

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# **Existência Global de Soluções para alguns Sistemas de Leis de Conservação**

Ricardo Edem Ferreira

São Carlos - SP

2010

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Existência Global de Soluções para alguns Sistemas de Leis de Conservação**

Ricardo Edem Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**São Carlos - SP**

**2010**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

F383eg

Ferreira, Ricardo Edem.

Existência global de soluções para alguns sistemas de leis de conservação / Ricardo Edem Ferreira. -- São Carlos : UFSCar, 2010.

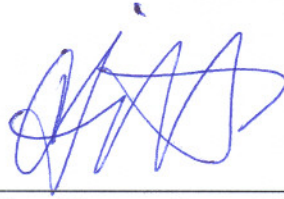
119 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Equações diferenciais. 2. Equações de AW-Rasclé. 3. Método de Glimm. 4. p-sistema relativístico. 5. Método wave-front tracking. I. Título.

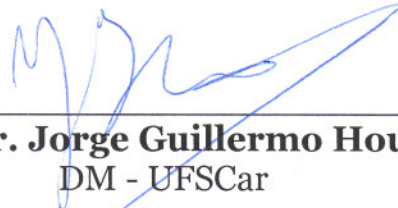
CDD: 515.35 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



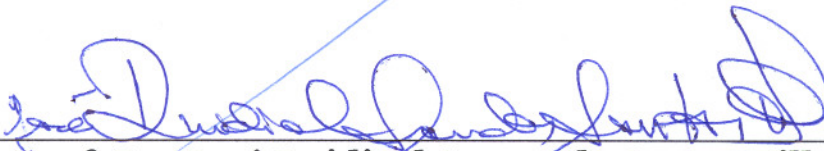
---

**Prof. Dr. Cezar Issao Kondo**  
DM - UFSCar



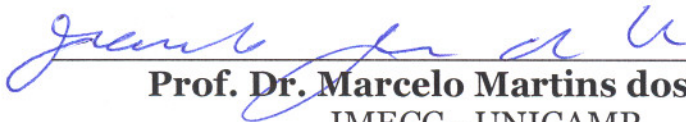
---

**Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie**  
DM - UFSCar



---

**Prof. Dr. José Ruidival Soares do Santos Filho**  
DM - UFSCar



---

**Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos**  
IMECC - UNICAMP



---

**Prof. Dr. Wladimir Augusto das Neves**  
IM - UFRJ



Aos meus pais Francisco e Francisca.

Amo muito vocês.

# *Agradecimentos*

---

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que acontece em minha vida.

Aos meus pais e a toda minha família.

Ao Prof. Dr. Cezar Issao Kondo, pela coordenação, dedicação, apoio e paciência.

Em especial a Profa. Dra. Catarina Mendes de Jesus.

À minha querida Ana Claudia.

Às amigas, Adriana e Simone.

Aos amigos e aos professores do PPG-M.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

# *Resumo*

---

Neste trabalho, estudamos a construção de soluções fracas para alguns sistemas de leis de conservação e para uma lei de conservação escalar.

Para o p-sistema relativístico aplicamos o método Wave-front tracking baseado em Bressan, quando a variação total do dado inicial é localmente limitada. O nosso método de construção é um pouco mais simples que os métodos estudados por outros autores.

Para as equações de Aw-Rascle aplicamos o método de Glimm e o método Wave-front tracking permitindo ou não o aparecimento de vácuo nas soluções aproximadas, quando a variação total do dado inicial é localmente limitada.

Para a lei de conservação escalar estudamos a construção de soluções fracas admissíveis utilizando o método de Glimm e a aproximação poligonal.

# *Abstract*

---

In this work, we studied the construction of weak solutions for some systems conservation laws and for a scalar conservation laws

For the p-systems relativistic we use the Wave-front tracking based on Bressan, when the total variation of the initial data is locally bounded. We construct is somewhat more simpler than in methods studied by other authors.

For the equation of Aw-Rasclé we apply the method of Glimm and the method Wave-front tracking, we consider the appearance of the vacuum, when the total variation of the initial data is locally bounded.

For the scalar conservation law we study the construction of admissible weak solutions using the Glimm method and the polygonal approximations.



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Matemática preliminar</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Equações de fluxo relativístico</b>	<b>10</b>
3.1	Autovalores, autovetores e invariantes de Riemann . . . . .	12
3.2	O problema de Riemann . . . . .	15
3.2.1.	Ondas de rarefação . . . . .	15
3.2.2.	Ondas de choque . . . . .	18
3.2.3.	Propriedades das ondas de choque . . . . .	25
3.2.4.	Parametrização . . . . .	28
3.2.5.	Solução do problema de Riemann . . . . .	34
3.3	Aproximação por ondas front tracking . . . . .	38
3.3.1.	O algoritmo wave-front tracking . . . . .	43
3.4	Estimativas de interação . . . . .	50
3.4.1.	Estimativas locais de interação . . . . .	51
3.4.2.	Estimativas globais de interação . . . . .	56

3.5	Decomposição por caminhos . . . . .	58
3.5.1.	Estimativa sobre o tamanho total das ondas geradas por interações . . . . .	64
3.5.2.	Estimativas sobre as ondas não físicas . . . . .	68
3.6	Existência de soluções . . . . .	71
3.7	Variação total localmente limitada . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Equações de Aw-Rascle</b>	<b>76</b>
4.1	O problema de Riemann . . . . .	78
4.1.1.	Onda de rarefação . . . . .	78
4.1.2.	Onda de choque . . . . .	80
4.1.3.	Contato de descontinuidade . . . . .	83
4.1.4.	Parametrização . . . . .	83
4.1.5.	Solução do problema de Riemann . . . . .	85
4.2	Construção de soluções pelo método de Glimm . . . . .	88
4.3	Construção de soluções pelo método wave-front tracking . . . . .	94
4.4	Variação total localmente limitada . . . . .	96
4.5	Problema de Riemann com aparecimento de vácuo . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Lei de conservação escalar</b>	<b>103</b>
5.1	Solução Aproximada . . . . .	104
5.2	Convergência . . . . .	110
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>116</b>

# Introdução

Os Sistemas de Leis de Conservação Hiperbólicos são importantes modelos matemáticos para uma variedade de fenômenos físicos que ocorrem em fluxo de tráfego, dinâmica dos gases, dinâmica dos fluidos, teoria da elasticidade entre outros. Em geral, a solução clássica do problema de Cauchy para uma lei de conservação existe apenas localmente, para um tempo finito, mesmo que o dado inicial seja suave. Isso significa que descontinuidades podem aparecer na solução em um tempo finito. Como a solução é descontínua e não satisfaz a equação diferencial parcial dada, no sentido clássico, buscamos soluções que satisfazem a equação no sentido fraco.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a construção de soluções fracas para alguns sistemas de leis de conservação aplicando o método wave-front tracking baseado em Bressan [6], quando a variação total do dado inicial é localmente limitada. O nosso método de construção é um pouco mais simples que os métodos estudados por outros autores. Também estudamos a construção de soluções fracas utilizando o método de Glimm [17].

Este trabalho está dividido em três partes, além desta introdução e do segundo capítulo que mostra alguns resultados básicos que usaremos ao longo do trabalho.

No Capítulo 3, consideramos o sistema de leis de conservação

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{(p+\rho c^2)v^2}{c^2(c^2-v^2)} + \rho \right) + \partial_x \left( \frac{(p+\rho c^2)v}{c^2-v^2} \right) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{(p+\rho c^2)v}{c^2-v^2} \right) + \partial_x \left( \frac{(p+\rho c^2)v^2}{c^2-v^2} + p \right) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty). \end{cases} \quad (1.1)$$

Esse sistema, também chamado de  $p$ -sistema relativístico, descreve o fluxo de um gás isotérmico relativístico em coordenadas de Euler, onde a constante  $c$  é a velocidade da luz,  $\rho$  é a densidade,  $p(\rho) = a^2\rho$  é a pressão,  $a > 0$  é uma constante,  $v \in (-c, c)$  é a velocidade do gás. O dado inicial é da forma  $(\rho_0(x), v_0(x))$ , onde  $v_0(x)$  e  $\rho_0(x) \geq \underline{\rho} > 0$  são funções limitadas e com variação total localmente limitada.

Formalmente, tomando o limite quando  $c \rightarrow \infty$ , obtemos a versão não relativística desse sistema

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Para o sistema (1.2), no caso isentrópico (entropia constante) não relativístico, onde  $p(\rho) = a^2\rho^\gamma$ ,  $a > 0$  é uma constante e  $\gamma \geq 1$  é a constante adiabática do gás, Glimm [17] mostrou a existência de solução fraca global, quando o dado inicial tem variação total suficientemente pequena. No caso isotérmico,  $\gamma = 1$ , Nishida [27] provou a existência de solução fraca quando o dado inicial tem variação total localmente limitada. Quando  $\gamma > 1$ , Nishida-Smoller [28] demonstraram a existência de solução fraca quando  $(\gamma - 1)$  vezes a variação total do dado inicial é suficientemente pequeno, o que generaliza [27]. Asakura [1] mostrou que a variação total da solução de Nishida [27], decai fortemente para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ , se o dado inicial tem variação total limitada e é constante para  $|x|$  suficientemente grande, no caso isotérmico.

Para o sistema relativístico (1.1), no caso isotérmico, quando  $p(\rho) = a^2\rho$ , Smoller-Temple [34] demonstraram a existência de solução fraca para o problema de Riemann e para o problema de Cauchy, quando o dado inicial tem variação total limitada, o que em certo sentido é uma generalização de [27]. Chen [9] mostrou a solução para o problema de Riemann quando  $p(\rho)$  é uma função suave de  $\rho$ ,  $p'(\rho) > 0$  e  $p''(\rho) \geq 0$ , e a solução do problema de Cauchy quando  $p(\rho) = a^2\rho^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ , e o dado inicial tem variação total limitada. Frid-Perepelitsa [16] estudaram a estabilidade da solução fraca quando o dado inicial é periódico. Esses resultados estão baseados no método de Glimm [17].

Em Asakura [2], o método wave-front tracking foi aplicado no caso isentrópico não relativístico, quando o dado inicial tem variação total limitada, e  $\gamma > 1$ . Em Asakura [3], o método front tracking é aplicado no caso não isentrópico não relativístico. No caso relativístico, Colombo-Risebro

[11] estudaram uma classe de leis de conservação onde o dado inicial tem variação total limitada, usando semigrupos. Chen-Li [10] estabeleceram a unicidade da solução de Riemann em uma classe de soluções entropicas em  $L^\infty \cap BV_{loc}$  com oscilação limitada, fazendo uma análise global do comportamento das ondas. Calvo-Colombo-Frid [8] provaram a  $L^1$  estabilidade de soluções periódicas usando semigrupos.

Usando o método wave-front tracking e supondo que a variação total do dado inicial é limitada, construímos uma solução fraca para o sistema (1.1). Primeiro verificamos que as curvas de choque têm boa geometria. Parametrizamos as curvas no sistema de coordenadas definido pelos invariantes de Riemann, mostramos que o problema de Riemann pode ser resolvido, mesmo quando os estados laterais tem “grande” amplitude, e encontramos estimativas sobre as interações entre as ondas. Aplicamos a decomposição por caminhos ([1], [2], [3] e [35]) para estimar o tamanho total das ondas que são criadas pelas interações entre ondas front e mostramos que o tamanho total das ondas não físicas geradas pelo algoritmo front tracking é pequeno. Construímos então uma sequência de soluções aproximadas para o sistema (1.1) e mostramos que existe uma subsequência que converge para uma solução fraca do sistema (1.1). Finalmente, usamos um argumento de diagonalização para mostrar que a solução pode ser construída quando o dado inicial tem variação total localmente limitada

No Capítulo 4, consideramos o sistema de leis de conservação

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ (\rho r)_t + (\rho r v)_x = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (1.3)$$

Esse modelo foi proposto em Aw-Rasle [4],  $\rho$  e  $v$  são a densidade e a velocidade de carros em uma rodovia, respectivamente, e  $r = v + p(\rho)$ . Supomos que  $p(\rho) = \rho^\kappa$ , onde  $\rho > 0$  e  $\kappa > 0$  é uma constante. O dado inicial é da forma  $(\rho_0(x), v_0(x))$ , onde  $v_0(x) \geq 0$  e  $\rho_0(x) \geq \underline{\rho} > 0$  são funções limitadas e com variação total localmente limitada.

O sistema (1.3) é do tipo Temple, isto é, as curvas de rarefação e as curvas de choque da mesma família coincidem, segundo Lu [26]. Aw-Rasle [4] mostraram a existência de solução para o problema de Riemann, permitindo o aparecimento de vácuo. Godvik-Hanche-Olsen [18] provaram a existência de solução fraca para o problema de Cauchy, utilizando uma pequena modificação do

sistema e permitindo o aparecimento de vácuo.

Usamos o método de Glimm [17] para mostrar a existência de solução fraca, sem o aparecimento de vácuo. Mostramos que a solução fraca pode ser contruída com o método wave-front tracking, apresentado no Capítulo 3, sem o aparecimento de vácuo. (Veja [15]).

Resolvemos também o problema de Riemann permitindo o aparecimento de vácuo. Com algumas mudanças na solução do problema de Riemann presente em Aw-Rascle [4], podemos aplicar o método de Glimm ou o wave-front tracking para resolver o problema de Cauchy permitindo o aparecimento de vácuo.

No Capítulo 5, usamos o esquema de Glimm [17] e a aproximação poligonal apresentada em Dafermos [13] para construir uma solução fraca admissível para a lei de conservação escalar com valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde  $f$  é localmente Lipschitz contínua em  $\mathbb{R}$  e  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$  é limitada, contínua à direita e de variação localmente limitada em  $\mathbb{R}$ . (Veja [14]).

## Matemática preliminar

### 1. Sistema de leis de conservação

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial suave. Consideramos o sistema de leis de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (2.1)$$

onde  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ . Algumas vezes os pontos de  $\Omega$  são chamados de estados.

**Definição 2.1** Diremos que o sistema (2.1) é estritamente hiperbólico se, para todo  $U \in \Omega$ , a matriz  $DF(U)$  tem  $n$  autovalores reais e distintos  $\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \dots < \lambda_n(U)$ . Esses autovalores são funções suaves de  $U \in \Omega$ .

Para sistemas estritamente hiperbólicos, podemos encontrar uma base de autovetores à direita  $\{r_1(U), r_2(U), \dots, r_n(U)\}$ , dependendo suavemente de  $U$ .

**Definição 2.2** Para  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , diremos que o  $j$ -campo característico é genuinamente não linear se

$$\langle \nabla \lambda_j(U), r_j(U) \rangle \neq 0, \quad \forall U \in \Omega.$$

Diremos que o  $j$ -campo característico é linearmente degenerado se

$$\langle \nabla \lambda_j(U), r_j(U) \rangle = 0, \quad \forall U \in \Omega.$$

Onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ .

## 2. Variação total

Considere um intervalo  $J \subset \mathbb{R}$ , não necessariamente limitado, e uma aplicação  $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A variação total de  $u$  é definida como

$$TV(u) \equiv \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todo  $N \geq 1$  e todo  $(N+1)$ -conjunto de pontos  $x_j \in J$  tal que  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ . Se  $TV(u)$  é limitado, dizemos que  $u$  tem variação total limitada.

**Lema 2.1** *Se  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem variação total limitada então para qualquer  $x \in (a, b)$ , o limite à esquerda e o limite à direita*

$$u(x^-) \equiv \lim_{y \rightarrow x^-} u(y), \quad u(x^+) \equiv \lim_{y \rightarrow x^+} u(y),$$

*estão bem definidos. Além disso,  $u$  tem no máximo um número contável de pontos de descontinuidade.*

**Comentário 1** *Pelo Lema anterior, se  $u$  tem variação total limitada, podemos redefinir os valores de  $u$  em cada ponto de descontinuidade colocando  $u(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x^+} u(x)$ . Em particular, podemos considerar que a função  $u$  é contínua à direita, (ou contínua à esquerda).*

*Se  $u$  tem variação total limitada então os limites  $u(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$  e  $u(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$  estão bem definidos.*

**Comentário 2** *Seja  $u$  uma função com variação total limitada. A variação total de  $u$  é majorada por duas vezes a variação decrescente mais a diferença no valor da função em  $\pm\infty$ . Notamos ainda que  $\|u\|_\infty \leq |u(-\infty)| + TV(u)$ .*

**Teorema 2.1** *Considere uma sequência  $u_l : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  com as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} |u_l(x, t)| &\leq M, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ TV(u_l(\cdot, t)) &\leq C, \quad \forall t \in [0, \infty), \\ \int_{-\infty}^{\infty} |u_l(x, t) - u_l(x, s)| dx &\leq L|t - s|, \quad \forall t, s \in [0, \infty), \end{aligned}$$



para algumas constantes  $M$ ,  $C$  e  $L$ . Então existe uma subsequência  $u_{i_k}$  que converge para alguma função  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R}^n)$ . Esse limite satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - u(x, s)| \leq L|t - s|, \quad \forall t, s \in [0, \infty).$$

Podemos ainda redefinir a função  $u$  pondo

$$u(x, t) = u(x^+, t) \equiv \lim_{y \rightarrow x^+} u(y, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Nesse caso, a função limite também satisfaz

$$TV(u(\cdot, t)) \leq C, \quad |u(x, t)| \leq M, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

### 3. Estimativas de Taylor

**Lema 2.2** Seja  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável com derivada Lipschitz contínua. Se

$$\psi(0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) = 0,$$

então

$$\psi(x) = O(1)|x|^2.$$

**Lema 2.3** Seja  $\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas vezes diferenciável, com segundas derivadas Lipschitz contínuas. Se

$$\psi(x, 0) = \psi(0, y) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q,$$

então

$$\psi(x, y) = O(1)|x||y|,$$

para todo  $x, y$  em uma vizinhança da origem. Se em adicional

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0,$$

então

$$\psi(x, y) = O(1)|x||y|(|x| + |y|).$$

**Comentário 3** Nos lemas anteriores, se assumirmos que a função  $\psi$  e suas derivadas dependem continuamente de um parâmetro adicional  $\omega$  e satisfazem as hipóteses dos lemas para todos os valores de  $\omega$ , então as estimativas anteriores são válidas para quantidades  $O(1)$  que permanecem uniformemente limitadas quando  $\omega$  assume valores apenas em um conjunto compacto.

#### 4. Transformação de Lorentz

Como em [34], se uma partícula no sistema de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{t})$  se move com velocidade  $\hat{v}$  em relação ao sistema de coordenadas  $(x, t)$ , e se  $v$  denota a velocidade da partícula no sistema de coordenadas  $(x, t)$ , e  $\bar{v}$  denota a velocidade da mesma partícula no sistema de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{t})$ , então pela Transformação de Lorentz

$$\bar{x} = \frac{x - \hat{v}t}{\sqrt{\varepsilon^2 - \hat{v}}}, \quad \bar{t} = \frac{t - \hat{v}x\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2 - \hat{v}}},$$

temos que

$$v = \frac{\hat{v} + \bar{v}}{1 + \hat{v}\bar{v}\varepsilon^2},$$

onde  $\varepsilon = \frac{1}{c}$  e a constante  $c$  é a velocidade da luz.

**Lema 2.4** A quantidade

$$\ln \left( \frac{1 + \varepsilon v_1}{1 - \varepsilon v_1} \right) - \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v_0}{1 - \varepsilon v_0} \right)$$

é invariante pela Transformada de Lorentz.

**Demonstração:** Assumimos que

$$v_1 = \frac{\hat{v} + \bar{v}_1}{1 + \hat{v}\bar{v}_1\varepsilon^2}, \quad v_0 = \frac{\hat{v} + \bar{v}_0}{1 + \hat{v}\bar{v}_0\varepsilon^2}.$$

notamos que

$$\ln\left(\frac{1 + \varepsilon v_1}{1 - \varepsilon v_1}\right) = \ln\left(\frac{1 + \varepsilon \frac{\hat{v} + \bar{v}_1}{1 + \hat{v}\bar{v}_1\varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \frac{\hat{v} + \bar{v}_1}{1 + \hat{v}\bar{v}_1\varepsilon^2}}\right) = \ln\left(\frac{(1 + \varepsilon\bar{v}_1)(1 + \hat{v}\varepsilon)}{(1 - \varepsilon\bar{v}_1)(1 - \hat{v}\varepsilon)}\right),$$

assim,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1 + \varepsilon v_1}{1 - \varepsilon v_1}\right) - \ln\left(\frac{1 + \varepsilon v_0}{1 - \varepsilon v_0}\right) &= \ln\left(\frac{(1 + \varepsilon\bar{v}_1)(1 + \hat{v}\varepsilon)}{(1 - \varepsilon\bar{v}_1)(1 - \hat{v}\varepsilon)}\right) - \ln\left(\frac{(1 + \varepsilon\bar{v}_0)(1 + \hat{v}\varepsilon)}{(1 - \varepsilon\bar{v}_0)(1 - \hat{v}\varepsilon)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + \varepsilon\bar{v}_1}{1 - \varepsilon\bar{v}_1}\right) - \ln\left(\frac{1 + \varepsilon\bar{v}_0}{1 - \varepsilon\bar{v}_0}\right). \end{aligned}$$

■

## 5. Sequência equidistribuída

Como em [25], diremos que uma sequência  $(a_n) \subset (-1, 1)$  é equidistribuída se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B(a_m, k, I)}{k} = \frac{\mu(I)}{2},$$

para qualquer subintervalo  $I$  de  $(-1, 1)$ , onde  $B(a_m, k, I)$  denota o número de  $m$ ,  $1 \leq m \leq k$ , com  $a_m \in I$ , e  $\mu(I)$  é o comprimento de  $I$ . Para mais detalhes veja [31].

## *Equações de fluxo relativístico*

Consideramos o seguinte sistema de duas leis de conservação

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{(p+\rho c^2)v^2}{c^2(c^2-v^2)} + \rho \right) + \partial_x \left( \frac{(p+\rho c^2)v}{c^2-v^2} \right) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{(p+\rho c^2)v}{c^2-v^2} \right) + \partial_x \left( \frac{(p+\rho c^2)v^2}{c^2-v^2} + p \right) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $p = a^2\rho$  é a pressão,  $v \in (-c, c)$  é a velocidade, a constante  $c > 0$  é a velocidade da luz e a constante  $a$  satisfaz  $0 < a < c$ . Esse sistema descreve o movimento unidimensional de um gás isotérmico relativístico em coordenadas de Euler.

Consideramos o problema de Cauchy em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , para o sistema (3.1), com dado inicial

$$U(x, 0) = (\rho(x, 0), v(x, 0)) \equiv (\rho_0(x), v_0(x)), \quad (3.2)$$

onde  $v_0(x)$  e  $\rho_0(x) \geq \underline{\rho} > 0$  são funções limitadas e com variação total localmente limitada.

Como em [24], fazemos  $\varepsilon = \frac{1}{c}$ , assim  $0 < a < \frac{1}{\varepsilon}$ , e o sistema (3.1) pode então ser escrito como

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{1+\varepsilon^2 a^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v^2 \varepsilon^2 + \rho \right) + \partial_x \left( \frac{1+\varepsilon^2 a^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v \right) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{1+\varepsilon^2 a^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v \right) + \partial_x \left( \frac{1+\varepsilon^2 a^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v^2 + a^2 \rho \right) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

A transformação

$$v' = \frac{v}{a}, \quad t' = at, \quad \varepsilon' = a\varepsilon,$$

reduz o sistema (3.3) ao mesmo sistema com  $a = 1$ , ou seja

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v^2 \varepsilon^2 + \rho \right) + \partial_x \left( \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v \right) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v \right) + \partial_x \left( \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v^2 + \rho \right) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

nesse caso assumimos que  $0 < \varepsilon < 1$ . Simplificando, temos

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{1+\varepsilon^4 v^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho \right) + \partial_x \left( \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v \right) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v \right) + \partial_x \left( \frac{1+v^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho \right) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

A velocidade  $v$ , fica então restrita ao intervalo  $(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})$ . Notamos que o conservativo e o fluxo explodem (blow-up), quando  $v \rightarrow \pm \frac{1}{\varepsilon}$ .

No limite formal  $\varepsilon = 0$ , o sistema corresponde a versão não relativística (quando a velocidade da luz  $c = \infty$ ),

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x((1+v^2)\rho) = 0. \end{cases}$$

No limite formal  $\varepsilon = 1$ , o sistema corresponde a versão escalar (quando a velocidade do som e a velocidade da luz coincidem),

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{1+v^2}{1-v^2} \rho \right) + \partial_x \left( \frac{2}{1-v^2} \rho v \right) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{2}{1-v^2} \rho v \right) + \partial_x \left( \frac{1+v^2}{1-v^2} \rho \right) = 0. \end{cases}$$

Consideramos neste trabalho,  $\varepsilon \in (0, 1)$  fixo.

Nosso objetivo neste capítulo é construir uma solução fraca  $U$ , para o problema de Cauchy (3.5) em  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ , utilizando o método wave-front tracking.

Sejam  $G(\rho, v) \equiv (G_1(\rho, v), G_2(\rho, v))$  e  $F(\rho, v) \equiv (F_1(\rho, v), F_2(\rho, v))$ , onde

$$\begin{aligned} G_1(\rho, v) &\equiv \frac{1+\varepsilon^4 v^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho, & G_2(\rho, v) &\equiv \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v, \\ F_1(\rho, v) &\equiv \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho v, & F_2(\rho, v) &\equiv \frac{1+v^2}{1-\varepsilon^2 v^2} \rho. \end{aligned}$$

Podemos escrever (3.5) como

$$G(U)_t + F(U)_x = 0, \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}.$$

**Definição 3.1** Dizemos que uma função mensurável  $U : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma solução fraca para o problema de Cauchy (3.5) se a função  $t \rightarrow U(\cdot, t)$  é contínua em  $L^1_{loc}$ , a condição inicial (3.2) é satisfeita e, para cada função  $\phi \in C^1$  com suporte compacto contido em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , tivermos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{G(U(x, t))\phi_t(x, t) + F(U(x, t))\phi_x(x, t)\} dx dt + \int_{-\infty}^\infty G(U(x, 0))\phi(x, 0) dx = 0.$$

### 3.1 Autovalores, autovetores e invariantes de Riemann

Agora, queremos calcular a matriz jacobiana do sistema (3.5), para isso começamos calculando as matrizes jacobianas de  $G$  e de  $F$ . As matrizes  $DG$  e  $DF$  são dadas por

$$DG(\rho, v) = \begin{pmatrix} \frac{1+\varepsilon^4 v^2}{1-\varepsilon^2 v^2} & \frac{2\rho v \varepsilon^2 (1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 v^2)^2} \\ \frac{v(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2 v^2} & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2 v^2)}{(1-\varepsilon^2 v^2)^2} \end{pmatrix},$$

$$DF(\rho, v) = \begin{pmatrix} \frac{v(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2 v^2} & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2 v^2)}{(1-\varepsilon^2 v^2)^2} \\ \frac{1+v^2}{1-\varepsilon^2 v^2} & \frac{2\rho v(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 v^2)^2} \end{pmatrix}.$$

A equação (3.5) pode então ser escrita como

$$DGU_t + DFU_x = 0, \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}.$$

Notamos que o determinante da matriz  $DG$  é igual a  $\frac{\rho(1+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4v^2)}{(1-\varepsilon^2v^2)^2} > 0$ , pois  $\rho > 0$  e  $|v| < \frac{1}{\varepsilon}$ , logo podemos calcular a matriz inversa  $(DG)^{-1}$ , assim temos que

$$(DG)^{-1}(\rho, v) = \begin{pmatrix} \frac{1+\varepsilon^2v^2}{1-\varepsilon^4v^2} & \frac{-2v\varepsilon^2}{1-\varepsilon^4v^2} \\ \frac{-v(1-\varepsilon^2v^2)}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)} & \frac{(1-\varepsilon^2v^2)(1+\varepsilon^4v^2)}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)(1+\varepsilon^2)} \end{pmatrix},$$

A matriz jacobiana do sistema (3.5) é portanto

$$\begin{aligned} J = (DG)^{-1}DF &= \begin{pmatrix} \frac{1+\varepsilon^2v^2}{1-\varepsilon^4v^2} & \frac{-2v\varepsilon^2}{1-\varepsilon^4v^2} \\ \frac{-v(1-\varepsilon^2v^2)}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)} & \frac{(1-\varepsilon^2v^2)(1+\varepsilon^4v^2)}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)(1+\varepsilon^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2v^2} & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2v^2)}{(1-\varepsilon^2v^2)^2} \\ \frac{1+v^2}{1-\varepsilon^2v^2} & \frac{2\rho v(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2v^2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} \\ \frac{(1-\varepsilon^2v^2)^2}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)(1+\varepsilon^2)} & \frac{v(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos então escrever a equação (3.5) como

$$U_t + JU_x = 0, \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Os autovalores do sistema (3.5) satisfazem a equação

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{2\lambda v(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} + \frac{v^2-1}{1-\varepsilon^4v^2} = 0. \quad (3.7)$$

Resolvendo (3.7) obtemos

$$\lambda_1 \equiv \lambda_1(\rho, v) = \frac{v-1}{1-\varepsilon^2v}, \quad \lambda_2 \equiv \lambda_2(\rho, v) = \frac{v+1}{1+\varepsilon^2v}. \quad (3.8)$$

Notamos que

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2(1-\varepsilon^2v^2)}{1-\varepsilon^4v^2} > 0, \quad (3.9)$$

pois  $|v| < \frac{1}{\varepsilon}$ , logo  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Para encontrarmos os autovetores do sistema (3.5), precisamos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{v(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} - \lambda_i & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} \\ \frac{(1-\varepsilon^2v^2)^2}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)(1+\varepsilon^2)} & \frac{v(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad (3.10)$$

$i = 1, 2$ . Quando  $i = 1$ , (3.10) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\varepsilon^2v^2}{1-\varepsilon^4v^2} & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4v^2} \\ \frac{(1-\varepsilon^2v^2)^2}{\rho(1-\varepsilon^4v^2)(1+\varepsilon^2)} & \frac{1-\varepsilon^2v^2}{1-\varepsilon^4v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$  é portanto

$$r_1 \equiv r_1(\rho, v) = \left( -\frac{1}{1-\varepsilon^2v^2}, \frac{1}{\rho(1+\varepsilon^2)} \right). \quad (3.11)$$

De modo análogo, o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2$  é

$$r_2 \equiv r_2(\rho, v) = \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2v^2}, \frac{1}{\rho(1+\varepsilon^2)} \right). \quad (3.12)$$

Notamos que

$$\nabla\lambda_1 = \left( 0, \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2v)^2} \right), \quad \nabla\lambda_2 = \left( 0, \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2v)^2} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \nabla\lambda_1, r_1 \rangle &= \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2v)^2} \frac{1}{\rho(1+\varepsilon^2)} > 0, \\ \langle \nabla\lambda_2, r_2 \rangle &= \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2v)^2} \frac{1}{\rho(1+\varepsilon^2)} > 0. \end{aligned}$$

**Comentário 4** Como em [33], no plano  $x-t$ , as curvas integrais do campo vetorial  $v_i = (\lambda_i, 1)$  são chamadas de  $i$ -curvas características,  $i = 1, 2$ . O autovalor  $\lambda_i$  é a velocidade característica da  $i$ -curva característica,  $i = 1, 2$ . O campo vetorial  $r_i$  é o  $i$ -campo característico. O autovalor  $\lambda_i(u)$  também é chamado de  $i$ -família característica,  $i = 1, 2$ .

Como em [24], temos que



**Lema 3.1** *O sistema (3.5) é estritamente hiperbólico quando  $|v| < \frac{1}{\varepsilon}$  e  $\rho \geq 0$  (isto é, mesmo na presença de singularidades de vácuo no campo densidade), mas essa propriedade falha quando  $v \rightarrow \pm \frac{1}{\varepsilon}$  (isto é, na presença de singularidades da velocidade da luz no campo velocidade). Além disso, o sistema (3.5) admite dois campos característicos genuinamente não lineares quando  $|v| < \frac{1}{\varepsilon}$  e  $\rho \geq 0$ . Porém, a propriedade de genuinamente não linear falha quando  $v \rightarrow \pm \frac{1}{\varepsilon}$ .*

## 3.2 O problema de Riemann

O problema de Riemann para o sistema (3.5) consiste em encontrar uma solução fraca de (3.5) com dado inicial constante por partes da forma

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l = (\rho_l, v_l), & x < 0, \\ U_r = (\rho_r, v_r), & x > 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde  $U_l, U_r \in \Omega \equiv \{(\rho, v); \rho > 0 \text{ e } |v| < \frac{1}{\varepsilon}\}$ . Construiremos uma solução fraca  $U(x, t) = \tilde{U}\left(\frac{x}{t}\right)$  para esse problema, usando ondas elementares de rarefação e de choque, com  $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  possivelmente descontínua.

### 3.2.1. Ondas de rarefação

Para encontrarmos as ondas de rarefação escrevemos  $\xi = \frac{x}{t}$ , e procuramos as soluções contínuas não nulas do tipo  $\bar{U} \equiv \bar{U}(\xi)$ , da equação diferencial ordinária

$$(J - \xi I) \bar{U}'(\xi) = 0, \quad (3.14)$$

onde

$$\lambda_i(U_l) \leq \xi = \frac{x}{t} \leq \lambda_i(U_r),$$

$i = 1, 2$ . Como  $J$  possui dois autovalores distintos  $\lambda_1 < \lambda_2$ , obtemos duas ondas de rarefação. De (3.14), temos que o vetor  $\bar{U}'(\xi) \neq 0$  é um autovetor de  $J$  associado ao autovalor  $\xi$ . Portanto

$\bar{U}'(\xi) \neq 0$  é paralelo ao autovetor  $r_i$ , e podemos assumir que, para cada  $i = 1, 2$ ,

$$\bar{U}'(\xi) = \frac{1}{\langle \nabla \lambda_i(\bar{U}(\xi)), r_i(\bar{U}(\xi)) \rangle} r_i(\bar{U}(\xi)), \quad \lambda_i(\bar{U}(\xi)) = \xi. \quad (3.15)$$

Assumimos em adicional que

$$\bar{U}(\lambda_i(U_l)) = U_l, \quad \bar{U}(\lambda_i(U_r)) = U_r.$$

Então para cada tempo  $t > 0$  fixo, a função  $\bar{U}(\xi)$  conectará continuamente o estado à esquerda  $U_l$  e o estado à direita  $U_r$ .

**Definição 3.2** Chamaremos de *i-onda de Rarefação*, ou simplesmente *i-rarefação*, a uma solução contínua  $\bar{U}$  de (3.14), com  $\bar{U}'(\xi) \neq 0$ , onde  $\xi = \frac{x}{t} \in [\xi_1, \xi_2]$ , para algum  $\xi_1$  e algum  $\xi_2$  tal que  $\xi_1 < \xi_2$ .

Como o sistema (3.5) é genuinamente não linear,  $\langle \nabla \lambda_i, r_i \rangle > 0$ , por (3.15), a função  $\xi \rightarrow \lambda_i(\bar{U}(\xi))$  é crescente,  $i = 1, 2$ . Observamos que a função  $\bar{U}(\xi)$  satisfazendo (3.15), é de classe  $C^1$  no intervalo aberto  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Para  $t > 0$ , a *i-onda de rarefação* tem a seguinte forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_l, & \frac{x}{t} < \lambda_i(U_l), \\ \bar{U}\left(\frac{x}{t}\right), & \lambda_i(U_l) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_i(U_r), \\ U_r, & \frac{x}{t} > \lambda_i(U_r), \end{cases} \quad (3.16)$$

$i = 1, 2$ .

Uma função  $U$  satisfazendo (3.16) é uma solução fraca do sistema (3.5). De fato, temos que  $U(x, t) \rightarrow U(x, 0)$ , pontualmente para cada  $x \neq 0$ , além disso, a função  $\bar{U}$  é contínua, logo limitada. Portanto temos que  $|U(., t) - U(., 0)| \rightarrow 0$  em  $L^1_{loc}$ , quando  $t \rightarrow 0$ . A equação (3.6) é trivialmente satisfeita nas regiões onde  $\frac{x}{t} < \lambda_i(U_l)$  ou  $\frac{x}{t} > \lambda_i(U_r)$ .

Para concluirmos que  $U$  é solução fraca do sistema (3.5) é suficiente mostrarmos que a equação (3.6) é satisfeita na região intermediária, onde  $\lambda_i(U_l) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_i(U_r)$ . Por definição,  $U$  é constante

ao longo de cada raio através da origem. Daí

$$U_t(x, t) + \frac{x}{t}U_x(x, t) = 0.$$

Por (3.15), nesse setor  $\frac{x}{t} = \lambda_i(U(x, t))$ . Por (3.15), observamos que

$$U_x = \frac{1}{(\langle \nabla \lambda_i(\bar{U}(\xi)), r_i(\bar{U}(\xi)) \rangle)} \frac{1}{t} r_i(\bar{U}(\xi))$$

é paralelo ao autovetor  $r_i(U)$ , logo é um autovetor de  $J$ , com autovalor  $\lambda_i(U)$ . Daí, se  $\lambda_i(U_l) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_i(U_r)$ , temos

$$\begin{aligned} U_t(x, t) + JU_x(x, t) &= U_t(x, t) + \frac{1}{(\langle \nabla \lambda_i(\bar{U}(\xi)), r_i(\bar{U}(\xi)) \rangle)} \frac{1}{t} J r_i(\bar{U}(\xi)) \\ &= U_t(x, t) + \frac{1}{(\langle \nabla \lambda_i(\bar{U}(\xi)), r_i(\bar{U}(\xi)) \rangle)} \frac{1}{t} \lambda_i(\bar{U}(\xi)) r_i(\bar{U}(\xi)) \\ &= U_t(x, t) + \frac{x}{t} U_x(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Portanto a equação (3.6) é também satisfeita na região onde  $\lambda_i(U_l) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_i(U_r)$ ,  $i = 1, 2$ .

Seja  $U_l$  um estado fixo, queremos encontrar o conjunto dos estados  $U_r$ , para os quais o problema de Riemann correspondente pode ser resolvido com uma  $i$ -onda de rarefação. Começamos considerando o autovalor  $\lambda_1$ . O autovetor  $\bar{U}'(\xi) = (\bar{\rho}'(\xi), \bar{v}'(\xi))$  satisfaz

$$(J - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} \bar{\rho}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\varepsilon^2 v^2}{1-\varepsilon^4 v^2} & \frac{\rho(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4 v^2} \\ \frac{(1-\varepsilon^2 v^2)^2}{\rho(1-\varepsilon^4 v^2)(1+\varepsilon^2)} & \frac{1-\varepsilon^2 v^2}{1-\varepsilon^4 v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix} = 0,$$

logo  $\frac{1-\varepsilon^2 v^2}{1-\varepsilon^4 v^2} \bar{\rho}' + \frac{\rho(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^4 v^2} \bar{v}' = 0$ , como  $\bar{v}'(\xi) \neq 0$ , temos

$$\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho(1+\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2 v^2},$$

Integrando, obtemos

$$\int_{v_l}^v \frac{1}{1-\varepsilon^2 v^2} dv = -\int_{\rho_l}^{\rho} \frac{1}{\rho(1+\varepsilon^2)} d\rho.$$

Portanto a 1-curva de rarefação  $R_1$ , começando em  $(\rho_l, v_l)$ , é formada pelos pontos  $(\rho, v) \in \Omega$ , que satisfazem

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v}{1 - \varepsilon v} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \rho = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v_l}{1 - \varepsilon v_l} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \rho_l.$$

A condição  $\lambda_1(\rho, v) > \lambda_1(\rho_l, v_l)$ , mostra que  $v > v_l$ , logo  $\rho < \rho_l$  em  $R_1$ .

De modo análoga, a 2-curva de rarefação  $R_2$ , começando em  $(\rho_l, v_l)$ , é formada pelos pontos  $(\rho, v) \in \Omega$ , que satisfazem

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v}{1 - \varepsilon v} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \rho = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v_l}{1 - \varepsilon v_l} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \rho_l.$$

onde  $\rho > \rho_l$ .

O invariante de Riemann correspondente ao  $i$ -campo característico é uma função suave  $\omega : \Omega \rightarrow R$  tal que se  $(\rho, v) \in \Omega$  então  $\langle \nabla \omega(\rho, v), r_i(\rho, v) \rangle = 0$ . Podemos definir os invariantes de Riemann para o sistema (3.5) como

$$r \equiv r(\rho, v) \equiv \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v}{1 - \varepsilon v} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \rho, \quad (3.17)$$

$$s \equiv s(\rho, v) \equiv \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon v}{1 - \varepsilon v} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \rho. \quad (3.18)$$

Observamos que se  $(\rho, v)$  pertence a curva  $R_1$  então  $r(\rho, v) = c_1$  e se  $(\rho, v)$  pertence a curva  $R_2$  então  $s(\rho, v) = c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

### 3.2.2. Ondas de choque

**Definição 3.3** Chamaremos de  $i$ -onda de choque, ou simplesmente  $i$ -choque, a solução descontínua de (3.5) com dado inicial (3.13), da forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < s_i t, \\ U_r, & x > s_i t, \end{cases}$$

onde  $s_i$  é a velocidade do choque,  $i = 1, 2$ . A velocidade do choque deve satisfazer a condição de salto de Rankine-Hugoniot

$$s_i(G(U_r) - G(U_l)) = F(U_r) - F(U_l),$$

e a condição de entropia de Lax

$$\begin{aligned} s_1 &< \lambda_1(U_l), & \lambda_1(U_r) &< s_1 < \lambda_2(U_r), \\ \lambda_1(U_l) &< s_2 < \lambda_2(U_l), & \lambda_2(U_r) &< s_2. \end{aligned}$$

Uma  $i$ -onda de choque é uma solução fraca de (3.5), pois satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot.

Como em [34], devido a Transformação de Lorentz, (veja o Capítulo 2, item 4), podemos sempre assumir, sem perda de generalidade, que o estado à esquerda é  $U_l = (\rho_l, 0)$ . A condição de entropia de Lax nos diz que devemos ter  $v < v_l = 0$  sobre as curvas de choque.

**Lema 3.2** *Assumimos que  $U_l = (\rho_l, 0)$  e  $U_r = (\rho, v)$  satisfazem a condição de salto de Rankine-Hugoniot, e que  $v < 0$ . Então as curvas de choque satisfazem*

$$v = -\sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}}.$$

Quando  $\rho > \rho_l$  temos que  $\frac{dv}{d\rho} < 0$ , e quando  $\rho < \rho_l$  temos que  $\frac{dv}{d\rho} > 0$ .

**Demonstração:** A condição de salto de Rankine-Hugoniot aplicada à (3.4), nos dá as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} s_i \left( \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho) v^2 \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l \right) &= \left( \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho) v}{1 - \varepsilon^2 v^2} \right), \\ s_i \left( \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho) v}{1 - \varepsilon^2 v^2} \right) &= \left( \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho) v^2}{1 - \varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Eliminando  $s_i$ , temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ (\rho + \varepsilon^2 \rho) v^2 + (\rho - \rho_l) \frac{1 - \varepsilon^2 v^2}{\varepsilon^2} \right] \left[ \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho) v^2}{1 - \varepsilon^2 v^2} + (\rho - \rho_l) \right] - \frac{(1 + \varepsilon^2)^2 \rho^2 v^2}{1 - \varepsilon^2 v^2} \\
&= \rho^2 (1 + \varepsilon^2)^2 \frac{v^4}{1 - \varepsilon^2 v^2} + (\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho - \rho_l) v^2 + (\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho - \rho_l) \frac{v^2}{\varepsilon^2} \\
&\quad + (\rho - \rho_l)^2 \frac{(1 - \varepsilon^2 v^2)}{\varepsilon^2} - \rho^2 (1 + \varepsilon^2)^2 \frac{v^2}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2 v^2)} \\
&= \rho^2 (1 + \varepsilon^2)^2 \left[ \frac{v^4}{1 - \varepsilon^2 v^2} - \frac{v^2}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2 v^2)} \right] + (\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho - \rho_l) v^2 \\
&\quad + (\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho - \rho_l) \frac{v^2}{\varepsilon^2} + (\rho - \rho_l)^2 \frac{(1 - \varepsilon^2 v^2)}{\varepsilon^2} \\
&= \rho^2 (1 + \varepsilon^2)^2 \frac{v^2}{1 - \varepsilon^2 v^2} \left[ \frac{\varepsilon^2 v^2 - 1}{\varepsilon^2} \right] + (\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho - \rho_l) v^2 \\
&\quad + (\rho - \rho_l) \left[ (\rho + \varepsilon^2 \rho) \frac{v^2}{\varepsilon^2} + (\rho - \rho_l) \frac{(1 - \varepsilon^2 v^2)}{\varepsilon^2} \right] \\
&= \rho^2 (1 + \varepsilon^2)^2 \frac{v^2}{\varepsilon^2} + (\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho - \rho_l) v^2 + (\rho - \rho_l) \left[ (\rho + \varepsilon^2 \rho) \frac{v^2}{\varepsilon^2} + (\rho - \rho_l) \frac{1}{\varepsilon^2} \right] \\
&= \frac{v^2}{\varepsilon^2} (\rho + \varepsilon^2 \rho) (-\rho (1 + \varepsilon^2) + \varepsilon^2 (\rho - \rho_l)) + (\rho - \rho_l) (\rho + \varepsilon^2 \rho) \frac{v^2}{\varepsilon^2} + (\rho - \rho_l)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{v^2}{\varepsilon^2} (\rho + \varepsilon^2 \rho) (-\rho - \varepsilon^2 \rho_l) + (\rho - \rho_l) (\rho + \varepsilon^2 \rho) \frac{v^2}{\varepsilon^2} + (\rho - \rho_l)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \\
&= -\frac{v^2}{\varepsilon^2} (\rho + \varepsilon^2 \rho_l) (\rho \varepsilon^2 + \rho_l) + (\rho - \rho_l)^2 \frac{1}{\varepsilon^2},
\end{aligned}$$

assim,

$$\frac{v^2}{\varepsilon^2} (\rho + \varepsilon^2 \rho_l) (\rho \varepsilon^2 + \rho_l) = (\rho - \rho_l)^2 \frac{1}{\varepsilon^2},$$

portanto

$$v^2 = \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}.$$

Como  $v < 0$  sobre as curvas de choque, temos que

$$v = -\sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}}.$$

Derivando  $v$  em relação a  $\rho$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\rho} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}{(\rho - \rho_l)^2}} \left( \frac{1}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^2 (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^2} \right) \\ &\quad \{ 2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)(\rho - \rho_l) - (\rho - \rho_l)^2(\varepsilon^2 \rho + \rho_l) + (\rho - \rho_l)^2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l) \} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(\rho - \rho_l)(\rho_l + \varepsilon^2 \rho_l)}{\sqrt{(\rho - \rho_l)^2}(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{3}{2}}(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{3}{2}}} \{ (\rho + \varepsilon^2 \rho_l) + (\varepsilon^2 \rho + \rho_l) \}. \end{aligned}$$

Quando  $\rho > \rho_l$  temos que  $\frac{dv}{d\rho} < 0$ , e quando  $\rho < \rho_l$  temos que  $\frac{dv}{d\rho} > 0$ . ■

**Definição 3.4** A 1-curva de choque  $S_1$ , começando em  $(\rho_l, 0)$ , é a curva

$$S_1 : v = -\sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}},$$

onde  $\rho > \rho_l$ .

A 2-curva de choque  $S_2$ , começando em  $(\rho_l, 0)$ , é a curva

$$S_2 : v = -\sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}},$$

onde  $\rho < \rho_l$ .

O próximo lema mostra que as curvas dadas na Definição 3.4 satisfazem a condição de entropia de Lax.

**Lema 3.3** A velocidade característica  $s_1$  da 1-onda de choque satisfaz

$$s_1 < \lambda_1(U_l), \quad \lambda_1(U_r) < s_1 < \lambda_2(U_r),$$

enquanto a velocidade característica  $s_2$  da 2-onda de choque satisfaz

$$\lambda_1(U_l) < s_2 < \lambda_2(U_l), \quad \lambda_2(U_r) < s_2.$$

**Demonstração:** Como  $\rho > \rho_l$  em  $S_1$ , então  $\rho + \varepsilon^2 \rho_l > \varepsilon^2 \rho + \rho_l$ , logo

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_l)^2 \frac{\rho + \varepsilon^2 \rho_l}{\varepsilon^2 \rho + \rho_l} &> (\rho - \rho_l)^2, \\ \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)} &> \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pelo Lema 3.2 temos que

$$v = -\sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}}, \quad (3.21)$$

como  $(\rho - \rho_l) > 0$  em  $S_1$ , de (3.20) e (3.21) temos

$$\begin{aligned} -v &> \frac{\rho - \rho_l}{\rho + \varepsilon^2 \rho_l}, \\ -v(\rho + \varepsilon^2 \rho) + \varepsilon^2 v(\rho - \rho_l) &> \rho - \rho_l, \\ -v(\rho + \varepsilon^2 \rho)(1 - \varepsilon^2 v^2) &> (\rho - \rho_l)(1 - \varepsilon^2 v)(1 - \varepsilon^2 v^2), \\ -\frac{1 - \varepsilon^2 v^2}{1 - \varepsilon^2 v} &< \frac{(\rho - \rho_l)(1 - \varepsilon^2 v^2)}{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}, \\ v - \frac{1 - \varepsilon^2 v^2}{1 - \varepsilon^2 v} &< v + \frac{(\rho - \rho_l)(1 - \varepsilon^2 v^2)}{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}, \\ \frac{v - 1}{1 - \varepsilon^2 v} &< \frac{v^2(\rho - \varepsilon^2 \rho) + (\rho - \rho_l)(1 - \varepsilon^2 v^2)}{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}, \\ \frac{v - 1}{1 - \varepsilon^2 v} &< \frac{\frac{v^2(\rho - \varepsilon^2 \rho)}{1 - \varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l}{\frac{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1 - \varepsilon^2 v^2}}. \end{aligned}$$

Segue de (3.8) e (3.19) que  $\lambda_1(\rho_r, v_r) < s_1$ . Agora, queremos ver que  $s_1 < \lambda_2(\rho_r, v_r)$ .



Lembramos que  $v < v_l = 0$  e  $|v| < \frac{1}{\varepsilon}$ , assim

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{1-v}{1+\varepsilon^2 v} \right) &> \rho_l, \\
\rho - \rho_l(1+\varepsilon^2 v) &> v\rho, \\
(\rho - \rho_l)(1+\varepsilon^2 v) &> v(\rho + \varepsilon^2 \rho), \\
v + \frac{\rho - \rho_l}{(\rho + \varepsilon^2 \rho) \frac{v}{1-\varepsilon^2 v^2}} &< \frac{1-\varepsilon^2 v^2}{1+\varepsilon^2 v} + v, \\
\frac{\frac{v^2(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l}{(\rho + \varepsilon^2 \rho) \frac{v}{1-\varepsilon^2 v^2}} &< \frac{1-\varepsilon^2 v^2 + v(1+\varepsilon^2 v)}{1+\varepsilon^2 v}, \\
\frac{\frac{v^2(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l}{\frac{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2}} &< \frac{v+1}{1+\varepsilon^2 v}.
\end{aligned}$$

Segue de (3.8) e (3.19) que  $s_1 < \lambda_2(\rho_r, v_r)$ .

Resta mostrarmos que  $s_1 < \lambda_1(\rho_l, v_l)$ . Observamos que

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\frac{v^2(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l}{\frac{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2}} \right)^2 &= \left( \frac{v^2(\rho + \varepsilon^2 \rho) + (\rho - \rho_l)(1-\varepsilon^2 v^2)}{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)} \right)^2 \\
&= \left( \frac{v^2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l) + \rho - \rho_l}{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)} \right)^2 \\
&= \frac{\left( \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)} (\rho + \varepsilon^2 \rho_l) + \rho - \rho_l \right)^2}{\frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)} (\rho + \varepsilon^2 \rho)^2} \\
&= (\rho - \rho_l)^2 \left[ \frac{\rho - \rho_l}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)} + 1 \right]^2 \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}{(\rho - \rho_l)^2 (\rho + \varepsilon^2 \rho)^2} \\
&= \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho)^2 (\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^2 (\rho + \varepsilon^2 \rho)^2} \\
&= \frac{\rho + \varepsilon^2 \rho}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^2} \\
&> 1.
\end{aligned}$$

Isso mostra que em  $S_1$

$$\left( \frac{\frac{v^2(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2} + \rho - \rho_l}{\frac{v(\rho + \varepsilon^2 \rho)}{1-\varepsilon^2 v^2}} \right) < -1.$$

Segue de (3.8) e (3.19) que  $s_1 < \lambda_1(\rho_l, v_l) = -1$ .

As estimativas para  $s_2$  seguem de forma análoga. ■

Quando consideramos  $v_l = 0$ , segue do Lema 3.2 que

$$s_1 = -\frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}}, \quad s_2 = \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}}.$$

No caso geral, a velocidade da  $i$ -onda de choque  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , pode ser encontrada usando a condição de salto de Rankine-Hugoniot, ou a Transformação de Lorentz. Como em [34]

$$s_i = \frac{v_l + \bar{s}_i}{1 + \varepsilon^2 v_l \bar{s}_i}.$$

De modo análogo, as velocidades características  $\lambda_i$  também satisfazem

$$\lambda_i = \frac{v_l + \bar{\lambda}_i}{1 + \varepsilon^2 v_l \bar{\lambda}_i}.$$

**Comentário 5** *No caso geral, a velocidade sobre as curvas de choque são dadas por*

$$\frac{v - v_l}{1 - \varepsilon^2 v_l^2} = -\frac{\sqrt{A(\rho, \rho_l)}}{1 - v_l \varepsilon^2 \sqrt{A(\rho, \rho_l)}},$$

*Observamos que, usando a expressão*

$$v = \frac{v_l + \bar{v}}{1 + \varepsilon^2 v_l \bar{v}},$$

*obtemos*

$$\bar{v} = -\sqrt{A(\rho, \rho_l)},$$

*onde*

$$A(\rho, \rho_l) \equiv \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}.$$

### 3.2.3. Propriedades das ondas de choque

Mostraremos nesta seção algumas propriedades geométricas das curvas de choque.

**Lema 3.4** *A 1-curva de choque e a 2-curva de choque são “starlike” em relação a  $U_l$ , isto é, qualquer raio através de  $U_l$  corta  $S_1$  em no máximo um ponto.*

**Demonstração:** Para mostrar que  $S_1$  é “starlike” em relação a  $U_l = (\rho_l, 0)$ , é suficiente mostrarmos que: dados dois pontos diferentes  $U_1 = (\rho_1, v_1)$ ,  $U_2 = (\rho_2, v_2)$  sobre  $S_1$ , o segmento de reta  $U_l U_1$  tem inclinação diferente do segmento de reta  $U_l U_2$ .

As inclinações do segmento de reta  $U_l U_1$ , e do segmento de reta  $U_l U_2$ , são respectivamente

$$\frac{\rho_1 - \rho_l}{v_1}, \quad \frac{\rho_2 - \rho_l}{v_2}.$$

Sobre a curva de choque temos que

$$v^2 = \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)},$$

assim,

$$\left( \frac{\rho - \rho_l}{v} \right)^2 = (\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l),$$

como a velocidade  $v$  depende apenas da densidade  $\rho$ , é suficiente mostrarmos que  $(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)$  é crescente em relação a  $\rho$ . Notamos que

$$\frac{d}{d\rho} [(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)] = \varepsilon^2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l) + (\varepsilon^2 \rho + \rho_l) > 0,$$

pois  $\rho, \rho_l > 0$ . Portanto

$$\frac{\rho_1 - \rho_l}{v_1} \neq \frac{\rho_2 - \rho_l}{v_2},$$

logo  $S_1$  e  $S_2$  são “starlike”. ■

Consideramos agora os invariantes de Riemann  $s$  e  $r$ , definidos em (3.17) e (3.18).

**Lema 3.5** *As curvas de choque do sistema (3.5) satisfazem*

$$0 < \frac{dr}{ds} < 1,$$

ao longo da 1-curva de choque  $S_1$ , e

$$0 < \frac{ds}{dr} < 1,$$

ao longo da 2-curva de choque  $S_2$ .

**Demonstração:** Começamos derivando os invariantes de Riemann  $r$  e  $s$ , com respeito a  $\rho$ , sobre  $S_1$ , assim temos que

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\rho} &= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2 v^2} \frac{dv}{d\rho} + \frac{\varepsilon}{\rho(1 + \varepsilon^2)}, \\ \frac{ds}{d\rho} &= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2 v^2} \frac{dv}{d\rho} - \frac{\varepsilon}{\rho(1 + \varepsilon^2)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como  $(1 - \varepsilon^2 v^2) > 0$  e  $\frac{dv}{d\rho} < 0$  em  $S_1$ , então  $\frac{ds}{d\rho} < \frac{dr}{d\rho} < \left| \frac{ds}{d\rho} \right|$ , logo  $\left| \frac{ds}{d\rho} \right| > \left| \frac{dr}{d\rho} \right|$ . Além disso, temos que  $\frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\rho} = \frac{dr}{d\rho}$ , logo  $\left| \frac{dr}{ds} \right| < 1$ . Como  $\frac{ds}{d\rho} < 0$ , resta mostrarmos que  $\frac{dr}{d\rho} < 0$ .

Lembramos que

$$v^2 = \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}.$$

Derivando  $v$  em relação a  $\rho$  obtemos

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{2v} \frac{(\rho - \rho_l)(\rho_l + \varepsilon^2 \rho_l)(\rho + \rho_l)(1 + \varepsilon^2)}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^2 (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^2}. \quad (3.23)$$

Notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2 v^2)} \frac{1}{2v} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \frac{(\rho - \rho_l)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}} \frac{1}{\frac{-(\rho - \rho_l)}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}}} \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)}{(\rho + \varepsilon^2 \rho)(\rho_l + \varepsilon^2 \rho_l)} \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}}{(\rho - \rho_l)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.22), (3.23) e (3.24), temos que

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\rho} &= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2 v^2} \frac{dv}{d\rho} + \frac{\varepsilon}{\rho(1 + \varepsilon^2)} \\ &= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2 v^2} \frac{1}{2v} \frac{(\rho - \rho_l)(\rho_l + \varepsilon^2 \rho_l)(\rho + \rho_l)(1 + \varepsilon^2)}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^2 (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^2} + \frac{\varepsilon}{\rho(1 + \varepsilon^2)} \\ &= \frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{-(\rho + \rho_l)}{2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\left( (\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}} \right)^2 > 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} \rho + \varepsilon^2 \rho_l + \varepsilon^2 \rho + \rho_l &> 2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}, \\ (\rho + \rho_l)(1 + \varepsilon^2) &> 2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\rho + \rho_l}{2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}} &> \frac{1}{1 + \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{-(\rho + \rho_l)}{2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) < 0.$$

Por outro lado,  $\frac{dv}{d\rho} > 0$  em  $S_2$ , logo  $\frac{dr}{d\rho} > 0$  e  $\left| \frac{dr}{d\rho} \right| > \left| \frac{ds}{d\rho} \right|$ . Como  $\frac{ds}{dr} \frac{dr}{d\rho} = \frac{ds}{d\rho}$ ,  $\left| \frac{ds}{dr} \right| < 1$ . Resta mostrarmos que  $\frac{ds}{d\rho} > 0$ . De fato, com argumentos similares aos usados anteriormente, obtemos que

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{\rho + \rho_l}{2(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) > 0.$$

■

## 3.2.4. Parametrização

Definimos a função  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty) \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$

$$\Psi(s, r) \equiv \left( e^{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)}, \frac{e^{r+s} - 1}{\varepsilon(e^{r+s} + 1)} \right) = (\rho(s, r), v(s, r)), \quad (3.25)$$

onde os invariantes de Riemann  $s$  e  $r$  estão definidos em (3.17) e (3.18).

Observamos que

$$\begin{aligned} D\Psi(s, r) &= \begin{pmatrix} -\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon} e^{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)} & \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon} e^{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)} \\ \frac{2e^{r+s}}{\varepsilon(e^{r+s}+1)^2} & \frac{2e^{r+s}}{\varepsilon(e^{r+s}+1)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon} e^{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)} e^{r+s} \\ \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon} e^{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)} e^{r+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{(e^{r+s}+1)^2}{4e^{r+s}} & \frac{(e^{r+s}+1)^2}{4e^{r+s}} \\ \frac{e^{-\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)}}{1+\varepsilon^2} & \frac{e^{-\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}(r-s)}}{1+\varepsilon^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Notamos que os vetores coluna da matriz à direita da igualdade anterior são os autovetores  $r_1(\Psi(s, r))$  e  $r_2(\Psi(s, r))$  (linearmente independentes), definidos em (3.11) e (3.12).

Os estados  $(s_l, r_l)$  e  $(s_r, r_r)$  são unicamente determinados pelos estados  $(\rho_l, v_l)$  e  $(\rho_r, v_r)$ , podemos então utilizar os invariantes de Riemann  $(s, r)$  como um sistema de coordenadas. Usamos o sistema de coordenadas  $(s, r)$  para parametrizar as curvas e estudar a geometria das curvas de choque.

Como  $\rho > \rho_l$  em  $S_1$ , então pelo Lema 3.2

$$v = -\frac{\alpha - 1}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

onde  $\alpha = \frac{\rho}{\rho_l} \geq 1$ .

Usando os invariantes de Riemann definidos em (3.17) e (3.18), e lembrando que  $s_l = s(\rho_l, v_l)$

e  $r_l = r(\rho_l, v_l)$ , podemos escrever a 1-curva de choque  $S_1$  como segue

$$S_1 : \begin{cases} s_l - s = \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha, \\ r_l - r = \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha, \end{cases} \quad (3.27)$$

onde  $\alpha \geq 1$ .

Por outro lado,  $\rho < \rho_l$  em  $S_2$ , então pelo Lema 3.2

$$v = -\frac{1 - \alpha}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

onde  $\alpha = \frac{\rho}{\rho_l} \leq 1$ .

Podemos então escrever a 2-curva de choque  $S_2$  como segue

$$S_2 : \begin{cases} r_l - r = - \left( \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha \right), \\ s_l - s = - \left( \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha \right), \end{cases} \quad (3.28)$$

onde  $\alpha \leq 1$ .

**Lema 3.6** A curva de choque  $S_1$ , começando em  $(s_l, r_l)$ , pode ser escrita como

$$r_l - r = g_1(s_l - s) \equiv \int_0^{s_l - s} h_1(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_1(\beta)} d\beta, \quad s < s_l.$$

onde  $0 \leq \frac{dg_1}{d\beta}(\beta) < 1$  e  $0 \leq \frac{d^2g_1}{d\beta^2}(\beta)$ . De forma similar, a curva de choque  $S_2$ , começando em  $(s_l, r_l)$ , pode ser escrita como

$$s_l - s = g_2(r_l - r) \equiv \int_0^{r_l - r} h_2(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_1(\beta)} d\beta, \quad r < r_l.$$

onde  $0 \leq \frac{dg_2}{d\beta}(\beta) < 1$  e  $0 \leq \frac{d^2g_2}{d\beta^2}(\beta)$ .

**Demonstração:** Começamos considerando a curva  $S_1$ . De (3.27) temos que

$$\begin{aligned}\frac{d(s_l - s)}{d\alpha} &= \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) + 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \varepsilon^2)(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{d(r_l - r)}{d\alpha} &= \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) - 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \varepsilon^2)(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Definimos a função

$$h_1(\alpha) \equiv \frac{\frac{d(r_l - r)}{d\alpha}}{\frac{d(s_l - s)}{d\alpha}} = \frac{(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) - 2(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) + 2(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.29)$$

Notamos que  $(\alpha - 1)^2(1 - \varepsilon^2)^2 > 0$ , logo

$$\begin{aligned}(1 - 2\alpha + \alpha^2)(1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) &> 0 \\ (1 + 2\alpha + \alpha^2)(1 + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) &> 4(\alpha + \varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4\alpha) \\ (\alpha + 1)^2(1 + \varepsilon^2)^2 &> 4(\alpha + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^2\alpha),\end{aligned}$$

logo  $h_1(\alpha) > 0, \forall \alpha > 1$ .

Definimos também a função  $f_1$  da seguinte forma

$$\beta = \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha \equiv f_1(\alpha).$$

Derivando  $f_1$  em relação a  $\alpha$ , temos que

$$\frac{df_1}{d\alpha}(\alpha) = \frac{d(s_l - s)}{d\alpha} = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) + 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \varepsilon^2)(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

onde  $\alpha > 1$ . Como  $f_1$  é crescente, temos que  $\beta = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 1$ . Pelo Teorema da função implícita temos que  $\alpha = \alpha_1(\beta)$ . Além disso,  $\frac{d\alpha_1}{d\beta}(\beta) = \left[ \frac{df_1}{d\alpha}(\alpha) \right]^{-1} > 0$ .



Derivando a função composta  $(r_l - r)(\alpha_1(\beta))$  em relação a  $\beta$ , e usando (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(r_l - r)}{d\beta} \right|_{\alpha=\alpha_1(\beta)} &= \left. \frac{d(r_l - r)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1(\beta)} \frac{d\alpha_1}{d\beta}(\beta) \\ &= \left. \frac{d(r_l - r)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1(\beta)} \left[ \frac{df_1}{d\alpha}(\alpha) \right]^{-1} \\ &= h_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1(\beta)}. \end{aligned}$$

Definimos então

$$\begin{aligned} g_1(s_l - s) &\equiv \int_0^{s_l - s} h_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1(\beta)} d\beta \\ &= \left( \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha \right) \Big|_{\alpha=\alpha_1(s_l - s)}. \end{aligned}$$

Derivando  $g_1$  em relação a  $\beta$ , obtemos

$$0 \leq \frac{dg_1}{d\beta}(\beta) = h_1(\alpha_1(\beta)) < 1.$$

Derivando novamente em relação a  $\beta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_1}{d\beta^2}(\beta) &= \frac{dh_1}{d\beta}(\alpha_1(\beta)) = \frac{dh_1}{d\alpha}(\alpha_1(\beta)) \frac{d\alpha_1}{d\beta}(\beta) \\ &= \left[ \frac{1}{\varepsilon(\alpha + 1)(1 + \varepsilon^2) + 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right] \left[ \frac{2\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pois  $\alpha \geq 1$  em  $S_1$ .

Consideramos agora a curva  $S_2$ , de (3.28) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d(r_l - r)}{d\alpha} &= - \left( \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) + 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \varepsilon^2)(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right), \\ \frac{d(s_l - s)}{d\alpha} &= - \left( \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) - 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \varepsilon^2)(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Definimos a função

$$h_2(\alpha) \equiv \frac{\frac{d(s_l - s)}{d\alpha}}{\frac{d(r_l - r)}{d\alpha}} = \frac{(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) - 2(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) + 2(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Observamos que  $h_2(\alpha) > 0, \forall 0 < \alpha < 1$ .

Definimos também a função  $f_2$  da seguinte forma

$$\beta = - \left( \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha \right) \equiv f_2(\alpha).$$

Derivando  $f_2$  em relação a  $\alpha$ , temos que

$$\frac{df_2}{d\alpha}(\alpha) = \frac{d(r_l - r)}{d\alpha} = - \left( \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(\alpha + 1) + 2\varepsilon(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \varepsilon^2)(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right) < 0,$$

onde  $0 < \alpha < 1$ . Como  $f_2$  é decrescente, temos que  $\beta = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 1$ . Pelo Teorema da função implícita temos que  $\alpha = \alpha_2(\beta)$ . Além disso,  $\frac{d\alpha_2}{d\beta}(\beta) = \left[ \frac{df_2}{d\alpha}(\alpha) \right]^{-1} < 0$ .

Derivando a função composta  $(s_l - s)(\alpha_2(\beta))$  em relação a  $\beta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d(s_l - s)}{d\beta} \Big|_{\alpha=\alpha_2(\beta)} &= \frac{d(s_l - s)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2(\beta)} \frac{d\alpha_2}{d\beta}(\beta) \\ &= \frac{d(s_l - s)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2(\beta)} \left[ \frac{df_2}{d\alpha}(\alpha) \right]^{-1} \\ &= h_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2(\beta)}. \end{aligned}$$

Definimos então

$$\begin{aligned} g_2(r_l - r) &\equiv \int_0^{r_l - r} h_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2(\beta)} d\beta \\ &= - \left( \ln \left( \frac{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\alpha - 1)}{(\alpha + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^2\alpha)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(\alpha - 1)} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \ln \alpha \right) \Big|_{\alpha=\alpha_2(r_l - r)}. \end{aligned}$$

A análise das derivadas de  $g_2$  segue de forma similar a feita anteriormente, concluimos que  $0 \leq \frac{dg_2}{d\beta}(\beta) < 1$  e  $0 \leq \frac{d^2g_2}{d\beta^2}(\beta)$ . ■

Podemos então parametrizar a 1-curva de choque, começando em  $(s_l, r_l)$ , como

$$\gamma \rightarrow S_1(\gamma)(s_l, r_l) = (s_l + \gamma, r_l - g_1(-\gamma)),$$

onde  $\gamma \leq 0$ , e a 2-curva de choque, começando em  $(s_l, r_l)$ , como

$$\gamma \rightarrow S_2(\gamma)(s_l, r_l) = (s_l - g_2(-\gamma), r_l + \gamma),$$

onde  $\gamma \leq 0$ .

Dessa forma, temos que

$$\frac{dS_1}{d\gamma}(0)(s_l, r_l) = (1, 0), \quad \frac{dS_2}{d\gamma}(0)(s_l, r_l) = (0, 1).$$

Notamos que a curva de choque  $S_1$  começando em um ponto  $U_l$  pode ser obtida por uma reflexão, em relação ao eixo  $s_l = r_l$ , da curva de choque  $S_2$  começando no mesmo ponto  $U_l$ . De fato, as funções  $f_1$  e  $f_2$ , definidas na demonstração do Lema 3.6, são monótonas, e  $f_1(\alpha) = f_2(\frac{1}{\alpha})$ ,  $\forall \alpha \geq 1$ , logo  $g_1(\beta) = g_2(\beta)$ ,  $\forall \beta > 0$ .

De forma similar, podemos parametrizar a 1-curva de rarefação  $R_1$ , começando em  $(s_l, r_l)$ , como

$$\gamma \rightarrow R_1(\gamma)(s_l, r_l) = (s_l + \gamma, r_l),$$

onde  $\gamma \geq 0$ , e a 2-curva de rarefação, começando em  $(s_l, r_l)$ , como

$$\gamma \rightarrow R_2(\gamma)(s_l, r_l) = (s_l, r_l + \gamma),$$

onde  $\gamma \geq 0$ . Assim, temos que

$$\frac{dR_1}{d\gamma}(0)(s_l, r_l) = (1, 0), \quad \frac{dR_2}{d\gamma}(0)(s_l, r_l) = (0, 1),$$

observamos que a curva de rarefação  $R_1$  começando no ponto  $U_l$  também pode ser obtida através de uma reflexão, em relação ao eixo  $s_l = r_l$ , da curva de rarefação  $R_2$  começando no mesmo ponto

$U_l$ .

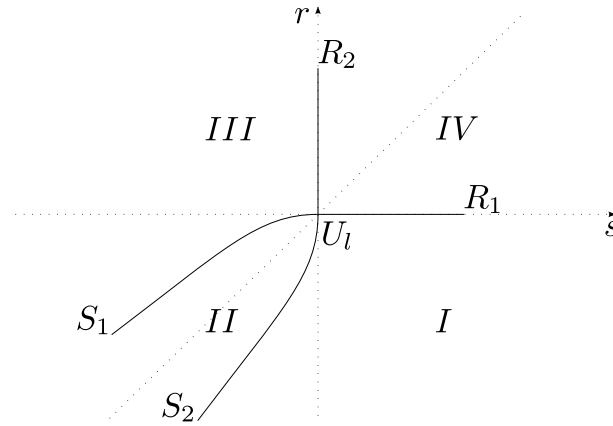


Figura 3.1: Curvas de rarefação e curvas de choque no plano  $s - r$ .

### 3.2.5. Solução do problema de Riemann

Consideramos o problema de Riemann para o sistema (3.5) com dado inicial (3.13). Quando  $U_r$  está suficientemente próximo de  $U_l$  a existência e unicidade da solução do problema de Riemann para o sistema (3.5), na classe das ondas elementares segue do Teorema de Lax, que é aplicado a qualquer sistema de leis de conservação que é estritamente hiperbólico e genuinamente não linear em cada campo característico, ([6], [17], [23], [33]).

Para o sistema (3.5), a solução do problema de Riemann pode ser (unicamente) construída para quaisquer estados  $U_l$  e  $U_r$ , satisfazendo

$$\rho_l, \rho_r > 0, \quad -\frac{1}{\varepsilon} < v_l, v_r < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Para mostrarmos isso, fixamos  $U_l$  e consideramos  $U = U_r$  variável. Notamos que as curvas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $R_1$  e  $R_2$ , que começam em  $U_l$  dividem o plano  $s - r$  em quatro regiões abertas  $I$ ,  $II$ ,  $III$  e  $IV$ , como mostra a Figura 3.1.

Se  $U_r$  pertence a qualquer das quatro curvas, o problema de Riemann é resolvido com uma única onda elementar, como vimos na definição das ondas elementares. Assumimos então que  $U_r$  está em uma das quatro regiões abertas  $I$ ,  $II$ ,  $III$  e  $IV$ , de acordo com a Figura 3.1.

Como em [33], para  $\bar{U} \in \mathbb{R}^2$  definimos

$$R_i(\bar{U}) \equiv \{(s, r); (s, r) \in R_i, \text{ começando em } \bar{U}\},$$

$$S_i(\bar{U}) \equiv \{(s, r); (s, r) \in S_i, \text{ começando em } \bar{U}\},$$

$$T_i(\bar{U}) \equiv S_i(\bar{U}) \cup R_i(\bar{U}),$$

$i = 1, 2$ .

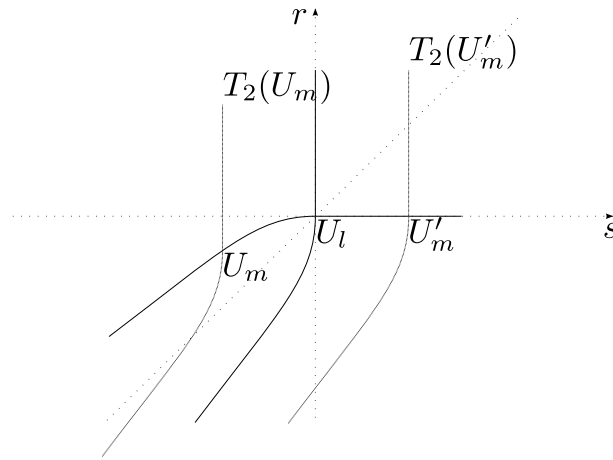


Figura 3.2:

Lembramos que o sistema (3.4) é estritamente hiperbólico,  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Para resolvermos o problema de Riemann, precisamos conectar o estado  $U_l$  ao estado intermediário  $U_m$  por uma onda da 1-família, e então conectar o estado intermediário  $U_m$  ao estado  $U_r$  por uma onda da 2-família.

Consideramos então a curva  $T_2(U_m) = S_2(U_m) \cup R_2(U_m)$  para  $U_m \in T_1(U_l) = S_1(U_l) \cup R_1(U_l)$ . Precisamos verificar que quaisquer duas curvas  $T_2(U_m)$  e  $T_2(U'_m)$ ,  $U_m, U'_m \in T_1(U_l)$ , não se interceptam e que o conjunto de todas essas tais curvas cobrem toda a região  $\rho > 0$ ,  $-\frac{1}{\varepsilon} < v < \frac{1}{\varepsilon}$  no plano  $s - r$ , ou seja, cobrem todo o plano  $s - r$ . (Figura 3.2).

Quando o estado  $U_r$  está na região *IV* o estado intermediário  $U_m = (s_m, r_m)$  satisfaz  $s_m = s_r$  e  $r_m = r_l$ . Quando  $U_r$  está na região *III* o estado intermediário  $U_m$  satisfaz  $s_m = s_r$  e  $r_m = r_l - g_1(|s_r - s_l|)$ . Quando  $U_r$  está na região *I* o estado intermediário  $U_m = (s_m, r_m)$  satisfaz  $r_m = r_l$  e  $s_m = s_r + g_2(|r_r - r_l|)$ . (Figura 3.1).

Supomos agora que  $U_r$  está na região *II*. Precisamos definir o conceito de curva de choque inversa. Uma curva de choque inversa  $S'_2$  consiste dos estados  $(s, r)$  que podem ser conectados ao

estado  $(s_r, r_r)$ , pela direita por uma onda de choque  $S_2$ . Sem perda de generalidade, supomos que  $v_r = 0$ . Pela Definição 3.4, a curva de choque inversa  $S'_2$  é representada por

$$S'_2 : v = \sqrt{\frac{(\rho - \rho_r)^2}{(\rho + \varepsilon^2 \rho_r)(\varepsilon^2 \rho + \rho_r)}},$$

onde  $\rho_r < \rho$ . Como no Lema 3.5, podemos mostrar que

$$\frac{dr}{ds} > 1,$$

em  $S'_2$ . Mas

$$0 < \frac{dr}{ds} < 1,$$

em  $S_1$ . Assim, temos que as duas curvas podem se interceptar apenas uma vez, logo o ponto  $U_m$  é único. Portanto, provamos que o conjunto  $\{T_2(U_m), U_m \in T_1(U_l)\}$ , cobre toda a região  $\rho > 0$ ,  $-\frac{1}{\varepsilon} < v < \frac{1}{\varepsilon}$ , no plano  $s - r$ .

Observamos que o estado intermediário  $U_m$  que aparece na solução do problema de Riemann satisfaz

$$s_m \geq \min\{s_l, s_r\}, \quad r_m \leq \max\{r_l, r_r\}.$$

**Definição 3.5** *A amplitude das ondas é definida como*

$$\beta \equiv s_m - s_l, \quad \gamma \equiv r_m - r_l,$$

onde  $\beta$  é a amplitude da 1-onda e  $\gamma$  é a amplitude da 2-onda. Os valores absolutos  $|\beta|$  e  $|\gamma|$  são chamados de tamanhos das ondas.

Observamos que  $\beta, \gamma \geq 0$  para ondas de rarefação e  $< 0$  para ondas de choque. Muitas vezes diremos apenas a onda  $\beta$  ou  $\gamma$ .

**Comentário 6** *Quando a solução do problema de Riemann é formada por duas ondas de choque*

não é claro que  $s_1 < s_2$ . Supondo que  $v_l = 0$ , temos que

$$s_1 = -\frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}} < 0.$$

Assumindo que  $v_m = 0$ , obtemos

$$s_2 = \frac{(\rho + \varepsilon^2 \rho_l)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2 \rho + \rho_l)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Mas, pelo Lema 3.2,  $v_m < v_l = 0$ , usando a Transformação de Lorentz, temos que

$$\bar{s}_2 = \frac{s_2 - v_m}{1 - \varepsilon^2 v_m s_2} > 0.$$

Daí  $s_1 < \bar{s}_2$ . Para mais detalhes veja [34].

**Comentário 7** Devido a (3.17) e (3.18), temos que  $r_m - s_m = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \ln \rho_m > 0$ , logo  $\rho_m > 0$  e o vácuo não aparece na solução do problema de Riemann. Observamos que  $0 < s_m + r_m = \ln \left( \frac{1+\varepsilon v_m}{1-\varepsilon v_m} \right) < \infty$ , logo  $|v_m| < \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Comentário 8** As curvas de choque e as curvas de rarefação não dependem do ponto inicial, no sentido que, quando analisamos seus gráficos no plano  $s - r$ , todas as curvas de choque são translações rígidas de outras curvas de choque, o mesmo ocorre com as curvas de rarefação. Além disso, a 1-curva de choque baseada em um estado é a reflexão da 2-curva de choque baseado no mesmo estado sobre o eixo  $s_l = r_l$ , o mesmo ocorre com as  $i$ -curvas de rarefação.

As Figuras 3.3-3.10 ilustram os tipos de soluções fracas possíveis para o problema de Riemann (3.5), com dado inicial (3.13), dependendo da região onde o estado  $U_r$  está localizado em relação ao estado  $U_l$ , de acordo com a Figura 3.1.

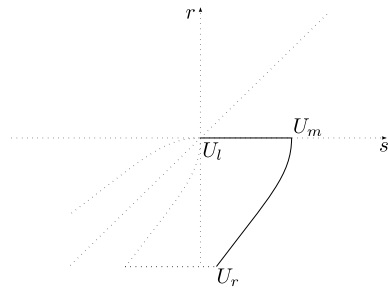


Figura 3.3:  $U_r$  na região I.

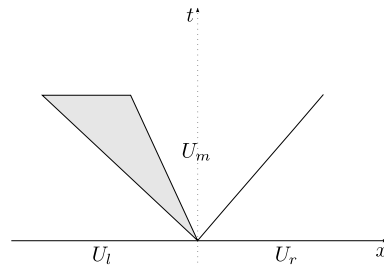


Figura 3.4:  $U_l \xrightarrow{R_1} U_m \xrightarrow{S_2} U_r$ .

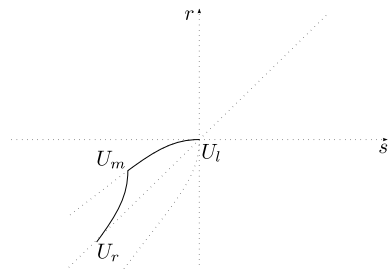


Figura 3.5:  $U_r$  na região II.

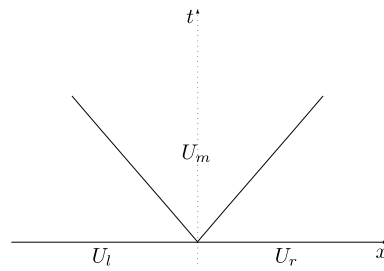


Figura 3.6:  $U_l \xrightarrow{S_1} U_m \xrightarrow{S_2} U_r$ .

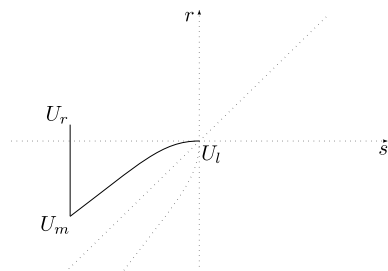


Figura 3.7:  $U_r$  na região III.

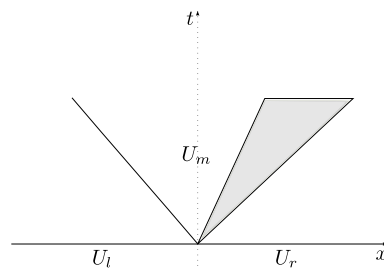


Figura 3.8:  $U_l \xrightarrow{S_1} U_m \xrightarrow{R_2} U_r$ .

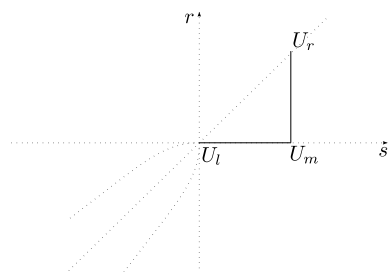


Figura 3.9:  $U_r$  na região IV.

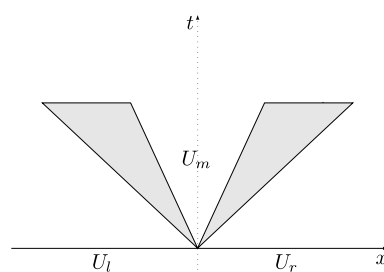


Figura 3.10:  $U_l \xrightarrow{R_1} U_m \xrightarrow{R_2} U_r$ .

### 3.3 Aproximação por ondas front tracking

Nesta seção discutiremos a construção de soluções aproximadas pelo método wave-front tracking para o sistema (3.5). Assumimos inicialmente que a variação total do dado inicial  $U_0$  é limitada.



De forma simplificada, para cada  $h \in \mathbb{N}$ , queremos construir uma solução  $h$ -aproximada para o sistema de leis de conservação (3.5) que consiste de uma função constante por partes  $U^h = U^h(x, t)$ , cujos saltos de descontinuidade estão localizados em um número finito de segmentos de retas  $x = x_\alpha(t)$ , no plano  $x - t$ , e satisfazem de forma aproximada a condição de Rankine-Hugoniot.

**Definição 3.6** Para cada  $h \in \mathbb{N}$ , diremos que uma função  $U : [0, \infty) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  é uma solução  $h$ -aproximada por ondas front tracking de (3.5) se as seguintes condições são verdadeiras:

1. Como uma função de duas variáveis,  $U = U(x, t)$  é constante por partes, com descontinuidades ocorrendo ao longo de um número finito de segmentos de retas no plano  $x - t$ . Os saltos podem ser de três tipos: choques, rarefações e ondas não físicas, denotamos a união destes saltos por  $J = S \cup R \cup NP$ , onde  $S$  é o conjunto dos choques,  $R$  é o conjunto das rarefações e  $NP$  é o conjunto das ondas não físicas.
2. Ao longo de cada onda front de choque  $x = x_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in S$ , os valores  $U_l \equiv U(x_\alpha^-, t)$  e  $U_r \equiv U(x_\alpha^+, t)$  são relacionados por

$$U_r = S_{k_\alpha}(\sigma_\alpha)(U_l), \quad (3.30)$$

para algum  $k_\alpha \in \{1, 2\}$  e alguma onda de tamanho  $\sigma_\alpha$ , onde  $\sigma_\alpha < 0$ . Além disso, a velocidade da onda front de choque satisfaz

$$|\dot{x}_\alpha - \lambda_{1_\alpha}(U_r, U_l)| \leq \frac{1}{h}, \quad (3.31)$$

onde  $\lambda_{1_\alpha}(U_r, U_l)$  é a velocidade do choque que conecta os estados  $U_r$  e  $U_l$ .

3. Ao longo de cada onda front de rarefação  $x = x_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in R$ , temos

$$U_r = R_{k_\alpha}(\sigma_\alpha)(U_l), \quad \sigma_\alpha \in (0, h^{-1}],$$

para alguma  $k_\alpha$ -família. Além disso,

$$|\dot{x}_\alpha - \lambda_{k_\alpha}(\Psi(U_r))| \leq \frac{1}{h}. \quad (3.32)$$

4. Toda onda front não física  $x = x_\alpha$ ,  $\alpha \in NP$ , tem a mesma velocidade

$$\dot{x}_\alpha = \hat{\lambda},$$

onde  $\hat{\lambda} > 0$  é uma constante fixa estritamente maior que toda velocidade característica. O tamanho total de todas as ondas front não físicas em  $U(x, t)$  permanece uniformemente pequeno, isto é,

$$\sum_{\alpha \in NP} |U(x_\alpha^+, t) - U(x_\alpha^-, t)| \leq \frac{1}{h}, \quad \forall t > 0.$$

Se em adicional,  $U^h(\cdot, 0) \rightarrow U_0$ , em  $L^1_{loc}$ , quando  $h \rightarrow \infty$ , diremos que  $U^h$  é uma solução  $h$ -aproximada por ondas front tracking do problema de Cauchy (3.5), com dado inicial  $U_0$ .

**Comentário 9** Em [6], o dado inicial  $U_0$  pertence a  $L^1$  e a solução  $h$ -aproximada satisfaz também

$$\|U(\cdot, 0) - U_0\|_{L^1} \leq \frac{1}{h}.$$

A construção da nossa solução  $h$ -aproximada deve produzir algum erro. Para cada tempo  $t > 0$ , precisamos garantir que esse erro permanece controlado. O próximo lema estima o erro na solução  $h$ -aproximada, em um tempo dado  $t > 0$ . O tamanho de uma onda front não física é definido como  $|\gamma| = |U_l - U_r|$ .

**Lema 3.7** Seja  $U = U(x, t)$  uma solução  $h$ -aproximada por front tracking de (3.5). Fixamos qualquer tempo  $t > 0$  onde não ocorre interação entre ondas front. Consideramos qualquer onda front localizada digamos em  $x_\alpha$  com tamanho  $\gamma_\alpha$ . Sejam  $U_l \equiv U(x_\alpha^-, t)$ ,  $U_r \equiv U(x_\alpha^+, t)$ . Definimos o erro na equação de Rankine-Hugoniot como

$$E_\alpha \equiv |[F(\Psi(U_r)) - F(\Psi(U_l))] - \dot{x}_\alpha [G(\Psi(U_r)) - G(\Psi(U_l))]|, \quad (3.33)$$

onde  $\Psi$  está definida em (3.25).

1. Ao longo de toda curva de rarefação temos

$$E_\alpha = O(1) \frac{1}{h} |\gamma_\alpha|.$$

2. Ao longo de toda curva de choque temos

$$E_\alpha = O(1)\frac{1}{h}|\gamma_\alpha|.$$

3. Ao longo de toda onda front não física temos

$$E_\alpha = O(1)|\gamma_\alpha|.$$

**Demonstração:** Primeiro supomos que a onda front pertence a 1-família característica. Vamos mostrar o item 1. Para um estado  $\bar{U} \in \mathbb{R}^2$  fixo, consideramos a função

$$\Phi(\gamma, \bar{U}) \equiv [F(\Psi(R_1(\gamma)(\bar{U}))) - F(\Psi(\bar{U}))] - \lambda_1(\Psi(\bar{U})) [G(\Psi(R_1(\gamma)(\bar{U}))) - G(\Psi(\bar{U}))].$$

Assim, temos que  $\Phi(0, \bar{U}) = 0$ , pois  $R_1(0)(\bar{U}) = \bar{U}$ . Derivando em relação a  $\gamma$ , e usando (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}(0, \bar{U}) &= DF(\Psi(R_1(0)(\bar{U})))D\Psi(R_1(0)(\bar{U}))\frac{\partial R_1}{\partial \gamma}(0)(\bar{U}) \\ &\quad - \lambda_1(\Psi(\bar{U}))DG(R_1(0)(\bar{U}))D\Psi(R_1(0)(\bar{U}))\frac{\partial R_1}{\partial \gamma}(0)(\bar{U}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto pelo Lema 2.2, temos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}(\gamma, \bar{U}) = O(1)|\gamma|^2. \quad (3.34)$$

Observamos que, quando a onda front em  $x_\alpha$  pertence a  $1_\alpha$ -família característica fazemos  $\bar{U} = U_l$ ,  $1 = 1_\alpha$  em (3.34). Supomos agora que  $\gamma_\alpha \in [0, h^{-1}]$  e observamos que

$$\begin{aligned} |\Psi(R_{1_\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l)) - \Psi(U_l)| &\leq O(1)|R_{1_\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l) - U_l| \\ &\leq O(1)|\gamma_\alpha| \\ &\leq O(1)\frac{1}{h}, \end{aligned}$$

$$|\lambda_{1\alpha}(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - \lambda_{1\alpha}(\Psi(U_l))| \leq O(1)\frac{1}{h}.$$

Por (3.32), temos que

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{[F(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - F(\Psi(U_l))] - \lambda_{1\alpha}(\Psi(U_l)) [G(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - G(\Psi(U_l))]\} \\ &\quad + [\lambda_{1\alpha}(\Psi(U_l)) - \lambda_{1\alpha}(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l)))] [G(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - G(\Psi(U_l))] \\ &\quad + [\lambda_{1\alpha}(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - \dot{x}_\alpha] [G(\Psi(R_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - G(\Psi(U_l))] \\ &= O(1)|\gamma_\alpha|^2 + O(1)\frac{1}{h}|\gamma_\alpha| \\ &= O(1)\frac{1}{h}|\gamma_\alpha|. \end{aligned}$$

Para mostrarmos o item 2, notamos primeiro que

$$\begin{aligned} |\Psi(S_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l)) - \Psi(U_l)| &\leq O(1)|S_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l) - U_l| \\ &\leq O(1)|\gamma_\alpha| \\ &\leq O(1)\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Agora, por (3.30) e (3.31) temos

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{[F(\Psi(S_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - F(\Psi(U_l))] - \lambda_{1\alpha}(U_r, U_l) [G(\Psi(S_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - G(\Psi(U_l))]\} \\ &\quad + [\lambda_{1\alpha}(U_r, U_l) - \dot{x}_\alpha] [G(\Psi(S_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(U_l))) - G(\Psi(U_l))] \\ &= O(1)\frac{1}{h}|\gamma_\alpha|, \end{aligned}$$

onde  $U_r = S_{1\alpha}(\gamma_\alpha)(\bar{U})$ . Finalmente, a estimativa no item 3 é consequência da continuidade Lipschitz das funções  $F$  e  $G$ . De modo análogo, temos resultados similares quando a onda front pertence a 2-família. ■

**Comentário 10** *Precisamos mostrar que as quantidades  $O(1)$  que aparecem no lema anterior e no restante do texto, permanecem uniformemente limitadas. Isso ficará claro quando mostrarmos que a variação total da solução aproximada é controlada pela variação total do dado inicial, ou seja,  $TV(U^h(\cdot, t)) \leq MTV(U_0)$ , para cada  $h \in N$  e para cada  $t > 0$ , onde  $M > 0$  é constante. De*

fato, para cada  $t > 0$  temos  $\|U^h(\cdot, t)\|_\infty \leq TV(U^h(\cdot, t)) + |U^h(-\infty, t)|$ , e assumindo por enquanto que  $U^h(-\infty, t) = U_0(-\infty)$ , obtemos  $\|U^h\|_\infty \leq M_1$ , onde a constante  $M_1$  não depende de  $h$ .

**Comentário 11** Como em [2], estabeleceremos a existência de soluções aproximadas, definidas para todo  $0 \leq t < T$ , para algum  $T > 0$  fixo. Depois, mostraremos que a solução aproximada pode ser construída para todo  $t \geq 0$ . Construiremos então uma sequência de soluções aproximadas, que satisfazem as condições do Teorema 2.1. O limite em  $L^1_{loc}$  de uma subsequência dessa sequência será a solução fraca do sistema (3.5).

### 3.3.1. O algoritmo wave-front tracking

Começamos a construção da solução aproximada por front tracking escolhendo uma função constante por partes  $U^h(\cdot, 0)$ , para cada  $h \in \mathbb{N}$ , que aproxima o dado inicial  $U_0$ . Como  $U_0$  tem variação total limitada, existem os limites laterais  $U_0(-\infty)$  e  $U_0(\infty)$ . Então podemos escrever  $U_0(-\infty) = p_0$ .

Dado  $h \in \mathbb{N}$  fixo. Definimos a função

$$U^h(x, 0) = \begin{cases} U_0(-\infty), & x < -h, \\ U_0(2^{-k}j), & x \in [-h + 2^{-h}j, -h + 2^{-h}(j+1)), \\ U_0(\infty), & x \geq h, \end{cases}$$

onde  $j = 0, 1, \dots, 2^{h+1}h - 1$ . Para cada  $h \in \mathbb{N}$ , a função  $U^h(\cdot, 0)$  satisfaz

$$\begin{cases} |U^h(x, 0)| \leq \|U_0\|_{L^\infty}, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ TV(U^h(\cdot, 0)) = TV_{[-h, h]}(U_0) \leq TV(U_0). \end{cases}$$

Mostraremos que  $U^h(\cdot, 0) \rightarrow U_0$ , em  $L^1_{loc}$ , quando  $h \rightarrow \infty$ .

Seja  $N \in \mathbb{N}$  fixo. Notamos que  $|U^h(x, 0) - U_0(x)| \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow \infty$ , para quase todo  $x \in [-N, N]$ . De fato, como  $U_0$  tem variação total limitada,  $U_0$  é contínua para quase todo  $x \in [-N, N]$ . Seja  $x_0 \in (-N, N)$  tal que  $U_0$  é contínua em  $x_0$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(x_0) > 0$  tal que se  $|x_0 - y| < \delta$  então  $|U_0(x_0) - U_0(y)| < \varepsilon$ .

Seja  $h_0 = h_0(x_0) \in \mathbb{N}$  tal que  $2^{-h_0} < \delta$ . Seja  $j_0 \in \{0, 1, \dots, 2^{h_0+1}N - 1\}$  tal que  $x \in [-N + 2^{-h_0}j_0, -N + 2^{-h_0}(j_0 + 1))$ . Notamos que  $|x_0 - (-N + 2^{-h_0}j_0)| < 2^{-h_0} < \delta$ . Daí

$$|U^{h_0}(x_0, 0) - U_0(x_0)| = |U_0(-N + 2^{-h_0}j_0) - U_0(x_0)| < \varepsilon.$$

Notamos que  $\forall h > h_0, h \in \mathbb{N}$ ,

$$|U^h(x_0, 0) - U_0(x_0)| < \varepsilon.$$

Portando  $U^h(x, 0) \rightarrow U_0(x)$ , para quase todo  $x \in [-N, N]$ .

Como  $|U^h(x, 0) - U_0(x)| \leq 2\|U_0\|_{L^\infty}, \forall x \in [-N, N]$ , pelo Teorema da convergência dominada temos que  $U^h(\cdot, 0) \rightarrow U_0$ , em  $L^1_{loc}$ , quando  $h \rightarrow \infty$ .

Portanto, a função  $U^h(\cdot, 0)$  satisfaz

$$\begin{cases} U^h(-\infty, 0) = p_0, \\ TV(U^h(\cdot, 0)) \leq TV(U_0), \\ \|U^h(\cdot, 0) - U_0\|_{L^1_{loc}} \rightarrow 0. \end{cases}$$

Sejam  $x_1 < \dots < x_N$  os pontos onde  $U^h(\cdot, 0)$  é descontínua. Para cada  $\alpha \in \{1, 2, \dots, N\}$ , o problema de Riemann

$$\begin{cases} G(\Psi(U))_t + F(\Psi(U))_x = 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} U^h(x^-_\alpha, 0), & x < x_\alpha, \\ U^h(x^+_\alpha, 0), & x > x_\alpha, \end{cases} \end{cases}$$

é resolvido em uma vizinhança de  $(x_\alpha, 0)$  no semiplano  $x - t, t > 0$ , por uma função da forma  $U(x, t) = \phi\left(\frac{x-x_\alpha}{t}\right)$ , com  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  constante por partes.

Resolvemos cada problema de Riemann conforme estudado na Seção 3.2.5.. Quando a solução envolve apenas ondas de choque, temos uma solução fraca constante por partes para o problema de Riemann. Isso não acontece quando temos ondas de rarefação envolvidas na solução. As ondas de rarefação são então aproximadas por um leque de ondas front de rarefação contendo um número

finito de estados constantes separados por descontinuidades viajando com velocidade próxima à velocidade característica.

**Comentário 12** *Uma onda de choque e uma onda front de choque são soluções iguais para o mesmo problema de Riemann. Um leque de ondas front de rarefação é uma função constante por partes que aproxima uma onda de rarefação.*

Prolongamos então a solução  $U$  até um tempo  $t_1$  que é atingido, onde o primeiro conjunto de interações entre duas ou mais ondas front ocorre.

Em um ponto onde ocorre uma interação as ondas que chegam são chamadas de ondas front de chegada, e as ondas que saem desse ponto são chamadas de ondas front de saída.

Como  $U(., t_1)$  é ainda uma função constante por partes, usando os argumentos anteriores, os problemas de Riemann correspondentes podem ser resolvidos de forma aproximada por soluções dentro da classe de funções constantes por partes. A solução  $U$  então é prolongada até um tempo  $t_2$  onde o segundo conjunto de ondas interage, e assim por diante.

Denotamos como  $t_i$  o tempo onde ocorre a  $i$ -interação entre ondas front. O conjunto  $\{t_1, t_2, \dots\}$  pode ter infinitos elementos, quando isso ocorre, podemos continuar nossa aproximação até um tempo  $T_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i$ . Observamos que se  $T_\infty$  for finito a solução aproximada não é global. Notamos que  $U(-\infty, t) = U_0(-\infty), \forall t \in [0, T_\infty)$ .

Queremos garantir que o número de interações entre as ondas front seja finito, assim garantiremos que a solução aproximada é global. Para isso usaremos dois procedimentos diferentes para resolver o problema de Riemann dentro da classe de funções constantes por partes o primeiro chamaremos de solução exata do problema de Riemann, que pode introduzir novas ondas front, e o segundo chamaremos de solução simplificada do problema de Riemann, que envolve no máximo três ondas front de saída. No segundo procedimento, introduzimos uma nova onda front de saída não física com velocidade fixada  $\hat{\lambda} > 0$  estritamente maior que toda velocidade característica.

A solução exata do problema de Riemann pode introduzir novas ondas front na solução aproximada. Como a variação total do dado inicial é limitada e supondo que  $TV(U^h(., t)) \leq MTV(U_0)$ ,  $\forall t > 0$ , onde  $M > 0$  é constante, então as novas ondas front geradas por muitas interações são muito

pequenas. Quando o tamanho dessas ondas tornar-se menor que um parâmetro  $\mu > 0$ , o método de solução simplificada é usado, esse método pode gerar uma nova onda front não física, com tamanho muito pequeno. Mostraremos que esse processo mantém o número total de ondas front limitado para todo tempo.

Descreveremos agora os dois métodos de solução para o problema de Riemann, os quais irão gerar nossa solução  $h$ -aproximada.

Dado o problema de Riemann geral em um ponto  $(\bar{x}, \bar{t})$

$$\begin{cases} G(\Psi(U))_t + F(\Psi(U))_x = 0, \\ U(x, \bar{t}) = \begin{cases} U_l, & x < \bar{x}, \\ U_r, & x > \bar{x}, \end{cases} \end{cases} \quad (3.35)$$

Para um dado estado  $\tilde{U} = (\tilde{s}, \tilde{r}) \in \mathbb{R}^2$ , consideramos as curvas compostas

$$\begin{aligned} \Psi_1(\gamma)(\tilde{s}, \tilde{r}) &\equiv \begin{cases} R_1(\gamma)(\tilde{s}, \tilde{r}) = (\tilde{s} + \gamma, \tilde{r}), & \gamma \geq 0, \\ S_1(\gamma)(\tilde{s}, \tilde{r}) = (\tilde{s} + \gamma, \tilde{r} - g_1(-\gamma)), & \gamma < 0, \end{cases} \\ \Psi_2(\gamma)(\tilde{s}, \tilde{r}) &\equiv \begin{cases} R_2(\gamma)(\tilde{s}, \tilde{r}) = (\tilde{s}, \tilde{r} + \gamma), & \gamma \geq 0, \\ S_2(\gamma)(\tilde{s}, \tilde{r}) = (\tilde{s} - g_2(-\gamma), \tilde{r} + \gamma), & \gamma < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

- Solução exata do problema de Riemann

Dados dois estados  $U_l$  e  $U_r$ , primeiro determinamos os estados  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , e o valor dos parâmetros  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , de modo que

$$\omega_0 = U_l, \quad \omega_1 = \Psi_1(\gamma_1)(\omega_0), \quad \omega_2 = \Psi_2(\gamma_2)(\omega_1) = U_r.$$

Observamos que  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  são os estados constantes que aparecem na solução do problema de Riemann (3.35). Se a solução for composta apenas por ondas de choque então o problema de Riemann tem uma solução constante por partes com um número de linhas de descontinuidade menor ou igual a 2. Se a solução possuir alguma onda de rarefação, essa será aproximada por um leque de ondas front de rarefação constantes por partes, inserindo estados adicionais  $\omega_{i,j}$ , da seguinte forma: seja  $\delta > 0$  uma constante pequena, dada no início



do algoritmo de construção.

– Se  $\gamma_i > 0$ , consideramos o inteiro

$$p_i \equiv 1 + \left\lceil \frac{\gamma_i}{\delta} \right\rceil, \quad (3.37)$$

onde  $[s]$  é o maior número inteiro menor que  $s$ . Para  $j = 1, \dots, p_i$ , definimos

$$\omega_{i,j} \equiv \Psi_i \left( j \frac{\gamma_i}{p_i} \right) (\omega_{i-1}), \quad (3.38)$$

$$x_{i,j} \equiv \bar{x} + (t - \bar{t}) \lambda_i(\Psi(\omega_{i,j})). \quad (3.39)$$

– Se  $\gamma_i < 0$ , definimos  $p_i \equiv 1$  e

$$\begin{aligned} \omega_{i,1} &\equiv \omega_i, \\ x_{i,1} &\equiv \bar{x} + (t - \bar{t}) \lambda_i(\omega_{i-1}, \omega_i), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde  $\lambda_i(\omega_{i-1}, \omega_i)$  é a velocidade do choque que conecta os estados  $\omega_{i-1}$  e  $\omega_i$  e satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot.

Agora que determinamos as localizações dos saltos  $x_{i,j}(t)$ , por (3.39) e (3.40), podemos definir uma solução aproximada para o problema de Riemann (3.35) da seguinte forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < x_{1,1}(t), \\ U_r, & x > x_{n,p_n}(t), \\ \omega_i (= \omega_{i,p_i}), & x_{i,p_i}(t) < x < x_{i+1,1}(t), \\ \omega_{i,j}, & x_{i,j}(t) < x < x_{i,j+1}(t), \quad (j = 1, \dots, p_i - 1). \end{cases} \quad (3.41)$$

A diferença entre a função  $U$  e a solução exata de (3.35) está no fato que a onda de rarefação da  $i$ -família é substituída por um leque de ondas front de rarefação contendo  $p_i$  ondas,  $i = 1, 2$ . Devido a (3.37) e (3.38) temos que o tamanho de cada onda front de rarefação é  $< \delta$ , de fato

$$\frac{\gamma_i}{p_i} < \frac{\gamma_i}{\frac{\gamma_i}{\delta}} = \delta.$$

- Solução simplificada do problema de Riemann

A Solução simplificada do problema de Riemann é dividida em dois casos:

1. Sejam  $j$  e  $j' \in \{1, 2\}$  duas ondas front que interagem, com  $j \geq j'$ . Assumimos que os estados  $U_l$ ,  $U_m$  e  $U_r$  antes da interação são relacionados por

$$U_m = \Psi_j(\gamma)(U_l), \quad U_r = \Psi_{j'}(\gamma')(U_m).$$

Definimos o estado auxiliar à direita

$$\bar{U}_r \equiv \begin{cases} \Psi_j(\gamma) \circ \Psi_{j'}(\gamma')(U_l), & j > j', \\ \Psi_j(\gamma + \gamma')(U_l), & j = j'. \end{cases} \quad (3.42)$$

Seja  $\bar{U} = \bar{U}(x, t)$  a solução constante por partes do problema de Riemann com dados  $U_l$ ,  $\bar{U}_r$ , construída como em (3.41). De acordo com (3.42) a função constante por partes  $\bar{U}$  contém exatamente duas ondas front de tamanhos  $\gamma'$ ,  $\gamma$ , se  $j > j'$ , ou uma simples onda front de tamanho  $\gamma + \gamma'$ , se  $j = j'$ .

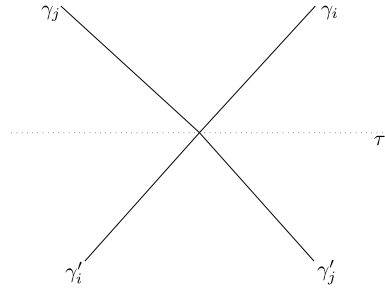
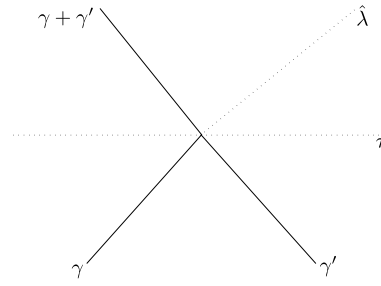
Como consequência do Comentário 8,  $U_r = \bar{U}_r$  quando as ondas são de famílias diferentes,  $j \neq j'$ , (Figura 3.11). Quando as ondas são da mesma família,  $j = j'$ , então  $U_r \neq \bar{U}_r$ , nesse caso a velocidade do salto entre  $U_r$  e  $\bar{U}_r$ , é definida como  $\hat{\lambda} > 0$ , que é uma constante fixa e estritamente maior que as velocidades características, (Figura 3.12). Assim, em uma vizinhança do ponto  $(\bar{x}, \bar{t})$ , podemos definir portanto uma solução aproximada  $U$  da seguinte forma

$$U(x, t) \equiv \begin{cases} \bar{U}(x, t), & (x - \bar{x}) < (t - \bar{t})\hat{\lambda}, \\ U_r, & (x - \bar{x}) > (t - \bar{t})\hat{\lambda}. \end{cases} \quad (3.43)$$

Notamos que quando  $j = j'$ , a solução simplificada do problema de Riemann introduz uma nova onda front não física, com velocidade constante  $\hat{\lambda} > 0$ .

2. Uma onda front não física interage pela esquerda com uma onda front  $\gamma$  da  $i$ -família característica, para algum  $i \in \{1, 2\}$ . Sejam  $U_l$ ,  $U_m$ ,  $U_r$  os estados antes da interação. Então os estados  $U_m$  e  $U_r$  estão relacionados por

$$U_r = \Psi_i(\gamma)(U_m).$$

Figura 3.11:  $P + P \rightarrow P + P$ .Figura 3.12:  $P + P \rightarrow P + NP$ .

Definimos então o estado auxiliar

$$\bar{U}_r \equiv \Psi_i(\gamma)(U_l). \quad (3.44)$$

Seja  $\bar{U}$  a solução do problema de Riemann gerado pelos estados  $U_l$  e  $\bar{U}_r$ , construída como em (3.41). Devido a (3.44),  $\bar{U}$  possui uma única onda front pertencente à  $i$ -família, com tamanho  $\gamma$ . Como  $U_r \neq \bar{U}_r$ , a velocidade do salto entre  $U_r$  e  $\bar{U}_r$  é definida como  $\hat{\lambda} > 0$ . Na vizinhança do ponto  $(\bar{x}, \bar{t})$ , a solução aproximada  $U$  é portanto definida de acordo com (3.43).

Como as ondas front não físicas viajam com velocidade constante  $\hat{\lambda} > 0$ , elas nunca interagem umas com as outras.

Para concluirmos a descrição do algoritmo resta especificarmos em que tipo de interação entre ondas front utilizamos cada tipo de solução do problema de Riemann.

Como mencionamos anteriormente, a escolha é feita de acordo com o parâmetro  $\mu > 0$ .

- O método exato é usado em  $t = 0$ , e em toda interação entre duas ondas front físicas, isto é, rarefações e choques, quando o produto do tamanho das ondas que interagem é  $|\gamma\gamma'| \geq \mu$ .
- O método simplificado é usado em toda interação que envolve uma onda front não física, e é também utilizado em interações entre duas ondas físicas, quando o produto do tamanho das ondas que interagem é  $|\gamma\gamma'| < \mu$ .

Toda onda front é unicamente continuada avançando no tempo, a não ser que ela tenham sido completamente cancelada por interações com outras ondas front da mesma família e sinal oposto.

A construção de uma solução aproximada portanto envolve três parâmetros:

- Uma velocidade fixa  $\hat{\lambda} > 0$ , estritamente maior que toda velocidade característica, que define a velocidade das ondas não físicas.
- Uma constante pequena  $\delta > 0$ , controlando o comprimento máximo das ondas front de rarefação.
- Um parâmetro  $\mu > 0$ , determinando quando usaremos a solução exata ou a solução simplificada do problema de Riemann.

Isso completa a definição do algoritmo.

**Definição 3.7** *Definimos o tamanho de uma onda não física como a diferença  $|U_r - \bar{U}_r|$ . Para facilitar nossas análises, diremos que as ondas front não físicas são da 3-família característica.*

Precisamos mostrar agora que se o dado inicial  $U_0$  tem variação total limitada, então para cada  $h \in \mathbb{N}$  existe uma escolha apropriada dos parâmetros  $\delta$  e  $\mu$ , que faz com que a aplicação do algoritmo produza uma solução  $h$ -aproximada definida para todo  $t \geq 0$ . Assumimos que  $\delta = \frac{1}{h}$  e que  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon}$ . O parâmetro  $\mu$  será escolhido de forma que o tamanho total de todas as ondas não físicas seja  $< \frac{1}{h}$ .

**Comentário 13** *De acordo com o algoritmo, ondas front de choque viajam exatamente com a velocidade de Rankine-Hugoniot  $\dot{x}_\alpha = \lambda_{k_\alpha}(U_r, U_l)$ , enquanto que as ondas front de rarefação viajam com velocidades características de seus estados à direita  $\dot{x}_\alpha = \lambda_{k_\alpha}(\Psi(U_r))$ .*

*Porém, se três ou mais ondas front se encontrarem em um mesmo ponto, mudamos a velocidade de uma ou mais ondas front, para garantirmos que no máximo duas ondas front interagem em cada ponto. Claro que essa mudança de velocidade pode ser escolhida arbitrariamente pequena.*

### 3.4 Estimativas de interação

Nesta seção estudaremos os tipos de interação entre ondas front que podem ocorrer quando o algoritmo apresentado na seção anterior é aplicado ao sistema (3.5). Estamos interessados na

relação entre os tamanhos das ondas de entrada e os tamanhos das ondas de saída envolvidas em uma interação.

Supomos que a solução aproximada  $U^h(x, t)$  é construída para  $0 \leq t < T$ , para algum  $T > 0$ . Seja  $t \in (0, T)$  fixo, onde não ocorre interação entre ondas. Seja  $x_\alpha$ ;  $\alpha = 1, \dots, N$ , as localizações das ondas front em  $U^h(., t)$ .

**Definição 3.8** *Diremos que duas ondas front em  $U^h(., t)$  localizadas nos pontos  $x_\alpha < x_\beta$  e pertencentes às famílias características  $k_\alpha, k_\beta \in \{1, 2, 3\}$ , respectivamente, estão se aproximando quando  $k_\alpha > k_\beta$ , ou quando  $k_\alpha = k_\beta$  e pelo menos uma das ondas é um choque.*

Observamos que duas ondas front de rarefação da mesma família característica nunca se aproximam. De fato, sejam  $U_l, U_m$  e  $U_r$  os valores intermediários, relacionados por

$$U_m = R_i(\gamma)(U_l), \quad U_r = R_i(\gamma')(U_m),$$

onde  $\gamma, \gamma' \geq 0$ . Esses estados estão sobre a mesma  $i$ -curva de rarefação e como a velocidade característica é crescente ao longo da  $i$ -curva de rarefação temos que  $\lambda_i(\Psi(U_m)) < \lambda_i(\Psi(U_r))$ , o que mostra que as duas  $i$ -ondas de rarefação nunca se encontram, para  $i = 1, 2$ .

As ondas front não físicas não interagem entre si, pois toda onda front não física viaja com a mesma velocidade característica  $\hat{\lambda}$ .

### 3.4.1. Estimativas locais de interação

As ondas front não físicas que são da 3-família característica interagem com qualquer onda que esteja a sua direita. As ondas front podem interagir da seguinte forma:

1.  $NP$  interage com  $S_2$ , ou com  $S_1$ , ou com  $R_2$ , ou com  $R_1$ ,
2.  $S_2$  interage com  $S_2$ , ou com  $S_1$ , ou com  $R_2$ , ou com  $R_1$ ,
3.  $R_2$  interage com  $S_2$ , ou com  $S_1$ , ou com  $R_1$ ,
4.  $S_1$  interage com  $S_1$ , ou com  $R_1$ ,

5.  $R_1$  interage com  $S_1$ .

**Notações:** Nesta seção usaremos uma notação que deve nos auxiliar na análise das interações entre ondas front: usamos  $\beta$  para denotar uma 1-onda front de choque com tamanho  $|\beta|$ . De forma similar, usaremos  $\gamma$  para denotar uma 2-onda front de choque,  $o$  para denotar uma 1-onda front de rarefação e  $\pi$  para denotar uma 2-onda front de rarefação.

Em um ponto onde ocorre interação, denotamos por  $\beta'$  uma 1-onda de choque de chegada e por  $\beta$  uma 1-onda de choque de saída.

Escrevemos  $\gamma' + o' \rightarrow o + \gamma$  para denotar a interação entre uma 2-onda front de choque com uma 1-onda front de rarefação que gera uma 1-onda front de rarefação e uma 2-onda front de choque, essa interação também será denotada como  $S_2 + R_1 \rightarrow R_1 + S_2$  quando não quisermos especificar o tamanho das ondas envolvidas.

Primeiro analisaremos as interações entre uma onda front não física e uma onda front de choque ou uma onda front de rarefação. Sejam  $U_l$ ,  $U_m$  e  $U_r$  os estados intermediários antes da interação. Os estados  $U_l$  e  $U_m$  estão separados pela onda front não física, e assumimos primeiro que os estados  $U_m$  e  $U_r$  estão relacionados por  $U_r = \Psi_2(\gamma)(U_m)$ , onde  $\gamma$  é o tamanho da 2-onda de choque. De acordo com a solução simplificada do problema de Riemann, que deve ser aplicada nesse caso, a solução do problema de Riemann gerado por essa interação possui os valores intermediários  $U_l$ ,  $\bar{U}_r$  e  $U_r$ , sendo que os estados  $\bar{U}_r$  e  $U_r$  estão separados por uma onda front não física, e os estados  $U_l$  e  $\bar{U}_r$  estão relacionados por  $\bar{U}_r = \Psi_2(\gamma)(U_l)$ . Por (3.36), temos que

$$|\bar{U}_r - U_r| - |U_l - U_m| = |\Psi_2(\gamma)(U_l) - \Psi_2(\gamma)(U_m)| - |U_l - U_m| = 0.$$

Os outros casos são análogos. Portanto uma onda front não física não tem seu tamanho alterado depois de uma interação com uma onda front qualquer.

Segue do Comentário 8 que a interação entre uma 2-onda front de choque  $\gamma'$  com uma 1-onda front de choque  $\beta'$ , gera na solução exata do problema de Riemann uma 1-onda front de choque com tamanho  $\beta = \beta'$  e uma 2-onda front de choque com tamanho  $\gamma = \gamma'$ , ou seja,  $\gamma' + \beta' \rightarrow \beta' + \gamma'$ . O mesmo fato ocorre nas seguintes interações

$$S_2 + R_1 \rightarrow R_1 + S_2, \quad R_2 + R_1 \rightarrow R_1 + R_2, \quad R_2 + S_1 \rightarrow S_1 + R_2.$$

Lembramos que quando usamos a solução simplificada do problema de Riemann para essas interações, a diferença  $|\bar{U}_r - U_r|$  é nula, ou seja, quando a interação é entre ondas front de famílias características diferente, não há introdução de uma nova onda front não física.

Resta agora analisarmos as interações entre ondas front da mesma família, ou seja,  $S_2 + S_2$ ,  $S_2 + R_2$ ,  $S_1 + S_1$ ,  $S_1 + R_1$ ,  $R_2 + S_2$  e  $R_1 + S_1$ . Lembramos que devido ao Comentário 8 as interações  $S_2 + S_2$  e  $S_1 + S_1$ ,  $S_2 + R_2$  e  $S_1 + R_1$ ,  $R_2 + S_2$  e  $R_1 + S_1$  são análogas.

A solução do problema de Riemann gerado por uma interação depende da posição do estado  $U_r$  em relação ao estado  $U_l$ , (Figura 3.1).

Quando temos uma interação do tipo  $S_2 + R_2$  temos duas soluções possíveis, que dependem do tamanho da 2-onda front de rarefação. No primeiro caso,  $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + S_2$ , temos  $\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \gamma$ . Nesse caso o estado  $U_r$  está na região *II*. Pelo Comentário 8, podemos considerar uma interação auxiliar, de forma que  $\gamma' + \pi' \rightarrow \gamma + \beta \rightarrow \beta + \gamma$ , (Figura 3.13). Assim, temos que  $|\gamma| < |\gamma'|$ . Escrevendo  $\zeta = |\gamma'| - |\gamma|$ , temos que  $|\beta| < \zeta = |\gamma'| - |\gamma|$ . De fato, notamos que

$$\begin{aligned} s_l - s_r &= g_2(r_l - r_r) = g_2(|\gamma'|), \\ s_l - \bar{s} &= g_2(r_l - \bar{r}) = g_2(|\gamma|), \end{aligned}$$

assim, temos que

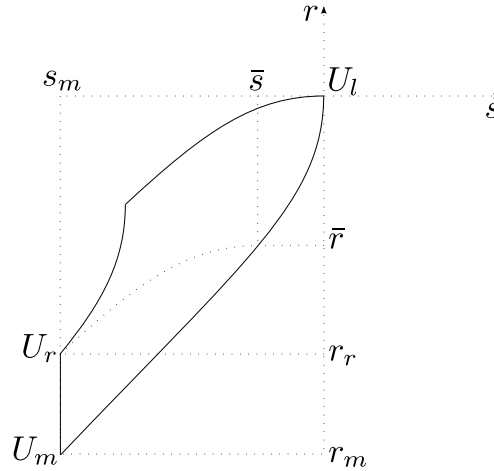
$$|\beta| = \bar{s} - s_r = (s_l - s_r) - (s_l - \bar{s}) = g_2(|\gamma'|) - g_2(|\gamma|) \leq g'_2(y)(|\gamma'| - |\gamma|),$$

onde  $y$  está entre  $|\gamma'|$  e  $|\gamma|$ . Como  $\max\{g'_2(y)\} = \kappa < 1$ , onde  $y$  é limitado pelo tamanho máximo das ondas, então  $\kappa$  depende apenas do tamanho máximo das ondas. Assim,  $|\beta| \leq \kappa(|\gamma'| - |\gamma|) = \kappa\zeta$ .

No segundo caso,  $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + R_2$ , temos  $\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \pi$ . Nesse caso, o estado  $U_r$  está na região *III*. Pelo Comentário 8, temos que  $|\beta| \leq \kappa|\gamma'|$ , além disso  $|\pi| \leq |\pi'|$ .

Temos resultados análogos para as interações  $R_1 + S_1$ ,  $R_2 + S_2$  e  $S_1 + R_1$ .

A interação  $S_2 + S_2$  gera uma onda front de rarefação  $R_1$  e uma onda front de choque  $S_2$ , quando aplicamos a solução exata do problema de Riemann, ou seja,  $S_2 + S_2 \rightarrow R_1 + S_2$ . Sejam  $\gamma'$  e  $\gamma''$  as 2-ondas front de choque de entrada e  $\gamma$  a 1-onda front de rarefação e a 2-onda front de choque

Figura 3.13:  $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + S_2$ .

de saída, respectivamente. Sejam  $U_l$ ,  $U_m$  e  $U_r$  os estados intermediários antes da interação, esses estados estão relacionados por  $U_m = \Psi_2(\gamma')(U_l)$  e  $U_r = \Psi_2(\gamma'')(U_m)$ . Seja  $\bar{U}_m$  o estado intermediário de saída, relacionado com  $U_l$  por  $\bar{U}_m = \Psi_1(o)(U_l)$  e com  $U_r$  por  $U_r = \Psi_2(\gamma)(\bar{U}_m)$ , (Figura 3.14).

Nesse caso o estado  $U_r$  está na região  $I$ . Notamos que

$$\begin{aligned} U_r = (s_r, r_r) &= (s_l, r_l) + (-g_2(|\gamma'|) - g_2(|\gamma''|), \gamma' + \gamma''), \\ (\bar{s}, r_r) &= (s_l, r_l) + (-g_2(|\gamma' + \gamma''|), \gamma' + \gamma''), \end{aligned}$$

fazendo  $o = s_r - \bar{s}$ , temos que

$$(\bar{s}, r_r) + (o, 0) = (s_r, r_r).$$

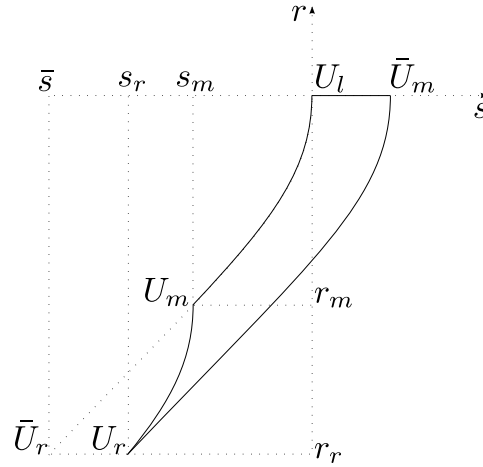
Além disso,

$$o = s_r - \bar{s} = -g_2(-\gamma') - g_2(-\gamma'') + g_2(-\gamma' - \gamma'') \equiv \phi(\gamma', \gamma'').$$

Como  $\phi$  é  $C^2$  com segundas derivadas Lipschitz contínuas e  $\phi(\gamma', 0) = \phi(0, \gamma'') = 0$ , pelo Lema 2.2, temos que  $o = C|\gamma'\gamma''|$ , onde a constante  $C$  depende apenas do tamanho máximo das ondas.

Devido ao Comentário (8), temos um resultado análogo quando ocorre uma interação do tipo  $S_1 + S_1$ .



Figura 3.14:  $S_2 + S_2 \rightarrow R_1 + S_2$ .

O erro gerado quando uma nova onda front não física é inserida em nossa solução aproximada é pequeno, isso será mostrado nas próximas seções.

As observações anteriores estão resumidas no próximo lema.

**Lema 3.8** *Assumimos que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_l$ ,  $\rho_r \leq \bar{\rho}$ . Então existe uma constante  $C$  e uma constante  $\kappa$ ,  $0 < \kappa < 1$ , dependendo apenas do sistema 3.5 e dos valores de  $\underline{\rho}$ ,  $\bar{\rho}$ , tal que as seguintes desigualdades são verdadeiras*

- (1)  $\gamma' + \beta' \rightarrow \beta + \gamma$ , onde  $\beta = \beta'$  e  $\gamma = \gamma'$ .
- (2)  $\gamma' + o' \rightarrow o + \gamma$ , onde  $o = o'$  e  $\gamma = \gamma'$ .
- (3)  $\gamma' + \gamma'' \rightarrow o + \gamma$ , onde  $|\gamma| = |\gamma'| + |\gamma''|$  e  $o = C|\gamma'\gamma''|$ .
- (4)  $\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \gamma$ , onde  $\zeta = |\gamma'| - |\gamma|$  e  $|\beta| \leq \kappa\zeta$ . Observe que  $\zeta > 0$  por construção.
- (5)  $\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \pi$ , onde  $|\beta| \leq \kappa|\gamma'|$  e  $|\pi| \leq |\pi'|$ .
- (6)  $\pi' + o' \rightarrow o + \pi$ .

Devido ao Comentário 8, o lema anterior cobre todos os casos de interação entre ondas front.

**Comentário 14** *No item (3) do Lema 3.8, temos que  $o \leq g_2(|\gamma'| + |\gamma''|) \leq |\gamma'| + |\gamma''|$ , pois  $g_2' < 1$ . Concluimos que os estados intermediários  $U_m$  que aparecem em cada solução do problema de*

Riemann permanecem em uma vizinhança do estado  $U_l$ , sendo que  $|U_l - U_m| \leq |U_l - U_r|$ . De fato, supomos que  $U_m = (r_l, s_r + g_2(|r_r - r_l|))$ , onde  $r_r - r_l < 0$ , ou seja,  $U_m$  está sobre  $R_2$ . Usando a norma da soma em  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$|U_l - U_m| = |s_m - s_l| = |s_r + g_2(|r_r - r_l|) - s_l| \leq |s_r - s_l| + |r_r - r_l| = |U_l - U_r|.$$

Os outros casos são análogos.

### 3.4.2. Estimativas globais de interação

Supomos que a solução aproximada  $U^h(x, t)$  é construída para  $0 \leq t < T$ , para algum  $T > 0$ . Queremos verificar que a variação total da solução aproximada  $TV(U^h(., t))$  permanece limitada.

Seja  $t \in (0, T)$  fixo, um tempo onde não ocorre interação entre ondas front. Denotamos por  $S_i(t)$  o conjunto de todas as  $i$ -ondas front de choque em  $U^h(., t)$  e  $S = S_1 \cup S_2$ . Denotamos por  $R_i(t)$  o conjunto de todas as  $i$ -ondas front de rarefação em  $U^h(., t)$  e  $R = R_1 \cup R_2$ .

Definimos os funcionais

$$L^-(t) \equiv \sum_{\alpha \in S(t)} |\alpha|,$$

$$L^+(t) \equiv \sum_{\alpha \in R(t)} |\alpha|.$$

O funcional  $L^-$  é a variação negativa de  $s$  e  $r$  em  $U^h(., t)$ , e o funcional  $L^+$  é a variação positiva de  $s$  e  $r$  em  $U^h(., t)$ .

Seja  $\tau \in (0, T)$  um tempo onde duas ondas interagem. O próximo lema mostra que o funcional  $L^-$  permanece limitado após cada interação.

**Lema 3.9** *Assumimos que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_l$ ,  $\rho_r \leq \bar{\rho}$ . Então*

$$\Delta L^-(\tau) = L^-(\tau^+) - L^-(\tau^-) \leq 0.$$

**Demonstração:** A demonstração é consequência direta do Lema 3.8. De fato, quando a interação é entre ondas front de famílias diferentes  $\Delta L^-(\tau) = 0$ . Quando a interação é entre ondas front da mesma família, vamos analisar dois casos possíveis. Assumimos, sem perda de generalidade, que apenas as ondas  $\gamma'$  e  $\gamma''$  interagem em  $\tau$ .

$$(1) \gamma' + \gamma'' \rightarrow o + \gamma,$$

$$\begin{aligned} L^-(\tau^-) &= \sum |\alpha| + |\gamma'| + |\gamma''|, \\ L^-(\tau^+) &= \sum |\alpha| + |\gamma|, \end{aligned}$$

onde o somatório é sobre todas as ondas de choque em  $U^h(., \tau)$  que não interagem em  $\tau$ . Assim, pelo Lema 3.8,

$$\Delta L^-(\tau) = |\gamma| - |\gamma'| - |\gamma''| = 0,$$

pois  $|\gamma| = |\gamma'| + |\gamma''|$ .

$$(2) \gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \gamma,$$

$$\begin{aligned} L^-(\tau^-) &= \sum |\alpha| + |\gamma'|, \\ L^-(\tau^+) &= \sum |\alpha| + |\beta| + |\gamma|, \end{aligned}$$

onde o somatório é sobre todas as ondas de choque em  $U^h(., \tau)$  que não interagem em  $\tau$ . Assim, pelo Lema 3.8,

$$\Delta L^-(\tau) = |\beta| + |\gamma| - |\gamma'| = |\beta| - \zeta \leq 0,$$

pois  $|\gamma| = |\gamma'| - \zeta$  e  $|\beta| \leq \kappa\zeta < \zeta$ .

Os outros casos são análogos. ■

As estimativas do Lema 3.9 são independentes de  $T > 0$ , e válidas para todo  $\tau > 0$  onde ocorre uma interação entre ondas front.

Para concluirmos que a variação total da solução aproximada é limitada para cada  $t > 0$ , ainda precisamos mostrar que o tamanho total das ondas não físicas é controlado.

**Comentário 15** *Quando duas ondas de choque interagem e geram uma nova onda de rarefação, o tamanho da onda de rarefação é limitado pela constante  $C$  vezes o produto das ondas de choque que interagem. Assim, para cada  $t \in (0, T)$  fixo,*

$$\begin{aligned} L^+(t) &\leq L^+(0) + \sum_{0 \leq \tau < t} \Delta L^+(\tau) \\ &\leq L^+(0) + C \sum_{0 \leq \tau < t} |\gamma\gamma'| \\ &\leq L^+(0) + CL^-(0)^2, \end{aligned}$$

onde o somatório é sobre todos os pares de ondas de choque que interagem em algum  $\tau \in [0, t)$ .

**Comentário 16** *Como o número de descontinuidades no dado inicial  $U^h(x, 0)$  é finito e a velocidade de cada onda front é limitada por  $\hat{\lambda}$ , então  $U^h(-\infty, t) = p_0$ ,  $\forall t \in [0, T)$ . Além disso, as constantes  $C$  e  $\kappa$  que aparecem no Lema 3.8, são uniformes para qualquer interação entre duas ondas front, pois dependem apenas do tamanho máximo das ondas.*

### 3.5 Decomposição por caminhos

Nesta seção vamos mostrar que o tamanho total de todas as ondas geradas por interações entre ondas front permanece uniformemente limitado. Para esse fim, usaremos as estimativas locais de interação estudadas na seção anterior e a noção de caminhos ([2]).

Consideramos uma solução aproximada  $U^h(x, t)$ , para  $0 \leq t < T$ .

**Definição 3.9** ([2]) *Uma sequência de pontos de interação  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , constitui um caminho se*

$P_0 \in \{t = 0\}$  e cada segmento  $P_{j-1}P_j$  é um choque front,  $j = 1, \dots, n$ . Esse caminho é denotado por

$$\Gamma : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_n.$$

**Definição 3.10** ([2]) Definimos o índice  $(c_j, k_j)$  de cada segmento  $P_{j-1}P_j$  do caminho  $\Gamma$  da seguinte forma: definimos  $k_1 \equiv 1$ ,

$$c_j \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } P_{j-1}P_j \text{ é um 1-choque,} \\ 2, & \text{se } P_{j-1}P_j \text{ é um 2-choque,} \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n$ ,

$$k_j \equiv \begin{cases} k_{j-1}, & \text{se } c_j = c_{j-1}, \\ k_{j-1} + 1, & \text{se } c_j \neq c_{j-1}, \end{cases}$$

$j = 2, \dots, n$ .

Cada  $k_j$  é chamado de ordem de geração do segmento e a sequência  $(c_1, k_1), (c_2, k_2), \dots, (c_n, k_n)$  é chamada de índice do caminho.

Suponha que uma 1-onda front de choque  $\beta$  tem início em um ponto  $P_0 \in \{t = 0\}$ . Seja  $t_1$  o primeiro tempo de interação, que ocorre no ponto  $P_1$ . Definimos o tamanho do segmento em um caminho de forma indutiva.

Primeiramente, consideramos  $P_0P_1$  como um simples caminho  $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1$  e definimos o tamanho do segmento  $P_0P_1$  como  $|\beta|$ . Daí, o tamanho do caminho  $\Gamma$  é  $|\Gamma| = |\beta|$  e seu índice é  $(1, 1)$ . Dessa forma, definimos o tamanho de cada caminho que possui apenas um segmento constituído por um choque front com origem em  $\{t = 0\}$ .

Depois de uma interação o caminho  $\Gamma$  é estendido de acordo com o tipo de interação. Os tipos de interação que podem aparecer no caso geral são:

- Supomos que uma  $(1, 1)$ -onda  $\beta'$ , que conecta os pontos  $P_0$  e  $P_1$ , e uma  $(2, 1)$ -onda  $\gamma'$ , que conecta os pontos  $P'_0$  e  $P_1$ , interagem em  $P_1$  e as ondas  $\beta$  e  $\gamma$  são geradas. De acordo com o

Comentário 8, temos que  $\beta = \beta'$  e  $\gamma = \gamma'$ . Assim temos dois caminhos (não nulos) possíveis

$$\Gamma_1 : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2,$$

$$\Gamma_2 : P'_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P'_2,$$

onde  $P_2$  e  $P'_2$  são os pontos onde ocorrerá, possivelmente, novas interações.

O tamanho do segmento  $P_1P_2$  é definido como  $|\beta'|$  e seu índice é definido como  $(1, 1)$ . O tamanho do segmento  $P_1P'_2$  é definido como  $|\gamma'|$  e seu índice é definido como  $(2, 1)$ . Notamos que nessa interação não ocorre mudança nos índices dos caminhos.

Nas interações  $S_2 + R_1$  e  $R_2 + S_1$ , e nas interações onde ondas front não físicas estão envolvidas, definimos os caminhos possíveis de forma análoga.

**Definição 3.11** *Definimos o caminho que passa pelos pontos  $P_0, P_1$  e  $P'_2$ , e o caminho que passa pelos pontos  $P'_0, P_1$  e  $P_2$ , como de tamanho nulo em cada segmento.*

- Supomos que uma  $(2, 1)$ -onda  $\gamma'$  interage com uma 2-onda front de rarefação  $\pi'$ . Lembramos que dependendo do tamanho de  $\pi'$ , temos duas soluções possíveis para o problema de Riemann gerado por essa interação,

$$\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \gamma \text{ ou } \gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \pi,$$

segue do Lema 3.8 (4), que

$$|\gamma| \leq |\gamma'|, |\beta| < |\gamma'|, |\beta| \leq \kappa(|\gamma'| - |\gamma|),$$

no primeiro caso, e segue do Lema 3.8 (5), que

$$|\beta| \leq \kappa|\gamma'|,$$

no segundo caso, onde  $0 < \kappa < 1$ ,  $\kappa$  depende apenas do sistema (3.5), dos valores  $\underline{\rho}$  e  $\bar{\rho}$  e de  $TV(U_0)$ .

No primeiro caso,  $\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \gamma$ , o caminho  $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1$ , com tamanho  $|\gamma'|$  é decomposto em dois caminhos  $P_0P_1$  e uma cópia de  $P_0P_1$ , com tamanhos  $|\gamma|$  e  $|\gamma'| - |\gamma|$ , e com índice igual

a  $(2, 1)$ . Dessa forma, temos dois caminhos possíveis,

$$\Gamma_1 : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2,$$

$$\Gamma_2 : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P'_2.$$

Estendemos então o  $(2, 1)$ -segmento  $|\gamma|$ , do ponto  $P_1$  até o ponto  $P_2$ , com tamanho  $|\gamma|$  e índice  $(2, 1)$ . Estendemos o  $(2, 1)$ -segmento  $|\gamma'| - |\gamma|$ , do ponto  $P_1$  até o ponto  $P'_2$ , com tamanho  $|\beta|$  e índice  $(1, 2)$ .

No segundo caso,  $\gamma' + \pi' \rightarrow \beta + \pi$ , temos apenas um caminho possível,

$$\Gamma_1 : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2.$$

O tamanho do segmento  $P_1P_2$  é definido como  $|\beta|$  e o índice como  $(1, 2)$ .

Nas interações  $S_1 + R_1$ ,  $R_1 + S_1$  e  $R_2 + S_2$ , definimos os caminhos possíveis de forma análoga.

- Supomos que uma  $(2, 1)$ -onda  $\gamma'$ , que conecta os pontos  $P_0$  e  $P_1$ , interage com uma  $(2, 1)$ -onda  $\gamma''$ , que conecta os pontos  $P'_0$  e  $P_1$ . Nesse caso, a solução do problema de Riemann criado pela interação gera uma 2-onda de choque  $\gamma$  e uma 1-onda de rarefação. Segue do Lema 3.8 que

$$|\gamma| = |\gamma'| + |\gamma''|.$$

Temos então dois caminhos possíveis

$$\Gamma_1 : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2,$$

$$\Gamma_2 : P'_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2.$$

Nesse caso, o índice não muda em nenhum dos dois caminhos. Para definirmos os tamanhos, o segmento  $|\gamma|$  é primeiro decomposto em dois caminhos  $P_1P_2$  e uma cópia de  $P_1P_2$ , com tamanhos  $|\gamma'|$  e  $|\gamma''|$ , respectivamente.

Estendemos o caminho  $\Gamma_1$ , após o ponto  $P_1$ , com tamanho  $|\gamma'|$ , sem mudança de índice. Estendemos o caminho  $\Gamma_2$ , após o ponto  $P_1$ , com tamanho  $|\gamma''|$ , sem mudança de índice.

A interação do tipo  $S_2 + R_2$  merece atenção especial. Nesse caso, os caminhos que estamos considerando na interação são todos divididos proporcionalmente. Por exemplo, consideramos a interação  $\gamma' + \gamma'' \rightarrow o + \gamma$ , nesse caso, existem dois caminhos possíveis

$$\Gamma_1 : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2,$$

$$\Gamma_2 : P'_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2,$$

o índice dos caminhos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é igual a  $(2, 1)$ , e seus tamanhos são  $|\Gamma_1| = |\gamma'| + |\gamma|$  e  $|\Gamma_2| = |\gamma''| + |\gamma|$ , respectivamente, além disso,  $|\gamma| = |\gamma'| + |\gamma''|$ , de acordo com o terceiro tipo de interação possível.

Supomos então que a 2-onda front de choque  $\gamma$  interage com uma 2-onda front de rarefação  $\pi$ , no ponto  $P_2$ . Essa nova interação gera duas ondas de choque  $\beta$  e  $\bar{\gamma}$ , que conectam os pontos  $P_2, P_3$  e  $P_2, P'_3$ , respectivamente, (Figura 3.15).

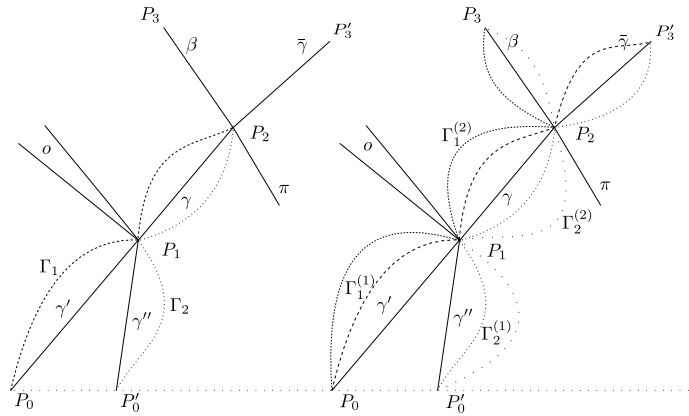


Figura 3.15: Decomposição dos Caminhos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

O caminho  $\Gamma_1$  é então dividido em dois caminhos  $\Gamma_1^{(1)}$  com tamanho  $|\Gamma_1| \frac{|\bar{\gamma}|}{|\gamma|}$  e  $\Gamma_1^{(2)}$  com tamanho  $|\Gamma_1| \frac{|\gamma| - |\bar{\gamma}|}{|\gamma|}$ . O caminho  $\Gamma_1^{(1)}$  é estendido, entre os pontos  $P_2$  e  $P'_3$ , com tamanho  $\frac{|\gamma'| \cdot |\bar{\gamma}|}{|\gamma|}$ , e com índice  $(2, 1)$ . O caminho  $\Gamma_1^{(2)}$  é estendido, entre os pontos  $P_2$  e  $P_3$ , com tamanho  $\frac{|\gamma''| \cdot |\beta|}{|\gamma|}$ , e com índice  $(1, 2)$ , (Figura 3.15).

O caminho  $\Gamma_2$  também é dividido em dois caminhos  $\Gamma_2^{(1)}$  com tamanho  $|\Gamma_2| \frac{|\bar{\gamma}|}{|\gamma|}$  e  $\Gamma_2^{(2)}$  com tamanho  $|\Gamma_2| \frac{|\gamma| - |\bar{\gamma}|}{|\gamma|}$ . O caminho  $\Gamma_2^{(1)}$  é estendido, entre os pontos  $P_2$  e  $P'_3$ , com tamanho  $\frac{|\gamma''| \cdot |\bar{\gamma}|}{|\gamma|}$ , e com índice  $(2, 1)$ . O caminho  $\Gamma_2^{(2)}$  é estendido, entre os pontos  $P_2$  e  $P_3$ , com tamanho  $\frac{|\gamma''| \cdot |\beta|}{|\gamma|}$ , e com índice  $(1, 2)$ , (Figura 3.15).



Notamos que  $\frac{|\gamma'|\|\bar{\gamma}'|}{|\gamma|} + \frac{|\gamma''|\|\bar{\gamma}'|}{|\gamma|} = |\bar{\gamma}'| e \frac{|\gamma'|\|\beta|}{|\gamma|} + \frac{|\gamma''|\|\beta|}{|\gamma|} = |\beta|$ .

**Comentário 17** *O segmento conectando  $P_0$  e sua primeira interação em  $P_1$  pertencerá a muitos caminhos, e o tamanho do choque que conecta os pontos  $P_0$  e  $P_1$  será igual a soma dos tamanhos do segmento  $P_0P_1$  em cada um desses caminhos, essa igualdade se repete em todo segmento  $P_{j-1}P_j$ , por construção.*

O caso geral pode sempre ser tratado como um dos casos mostrados anteriormente. Definimos então uma coleção finita de caminhos  $\bar{\Gamma} = \{\Gamma_l\}$ ,  $1 \leq l \leq m$ , na solução aproximada.

Um caminho  $\Gamma$  é considerado uma curva Lipschitz  $x = \Gamma(t)$ . Para todo  $t$  diferente dos tempos de interação, definimos  $\alpha_\Gamma(t)$  o tamanho de  $\Gamma$  em  $t$  e  $k_\Gamma(t)$  a ordem de geração de  $\Gamma$  em  $t$ .

Lembramos que  $S(t)$  é o conjunto de todas as ondas front de choque em  $U^h(.,t)$ , e para cada  $t > 0$  fixo, diferente dos tempos de interação, denotamos a variação negativa, por

$$L^-(t) = \sum_{\alpha \in S(t)} |\alpha|.$$

O próximo lema segue direto das definições.

**Lema 3.10** *Assumimos que  $TV(U_0)$  é limitada e que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0(x) \leq \bar{\rho}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Para toda solução aproximada, temos uma coleção finita de caminhos  $\bar{\Gamma} = \{\Gamma_l\}$ ,  $1 \leq l \leq m$ , tal que*

1.  $L^-(t) = \sum_{\alpha \in S(t)} |\alpha| = \sum_{\Gamma \in \bar{\Gamma}} \alpha_\Gamma(t)$ .

2. *Seja  $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$  um caminho, e sejam  $(c_j, k_j)$  e  $\alpha_j$  o índice e o tamanho de  $P_{j-1}P_j$ , respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} k_{j+1} = k_j &\quad \Rightarrow \quad \alpha_{j+1} \leq \alpha_j, \\ k_{j+1} = k_j + 1 &\quad \Rightarrow \quad \alpha_{j+1} \leq \kappa \alpha_j, \end{aligned}$$

onde  $0 < \kappa < 1$  e  $j = 1, \dots, n-1$ .

O próximo lema é consequência direta do lema anterior.

**Lema 3.11** *Assumimos que  $TV(U_0)$  é limitada e que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0(x) \leq \bar{\rho}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . As seguintes desigualdades são verdadeiras:*

$$\begin{aligned} \alpha_\Gamma(t) &\leq \alpha_\Gamma(0) && \text{se } k_\Gamma(t) = 1, \\ \alpha_\Gamma(t) &\leq \kappa^{j-1} \alpha_\Gamma(0) && \text{se } k_\Gamma(t) \geq 2, \end{aligned}$$

onde  $0 < \kappa < 1$ .

Usando esses lemas, temos que

$$\sum_{\{\Gamma: k_\Gamma(t)=j\}} \alpha_\Gamma(t) \leq \kappa^{j-1} \sum_{\{\Gamma: k_\Gamma(t)=1\}} \alpha_\Gamma(0) \leq \kappa^{j-1} L^-(0).$$

Portanto, o tamanho total das ondas front de choque é estimado por

$$\sum_{j \geq 1} \kappa^{j-1} L^-(0) \leq \frac{1}{1-\kappa} L^-(0).$$

Denotando por  $L_j^-(t) = \sum_{\{\Gamma: k_\Gamma(t)=j\}} \alpha_\Gamma(t)$  a soma dos tamanhos dos caminhos com ordem igual a  $j$  em  $t$ , obtemos

**Proposição 3.1** *Assumimos que  $TV(U_0)$  é limitada e que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0(x) \leq \bar{\rho}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Então*

$$L_1^- \leq L^-(0), \quad L_j^-(t) \leq \kappa^{j-1} L^-(0), \quad j \geq 2,$$

onde  $0 < \kappa < 1$ .

### 3.5.1. Estimativa sobre o tamanho total das ondas geradas por interações

Agora vamos estimar o tamanho total das ondas geradas por todas as interações. Assumimos que  $TV(U_0)$  é limitada e que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0(x) \leq \bar{\rho}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Segue das análises anteriores que:

1. Uma nova  $i$ -onda de rarefação é gerada apenas pela interação de duas  $j$ -ondas front de choque,  $i \neq j$ .

2. O tamanho de uma onda front de rarefação não se altera quando essa onda interage com ondas front de famílias diferentes, e decresce quando essa onda interage com uma onda front de choque da mesma família.
3. Ondas front de rarefação da mesma família não interagem entre si.
4. Uma nova  $i$ -onda front de choque pode ser gerada apenas pela interação entre uma  $j$ -onda front de choque e uma  $j$ -onda front de rarefação,  $i \neq j$ .
5. Quando duas  $i$ -ondas front de choque interagem, o problema de Riemann correspondente gera uma grande  $i$ -onda front de choque e uma pequena  $j$ -onda de rarefação,  $i \neq j$ .
6. O tamanho de uma onda front de choque não se altera quando essa onda interage com ondas front de famílias diferentes, e decresce quando essa onda interage com uma onda front de rarefação da mesma família.
7. Uma nova onda front não física é gerada apenas quando duas ondas front da mesma família interagem e a solução simplificada do problema de Riemann é usada.
8. Quando uma onda front não física interage com uma onda front física seus tamanhos não se alteram.
9. Ondas front não físicas não interagem entre si.

Seja  $\{P_m\}$  a coleção de todos os pontos onde ocorrem interações entre duas ondas front de choque da mesma família. O tamanho das ondas front de choque de chegada em  $P_m$  é denotada por  $\alpha_j(P_m)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Lema 3.12** *O tamanho total de novas ondas de rarefação geradas pela interação de duas ondas front de choque da mesma família é estimado por*

$$\sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| \leq \frac{1}{2(1-\kappa)} L^-(0)^2.$$

**Demonstração:** Seja  $\bar{\Gamma}_{\alpha_j}(P_m)$  a coleção de caminhos que compõem  $\alpha_j(P_m)$  e seja  $\alpha_{\Gamma_j}(P_m)$  o tamanho do caminho  $\Gamma_j \in \bar{\Gamma}_{\alpha_j}(P_m)$ ,  $j = 1, 2$ . Então temos que

$$\begin{aligned} \sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| &\leq \sum_{P_m} \left( \sum_{\Gamma_1 \in \bar{\Gamma}_{\alpha_1}(P_m)} \left( \sum_{\Gamma_2 \in \bar{\Gamma}_{\alpha_2}(P_m)} |\alpha_{\Gamma_1}(P_m)\alpha_{\Gamma_2}(P_m)| \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \bar{\Gamma}} \left( \sum_{P_m \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_m)| \sum_{\Gamma^* \in \bar{\Gamma}^*(\Gamma, P_m)} |\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \right), \end{aligned}$$

onde  $\bar{\Gamma}^*(\Gamma, P_m)$  denota o conjunto dos caminhos que interagem com  $\Gamma$  em  $P_m$  e  $\bar{\Gamma}$  está definido no Lema 3.10. Como  $\cup_{P_m \in \Gamma} \bar{\Gamma}^*(\Gamma, P_m) \subset \bar{\Gamma} - \{\Gamma\}$ , mudando a ordem do somatório, encontramos que

$$\sum_{P_m \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_m)| \sum_{\Gamma^* \in \bar{\Gamma}^*(\Gamma, P_m)} |\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \leq \sum_{\Gamma^* \in \bar{\Gamma} - \{\Gamma\}} \left( \sum_{P_m \in \Gamma \cap \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma}(P_m)\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \right).$$

Sejam  $P_m, P'_m \in \Gamma \cap \Gamma^*$ ,  $P_m \neq P'_m$ , e supomos que não existe um ponto de  $\Gamma \cap \Gamma^*$  entre  $P_m$  e  $P'_m$ . Notamos que não podemos ter  $k_{\Gamma}(P_m^-) = k_{\Gamma}(P'_m^-)$  e  $k_{\Gamma^*}(P_m^-) = k_{\Gamma^*}(P'_m^-)$  onde  $P_m^- = \lim_{t \rightarrow P_m^-} t$ , ao mesmo tempo, pois depois da interação em  $P_m$ , pelo menos um dos caminhos deve mudar de direção (de  $i$ -choque para  $j$ -choque,  $i \neq j$ ) para que eles interajam novamente em  $P'_m$ . A ordem de geração de  $\Gamma$  ou de  $\Gamma^*$  cresce pelo menos uma vez em  $P_m \rightarrow P'_m$ , e temos que

$$\sum_{P_m \in \Gamma \cap \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma}(P_m)\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \leq \sum_{j \geq 1} \kappa^{j-1} |\alpha_{\Gamma}(P_0)\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)| = \frac{1}{1 - \kappa} |\alpha_{\Gamma}(P_0)\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)|,$$

onde  $P_0 \in \Gamma$ ,  $P_0^* \in \Gamma^*$  são pontos iniciais em  $\{t = 0\}$ . Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \bar{\Gamma}} \left( \sum_{P_m \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_m)| \sum_{\Gamma^* \in \bar{\Gamma}^*(\Gamma, P_m)} |\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \bar{\Gamma}} \left( \sum_{\Gamma^* \in \bar{\Gamma} - \{\Gamma\}} \left( \sum_{P_m \in \Gamma \cap \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma}(P_m)\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \bar{\Gamma}} \left( \sum_{\Gamma^* \in \bar{\Gamma} - \{\Gamma\}} \frac{1}{1 - \kappa} |\alpha_{\Gamma}(P_0)\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)| \right) \\ &\leq \frac{1}{2(1 - \kappa)} L^-(0)^2. \end{aligned}$$

■

Para  $t > 0$  fixo, onde não ocorre interação entre ondas, lembramos que  $L^+(t) = \sum_{\alpha \in R(t)} |\alpha|$  denota a variação positiva, onde  $R(t)$  é o conjunto de todas as ondas front de rarefação em  $U^h(., t)$ .

Os resultados anteriores, provam que o tamanho total das ondas de rarefação geradas pela interação de duas ondas front de choque da mesma família é estimado por  $\frac{C}{2(1-\kappa)}L^-(0)^2$ . Além disso, temos que o tamanho de uma onda front de rarefação não cresce depois de uma interação. Portanto o tamanho total das ondas de rarefação em um tempo  $t > 0$  é estimado pelo tamanho total das ondas de rarefação em  $U^h(., 0^+)$ , mais o tamanho total das ondas de rarefação geradas pela interação de duas ondas front de choque da mesma família, ou seja,

$$L^+(t) \leq \left\{ L^+(0) + \frac{C}{2(1-\kappa)}L^-(0)^2 \right\}.$$

**Lema 3.13** *O tamanho total das ondas geradas pela interação de uma  $i$ -ondas front de choque  $\alpha$  e uma  $j$ -onda front de rarefação  $\theta$ ,  $i \neq j$ , é estimado por*

$$\sum_{P_m} |\alpha(P_m)\theta(P_m)| \leq \frac{1}{1-\kappa}L^-(0) \left\{ L^+(0) + \frac{C}{2(1-\kappa)}L^-(0)^2 \right\}.$$

**Demonstração:** Pelas observações anteriores, o tamanho total das ondas não se altera quando uma  $i$ -onda front de rarefação interage com uma  $j$ -onda front de choque,  $i \neq j$ .

Quando uma onda front de rarefação interage com uma onda front de choque, da mesma família, ocorre um cancelamento, e a onda front de rarefação ou a onda front de choque que resta é da mesma família. Daí, cada onda front de rarefação não interage novamente com o mesmo choque (caminho), sem que esse tenha mudado sua ordem de geração. Assim, a quantidade total dessas interações é enumerável por todas as ordens de geração.

Portanto o tamanho total das ondas geradas por essas interações é estimado pelo tamanho total das ondas de choques vezes o tamanho total das ondas de rarefação, ou seja,

$$\sum_{j \geq 1} \kappa^{j-1}L^-(0) \left\{ L^+(0) + \frac{C}{2(1-\kappa)}L^-(0)^2 \right\} \leq \frac{1}{1-\kappa}L^-(0) \left\{ L^+(0) + \frac{C}{2(1-\kappa)}L^-(0)^2 \right\}.$$

■

Denotamos por  $\sigma$ ,  $\tau$  as ondas de chegada em  $P_m$ . Então  $Q(P_m) \equiv |\sigma\tau|$  estima o tamanho das ondas geradas pela interação em  $P_m$ .

Combinando os resultados anteriores, temos que

**Proposição 3.2** *Assumimos que  $TV(U_0)$  é limitada e que  $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0(x) \leq \bar{\rho}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . O tamanho total das ondas geradas pela interação de duas ondas front é uniformemente limitado, isto é, existe uma constante  $\bar{C}$  dependendo apenas do sistema (3.5), de  $TV(U_0)$  e dos valores  $\underline{\rho}$  e  $\bar{\rho}$ , tal que*

$$\sum_{P_m} Q(P_m) \leq \bar{C}.$$

### 3.5.2. Estimativas sobre as ondas não físicas

Como em [2], vamos mostrar que a solução aproximada é construída para todo  $0 \leq t < \infty$ . Assumimos o contrário. Supomos que existe uma sequência de tempos onde ocorrem as interações  $\tau_m$ , tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = \tau_\infty < \infty$ . Como a estimativa da Proposição 3.2 vale para todo  $0 \leq t < \tau_\infty$ , existe uma constante  $C_\infty$  tal que

$$\sum_{0 \leq \tau_m < \tau_\infty} Q(P_m) \leq C_\infty, \quad (3.45)$$

onde  $\tau_m$  denota o tempo onde ocorre a interação em  $P_m$  e o somatório é sobre todos os pontos de interação entre  $t = 0$  e  $\tau_\infty$ . Seja  $\mu$  o parâmetro introduzido pelo algoritmo front tracking. A estimativa (3.45) diz que existe no máximo  $\frac{C_\infty}{\mu}$  pontos de interação tal que os tamanhos das ondas de entrada satisfazem  $Q(P_m) \geq \mu$ . Como novas ondas físicas são geradas apenas em tais pontos, o número de ondas front físicas é finito. Como uma nova onda front não física é gerada apenas pela interação de duas ondas front físicas, e quaisquer duas ondas front físicas podem interagir apenas uma vez, o número de ondas front não físicas é finito. Concluimos que o número total de ondas front é finito, o que é uma contradição.

Seja  $\alpha$  uma onda de choque em  $t > 0$ . Essa onda de choque contém muitos caminhos que

podem ser organizados de forma que tenhamos

$$\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t), \dots, \quad k_{\Gamma_1}(t) \leq k_{\Gamma_2}(t) \leq k_{\Gamma_3}(t) \leq \dots,$$

A ordem de geração da onda de choque  $\alpha$  é definida por  $k_{\Gamma_1}$  e denotada por  $k_\alpha$ . Seja  $V_j^-(t)$  a soma dos tamanhos de todas as ondas de choque em  $t$ , cuja ordem de geração é maior ou igual a  $j$ . Então segue que  $V_j^-(t) = \sum_{l \geq j} L_l^-(t)$ , e da Proposição 3.1, obtemos

$$\sup_{t \geq 0} V_j^-(t) \leq L^-(0) \sum_{l \geq j} \kappa^{l-1} = \frac{\kappa^{j-1} L^-(0)}{1 - \kappa}.$$

Lembramos que apenas a solução simplificada do problema de Riemann gerá uma onda front não física. Em particular, uma ou duas ondas front de choque estão envolvidas nessa interação. Por definição, temos que  $L^-(t)$  não cresce. Suponha que as ondas front de choque  $\gamma'$  e  $\gamma''$  interagem e geram uma onda front não física. Então a ordem de geração da onda não física é definida como  $\max\{k_{\gamma'}, k_{\gamma''}\} + 1$ . Se a interação é entre uma onda front de choque  $\gamma'$  e uma onda front de rarefação, então a ordem de geração da onda front não física gerada, é definida como  $k_{\gamma'} + 1$ . Lembramos que as ondas front não físicas não interagem entre si.

Nos próximos lemas, faremos estimativas mais explicitas dos resultados que aparecem em [2].

**Lema 3.14** *Seja  $\sigma$  uma onda front não física arbitrária. Existem constantes  $C_0$  e  $C_1$  dependendo apenas do sistema (3.5), de  $TV(U_0)$  e dos valores  $\underline{\rho}$ ,  $\bar{\rho}$ , de modo que as seguintes estimativas são verdadeiras*

$$|\sigma| < C_0 \mu, \quad \sum_{\{\sigma \in NP: k_\sigma > j\}} |\sigma| \leq C_1 \sup_{t \geq 0} V_j^-(t).$$

**Demonstração:** Sejam  $\alpha$  e  $\theta$  as ondas envolvidas na interação que gera a onda não física  $\sigma$ . Sejam  $U_l$ ,  $U_m$  e  $\bar{U}_r$  os valores intermediários depois da interação. Definimos

$$\phi(\alpha, \theta) = U_r - \bar{U}_r = \Psi_i(\alpha)(U_l) - \Psi_i(\alpha) \circ \Psi_i(\theta)(U_l),$$

onde  $\Psi_i$  está definida em (3.36).  $\phi$  é  $C^2$  com segunda derivada Lipschitz contínua, além disso,

$\phi(0, \theta) = \phi(\alpha, 0) = 0$ , pelo Lema 2.3 temos que

$$|\sigma| \leq C_0 |\alpha \theta| < C_0 \mu.$$

Supondo que a ordem de geração de  $\sigma$  seja  $k_\alpha + 1$ , temos que

$$|\sigma| \leq C_0 |\alpha \theta| \leq C_1 |\alpha| \leq C_1 \sup_{t \geq 0} V_{k_\alpha}^-(t).$$

■

Pelo Lema 3.14, temos

**Proposição 3.3** *Para cada  $h \in \mathbb{N}$ , existe um parâmetro  $\mu > 0$  tal que a solução aproximada construída pelo algoritmo front tracking satisfaz*

$$\sum_{\sigma \in NP} |\sigma| \leq \frac{1}{h}.$$

**Demonstração:** Como em [6], seja  $N_0$  o número de ondas de choque em  $t = 0$ . Então existe um certo polinômio  $P(\dots)$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in NP} |\sigma| &= \sum_{\{\sigma \in NP: k_\sigma \leq j\}} |\sigma| + \sum_{\{\sigma \in NP: k_\sigma \geq j+1\}} |\sigma| \\ &\leq P(N_0, h) C_0 \mu + C_1 \sup_{t \geq 0} V_j^- \\ &\leq P(N_0, h) C_0 \mu + C_1 \frac{\kappa^{j-1} L^-(0)}{1 - \kappa}. \end{aligned}$$

Daí, escolhemos  $j$  tal que  $C_1 \frac{\kappa^{j-1} L^-(0)}{1 - \kappa} \leq \frac{1}{2h}$  e então escolhemos  $\mu$  tal que  $P(N_0, h) C_0 \mu \leq \frac{1}{2h}$ . ■

Dessa forma, obtemos um limite uniforme sobre o tamanho total das ondas não físicas, concluímos então que  $TV(U^h(\cdot, t))$  é uniformemente limitado.



### 3.6 Existência de soluções

Para cada  $h \in \mathbb{N}$ , existe uma solução  $h$ -aproximada  $U^h$  do problema de Cauchy (3.5). Pelas análises anteriores, as funções  $U^h(., t)$  satisfazem

$$\begin{aligned} |U^h(x, t)| &\leq M_1, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ TV(U^h(., t)) &\leq M_2, \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Além disso, as funções  $t \rightarrow U^h(., t)$  são uniformemente Lipschitz contínuas com valores em  $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ . De fato, podemos supor sem perda de generalidade, que existe um único tempo  $\tau$  entre  $t$  e  $s$  onde ocorre uma interação. Como

$$\begin{aligned} \|U^h(., \tau) - U^h(., s)\|_{L^1} &\leq \sum_{\alpha} \int_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} |\Psi_{k_{\alpha}}(\gamma_{\alpha})(U_{\alpha}^-) - U_{\alpha}^-| dx \\ &\leq C \sum_{\alpha} |x_{\alpha} - x_{\alpha-1}| |\gamma_{\alpha}| \\ &\leq C |\tau - s| \sum_{\alpha} |\gamma_{\alpha}| |\hat{\lambda}|, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \|U^h(., t) - U^h(., s)\|_{L^1} &\leq \|U^h(., t) - U^h(., \tau)\|_{L^1} + \|U^h(., \tau) - U^h(., s)\|_{L^1} \\ &\leq C \sum_{\alpha} |\gamma_{\alpha}| |\hat{\lambda}| |(t - \tau) + (\tau - s)| \\ &\leq L |t - s|, \end{aligned}$$

para alguma constante  $L$  independente de  $h$ ,  $t$  e  $s$ .

Portanto, podemos aplicar o Teorema 2.1 e encontrar uma subsequência de  $(U^h)$ , que converge para alguma função  $U \in L^1_{loc}$ , quando  $h \rightarrow \infty$ . Como  $\|U^h(., 0) - U_0\|_{L^1_{loc}} \rightarrow 0$ , quando  $h \rightarrow \infty$ , a condição inicial em (3.2) é satisfeita q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ .

Para provar que  $U$  é uma solução fraca do problema de Cauchy, resta mostrarmos que, para toda  $\phi \in C^1$ , com suporte compacto contido em  $\{t > 0\}$ , temos

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{G(\Psi(U))\phi_t + F(\Psi(U))\phi_x\} dx dt = 0.$$

Como  $(U^h)$  é uniformemente limitada,  $F$  e  $G$  são uniformemente contínuas em conjuntos limitados e  $\Psi$  é suave, é suficiente provarmos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left[ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{G(\Psi(U^h))\phi_t + F(\Psi(U^h))\phi_x\} dx dt \right] = 0. \quad (3.46)$$

Escolhemos  $T > 0$  tal que  $\phi(x, t) = 0, \forall t \notin (0, T)$ . Para  $h \in \mathbb{N}$  fixo, em qualquer tempo  $t > 0$ , sejam  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  os pontos onde  $U^h(\cdot, t)$  tem saltos, e definimos

$$\begin{aligned} \Delta G(\Psi(U^h(x_\alpha))) &\equiv G(\Psi(U^h(x_\alpha^+, t))) - G(\Psi(U^h(x_\alpha^-, t))), \\ \Delta F(\Psi(U^h(x_\alpha))) &\equiv F(\Psi(U^h(x_\alpha^+, t))) - F(\Psi(U^h(x_\alpha^-, t))). \end{aligned}$$

Observamos que as linhas da poligonal  $x = x_\alpha(t)$  dividem a faixa  $\mathbb{R} \times [0, T]$  em um número finito de regiões  $\Gamma_j$  onde  $U^h$  é constante. Consideramos o vetor  $\Phi = (G(\Psi(U^h))\phi, F(\Psi(U^h))\phi)$ . Usando o Teorema do divergente, podemos escrever a expressão dentro dos colchetes em (3.46) como

$$\sum_j \int \int_{\Gamma_j} \text{div} \Phi dx dt = \sum_j \int_{\partial \Gamma_j} \Phi \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (3.47)$$

onde  $\partial \Gamma_j$  é a fronteira orientada de  $\Gamma_j$ , e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal exterior. Observamos que  $\mathbf{n} d\sigma = \pm(\dot{x}_\alpha, -1) dt$  ao longo de cada linha da poligonal  $x = x_\alpha(t)$ , enquanto que  $\phi(x, t) = 0$  ao longo das retas  $t = 0$  e  $t = T$ . Por (3.47) a expressão dentro dos colchetes em (3.46) é calculada como

$$\int_0^T \sum_\alpha \left[ \dot{x}_\alpha(t) \Delta G(\Psi(U^h)) - \Delta F(\Psi(U^h)) \right] \phi(x_\alpha(t), t) dt. \quad (3.48)$$

Seja  $|\gamma_\alpha|$  o tamanho da onda front em  $x_\alpha$ . De acordo com as estimativas sobre  $E_\alpha$ , Lema 3.7, se essa onda front é um choque ou uma rarefação então temos que

$$\dot{x}_\alpha(t) \Delta G(\Psi(U^h)) - \Delta F(\Psi(U^h)) = O(1) \frac{1}{h} |\gamma_\alpha|,$$

por outro lado, se a onda front é não física então

$$\dot{x}_\alpha(t) \Delta G(\Psi(U^h)) - \Delta F(\Psi(U^h)) = O(1) |\gamma_\alpha|.$$

Separando o somatório em (3.48) em ondas front físicas e não físicas, concluímos que

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \left| \sum_{\alpha \in SURUNP} \left[ \dot{x}_\alpha(t) \Delta G(\Psi(U^h(x_\alpha(t), t))) - \Delta F(\Psi(U^h(x_\alpha(t), t))) \right] \phi(x_\alpha(t), t) \right| \leq$$

$$\left( \max_{x,t} |\phi(x, t)| \right) \limsup_{h \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\alpha \in SUR} O(1) \frac{1}{h} |\gamma_\alpha| + \sum_{\alpha \in NP} O(1) |\gamma_\alpha| \right\} = 0. \quad (3.49)$$

De fato, para todo  $t > 0$  o tamanho total das ondas front em  $U^h(., t)$  permanece uniformemente limitados, enquanto que o tamanho total das ondas front não físicas é  $< \frac{1}{h}$ , assim ele se aproxima de zero quando  $h \rightarrow \infty$ . O limite em (3.46) segue de (3.49), o que mostra que  $\Psi(U)$  é uma solução fraca do problema de Cauchy (3.1), com dado inicial (3.2).

### 3.7 Variação total localmente limitada

Consideramos agora o dado inicial

$$U_0(x) = (\rho_0(x), v_0(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $\rho_0$  e  $v_0$  são funções limitadas com variação total localmente limitada, e  $\rho_0(x) \geq \underline{\rho} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Podemos assumir que  $U_0$  é contínua à direita em  $[-N, N]$ , para cada  $N \in \mathbb{N}$ .

Dado  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $U_0^k$  a função definida por

$$U_0^k(x) = U_0(j2^{-k}), \quad x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}),$$

onde  $j \in \mathbb{Z}$ .

Notamos que  $U_0^k \rightarrow U_0$  em  $L^1_{loc}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

Seja  $N \in \mathbb{N}$  fixo. Consideramos o dado inicial

$$V_1(x) \equiv \begin{cases} U_0(-N), & x < -N, \\ U_0(x), & -N \leq x \leq N, \\ U_0(N), & x > N, \end{cases}$$

e a sequência de funções  $(V_0^k)$  definidas por

$$V_0^k(x) \equiv \begin{cases} U_0^k(-N), & x < -N, \\ U_0^k(x), & -N \leq x \leq N, \\ U_0^k(N), & x > N. \end{cases}$$

Notamos que  $V_1$  é uma função limitada com variação total limitada e satisfaz

$$\begin{cases} \|V_1\|_\infty \leq \|U_0\|_\infty, \\ TV(V_1) = TV_{[-N,N]}(U_0). \end{cases}$$

Além disso, a sequência de funções  $(V_0^k)$  satisfaz

$$\begin{cases} \|V_0^k\|_\infty \leq \|V_1\|_\infty, \\ TV(V_0^k) = TV(V_1), \\ \|V_0^k - V_1\|_{L^1_{loc}} \rightarrow 0. \end{cases}$$

Cada função  $V_0^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tem apenas um número finito de descontinuidades.

Aplicando o método wave-front tracking, podemos construir uma sequência de soluções aproximadas  $(V^{k,1})$  que converge, em  $L^1_{loc}$ , para uma função  $V^1$  que é solução fraca do problema de Cauchy com dado inicial  $V_1$ .

Consideramos agora o intervalo  $[-2N, 2N]$ , o dado inicial

$$V_2(x) \equiv \begin{cases} U_0(-2N), & x < -2N, \\ U_0(x), & -2N \leq x \leq 2N, \\ U_0(2N), & x > 2N, \end{cases}$$

e a sequência de funções  $(V_0^{k,1})$  definidas por

$$V_0^{k,1}(x) \equiv \begin{cases} U_0^{k,1}(-2N), & x < -2N, \\ U_0^{k,1}(x), & -2N \leq x \leq 2N, \\ U_0^{k,1}(2N), & x > 2N, \end{cases}$$

onde  $(U_0^{k,1}) \subset (U_0^k)$  é encontrada na primeira aplicação do método wave-front tracking.

Podemos aplicar o método wave-front tracking usando o dado inicial  $V_2$  e a sequência de funções  $(V_0^{k,1})$ . Obtemos assim uma sequência de soluções aproximadas  $(V^{k,2})$  que converge, em  $L_{loc}^1$ , para uma função  $V^2$  que é solução fraca do problema de Cauchy com dado inicial  $V_2$  em  $[-2N, 2N]$ . Notamos que  $(V^{k,2})$  é uma subsequência de  $(V^{k,1})$  em  $[-N, N]$ .

Lembramos que  $\hat{\lambda} > 0$ , a velocidade da onda não física no algoritmo wave-front tracking, é estritamente maior que qualquer velocidade característica.

Notamos que  $V^2(x, t)$ , onde  $(x, t)$  pertence ao subconjunto

$$\left\{ (x, t); 0 \leq t < \frac{N}{\hat{\lambda}} \text{ e } -N + \hat{\lambda}t < x < N - \hat{\lambda}t \right\},$$

é unicamente determinado pelos valores de  $V_2(x)$ , onde  $x \in [-N, N]$  e  $V_2(x) = V_1(x) \forall x \in [-N, N]$  (dados iniciais), essa propriedade é chamada de domínio de dependência finito.

Portanto  $V^2(x, t) = V^1(x, t)$  q.t.p.  $(x, t) \in \left\{ (x, t); 0 \leq t < \frac{N}{\hat{\lambda}} \text{ e } -N + \hat{\lambda}t < x < N - \hat{\lambda}t \right\}$ .

Repetindo os argumentos anteriores podemos construir uma sequência de funções  $(V^n)$ , que podemos assumir contínuas à direita, tal que  $V^n$  é solução fraca do problema de Cauchy no subconjunto  $\left\{ (x, t); 0 \leq t < n\frac{N}{\hat{\lambda}} \text{ e } -nN + \hat{\lambda}t < x < nN - \hat{\lambda}t \right\}$ , sendo que  $V^n(x, t) = V^{n-1}(x, t)$  q.t.p. no subconjunto  $\left\{ (x, t); 0 \leq t < (n-1)\frac{N}{\hat{\lambda}} \text{ e } -(n-1)N + \hat{\lambda}t < x < (n-1)N - \hat{\lambda}t \right\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Podemos redefinir  $V^n$  em um conjunto de medida nula, se necessário, e considerar  $V^n(x, t) = V^{n-1}(x, t)$  no subconjunto  $\left\{ (x, t); 0 \leq t < (n-1)\frac{N}{\hat{\lambda}} \text{ e } -(n-1)N + \hat{\lambda}t < x < (n-1)N - \hat{\lambda}t \right\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Definimos a função

$$U(x, t) \equiv V^n(x, t), \quad -nN + \hat{\lambda}t < x < nN - \hat{\lambda}t, \quad 0 \leq t < n\frac{N}{\hat{\lambda}},$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ . A função  $U$  é solução fraca do problema de Cauchy com dado inicial  $U_0$ .

## *Equações de Aw-Rascle*

Consideramos o sistema de leis de conservação

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ (\rho r)_t + (\rho r v)_x = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $v$  é a velocidade e  $r = v + p(\rho)$ . Esse sistema descreve o movimento de carros em uma rodovia.

Consideramos o problema de Cauchy em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , para o sistema (4.1), com dado inicial

$$U(x, 0) = (\rho(x, 0), v(x, 0)) \equiv (\rho_0(x), v_0(x)),$$

onde  $v_0(x) \geq 0$  e  $\rho_0(x) \geq \underline{\rho} > 0$  são funções limitadas e com variação total localmente limitada.

Supomos que  $p(\rho) = \rho^\kappa$ , onde  $\kappa > 0$  é uma constante e  $\rho > 0$ . Podemos reescrever o sistema (4.1) como

$$G(U)_t + F(U)_x = 0,$$

onde  $U = (\rho, v)$ ,  $G(U) = (\rho, \rho v + \rho^{\kappa+1})$  e  $F(U) = (\rho v, \rho v^2 + \rho^{\kappa+1} v)$ .

As matrizes Jacobianas de  $G$  e  $F$  em relação a  $(\rho, v)$ , são dadas por

$$DG(\rho, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + (\kappa + 1)\rho^\kappa & \rho \end{pmatrix}, \quad DF(\rho, v) = \begin{pmatrix} v & \rho \\ v^2 + (\kappa + 1)\rho^\kappa v & \rho^{\kappa+1} + 2\rho v \end{pmatrix}.$$

O determinante de  $G$  é igual a  $\rho > 0$ , logo existe a matriz inversa  $DG^{-1}$ , dada por

$$DG^{-1}(\rho, v) = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ -(v + (\kappa + 1)\rho^\kappa) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} - (\kappa + 1)\rho^{\kappa-1} & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Podemos obter a matriz do sistema (4.1) calculando  $DG^{-1}DF$ , ou seja,

$$\begin{aligned} J = DG^{-1}DF &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} - (\kappa + 1)\rho^{\kappa-1} & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & \rho \\ v^2 + (\kappa + 1)\rho^\kappa v & \rho^{\kappa+1} + 2\rho v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v & \rho \\ 0 & v - \kappa\rho^\kappa \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Os autovalores do sistema (4.1) são dados pela equação  $\det(J - \lambda I) = 0$ , ou seja,

$$(v - \lambda)(v - \kappa\rho^\kappa - \lambda) = \lambda^2 - \lambda(2v - \kappa\rho^\kappa) + v^2 - \kappa\rho^\kappa v = 0.$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$\lambda_1 = v - \kappa\rho^\kappa, \quad \lambda_2 = v.$$

Observamos que o sistema (4.1) é estritamente hiperbólico,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , quando  $\rho > 0$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , são encontrados quando resolvemos os sistemas

$$\begin{pmatrix} \kappa\rho^\kappa & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & -\kappa\rho^\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$r_1 = (-1, \kappa\rho^{\kappa-1}), \quad r_2 = (1, 0).$$

Notamos que, quando  $\rho > 0$ ,

$$\langle \nabla\lambda_1, r_1 \rangle = (-\kappa^2\rho^{\kappa-1}, 1)(-1, \kappa\rho^{\kappa-1}) = \kappa^2\rho^{\kappa-1} + \kappa\rho^{\kappa-1} > 0,$$

$$\langle \nabla\lambda_2, r_2 \rangle = (0, 1)(1, 0) = 0.$$

A 1-família característica do sistema (4.1) é genuinamente não linear, e a 2-família característica do sistema (4.1) é linearmente degenerada.

Definimos os invariantes de Riemann para o sistema (4.1) como

$$r(\rho, v) \equiv v + \rho^\kappa, \quad s(\rho, v) \equiv v. \quad (4.2)$$

## 4.1 O problema de Riemann

Consideramos o problema de Riemann para o sistema (4.1), com dado inicial

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < 0, \\ U_r, & x > 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $U_l, U_r \in \{(\rho, v); \rho > 0 \text{ e } v \geq 0\}$ . Para construirmos a solução do problema de Riemann usaremos no máximo duas ondas elementares, sendo uma onda de rarefação ou uma onda de choque da 1-família característica e um contato de descontinuidade da 2-família característica.

### 4.1.1. Onda de rarefação

Como no Capítulo 3, para encontrarmos a 1-curva de rarefação escrevemos  $\xi = \frac{x}{t}$ , e procuramos as soluções contínuas não nulas da forma  $\bar{U} \equiv \bar{U}(\xi)$ , da equação diferencial ordinária

$$(J - \xi I)\bar{U}'(\xi) = 0,$$



onde

$$\lambda_1(U_l) \leq \xi = \frac{x}{t} \leq \lambda_1(U_r).$$

Lembramos que o vetor  $\bar{U}'(\xi) \neq 0$  é um autovetor de  $J$  associado ao autovalor  $\xi$ . Temos ainda que

$$\bar{U}'(\xi) = \frac{1}{\langle \nabla \lambda_1(\bar{U}(\xi)), r_1(\bar{U}(\xi)) \rangle} r_1(\bar{U}(\xi)), \quad \lambda_1(\bar{U}(\xi)) = \xi.$$

Assumimos em adicional que

$$\bar{U}(\lambda_1(U_l)) = U_l, \quad \bar{U}(\lambda_1(U_r)) = U_r.$$

Então para cada tempo  $t > 0$  fixo, a função  $\bar{U}(\xi)$  conecta continuamente o estado à esquerda  $U_l$  e o estado à direita  $U_r$ .

Como o 1-campo característico é genuinamente não linear,  $\langle \nabla \lambda_1, r_1 \rangle > 0$ , então a função  $\xi \rightarrow \lambda_1(\bar{U}(\xi))$  é crescente.

Para  $t > 0$ , a 1-onda de rarefação é a solução do problema de Riemann (4.3) com a seguinte forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_l, & \frac{x}{t} < \lambda_1(U_l), \\ \bar{U}\left(\frac{x}{t}\right), & \lambda_1(U_l) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_1(U_r), \\ U_r, & \frac{x}{t} > \lambda_1(U_r). \end{cases}$$

Assumimos que  $U_r = U$ . De acordo com o Capítulo 3, a 1-curva de rarefação do sistema (4.1) satisfaz

$$\begin{pmatrix} \kappa \rho^\kappa & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\kappa\rho^\kappa\bar{\rho}' + \rho\bar{v}' = 0$ , como  $\bar{v}'(\xi) \neq 0$ , temos que

$$\frac{d\rho}{dv} = -\frac{1}{\kappa\rho^{\kappa-1}},$$

daí, a 1-curva de rarefação é dada por

$$R_1 : v - v_l = -(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa).$$

Em adicional, temos que  $\lambda_1(U) > \lambda_1(U_l)$  em  $R_1$ , daí

$$\begin{aligned} -(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa) = v - v_l &> \kappa(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa), \\ 0 &> (\kappa + 1)(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa). \end{aligned}$$

Como  $\kappa > 0$ , temos que  $\rho < \rho_l$  em  $R_1$ .

#### 4.1.2. Onda de choque

Como no Capítulo 3, a 1-curva de choque satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot, ou seja,

$$\begin{aligned} s_1(\rho - \rho_l) &= \rho v - \rho_l v_l, \\ s_1(\rho v + \rho^{\kappa+1} - \rho_l v_l - \rho_l^{\kappa+1}) &= \rho v^2 + \rho^{\kappa+1} v - \rho_l v_l^2 - \rho_l^{\kappa+1} v_l. \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $s_1$  é a velocidade do choque. Eliminando  $s_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho v - \rho_l v_l}{\rho - \rho_l} &= \frac{\rho v^2 + \rho^{\kappa+1} v - \rho_l v_l^2 - \rho_l^{\kappa+1} v_l}{\rho v + \rho^{\kappa+1} - \rho_l v_l - \rho_l^{\kappa+1}}, \\ (v - v_l)^2 &= (v - v_l)(\rho_l^\kappa - \rho^\kappa), \\ v - v_l &= -(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa). \end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.4), temos que

$$s_1 = \frac{\rho v - \rho_l v_l}{\rho - \rho_l}. \tag{4.6}$$

A 1-onda de choque deve satisfazer a condição de entropia de Lax.

**Lema 4.1** *A velocidade da 1-onda de choque que conecta os estados  $U_l$  e  $U_r$ , satisfaz*

$$s_1 < \lambda_1(U_l), \quad \lambda_1(U_r) < s_1 < \lambda_2(U_r). \quad (4.7)$$

**Demonstração:** Assumimos que  $U_r = U$ . Primeiro observamos que, por (4.7), devemos ter  $\lambda_1(U) < \lambda_1(U_l)$ , então  $v - v_l < \kappa(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa)$ . Assim, por (4.5), devemos ter  $\rho > \rho_l$  e  $v < v_l$  na 1-curva de choque.

Para mostrar que  $s_1 < \lambda_1(U_l)$ , definimos a função

$$\phi(t) \equiv t^{\kappa+1} - (\kappa+1)t + \kappa.$$

Como

$$\phi'(t) = (\kappa+1)t^\kappa - (\kappa+1) = (\kappa+1)(t^\kappa - 1) > 0,$$

a função  $\phi$  é crescente quando  $t > 1$ , além disso,  $\phi(1) = 0$ . Como  $\rho - \rho_l > 0$  na 1-curva de choque, então

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\frac{\rho}{\rho_l}\right)^{\kappa+1} + \kappa - (\kappa+1)\frac{\rho}{\rho_l}, \\ 0 &< \rho^{\kappa+1} + \kappa\rho_l^{\kappa+1} - (\kappa+1)\rho\rho_l^\kappa, \\ 0 &\leq \rho(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa) - \kappa\rho_l^\kappa(\rho - \rho_l), \\ 0 &< \rho(v_l - v) - \kappa\rho_l^\kappa(\rho - \rho_l), \\ \rho v - \rho_l v_l &< \rho v_l - \kappa\rho\rho_l^\kappa - \rho_l v_l + \kappa\rho_l^{\kappa+1}, \\ \rho v - \rho_l v_l &< (\rho - \rho_l)(v_l - \kappa\rho_l^\kappa), \\ \frac{\rho v - \rho_l v_l}{\rho - \rho_l} &< v_l - \kappa\rho_l^\kappa, \end{aligned}$$

Por (4.6), temos  $s_1 < \lambda_1(U_l)$ .

Agora, vamos mostrar que  $\lambda_1(U) < s_1$ . Definimos a função

$$\phi(t) \equiv \kappa t^{\kappa+1} - (\kappa + 1)t^\kappa + 1.$$

Como

$$\phi'(t) = \kappa(\kappa + 1)t^\kappa - \kappa(\kappa + 1)t^{\kappa-1} = \kappa(\kappa + 1)(t^\kappa - t^{\kappa-1}) > 0,$$

a função  $\phi$  é crescente quando  $t > 1$ , além disso,  $\phi(1) = 0$ . Como  $\rho - \rho_l > 0$  na 1-curva de choque, então

$$\begin{aligned} 0 &< \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_l}\right)^{\kappa+1} - (\kappa + 1) \left(\frac{\rho}{\rho_l}\right)^\kappa + 1, \\ 0 &< \kappa \rho^{\kappa+1} - (\kappa + 1) \rho^\kappa \rho_l + \rho_l^{\kappa+1}, \\ 0 &< -\rho_l(\rho^\kappa - \rho_l^\kappa) + \kappa \rho^\kappa(\rho - \rho_l), \\ 0 &< \rho_l(v - v_l) + \kappa \rho^\kappa(\rho - \rho_l), \\ \rho v - \kappa \rho^{\kappa+1} - \rho_l v + \kappa \rho^\kappa \rho_l &< \rho v - \rho_l v_l, \\ (v - \kappa \rho^\kappa)(\rho - \rho_l) &< \rho v - \rho_l v_l, \\ v - \kappa \rho^\kappa &< \frac{\rho v - \rho_l v_l}{\rho - \rho_l}. \end{aligned}$$

Por (4.6), temos  $\lambda_1(U) < s_1$ .

Finalmente, queremos mostrar que  $s_1 < \lambda_2(U)$ . Como  $v - v_l < 0$  e  $\rho - \rho_l > 0$  na 1-curva de choque, então

$$\begin{aligned} 0 &< \rho_l(v_l - v), \\ \rho v - \rho_l v_l &< \rho v - \rho_l v, \\ \frac{\rho v - \rho_l v_l}{\rho - \rho_l} &< v. \end{aligned}$$

Por (4.6), temos que  $s < \lambda_2(U)$ . ■

### 4.1.3. Contato de descontinuidade

A 2-família característica é linearmente degenerada,  $\langle \nabla \lambda_2, r_2 \rangle = 0$ . Nesse caso a 2-curva de rarefação do sistema (4.1) satisfaz  $v = v_l$ , assim

$$R_2 : v = v_l.$$

Observamos que a 2-curva de rarefação coincide com a 2-curva de choque, de fato, definindo  $s_2 \equiv v_l$ , temos que  $s_2$  satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot. Portanto a função

$$U(x, t) \equiv \begin{cases} U_l, & x < st, \\ U_r, & x > st, \end{cases}$$

é uma solução fraca do problema de Riemann (4.1) com dado inicial (4.3). Essa solução fraca é chamada de contato de descontinuidade.

Observamos que a 2-curva que conecta os estados  $U_l$  e  $U$ , satisfaz

$$\lambda_1(U_l) < s_2 = \lambda_2(U_l) = \lambda_2(U),$$

$$\lambda_1(U) < s_2 = \lambda_2(U_l) = \lambda_2(U).$$

### 4.1.4. Parametrização

Podemos parametrizar a 1-curva de rarefação, como segue

$$\gamma \rightarrow R_1(\gamma)(U_l) = (-\gamma + \rho_l, -(-\gamma + \rho_l)^\kappa + v_l + \rho_l^\kappa),$$

onde  $0 \leq \gamma \leq \rho_l$ . A 2-curva de rarefação pode ser parametrizada como

$$\gamma \rightarrow R_2(\gamma)(U_l) = (\gamma + \rho_l, v_l),$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

A 1-curva de choque pode ser parametrizada como

$$\gamma \rightarrow S_1(\gamma)(U_l) = (-\gamma + \rho_l, -(-\gamma + \rho_l)^\kappa + v_l + \rho_l^\kappa),$$

onde  $\gamma < 0$ .

**Comentário 18** *As curvas de choque e as curvas de rarefação da 1-família característica podem ser definidas para todo  $\gamma \in (-\infty, \rho_l]$ , e nesse caso vemos que elas coincidem. A 2-família característica é linearmente degenerada logo a 2-curva de choque e a 2-curva de rarefação coincidem, e podem ser definidas para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Segundo [6], a 1-curva de choque com  $\gamma \geq 0$  e a 1-curva de rarefação com  $\gamma < 0$ , não geram soluções admissíveis.*

Dados  $\rho_-, \rho_+ > 0$ ,  $v_- \geq 0$  e  $v_+ < \rho_-^\kappa$ , definimos o subconjunto

$$D_1 \equiv \{(\rho, v); 0 \leq v_- < v < v_+ < \rho_-^\kappa, 0 < \rho_-^\kappa < v + \rho^\kappa < \rho_+^\kappa < \infty\},$$

ou equivalente,

$$D_2 \equiv \{(r, s); 0 \leq s_- < s < s_+ < r_- < r < r_+\},$$

onde  $s_\pm \equiv v_\pm$  e  $r_\pm \equiv \rho_\pm^\kappa$ . Observam que  $s_+ = v_+ < \rho_-^\kappa = r_-$ , então o vácuo,  $\rho = 0$ , não ocorre quando o dado inicial e a solução tomam valores no subconjunto  $D_2$ , ou seja, quando  $(r, s) \in D_2$  temos que  $r - s = \rho > 0$ .

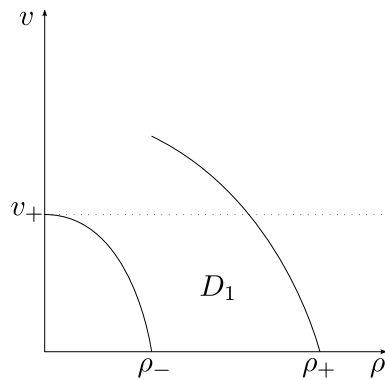


Figura 4.1:  $D_1$ ,  $\kappa > 1$ .

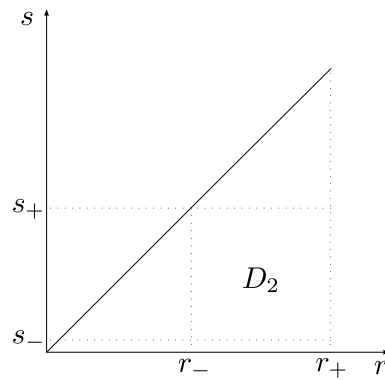


Figura 4.2:  $D_2$ .

Definimos a aplicação  $\Psi : (0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \times [0, \infty)$ , como segue

$$\Psi(r, s) \equiv ((r-s)^{\frac{1}{\kappa}}, s) = (\rho, v),$$

onde os invariantes de Riemann  $r$  e  $s$  estão definidos em (4.2). Observamos que  $\Psi(D_2) = D_1$ .

O determinante da matriz jacobiana  $D\Psi$  é igual a  $\frac{1}{\kappa}(r-s)^{\frac{1}{\kappa}-1} > 0$ , pois  $(r-s) > 0$ . Os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_r, s_r)$  são unicamente determinados pelos estados  $(\rho_l, v_l)$  e  $(\rho_r, v_r)$ . Podemos então utilizar o sistema de coordenadas  $(r, s)$ . Nesse sistema de coordenadas, o sistema (4.1) é escrito como

$$G(\Psi(r, s))_t + F(\Psi(r, s))_x = 0. \quad (4.8)$$

Observamos que o invariante de Riemann  $r$  é constante ao longo da 1-curva e o invariante de Riemann  $s$  é constante ao longo da 2-curva. Podemos então parametrizar essas curvas, no sistema de coordenadas  $(r, s)$ , como segue

$$\begin{aligned} \gamma &\rightarrow R_1(\gamma)(r_l, s_l) = (r_l, \gamma + s_l), \text{ onde } \gamma \geq 0, \\ \gamma &\rightarrow S_1(\gamma)(r_l, s_l) = (r_l, \gamma + s_l), \text{ onde } \gamma < 0, \\ \gamma &\rightarrow R_2(\gamma)(r_l, s_l) = (\gamma + r_l, s_l), \text{ onde } \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assumimos que  $U(x, 0) \in D_1$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

#### 4.1.5. Solução do problema de Riemann

Definimos as funções

$$\Psi_1(\gamma)(r_l, s_l) \equiv \begin{cases} R_1(\gamma)(r_l, s_l) = (r_l, \gamma + s_l), & \gamma \geq 0, \\ S_1(\gamma)(r_l, s_l) = (r_l, \gamma + s_l), & \gamma < 0, \end{cases}$$

$$\Psi_2(\gamma)(r_l, s_l) \equiv R_2(\gamma)(r_l, s_l) = (\gamma + r_l, s_l), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

As funções  $\Psi_i$  são suaves.

Nosso objetivo agora é construir uma solução fraca para o problema de Riemann (4.8), com dado inicial

$$(r(x,0), s(x,0)) = \begin{cases} (r_l, s_l), & x < 0, \\ (r_r, s_r), & x > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

onde  $(r_l, s_l), (r_r, s_r) \in D_2$ . Definimos a função composta

$$\Lambda(\gamma_1, \gamma_2)(r_l, s_l) \equiv \Psi_2(\gamma_2) \circ \Psi_1(\gamma_1)(r_l, s_l).$$

De modo equivalente, sejam  $\omega_0, \omega_1$  e  $\omega_2$  definidos por

$$\omega_i = (r_i, s_i) \equiv \begin{cases} R_i(\gamma_i)(r_l, s_l), & \gamma_i \geq 0, \\ S_i(\gamma_i)(r_l, s_l), & \gamma_i < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Assim  $\Lambda(\gamma_1, \gamma_2)(r_l, s_l) = \omega_2$ . Assumimos que  $(r_r, s_r) = \Lambda(\gamma_1, \gamma_2)(s_l, r_l)$ .

Cada problema de Riemann com dado inicial

$$(r(x,0), s(x,0)) = \begin{cases} \omega_{i-1}, & x < 0, \\ \omega_i, & x > 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

$i = 1, 2$ , com  $\omega_i$  definido em (4.10), tem uma solução fraca, consistindo de uma simples onda da  $i$ -família característica. Mais precisamente

1. Se  $\gamma_1 \geq 0$  então a solução de (4.8) e (4.11) consiste de uma 1-onda de rarefação. Suas velocidades características variam no intervalo  $[\lambda_1^-, \lambda_1^+]$ , onde

$$\lambda_1^- \equiv \lambda_1(\Psi(r_l, s_l)), \quad \lambda_1^+ \equiv \lambda_1(\Psi(r_r, s_r)).$$

2. Se  $\gamma_1 < 0$  então a solução de (4.8) e (4.11) consiste de uma 1-onda de choque, com velocidade  $\lambda_1^- \equiv \lambda_1^+ \equiv s_1$ , onde  $s_1$  é dado por (4.6).
3. Se  $\gamma_2 \neq 0$  então a solução de (4.8) e (4.11) consiste de um contato de descontinuidade da



2-família característica, com velocidade  $s_2 \equiv \lambda_2(\Psi(\omega_{i-1})) = \lambda_2(\Psi(\omega_i))$ .

A solução de (4.8) e (4.9) é construída por justaposição das soluções dos problema de Riemann (4.8) e (4.11),  $i = 1, 2$ , no plano  $x - t$ .

De acordo com o Capítulo 3, para  $t > 0$ , consideramos a função

$$(r(x, t), s(x, t)) \equiv \begin{cases} (r_l, s_l), & \frac{x}{t} \in (-\infty, \lambda_1^-), \\ (r_r, r_r), & \frac{x}{t} \in (\lambda_2^+, \infty), \\ \omega_1, & \frac{x}{t} \in (\lambda_1^+, \lambda_2^-), \\ R_1(\theta)((r_l, s_l)), & \frac{x}{t} \in [\lambda_1^-, \lambda_1^+], \left(\frac{x}{t} = \lambda_1(\Psi(R_1(\theta)((r_l, s_l))))\right). \end{cases} \quad (4.12)$$

Observamos que, por definição e pelo Lema 4.1, temos que  $\lambda_1^+ < \lambda_2^-$  e temos que  $s_1 < s_2$ , assim a função  $(r(x, t), s(x, t))$  está bem definida e é tal que  $(\rho(x, t), v(x, t)) = \Psi^{-1}(r(x, t), s(x, t))$  é solução fraca de (4.1) e (4.3).

O próximo Teorema diz que quando os valores laterais estão no subconjunto  $D_1$ , equivalentemente em  $D_2$ , existe uma única solução do problema de Riemann (4.1) e (4.10).

**Teorema 4.1** *Consideramos o sistema (4.8). Sejam  $(r_l, s_l), (r_r, s_r) \in D_2$ . Então o problema de Riemann (4.8) e (4.9) tem uma única solução fraca  $(r, s)$ , da forma (4.12), onde*

$$\gamma_1 = s_r - s_l,$$

$$\gamma_2 = r_r - r_l.$$

**Demonstração:** De fato, supomos sem perda de generalidade que  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . De (4.9), temos que

$$\Psi_2(\gamma_2) \circ \Psi_1(\gamma_1)(r_l, s_l) = \Psi_2(\gamma_1)(r_l, \gamma_1 + s_l) = (\gamma_2 + r_l, \gamma_1 + s_l) = (r_r, s_r).$$

**Lema 4.2** *Dados  $(r_l, s_l), (r_r, s_r) \in D_2$ . Seja  $(r_m, s_m)$  o estado intermediário que aparece na solução do problema de Riemann. Então  $(r_m, s_m) \in D_2$ .*

**Demonstração:** De fato, como as  $i$ -curvas são paralelas aos eixos coordenados no sistema de

coordenadas  $(r, s)$ , temos que  $\min\{r_r, r_l\} \leq r_m \leq \max\{r_r, r_l\}$  e  $\min\{s_r, s_l\} \leq s_m \leq \max\{s_r, s_l\}$ . Em particular temos que  $r_m - s_m = \rho_m^K > 0$ , logo  $\rho_m > 0$ .

**Comentário 19** Dados  $(\rho_l, v_l)$  e  $(\rho_r, v_r) \in D_1$ , temos que

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \rho_l - (v_l - v_r + \rho_l^K)^{\frac{1}{K}}, \\ \gamma_2 &= \rho_r - (v_l - v_r + \rho_l^K)^{\frac{1}{K}}.\end{aligned}$$

**Comentário 20** O tamanho de uma onda que resolve o problema de Riemann com dados laterais  $(r_l, s_l)$  e  $(r_r, s_r)$ , no sistema de coordenadas  $(r, s)$ , é definido como  $|\gamma|$ , onde  $(r_r, s_r) = \Psi_i(\gamma)(r_l, s_l)$ ,  $i = 1, 2$ .

## 4.2 Construção de soluções pelo método de Glimm

Consideramos o problema de Cauchy (4.1) com dado inicial

$$(\rho(x, 0), v(x, 0)) = (\rho_0(x), v_0(x)) \in D_1, \quad (4.13)$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $\rho_0$  e  $v_0$  são funções limitadas com variação total limitada. Então existem os limites laterais  $\rho_0(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho_0(x)$  e  $v_0(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} v_0(x)$ .

Consideramos a função  $(r_0(x), s_0(x))$ , tal que  $(\rho(x, 0), v(x, 0)) = \Psi(r_0(x), s_0(x))$ . Assumimos que  $(r_0(-\infty), s_0(-\infty)) = p_0$ , e definimos

$$U(x, 0) \equiv U_0(x) = (r_0(x), s_0(x)).$$

Sejam  $h > 0$  e  $k > 0$  de modo que a condição de estabilidade

$$\frac{h}{k} = K > \sup_{(\rho, v) \in D_1} |\lambda_i(\rho, v)|,$$

$i = 1, 2$ , seja satisfeita.

Definimos o conjunto

$$Y \equiv \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2; m + n \equiv 0 \pmod{2}, n \geq 0\}.$$

Dividimos o semiplano  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  em um número contável de retângulos, (Figura 4.3), com vértices

$$(m-1, n), \quad (m+1, n), \quad (m+1, n+1), \quad (m-1, n+1).$$

Escolhemos um ponto  $(mh + \theta_n h, nk)_{(m,n) \in Y}$ , onde  $\theta_n \in (-1, 1)$  é escolhido aleatoriamente. Assumimos que  $\theta = (\theta_n)$  é uma sequência equidistribuída em  $(-1, 1)$ , (veja [17] e [25]).

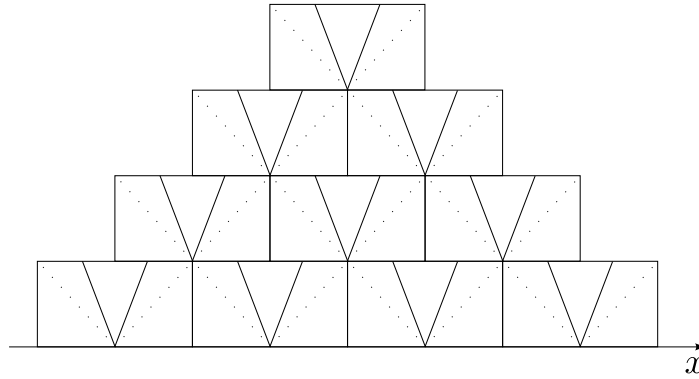


Figura 4.3: Método de Glimm.

Consideramos a aproximação do dado inicial dada por

$$U^{(m,0)}(x, 0) \equiv \begin{cases} U_0((m-1 + \theta_0)h), & (m-1)h \leq x < mh, \\ U_0((m+1 + \theta_0)h), & mh \leq x < (m+1)h, \end{cases}$$

onde  $(m, 0) \in Y$ .

Para cada  $m \in \mathbb{Z}$  fixo, tal que  $(m, 0) \in Y$ , seja  $V^{(m,0)}$  a solução fraca, dada pelo Teorema 4.1, do problema de Riemann

$$G(\Psi(V))_t + F(\Psi(V))_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

com dado inicial

$$V(x, 0) = \begin{cases} U_0((m-1+\theta_0)h), & x < mh, \\ U_0((m+1+\theta_0)h), & mh \leq x. \end{cases}$$

Definimos

$$U_1(x, t) \equiv V^{(m,0)}(x, t), \quad (m-1)h \leq x \leq (m+1)h, \quad 0 \leq t < k,$$

onde  $(m, 0) \in Y$ . Devido a condição de estabilidade  $\frac{h}{k} = K$  não há interação entre as ondas.

Indutivamente, assumimos que  $U_n$  está definida na faixa  $\mathbb{R} \times [(n-1)k, nk)$ . Resolvemos então o problema de Riemann

$$G(\Psi(V))_t + F(\Psi(V))_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (4.14)$$

com dado inicial

$$V(x, n\Delta t) = \begin{cases} U_n((m-1+\theta_n)h, nk^-), & x < mh, \\ U_n((m+1+\theta_n)h, nk^-), & mh \leq x, \end{cases} \quad (4.15)$$

para cada  $(m, n) \in Y$ , onde  $nk^- = \lim_{t \rightarrow nk^-} t$ . Seja  $V^{(m,n)}$  a solução fraca, dada pelo Teorema 4.1.

Definimos

$$U_{n+1}(x, t) \equiv V^{(m,n)}(x, t), \quad (m-1)h \leq x \leq (m+1)h, \quad n \leq t < (n+1)k,$$

onde  $(m, n) \in Y$ .

De acordo com o Lema 4.2, esse processo pode ser repetido indefinidamente pois os estados intermediários que aparecem em cada solução de um problema de Riemann pertencem ao domínio  $D_2$ . Dessa forma, construímos uma solução aproximada  $U_h(x, t)$ , para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ , definindo

$$U_h(x, t) \equiv U_n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [(n-1)k, nk)$$

onde  $n = 0, 1, \dots$

Para provarmos a convergência da solução aproximada  $U_h$ , usando a convergência do esquema de Glimm, precisamos mostrar que existe uma contante  $C > 0$ , independente de  $h$ , tal que

$$TV(U_h(.,t)) \leq C, \quad \forall t \geq 0.$$

Para obtermos esse limite, precisamos estimar o tamanho das ondas na solução do problema de Riemann (4.14) e (4.15). Começamos definindo  $a_{m,n} \equiv (mh + \theta_n h, nk)_{(m,n) \in Y}$ , e considerando o “diamante”  $\diamond_{m,n}$ , com vértices

$$N = a_{m,n+1}, \quad L = a_{m+1,n}, \quad S = a_{m,n-1}, \quad O = a_{m-1,n}.$$

que é chamado de “diamante de interação” centrado em  $(mh, nk)$ , para cada  $(m, n) \in Y$ , (Figura 4.4).

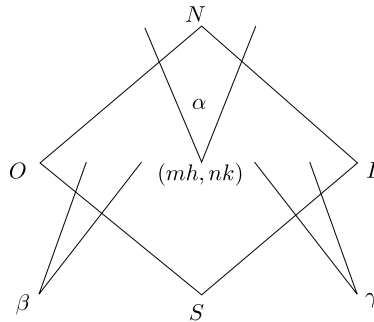


Figura 4.4: Diamante de interação  $\diamond_{m,n}$ .

As ondas emitidas em  $((m-1)h, (n-1)k)$  e  $((m+1)h, (n-1)k)$  que entram em  $\diamond_{m,n}$ , denotadas por  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  e  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ , são chamadas de ondas de chegada em relação a  $\diamond_{m,n}$ . As ondas emitidas em  $(mh, nk)$ , denotadas por  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , são chamadas de ondas de saída em relação a  $\diamond_{m,n}$ . Diremos que  $\beta$  e  $\gamma$  interagem em  $\diamond_{m,n}$  e geram  $\alpha$ . Denotamos por  $|\varepsilon_j|$ ,  $j = 1, 2$ , o tamanho da  $j$ -onda em  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

**Lema 4.3** *Sejam  $\beta$  e  $\gamma$  ondas de chegada e  $\alpha$  ondas de saída em relação a um diamante de interação  $\diamond_{m,n}$ . Então segue que*

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq |\beta_1| + |\beta_2| + |\gamma_1| + |\gamma_2|.$$

**Demonstração:** Sejam  $U_l, U_m,$  e  $U_m, U_r$  os dados iniciais dos problemas de Riemann que geram as ondas  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente. Sejam  $\hat{U}_l, \hat{U}_r$  os dados iniciais do problema de Riemann que geram as ondas  $\alpha$ .

Se  $\hat{U}_l = U_l, \hat{U}_r = U_r$  então  $|\alpha_i| = |\beta_i| + |\gamma_i|, i = 1, 2,$  pois a 1-curva característica é paralela ao eixo  $r$  e a 2-curva característica é paralela ao eixo  $s$ , no sistema de coordenadas  $(r, s)$ .

Notamos que os pontos  $\hat{U}_l, \hat{U}_r$  estão necessariamente sobre as curvas características. Segue que  $|\alpha_i| \leq |\beta_i| + |\gamma_i|, i = 1, 2.$  ■

Considere um tempo  $t > 0$  fixo, tal que  $t \neq nk, n = 1, 2, \dots$ . Definimos o funcional

$$L(t) \equiv \sum |\gamma|,$$

onde o somatório é sobre todas as ondas em  $U_h(., t)$ .

O Lema 4.3, mostra que

$$\Delta L(nk) = L(nk^+) - L(nk^-) \leq 0,$$

onde  $n = 1, 2, \dots$

Portanto  $TV(U_h(., t)) \leq TV(U_0), \forall t > 0.$

Como  $U_h(-\infty, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} U_h(x, t) = p_0$ , a função  $U_h$  satisfaz

$$\begin{cases} \|U_h(., t)\|_{L^\infty} \leq M, & \forall t \geq 0, \\ TV(U_h(., t)) \leq TV(U_0), & \forall t > 0, \end{cases}$$

para alguma constante  $M > 0$  que não depende de  $h$  e  $t$ .

**Lema 4.4** Sejam  $t_2, t_1 \geq 0$ , então

$$\|U_h(., t_2) - U_h(., t_1)\|_{L^1} \leq L(|t_2 - t_1| + k),$$

onde  $L$  não depende de  $s$  e  $t$ .

**Demonstração:** A prova segue como em [33].

Assumimos que  $t_2 > t_1$ . Seja  $t_0 = \sup\{t \leq t_1; t = nk, \text{ para algum } n\}$ . Notamos que  $t_0 \leq t_1 < t_0 + k$ .

Seja  $S = \left\lceil \frac{t_2 - t_0}{k} \right\rceil + 1$ , onde  $[w]$  é o maior inteiro menor que  $w$ . Daí

$$kS \leq t_2 - t_0 + k < t_2 - t_1 + 2k.$$

Devido a condição de estabilidade  $\frac{h}{k} = K$ , temos que a função  $U_h(\cdot, t_i)$ ,  $i = 1, 2$ , restrita ao intervalo  $[mh, (m+2)h]$  é unicamente determinada pela função  $U_h(\cdot, t_0)$  restrita ao intervalo  $[(m-S)h, (m+2+S)h]$ .

Como a variação total é controlada, para cada  $x \in [mh, (m+2)h]$  temos que

$$|U_h(x, t_2) - U_h(x, t_1)| \leq 2TV\{U_h(y, t_0); y \in I_m\},$$

onde  $I_m = [(m-S)h, (m+2+S)h]$ . Daí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |U_h(x, t_2) - U_h(x, t_1)| dx &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{mh}^{(m+2)h} |U_h(x, t_2) - U_h(x, t_1)| dx \\ &\leq 4h \sum_{m \in \mathbb{Z}} TV\{U_h(y, t_0); y \in I_m\}. \end{aligned}$$

Seja  $m^* = 2(1+S)$ . Para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  temos que

$$\begin{aligned} I_{(n-1)m^*} &= [((n-1)m^* - S)h, ((n-1)m^* + 2 + S)h], \\ I_{nm^*} &= [(nm^* - S)h, (nm^* + 2 + S)h]. \end{aligned}$$

Notamos que  $(n-1)m^* + 2 + S = nm^* - S, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |U_h(x, t_2) - U_h(x, t_1)| dx &\leq 4hm^* \sum_{n \in \mathbb{Z}} TV\{U_h(y, t_0); y \in I_{nm^*}\} \\ &\leq 8KTV(U_0)(kS + k) \\ &\leq M_3(t_2 - t_1 + k). \end{aligned}$$

■

Escolhemos então uma sequência  $(h_j)$  tal que  $h_j \rightarrow 0$ , quando  $j \rightarrow \infty$ . A convergência do esquema de Glimm, garante que existe uma subsequência de  $(h_j)$ , que por simplicidade chamaremos de  $(h_j)$ , tal que  $U = (\rho, v)$ , onde  $U = \lim U_{h_j}$ , é solução fraca do problema de Cauchy (4.1) com dado inicial 4.13.

### 4.3 Construção de soluções pelo método wave-front tracking

Consideramos o problema de Cauchy (4.1) com dado inicial (4.13). Consideramos a função  $U_0(x) = (r_0(x), s_0(x))$ , tal que  $(\rho(x, 0), v(x, 0)) = \Psi(U_0(x))$ .

Assumimos que  $(r_0(-\infty), s_0(-\infty)) = p_0$ , e que para cada ponto  $x \in \mathbb{R}$  a função  $U_0(x)$  assume valores em  $D_2$ . Além disso, lembramos que  $TV(U_0)$  é limitada.

Para cada  $h \in \mathbb{N}$ , podemos construir uma função aproximada  $U^h(x, 0)$ , como no Capítulo 3, que aproxima o dado inicial  $U_0(x)$ , satisfazendo

$$\begin{cases} U^h(-\infty, 0) = p_0, \\ TV(U^h(\cdot, 0)) \leq TV(U_0), \\ \|U^h(\cdot, 0) - U_0\|_{L^1_{loc}} \rightarrow 0, \end{cases}$$

Aplicando o algoritmo wave-front tracking, como no Capítulo 3, podemos construir uma solução aproximada  $U^h(x, t)$ , para todo  $t \geq 0$ , satisfazendo

$$\begin{cases} U^h(-\infty, t) = p_0, & \forall t > 0 \text{ fixo,} \\ \|U^h(\cdot, t) - U^h(\cdot, s)\|_{L^1} \leq L|t - s|, & \forall t, s > 0, \end{cases}$$

onde a constante  $L$  não depende de  $h, t$  e  $s$ .

**Comentário 21** *Nossa construção não apresenta “breakdown”, pois as curvas de choque e as curvas de rarefação da mesma família coincidem, elas são retas no sistema de coordenadas  $(r, s)$ . Dessa forma, não há geração de novas ondas quando duas ondas interagem, em particular, não há*



geração de ondas não físicas.

O número total de ondas em cada tempo  $t > 0$ , permanece limitado pelo número total de ondas geradas quando resolvemos os problemas de Riemann em  $t = 0$ . Logo o número de interações permanece finito.

Denotamos por  $\beta$  a 1-onda de choque, por  $o$  a 1-onda de rarefação, e por  $\gamma$  o contato de descontinuidade.

Os tipos de interação possíveis entre as ondas, de acordo com o Capítulo 3, e a solução do problema de Riemann resultante, são enumerados no próximo lema.

**Lema 4.5** *Os tipos possíveis de interação entre duas ondas e as soluções dos problemas de Riemann correspondentes são*

1.  $\gamma + \beta \rightarrow \beta + \gamma$ ,
2.  $\gamma + o \rightarrow o + \gamma$ ,
3.  $\beta + o(o + \beta) \rightarrow \zeta = \beta + o$ ,

onde  $\zeta$  pode ser uma 1-onda de choque ou uma 1-onda de rarefação dependendo do sinal que assume.

A estimativa 3 no Lema 4.5, ocorre porque as 1-curvas coincidem. Observamos que os contados de descontinuidade não interagem entre si.

Considere um tempo  $t > 0$  fixo, onde não ocorre interação entre ondas. Definimos o funcional

$$V(t) \equiv \sum |\gamma|,$$

onde o somatório é sobre todas as ondas em  $U^h(., t)$ .

Seja  $\tau > 0$  um tempo onde ocorre uma interação. O Lema 4.5, mostra que

$$\Delta V(\tau) = V(\tau^+) - V(\tau^-) = 0.$$

Portanto  $TV(U^h(.,t)) \leq TV(U_0), \forall t > 0$ .

A sequência de soluções  $h$ -aproximadas  $(U^h)$  satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} U^h(-\infty, t) = p_0, & \forall t > 0 \text{ fixo,} \\ U^h(x, t) \in D_2, & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ TV(U^h(.,t)) \leq TV(U_0) & \forall t > 0, \\ \|U^h(.,t) - U^h(.,s)\|_{L^1} \leq L|t-s|, & \forall t, s > 0, \end{array} \right.$$

onde  $L$  não depende de  $h, s$  e  $t$ . Observamos que o conjunto  $D_2$  é limitado, logo existe uma constante  $M > 0$  tal que  $|U^h(x, t)| \leq M, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

Pelo Teorema 2.1, existe uma subsequência  $(U^{h_k}) \subset (U^h)$  que converge em  $L^1_{loc}$ , para uma função  $U$ . De acordo com o Capítulo 3,  $U(x, t)$  é solução fraca de (4.1) e (4.13).

#### 4.4 Variação total localmente limitada

Supondo agora que a variação total do dado inicial é localmente limitada, podemos usar um argumento análogo ao usado no Capítulo 3 para construirmos uma solução fraca para o problema de Cauchy usando o método de Glimm ou o método wave-front tracking.

Considerando o esquema de Glimm, notamos que a solução fraca  $U$  no subconjunto

$$\left\{ (x, t); 0 \leq t < NK \text{ e } -N + t \frac{1}{K} < x < N - t \frac{1}{K} \right\}$$

é unicamente determinado pelo valor do dado inicial  $U_0$  no intervalo  $(-N, N)$ .

#### 4.5 Problema de Riemann com aparecimento de vácuo

Consideramos agora o subconjunto

$$D \equiv \{(r, s); 0 \leq s \leq r \leq v_m\},$$

onde  $v_m$  é a velocidade máxima na rodovia.

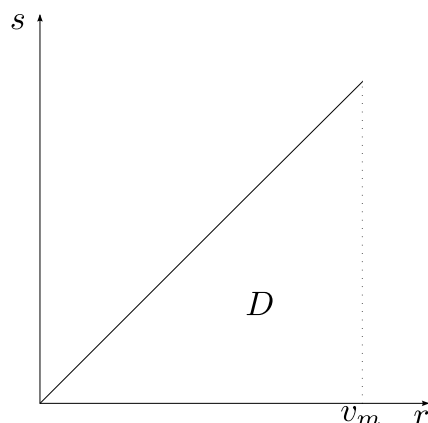


Figura 4.5: Subconjunto  $D$ .

Resolvemos o problema de Riemann com dado inicial em  $D$ , de acordo com Aw-Rascle, porém com algumas diferenças na região onde ocorre o vácuo. Vamos diferenciar os pontos no vácuo de acordo com a velocidade (falsa) assumida. Isso não tem nenhum significado físico, porém nos ajudará a construir soluções fracas para o problema de Cauchy, pelo método de Glimm e pelo método wave-front tracking.

Dividimos a solução do problema de Riemann com dado inicial

$$U_0 = \begin{cases} U_l = (r_l, s_l), & x < 0, \\ U_r = (r_r, s_r), & x > 0, \end{cases}$$

onde  $U_l, U_r \in D$ , em diversos casos.

1.  $0 \leq s_r \leq s_l, s_l < r_l$  e  $s_r < r_r$ . (ou equivalente  $\rho_l > 0, \rho_r > 0$  e  $0 \leq v_r \leq v_l$ .)

Vamos dividir a construção da solução em dois subcasos.

- 1.1.  $r_l < r_r$ .

Não ocorre o aparecimento de vácuo. A solução é formada por uma onda de choque conectando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, s_r)$  e um contato de descontinuidade conectando os estados  $(r_l, s_r)$  e  $(r_r, s_r)$ , viajando com velocidade  $s_2 = s_r$ . (Figuras 4.6 e 4.7).

- 1.2.  $r_l > r_r$ .

Esse caso é análogo ao anterior.

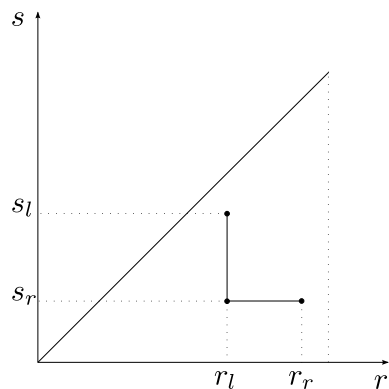


Figura 4.6:

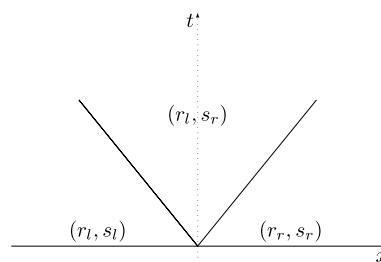


Figura 4.7:

2.  $0 \leq s_l \leq s_r \leq r_l, s_l < r_l$  e  $s_r < r_r$ . (ou equivalente  $\rho_l > 0, \rho_r > 0$  e  $0 \leq v_l \leq v_r \leq v_l + \rho_l^K$ .)

Vamos dividir a construção da solução em dois subcasos.

### 2.1. $r_l < r_r$ .

Não ocorre o aparecimento de vácuo. A solução é formada por uma onda de rarefação conectando os pontos  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, s_r)$  e um contato de descontinuidade conectando os estados  $(r_l, s_r)$  e  $(r_r, s_r)$ , viajando com velocidade  $s_2 = s_r$ . (Figuras 4.8 e 4.9).

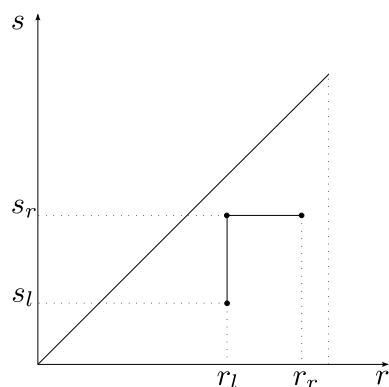


Figura 4.8:

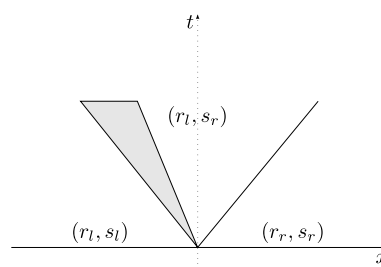


Figura 4.9:

### 2.2. $r_l > r_r$ .

Esse caso é análogo ao anterior.

3.  $0 \leq s_l < r_l \leq s_r < r_r$ . (ou equivalente  $\rho_l > 0, \rho_r > 0$  e  $v_l + \rho_l^K \leq v_r$ .)

Nesse caso, temos o aparecimento de vácuo,  $\rho = 0$ . A solução é formada por uma onda de rarefação conectando os pontos  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, r_l)$  seguida de uma região de vácuo que liga os pontos  $(r_l, r_l)$  e  $(s_r, s_r)$ . No plano  $x - t$  vamos definir a solução nessa região como  $(r_l, r_l)$ ,

seguida de um contato de descontinuidade conectando os pontos  $(s_r, s_r)$  e  $(r_r, s_r)$ , viajando com velocidade  $s_2 = s_r$ , (Figuras 4.10 e 4.11).

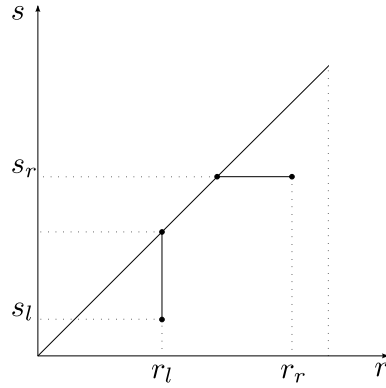


Figura 4.10:

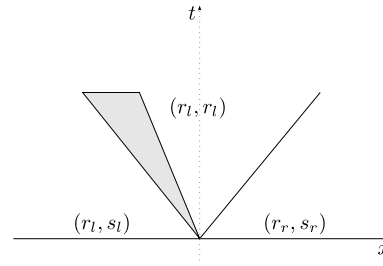


Figura 4.11:

Notamos que no vácuo consideramos apenas o ponto de “entrada“  $(r_l, r_l)$ . A descontinuidade no plano  $x - t$  conecta os pontos  $(r_l, r_l)$  e  $(r_r, s_r)$ .

Precisamos verificar se a descontinuidade que conecta os pontos  $(r_l, r_l)$  e  $(r_r, s_r)$ , realmente define uma solução fraca. É suficiente verificarmos que

$$s_2 G(U_r) - F(U_r) = v_r \begin{pmatrix} \rho_r \\ \rho_r v_r + \rho_r^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_r v_r \\ \rho_r v_r^2 + \rho_r^{k+1} v_r \end{pmatrix} = 0,$$

onde  $s_2$  é a velocidade do contato de descontinuidade.

Nossa solução difere da solução dada em Aw-Rascle nesse caso, porque definimos um valor para o vácuo, essa definição será importante quando aplicarmos os métodos de Glimm e wave-front tracking.

4.  $0 \leq s_l < r_l$  e  $0 \leq r_r = s_r$ . (ou equivalente  $\rho_l > 0$ ,  $\rho_r = 0$ .)

Vamos dividir a construção da solução em três subcasos.

- 4.1  $r_l < r_r$ . Nesse caso, a solução é formada por uma onda de rarefação conectando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, r_l)$  e de uma região de vácuo que liga os pontos  $(r_l, r_l)$  e  $(r_r, r_r)$ . No plano  $x - t$  vamos definir a solução na região de vácuo como  $(r_l, r_l)$ , acrescentamos então uma descontinuidade conectando os estados  $(r_l, r_l)$  e  $(r_r, r_r)$  viajando com velocidade igual a  $v_r$ . Notamos que  $v_l < v_r$ , (Figuras 4.12 e 4.13).

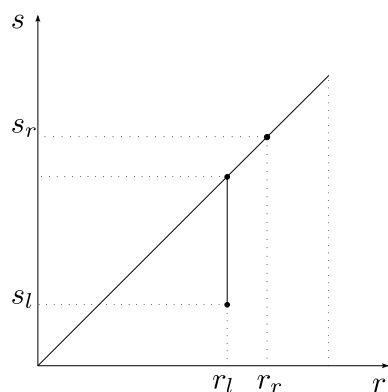


Figura 4.12:

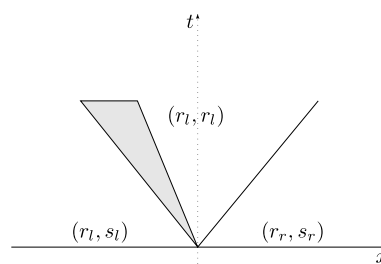


Figura 4.13:

4.2  $s_l < r_r < r_l$ . Nesse caso, a solução é formada por uma onda de rarefação conectando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, r_r)$  e de um contato de descontinuidade que conecta os pontos  $(r_l, r_r)$  e  $(r_r, r_r)$  e viaja com velocidade  $s_2 = r_r = v_r$ , (Figuras 4.14 e 4.15).

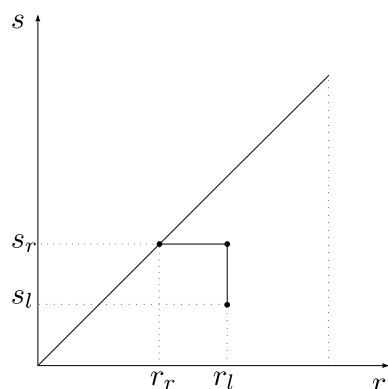


Figura 4.14:

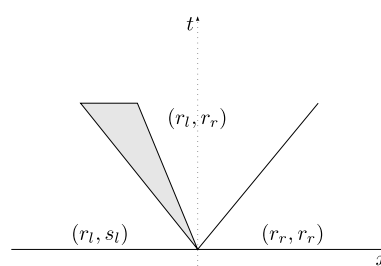


Figura 4.15:

4.3  $r_r < s_l$ . Nesse caso, a solução é formada por uma onda de choque conectando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, r_r)$  e de um contato de descontinuidade que conecta os pontos  $(r_l, r_r)$  e  $(r_r, r_r)$  e viaja com velocidade  $s_2 = r_r = v_r$ , (Figuras 4.16 e 4.17).

5.  $0 \leq s_r < r_r$  e  $0 \leq r_l = s_l$ . (ou equivalente  $\rho_l = 0, \rho_r > 0$ .)

Vamos dividir a construção da solução em três subcasos.

5.1  $r_l < s_r$ . Nesse caso, a solução é formada por uma região de vácuo ligando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, r_l)$  e de um contato de descontinuidade que conecta os pontos  $(r_l, r_l)$  e  $(r_r, s_r)$ . No plano  $x - t$  vamos definir a solução na região de vácuo como  $(r_l, r_l)$ , a solução é formada então por uma única descontinuidade viajando com velocidade  $v_r$ , (Figuras 4.18 e 4.20).

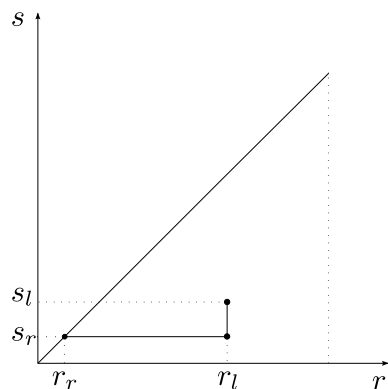


Figura 4.16:

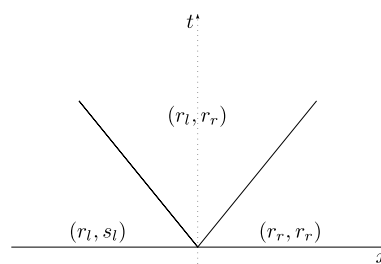


Figura 4.17:

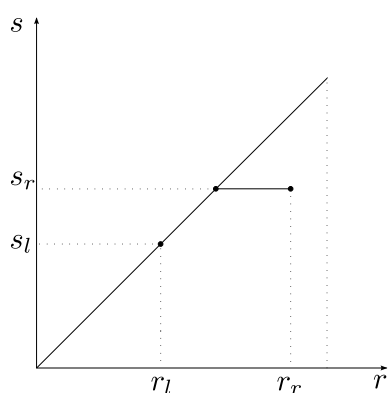


Figura 4.18:

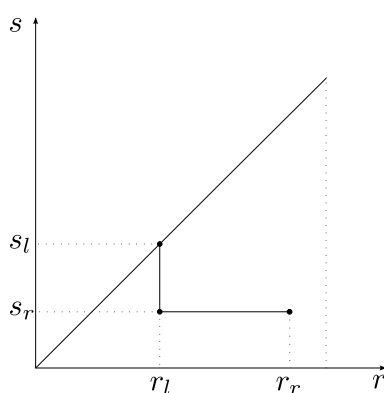


Figura 4.19:

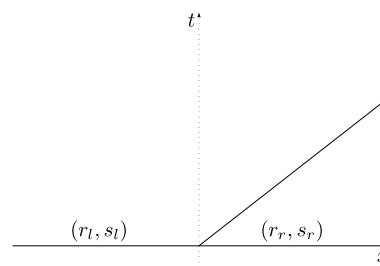


Figura 4.20:

5.2  $s_r < r_l < r_r$ . Nesse caso, a solução é formada por uma onda de choque conectando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, s_r)$  e de um contato de descontinuidade que conecta os pontos  $(r_l, s_r)$  e  $(r_r, s_r)$  e viaja com velocidade  $s_2 = r_r$ , (Figura 4.19). Notamos que  $s_1 = v_r$ , pois  $\rho_l = 0$ . No plano  $x - t$  a solução é então formada por uma única descontinuidade viajando com velocidade  $v_r$ .

5.3.  $r_r < r_l$ .

Esse caso é análogo ao anterior.

6.  $0 \leq r_l = s_l$  e  $0 \leq r_r = s_r$ . (ou equivalente  $\rho_l = 0, \rho_r = 0$ .)

Esse caso não é abordado em Aw-Rascle. Como estamos diferenciando os pontos na região de vácuo, precisamos definir uma solução quando o dado inicial consiste de dois estados nessa região. Vamos dividir a construção da solução em dois subcasos.

6.1  $r_l < r_r$ . Nesse caso, a solução é formada por um região de vácuo ligando os estados  $(r_l, r_l)$  e  $(r_r, r_r)$ . No plano  $x - t$  a solução é formada por uma única descontinuidade

viajando com velocidade  $v_r$ , (Figura 4.21).

- 6.2  $r_l > r_r$ . Nesse caso, a solução é formada por uma onda de choque conectando os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_l, s_r)$  e de um contato de descontinuidade que conecta os pontos  $(r_l, s_r)$  e  $(r_r, r_r)$ . Notamos que  $s_l = v_r$ , pois  $\rho_l = 0$ . No plano  $x-t$  a solução é então formada por uma única descontinuidade viajando com velocidade  $v_r$ , (Figura 4.22).

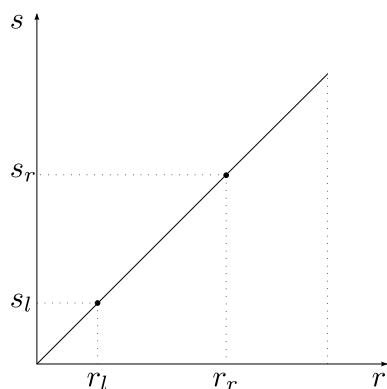


Figura 4.21:

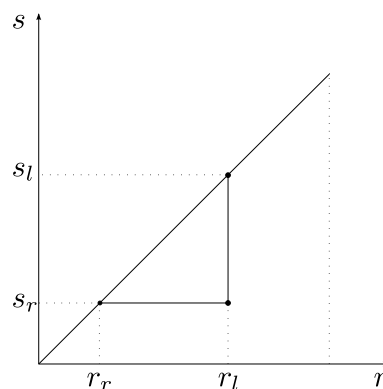


Figura 4.22:

Observamos que os valores intermediários que aparecem na solução do problema de Riemann pertencem ao subconjunto  $D$ .

Definimos o tamanho de uma onda ou de uma descontinuidade que conecta os estados  $(r_l, s_l)$  e  $(r_r, s_r)$  como sendo a norma da soma  $|(r_l, s_l) - (r_r, s_r)|$  em  $\mathbb{R}^2$ . Essa definição não muda a definição usual do tamanho de uma onda quando não temos o estado de vácuo envolvido na solução do problema de Riemann.

Notamos que a soma dos tamanhos das ondas envolvidas na solução do problema de Riemann é igual a  $|(r_l, s_l) - (r_r, s_r)|$ , onde  $|\cdot|$  é a norma da soma em  $\mathbb{R}^2$ , logo a variação total da solução do problema de Riemann é sempre igual a variação total do dado inicial. Além disso, o subconjunto  $D$  é invariante pela solução do problema de Riemann.

Com argumentos similares aos usados anteriormente, podemos então aplicar o método de Glimm ou o método wave-front tracking para construir soluções fracas para o problema de Cauchy onde o dado inicial  $u_0 = (\rho_0, v_0)$  é uma função limitada com variação total localmente limitada.



## Lei de conservação escalar

Consideramos a lei de conservação com valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $f$  é localmente Lipschitz contínua em  $\mathbb{R}$  e  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$  é limitada, contínua à esquerda e de variação localmente limitada em  $\mathbb{R}$ .

A limitação de  $u_0$  junto com a condição de localmente Lipschitz contínua de  $f$  nos permite considerar  $f$  Lipschitz no intervalo  $[-M, M]$ , onde  $\|u_0\|_\infty \leq M$ , sem perda de generalidade podemos considerar que  $M \in \mathbb{N}$ .

Uma solução fraca admissível para o problema de Cauchy (5.1) é definida como em [13].

**Definição 5.1** *Uma função mensurável localmente limitada  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de solução fraca admissível de (5.1), se para qualquer função não decrescente  $h(u)$  e qualquer função suave não negativa  $\phi(x, t)$  com suporte compacto em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , tivermos*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty I(u_0(x))\phi(x, 0) dx \geq 0, \quad (5.2)$$

onde

$$I(u) \equiv \int_{-M}^u h(\xi) d\xi, \quad F(u) \equiv \int_{-M}^u h(\xi) df(\xi).$$

**Comentário 22** Fazendo  $h(u) = 1$  e  $h(u) = -1$  em (5.2), temos que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0) dx = 0. \quad (5.3)$$

que é a condição clássica satisfeita por qualquer solução fraca de (5.1).

**Comentário 23** Se  $u(x,t)$  é definida em  $\mathbb{R} \times [0, T)$  e (5.2) é satisfeita para qualquer função suave não negativa  $\phi(x,t)$  com suporte compacto em  $\mathbb{R} \times [0, T)$ , então  $u(x,t)$  é uma solução fraca admissível local de (5.1) em  $\mathbb{R} \times [0, T)$ , de acordo com [13].

## 5.1 Solução Aproximada

Inicialmente, assumimos que o dado inicial  $u_0$  tem variação total limitada em  $\mathbb{R}$ .

Para cada inteiro  $l \geq 1$ , queremos construir uma solução aproximada para (5.1). Começamos aproximando a função  $f$  por uma função poligonal.

Seja  $P = \{x_0 = -M < x_1 < \dots < x_s = M\}$  a partição de  $[-M, M]$ , tal que  $|x_j - x_{j-1}| = 2^{-l}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ ,  $s = 2^{l+1}M$ . Seja  $f_l$  a função afim por partes que coincide com  $f$  em todos os pontos  $x_j \in P$ , com  $j = 1, 2, \dots, s$ , isto é:

$$f_l(s) = \frac{s - x_{j-1}}{2^{-l}} f(x_j) + \frac{x_j - s}{2^{-l}} f(x_{j-1}),$$

quando  $s \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Seja  $K$  a constante de Lipschitz de  $f$ , ou seja,

$$|f(w) - f(z)| \leq K|w - z|, \quad \forall w, z \in [-M, M], \quad (5.4)$$

sem perda de generalidade podemos supor  $K \geq 1$ .

A inclinação de  $f_l$  também é limitada por  $K$ , em outras palavras  $f_l$  é Lipschitz contínua com

constante de Lipschitz  $K$ , em  $[-M, M]$ , ou seja,

$$|f_l(w) - f_l(z)| \leq K|w - z|, \forall w, z \in [-M, M].$$

**Lema 5.1** (*O problema de Riemann para uma aproximação poligonal*)

Assuma que  $f$  é linear por partes, ou seja, existe uma partição  $P = \{-M = x_0 < \dots < x_n = M\}$  de  $[-M, M]$  tal que  $f$  é linear em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Supomos que  $f$  satisfaz (5.4) e

$$u_0 \equiv \begin{cases} u^-, & x \in (-\infty, y] \\ u^+, & x \in (y, +\infty), \end{cases}$$

onde  $u^-$  e  $u^+$  são constantes em  $[-M, M]$  e  $y$  é constante em  $\mathbb{R}$ . Então existe uma solução fraca admissível  $u$  de (5.1), que consiste de um número finito de constantes separadas por ondas de choque centradas na origem. Além disso,  $TV(u(\cdot, t)) \leq |u^+ - u^-|$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ , e  $|u(x, t)| \leq \|\bar{u}_0\|_\infty$ ,  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

A demonstração desse lema é encontrada em [13].

**Comentário 24** *Os valores intermediários assumidos por cada solução são sempre aqueles destacados nos vértices da função poligonal  $f$  considerada no lema. Temos ainda que a solução vai do valor  $u^-$  para o valor  $u^+$  de forma crescente ou decrescente. Além disso, cada descontinuidade  $x = \tilde{x}(t)$ ,  $t \in (0, \infty)$ , satisfaz a clássica condição de salto*

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{f_l(u^+) - f_l(u^-)}{u^+ - u^-},$$

e satisfaz ainda a condição de Oleinik [29]

$$\frac{f_l(u^+) - f_l(u)}{u^+ - u} \leq \frac{f_l(u^+) - f_l(u^-)}{u^+ - u^-},$$

onde  $u^+ = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}(t)^+} u(x, t)$  e  $u^- = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}(t)^-} u(x, t)$ , e  $u$  está entre  $u^-$  e  $u^+$ .

Consideramos uma grade no semiplano superior  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , com passo  $h = 2^{-l}$ , tal que a

condição de estabilidade  $\frac{h}{k} = C > K$ , seja satisfeita. Definimos o conjunto

$$Y \equiv \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2; m + n \equiv 0 \pmod{2}, n \geq 0\}.$$

Definimos também o conjunto

$$\Phi \equiv \prod_{(m,n) \in Y} \{[(m-1)h, (m+1)h] \times \{nk\}\}.$$

Consideramos o ponto  $(mh + \theta_n h, nk)_{(m,n) \in Y} \in \Phi$ , onde  $\theta_n$  é escolhido aleatoriamente em  $[-1, 1]$ , e escrevemos  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots)$ . Como em [33], existe um isomorfismo,  $\Phi \approx \prod [0, 1]$ , de  $\Phi$  em um produto contável de cópias do intervalo unitário, assim podemos considerar o ponto aleatório  $\theta$  definido em um espaço fixo de probabilidade  $\Phi$ , independente de  $h$ . (Para mais detalhes veja [17], [33]).

Para cada  $l \geq 1$  fixo, consideramos a lei de conservação

$$u_t + f_l(u)_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \quad (5.5)$$

Seja  $\theta \in \Phi$  fixo. Consideramos a aproximação do dado inicial

$$u_0^1(x, 0) = \begin{cases} u_0((m-1 + \theta_0)h), & (m-1)h < x \leq mh, \\ u_0((m+1 + \theta_0)h), & mh < x \leq (m+1)h, \end{cases} \quad (5.6)$$

para cada  $(m, 0) \in Y$ .

Para cada  $l \geq 1$ , e para cada  $(m, 0) \in Y$ , o problema de Riemann

$$v_t + f_l(v)_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

com dado inicial

$$v(x, 0) = \begin{cases} u_0((m-1 + \theta_0)h), & x \in (-\infty, mh], \\ u_0((m+1 + \theta_0)h), & x \in ((m+1)h, \infty), \end{cases}$$

é resolvido pelo Lema 5.1. Seja  $v_{l,m,0}$  a solução fraca admissível desse problema dada pelo Lema 5.1. Notamos que  $v_{l,m,0}$  é uma solução fraca admissível no retângulo  $[(m-1)h, (m+1)h] \times [0, k)$ .

Para cada  $l \geq 1$  fixo, definimos

$$u_{l,1}(x,t) \equiv v_{l,m,0}(x,t), \quad (m-1)h \leq x \leq (m+1)h, \quad 0 \leq t < k,$$

onde  $(m,0) \in Y$ . Notamos que  $TV(u_{l,1}(\cdot, t)) \leq TV(u_0)$ ,  $\forall t \in [0, k)$ , e  $|u_{l,1}(x,t)| \leq \|u_0\|_\infty$ ,  $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, k)$ .

**Comentário 25** *Devido a condição de estabilidade,  $\frac{h}{k} = C > K$ , não há interações entre os ondas.*

Indutivamente, assumimos que  $u_{l,n}$  está definida na faixa  $\mathbb{R} \times [(n-1)k, nk)$ . De forma análoga, para definirmos  $u_{l,n+1}$ , resolvemos o problema de Riemann

$$v_t + f_l(v)_x = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [nk, +\infty),$$

com dado inicial

$$v(x, nk) = \begin{cases} u_{l,n}((m-1+\theta_n)h, nk^-), & x \in (-\infty, mh], \\ u_{l,n}((m+1+\theta_n)h, nk^-), & x \in ((m+1)h, \infty), \end{cases}$$

para cada  $(m,n) \in Y$ . Seja  $v_{l,m,n}$  a solução fraca admissível desse problema dada pelo Lema 5.1.

Definimos então

$$u_{l,n+1}(x,t) \equiv v_{l,m,n}(x,t), \quad (m-1)h \leq x \leq (m+1)h, \quad nk \leq t < (n+1)k,$$

onde  $(m,n) \in Y$ . Notamos que  $u_{l,n+1}$  é uma função constante por partes, onde as constantes são separadas por segmentos de retas. Além disso,  $TV(u_{l,n+1}(\cdot, t)) \leq TV(u_0)$ ,  $\forall t \in [nk, (n+1)k)$ , e  $|u_{l,n+1}(x,t)| \leq \|u_0\|_\infty$ ,  $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [nk, (n+1)k)$ .

Para cada  $l \in \mathbb{N}$  fixo e para cada  $\theta \in \Phi$  fixo, consideramos  $u_{\theta,l}(x,t) = u_{l,n}(x,t)$ ,  $(x,t) \in (-\infty, \infty) \times [(n-1)k, nk)$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Comentário 26** Devido a condição de estabilidade  $\frac{h}{k} = C > K$ , a restrição de  $u_{\theta,l}(\cdot, t)$  em qualquer intervalo  $[x_1, x_2]$ , é unicamente determinada pela restrição de  $u_0(\cdot)$  no intervalo  $[x_1 - (1 + Kt), x_2 + (1 + Kt)]$ , que é a propriedade de domínio de dependência finito, e

$$TV_{[x_1, x_2]}(u_{\theta,l}(\cdot, t)) \leq TV_{[x_1 - (1 + Kt), x_2 + (1 + Kt)]}(u_0(\cdot)).$$

**Lema 5.2** Seja  $\theta \in \Phi$  fixo. Para cada  $l \in \mathbb{N}$ , para cada função não decrescente  $h(u)$  e cada função não negativa  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$ , temos que em cada faixa  $\mathbb{R} \times [nk, (n + 1)k]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{-\infty}^{\infty} (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} I(u_{\theta,l}(x, nk^+))\phi(x, nk) dx \\ - \int_{-\infty}^{\infty} I(u_{\theta,l}(x, (n+1)k^-))\phi(x, (n+1)k) dx \geq 0, \end{aligned}$$

onde

$$F_l(u) = \int_{-M}^u h(\xi) df_l(\xi).$$

**Demonstração:** Supomos, sem perda de generalidade, que na faixa  $\mathbb{R} \times (nk, (n + 1)k)$ , temos apenas uma descontinuidade  $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$  com inclinação  $\alpha_1 = \frac{f_l(u_2) - f_l(u_1)}{u_2 - u_1}$ , que liga os pontos  $(x_2, nk)$  e  $(x_1, (n + 1)k)$ , contruída de acordo com o Lema 5.1, separando os valores  $u_1$  e  $u_2$ , que são assumidos pela função  $u_{\theta,l}$  na reta  $t = nk$ , (Figura 5.1).

Assumimos que o suporte de  $\phi$  está contido no conjunto  $[a, b] \times \mathbb{R}$ . A fronteira orientada de  $D_1$  é parametrizada por  $\Gamma_1(s) = (s, nk)$ , onde  $a \leq s \leq x_2$ ,  $\Gamma_2(s) = (\tilde{x}(s), s)$ , onde  $nk \leq s \leq (n + 1)k$  e  $\Gamma_3(s) = ((x_1 + a) - s, (n + 1)k)$ , onde  $a \leq s \leq x_1$ . De forma análoga, a fronteira orientada de  $D_2$  é parametrizada por  $\tilde{\Gamma}_1(s) = (s, nk)$ , onde  $x_2 \leq s \leq b$ ,  $\tilde{\Gamma}_2(s) = (\tilde{x}((2n + 1)k - s), (2n + 1)k - s)$ , onde  $nk \leq s \leq (n + 1)k$  e  $\tilde{\Gamma}_3(s) = ((b + x_1) - s, (n + 1)k)$ , onde  $x_1 \leq s \leq b$ .

Integrando temos que

$$\begin{aligned} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{-\infty}^{\infty} (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt &= \int \int_{D_1} (I(u_1)\phi_t + F_l(u_1)\phi_x) dx dt \\ &+ \int \int_{D_2} (I(u_2)\phi_t + F_l(u_2)\phi_x) dx dt. \end{aligned}$$

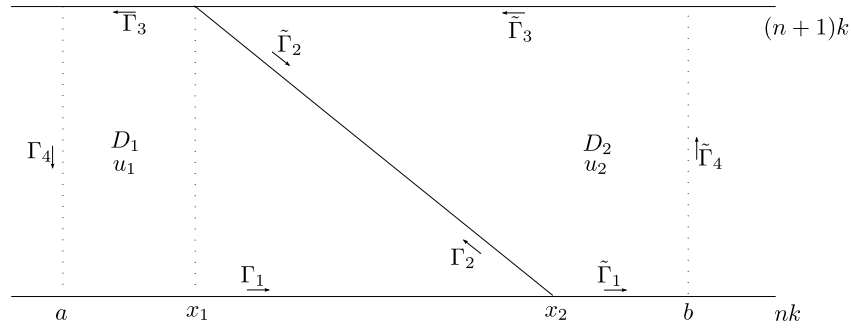


Figura 5.1: Exemplo de solução fraca local admissível na faixa  $\mathbb{R} \times (nk, (n+1)k)$ .

Pelo Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} \int \int_{D_1} (I(u_1)\phi_t + F_l(u_1)\phi_x) dx dt &= - \int_a^{x_2} I(u_1)\phi(x, nk^+) dx + \int_a^{x_1} I(u_1)\phi(x, (n+1)k^-) dx \\ &\quad + \int_{nk}^{(n+1)k} [-\alpha_1 I(u_1) + F_l(u_1)]\phi(\tilde{x}(s), s) ds, \\ \int \int_{D_2} (I(u_2)\phi_t + F_l(u_2)\phi_x) dx dt &= - \int_{x_2}^b I(u_2)\phi(x, nk) dx + \int_{x_1}^b I(u_2)\phi(x, (n+1)k) dx \\ &\quad + \int_{nk}^{(n+1)k} [\alpha_1 I(u_2) - F_l(u_2)]\phi(\tilde{x}(s), s) ds. \end{aligned}$$

Somando as integrais obtemos

$$\begin{aligned} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{-\infty}^{\infty} (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt &= - \int_a^b I(u_{\theta,l}(x, nk^+))\phi(x, nk) dx \\ &\quad + \int_a^b I(u_{\theta,l}(x, (n+1)k^-))\phi(x, (n+1)k) dx \\ &\quad + \int_{nk}^{(n+1)nk} [\alpha_1 (I(u_2) - I(u_1)) + (F_l(u_1) - F_l(u_2))]\phi(\tilde{x}(s), s) dt. \end{aligned}$$

Como  $\alpha_1 = \frac{f_l(u_2) - f_l(u_1)}{u_2 - u_1}$ , pelo Lema 6.1 de [19], temos que

$$\frac{f_l(u_2) - f_l(u_1)}{u_2 - u_1} ((I(u_2) - I(u_1)) + (F_l(u_1) - F_l(u_2))) \geq 0.$$

Portanto

$$\int_{nk}^{(n+1)k} \int_{-\infty}^{\infty} (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt + \int_a^b I(u_{\theta,l}(x, nk^+))\phi(x, nk) dx \\ - \int_a^b I(u_{\theta,l}(x, (n+1)k^-))\phi(x, (n+1)k) dx \geq 0.$$

■

Concluimos que para cada  $l \in N$  fixo e para cada  $\theta \in \Phi$  fixo, a função  $u_{\theta,l}$  definida no semiplano  $t \geq 0$ , é uma solução fraca admissível local em cada faixa  $[nk, (n+1)k]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 5.2 Convergência

Por construção, para cada  $\theta \in \Phi$  fixo, a sequência de funções  $(u_{\theta,l})_{l \geq 1}$  satisfaz

$$|u_{\theta,l}(x, t)| \leq \|u_0\|_{\infty}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ TV(u_{\theta,l}(\cdot, t)) \leq TV(u_0), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Como em [33], temos

**Lema 5.3** *Sejam  $t_1, t_2 \geq 0$ , então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_{\theta,l}(x, t_1) - u_{\theta,l}(x, t_2)| dx \leq C(|t_1 - t_2| + k),$$

onde a constante  $C$  não depende de  $l$ ,  $\theta$ ,  $t_1$  e  $t_2$ .

**Teorema 5.1** *Existe uma subsequência  $(u_{\theta,l_m}) \subset (u_{\theta,l})$  que converge em  $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty) : \mathbb{R})$  para uma função  $u_{\theta}$ , para cada  $\theta \in \Phi$  fixo.*

Agora, usaremos a convergência do esquema de Glimm para mostrar que a função  $u_{\theta}$  é uma solução fraca admissível de (5.1).



Seja  $\theta \in \Phi$  fixo, dada qualquer função não decrescente  $h(u)$  e qualquer função não negativa  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$ , definimos o funcional  $\mathcal{L}_\phi$ , como segue

$$\mathcal{L}_\phi(I(u), F(u)) \equiv \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty I(u_0(x))\phi(x, 0) dx.$$

Nosso objetivo é encontrar uma função  $u_\theta$  tal que  $\mathcal{L}_\phi(I(u_\theta), F(u_\theta)) \geq 0$  para cada função não decrescente  $h(u)$  e cada função não negativa  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$ .

Para cada  $\theta \in \Phi$  fixo, para cada  $l \in \mathbb{N}$  fixo, para cada função não decrescente  $h(u)$  e cada função não negativa  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$ , a função  $u_{\theta,l}$  construída na seção anterior, satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{-\infty}^\infty (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty I(u_{\theta,l}(x, nk^+))\phi(x, nk) dx \\ - \int_{-\infty}^\infty I(u_{\theta,l}(x, (n+1)k^-))\phi(x, (n+1)k) dx \geq 0. \end{aligned}$$

na faixa  $nk \leq t < (n+1)k$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de acordo com o Lema 5.2.

Somando em  $n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty I(u_{\theta,l}(x, 0))\phi(x, 0) dx \\ + \sum_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty [I(u_{\theta,l})](x, nk)\phi(x, nk) dx \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $[I(u_{\theta,l})](x, nk) \equiv I(u_{\theta,l}(x, nk^+)) - I(u_{\theta,l}(x, nk^-))$ .

**Lema 5.4** Para cada  $\theta \in \Phi$  fixo, para cada função não decrescente  $h(u)$  e para cada função não negativa  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$ , temos que

$$\int \int_{t \geq 0} (I(u_{\theta,l})\phi_t + F_l(u_{\theta,l})\phi_x) dx dt \rightarrow \int \int_{t \geq 0} (I(u_\theta)\phi_t + F(u_\theta)\phi_x) dx dt,$$

quando  $l \rightarrow \infty$ .

**Demonstração:** De fato, seja  $l \in \mathbb{N}$  fixo. Se  $u \in [-M, M]$  então existe  $p \in P$  tal que  $|u - p| \leq 2^{-l}$ ,

logo

$$|f(u) - f_l(u)| \leq |f(u) - f_l(p)| + |f_l(p) - f_l(u)| \leq 2K|u - p| \leq \frac{K}{2^{l-1}}.$$

Notamos que

$$|F_l(u_{\theta,l}) - F(u_\theta)| \leq |F_l(u_{\theta,l}) - F_l(u_\theta)| + |F_l(u_\theta) - F(u_\theta)|.$$

Seja  $H \equiv \max\{|h(-M)|, |h(M)|\}$ , assim

$$|I(u_{\theta,l}) - I(u_\theta)| \leq \left| \int_{u_\theta}^{u_{\theta,l}} h(\xi) d\xi \right| \leq H|u_{\theta,l} - u_\theta|,$$

$$\begin{aligned} |F(u_\theta) - F_l(u_\theta)| &= \left| \int_{-M}^{u_\theta} h(\xi) df(\xi) - \int_{-M}^{u_\theta} h(\xi) df_l(\xi) \right| \\ &\leq \left| \int_{-M}^{u_\theta} h(\xi) d(f(\xi) - f_l(\xi)) \right| \\ &\leq |h(u)(f(u_\theta) - f_l(u_\theta))| + \left| \int_{-M}^{u_\theta} (f(\xi) - f_l(\xi)) dh(\xi) \right| \\ &\leq \frac{K}{2^{l-1}} (H + 2H) \\ &\leq \frac{3HK}{2^{l-1}}, \end{aligned}$$

$$|F_l(u_{\theta,l}) - F_l(u_\theta)| = \left| \int_{u_\theta}^{u_{\theta,l}} h(\xi) df_l(\xi) \right| \leq HK|u_{\theta,l} - u_\theta|.$$

Seja  $B \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$  um subconjunto compacto. Seque que

$$\int \int_B |I(u_{\theta,l}) - I(u_\theta)| dx dt \leq H \int \int_B |u_{\theta,l} - u_\theta| dx dt \rightarrow 0,$$

e

$$\int \int_B |F_l(u_{\theta,l}) - F(u_\theta)| dx dt \leq \frac{K}{2^{l-1}} C_0 + H K \int \int_B |u_{\theta,l} - u_\theta| dx dt \rightarrow 0,$$

pois  $u_{\theta,l} \rightarrow u_\theta$  em  $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R})$ , quando  $l \rightarrow \infty$ , onde  $H$  é uma constante que depende apenas da função  $h$  e  $C_0$  é uma constante que depende apenas do conjunto  $B$  e da função  $h$ . ■

Portanto, nosso teorema de existência será demonstrado se provarmos que

**Lema 5.5** *Seja  $\theta \in \Phi$  fixo. Então  $u_\theta = \lim_{l \rightarrow \infty} u_{\theta,l}$  é uma solução fraca admissível de (5.1) desde que:*

$$I(u_{\theta,l}(\cdot, 0)) \rightarrow I(u_\theta(\cdot)),$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} [I(u_{\theta,l})](\cdot, nk) \rightarrow 0,$$

fracamente, quando  $l \rightarrow \infty$ .

Observamos que

$$|I(u_{\theta,l}(x, 0)) - I(u_\theta(x))| = \left| \int_{u_\theta(x)}^{u_{\theta,l}(x, 0)} h(\xi) d\xi \right| \leq H |u_{\theta,l}(x, 0) - u_\theta(x)|,$$

$$|[I(u_{\theta,l})](\cdot, nk)| = |I(u_{\theta,l}(x, nk^+)) - I(u_{\theta,l}(x, nk^-))|$$

$$\leq \left| \int_{u_{\theta,l}(x, nk^-)}^{u_{\theta,l}(x, nk^+)} h(\xi) d\xi \right|$$

$$\leq H |u_{\theta,l}(x, nk^+) - u_{\theta,l}(x, nk^-)|$$

$$\leq H |[u_{\theta,l}](\cdot, nk)|.$$

Portanto, a prova do Lema 5.5 é consequência do próximo lema.

**Lema 5.6** *Seja  $\theta \in \Phi$  fixo. Então*

$$u_{\theta,l}(\cdot, 0) \rightarrow u_0(\cdot) \quad (5.7)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_{\theta,l}](\cdot, nk) \rightarrow 0, \quad (5.8)$$

fracamente, quando  $l \rightarrow \infty$ .

Como  $u_{\theta,l}(x, 0) \rightarrow u_0(x)$  q.t.p., quando  $l \rightarrow \infty$ , e  $|u_{\theta,l}(x, 0)|, |u_0(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ , obtemos a convergência (5.7) usando o Teorema de Lebesgue. Resta mostrarmos (5.8). Em [33], temos que

**Teorema 5.2** *Existe um conjunto de medida nula  $N \subset \Phi$  e um subsequência  $l_j \rightarrow 0$  tal que para qualquer  $\theta \in \Phi/N$  e qualquer função não negativa  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$ , a convergência (5.8) é válida.*

O próximo teorema é nosso principal resultado.

**Teorema 5.3** *Se o dado inicial  $u_0(\cdot)$  é limitado, contínuo à esquerda e com variação total localmente limitada em  $\mathbb{R}$ , então existe um conjunto de medida nula  $N \subset \Phi$  e uma subsequência  $l_j \rightarrow 0$  tal que se  $\theta \in \Phi/N$ ,  $h(u)$  é qualquer função não decrescente e  $\phi \in C_0^1(t \geq 0)$  é qualquer função não negativa, então  $u_\theta = \lim_{l_j \rightarrow \infty} u_{\theta,l_j}$  é tal que  $\mathcal{L}_\phi(I(u_\theta), F(u_\theta)) \geq 0$ . Além disso,  $u_\theta$  satisfaz a propriedade de domínio de dependência finito.*

**Demonstração:** Assumimos primeiro que  $u_0(\cdot)$  tem variação total limitada, então escolhemos uma subsequência  $(l_j)_{j \geq 1}$  tal que a convergência (5.7) seja verdadeira. Usando o Teorema 5.2, escolhemos uma subsequência de  $(l_j)$ , que por simplicidade chamamos de  $(l_j)$ , tal que para  $\theta \in \Phi/N$  a convergência (5.8) seja verdadeira. Usando agora o Teorema 5.1, escolhemos uma subsequência  $(u_{\theta,l'_j}) \subset (u_{\theta,l_j})$  tal que  $(u_{\theta,l'_j})$  converge para uma função  $u_\theta$ , em  $L_{loc}^1$ . Então pelo Lema 5.4, temos que  $u_\theta$  é uma solução fraca admissível de (5.1).

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $u_{\theta,l'_j}$  satisfaz a propriedade de domínio de dependência finito, de acordo com

o Comentário 26, assim  $u_\theta$  tem a mesma propriedade. Portanto, podemos usar o processo de diagonalização de Cantor para construirmos uma solução fraca admissível de (5.1), supondo que o dado inicial  $u_0(\cdot)$  tem variação localmente limitada em  $\mathbb{R}$ . Além disso,

$$TV_{[x_1, x_2]}(u_\theta(\cdot, t)) \leq TV_{[x_1 - (1+Kt), x_2 + (1+Kt)]}(u_0(\cdot)).$$

■

## *Referências Bibliográficas*

---

- [1] ASAKURA, F., **Decay of solution for the equations of isothermal gas dynamics**, Japan J. Industrial and App. Math., v. 10, p. 133-164, 1993.
- [2] ASAKURA, F., **Wave-front tracking for the equations of isentropic gas dynamics**, Quarterly of Appl. Math., v. 63, p. 20-33, 2005.
- [3] ASAKURA, F., **Wave-front tracking for the equations of non-isentropic gas dynamics**, Math. Analysis in Fluid and Gas Dynamics, v. 1495, p. 78-91, 2006.
- [4] AW, A., RASCLE, M., **Resurrection of “second order” models of traffic flow**, SIAM J. Appl. Math., v. 60, p. 916-938, 2000.
- [5] BIANCHINI, S., BRESSAN, A., **Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems**, Ann. of Math., v. 161, p. 223-342, 2005.
- [6] BRESSAN, A., **Global solutions to system of conservation laws by wave-front tracking**, J. Math. Anal. Appl., v. 170, p. 414-432, 1992.
- [7] BRESSAN, A., **Hyperbolic Systems of Conservation Laws**, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [8] CALVO, D., COLOMBO, R., M., FRID, H.,  **$L^1$  Stability of spatially periodic solutions in relativistic gas dynamics**, Comm. Math. Phys., 284, 509-535, 2008.
- [9] CHEN, J., **Conservation Laws for the relativistic p-system**, Comm. in Partial Diff. Equations, v. 20, 1605-1646, 1995.
- [10] CHEN, J., Li, Y., **Stability of Riemann solutions with large oscillation for the relativistic Euler equations**, J. of Diff. Equations, v. 202, 332-353, 2004.

- [11] COLOMBO, R., M., RISEBRO, A., **Continuous dependence in the large for some equations of gas dynamics**, Comm. in Partial Diff. Equations, v. 23, 1693-1718, 1998.
- [12] COLOMBO, R., M., **Wave front tracking in systems of conservation laws**, App. Math., Springer Netherlands, v. 6, p. 501-537, 2004.
- [13] DAFERMOS, C. M., **Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law**, J. Math. Anal. and Applic., v. 38, p. 33-41, 1972.
- [14] FERREIRA, R. E., KONDO, C. I., **Admissible weak solution of a conservation law by Glimm method and the Polygonal approximations of solutions**, Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications, v. 2, n. 1, p. 33-48, 2009.
- [15] FERREIRA, R. E., KONDO, C. I., **Glimm method and Wave-front tracking for the Aw-Rascle traffic flow model**, to appear in Far East Journal of Mathematical Sciences. FJMS, 2010.
- [16] FRID, H., PEREPELITSA, M., **Spatially periodic solutions in relativistic isentropic gas dynamics**, Comm. Math. Phys., v. 250, p. 335-370, 2004.
- [17] GLIMM, J., **Solutions in the large for nonlinear hyperbolic system of equations**, Comm. Pure Appl. Math., v. 18, p. 697-715, 1965.
- [18] GODVIK, M., HANCHE-OLSEN, H., **Existence of solutions for the Aw-Rascle traffic flow model with vacuum**, J. Hyperbolic Diff. Equations 5, v. 1, p. 45-63, 2008.
- [19] GODLEWSKI, E., RAVIART, P. A., **Hiperbolic Systems of Conservation Laws**, Number 3/4, Ellipses, Paris, 1990.
- [20] HOLDEN, H., RISEBRO, N. H., **Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws**, Springer-Verlang, New York, 2002.
- [21] HOPF, E., **On the right weak solution of the cauchy problem for a quasilinear equation of first order**, J. Math. Mech., v. 19, p. 483-487, 1969.
- [22] HÖRMANDER, L., **Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equation**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

- [23] LAX, P. D., **Hyperbolic systems of conservation laws II**, Comm. Pure Appl. Math., v. 10, p. 537-566, 1957.
- [24] LEFLOCH, P. G., YAMAZAKI, M., **Entropy solutions of the Euler equations for isothermal relativistic fluids**, Int. J. Dynamical System and Diff. Equations, v. 1, Number 1, p. 20-37, 2007.
- [25] LIU, T. P., **The deterministic version of the Glimm scheme**, Comm. Math. Phys, v. 57, p. 135-148, 1977.
- [26] LU, Y., **Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method**, Chapman & Hall/CRC, New York, 2003.
- [27] NISHIDA, T., **Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system**, Proc. Japan Acad., v. 44, p. 642-646, 1968.
- [28] NISHIDA, T., SMOLLER, J., **Solution in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws**, Comm. Pure Appl. Math., v. 26, p. 183-200, 1973.
- [29] OLEINIK, O. A., **Discontinuous solutions of non-linear differential equations**, Usp. Mat. Nauk, v. 12, p. 3-73, 1957.
- [30] RISEBRO, N. H., **A front-tracking alternative to the random choice method**, Proc. Amer. Math. Soc., v. 117, p. 1125-1129, 1993.
- [31] SERRE, D., **System of Conservation Laws.**, Cambridge University Press, Cambridge, v. 1, 1999.
- [32] SERRE, D., **System of Conservation Laws.**, Cambridge University Press, Cambridge, v. 2, 2000.
- [33] SMOLLER, J., **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**, Springer-Verlag, 2<sup>a</sup> edição, 1994.
- [34] SMOLLER, J., TEMPLE, B., **Global solution of the relativistic Euler equation**, Comm. Math. Phys., v. 156, p. 67-99, 1973.



- [35] TEMPLE, B., YOUNG, R., **The large time stability of sound wave**, Comm. Math. Phys, v. 179, p. 417-466, 1996.