathrm{Char}(L_j) = \{(x,t,\xi,\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m+n} : \tau_j + a_j(x,t) \cdot \xi = 0\}.
$$

Logo, de (3.2.12), o conjunto característico de L_j em $t = 0$ é dado pela equação

$$
\tau_j - \Psi^j(x,0) \cdot \xi = 0. \tag{3.2.38}
$$

Denotemos por L o sistema $L = (L_1, \ldots, L_n)$ e suponhamos que $(0,0,\xi,\tau) \notin \mathrm{Char}(L)$. De (3.2.38), existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\tau_j - \Psi^j(0,0) \cdot \xi \neq 0$. Isso implica que

$$
\tau_j \neq \mathrm{Re}\, \Psi^j(0,0) \cdot \xi \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}\, \Psi^j(0,0) \cdot \xi \neq 0. \tag{3.2.39}
$$

Além disso, podemos concluir de (3.2.37) que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \operatorname{Im} \Psi^{\theta}(0,0,0)e_j &= -\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Im} e^{-i\theta}\Psi^j(0,0) \\ -\operatorname{Im} e^{-i\theta}e_j \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \operatorname{Im} \Psi^j(0,0) - \operatorname{sen}\theta \operatorname{Re} \Psi^j(0,0) \\ \operatorname{sen}\theta e_j \end{pmatrix} \\
&= -\operatorname{Im} \Psi^j(0,0)\cdot \xi \cos\theta - \big(\tau_j - \operatorname{Re} \Psi^j(0,0)\cdot \xi\big) \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}
$$

Assim, segue de (3.2.39) que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$
\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \operatorname{Im} \Psi^{\theta}(0,0,0)e_j \neq 0.
$$

Podemos então, sem perda de generalidade, assumir que

$$
\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \operatorname{Im} \Psi^{\theta}(0,0,0)e_j < 0.
$$

Seja $h \in C^1(\Omega)$ e suponhamos que existam funções $h^{\theta}(x,t,r)$ que são soluções s-aproximadas de $L_j^{\theta} h^{\theta} = 0$, com r substituindo t, e satisfazem $h^{\theta}(x,t,0) = h(x,t)$. Então, aplicando o Lema 3.2.1, concluimos que $(0,0,\xi,\tau) \notin WF_s(h)$.

Resumimos o que foi discutido acima no próximo resultado.

Lema 3.2.2 *Sejam L_j, Z como no Lema 3.2.1, L_j^{θ}, Z^{θ} como em* (3.2.34) *e* (3.2.36)*, respectivamente e $h \in C^1(\Omega)$. Suponha que, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$, existe $h^{\theta} \in C^1(\Omega \times V)$ tal que $h^{\theta}(x,t,0) = h(x,t)$ e h^{θ} é uma solução s-aproximada de $L_j^{\theta} u = 0$, $j = 1, \ldots, n$, em $r \in V$. Então, $WF_s(h)|_0 \subset \operatorname{Char}(L)|_0$, onde $L = (L_1, \ldots, L_n)$.*

3.3 Demonstração do resultado principal

Sejam $s > 1$ e Σ um sistema involutivo de classe G^s de edp's de primeira ordem de posto n em uma variedade analítica real M. Seja u uma solução de classe C^2 de Σ e fixemos $p \in \Sigma$. De acordo com a notação da definição 3.1.2, juntamente com o Lema 3.1.4, se $x_0 = \pi(p)$, podemos encontrar uma vizinhança $\mathcal{O}$ de p em Σ e coordenadas (x,t) de M definidas em $\pi(\mathcal{O})$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ tais que $x(x_0) = 0$, $t(x_0) = 0$, de modo que

$$
\Sigma \cap \mathcal{O} = \{(x,t,\zeta_0,\zeta,\tau) \in \mathcal{O} : \tau_j = f_j(x,t,\zeta_0,\zeta), j = 1, \ldots, n\},
$$

onde cada f_j é de classe G^s em (x,t) e holomorfa em (ζ_0,ζ).

Podemos encontrar então uma vizinhança $\Omega = U \times V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e supor que $u \in C^2(\Omega)$ e satisfaz

$$u_{t_j} = f_j(x,t,u,u_x), \quad j = 1,\dots,n, \tag{3.3.40}$$

com $f_j(x,t,\zeta_0,\zeta) \in G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$, $(x,t) \in \Omega$ e $(\zeta_0,\zeta) \in \mathcal{N} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$, com $\mathcal{N}$ aberto.

Os operadores linearizados definidos como em (3.1.9) são dados, neste caso, por

$$L_j^u = \frac{\partial}{\partial t_j} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_k}(x,t,u(x,t),u_x(x,t))\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{3.3.41}$$

Considere ainda os seguintes campos

$$\mathcal{L}_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_k}(x,t,\zeta_0,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{3.3.42}$$

Se $\Phi(x,t,\zeta_0,\zeta) \in G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$, denotamos por $\Phi^u(x,t) = \Phi(x,t,u(x,t),u_x(x,t))$.

Uma computação direta mostra que

$$L_j^u(u,u_x) = g_j(x,t,u,u_x), \qquad j = 1,\dots,n, \tag{3.3.43}$$

onde $g_j = (g_{0j}, g_{1j}, \dots, g_{mj})$ é dada por

$$g_{0j}(x,t,\zeta_0,\zeta) = f_j(x,t,\zeta_0,\zeta) - \sum_{k=1}^m \zeta_k \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_k}(x,t,\zeta_0,\zeta),$$

$$g_{kj}(x,t,\zeta_0,\zeta) = (f_j)_{x_k}(x,t,\zeta_0,\zeta) + \zeta_k \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_0}(x,t,\zeta_0,\zeta), \; k = 1,\dots,m.$$

Definimos, para $j = 1,\dots,n$, os seguintes campos vetoriais

$$H_j = \mathcal{L}_j + g_{0j}\frac{\partial}{\partial \zeta_0} + \sum_{k=1}^m g_{kj}\frac{\partial}{\partial \zeta_k}.$$

Sendo $H_{F_j}^o$ a parte principal do Hamiltoniano holomorfo de $F_j(x,t,\zeta_0,\zeta,\tau) = \tau_j - f_j(x,t,\zeta_0,\zeta)$, $j = 1,\dots,n$, segue de (3.1.4) que

$$H_{F_j}^o = H_j + \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial t_\ell} + \tau_\ell \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_0}\right)\frac{\partial}{\partial \tau_\ell}. \tag{3.3.44}$$

Uma vez que Φ não depende da variável τ, temos, pelo Lema 3.1.1, que

$$(H_j\Phi)^u = (H^o_{F_j}\Phi)^u = L^u_j\Phi^u. \tag{3.3.45}$$

Segue do Lema 3.1.2, tendo em vista a forma como estamos representando localmente o sistema involutivo Σ, que

$$[H^o_{F_i}, H^o_{F_j}] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Logo, segue facilmente de (3.3.44) que

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.3.46}$$

Uma vez que os coeficientes de H_j estão em $G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$ e vale (3.3.46), segue da Proposição 2.2.1 que existem funções $Z_k(x, t, \zeta_0, \zeta),\ k = 1, \cdots, m$ e $\Xi(x, t, \zeta_0, \zeta)$ que estão em $G^s(\Omega, H(\mathcal{N}))$, são soluções s-aproximadas do sistema $H_j w = 0$, $j = 1, \ldots, n$ e satisfazem $Z_k(x, 0, \zeta_0, \zeta) = x_k$, $k = 1, \ldots, m$ e $\Xi(x, 0, \zeta_0, \zeta) = \zeta_0$, diminuindo Ω se necessário.

Podemos escrever (ver Apêndice, Lema 4.2.4) $Z_k(x, t, \zeta_0, \zeta) = x_k + t \cdot \Psi_k(x, t, \zeta_0, \zeta),\ k = 1, \cdots, m$, onde $\Psi_k = (\Psi_{k1}, \ldots, \Psi_{kn})$ e portanto, $Z^u_k(x, t) = Z_k(x, t, u, u_x) = x_k + t \cdot \Psi^u_k(x, t)$, onde $\Psi^u_k \in C^1(\Omega)$. Portanto, tomando-se $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$, temos $Z^u(x, 0) = x$ e ainda, de (3.3.45), temos que

$$(H_j Z_k)^u = L^u_j Z^u_k, \quad k = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

e assim, $Z^u_k(x, t) = x_k + t \cdot \Psi^u_k(x, t)$ é solução s-aproximada de $L_j w = 0$, $j = 1, \ldots, n$, para todo $k = 1, \ldots, m$.

Definimos agora $h(x, t) = \Xi^u(x, t)$. Com raciocínio análogo ao utilizado acima, concluímos que h é uma função de classe C^1, solução s-aproximada de $L_j w = 0$, $j = 1, \ldots, n$, que satisfaz $h(x, 0) = u(x, 0)$.

Definimos agora

$$\tilde{u}(x, t, r) = u(x, t),$$

onde r é uma nova variável em $\mathbb{R}^n$. Uma vez que u é uma solução do sistema $u_{t_j} = f_j(x, t, u, u_x)$, $j = 1, \ldots, n$, segue que $\tilde{u}$ é uma solução do novo sistema

$$\tilde{u}_{r_j} = f^\theta_j(x, t, r, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.3.47}$$

onde $f^\theta_j(x, t, r, \zeta_0, \zeta, \tau) = e^{-i\theta}(\tau_j - f_j(x, t, \zeta_0, \zeta))$, e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Observe que esta última equação é do mesmo tipo de (3.3.40) com r substituindo t e (x,t) substituindo x. Os campos vetoriais $\mathcal{L}_j^\theta$ associados às equações acima, como em (3.3.42) são dados por

$$\mathcal{L}_j^\theta = \frac{\partial}{\partial r_j} - e^{-i\theta}\mathcal{L}_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

onde os campos $\mathcal{L}_j$ são os mesmos dados em (3.3.42).

As equações (3.3.47) também definem um sistema involutivo, uma vez que, se

$$F_j^\theta(x,t,r,\zeta_0,\zeta,\tau,\xi) = \xi_j - f_j^\theta(x,t,r,\zeta_0,\zeta,\tau), \quad j = 1, \ldots, n,$$

então o Hamiltoniano holomorfo de F_j^θ satisfaz

$$H_{F_j^\theta} = \frac{\partial}{\partial r_j} - e^{-i\theta} H_{F_j},$$

onde $F_j(x,t,\zeta_0,\zeta,\tau) = \tau_j - f_j(x,t,\zeta_0,\zeta)$.

Observemos também que, denotando por $(L_j^u)^\theta$, $j = 1, \ldots, n$, os operadores linearizados do sistema (3.3.47), temos que

$$(L_j^u)^\theta = \frac{\partial}{\partial r_j} - e^{-i\theta} L_j^u.$$

Assim, repetindo todo o nosso argumento com $\tilde{u}$ em lugar de u, (x,t) substituindo x e r substituindo t, concluimos que, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$, existem soluções s-aproximadas

$$Z_k^\theta(x,t,r) = x_k + \Psi_k(x,t,r) \cdot r, \quad k = 1, \ldots, m,$$

para o sistema $L_j^\theta Z^\theta = 0$, $j = 1, \ldots, n$, com relação à variável r, sendo $\Psi_k = (\Psi_{k1}, \ldots, \Psi_{kn}) \in C^1(\Omega \times V)$, onde $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança da origem. Ainda repetindo o argumento anterior para cada θ, concluimos que existe uma função C^1, $h^\theta(x,t,r)$, tal que h^θ é uma solução s-aproximada de $(L_j^u)^\theta w = 0$ e $h(x,t,0) = \tilde{u}(x,t,0) = u(x,t)$. Segue então do Lema 3.2.2 que $WF_s(u)|_0 \subset \mathrm{Char}(L^u)|_0$, onde L^u denota o sistema

$$L^u = (L_1^u, \ldots, L_n^u).$$

Uma vez que o ponto $p \in M$ foi tomado de forma arbitrária, concluimos que $WF_s(u) \subset T^0 M$, completando a demonstração do Teorema 3.1.1. $\square$

O resultado abaixo é uma consequência imediata do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.3.1 *Seja u uma solução de classe C^2 de um sistema involutivo Σ de classe G^s e suponha que a estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}^u$ gerada pelos operadores linearizados de Σ seja uma estrutura elíptica. Então u é uma função de classe G^s.*

Observação 3.3.1 *No caso de sistemas involutivos de classe C^∞, de edp's não lineares de primeira ordem definidos sobre variedades de classe C^∞, a técnica utilizada em nosso trabalho para o caso Gevrey pode ser aplicada de modo a demonstrar a versão C^∞ do teorema 3.1.1, usando neste caso, a noção de soluções aproximadas no contexto suave (ver, por exemplo, [As]). A construção de soluções aproximadas para sistemas, neste caso, pode ser encontrada em [T].*

Observação 3.3.2 *As técnicas apresentadas nesta tese permitem também estudar a micro-regularidade Gevrey das soluções u de classe C^2, reais, da equação*

$$u_t = f(x, t, u, u_x),$$

onde f é real, suave e Gevrey nas variáveis (x, t).

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Teorema Edge do Wedge em Estruturas Gevrey

Nesta seção, vamos utilizar nosso resultado de micro-regularidade para apresentar uma versão Gevrey do Teorema Edge do Wedge. Estabeleceremos aqui as nossas definições em variedades analíticas reais; entretanto, os resultados abordados permanecem válidos se substituirmos tais variedades por variedades de classe G^s.

Iniciamos por dar uma definição intrínseca de solução s-aproximada para estruturas involutivas.

Considere a G^s-estrutura involutiva $(M, \mathcal{V})$, sendo M uma variedade analítica real de dimensão N e $\mathcal{V}$ uma G^s-estrutura formalmente integrável de posto n.

Seja $X \subset M$ uma subvariedade de M, ou seja, X é um subespaço topológico de M que possui uma estrutura de variedade herdada de M. Mais especificamente, existe $m \leq N$ tal que, para todo $p \in X$, existe um sistema de coordenadas (U, x) de M em torno de p tal que $x(U \cap X)$ é um aberto de $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. É fácil ver que, nessas condições, X torna-se uma variedade analítica real de dimensão m.

Suponhamos que X é maximalmente real, ou seja, para todo $p \in X$, temos

$$\mathbb{C}T_pM = \mathbb{C}T_pX \oplus \mathcal{V}_p.$$

Observe que $m + n = N$.

Definição 4.1.1 *Sejam $(M, \mathcal{V})$ e $X \subset M$ como acima. Dizemos que uma função $u \in C^1(M)$ é uma solução s-aproximada de $\mathcal{V}$ se, para toda seção L de $\mathcal{V}$, existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo inteiro não negativo k,*

$$|Lu(p)| \leq C^{k+1}(k!)^{s-1} \left(\operatorname{dist}(p, X)\right)^k, \quad \forall\, p \in M. \tag{4.1.1}$$

Vamos agora dar uma caracterização local para soluções s-aproximadas.

Fixemos $p_0 \in X$. Uma vez que a inclusão $i : X \to M$ é uma imersão em p_0, temos, pela forma local das imersões, que existe uma carta local (U, y) de M, com $p_0 \in U$ e $y(p_0) = 0$, de modo que $X \cap U$ é um aberto coordenado em X, e existe um sistema de coordenadas $\varphi_X : X \cap U \to B \subset \mathbb{R}^m$ de X, em torno de p_0, onde B é uma bola centrada na origem em $\mathbb{R}^m$, tais que a função

$$h \doteq y \circ i \circ \varphi_X^{-1} : B \subset \mathbb{R}^m \to \Omega \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

com $\Omega = y(U)$, é dada por

$$h(x) = (x, 0), \quad \forall\, x \in B.$$

Daí,

$$y(U \cap X) = y \circ i(U \cap X) = h \circ \varphi_X(X \cap U) = h(B) = B \times \{0\}.$$

Assim, escrevendo $y = (x, t)$, com $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $t = (t_1, \ldots, t_n)$, concluimos que, localmente, podemos escrever X como

$$X = \{(x, 0) :\ x \in B \subset \mathbb{R}^m\}.$$

Logo, para $p \in U$, segue que

$$\operatorname{dist}(p, X) = \operatorname{dist}\left((x(p), t(p)), \{(x, 0) : x \in B\}\right) = |t(p)|. \tag{4.1.2}$$

Observemos ainda que o subespaço vetorial complexo $\mathbb{C}T_pX$ de $\mathbb{C}T_pM$ é gerado pelos vetores $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right)_p$, $k = 1, \ldots, m$, para todo $p \in U$.

Diminuindo U se necessário, podemos encontrar campos vetoriais

$$L_j' = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} \frac{\partial}{\partial t_\ell} + \sum_{k=1}^{m} b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

com coeficientes de classe G^s em U e tais que os vetores $L_{1p}', \ldots, L_{np}'$ geram $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in U$.

Afirmamos que a matriz $(a_{j\ell}(p))_{n \times n}$ é inversível, para todo $p \in U$. De fato, suponha que exista $p \in U$ que não verifica tal afirmação. Segue então que os vetores

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}(p) \left(\frac{\partial}{\partial t_\ell}\right)_p, \quad j = 1, \ldots, n$$

são linearmente dependentes. Assumimos então, sem perda de generalidade, que existem escalares $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{1\ell}(p)\left(\frac{\partial}{\partial t_\ell}\right)_p = \alpha_2\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{2\ell}(p)\left(\frac{\partial}{\partial t_\ell}\right)_p\right) + \cdots + \alpha_n\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{n\ell}(p)\left(\frac{\partial}{\partial t_\ell}\right)_p\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L'_{1p} &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{1\ell}(p)\left(\frac{\partial}{\partial t_\ell}\right)_p + \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \\
&= \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p + \\
&\quad -\left(\alpha_2\left(\sum_{k=1}^{m} b_{2k}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right) + \cdots + \alpha_n\left(\sum_{k=1}^{m} b_{nk}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)\right) + \\
&\quad +\alpha_2 L'_{2p} + \cdots + \alpha_n L'_{np}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbb{C}T_pM = \mathbb{C}T_pX \oplus \mathcal{V}_p$, concluimos que

$$L'_{1p} = \alpha_2 L'_{2p} + \cdots + \alpha_n L'_{np},$$

o que contradiz o fato de que os campos $L'_1, \ldots, L'_n$ são linearmente independentes em U.

Procedendo então como na demonstração da Proposição 1.3.2, podemos encontrar geradores locais de $\mathcal{V}$ da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

com $c_{jk} \in G^s(U)$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.

Observe que, como $\mathcal{V}$ é formalmente integrável e pela forma dos geradores acima, concluímos que

$$[L_i, L_j] = 0, \tag{4.1.3}$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

Seja agora u uma solução s-aproximada de $\mathcal{V}$ de classe C^1 em M. Podemos olhar para u, localmente, como uma função de classe C^1 definida num aberto contendo a origem em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Daí, como os campos L_j acima são seções de $\mathcal{V}$, fazendo a mesma identificação que nos permite olhar para os campos L_j como campos definidos em vizinhança da origem em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, segue da definição 4.1.1 e de (4.1.2) que, para todo $j = 1, \dots, n$, existe $C_j > 0$ tal que, para todo $k = 0, 1, 2, \dots,$

$$|L_j u(x,t)| \leq C_j^{k+1} (k!)^{s-1} |t|^k, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

Tomando-se então $C = \max\{C_j : j = 1, \dots, n\}$, temos que

$$|L_j u(x,t)| \leq C^{k+1} (k!)^{s-1} |t|^k, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega, \ j = 1, \dots, n. \tag{4.1.4}$$

Reciprocamente, supondo que vale (4.1.4), dada uma seção L de $\mathcal{V}$ definida em U, existem funções $g_j \in G^s(U)$ tais que

$$L = g_1 L_1 + \cdots + g_n Ln.$$

Considerando g_j, $j = 1, \dots, n$, como funções de classe G^s nas variáveis $(x,t) \in \Omega$ por meio do sistema de coordenadas, diminuindo Ω se necessário, seja $B > 0$ tal que $|g_j(x,t)| \leq B$, para todo $(x,t) \in \Omega$.

Assim, para todo $(x,t) \in \Omega$ e para cada $k = 0, 1, 2, \dots,$

$$|Lu(x,t)| \leq |g_1(x,t)||L_1 u(x,t)| + \cdots + |g_n(x,t)||L_n(x,t)| \leq nBC^{k+1}(k!)^{s-1}|t|^k, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

Tomando-se $C_1 = \max\{C, nBC\}$, concluimos que

$$|Lu(x,t)| \leq C_1^{k+1} (k!)^{s-1} |t|^k, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

Acabamos de mostrar então que, localmente, a propriedade de u ser solução s-aproximada de $\mathcal{V}$ pode ser caracterizada pelo seguinte: Existe $C > 0$ tal que, para cada $k = 0, 1, 2, \dots,$

$$|L_j u(x,t)| \leq C^{k+1} (k!)^{s-1} |t|^k, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega, \ j = 1, \dots, n, \tag{4.1.5}$$

onde Ω é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e os campos L_j são seções de $\mathcal{V}$ da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{4.1.6}$$

com $a_{jk} \in G^s(\Omega)$, sendo esta a forma como havíamos definido solução s-aproximada na definição 2.2.1.

Vamos agora definir o conceito de wedge em variedades analíticas reais. As definições e resultados a serem dados aqui são análogos aos encontrados, por exemplo, em [AB] e [AH]. Procuramos aqui dar as demonstrações de alguns resultados cujas provas foram omitidas em tais trabalhos.

Sendo $(M, \mathcal{V})$ e $X \subset M$ como antes, definimos, para $p \in X$, o seguinte subespaço vetorial da fibra $\mathcal{V}_p$

$$\mathcal{V}_p^X = \{L \in \mathcal{V}_p : \operatorname{Re} L \in T_pX\}. \tag{4.1.7}$$

Proposição 4.1.1 *$\mathcal{V}^X$ é um subfibrado real de $\mathcal{V}|_X$ de posto n. A aplicação*

$$\operatorname{Im} : \mathcal{V}|_X \to TM$$

que toma a parte imaginária induz um isomorfismo

$$\mathcal{V}|_X \cong \frac{TM|_X}{TX}.$$

Demonstração:

Fixemos $p \in X$. A aplicação linear $\operatorname{Im} : \mathcal{V}_p^X \to T_pM$ induz a aplicação

$$\varphi : \mathcal{V}_p^X \to \frac{T_pM}{T_pX}, \quad \varphi(v) = \operatorname{Im} v + T_pX = [\operatorname{Im} v].$$

Afirmamos que φ é sobrejetora. De fato, se $v \in T_pM$, uma vez que $\mathbb{C}T_pM = \mathcal{V}_p \oplus \mathbb{C}T_pX$, existem $L \in \mathcal{V}_p$ e $\omega \in \mathbb{C}T_pX$ tais que

$$iv = L + \omega.$$

Assim, como $\operatorname{Re}(iv) = 0$, temos que $\operatorname{Re} L = -\operatorname{Re} \omega \in T_pX$. Logo, $L \in \mathcal{V}_p^X$.

Ainda,

$$v = \operatorname{Im}(iv) = \operatorname{Im} L + \operatorname{Im} \omega$$

e, uma vez que $\operatorname{Im} \omega \in T_pX$, segue que

$$\varphi(L) = \operatorname{Im} L + T_pX = \operatorname{Im} L + \operatorname{Im} \omega + T_pX = v + T_pX = [v].$$

Portanto, φ é sobrejetora.

Temos ainda que φ é injetora pois, se $L \in \mathcal{V}_p^X$ e $\varphi(L) = 0$, então $\operatorname{Im} L \in T_pX$. Além disso, como $L \in \mathcal{V}_p^X$, segue que $L \in \mathcal{V}_p$ e $\operatorname{Re} L \in T_pX$. Assim,

$$L = \operatorname{Re} L + i \operatorname{Im} L \in \mathbb{C}T_pX.$$

Mas $\mathcal{V}_p \cap \mathbb{C}T_pX = \{0\}$ e assim, $L = 0$.

Logo,

$$\mathcal{V}_p^X \cong \frac{T_pM}{T_pX}.$$

Em particular, $\dim \mathcal{V}_p^X = N - m = n$ e, portanto, $\mathcal{V}^X$ é um subfibrado de $\mathcal{V}|_X$ de posto n e $\mathcal{V}^X \cong \frac{TM|_X}{TX}$. $\square$

Uma vez que existe subespaço n-dimensional N_p de T_pM tal que

$$T_pM = T_pX \oplus N_p,$$

segue que $\frac{T_pM}{T_pX} \cong N_p$ e assim, a Proposição 4.1.1 nos mostra que $\mathcal{V}_p^X$ é isomorfo ao complemento N_p de T_pX.

Definição 4.1.2 *Seja E uma subvariedade analítica de M de dimensão k. Dizemos que um conjunto aberto $\mathcal{W}$ é um **wedge** em M no ponto $p \in E$, com **edge** E se vale o seguinte: Existem vizinhanças $V \subset \mathbb{R}^N$ da origem e $U \subset M$ de p, um difeomorfismo analítico $F : V \to U$, com $F(0) = p$ e existe $B \times \Gamma \subset V$, onde B é uma bola centrada na origem em $\mathbb{R}^k$ e Γ é um cone aberto, convexo e truncado, com vértice em $0 \in \mathbb{R}^{N-k}$ tal que*

$$F(B \times \Gamma) = \mathcal{W} \quad e \quad F(B \times \{0\}) = E \cap U. \tag{4.1.8}$$

Exemplo 4.1.1 *Considere $\mathcal{W} = B \times \Gamma$, onde $B \subset \mathbb{R}^m$ é uma bola centrada na origem e $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ é um cone aberto, convexo e truncado. É fácil ver que $\mathcal{W}$ é um wedge em $\mathbb{R}^N$ com edge $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.*

Lema 4.1.1 *Seja $\mathcal{W}$ um wedge em M em um ponto p, com edge X, como na definição 4.1.2 e suponha que X é uma subvariedade maximalmente real. Então existem coordenadas locais $(x, t) = (x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n)$ definidas em um aberto $U \subset M$ e se anulando em $p \in X$, tais que, localmente, podemos representar*

$$X = \{(x, 0) : |x| < r\} \quad e \quad \mathcal{W} = X \times \Gamma,$$

onde Γ é um cone aberto, convexo e truncado em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração:

Basta tomar o difeomorfismo analítico $\psi = F^{-1} : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^N$, onde $F : V \subset \mathbb{R}^N \to U \subset M$ vem da definição 4.1.2, como sistema de coordenadas em torno de p e denotá-lo por $(x, t) = (x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n)$. $\square$

Definição 4.1.3 *Sejam E, $\mathcal{W}$ e $p \in E$ como na definição 4.1.2. O* ***wedge direção*** *$\Gamma_p(\mathcal{W}) \subset T_pM$ é definido como o interior do conjunto*

$$\{c^{'}(0)/c : [0,1) \to M \text{ é suave}, \; c(0) = p \text{ e } c(t) \in \mathcal{W}, \forall \; t > 0\}. \tag{4.1.9}$$

No exemplo 4.1.1, observamos que o wedge direção de $\mathcal{W} = B \times \Gamma$ é dado por $\Gamma_p(\mathcal{W}) = \mathbb{R}^k \times \Gamma^{'}$, onde $\Gamma^{'} = \{\lambda v : v \in \Gamma \text{ e } \lambda > 0\}$.

Seja Z um espaço vetorial real de dimensão N. Podemos facilmente ver que Z herda naturalmente uma estrutura de variedade analítica real. Seja ainda Y um subespaço vetorial de Z de dimensão k. Se $\mathcal{W}$ é um aberto de Z para o qual existe um isomorfismo de espaços vetoriais $F : \mathbb{R}^N \to Z$ e existe um cone aberto e convexo $\Gamma \subset \mathbb{R}^{N-k}$, com vértice na origem, de modo que

$$F(\mathbb{R}^k \times \Gamma) = \mathcal{W} \text{ e } F(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = Y,$$

então dizemos que $\mathcal{W}$ é um wedge linear em Z com edge Y. No caso em que $Y = 0$, dizemos que $\mathcal{W}$ é um cone em Z. É fácil ver que vale a seguinte propriedade: $\mathcal{W}$ é um cone em Z se, e somente se, para quaisquer $v \in \mathcal{W}$ e $\lambda > 0$, temos que $\lambda v \in \mathcal{W}$.

Lema 4.1.2 *Sejam E uma subvariedade de M e $\mathcal{W}$ um wedge em M no ponto $p \in E$, com edge E. Então $\Gamma_p(\mathcal{W})$ é um wedge linear em T_pM com edge T_pE.*

Demonstração:

Considere $F : V \subset \mathbb{R}^N \to U \subset M$, B e Γ como na definição 4.1.2. Definimos

$$G = dF_0 : \mathbb{R}^N \to T_pM,$$

a derivada de F no ponto $0 \in V$. Como F é um difeomorfismo, temos que G é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Definimos ainda o seguinte cone

$$\Gamma^{'} = \{\lambda v : v \in \Gamma \text{ e } \lambda > 0\}.$$

Vamos mostrar que $G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'}) = \Gamma_p(\mathcal{W})$ e $G(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = T_pE$.

Seja $G(x, 0) \in G(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Podemos encontrar $r > 0$ tal que $tx \in B$, para todo $-r < t < r$. Definimos então

$$\alpha : (-r, r) \to E, \quad \alpha(t) = F(tx, 0).$$

Como $F(B \times \{0\}) = E \cap U$, temos que, de fato, $\alpha(t) \in E$, para todo $t \in (-r, r)$. Note ainda que $\alpha(0) = F(0) = p$ e, se $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ é dada por $\xi(t) = (tx, 0)$, então

$$\alpha^{'}(0) = (F \circ \xi)^{'}(0) = dF_0(\xi^{'}(0)) = dF_0(x, 0) = G(x, 0).$$

Portanto, $G(x, 0) \in T_pE$ e assim, $G(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset T_pE$.

Como $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ é um subespaço de dimensão k e G é um isomorfismo, segue que $\dim(G(\mathbb{R}^k \times \{0\})) = \dim T_pE = k$ e, portanto, $G(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = T_pE$.

Seja agora $G(x, y) \in G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'})$. Considere $0 < r < 1$ tal que $(rx, ry) \in B \times \Gamma$. Definimos $\gamma : [0, r) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $\gamma(t) = (tx, ty)$ e $\tilde{c} : [0, r) \to M$ dada por $\tilde{c}(t) = F \circ \gamma(t)$.

Temos que $\tilde{c}(0) = F(0) = p$ e, para $0 < t < r$, temos que $(tx, ty) \in B \times \Gamma$ e assim, de (4.1.8), temos que $F(tx, ty) \in \mathcal{W}$. Logo, $\tilde{c}(t) \in \mathcal{W}$, para todo $0 < t < r$.

Ainda,

$$\tilde{c}^{'}(0) = dF_0(\gamma^{'}(0)) = G(x, y).$$

Considere agora $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 < \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em $\left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ e $\varphi(t) = \frac{r}{2}$, para todo $r \leq t < 1$. Temos que $0 < t\varphi(t) < r$, para todo $0 < t < 1$. De fato, se $0 < t < r$, então

$$t\varphi(t) \leq t < r,$$

e se $r \leq t < 1$, então

$$t\varphi(t) < \varphi(t) = \frac{r}{2} < r.$$

Definimos então $c : [0, 1) \to M$ por $c(t) = \tilde{c}(t\varphi(t))$. Segue que $c(0) = \tilde{c}(0) = p$ e, se $0 < t < 1$, então $0 < t\varphi(t) < r$ e assim, $c(t) = \tilde{c}(t\varphi(t)) \in \mathcal{W}$. Além disso,

$$c^{'}(0) = \tilde{c}^{'}(0)(t\varphi(t))^{'}(0) = \tilde{c}(0)(0.\varphi^{'}(0) + \varphi(0)) = \tilde{c}(0) = G(x, y).$$

Logo,

$$G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'}) \subset \{c^{'}(0)/c : [0, 1) \to M \text{ é suave, } c(0) = p \text{ e } c(t) \in \mathcal{W}, \forall\ t > 0\}$$

e, como $G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'})$ é aberto, concluimos que $G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'}) \subset \Gamma_p(\mathcal{W})$.

Finalmente, seja $v \in \Gamma_p(\mathcal{W}) \subset T_pM$. Daí, $v = c^{'}(0)$, onde $c : [0, 1) \to M$ é suave, $c(0) = p$ e $c(t) \in \mathcal{W}$, para todo $t > 0$.

Considere as funções $a : [0, 1) \to \mathbb{R}^k$, $b : [0, 1) \to \mathbb{R}^{N-k}$ tais que

$$(a(t), b(t)) = F^{-1} \circ c(t).$$

Note que a e b são suaves, $a(0) = 0 \in \mathbb{R}^k$, $b(0) = 0 \in \mathbb{R}^{N-k}$ e $b(t) \in \Gamma$, para todo $t > 0$. Além disso,

$$(a^{'}(0), b^{'}(0)) = d(F^{-1})_p(c^{'}(0)) = (dF_0)^{-1}(c^{'}(0)) = G^{-1}(v).$$

Resta-nos então agora mostrar que $b^{'}(0) \in \Gamma^{'}$, pois, neste caso, teremos $(a^{'}(0), b^{'}(0)) \in \mathbb{R}^k \times \Gamma^{'}$ e $v = G(a^{'}(0), b^{'}(0))$, mostrando então que $\Gamma_p(\mathcal{W}) \subset G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'})$.

Uma vez que $b(t) \in \Gamma$, segue que, para todo $t > 0$, $\frac{b(t)}{t} \in \Gamma^{'}$. Assim, como $b^{'}(0) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{b(t)}{t}$, temos que $b^{'}(0) \in \overline{\Gamma^{'}}$.

Uma vez que $v \in \Gamma_p(\mathcal{W})$ e $\Gamma_p(\mathcal{W})$ é aberto, temos que existe $U \subset T_pM$ aberto tal que $v \in U \subset \Gamma_p(\mathcal{W})$. Aplicando a mesma idéia utilizada acima, concluimos que $\pi_{N-k}(G^{-1}(U)) \subset \overline{\Gamma^{'}}$, onde

$$\pi_{N-k} : \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} \to \mathbb{R}^{N-k}$$

é a projeção usual. Como $b^{'}(0) \in \pi_{N-k}(G^{-1}(U))$ e este último é aberto, segue que $b^{'}(0) \in \Gamma^{'}$.

Portanto, $G(\mathbb{R}^k \times \Gamma^{'}) = \Gamma_p(\mathcal{W})$ e $G(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = T_pE$, ou seja, $\Gamma_p(\mathcal{W})$ é um wedge linear em T_pM com edge T_pE. □

Nas mesmas condições anteriores, denotamos

$$\Gamma(\mathcal{W}) = \bigcup_{p \in E} \Gamma_p(\mathcal{W}).$$

Seja $(M, \mathcal{V})$ uma estrutura involutiva Gevrey, como antes. Suponhamos que $\mathcal{W}$ é um wedge em M, com um edge maximalmente real X. Definimos

$$\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) = \{L \in \mathcal{V}_p^X : \operatorname{Im} L \in \Gamma_p(\mathcal{W})\}. \tag{4.1.10}$$

Lema 4.1.3 *Sejam $(M, \mathcal{V})$ estrutura involutiva de classe G^s e $\mathcal{W}$ um wedge em M no ponto $p \in X$, com edge maximalmente real X. Então $\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$ é um wedge linear em $\mathcal{V}_p^X$ com edge $\{0\}$, ou seja, é um cone.*

Demonstração:

Pelo Lema 4.1.2, temos que $\Gamma_p(\mathcal{W})$ é um wedge linear em T_pM com edge T_pX. Ou seja, existem um isomorfismo $G : \mathbb{R}^N \to T_pM$ e um cone aberto e convexo $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, com vértice em 0, tais que

$$G(\mathbb{R}^m \times \Gamma) = \Gamma_p(\mathcal{W}) \;\text{ e }\; G(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = T_pX.$$

Pela Proposição 4.1.1, temos que a aplicação linear

$$\varphi : \mathcal{V}_p^X \to \frac{T_pM}{T_pX}, \quad \varphi(v) = \operatorname{Im} v + T_pX$$

é um isomorfismo. Denotemos por π_n a projeção $\pi_n : \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Definimos então $\tilde{G} : \frac{T_pM}{T_pX} \to \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{G}(v + T_pX) = \pi_n(G^{-1}(v)).$$

Temos que $\tilde{G}$ está bem definida e é injetora pois, dados $v_1, v_2 \in T_pM$, temos que

$$\begin{aligned} v_1 + T_pX = v_2 + T_pX &\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in T_pX \\ &\Leftrightarrow G^{-1}(v_1 - v_2) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \\ &\Leftrightarrow \pi_n(G^{-1}(v_1)) - \pi_n(G^{-1}(v_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{G}(v_1 + T_pX) = \tilde{G}(v_2 + T_pX). \end{aligned}$$

Uma vez que $\tilde{G}$ é linear e $\dim \frac{T_pM}{T_pX} = n$, concluimos que $\tilde{G}$ é um isomorfismo.

Considere então $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}_p^X$ dada por $F = \varphi^{-1} \circ \tilde{G}^{-1}$. Temos que F é isomorfismo e $F^{-1} = \tilde{G} \circ \varphi$.

Uma vez que $\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) = \{L \in \mathcal{V}_p^X : \operatorname{Im} L \in \Gamma_p(\mathcal{W})\}$, temos que

$$\begin{aligned} F^{-1}(\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W})) &= \tilde{G}(\varphi(\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W}))) \\ &= \tilde{G}(\{v + T_pX : v \in \Gamma_p(\mathcal{W})\}) \\ &= \pi_n(\{G^{-1}(v) : v \in \Gamma_p(\mathcal{W})\}) \\ &= \pi_n(G^{-1}(\Gamma_p(\mathcal{W}))) \\ &= \pi_n(\mathbb{R}^m \times \Gamma) = \Gamma. \end{aligned}$$

Assim, $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}_p^X$ satisfaz $F(\Gamma) = \Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$ e portanto, $\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$ é um cone em $\mathcal{V}_p^X$. $\square$

Finalmente, definimos

$$\Gamma_p^T(\mathcal{W}) = \{\operatorname{Re} L : L \in \Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W})\}. \tag{4.1.11}$$

Como $\Gamma_p^{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$ é um cone aberto em $\mathcal{V}_p^X$, é fácil ver que $\Gamma_p^T(\mathcal{W})$ é um cone aberto em $(\operatorname{Re} \mathcal{V}_p) \cap T_pX$. Escrevemos

$$\Gamma^T(\mathcal{W}) = \bigcup_{p \in X} \Gamma_p^T(\mathcal{W}). \tag{4.1.12}$$

Se $\mathcal{W}$ é um wedge em M com edge uma subvariedade maximalmente real X, dizemos que uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{W})$ é uma solução s-aproximada de $\mathcal{V}$ se, para toda seção L de $\mathcal{V}$, $Lf \in L^1_{loc}(\mathcal{W})$ e vale (4.1.1), para todo $p \in \mathcal{W}$.

O **polar** de $\Gamma^T(\mathcal{W})$ no espaço cotangente T^*X, denotado por $(\Gamma^T(\mathcal{W}))^0$, é definido por

$$(\Gamma^T(\mathcal{W}))^0 = \bigcup_{p \in X} (\Gamma_p^T(\mathcal{W}))^0,$$

onde

$$(\Gamma_p^T(\mathcal{W}))^0 = \{\xi \in T_p^*X \backslash \{0\} : \langle \xi, v \rangle \geq 0, \ \ \forall v \in \Gamma_p^T(\mathcal{W})\}.$$

Lema 4.1.4 *Sejam* $(M, \mathcal{V})$ *uma* G^s*-estrutura involutiva, onde* M *é uma variedade analítica real,* $X \subset M$ *é uma subvariedade maximalmente real e* $\mathcal{W}$ *um wedge em* M *com edge* X*. Suponha que* $u \in \mathcal{D}'(X)$ *é o valor de fronteira de uma solução* s*-aproximada* $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{W})$*. Então*

$$WF_s(u) \subset (\Gamma^T(\mathcal{W}))^0.$$

Demonstração:

Segue do Lema 4.1.1 que existe um sistema de coordenadas (x, t) definido em vizinhança U de um ponto $p \in X$ e se anulando em p tal que, em U,

$$X = \{(x, 0) : |x| < r\}$$

e

$$\mathcal{W} = X \times \Gamma,$$

onde Γ é um cone aberto, convexo e truncado em $\mathbb{R}^n$.

Uma vez que X é maximalmente real, conforme feito anteriormente, podemos encontrar geradores locais L_j de $\mathcal{V}$ da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Note que, como $\mathcal{V}$ é involutiva, os geradores L_j comutam. Pelo Lema 2.2.2, existem funções $Z_1(x, t), \ldots, Z_m(x, t)$ de classe G^s em vizinhança da origem, que são soluções s-aproximadas do sistema $L_j Z = 0$, $j = 1, \ldots, n$ e são tais que $Z_k(x, 0) = x_k$, para todo $k = 1, \ldots, m$. Segue do Lema 4.2.4 (Apêndice) que podemos escrever

$$Z_k(x, t) = x_k + \Psi_k(x, t) \cdot t,$$

onde $\Psi_k = (\Psi_{k1}, \ldots, \Psi_{kn})$. Denotamos $\Psi = (\Psi_{kj})_{m \times n}$.

Note que

$$-a_{jk}(0, 0) = \Psi_{kj}(0, 0), \quad \forall\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m.$$

Afirmamos agora que

$$\mathcal{V}_0^X = [iL_j|_0 : 1 \leq j \leq n]_{\mathbb{R}}.$$

De fato, para $1 \leq j \leq n$, temos que $iL_j|_0 \in \mathcal{V}_0$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(iL_j|_0) &= \operatorname{Re}\left(i \left.\frac{\partial}{\partial t_j}\right|_0 + i \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(0, 0) \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_0 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Im} \Psi_{kj}(0, 0) \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_0 \in T_0 X. \end{aligned}$$

Logo, $[iL_j|_0 : 1 \leq j \leq n]_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_0^X$ e, como $\mathcal{V}_0^X$ tem dimensão real n, segue que tais espaços são iguais.

Sabemos que o wedge direção é dado por

$$\Gamma_0(\mathcal{W}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^m \times \Gamma),$$

onde φ é o difeomorfismo da definição de wedge. Então, no nosso caso, sendo $\{e_1, \ldots, e_N\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(\mathcal{W}) &= \{d\varphi_0(a,b) : a \in \mathbb{R}^m, b \in \Gamma\} \\
&= \left\{ d\varphi_0\left(\sum_{j=1}^m a_j e_j\right) + d\varphi_0\left(\sum_{j=1}^n b_j e_{m+j}\right) : a \in \mathbb{R}^m, b \in \Gamma \right\} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^m a_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_0 + \sum_{j=1}^n b_j \left.\frac{\partial}{\partial t_j}\right|_0 : a \in \mathbb{R}^m, b \in \Gamma \right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) &= \left\{ L \in \mathcal{V}_0^X : \operatorname{Im} L \in \Gamma_0(\mathcal{W}) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^n i b_j L_j|_0 : b \in \Gamma \right\}.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^T(\mathcal{W}) &= \left\{ \operatorname{Re} L : L \in \Gamma_0^{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) \right\} \\
&= \left\{ \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^n i b_j L_j|_0\right) : b \in \Gamma \right\} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^n b_j \left(\sum_{k=1}^m \operatorname{Im}\Psi_{kj}(0,0) \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_0 \right) : b \in \Gamma \right\} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n b_j \operatorname{Im}\Psi_{kj}(0,0) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_0 : b \in \Gamma \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_0^T(\mathcal{W}))^0 &= \{\xi \in T_0^*X \backslash \{0\} : \langle \xi, v \rangle \geq 0, \ \forall\, v \in \Gamma_0^T(\mathcal{W})\} \\
&= \{\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\} : \xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0) b \geq 0, \ \forall b \in \Gamma\}.
\end{aligned}$$

Assim, se $\xi^0 \notin (\Gamma_0^T(\mathcal{W}))^0$ então existe $T \in \Gamma$ tal que $\xi \cdot \operatorname{Im}\Psi(0,0)T < 0$. Procedendo agora de modo análogo ao que fizemos na demonstração do Lema 3.2.1, concluimos que

$\xi^0 \notin WF_s(u)$. Repetindo o argumento para todos os pontos de X, concluimos a demonstração do Lema. $\square$

Segue como consequência do Lema acima o seguinte

Teorema 4.1.1 *(Teorema Edge do Wedge) Sejam $\mathcal{W}^+$ e $\mathcal{W}^-$ wedges em M, com edge X, cujas direções são opostas, ou seja, $\Gamma_p(\mathcal{W}^+) = -\Gamma_p(\mathcal{W}^-)$. Se $u \in \mathcal{D}'(X)$ é o valor de fronteira de uma solução s-aproximada f^+ de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}^+$ e também o valor de fronteira de uma solução s-aproximada f^- de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}^-$, então*

$$WF_s(u)|_p \subset i_X^*(T_p^0 M).$$

A demonstração do teorema acima é idêntica à demonstração que encontramos, por exemplo, em [AH].

4.2 Demonstrações de alguns resultados

Lema 4.2.1 *Seja $s > 1$ e sejam C, L constantes positivas arbitrárias, com $C \geq 1$ e $L \geq 1$. Se M é o menor inteiro tal que $M \geq \frac{L}{s}$, então existe uma constante $C_1 > 0$, independente de L mas dependente de C tal que*

$$C^{M+1} M^{sM} \leq C_1 (C_1 L)^L.$$

Ainda, se N é o menor inteiro tal que $N \geq sL$, então existe uma constante C_2, independente de L, mas dependente de C, tal que

$$C(CN)^N \leq C_2^{L+1} L^{sL}.$$

Demonstração: Seja M o menor inteiro maior ou igual a $\frac{L}{s}$. Daí, $M-1<\frac{L}{s}\leq M$. Logo,

$$\begin{aligned}
C^{M+1}M^{sM} &\leq C^{\frac{L}{s}+2}\left(\frac{L}{s}+1\right)^{s\left(\frac{L}{s}+1\right)}\\
&\leq C^{\frac{L}{s}+2}\left(\frac{L}{s}+L\right)^{L+s}\\
&= C^{\frac{L}{s}+2}\left(L\left(\frac{1}{s}+1\right)\right)^{L+s}\\
&= C^{\frac{L}{s}+2}\left(\frac{s+1}{s}\right)^{L+s}L^{L+s}\\
&\leq C^{\frac{L}{s}+2}\left(\frac{s+1}{s}\right)^{L+s}\left(e^{L}\right)^{s}L^{L}\\
&= \left(C^{\frac{1}{s}}\left(\frac{s+1}{s}\right)e^{s}\right)^{L}C^{2}\left(\frac{s+1}{s}\right)^{s}L^{L}\\
&\leq C_1(C_1L)^{L},
\end{aligned}$$

onde $C_1=\max\{C^{\frac{1}{s}}\left(\frac{s+1}{s}\right)e^{s},C^{2}\left(\frac{s+1}{s}\right)^{s}\}$.

Seja agora N o menor inteiro maior ou igual a sL. Então, $N-1<sL\leq N$. Assim,

$$\begin{aligned}
C(CN)^{N} &= C^{N+1}N^{N}\\
&\leq C^{sL+2}(sL+1)^{sL+1}\\
&\leq C^{sL+2}(2sL)^{sL+1}\\
&= C^{sL+2}(2s)^{sL+1}LL^{sL}\\
&\leq \left(C^{s}(2s)^{s}e\right)^{L}C^{2}2sL^{sL}\\
&\leq C_2^{L+1}L^{sL},
\end{aligned}$$

onde $C_2=\max\{C^{s}(2s)^{s}e,C^{2}2s\}$, completando a demonstração do lema. □

Lema 4.2.2 *Se $Z=(Z^1,\ldots,Z^m)$ é de classe C^1 em um aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, então*

$$d_xZ(x,t)=\det Z_x(x,t)dx.$$

Demonstração: Pelo que conhecemos da teoria de determinantes, se $A=(a_{ij})_{m\times m}$, então

$$\det A=\sum_{j_1,\ldots,j_m}(\text{sinal }\sigma(j_1,\ldots,j_m))a_{1j_1}...a_{mj_m},$$

onde $j_1,\ldots,j_m$ são todos distintos e $\sigma(j_1,\ldots,j_m)$ denota a permutação do conjunto $\{1,2,\ldots,m\}$ tal que $\sigma(i)=j_i,\ i=1,\ldots,m$.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
d_x Z &= d_x Z^1 \wedge \ldots \wedge d_x Z^m \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{m} \frac{\partial Z^1}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j_m=1}^{m} \frac{\partial Z^m}{\partial x_{j_m}} dx_{j_m} \right) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_m} \frac{\partial Z^1}{\partial x_{j_1}} \ldots \frac{\partial Z^m}{\partial x_{j_m}} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_m} \quad (j_1, \ldots, j_m \text{ distintos}) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_m} \frac{\partial Z^1}{\partial x_{j_1}} \ldots \frac{\partial Z^m}{\partial x_{j_m}} (\text{sinal } \sigma^{-1}(j_1, \ldots, j_m)) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_m} \frac{\partial Z^1}{\partial x_{j_1}} \ldots \frac{\partial Z^m}{\partial x_{j_m}} (\text{sinal } \sigma(j_1, \ldots, j_m)) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m,
\end{aligned}$$

uma vez que sinal $\sigma =$ sinal σ^{-1} para toda permutação σ. Como $\dfrac{\partial Z^i}{\partial x_{j_k}}$ são as entradas da matriz Z_x, temos que

$$d_x Z(x,t) = \det Z_x(x,t) dx,$$

concluindo a demonstração do lema. $\square$

Lema 4.2.3 *Se Z é como no lema acima, então*

$$dt \wedge dZ = (-1)^m d_x Z(x,t) dt.$$

Demonstração: Tendo em vista o lema anterior, podemos escrever

$$\begin{aligned}
dt \wedge dZ &= dt \wedge dZ^1 \wedge \ldots \wedge dZ^m \\
&= dt \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} Z^1_{x_j} dx_j + Z^1_t dt \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} Z^m_{x_j} dx_j + Z^m_t dt \right) \\
&= dt \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} Z^1_{x_j} dx_j \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} Z^m_{x_j} dx_j \right) \\
&= dt \wedge \det Z_x(x,t) dx \\
&= (-1)^m \det Z_x(x,t) dx \wedge dt \\
&= (-1)^m d_x Z(x,t) dt,
\end{aligned}$$

completando a prova do lema. $\square$

Lema 4.2.4 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *e* $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ *abertos e considere* $Z_k(x,t,\zeta_0,\zeta)$, $k = 1,\ldots,m$, *funções de classe* C^∞ *em* $(x,t) \in \Omega$ *e holomorfas em* $(\zeta_0,\zeta) \in \mathcal{N}$. *Suponha que*

$$Z_k(x,0,\zeta_0,\zeta) = x_k, \quad \forall\ k = 1,\ldots,m.$$

Então, existem funções $\Psi_k(x,t,\zeta_0,\zeta)$, $\Psi_k = (\Psi_{k1},\ldots,\Psi_{kn})$ *e* $k = 1,\ldots,m$, *de classe* C^∞ *em* (x,t) *e holomorfas em* (ζ_0,ζ), *tais que*

$$Z_k(x,t,\zeta_0,\zeta) = x_k + \Psi_k(x,t,\zeta_0,\zeta)\cdot t.$$

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{R}$. Para (x,t,ζ_0,ζ) fixos, definimos $\lambda_k(r) \doteq Z_k(x,rt,\zeta_0,\zeta)$. Daí,

$$\begin{aligned}
Z_k(x,t,\zeta_0,\zeta) - x_k &= \lambda_k(1) - \lambda_k(0) \\
&= \int_0^1 \lambda_k'(r)dr \\
&= \int_0^1 \left(t_1 \frac{\partial Z_k}{\partial t_1}(x,rt,\zeta_0,\zeta) + \cdots + t_n \frac{\partial Z_k}{\partial t_n}(x,rt,\zeta_0,\zeta) \right) dr \\
&= t_1 \int_0^1 \frac{\partial Z_k}{\partial t_1}(x,rt,\zeta_0,\zeta)dr + \cdots + t_n \int_0^1 \frac{\partial Z_k}{\partial t_n}(x,rt,\zeta_0,\zeta)dr \\
&\doteq t_1 \Psi_{k1}(x,t,\zeta_0,\zeta) + \cdots + t_n \Psi_{kn}(x,t,\zeta_0,\zeta) \\
&= \Psi_k(x,t,\zeta_0,\zeta)\cdot t,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do lema. $\square$

Referências Bibliográficas

[AB] Adwan, Z. e Berhanu, S., *Edge of the wedge theory in involutive structures*, Asian J. Math., **11, No. 1** (2007), 001–018.

[AH] Adwan, Z. e Hoepfner, G., *A generalization of Borel's theorem and microlocal Gevrey regularity in involutive structures*, J. Diff. Equations, **245, No. 10** (2008), 2846–2870.

[As] Asano, C.H., *On the C^∞ wave-front set of solutions of first-order nonlinear PDE's*, Proc. Amer. Math. Soc., **123, No. 10** (1995), 3009–3019.

[BP] Barostichi, R.F. e Petronilho, G., *Gevrey micro-regularity for solutions to first order nonlinear PDE*, J. Diff. Equations, **247** (2009), 1899–1914.

[B1] Berhanu, S., *On involutive systems of first-order nonlinear pdes*, Birkhäuser series "Trends in Mathematics", to appear.

[B2] Berhanu, S., *On microlocal analyticity of solutions of first-order nonlinear PDE*, Ann. Inst. Fourier, **59, No. 4**, (2009), 1267–1290.

[BCH] Berhanu, S., Cordaro, P.D. e Hounie, J., An introduction to involutive structures, Cambridge University Press, (2008).

[BI] Brós, J. e Iagolnitzer, D., *Causality and local analyticity; mathematical study*, Proceed. Conf. sur la théorie de la renormalisation, Ann. Inst. Poincaré **18** (1973), 147–184.

[Br] Bruna, J., *An extension of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions*, J. London Math. Soc., **2** (1980), 495–505.

[Ca] Carleman, T., Léçons sur les fonctions quasi-analytiques, Paris, 1926.

[Ch] Chemin, J.Y., *Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux derivées partielles non semilinéaires*, Duke Math. J., **56** (1988), 431–469.

[Chr] Christ, M., *Intermediate optimal Gevrey exponents occur*, Comm. PDE, **22(3-4)** (1997), 359–379.

[Dz] Džanašija, G.A., *Carleman's problem for functions of the Gevrey class*, Soviet Math. Dokl., **3** (1962), 969–972.

[HT] Hanges, N. e Treves, F., *On the analyticity of solutions of first-order nonlinear PDE*, Trans. Amer. Math. Soc., **331** (1992), 627–638.

[H] Hörmander, L., The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **Vol. 1**, Berlin: Springer-Verlag, (1983).

[IS] Iagolnitzer, D. e Stapp, H.P., *Macroscopic causality and physical region analyticity in S-matrix theory*, Comm. Math. Phys., **14** (1969), 15–55.

[K] Komatsu, H., *The Implicit Function Theorem for Ultradifferentiable Mappings*, Proc. Japan Acad., **55** (1979), Ser. A, 69–72.

[L] Lima, E. L., Curso de Análise, **Vol. 2**, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1981).

[LMX] Lerner, N., Morimoto, Y. e Xu, C. -J., *Instability of the Cauchy-Kovalevskya solution for a class of nonlinear system*, preprint.

[M] G. Metivier, *Remarks on the well-posedness of the nonlinear Cauchy problem*, Contemp. Math., **368** (2005), 337-356.

[Mi] Mityagin, B.S., *An indefinitely differentiable function with the values of its derivatives given at a point*, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 594–597.

[R] Rodino, L., Linear Partial Differential operators in Gevrey spaces, World Scientific, (1993).

[T] Treves, F., Hypo-analytic structures: local theory, Princeton University Press, (1992).