

---

**Universidade Federal de São Carlos**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

Francielle Rodrigues de Castro Coelho

**Sobre o Gênis de  $G$ -espaços  
e Teoremas de Coincidências**

São Carlos - SP

2010

---

**Universidade Federal de São Carlos**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

**Sobre o Gênis de  $G$ -espaços  
e Teoremas de Coincidências**

Francielle Rodrigues de Castro Coelho

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

Tese apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática da  
UFSCar como parte dos requisitos  
para obtenção do Título de Doutor  
em Matemática.

São Carlos - SP

2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

C672gg

Coelho, Francielle Rodrigues de Castro.  
Sobre o gênero de  $G$ -espaços e teoremas de  
coincidências / Francielle Rodrigues de Castro Coelho. --  
São Carlos : UFSCar, 2010.  
81 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,  
2010.

1. Topologia. 2. Coincidência. 3. Gêneros de um  $G$ -espaço.  
4. Seqüências espectrais (Matemática). 5. Teoremas do tipo  
Borsuk-Ulam. I. Título.

CDD: 514 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**

*Edivaldo Lopes dos Santos*

---

**Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos**  
DM - UFSCar

*Pedro Luiz Queiroz Pergher*

---

**Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher**  
DM - UFSCar

*Carlos Biasi*

---

**Prof. Dr. Carlos Biasi**  
ICMC - USP

*Alice Kimie Miwa Libardi*

---

**Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi**  
IGCE - UNESP

*Ermínia de Lourdes Campello Fanti*

---

**Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti**  
IBILCE - UNESP

Dedico a Pablo, meu marido,  
e aos meus pais, Arnaldo e Rosaine.

“A mente que se abre a uma nova idéia jamais  
voltará ao seu tamanho original.”

*Albert Einstein*

---

## Agradecimentos

---

Finalizada uma etapa particularmente importante em minha vida, não poderia deixar de expressar o mais profundo agradecimento a todos aqueles que me apoiaram nesta longa caminhada e contribuíram para a realização desta tese de doutorado. Nada na vida conquistamos sozinhos, sempre precisamos de outras pessoas para alcançar os nossos objetivos.

À Deus por sempre me iluminar e me guiar...

Aos meus pais, Arnaldo e Rosaine, os mais profundos agradecimentos por suas sábias lições de amor, compreensão, alegria, crença, introduzindo em mim a confiança necessária para a realização dos meus sonhos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos, agradeço pela confiança em mim depositada, pela oportunidade oferecida, pela orientação sempre segura, pelo bom convívio nestes anos de trabalho. Com ele tive a oportunidade de enriquecer meu conhecimento, com suas argumentações científicas e sugestões.

Ao meu marido Pablo, por seu amor, sua sabedoria, seu bom senso, sua dedicação, por sempre estar disposto a me ajudar em qualquer situação e principalmente pelo seu apoio que me conforta e me deixa mais forte para superar meus desafios.

Ao Prof. Dr. Alexey Volovikov, pela disposição em discutir assuntos que foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Tomas Edson Barros, por inicialmente ter aceitado me orientar, e por apresentar sugestões que contribuíram para a obtenção de alguns resultados.

À Profa. Dra. Denise de Mattos do ICMC (Usp-São Carlos), pela disposição em apresentar sugestões, algumas destas foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFSCar e do Departamento de Matemática da Unesp (São José do Rio Preto) que contribuíram diretamente para a minha formação. Em especial, à Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, da Unesp de São José do Rio Preto, a quem devo muita gratidão pela disponibilidade em me orientar na iniciação científica e no mestrado, estimulando-me a seguir em frente.

À secretária Irma Rodrigues de Souza, do Programa de Pós-Graduação em Matemática, pela alegre convivência e por ser uma pessoa sempre prestativa e competente.

Aos colegas de Pós-Graduação, pelo convívio, solidariedade e amizade compartilhadas todo esse tempo. Em especial, ao amigo Ricardo, pelas nossas valiosas conversas e por estar sempre disposto a ajudar.

À Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) que me concedeu uma bolsa durante a realização do doutorado, fato este que muito contribuiu para viabilização desta tese.

A todos aqueles que, embora não nomeados, me brindaram com seus inestimáveis apoios, o meu reconhecido e carinhoso muito obrigada!

---

## Resumo

---

Sejam  $G$  um grupo finito agindo livremente sobre um espaço paracompacto Hausdorff  $X$  e  $Y$  um espaço metrizável de dimensão  $k$  (ou  $Y$  um cone CW-complexo de dimensão  $k$ ). Neste trabalho, usando o gênero de  $X$ ;  $gen(X, G)$ , nós provamos teoremas de coincidências para aplicações contínuas  $f : X \rightarrow Y$ . Tais teoremas generalizam o resultado principal provado por Aarts, Fokkink e Vermeer em [2]. Mais ainda, usando o índice definido por Volovikov em [39], nós provamos uma versão do teorema de Borsuk-Ulam para grupos compactos de Lie, o qual generaliza o resultado principal provado por Biasi e Mattos em [7, 12].

---

## Abstract

---

Let  $G$  be a finite group acting freely in a Hausdorff paracompact topological space  $X$  and let  $Y$  be a  $k$ -dimensional metrizable space (or  $k$ -dimensional CW-complex). In this work, by using the genus of  $X$ ;  $gen(X, G)$ , we prove coincidence theorems for maps  $f : X \rightarrow Y$ . Such theorems generalize the main theorem proved by Aarts, Fokkink and Vermeer in [2]. Moreover, by using the Volovikov index defined in [39], we prove a Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups, which generalizes the main result proved by Biasi and Mattos in [7, 12].

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1 Espaços Classificantes . . . . .	17
1.2 O Espaço de Borel . . . . .	19
1.3 Sistemas de Coeficientes Locais . . . . .	20
1.4 Sequência Espectral . . . . .	24
1.5 O homomorfismo de Bockstein e a Cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e $BS_1$ . . . . .	27
1.6 O índice $i(\cdot)$ de $G$ -espaços definido por Volovikov . . . . .	28
<b>2 O gênero de <math>G</math>-espaços</b>	<b>34</b>
2.1 Noções do gênero de $\mathbb{Z}_p$ -espaços . . . . .	34
2.2 O gênero e aplicações $\mathbb{Z}_p$ -equivariantes . . . . .	37
2.3 O gênero de $G$ -espaços, com $G$ grupo finito . . . . .	38
2.4 Resultados sobre gênero de $G$ -espaços . . . . .	40
<b>3 Teoremas de coincidências para aplicações de <math>G</math>-espaços livres</b>	<b>42</b>
3.1 Sobre teoremas de Ljusternik-Schnirelmann e Borsuk-Ulam . . . . .	43
3.2 Generalizações do Teorema 3.1.2 . . . . .	44
3.3 Teoremas de coincidências para aplicações de $\mathbb{Z}_p$ -espaços livres . . . . .	47

3.3.1	Demonstração do Teorema 3.3.1 . . . . .	49
3.4	Teoremas de $(H, G)$ -coincidências para aplicações de $G$ -espaços livres . . .	59
3.4.1	Demonstração do Teorema 3.4.2 . . . . .	62
<b>4</b>	<b>O Teorema de Borsuk-Ulam para ações de um grupo compacto de Lie</b>	<b>70</b>
4.1	Introdução . . . . .	70
4.2	Demonstração do Teorema 4.1.2 . . . . .	72
4.3	Algumas considerações sobre o Teorema 4.1.2: resultados relacionados . . .	76
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>

---

## Introdução

---

O Teorema Clássico de Borsuk-Ulam [8] nos diz que toda aplicação contínua  $f$  de  $S^n$  no espaço euclidiano  $k$ -dimensional  $\mathbb{R}^k$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência, sempre que  $n \geq k$ . Este resultado pode ser generalizado em muitos sentidos:  $S^n$  e  $\mathbb{R}^k$  podem ser trocados por espaços mais gerais  $X$  e  $Y$ , e a ação de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $S^n$  pode ser trocada por ações de outros grupos.

Esse teorema é uma das mais úteis ferramentas da topologia algébrica que tem sido extensamente usado em diferentes áreas. Uma das razões é que existem inúmeras versões e muitas demonstrações conhecidas de cada versão. As técnicas das demonstrações são completamente variadas: os métodos geométricos e elementares, as técnicas algébricas, combinatoriais, a topologia algébrica e muitas outras ferramentas têm sido usadas para prová-lo. O resultado foi primeiramente conjecturado por S. Ulam e provado por Karol Borsuk, em 1933. Desde então, têm sido publicadas diferentes demonstrações, generalizações e aplicações deste famoso teorema (veja, por exemplo, [31]).

Uma destas generalizações pode ser encontrada em [2], onde Aarts, Fokkink e Vermeer provaram o resultado que diz que se  $i : X \rightarrow X$  gera uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre sobre o espaço normal  $X$  com  $col(X, \mathbb{Z}_2) = n+2$ ,  $k$  é um número natural e  $Y$  é um cone CW-complexo  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência, sempre que  $n \geq 2k$ , e este resultado é o melhor possível.

Neste contexto, um dos temas propostos para o desenvolvimento deste projeto de tese foi a obtenção de uma nova e interessante versão do teorema provado por Aarts, Fokkink e Vermeer. Primeiro, nós trocamos a classe dos espaços normais pela dos espaços para-

compactos Hausdorff, e ao invés de considerarmos ações livres de  $\mathbb{Z}_2$ , consideramos ações livres de  $G = \mathbb{Z}_p$ , onde  $p$  é um primo qualquer. Além disso, estudamos a possibilidade de substituir o número de cores do  $\mathbb{Z}_2$ -espaço livre  $X$ ,  $col(X, \mathbb{Z}_2)$ , pelo gênero do  $G$ -espaço  $X$ ,  $gen(X, G)$  e com isso, sob determinadas condições, encontrar  $\mathbb{Z}_p$ -coincidências em aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , com  $Y$  um cone CW-complexo.

Nesta direção, uma pergunta natural que nos surge é se não podemos generalizar esse resultado para o caso de  $(H, G)$ -coincidências, com  $G$  grupo finito e  $H$  subgrupo de  $G$ , ou seja,

(1°) Se tomarmos  $X$  um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff,  $H \cong \mathbb{Z}_p$  subgrupo normal de  $G$  com  $gen(X, H) \geq n+1$ ,  $Y$  um cone CW-complexo  $k$ -dimensional e  $n \geq |G|k$ , seria possível provar que toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência?

(2°) Se tomarmos  $X$  um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff com  $gen(X, G) \geq n+1$ ,  $Y$  um cone CW-complexo  $k$ -dimensional e  $n \geq |G|k$ , seria possível provar que, para toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existem um subgrupo não-trivial  $H \subset G$  e um ponto de  $(H, G)$ -coincidência para  $f$ ?

Estes três problemas fazem parte do conteúdo desta tese.

Um outro tipo de problema que vamos abordar é sobre a existência de aplicações  $G$ -equivariantes entre espaços com determinadas propriedades e  $G$  grupo compacto de Lie, ou seja, teoremas do tipo Borsuk-Ulam para grupos compactos de Lie.

Resultados sobre a não-existência de aplicações  $G$ -equivariante tem importantes consequências. Por exemplo, considerando o Teorema Clássico de Borsuk-Ulam, uma outra formulação para ele é a de que não existe aplicação  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante de  $S^n$  em  $S^{n-1}$ , onde  $\mathbb{Z}_2$  atua sobre a esfera pela involução antipodal.

Para provar que um espaço não pode ser mergulhado em outro é suficiente mostrar a não existência de uma aplicação equivariante entre seus produtos deletados considerados com a ação natural de uma involução livre, ou podemos considerar, de modo geral, outros espaços de configurações relacionados com os espaços em questão e dotados de ações de grupos apropriados. Um exemplo de tal fato é o conhecido Teorema de van Kampen-Flores, provado em [41] por Volovikov, o qual diz que o  $k$ -esqueleto de um  $(2k+2)$ -simplexo não pode ser mergulhado em  $\mathbb{R}^{2k}$ .

Um resultado nesta linha foi o provado por Biasi e Mattos em [7, 12]. Para enunciar

este resultado, consideremos  $R$  um PID,  $G$  um grupo compacto de Lie e denotemos por  $\beta_i(X; R)$  o  $i$ -ésimo número de Betti de  $X$ . Biasi e Mattos provaram que se  $X$  e  $Y$  são  $G$ -espaços livres, paracompactos Hausdorff e conexos por caminhos e se para algum natural  $m \geq 1$  e  $0 < q < m$ ,  $H^q(X; R) = 0$ ,  $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$ , onde  $Y/G$  é o espaço de órbitas de  $Y$  por  $G$ , e  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ , então não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

Um outro tema proposto para este projeto de tese foi o de generalizar o resultado provado por Biasi e Mattos em [7, 12] no seguinte sentido: substituímos a hipótese  $H^q(X; R) = 0$ , para  $0 < q < m$  pela hipótese mais geral  $i(X) \geq m + 1$ , onde  $i(\cdot)$  é o índice numérico definido por Volovikov em [40].

Este problema e os outros três citados anteriormente constituem-se no conteúdo desta tese.

Inicialmente, no Capítulo 1, apresentamos alguns requisitos de fundamental importância para os capítulos seguintes. Estudamos espaços classificantes e enunciamos alguns resultados de maior interesse para nós, introduzimos o espaço de Borel e os sistemas de coeficientes locais. Ainda neste capítulo recordamos os resultados sobre sequência espectral e recordamos os teoremas de Leray-Serre para fibrações. Em seguida, definimos os homomorfismos de Bockstein e calculamos a cohomologia dos espaços classificantes  $B\mathbb{Z}_p$  e  $BS^1$ . Por último, introduzimos o índice numérico  $i(\cdot)$  definido por Volovikov em [40] que está relacionado com o índice de valor ideal definido por Fadell e Husseini em [16].

No Capítulo 2, estudamos o gênero de  $G$ -espaços, onde  $G$  é um grupo finito. A noção de gênero de um conjunto foi inicialmente introduzida por Krasnosel'skiĭ em [30] para grupos cíclicos. Para  $G = \mathbb{Z}_2$ , o invariante numérico  $B$ -índice introduzido por Yang em [45] é uma unidade a menos que o gênero. O caso geral, quando a ação livre é de um grupo topológico arbitrário, foi considerado por Švarc em [37, 38] como um caso particular da noção do gênero de um fibrado introduzido por ele. Mais especificamente, vimos duas noções de gênero introduzidas por Steinlein, em [24, 25], ambas no sentido de Švarc. Em seguida, relacionamos o gênero de  $\mathbb{Z}_p$ -espaços com aplicações  $\mathbb{Z}_p$ -equivariantes. Nas duas últimas seções do capítulo, definimos, de um modo geral, o gênero de um  $G$ -espaço e nos interamos de alguns resultados importantes acerca deste conceito, que serão muito relevantes para o desenvolvimento dos próximos capítulos, principalmente do capítulo 3.

No Capítulo 3, primeiro generalizamos um resultado provado por Barros e Biasi [6]

que diz que se  $X$  é paracompacto Hausdorff, simplesmente conexo,  $f_2 : X \rightarrow X$  é uma involução sem pontos fixos, ambos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1 (ver p.42), e  $Y$  é um espaço métrico separável com dimensão topológica  $\dim Y \leq \frac{m-1}{2}$ , então para toda função contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(f_2(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência. Mais especificamente, provamos os resultados

**Teorema 3.2.2.** Sejam  $X$  paracompacto Hausdorff e simplesmente conexo, e  $f_3 : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_3$ -ação livre sobre  $X$ , ambos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Se  $Y$  é um espaço métrico separável com dimensão topológica  $\dim Y \leq \frac{m-1}{3}$ , então para toda função contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(f_3(x)) = f(f_3^2(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_3$ -coincidência.

**Teorema 3.2.3.** Sejam  $X$  paracompacto Hausdorff, simplesmente conexo e  $f_p : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $X$  com  $p > 3$ , ambos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Se  $Y$  é um espaço métrico separável com dimensão topológica  $\dim Y \leq \frac{2(m-2)}{p(p-1)}$ , então para toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(f_p(x)) = \dots = f(f_p^{p-1}(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Em seguida, demonstramos um dos principais resultados deste trabalho, o qual generaliza o resultado de Aarts, Fokkink e Vermeer, provado em [2]. Especificamente, provamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.1.** Sejam  $p$  um número primo,  $\alpha : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre o espaço  $X$  paracompacto Hausdorff com  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) \geq n+1$  e  $k$  um número natural.

(i) Se  $n > pk$  e  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\alpha^i(x))$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .

(ii) Se  $n = pk$  e  $Y$  for um cone  $CW$ -complexo de dimensão  $k$ , então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\alpha^i(x))$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .

(iii) Se  $n < pk$  e  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) = n+1$ , então existem  $Y$  metrizável  $k$ -dimensional e aplicação contínua  $\varphi : X \rightarrow Y$  tal que  $\varphi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Para finalizar o Capítulo 3, trabalhamos com problemas buscando encontrar  $(H, G)$ -coincidências em aplicações contínuas, com  $H$  subgrupo de  $G$ ,  $G$  grupo finito. Neste sentido, obtemos os seguintes teoremas:

**Teorema 3.4.1.** Seja  $G$  um grupo finito que atua livremente sobre um espaço  $X$  paracompacto Hausdorff. Suponha que  $H \subset G$  seja um subgrupo normal cíclico de ordem  $p$ , com  $p$  primo, e  $\text{gen}(X, H) \geq n + 1$ .

(i) Se  $n > |G|k$  e  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

(ii) Se  $n = |G|k$  e  $Y$  for um cone (ou suspensão) CW-complexo  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

**Teorema 3.4.2.** Sejam  $G$  um grupo finito,  $X$  um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff, com  $\text{gen}(X, G) \geq n + 1$  e  $k$  um número natural.

(i) Se  $n > |G|k$  e  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência para algum subgrupo não-trivial  $H \subset G$ .

(ii) Se  $n = |G|k$  e  $Y$  for um cone (ou suspensão) CW-complexo  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

(iii) Se  $n < |G|k$  e  $\text{gen}(X, G) = n + 1$ , então existem  $Y$  cone CW-complexo  $k$ -dimensional e aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f$  não tem ponto de  $G$ -coincidência. Em particular, se  $G = H = \mathbb{Z}_p$ ,  $f$  não tem ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

No Capítulo 4, nós consideramos a questão de estender o resultado provado por Biasi e Mattos em [7, 12] já enunciado anteriormente. Nós provamos o seguinte:

**Teorema 4.1.2.** Sejam  $G$  um grupo compacto de Lie e  $X, Y$   $G$ -espaços livres, conexos por caminhos, paracompactos e Hausdorff. Suponhamos que para algum natural  $m \geq 1$ ,  $i(X) \geq m + 1$  e que  $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$ , onde  $Y/G$  é o espaço de órbitas de  $Y$  por  $G$ . Então, se  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ , não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

Como consequência, temos o seguinte corolário:

**Corolário 4.1.1.** Consideremos  $G$  um grupo compacto de Lie de dimensão  $p$ . Sejam  $X$  um  $G$ -espaço livre, conexo por caminhos, paracompacto e Hausdorff, tal que  $i(X) \geq m + 1$  e  $Y$  uma variedade topológica  $(m + p)$ -dimensional conexa por caminhos com uma ação livre de  $G$ . Se  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ , então não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

Finalizando o capítulo, nós provamos o seguinte resultado, o qual é similar ao Teorema 4.1.2 e a um resultado provado por Clapp e Puppe em [10] (Teorema 4.3.1).

**Teorema 4.3.2.** Sejam  $R$  um PID,  $G$  grupo compacto de Lie,  $X$  um  $G$ -espaço livre

Hausdorff, paracompacto e  $Y$  um  $G$ -espaço Hausdorff, compacto ou paracompacto de dimensão finita que admite uma ação livre de  $G$ . Suponhamos que  $i(X) \geq m + 1$  e  $H^i(Y; R) = 0$ , para  $i \geq m$ . Então, não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

Neste capítulo apresentamos alguns requisitos de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Em todo este capítulo,  $H_*$  e  $H^*$  denotarão os grupos de homologia e cohomologia singular, com exceção da Seção 1.6, onde  $H^*$  denotará os grupos de cohomologia de Čech. Por *dim*, nós entenderemos a dimensão topológica usual (ver [15, 18]) e o símbolo  $\cong$  denotará o isomorfismo apropriado entre os objetos algébricos. Se  $G$  é um grupo topológico atuando em espaços topológicos  $X$  e  $Y$ , uma  $G$ -*aplicação* ou uma *aplicação  $G$ -equivariante* é uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  que preserva a  $G$ -ação, ou seja,  $f(gx) = gf(x)$ , para qualquer  $g \in G$  e para qualquer  $x \in X$ . Observemos que se  $H$  é um subgrupo de  $G$  e se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação  $G$ -equivariante, então  $f$  é  $H$ -equivariante. Uma aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$  induz uma aplicação entre os espaços de órbitas  $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$ .

## 1.1 Espaços Classificantes

Uma construção direta do espaço classificante  $BG$ , para qualquer grupo topológico  $G$ , foi dada primeiramente por Milnor [33]. Dado qualquer grupo topológico  $G$ , existe um espaço  $BG$  e um  $G$ -fibrado principal universal  $EG \rightarrow BG$  tal que para qualquer espaço paracompacto Hausdorff  $B$ , a construção pullback induz uma bijeção entre o conjunto  $[B, BG]$  das classes de homotopia de aplicações de  $B$  em  $BG$  e a classe dos isomorfismos

de  $G$ -fibrados principais sobre  $B$ . Denotaremos o  $G$ -fibrado principal universal  $EG \rightarrow BG$  por  $\omega_G$ .

Em ([29, Cap. 4, Teoremas 12.2, 12.4]), foram provados os seguintes teoremas:

**Teorema 1.1.1.** Para qualquer  $G$ -fibrado principal  $\eta = (G, G, E, p, B)$  sobre um espaço paracompacto Hausdorff  $B$ , existe uma aplicação  $f : B \rightarrow BG$  tal que  $\eta$  e o fibrado pullback  $f^*(\omega_G)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $B$ . A aplicação  $f : B \rightarrow BG$  é chamada uma aplicação classificante para o  $G$ -fibrado principal  $p : E \rightarrow B$ .

**Teorema 1.1.2.** Sejam  $f_0, f_1 : B \rightarrow BG$  duas funções contínuas tais que  $f_0^*(\omega_G)$  e  $f_1^*(\omega_G)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $B$ . Então  $f_0$  é homotópica a  $f_1$ .

No caso em que  $G$  é um grupo compacto de Lie, é válido o seguinte teorema fundamental, cuja prova pode ser encontrada em ([9, Cap.II, Teorema 5.8]).

**Teorema 1.1.3.** Suponhamos que  $X$  seja um espaço paracompacto Hausdorff e que  $G$  seja um grupo compacto de Lie atuando livremente sobre  $X$ . Então  $X \rightarrow X/G$  é um  $G$ -fibrado principal.

**Observação 1.1.1.** Sejam  $X, Y$  paracompactos Hausdorff com ação livre de um grupo compacto de Lie  $G$ . Denotemos por  $\eta_X$  e  $\eta_Y$  os  $G$ -fibrados principais  $X \rightarrow X/G$  e  $Y \rightarrow Y/G$ , respectivamente e seja  $h : X/G \rightarrow BG$  uma aplicação classificante para  $\eta_X$ , então  $\eta_X$  e  $h^*(\omega_G)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $X/G$ . Suponhamos que  $f : X \rightarrow Y$  seja uma aplicação  $G$ -equivariante. Se  $g : Y/G \rightarrow BG$  é uma aplicação classificante para  $\eta_Y$ , então  $g \circ \bar{f} : X/G \rightarrow BG$  também classifica o  $G$ -fibrado principal  $\eta_X$  e  $g \circ \bar{f}$  é homotópica a  $h$ , onde  $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$  é a induzida por  $f$  entre os espaços de órbitas. De fato, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G & \xrightarrow{g} & BG \end{array}$$

Segue do Teorema 1.1.1 que  $\eta_Y$  e o fibrado pullback  $g^*(\omega_G)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $Y/G$ . Desde que  $f : X \rightarrow Y$  é  $G$ -equivariante, temos de [29, Cap.4, Teorema 4.2](vide [13, Cap.1, Proposição 8.6]) que  $\eta_X$  e o fibrado pullback  $\bar{f}^*(\eta_Y)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $X/G$ . Por outro lado, desde que  $\eta_Y$  é isomorfo a  $g^*(\omega_G)$ , segue de [29, Cap.4, §10], que  $\bar{f}^*(\omega_Y)$  é isomorfo a  $\bar{f}^*(g^*(\omega_G))$ . Além disso, de ([29,

Cap.2, Proposição 5.7]), temos que  $\bar{f}^*(g^*(\omega_G))$  e  $(g \circ \bar{f})^*(\omega_G)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $X/G$  e portanto  $\eta_X$  e  $(g \circ \bar{f})^*(\omega_G)$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos sobre  $X/G$ , o que implica do Teorema 1.1.1 que  $g \circ \bar{f}$  é uma aplicação classificante para o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$ . Segue do Teorema 1.1.2 que  $g \circ \bar{f}$  é homotópica a  $h$ .

## 1.2 O Espaço de Borel

Suponhamos que  $G$  seja um grupo compacto de Lie atuando livremente em um espaço topológico  $X$  Hausdorff, paracompacto. Então, podemos tomar

$$h : X/G \rightarrow BG$$

uma aplicação classificante para o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$ , onde  $EG \rightarrow BG$  é o  $G$ -fibrado principal universal para  $G$ .

Denotemos por  $X_G$  o espaço de Borel  $EG \times_G X$  de  $X$ , obtido da seguinte forma:  $G$  age livremente sobre  $EG \times X$  pela ação  $g(e, x) = (ge, gx)$  e  $EG \times_G X = (EG \times X)/G$ . A aplicação entre os espaços de órbitas

$$p : X_G \rightarrow (EG)/G = BG, \tag{1.1}$$

induzida pela projeção na primeira coordenada  $EG \times X \rightarrow EG$  é uma fibração com fibra  $X$  e espaço base  $BG$  sendo o espaço classificante de  $G$ ;  $p$  é chamada uma *fibração de Borel* associada ao  $G$ -espaço  $X$ .

**Observação 1.2.1.** Se  $G$  age livremente sobre  $X$ , então a aplicação

$$s : X_G \rightarrow X/G,$$

induzida pela projeção na segunda coordenada  $EG \times X \rightarrow X$ , é uma fibração com fibra contrátil  $EG$  e portanto uma equivalência de homotopia (para detalhes, ver [13]).

**Observação 1.2.2.** Sejam  $p : X_G = EG \times_G X \rightarrow BG$  a fibração de Borel associada ao  $G$ -espaço livre  $X$ , onde  $G$  é um grupo compacto de Lie e denotemos por  $r : X/G \rightarrow X_G$  a inversa homotópica de  $s : X_G \rightarrow X/G$ . Então,  $p \circ r : X/G \rightarrow BG$  classifica o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$ . De fato, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times X & \longrightarrow & EG \\ \eta \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \omega_G \\ X/G & \xrightarrow{r} & X_G & \xrightarrow{p} & BG \end{array}$$

Denotemos por  $\eta$  o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$  e por  $\alpha$  o  $G$ -fibrado principal  $EG \times X \rightarrow X_G$ . Desde que  $p$  é uma aplicação  $G$ -equivariante, temos que o fibrado pullback  $p^*(\omega_G)$  e  $\alpha$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos. Assim, é suficiente provar que o fibrado pullback  $r^*(\alpha)$  e  $\eta$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos. Para isto, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times X & \longrightarrow & X \\ \eta \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \eta \\ X/G & \xrightarrow{r} & X_G & \xrightarrow{s} & X/G \end{array}$$

e observemos que  $s$  é  $G$ -equivariante, assim o fibrado pullback  $s^*(\eta)$  e  $\alpha$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos, deste modo  $r^*(s^*(\eta))$  é isomorfo a  $r^*(\alpha)$ . Por outro lado, desde que  $s \circ r$  é homotópica à identidade, temos que  $(s \circ r)^*(\eta) = r^*(s^*(\eta))$  é isomorfo ao fibrado pullback  $Id^*(\eta) = \eta$ . Assim,  $r^*(\alpha)$  e  $\eta$  são  $G$ -fibrados principais isomorfos. Portanto,  $\eta = r^*(\alpha) = r^*(p^*(\omega_G)) = (p \circ r)^*(\omega_G)$ , o que implica que  $p \circ r$  classifica o  $G$ -fibrado principal  $\eta$ .

### 1.3 Sistemas de Coeficientes Locais

Nesta seção, nosso objetivo é definir os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes locais em um fibrado de grupos. Dado um espaço topológico  $B$ , seja

$$\Pi(B, a, b) = \{[\lambda] \mid \lambda : I \rightarrow B, \lambda(0) = a, \lambda(1) = b\}$$

o conjunto das classes de homotopia de caminhos em  $B$  unindo os pontos  $a$  e  $b$ .

**Definição 1.3.1.** Um fibrado de grupos sobre  $B$ , o qual será denotado por  $\mathcal{G}$ , é uma coleção de grupos  $\{G_b \mid b \in B\}$ , junto com uma coleção de homomorfismos  $h[\lambda] : G_{b_1} \rightarrow G_{b_0}$ , para cada elemento  $[\lambda] \in \Pi(B, b_0, b_1)$ , satisfazendo

- (1) se  $[b]$  é a identidade (o caminho constante) em  $\Pi(B, b, b)$  então  $h[b] = id : G_b \rightarrow G_b$ ;
- (2) se  $[\lambda] \in \Pi(B, b_0, b_2)$  e  $[\mu] \in \Pi(B, b_1, b_2)$  e se  $\lambda * \mu$  é o caminho justaposto de  $\lambda$  por  $\mu$ , então  $h[\lambda * \mu] = h[\lambda] \circ h[\mu] : G_{b_2} \rightarrow G_{b_0}$ .

**Observação 1.3.1.** As condições (1) e (2) da Definição 1.3.1 implicam que  $h[\lambda]$  é um isomorfismo. De fato, denotando por  $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1 - t)$  temos que  $[\lambda * \lambda^{-1}] = [b_0] \in \Pi(B, b_0, b_0)$  e assim,  $h[\lambda * \lambda^{-1}] = h[\lambda] \circ h[\lambda^{-1}] = id$ .

**Exemplo 1.3.1.** Dado um grupo  $G$ , existe o fibrado trivial de grupos sobre  $B$ , também denotado por  $G$ , onde  $G_b = G$  para todo  $b \in B$  e  $h[\lambda] = id : G \rightarrow G$  para todo  $[\lambda] \in \Pi(B, b_0, b_1)$ .

**Exemplo 1.3.2.** Suponhamos que  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$  seja uma fibração, com  $B$  conexo por caminhos. Para cada natural  $n \geq 0$ , podemos construir um fibrado de  $R$ -módulos,  $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(F; R)$  como segue: dado um elemento  $b \in B$  seja  $G_b = H_n(F_b; R)$ , onde  $F_b = p^{-1}(b)$ . Dado um caminho  $\lambda : I \rightarrow B$  com  $\lambda(0) = b_0$  e  $\lambda(1) = b_1$ , aplicando a propriedade do levantamento de homotopia para fibrações, um levantamento de  $\lambda$  dá origem a uma aplicação  $\tilde{\lambda} : F_{b_0} \rightarrow F_{b_1}$  tal que  $\tilde{\lambda}$  é uma equivalência de homotopia e  $\tilde{\lambda}$  é única, a menos de homotopia ([43], p.185). Para cada  $[\lambda] \in \Pi(B, b_0, b_1)$ , seja

$$h[\lambda] = (\tilde{\lambda}^{-1})_* : H_n(F_{b_1}; R) \rightarrow H_n(F_{b_0}; R).$$

Segue de ([43], Cap.4, §8) que  $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(F; R)$ , juntamente com a coleção de homomorfismos  $h[\lambda]$  definidos acima, é um fibrado de  $R$ -módulos.

**Observação 1.3.2.** Usando os mesmos argumentos do Exemplo 1.3.2, temos que  $\mathcal{G} = \mathcal{H}^n(F; R)$ , juntamente com a seguinte coleção de homomorfismos  $h[\lambda]$

$$h[\lambda] = \tilde{\lambda}^* : H^n(F_{b_1}; R) \rightarrow H^n(F_{b_0}; R)$$

é um fibrado de  $R$ -módulos (ver [34, Cap.3, §2, Teorema 2.8]).

**Definição 1.3.2.** Um *morfismo entre fibrados de grupos*,  $\Theta : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  é uma coleção de homomorfismos,  $\Theta_b : (G_1)_b \rightarrow (G_2)_b$ , para cada  $b \in B$ , satisfazendo a propriedade que o seguinte diagrama comuta, para todo  $[\lambda]$  em  $\Pi(B, b_0, b_1)$ .

$$\begin{array}{ccc} (G_1)_{b_1} & \xrightarrow{h_1[\lambda]} & (G_1)_{b_0} \\ \Theta_{b_1} \downarrow & & \downarrow \Theta_{b_0} \\ (G_2)_{b_1} & \xrightarrow{h_2[\lambda]} & (G_2)_{b_0} \end{array}$$

**Exemplo 1.3.3.** Sejam  $E \xrightarrow{p} B$  e  $E' \xrightarrow{p'} B$ , fibrações com mesmo espaço base  $B$ , conexo por caminhos. Suponhamos que exista uma aplicação entre fibrações,

$$\begin{array}{ccc} F_b & \xrightarrow{\tilde{f}|_{F_b}} & F'_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

a qual preserva fibra, ou seja,  $\tilde{f}(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(b)$ , para cada  $b \in B$ . Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_{b_1}; R) & \xrightarrow{h[\lambda]} & H_n(F_{b_0}; R) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_* \\ H_n(F'_{b_1}; R) & \xrightarrow{h'[\lambda]} & H_n(F'_{b_0}; R) \end{array}$$

é comutativo, onde  $h[\lambda]$  e  $h'[\lambda]$  são os homomorfismos definidos no Exemplo 1.3.2. Deste modo,  $\tilde{f}_*$  induz um morfismo de fibrados  $\mathcal{H}_n(F; R) \rightarrow \mathcal{H}_n(F'; R)$ .

**Definição 1.3.3.** Um morfismo de fibrados é um *isomorfismo* se cada  $\Theta_b$  for um isomorfismo. Fixemos um fibrado de grupos abelianos,  $\mathcal{G}$ , sobre um espaço  $B$ , então  $\mathcal{G}$  é chamado um *Sistema de Coeficientes Locais sobre  $B$* . Um Sistema de Coeficientes Locais  $\mathcal{G}$  é chamado *trivial* se existe um fibrado trivial de grupos  $G$  e um isomorfismo  $\Theta : \mathcal{G} \rightarrow G$ , para algum grupo  $G$ .

**Exemplo 1.3.4.** Seja  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$  uma fibração com fibra  $F$  e base  $B$  conexos por caminhos. Então, o sistema de coeficientes locais sobre  $B$ ,  $\mathcal{H}_0(F; R)$  é trivial. Fixemos um ponto  $b \in B$  e mostremos que existe um isomorfismo  $\Theta : \mathcal{H}_0(F) \rightarrow \mathcal{H}_0(F_b)$ , com  $H_0(F_b) = H_0(F)$  o fibrado trivial de grupos sobre  $B$ . Sejam  $b_0, b_1 \in B$  e  $[\lambda] \in \Pi(B, b_0, b_1)$ . Como  $B$  é conexo por caminhos, existem caminhos  $\alpha, \beta : I \rightarrow B$  tais que  $\alpha(0) = b$ ,  $\alpha(1) = b_1$ ,  $\beta(0) = b$ ,  $\beta(1) = b_0$ . Consideremos os homomorfismos  $h[\alpha] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_b)$ ,  $h[\beta] : H_0(F_{b_0}) \rightarrow H_0(F_b)$ ,  $h[\lambda] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_{b_0})$ , definidos no Exemplo 1.3.2, os quais são isomorfismos, pela Observação 1.3.1. Como  $F$  é conexo por caminhos, temos que o homomorfismo

$$h[\beta] \circ h[\lambda] \circ h[\alpha]^{-1} = h[\beta * \lambda * \alpha^{-1}] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_b)$$

coincide com o homomorfismo identidade  $Id : H_0(F_b) \rightarrow H_0(F_b)$ . Assim, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_0(F_{b_1}) & \xrightarrow{h[\lambda]} & H_0(F_{b_0}) \\ \Theta_{b_1} = h[\alpha] \downarrow & & \downarrow \Theta_{b_0} = h[\beta] \\ H_0(F_b) & \xrightarrow{Id} & H_0(F_b) \end{array}$$

para todo  $[\lambda] \in \Pi(B, b_0, b_1)$  e o sistema de coeficientes locais  $\mathcal{H}_0(F; R)$  sobre  $B$  é trivial.

**Observação 1.3.3.** Usando os mesmos argumentos do Exemplo 1.3.4, prova-se que se  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$  é uma fibração com fibra  $F$  e base  $B$  conexos por caminhos, então o sistema de coeficientes locais sobre  $B$ ,  $\mathcal{H}^0(F; R)$ , é trivial.

Denotemos por  $C_*(B)$  o grupo das cadeias singulares sobre  $B$ . Definimos

$C_p(B; \mathcal{G}) = \{ \text{funções } c : C_p(B) \rightarrow \bigcup_{b \in B} G_b \mid c(\alpha : \Delta^p \rightarrow B) \in G_{\alpha(e_0)}, c(\alpha) \neq 0, \text{ somente para um número finito de } p\text{-simplexos singulares } \alpha : \Delta^p \rightarrow B \} = \{ p\text{-cadeias singulares com coeficientes no fibrado de grupos } \mathcal{G} \}$ , onde  $e_0 \in \Delta^p$ . Uma  $p$ -cadeia é chamada *elementar* se  $c(\alpha) \neq 0$  para no máximo um  $p$ -simplexo singular  $\alpha : \Delta^p \rightarrow B$ . Uma  $p$ -cadeia *típica* com coeficientes em  $\mathcal{G}$  pode ser escrita como uma soma formal de  $p$ -cadeias elementares

$$c = \sum g_i \alpha_i, \text{ onde } g_i \in G_{\alpha_i(e_0)}.$$

Para definir o bordo de uma  $p$ -cadeia elementar  $c$ , observemos que se  $\alpha : \Delta^p \rightarrow B$ ,

$$(\partial_i \alpha)(e_0) = \begin{cases} \alpha(e_0), & \text{se } i \neq 0; \\ \alpha(e_1), & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

onde  $\partial : C_p(B) \rightarrow C_{p-1}(B)$ . Consideremos o caminho  $\lambda_\alpha : I \rightarrow B$ , definido por

$$\lambda_\alpha(t) = \alpha(te_0 + (1-t)e_1),$$

unindo  $\alpha(e_1)$  a  $\alpha(e_0)$ . Segue que a classe de homotopia  $[\lambda_\alpha] \in \Pi(B, \alpha(e_1), \alpha(e_0))$  induz um isomorfismo  $h[\lambda_\alpha] : G_{\alpha(e_0)} \rightarrow G_{\alpha(e_1)}$ . O operador bordo  $\partial : C_p(B; \mathcal{G}) \rightarrow C_{p-1}(B; \mathcal{G})$ , definido pela fórmula

$$\partial(c) = \partial \left( \sum_i g_i \alpha_i \right) = \sum_i \left( h[\lambda_{\alpha_i}](g_i) \cdot \partial_0 \alpha_i + \sum_{j=1}^p (-1)^j g_i \partial_j \alpha_i \right),$$

é um homomorfismo, o qual satisfaz  $\partial \circ \partial = 0$  (para detalhes, ver [43, Cap.6, §2]).

**Definição 1.3.4.** O grupo graduado  $C^*(B; \mathcal{G})$  é um complexo de cadeias e seus grupos de homologia  $H_p(B; \mathcal{G}) = H_p(C_*(B; \mathcal{G}), \partial)$ , são chamados *grupos de homologia de  $B$  com coeficientes no fibrado de grupos  $\mathcal{G}$* , também conhecidos como *grupos de homologia de  $B$  com coeficientes locais em  $\mathcal{G}$* .

Seja  $\mathcal{G}$  um fibrado de grupos e denotemos por  $C^*(B)$  o grupo de cocadeias singulares sobre  $B$ . Definimos

$C^p(B; \mathcal{G}) = \{ \text{funções } c : C^p(B) \rightarrow \bigcup_{b \in B} G_b \mid c(\alpha : \Delta^p \rightarrow B) \in G_{\alpha(e_0)}, c(\alpha) \neq 0, \text{ somente para um número finito de } p\text{-simplexos singulares } \alpha : \Delta^p \rightarrow B \} = \{ p\text{-cocadeias singulares com coeficientes no fibrado de grupos } \mathcal{G} \}$ , onde  $e_0 \in \Delta^p$ . O conjunto  $C^p(B; \mathcal{G})$  é um grupo abeliano com a operação de adição de funções. O operador cobordo  $\delta : C^p(B; \mathcal{G}) \rightarrow C^{p+1}(B; \mathcal{G})$  é definido pela fórmula

$$(-1)^p \delta c(\alpha) = h[\lambda_\alpha^{-1}]c(\partial_0 \alpha) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i c(\partial_i \alpha),$$

para cada simplexo singular  $\alpha : \Delta^{p+1} \rightarrow B$ , onde  $h[\lambda_\alpha^{-1}] : G_{\alpha(e_1)} \rightarrow G_{\alpha(e_0)}$ . Então  $\delta$  é um homomorfismo e  $\delta \circ \delta = 0$  (ver [43, p.270]).

**Definição 1.3.5.** O grupo graduado  $C^*(B; \mathcal{G})$  é um complexo de cocadeias e seus grupos de cohomologia  $H^p(B; \mathcal{G}) = H^p(C^*(B; \mathcal{G}), \delta)$ , são chamados *grupos de cohomologia de B com coeficientes locais no fibrado de grupos G*.

Uma importante propriedade dos grupos de homologia e cohomologia de  $B$  com coeficientes locais no fibrado de grupos  $\mathcal{G}$  é dada pelo seguinte lema (para demonstração, ver [34, Cap.3, §1, Lema 1.18] e [32, Proposição 5.18]).

**Lema 1.3.1.** Se o sistema de coeficientes locais  $\mathcal{G}$  sobre  $B$  é trivial então

$$H_*(B; \mathcal{G}) \cong H_*(B; G) \text{ e } H^*(B; \mathcal{G}) \cong H^*(B; G),$$

onde  $G = G_b$ , para todo  $b \in B$ .

## 1.4 Sequência Espectral

**Definição 1.4.1.** Um *módulo diferencial bigraduado sobre um anel R*, é uma coleção de  $R$ -módulos  $\{E^{p,q}\}$  (ou  $\{E_{p,q}\}$ ), para todo par de inteiros  $p$  e  $q$ , junto com uma aplicação  $R$ -linear  $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$ , o diferencial, de bigrau  $(r, -r + 1)$  (ou  $d : E_{*,*} \rightarrow E_{*,*}$ , de bigrau  $(-r, r - 1)$ ), para algum inteiro  $r$ , satisfazendo  $d \circ d = 0$ .

**Definição 1.4.2.** O módulo de homologia  $H(E)$  é o módulo bigraduado

$$H_{p,q}(E_{*,*}, d) = \frac{\text{Ker}(d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r, q+r-1})}{\text{Im}(d : E_{p+r, q-r+1} \rightarrow E_{p,q})}.$$

**Definição 1.4.3.** O módulo de cohomologia  $H(E)$  é o módulo bigraduado

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{Ker(d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r,q-r+1})}{Im(d : E^{p-r,q+r-1} \rightarrow E^{p,q})}.$$

**Definição 1.4.4.** Uma sequência espectral do tipo homológica é uma coleção de  $R$ -módulos diferenciais bigraduados  $\{E_{*,*}^r, d^r\}$ , para  $r = 1, 2, \dots$ ; onde os diferenciais têm bigrau  $(-r, r-1)$  e  $E_{p,q}^{r+1}$  é isomorfo a  $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$ .

**Definição 1.4.5.** Uma sequência espectral do tipo cohomológica é uma coleção de  $R$ -módulos diferenciais bigraduados  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ , para  $r = 1, 2, \dots$ ; onde os diferenciais têm bigrau  $(r, -r+1)$  e  $E_{r+1}^{p,q}$  é isomorfo a  $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$ .

**Observação 1.4.1.** Embora a sequência espectral esteja indexada para  $r = 1, 2, \dots$ , essa indexação pode começar em qualquer inteiro e para as nossas aplicações a sequência começa em  $r = 2$ .

Consideraremos sequências espectrais do tipo cohomológicas até o final desta seção. As definições e propriedades apresentadas a seguir, também podem ser obtidas no caso de uma sequência espectral homológica e uma exposição detalhada nesse sentido pode ser encontrada em [32, 36]. Para definir o termo limite de uma sequência espectral cohomológica, para todo  $k \geq r$ , denotemos por

$$Z_r^{p,q} = Ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1})$$

$$B_r^{p,q} = Im(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}).$$

A condição  $d_r \circ d_r = 0$ , implica que  $B_r \subset Z_r \subset E_r$ , e segue da Definição 1.4.3 que  $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$ . Sejam

$$Z(E_{r+1})^{p,q} = Ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p+r+1,q-r})$$

$$B(E_{r+1})^{p,q} = Im(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1,q+r} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}).$$

Segue de [28, Teorema 1.10, p.173], que existem submódulos bigraduados  $Z_{r+1}$  e  $B_{r+1}$  de  $Z_r$ , contendo  $B_r$ , tais que  $Z(E_{r+1})^{p,q} \cong Z_{r+1}^{p,q}/Z_r^{p,q}$  e  $B(E_{r+1})^{p,q} \cong B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ , para todo  $p, q$ . Assim,  $B_{r+1} \subset Z_{r+1}$  e temos que

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r.$$

Além disso,  $E_{r+2} \cong Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \cong Z_{r+1}/B_{r+1}$ . Continuando esse processo por indução, obtemos uma sequência de submódulos, para todo  $n \geq r$ ,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \dots \subset B_n \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r.$$

com a propriedade que  $E_{n+1} \cong Z_n/B_n$ .

**Definição 1.4.6.** Definimos os módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \quad e \quad B_\infty = \bigcup_n B_n.$$

O módulo bigraduado  $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$  é chamado o *limite da sequência espectral*  $E$ .

**Definição 1.4.7.** Uma sequência espectral cohomológica  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  *colapsa* no  $N$ -ésimo termo se o diferencial  $d_r = 0$ , para todo  $r \geq N$ .

**Observação 1.4.2.** Uma consequência imediata do fato de uma sequência espectral cohomológica  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  colapsar no  $N$ -ésimo termo, é que  $E_N^{*,*} \cong E_{N+1}^{*,*} \cong \dots \cong E_\infty^{*,*}$ .

**Definição 1.4.8.** Uma filtração decrescente  $F$  sobre um  $R$ -módulo  $A$ , é uma família de submódulos  $\{F^p(A)\}$ , com  $p \in \mathbb{Z}$ , tal que

$$\dots \subset F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \dots \subset A.$$

**Definição 1.4.9.** Dada uma filtração decrescente  $F$  sobre um  $R$ -módulo  $A$ , o módulo graduado associado  $E_0^*(A)$  é dado por

$$E_0^p(A) = F^p(A)/F^{p+1}(A).$$

**Definição 1.4.10.** Se  $H^*$  é um  $R$ -módulo graduado e se  $F$  é uma filtração sobre  $H^*$ , então  $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$  e o módulo bigraduado associado  $E_0^{*,*}$  é dado por

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q})/F^{p+1}(H^{p+q}).$$

**Definição 1.4.11.** Uma sequência espectral  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  converge para um  $R$ -módulo graduado  $H^*$ , se existe uma filtração  $F$  sobre  $H^*$  tal que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F),$$

onde  $E_\infty^{*,*}$  é o termo limite da sequência espectral.

**Definição 1.4.12.** Uma sequência espectral  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  é uma sequência espectral do primeiro quadrante, se existe  $r$  tal que  $E_r^{p,q} = 0$ , para  $p < 0$  ou  $q < 0$ .

Agora, recordemos os seguintes teoremas de Leray-Serre para fibrações (para demonstração, ver [32, Teoremas 5.2 e 6.7]).

**Teorema 1.4.1** (A Sequência Espectral Cohomológica de Leray-Serre). Seja  $R$  um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ , onde  $B$  é conexo por caminhos, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ , com

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)),$$

a cohomologia de  $B$  com coeficientes locais na cohomologia de  $F$ , a fibra de  $p$ , e convergindo para  $H^*(E; R)$ . Além disso, essa sequência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

**Teorema 1.4.2** (A Sequência Espectral Homológica de Leray-Serre). Seja  $R$  um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ , onde  $B$  é conexo por caminhos, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ , com

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F; R)),$$

a cohomologia de  $B$  com coeficientes locais na cohomologia de  $F$ , a fibra de  $p$ , e convergindo para  $H_*(E; R)$ . Além disso, essa sequência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

## 1.5 O homomorfismo de Bockstein e a Cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e $BS_1$ .

Sejam  $A, B$  e  $C$  grupos abelianos. Se

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \tag{1.2}$$

é uma sequência exata curta, então a sequência

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C_*(X), A) \rightarrow \text{Hom}(C_*(X), B) \rightarrow \text{Hom}(C_*(X), C) \rightarrow 0$$

é exata, onde  $C_*(X)$  é o complexo de cadeias singulares de  $X$ . Assim, obtemos uma sequência exata longa em cohomologia

$$\dots \rightarrow H^k(X; A) \rightarrow H^k(X; B) \rightarrow H^k(X; C) \xrightarrow{\beta_k} H^{k+1}(X; A) \rightarrow \dots$$

Os homomorfismos conectantes

$$\beta_k : H^k(X; C) \rightarrow H^{k+1}(X; A)$$

são chamados *homomorfismos de Bockstein* associados a sequência exata curta (1.2).

**Definição 1.5.1.** Um modelo para  $B\mathbb{Z}_2$ , o espaço classificante para  $\mathbb{Z}_2$ , é o espaço projetivo infinito  $P^\infty$ . Então,  $H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_2[a]$ , onde  $a \in H^1(P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  é o gerador. O gerador de  $H^i(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$  é  $a^i$ , para qualquer  $i \geq 0$ . Se  $p > 2$  é primo, um modelo para  $B\mathbb{Z}_p$ , o espaço classificante para  $\mathbb{Z}_p$  é o espaço lens infinito  $L_p^\infty = S^\infty/\mathbb{Z}_p$ . Assim,  $H^i(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = H^i(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ , para todo  $i \geq 0$  e dado qualquer elemento não nulo  $a \in H^1(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$ , temos que  $b = \beta(a)$  é um elemento não nulo de  $H^2(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$ , onde  $\beta : H^1(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$  é o homomorfismo de Bockstein. Mais geralmente, um gerador  $\mu \in H^i(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$  é dado por

$$\mu = \begin{cases} a \smile b^{(i-1)/2}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ b^{i/2}, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

**Exemplo 1.5.1.** Um modelo para  $BS^1$ , o espaço classificante para  $S^1$ , é o espaço projetivo complexo infinito  $CP^\infty$ . Então,  $H^*(BS^1; \mathbb{Z}) \cong H^*(CP^\infty; \mathbb{Z})$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}[c]$  com gerador  $c \in H^2(BS^1; \mathbb{Z})$  (para demonstração, ver [13, Cap.3, §2, Proposição 2.1]). Observemos que  $B(S^1 \times S^1) = BS^1 \times BS^1$ .

## 1.6 O índice $i(\cdot)$ de $G$ -espaços definido por Volovikov

Provavelmente, a primeira vez que um índice (co)homológico apareceu de forma explícita foi em um artigo de Yang [44], para espaços com ações livres de  $\mathbb{Z}_2$ . Este índice está próximo a conceitos como gênero e categoria e têm aplicações em várias áreas da matemática. Para ações livres de grupos finitos arbitrários, índices homológicos e geométricos foram introduzidos por Švarc em [37, 38] e por Conner e Floyd em [11].

Ao longo desta seção considere  $G$  um grupo compacto de Lie e  $X$  um  $G$ -espaço para-compacto Hausdorff.

Um índice é uma “função” que associa cada  $G$ -espaço a um inteiro não-negativo ou infinito.

Para a definição do índice  $i(\cdot)$ , vamos usar a Cohomologia de Čech com coeficientes em um corpo  $\mathbb{K}$ , o qual não será indicado por nossa notação. Além disso, no caso em que

$G$  é um  $p$ -toro, isto é,  $G = \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$ , para um primo  $p$ , sempre usaremos  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ , e no caso em que  $G$  é um grupo conexo de Lie, usaremos  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ .

Consideremos a sequência espectral associada à fibração de Borel  $p : X_G \rightarrow (EG)/G = BG$  construída na Seção 1.2 e definimos  $H_G^*(X) := H^*(X_G)$ . Denotamos  $H_G^*(pt) := H^*(BG)$ , onde  $pt$  é o espaço com um único ponto, por  $\Lambda^*$ .

A aplicação  $X \rightarrow pt$  induz um homomorfismo  $\Lambda^* \rightarrow H_G^*(X)$ . Fadell e Husseini, em [16], denotaram o núcleo deste homomorfismo por  $\text{Ind}^G X$  e denominaram-o de índice de valor ideal do  $G$ -espaço  $X$ .

Notemos que, o homomorfismo  $\Lambda^* \rightarrow H_G^*(X)$  pode ser representado como a aplicação composição

$$\Lambda^* \rightarrow E_2^{*,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_r^{*,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_\infty^{*,0} \subset H_G^*(X).$$

Assim,  $\text{Ind}^G X$  coincide com o núcleo do homomorfismo  $\Lambda^* \rightarrow E_\infty^{*,0}$ . Denotamos também  $\text{Ind}^G X$  por  ${}_\infty \text{Ind}^G X$ .

**Definição 1.6.1.** O ideal  ${}_r \text{Ind}^G X$  em  $\Lambda^*$  é o núcleo do homomorfismo  $H^*(BG) = \Lambda^* \rightarrow E_{r+1}^{*,0}$ .

**Observação 1.6.1.** Segue da Definição 1.6.1 que

$${}_1 \text{Ind}^G X \subset {}_2 \text{Ind}^G X \subset \dots \subset {}_k \text{Ind}^G X \subset {}_{k+1} \text{Ind}^G X \subset \dots$$

e a união destes ideais é  $\text{Ind}^G X = {}_\infty \text{Ind}^G X$ .

**Observação 1.6.2.** Se  $X$  é conexo, então  $E_{r+1}^{*,0} = H^*(BG)/{}_r \text{Ind}^G X$ .

Agora, vamos definir o índice numérico  $i(\cdot)$  relacionado ao índice de valor ideal.

**Definição 1.6.2.** Assuma que  $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ . Seja  $i_X(\alpha)$  o menor inteiro  $r$  tal que  $\alpha \in {}_r \text{Ind}^G X$ . Denotamos por  $i(X)$  o mínimo dos  $i_X(\alpha)$  para os quais  $\alpha$  é tal que  $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ .

**Observação 1.6.3.** Nós estabelecemos que  $i(X) = \infty$  se  $\text{Ind}^G X = 0$ . Por exemplo, se o conjunto dos pontos fixos da ação de  $G$  sobre  $X$  é não-vazio, então  $i(X) = \infty$ . Nesse sentido, colocamos  $i_X(\alpha) = \infty$  se a classe  $\alpha \in \Lambda^*$  não pertence ao ideal  $\text{Ind}^G X$ .

**Observação 1.6.4.** Notemos que, se  $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ , então, na sequência espectral da fibração de Borel  $p : X_G \rightarrow BG$ , a imagem do elemento  $\alpha \in H^*(BG) = \Lambda^*$  em  $E_2^{*,0}$  é nula, para algum diferencial e  $i_X(\alpha)$  é o índice deste diferencial, enquanto  $i(X)$  é o índice do primeiro diferencial com imagem não trivial na linha da sequência espectral que tem os módulos  $E^{*,0}$ .

De acordo com a observação acima, a definição do índice  $i(\cdot)$  (Definição 1.6.2) pode ser dada da seguinte maneira:

**Definição 1.6.3.** Consideremos a sequência espectral da fibração de Borel  $p : X_G \rightarrow BG$  e  $E_2^{*,0} = \Lambda^*$ . Dizemos que  $i(X) = s$ , se  $E_2^{*,0} = \dots = E_s^{*,0} \neq E_{s+1}^{*,0}$ .

O próximo resultado é consequência imediata das Definições 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3 e da Observação 1.6.1.

**Proposição 1.6.1.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação  $G$ -equivariante. Então,

- (i)  ${}_k\text{Ind}^G Y \subset {}_k\text{Ind}^G X$ . Em particular,  $\text{Ind}^G Y \subset \text{Ind}^G X$ ;
- (ii)  $i(X) \leq i(Y)$ ;
- (iii)  $i_X(\alpha) \leq i_Y(\alpha)$ , para todo  $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ .

Agora, vamos recordar o índice  $in(\cdot)$  definido por Volovikov em [42]:

**Definição 1.6.4.** Consideremos a sequência espectral da fibração de Borel  $p : X_G \rightarrow BG$  e  $E_2^{j,0} = \Lambda^j$ . Definimos  $in(X)$  como o maior  $d$  tal que  $\Lambda^j \rightarrow H_G^j(X)$  é um monomorfismo, para todo  $j \leq d$  e  $\Lambda^d \neq 0$ .

**Observação 1.6.5.** No caso em que  $X$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -espaço livre, o índice  $in(X)$  coincide com o índice homológico definido por Yang em [44]. Denotemos esse índice de Yang por  $ind_{Yang}$ .

**Observação 1.6.6.** A relação entre os índices  $i(\cdot)$  e  $in(\cdot)$  é descrita pela desigualdade:

$$in(X) \geq i(X) - 1.$$

Além disso, em [42], foi provado que  $in(X) = i(X) - 1$  se considerarmos a ação de  $G = \mathbb{Z}_2$ , enquanto  $in(X) = i(X) - 2$  no caso de ação do grupo  $G = S^1$  e no caso em que  $G = \mathbb{Z}_p$ ,  $p > 2$  primo,  $i(X) - 1 \leq in(X) \leq i(X)$ .

Agora, vamos listar algumas propriedades do índice  $i(\cdot)$ : (para detalhes, ver [42])

(1) Se  $X$  é compacto e  $G$  atua sem pontos fixos em  $X$ , então  $i(X) < \infty$ .

(2) Se  $G = \mathbb{Z}_2$  e  $X$  é um  $G$ -espaço livre, então  $i(X)$  excede o índice homológico de Yang em uma unidade, ou seja,  $i(X) = \text{ind}_{\text{Yang}}(X) + 1$ .

(3) Se  $X$  é uma esfera de cohomologia, ou seja,  $H^*(X) \cong H^*(S^n)$ , e  $G$  atua sobre  $X$  sem pontos fixos, então  $i(X) = n + 1$ .

O próximo resultado nos será muito útil ao longo deste trabalho.

**Proposição 1.6.2.** Sejam  $X$  e  $Y$   $G$ -espaços. As seguintes afirmações são válidas:

(i) Se  $\tilde{H}^i(X) = 0$ , para  $i < N$ , então  $i(X) \geq N + 1$ .

(ii) Se  $H^j(Y) = 0$ , para  $j > N - 1$  e  $i(Y) < \infty$ , então  $i(Y) \leq N$ .

Demonstração: (i) Tomemos a fibração de Borel sobre  $X$ ,

$$p_X : X_G \rightarrow BG.$$

Temos que  $E_2^{*,0} = H^*(BG; \mathcal{H}^0(X)) = H^*(BG)$ .

Como  $\tilde{H}^i(X) = 0$ , para  $i < N$ , então  $E_2^{p,i} = H^p(BG; \mathcal{H}^i(X)) = 0$ ,  $\forall 0 < i < N$ ,  $\forall p$ .

Além disso,  $E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \dots = E_p^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q} = 0$ ,  $\forall 0 < q < N$ ,  $\forall p$ , pois  $d_r = 0$ , para  $r \geq 2$ .

Assim,

$$E_{r+1}^{p,0} \cong \frac{\text{Ker}(d_r : E_r^{p,0} \rightarrow E_r^{p+r,-r+1})}{\text{Im}(d_r : E_r^{p-r,r-1} \rightarrow E_r^{p,0})}$$

Como  $r \geq 2$ , segue que  $E_r^{p+r,-r+1} = 0$  e daí,  $\text{Ker } d_r = E_r^{p,0}$ .

E ainda, para  $2 \leq r \leq N$ , segue que  $1 \leq r - 1 \leq N - 1$  e então,  $0 < r - 1 < N$ . Logo,  $E_r^{p-r,r-1} = 0$ .

Assim,  $E_{r+1}^{p,0} = E_r^{p,0}$ ,  $\forall 2 \leq r \leq N$ .

Portanto,

$$E_2^{p,0} = E_3^{p,0} = \dots = E_N^{p,0} = E_{N+1}^{p,0},$$

e, por consequência,  $i(X) \geq N + 1$ .

(ii) Agora, tomemos a fibração de Borel sobre  $Y$ ,

$$p_Y : Y_G \rightarrow BG.$$

Temos que  $E_2^{*,0} = H^*(BG; \mathcal{H}^0(Y)) = H^*(BG)$ .

Como  $H^j(Y) = 0$ , para  $j > N-1$ , então  $E^{p,j} = H^p(BG; \mathcal{H}^j(Y)) = 0$ ,  $\forall p, \forall j > N-1$ .

Além disso,  $E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \dots = E_p^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q} = 0$ ,  $\forall p, \forall q > N-1$ .

Para todo  $r \geq N$ ,

$$E_{r+2}^{p,0} \cong \frac{\text{Ker}(d_{r+1} : E_{r+1}^{p,0} \rightarrow E_{r+1}^{p+r+1,-r})}{\text{Im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1,r} \rightarrow E_{r+1}^{p,0})}$$

Pelo fato de  $-r < 0$ , segue que  $\text{Ker } d_{r+1} = E_{r+1}^{p,0}$ . Como  $r \geq N$ , temos que  $E_{r+1}^{p-r-1,r} = 0$ . Logo,  $E_{r+1}^{p,0} = E_{r+2}^{p,0}$ ,  $\forall r \geq N$ . Assim,

$$E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,0} = \dots = E_\infty^{p,0}.$$

Suponhamos, por absurdo, que  $i(Y) \geq N+1$ . Então,

$$E_2^{p,0} = E_3^{p,0} = \dots = E_{N+1}^{p,0} = \dots = E_\infty^{p,0}.$$

Logo,  $i(Y) = \infty$ , o que é uma contradição, pois  $i(Y) < \infty$ . ■

**Exemplo 1.6.1.** Sejam  $G = \mathbb{Z}_p^n$ , onde  $p$  é primo e  $K = \Delta_{s-1}^{qs+q-2}$  o  $(s-1)$ -esqueleto do  $(qs+q-2)$ -simplexo, com  $q = p^n$ .

Consideremos  $P_2^q(K) \subset K^q$  a união dos simplexos da forma  $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_q$  em  $K^q$ , onde  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$  são simplexos de  $K$  dois a dois disjuntos.

Temos que  $P_2^q(K) \subset K^q \setminus DK \subset K^q \setminus \Delta K$ , com  $DK = \{(x_1, x_2, \dots, x_q) \in K^q \mid x_i = x_j, \text{ para alguma } i \neq j\}$  e  $\Delta K = \{(x_1, x_2, \dots, x_q) \in K^q \mid x_i = x_j, \forall i, j\}$ . Além disso,  $G = \mathbb{Z}_p^n$  atua livremente sobre  $P_2^q(K)$ ,  $K^q \setminus DK$  e  $K^q \setminus \Delta K$ , e  $P_2^q(K)$  é aplicado equivariantemente sobre  $K^q \setminus DK$  e  $K^q \setminus DK$  é aplicado equivariantemente sobre  $K^q \setminus \Delta K$ , através das respectivas aplicações inclusões.

Em [40, 41], Volovikov mostrou, respectivamente, que:

$$i(P_2^q(K)) \geq q(s-1) + 1 \quad e \quad \text{in}(P_2^q(K)) \geq q(s-1) = q \cdot \dim K.$$

Além disso, como  $\dim(K^q \setminus \Delta K) \leq q(s-1)$ , segue que  $H^j(K^q \setminus \Delta K) = 0$ , para  $j > q(s-1)$ . Pela Proposição 1.6.2(ii), levando em conta que  $K^q \setminus \Delta K$  é compacto, temos que  $i(K^q \setminus \Delta K) \leq q(s-1) + 1$ . Usando a Proposição 1.6.1, obtemos

$$i(P_2^q(K)) = i(K^q \setminus DK) = i(K^q \setminus \Delta K) = q(s-1) + 1.$$

Como as ações de  $G = \mathbb{Z}_p^n$  sobre  $P_2^q(K)$  e  $K^q \setminus DK$  são livres, similarmente, temos que

$$\text{in}(P_2^q) = \text{in}(K^q \setminus \Delta K) = \text{in}(K^q \setminus DK) = q(s-1)$$

Se  $G = \mathbb{Z}_p$ , então  $G$  também atua livremente sobre  $K^p \setminus \Delta K$ . Assim,  $\text{in}(K^p \setminus \Delta K) = q(s-1)$ .

---

### O gênero de $G$ -espaços

---

Neste capítulo estudaremos o gênero de um  $G$ -espaço, onde  $G$  é um grupo finito. A noção de gênero de um conjunto foi primeiro introduzida por Krasnosel'skiĭ em [30] para grupos cíclicos. Para  $G = \mathbb{Z}_2$ , o invariante numérico  $B$ -índice introduzido por Yang em [45] é uma unidade a menos que o gênero. O caso geral, quando a ação livre é de um grupo topológico arbitrário, foi considerado por Švarc em [37, 38] como um caso particular da noção do gênero de um fibrado introduzido por ele. Na Seção 2.1, veremos duas noções de gênero introduzidas por Steinlein, em [24, 25], ambas no sentido de Švarc. Na Seção 2.2, veremos a relação entre o gênero de um  $\mathbb{Z}_p$ -espaço e aplicações  $\mathbb{Z}_p$ -equivariantes. Nas duas últimas seções, definiremos, de um modo geral, o gênero de um  $G$ -espaço e apresentaremos alguns resultados importantes acerca deste conceito, que serão muito relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Noções do gênero de $\mathbb{Z}_p$ -espaços

**Definição 2.1.1.** Seja  $p$  um número primo. Definimos:

$$\mathcal{H}_p = \{(X, f) \mid X \text{ é Hausdorff e } f : X \rightarrow X \text{ gera uma } \mathbb{Z}_p\text{-ação livre sobre } X\}$$

$$\mathcal{N}_p = \{(X, f) \in \mathcal{H}_p \mid X \text{ é normal}\}.$$

Em [24], Steinlein introduziu o conceito de gênero de um  $\mathbb{Z}_p$ -espaço, no sentido de Švarc [37, 38], como segue:

**Definição 2.1.2.** Sejam  $(X, f) \in \mathcal{H}_p$ ,

$$L(X, f) = \{G \subset X \mid \text{existem fechados disjuntos } G_0, G_1, \dots, G_{p-1} \subset X \\ \text{com } G = \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i \text{ e } f^i(G_0) = G_i, \forall i = 1, \dots, p-1\}$$

e

$$S(X, f) = \{\mathfrak{F} \subset L(X, f) \mid X = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} G\}.$$

O gênero do  $\mathbb{Z}_p$ -espaço  $X$ , denotado por  $gen(X, f)$  ou  $gen(X, \mathbb{Z}_p)$ , é definido por:

$$gen(X, \mathbb{Z}_p) = \min \{card \mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \subset S(X, f)\}$$

**Observação 2.1.1.** Se  $gen(X, f) = 1$ , então existe  $\mathfrak{F} \in S(X, f)$  tal que  $card \mathfrak{F} = 1$ . Assim,  $\mathfrak{F} = \{X\}$ . Mas como  $\mathfrak{F} \subset L(X, f)$ , existem  $G_0, G_1, \dots, G_{p-1} \subset X$  fechados disjuntos com  $X = \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i$ . Portanto,  $X$  é desconexo.

**Observação 2.1.2.** Sejam  $(X, f) \in \mathcal{H}_p$  e  $\bar{x} = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$  a órbita de  $x$ . Considere  $\mathfrak{F} = \{\bar{x}\}_{x \in X}$ . Como  $\bar{x} \in L(X, f)$ , para cada  $x \in X$ , temos que  $\mathfrak{F} \in S(X, f)$  e conseqüentemente,  $gen(X, f) \leq card \mathfrak{F} \leq card X$ .

Antes da outra definição dada em [25] por Steinlein, precisaremos da definição de cobertura admissível.

**Definição 2.1.3.** Seja  $X$  um espaço de Hausdorff. Dizemos que  $\mathcal{U} \subset 2^X$  é uma *cobertura admissível* de  $X$  se

- (i)  $\mathcal{U}$  é uma cobertura aberta de  $X$
- (ii) existe uma família  $(t_U)_{U \in \mathcal{U}}$  de aplicações contínuas  $t_U : X \rightarrow [0, 1]$  tal que
  - (a)  $t_U|_{X-U} = 0$
  - (b) para todo  $x \in X$ , existe um  $U \in \mathcal{U}$  com  $t_U(x) = 1$ .

Seja  $\mathcal{H}$  o conjunto dos números cardinais e  $\infty$  um objeto que não pertence a  $\mathcal{H}$ . Seja  $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H} \cup \{\infty\}$  com a ordem induzida da boa ordenação de  $\mathcal{H}$  junto com  $\alpha < \infty, \forall \alpha \in \mathcal{H}$ .

**Definição 2.1.4.** Sejam  $p$  um primo e  $(X, f) \in \mathcal{H}_p$ . Definimos  $M_{X,f} = \{\alpha \in \mathcal{H} \mid \alpha \text{ é o cardinal de uma cobertura admissível } \mathcal{U} \subset 2^X \text{ tal que para todo } U \in \mathcal{U} \text{ existem abertos disjuntos } U_0, U_1, \dots, U_{p-1} \subset X \text{ com } \bigcup_{i=0}^{p-1} U_i = U \text{ e } f^i(U_0) = U_i, \forall i = 1, 2, \dots, p-1\}$  se tal cobertura  $\mathcal{U}$  existe, e  $M_{X,f} = \{\infty\}$  caso contrário.

Como  $M_{X,f} \subset \mathcal{H}^\infty$  é não vazio e  $\mathcal{H}^\infty$  é um conjunto bem ordenado, podemos afirmar que  $M_{X,f}$  possui um elemento mínimo. Sendo assim, consideremos a definição abaixo.

**Definição 2.1.5.** Sejam  $p$  um primo e  $(X, f) \in \mathcal{H}_p$ . Então, o gênero  $\bar{g}(X, f)$  é definido por

$$\bar{g}(X, f) = \min M_{X,f}.$$

**Observação 2.1.3.** Se  $\bar{g}(X, f) = 1$  então  $X$  é desconexo.

Os próximos resultados que enunciaremos vão nos dizer qual a relação entre os dois gêneros definidos anteriormente. Para detalhes, ver [25].

**Lema 2.1.1.** Seja  $(X, f) \in \mathcal{H}_p$ . Então,  $gen(X, f) \leq \bar{g}(X, f)$ .

**Lema 2.1.2.** Seja  $(X, f) \in \mathcal{N}_p$ . Então,  $gen(X, f) = \bar{g}(X, f)$ .

**Exemplo 2.1.1.** Seja  $p$  primo e consideremos  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ . Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $f(z) = ze^{\frac{2\pi i}{p}}$ . Temos que  $f$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $S^1$ . Mostraremos que  $\bar{g}(S^1, f) = 2$ . Para isto, basta mostrar que  $gen(S^1, f) = 2$ , pois  $S^1$  é um espaço normal. Consideremos os seguintes conjuntos

$$G_j^{(1)} = \left\{ z \in S^1; \frac{2\pi j}{p} \leq \arg z \leq \frac{\pi(2j+1)}{p} \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \quad \text{e}$$

$$G_j^{(2)} = \left\{ z \in S^1; \frac{\pi(2j+1)}{p} \leq \arg z \leq \frac{2\pi(2j+1)}{p} \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1$$

Temos que  $G_j^{(1)}$  e  $G_j^{(2)}$  são fechados em  $S^1$ . Além disso,  $G_j^{(k)} \cap G_i^{(k)} = \emptyset$ ,  $j \neq i$ ,  $k = 1, 2$ ,  $f^j(G_0^{(1)}) = G_j^{(1)}$  e  $f^j(G_0^{(2)}) = G_j^{(2)}$ ,  $\forall j = 0, 1, \dots, p-1$ . Portanto, tomando  $G^{(1)} = \bigcup_{j=0}^{p-1} G_j^{(1)}$  e  $G^{(2)} = \bigcup_{j=0}^{p-1} G_j^{(2)}$ , temos que  $\mathfrak{F} = \{G^{(1)}, G^{(2)}\} \in S(S^1, f)$  e conseqüentemente,  $gen(S^1, f) \leq 2$ . Por outro lado, como  $S^1$  é conexo, a Observação 2.1.1 nos garante que  $gen(S^1, f) > 1$ . Portanto,  $gen(S^1, f) = 2$ .

## 2.2 O gênero e aplicações $\mathbb{Z}_p$ -equivariantes

Dados dois  $\mathbb{Z}_p$ -espaços livres, com  $p$  primo, podemos reformular a definição de aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante da seguinte forma:

**Definição 2.2.1.** Sejam  $(X_1, f_1), (X_2, f_2) \in \mathcal{H}_p$ . Dizemos que  $F : (X_1, f_1) \rightarrow (X_2, f_2)$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante ou uma  $\mathbb{Z}_p$ -aplicação se  $F : X_1 \rightarrow X_2$  é contínua e  $F \circ f_1 = f_2 \circ F$ , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \end{array}$$

comuta.

**Lema 2.2.1.** Sejam  $p$  primo e  $(X_1, f_1), (X_2, f_2) \in \mathcal{H}_p$ . Seja  $F : (X_1, f_1) \rightarrow (X_2, f_2)$  uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante. Então,  $\bar{g}(X_1, f_1) \leq \bar{g}(X_2, f_2)$ .

Demonstração: [25]. ■

Agora, definiremos um conjunto especial, denotado por  $F_{n,p}$ , onde  $p$  é primo e  $n \in \mathbb{N}$ , e uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre  $\varphi_{n,p} : F_{n,p} \rightarrow F_{n,p}$ . Além disso, veremos que existe uma relação entre o gênero  $\bar{g}(X, f)$  e a existência de aplicação equivariante  $F : (X, f) \rightarrow (F_{n,p}, \varphi_{n,p})$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.2.2.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $p$  um número primo. Considere

$$l_2 = \{z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 < \infty\}$$

com a norma usual do espaço de Hilbert. Defina:

$$F_{n,p} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } n = 0 \\ \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) \in l_2 \mid \|z\| = 1\}, & \text{se } n \in \{2, 4, 6, \dots\} \\ \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots) \in l_2 \mid \|z\| = 1, z_{\frac{n+1}{2}} = |z_{\frac{n+1}{2}}| e^{(\frac{k}{p})2\pi i}\}, & \text{para algum } k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \text{ se } n \in \{1, 3, 5, \dots\} \end{cases}$$

e  $\varphi_{n,p} : F_{n,p} \rightarrow F_{n,p}$  dada por  $\varphi_{n,p}(z) = (z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots)$ .

**Observação 2.2.1.** Se  $n$  é par e  $p$  é um primo qualquer, então  $F_{n,p}$  é a esfera  $S^{n-1}$ . Além disso, para todo  $n$ ,  $F_{n,p}$  é um espaço normal e  $\varphi_{n,p}$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre  $F_{n,p}$ . Logo,  $(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \in \mathcal{N}_p$ . Para mais detalhes, ver [25].

O próximo lema nos dá um limitante superior para  $gen(F_{n,p}, \varphi_{n,p})$  e  $\bar{g}(F_{n,p}, \varphi_{n,p})$  e sua demonstração pode ser encontrada em [25].

**Lema 2.2.2.** Seja  $(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \in \mathcal{N}_p$ . Então,  $\bar{g}(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = gen(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$ .

Os próximos resultados (Lemas 2.2.3 e 2.2.4) nos mostram algumas relações entre o gênero de um espaço e existência de aplicações  $\mathbb{Z}_p$ -equivariantes. Suas demonstrações podem ser encontradas em [25].

**Lema 2.2.3.** Sejam  $p$  um número primo e  $(X, f) \in \mathcal{N}_p$ . Se  $n = gen(X, f)$  é finito, então  $n$  é o menor número tal que existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $F : (X, f) \rightarrow (F_{n,p}, \varphi_{n,p})$ . Em particular,  $gen(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \geq n$ .

**Observação 2.2.2.** Segue dos Lemas 2.2.2 e 2.2.3 que  $\bar{g}(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = gen(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e qualquer  $p$  primo.

Antes do próximo resultado, lembremos que um espaço  $X$  é  $n$ -conexo se seus  $n$  primeiros grupos de homotopia são triviais, isto é,  $\pi_j(X) = 0$ ,  $\forall j = 0, 1, \dots, n$ .

**Lema 2.2.4.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  um número primo e  $(X, f) \in \mathcal{H}_p$ , com  $X \neq \emptyset$  e  $n$ -conexo. Então, existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $F : (F_{n+2,p}, \varphi_{n+2,p}) \rightarrow (X, f)$ . Em particular,  $\bar{g}(X, f) \geq n + 2$ .

## 2.3 O gênero de $G$ -espaços, com $G$ grupo finito

Em [3], Aarts, Brouwer, Fokkink e Vermeer apresentaram a definição de gênero de um  $G$ -espaço, com  $G$  um grupo finito, no sentido de Švarc. Nesta seção, vamos introduzir o gênero de um  $G$ -espaço, apresentar sua relação com o *número de cores* de um  $G$ -espaço e apresentar alguns resultados que envolvem estes conceitos.

Inicialmente, vamos definir o número de cores de um  $G$ -espaço livre  $X$ .

**Definição 2.3.1.** Sejam  $X$  um espaço  $X$  paracompacto Hausdorff e  $G$  um grupo finito que atua livremente sobre  $X$ . Seja  $G^* = G - \{e\}$ . Dizemos que um aberto  $U$  de  $X$  é uma

cor se  $U \cap g \cdot U = \emptyset, \forall g \in G^*$  e, dizemos que uma cobertura  $\mathcal{U}$  de  $X$  por cores é uma *coloração*. Se  $(X, G)$  admite uma coloração finita, então o *número de cores*  $col(X, G)$  é a cardinalidade mínima de uma coloração.

**Observação 2.3.1.** Quando  $G = \mathbb{Z}_p$ , com  $p$  primo,  $col(X, \mathbb{Z}_p)$  também pode ser denotado por  $col(X, f)$ , onde  $f : X \rightarrow X$  é o homeomorfismo que gera a  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $X$ .

**Definição 2.3.2.** Sejam  $X$  um espaço paracompacto Hausdorff,  $G$  um grupo finito que atua livremente sobre  $X$  e  $U \subset X$  uma cor. Dizemos que o conjunto  $G \cdot U = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$  é chamado um *conjunto de primeiro tipo*. O *gênis*,  $gen(X, G)$ , é definido como a cardinalidade mínima de uma cobertura de  $X$  por conjuntos de primeiro tipo.

O próximo resultado é análogo ao obtido na Seção 2.2 para  $G = \mathbb{Z}_p$ . Segue da definição acima, que o gênero é não-decrescente sob aplicações  $G$ -equivariantes, isto é,

**Proposição 2.3.1.** Sejam  $X$  e  $Y$   $G$ -espaços livres paracompactos Hausdorff e  $F : X \rightarrow Y$  uma aplicação  $G$ -equivariante. Então,  $gen(X, G) \leq gen(Y, G)$ .

**Observação 2.3.2.** Se  $X$  é um  $G$ -espaço livre e  $U \subset X$  é uma cor, então a coleção  $\{g \cdot U \mid g \in G\}$  é tal que  $g \cdot U \cap h \cdot U = \emptyset, \forall g, h \in G, g \neq h$ .

**Observação 2.3.3.** No caso em que  $G = \mathbb{Z}_p$ , com  $p$  primo,  $gen(X, \mathbb{Z}_p)$  também pode ser denotado por  $gen(X, f)$ , onde  $f : X \rightarrow X$  é o homeomorfismo que gera a  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $X$ . Neste caso, o gênero definido em 2.3.2 coincide com o gênero definido em 2.1.2.

Agora, veremos alguns resultados que relacionam os conceitos de  $col(X, G)$  e  $gen(X, G)$ .

**Teorema 2.3.1** (Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk). Seja  $i : S^n \rightarrow S^n$  a aplicação antipodal sobre a esfera de dimensão  $n \geq 1$ . As seguintes equivalências valem:

- (i)  $gen(S^n, i) = n + 1$ , para a  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre induzida pela aplicação antipodal  $i$ .
- (ii)  $col(S^n, i) = n + 2$ .
- (iii) Suponha que  $\{U_j \cup i(U_j) \mid j = 1, 2, \dots, n + 1\}$  é uma cobertura de  $S^n$  constituída por conjuntos de primeiro tipo. Então,  $\bigcap_{j=1}^{n+1} U_j \neq \emptyset$ .

Para a prova deste teorema ver, por exemplo, [14, p.42]. A equivalência de (i) e (ii) foi generalizada para  $G$ -espaços livres em [26, Theorem IV.21] e em [4], como mostra o seguinte:

**Teorema 2.3.2.** Suponha que  $X$  é um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff. As seguintes afirmações são equivalentes.

- (i)  $gen(X, G) = n + 1$ ;
- (ii)  $col(X, G) = n + |G|$ .

Em [30], Krasnosel'skiĭ generalizou a parte (i) do Teorema 2.3.1 para ações livres de grupos cíclicos sobre a esfera  $S^n$ .

**Teorema 2.3.3** (Krasnosel'skiĭ). Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  um homeomorfismo que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $S^n$ . Então,  $gen(S^n, f) = n + 1$ .

## 2.4 Resultados sobre gênis de $G$ -espaços

Para quaisquer dois complexos simpliciais  $X$  e  $Y$ , lembremos que o join  $X * Y$  é o complexo simplicial formado pelos simplexos  $[x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m]$ , onde  $[x_1, x_2, \dots, x_k]$  e  $[y_1, y_2, \dots, y_m]$  são simplexos em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Se  $X$  e  $Y$  são  $G$ -espaços livres então  $X * Y$  também o é. O join  $G * G * \dots * G$  ( $k$ -vezes) é o complexo simplicial formado por todos  $[g_1, g_2, \dots, g_k]$ , com  $g_i \in G$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Note que,  $G * G * \dots * G$  admite uma  $G$ -ação livre que é induzida da  $G$ -ação livre em  $G$ ,  $g_i \mapsto gg_i$ .

**Definição 2.4.1.** O join  $G * G * \dots * G$  ( $k$ -vezes) com a  $G$ -ação livre definida anteriormente é um  $G$ -espaço livre, denotado por  $S_G^k$ .

**Observação 2.4.1.** Observe que, para  $G = \mathbb{Z}_2$ , temos que  $S_G^k = S^{k-1}$ . Note também que,  $S_G^k$  é um ANR  $(k - 1)$ -dimensional e  $(k - 2)$ -conexo.

De [3], segue o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.1.** Sejam  $X$  um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff tal que  $gen(X, G) \leq k$ . Então, existe uma aplicação  $G$ -equivariante  $F : X \rightarrow S_G^k$ .

Em [37], Švarc obteve o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.2.** Suponha que  $X$  seja um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff de dimensão topológica  $dim X = n$ . Então,  $gen(X, G) \leq n + 1$ .

Em [3], Aarts, Brouwer, Fokink e Vermeer mostraram que

**Teorema 2.4.3.** Seja  $G$  um grupo finito.

(i)  $gen(S_G^k, G) = k$ .

(ii) Suponha que  $X$  é um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff  $(k - 2)$ -conexo. Então, existe uma aplicação  $G$ -equivariante  $F : S_G^k \rightarrow X$  e como consequência,  $gen(X, G) \geq k$ .

Volovikov, em [39, Proposition 4.7], relacionou o gênero de um  $G$ -espaço livre  $X$  com o índice  $i(X)$ . Sua prova segue das propriedades do índice  $i(\cdot)$  e do Teorema 2.4.1.

**Proposição 2.4.1.** Suponha que  $G = \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$  ( $n$  vezes) atua sobre  $X$  sem pontos fixos. Então,  $i(X) \leq gen(X, G)$ . Em particular, se  $\tilde{H}^i(X) = 0$ ,  $\forall i \leq N - 1$ , então  $gen(X, G) \geq N + 1$ .

**Exemplo 2.4.1.** Sejam  $G = \mathbb{Z}_p^n$ , onde  $p$  é primo e  $K = \Delta_{s-1}^{qs+q-2}$  o  $(s - 1)$ -esqueleto do  $(qs + q - 2)$ -simplexo, com  $q = p^n$ . Pelo Teorema 2.4.2, segue que  $gen(P_2^q(K), \mathbb{Z}_p^n) \leq q(s - 1) + 1$ ,  $gen(K^q \setminus DK, \mathbb{Z}_p^n) \leq q(s - 1) + 1$  e  $gen(K^q \setminus \Delta K, \mathbb{Z}_p^n) \leq q(s - 1) + 1$ .

Vimos, no Exemplo 1.6.1, que

$$i(P_2^q(K)) = i(K^q \setminus DK) = i(K^q \setminus \Delta K) = q(s - 1) + 1.$$

Logo, pela Proposição 2.4.1, obtemos que

$$gen(P_2^q(K), \mathbb{Z}_p^n) \geq q(s - 1) + 1, \quad gen(K^q \setminus DK, \mathbb{Z}_p^n) \geq q(s - 1) + 1$$

e  $gen(K^q \setminus \Delta K, \mathbb{Z}_p^n) \geq q(s - 1) + 1$ .

Portanto,

$$gen(P_2^q(K), \mathbb{Z}_p^n) = gen(K^q \setminus DK, \mathbb{Z}_p^n) = gen(K^q \setminus \Delta K, \mathbb{Z}_p^n) = q(s - 1) + 1.$$

---

## Teoremas de coincidências para aplicações de $G$ -espaços livres

---

O Teorema Clássico de Borsuk-Ulam nos diz que toda aplicação contínua da esfera  $S^n$  no espaço euclidiano  $k$ -dimensional  $\mathbb{R}^k$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência, sempre que  $n \geq k$ . Este resultado pode ser generalizado em muitas direções:  $S^n$  e  $\mathbb{R}^k$  pode ser substituídos por espaços mais gerais  $X$  e  $Y$ , e a ação de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $S^n$  pode ser substituída por ações de outros grupos.

Uma destas generalizações pode ser encontrada em [2], onde Aarts, Fokkink e Vermeer provaram o Teorema 3.3.3, que diz que se  $i : X \rightarrow X$  gera uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre sobre o espaço normal  $X$  com  $col(X, i) = n + 2$ ,  $k$  é um número natural e  $Y$  é um cone  $CW$ -complexo  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência, sempre que  $n \geq 2k$ , e este resultado é o melhor possível.

Motivados por este resultado, na Seção 3.3 (Teorema 3.3.1), exigindo que  $X$  seja um espaço paracompacto Hausdorff, generalizamos o resultado citado acima para ações livres de  $\mathbb{Z}_p$ , com  $p$  primo.

Vale ressaltar, que no caso  $n = pk$ , exibimos um interessante exemplo que mostra que o resultado não é verdadeiro para a classe mais ampla dos  $CW$ -complexos de dimensão  $k$ . Inicialmente, na Seção 3.2, generalizamos um resultado provado por Barros e Biasi em [6]. Em seguida, veremos que esta generalização seguirá como consequência do Teorema 3.3.1. Para finalizar o capítulo, na Seção 3.4, trabalharemos com problemas buscando encontrar

$H$  subgrupo de  $G$ , com  $G$  grupo finito, e  $(H, G)$ -coincidências de aplicações contínuas e com isso obtemos os Teoremas 3.4.1 e 3.4.2, os quais são extensões do Teorema 3.3.1.

### 3.1 Sobre teoremas de Ljusternik-Schnirelmann e Borsuk-Ulam

Seja  $X$  um espaço de Hausdorff, simplesmente conexo equipado com uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre ( $p$  primo) gerada por  $f_p : X \rightarrow X$ . Dado  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$  ( $n$  vezes) tal que para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $p$  não divide  $l_j$ , considere a  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $S^{2n-1}$  gerada por  $\alpha_{p,l} : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ ,

$$\alpha_{p,l}(z_1, z_2, \dots, z_n) = (e^{\frac{2\pi l_1 i}{p}} \cdot z_1, e^{\frac{2\pi l_2 i}{p}} \cdot z_2, \dots, e^{\frac{2\pi l_n i}{p}} \cdot z_n).$$

Barros e Biasi em [6], provaram os seguintes resultados (Teorema 3.1.1 e Teorema 3.1.2):

**Teorema 3.1.1.** Suponha que para cada  $2 \leq j \leq m = 2n - 1$  o espaço de órbitas  $X/f_p$  é  $j$ -simples e

- (i)  $\pi_j(X) = p \cdot \pi_j(X)$ , se  $j$  é ímpar, e
- (ii)  $\pi_j(X)$  não tem elementos de ordem  $p$ , se  $j$  é par.

Então, existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $F : (S^m, \alpha_{p,l}) \rightarrow (X, f_p)$ .

**Teorema 3.1.2.** Sejam  $X$  paracompacto Hausdorff e simplesmente conexo, e  $f_2 : X \rightarrow X$  uma involução sem pontos fixos ambos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Se  $Y$  for um espaço métrico separável com dimensão topológica  $\dim Y \leq \frac{m-1}{2}$ , então para toda função contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(f_2(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência.

**Observação 3.1.1.** Barros e Biasi ainda observaram que, em [22], Izydorek e Jaworowski construíram, para cada  $k$  e  $n \leq 2k - 1$ , uma aplicação contínua  $f$  da  $n$ -esfera  $S^n$  em um complexo  $k$ -dimensional específico  $Y$  tal que  $f(x) \neq f(-x)$ ,  $\forall x \in S^n$ . Assim, o limitante superior encontrado para a dimensão de  $Y$ , no Teorema 3.1.2, é o melhor possível.

## 3.2 Generalizações do Teorema 3.1.2

Tendo em vista o resultado provado por Barros e Biasi em [6] (Teorema 3.1.2), vamos provar que vale resultado similar para  $p = 3$  (Teorema 3.2.2) e para  $p > 3$  (Teorema 3.2.3).

Inicialmente, enunciaremos um resultado provado por Steinlein em [24], que será muito útil para a prova destas generalizações.

**Teorema 3.2.1.** Sejam  $p$  um número primo,  $m, k \in \mathbb{N}$ , e  $f : S^m \rightarrow S^m$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $S^m$ . Assuma que existem fechados  $H_1, \dots, H_k \subset S^m$  com  $\bigcup_{j=1}^k H_j = S^m$  e  $H_j \cap f(H_j) = \emptyset$ , para  $j = 1, \dots, k$ . Então,

$$m \leq \begin{cases} \frac{p-1}{2}(k-3), & \text{se } p = 3, \\ \frac{p-1}{2}(k-3) + 1, & \text{se } p > 3. \end{cases}$$

**Teorema 3.2.2.** Sejam  $X$  paracompacto Hausdorff e simplesmente conexo, e  $f_3 : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_3$ -ação livre sobre  $X$ , ambos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Se  $Y$  for um espaço métrico separável com dimensão topológica  $\dim Y \leq \frac{m-1}{3}$ , então para toda função contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(f_3(x)) = f(f_3^2(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_3$ -coincidência.

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que para cada  $x \in X$  existam  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ , com  $f(f_3^i(x)) \neq f(f_3^j(x))$ , onde  $f_3^3 = id$ .

Seja  $(Y^*, \tau)$  um par tal que  $Y^* = Y \times Y \times Y - \Delta$ , onde  $\Delta = \{(y, y, y) \mid y \in Y\}$  e  $\tau$  é o homeomorfismo  $\tau(y_1, y_2, y_3) = (y_3, y_1, y_2)$ ,  $\forall (y_1, y_2, y_3) \in Y^*$ . Então,  $Y^*$  é um espaço métrico com  $\dim Y^* \leq m - 1$  e  $\tau$  gera uma  $\mathbb{Z}_3$ -ação livre sobre  $Y^*$ .

De [27, Theorem 3], segue que existe uma cobertura por fechados  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  de  $Y^*$ , ou seja,  $Y^* = \bigcup_{j=1}^k H_j$ , com  $H_j \cap \tau(H_j) = \emptyset$ , para todo  $j = 1, \dots, k$ ,  $k \leq m + 2$ .

Pelo Teorema 3.1.1, existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_3$ -equivariante  $F : (S^m, \alpha_{3,l}) \rightarrow (X, f_3)$ .

Agora, definimos a aplicação contínua  $g : (X, f_3) \rightarrow (Y^*, \tau)$  por

$$g(x) = (f(f_3^2(x)), f(f_3(x)), f(x)), \forall x \in X.$$

Temos que:

•  $g(x) \in Y^*$ ,  $\forall x \in X$ , pois para cada  $x \in X$ , existem  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ , tal que  $f(f_3^i(x)) \neq f(f_3^j(x))$ .

•  $g$  é  $\mathbb{Z}_3$ -equivariante pois  $g(f_3(x)) = (f(x), f(f_3^2(x)), f(f_3(x))) = \tau(g(x))$ ,  $\forall x \in X$ .

Assim,  $h := g \circ F : (S^m, \alpha_{3,l}) \rightarrow (Y^*, \tau)$  também é uma aplicação  $\mathbb{Z}_3$ -equivariante.

De fato,

$$h(\alpha_{3,l}(z)) = (g \circ F)(\alpha_{3,l}(z)) = g(F(\alpha_{3,l}(z))) \stackrel{F \text{ equiv.}}{=} g(f_3(F(z))) \stackrel{g \text{ equiv.}}{=} \tau(g(F(z))) = \tau(h(z)), \forall z \in S^m.$$

Deste modo,  $S^m = \bigcup_{j=1}^k h^{-1}(H_j)$  é coberta por  $k$  fechados e como  $H_j \cap \tau(H_j) = \emptyset$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ , segue que  $h^{-1}(H_j) \cap h^{-1}(\tau(H_j)) = \emptyset$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ .

Mas  $h^{-1}(\tau(H_j)) = \alpha_{3,l}(h^{-1}(H_j))$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ . Com efeito,

•  $a \in h^{-1}(\tau(H_j)) \implies h(a) \in \tau(H_j) \implies \tau^2(h(a)) \in H_j \implies h(\alpha_{3,l}^2(a)) = \tau^2(h(a)) \in H_j \implies a = \alpha_{3,l}(\alpha_{3,l}^2(a)) \in \alpha_{3,l}(h^{-1}(H_j)) \implies h^{-1}(\tau(H_j)) \subseteq \alpha_{3,l}(h^{-1}(H_j))$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ .

•  $a \in \alpha_{3,l}(h^{-1}(H_j)) \implies a = \alpha_{3,l}(b)$ , para algum  $b \in h^{-1}(H_j)$  (isto é,  $h(b) \in H_j$ )  $\implies h(a) = h(\alpha_{3,l}(b)) = \tau(h(b)) \in \tau(H_j) \implies a \in h^{-1}(\tau(H_j)) \implies \alpha_{3,l}(h^{-1}(H_j)) \subseteq h^{-1}(\tau(H_j))$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ .

Logo,  $S^m = \bigcup_{j=1}^k h^{-1}(H_j)$ , com  $h^{-1}(H_j)$  fechados tais que

$$h^{-1}(H_j) \cap \alpha_{3,l}(h^{-1}(H_j)) = \emptyset, \forall j = 1, \dots, k,$$

o que é um absurdo, pois contradiz o Teorema 3.2.1. ■

**Teorema 3.2.3.** Sejam  $X$  paracompacto Hausdorff, simplesmente conexo e  $f_p : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $X$  com  $p > 3$ , ambos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Se  $Y$  é um espaço métrico separável com dimensão topológica  $\dim Y \leq \frac{2(m-2)}{p(p-1)}$ , então para toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(f_p(x)) = \dots = f(f_p^{p-1}(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Demonstração: Suponhamos que, para cada  $x \in X$ , existam  $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $i \neq j$ , com  $f(f_p^i(x)) \neq f(f_p^j(x))$ .

Seja  $(Y^*, \tau)$  um par tal que  $Y^* = Y \times Y \times \dots \times Y$  ( $p$  vezes)  $- \Delta$ , onde  $\Delta = \{(y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y \times Y \times \dots \times Y \mid y_1 = y_2 = \dots = y_p\}$  e  $\tau$  é o homeomorfismo  $\tau(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_p, y_1, y_2, \dots, y_{p-1})$ ,  $\forall (y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y^*$ .

Assim,  $Y^*$  é um espaço métrico com  $\dim Y^* \leq \frac{2(m-2)}{p-1}$  e  $\tau$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $Y^*$ . De [27, Theorem 3], segue que existe uma cobertura por fechados  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  de  $Y^*$ , ou seja,  $Y^* = \bigcup_{j=1}^k H_j$ , com  $k \leq \frac{2(m-2)}{p-1} + 3$ , e  $H_j \cap \tau(H_j) = \emptyset, \forall j = 1, \dots, k$ .

Pelo Teorema 3.1.1, existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $F : (S^m, \alpha_{p,l}) \rightarrow (X, f_p)$ .

Definimos a aplicação contínua  $g : (X, f_p) \rightarrow (Y^*, \tau)$  por  $g(x) = (f(f_p^{p-1}(x)), f(f_p^{p-2}(x)), \dots, f(f_p(x)), f(x)), \forall x \in X$ . Notemos que:

- $g(x) \in Y^*, \forall x \in X$ .
- $g(f_p(x)) = (f(x), f(f_p^{p-1}(x)), f(f_p^{p-2}(x)), \dots, f(f_p^2(x)), f(f_p(x))) = \tau(g(x)), \forall x \in X$ . Deste modo, temos que  $g$  é  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante.

Assim,  $h = g \circ F : (S^m, \alpha_{p,l}) \rightarrow (Y^*, \tau)$  também é uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante pois

$$h(\alpha_{p,l}(z)) = (g \circ F)(\alpha_{p,l}(z)) \stackrel{F \text{ equiv.}}{=} g(f_p(F(z))) \stackrel{g \text{ equiv.}}{=} \tau(g(F(z))) = \tau(h(z)), \forall z \in S^m.$$

Temos que  $S^m = \bigcup_{j=1}^k h^{-1}(H_j)$  é coberta por  $k$  fechados e como  $H_j \cap \tau(H_j) = \emptyset, \forall j = 1, \dots, k$ , segue que  $h^{-1}(H_j) \cap h^{-1}(\tau(H_j)) = \emptyset, \forall j = 1, \dots, k$ . Mas,  $h^{-1}(\tau(H_j)) = \alpha_{p,l}(h^{-1}(H_j)), \forall j = 1, \dots, k$ . De fato,

$$\bullet a \in h^{-1}(\tau(H_j)) \implies h(a) \in \tau(H_j) \implies \tau^{p-1}(h(a)) \in H_j \implies h(\alpha_{p,l}^{p-1}(a)) = \tau^{p-1}(h(a)) \in H_j \implies a = \alpha_{p,l}(\alpha_{p,l}^{p-1}(a)) \in \alpha_{p,l}(h^{-1}(H_j)) \implies h^{-1}(\tau(H_j)) \subseteq \alpha_{p,l}(h^{-1}(H_j)), \forall j = 1, \dots, k.$$

$$\bullet a \in \alpha_{p,l}(h^{-1}(H_j)) \implies a = \alpha_{p,l}(b), \text{ para algum } b \in h^{-1}(H_j) \text{ (isto é, } h(b) \in H_j) \implies h(a) = h(\alpha_{p,l}(b)) = \tau(h(b)) \in \tau(H_j) \implies a \in h^{-1}(\tau(H_j)) \implies \alpha_{p,l}(h^{-1}(H_j)) \subseteq h^{-1}(\tau(H_j)), \forall j = 1, \dots, k.$$

Agora,

$$k \leq \frac{2(m-2)}{p-1} + 3 \implies \frac{p-1}{2} \cdot k \leq m-2+3 \cdot \frac{p-1}{2} \implies m \geq \frac{p-1}{2} \cdot k - 3 \cdot \frac{p-1}{2} + 2 = \frac{p-1}{2} \cdot (k-3) + 2.$$

Temos que,  $S^m = \bigcup_{j=1}^k h^{-1}(H_j)$ , com  $h^{-1}(H_j)$  fechados tais que  $h^{-1}(H_j) \cap \alpha_{p,l}(h^{-1}(H_j)) = \emptyset, \forall j = 1, \dots, k$ , o que contradiz o Teorema 3.2.1. ■

**Observação 3.2.1.** Na próxima seção veremos que, no caso  $p > 3$ , o limitante superior  $\frac{2(m-2)}{p(p-1)}$  para a dimensão topológica do espaço metrizável  $Y$  não é o melhor possível.

### 3.3 Teoremas de coincidências para aplicações de $\mathbb{Z}_p$ -espaços livres

Nesta seção, mostraremos um dos principais resultados deste trabalho, o qual generaliza o resultado provado em [2].

**Teorema 3.3.1.** Sejam  $p$  um número primo,  $\alpha : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre o espaço  $X$  paracompacto Hausdorff com  $gen(X, \mathbb{Z}_p) \geq n + 1$  e  $k$  um número natural.

(i) Se  $n > pk$  e  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\alpha^i(x))$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .

(ii) Se  $n = pk$  e  $Y$  for um cone (ou suspensão) CW-complexo de dimensão  $k$ , então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\alpha^i(x))$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .

(iii) Se  $n < pk$  e  $gen(X, \mathbb{Z}_p) = n + 1$ , então existem  $Y$  metrizável  $k$ -dimensional e aplicação contínua  $\varphi : X \rightarrow Y$  tal que  $\varphi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 3.3.1, faremos algumas considerações sobre este resultado:

**Observação 3.3.1.** Observemos que o Teorema 3.3.1 generaliza os Teoremas 3.1.2, 3.2.2 e 3.2.3. Para ver isto, seja  $X$  um  $\mathbb{Z}_p$ -espaço livre, com  $p$  primo, paracompacto Hausdorff, simplesmente conexo e satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Neste mesmo teorema, Barros e Biasi provaram a existência de uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $F : S^m \rightarrow X$  e com isso, concluímos, pela Proposição 2.3.1, que  $gen(X, \mathbb{Z}_p) \geq gen(S^m, \mathbb{Z}_p) \stackrel{Teo.2.3.3}{=} m + 1$ . Assim, pelo Teorema 3.3.1, se  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional e  $m > pk$ , então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Note que,  $k = dim Y$  e daí,  $m > p \cdot dim Y$  implica que  $dim Y \leq \frac{m-1}{p}$ . Quando  $p = 2$  e  $p = 3$ , obtemos, respectivamente, os Teoremas 3.1.2 e 3.2.2. Agora, para o caso  $p > 3$ , observe que

$$\frac{2(m-2)}{p(p-1)} = \frac{2}{p-1} \cdot \frac{m-2}{p} \stackrel{p-1 > 2}{<} \frac{m-2}{p} < \frac{m-1}{p}$$

e portanto, no Teorema 3.2.3,  $\frac{m-1}{p}$  é um limitante superior para a  $\dim Y$  melhor do que  $\frac{2(m-2)}{p(p-1)}$ , o que já havíamos mencionado na Observação 3.2.1.

Em [21], Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov provaram o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.2.** Sejam  $X$  paracompacto Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminho e  $G$  um grupo finito que atua livremente sobre  $X$ . Suponha que  $H^{m+1}(G, \mathbb{Z}) \neq 0$ , para algum número natural  $m \geq 1$  e  $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ , para  $0 < i < m$ . Se  $Y$  é um  $CW$ -complexo finito  $k$ -dimensional com  $m \geq |G|k$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua, então existe um subgrupo não-trivial  $H \subset G$  e um ponto de  $(H, G)$ -coincidência para  $f$ .

**Observação 3.3.2.** Considere  $G = \mathbb{Z}_p$  e  $X$  satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.3.2. Temos que,  $H^{m+1}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \neq 0$ , para todo  $m$  ímpar, e como  $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ , para  $0 < i < m$ , segue, pela Proposição 2.4.1, que  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) \geq m + 1$ . Pelo Teorema 3.3.1(i), sempre que  $m > pk$ , toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , com  $Y$   $CW$ -complexo  $k$ -dimensional, tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Portanto, no caso  $G = \mathbb{Z}_p$  e  $m > pk$ , o Teorema 3.3.1 contempla o resultado provado por Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov em [21].

O seguinte exemplo, é um interessante exemplo que mostra que no caso  $n = pk$  do Teorema 3.3.1(ii) o resultado não é verdadeiro para a classe mais ampla dos  $CW$ -complexos de dimensão  $k$ .

**Exemplo 3.3.1.** Consideremos  $Y = \Delta_{s-1}^{ps+p-2}$  (o  $(s-1)$ -esqueleto do  $(ps+p-2)$ -simplexo padrão) e  $Y^* = Y \times Y \times \dots \times Y$  ( $p$  vezes)  $- \Delta$ , com  $\Delta = \{(y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y \times Y \times \dots \times Y \mid y_1 = y_2 = \dots = y_p\}$  a diagonal. A aplicação  $\sigma : Y^* \rightarrow Y^*$  dada por  $\sigma(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_p, y_1, \dots, y_{p-1})$ ,  $\forall (y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y^*$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $Y^*$ . Além disso,  $Y^*$  é paracompacto Hausdorff e por cálculo feito no Exemplo 2.4.1,  $\text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) = p(s-1) + 1$ . Definimos então  $\pi : Y^* \rightarrow Y$  por  $\pi(y_1, \dots, y_p) = y_1$ ,  $\forall (y_1, \dots, y_p) \in Y^*$  e claramente  $\pi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Neste caso,  $n = p(s-1)$  e  $k = s-1$ . Com isso, concluímos que o teorema não vale no caso  $n = pk$  quando  $Y$  é um  $CW$ -complexo qualquer.

Em [2], Aarts, Fokkink e Vermeer provaram o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.3.** Sejam  $i : X \rightarrow X$  uma involução que gera uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre sobre o espaço normal  $X$  com  $\text{col}(X, i) = n + 2$  e  $k$  um número natural. Então,

(i) Se  $n \geq 2k$  e  $Y$  é um cone  $CW$ -complexo  $k$ -dimensional, então para toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(i(x))$ , ou seja, existe um ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência.

(ii) Se  $n < 2k$ , então existem um cone  $CW$ -complexo  $k$ -dimensional  $Y$  e uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_2$ -coincidência.

**Observação 3.3.3.** Se considerarmos  $X$  um  $\mathbb{Z}_2$ -espaço livre paracompacto Hausdorff com  $col(X, \mathbb{Z}_2) = n + 2$  então, pelo Teorema 2.3.2,  $gen(X, \mathbb{Z}_2) = n + 1$ . Dessa forma, nosso resultado (Teorema 3.3.1) generaliza o resultado provado por Aarts, Fokkink e Vermeer em [2].

### 3.3.1 Demonstração do Teorema 3.3.1

Demonstração: (**Caso** (i)  $n > pk$ ). Sejam  $\alpha : X \rightarrow X$  uma aplicação que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $X$  com  $gen(X, \mathbb{Z}_p) \geq n + 1$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua.

Suponhamos, por absurdo, que para cada  $x \in X$ , existem  $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $i \neq j$ , satisfazendo  $f(\alpha^i(x)) \neq f(\alpha^j(x))$ , onde  $\alpha^p = id$ .

Consideremos  $Y^* = Y \times Y \times \dots \times Y$  ( $p$  vezes)  $- \Delta$ , com

$$\Delta = \{(y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y \times Y \times \dots \times Y \mid y_1 = y_2 = \dots = y_p\}.$$

Temos que  $Y^*$  é um espaço metrizável com  $dim Y^* \leq pk$ . Definimos  $\sigma : Y^* \rightarrow Y^*$  por

$$\sigma(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_p, y_1, \dots, y_{p-1}), \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y^*,$$

e  $\phi : X \rightarrow Y^*$  por

$$\phi(x) = (f(\alpha^{p-1}(x)), f(\alpha^{p-2}(x)), \dots, f(\alpha(x)), f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Observemos que,  $\sigma$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $Y^*$  e  $\phi$  é uma aplicação contínua bem definida.

Mais ainda,  $\phi$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante.

De fato,

$$\begin{aligned} (\phi \circ \alpha)(x) &= \phi(\alpha(x)) = (f(x), f(\alpha^{p-1}(x)), \dots, f(\alpha^2(x)), f(\alpha(x))) \\ &= \sigma(f(\alpha^{p-1}(x)), f(\alpha^{p-2}(x)) \dots, f(\alpha(x)), f(x)) \\ &= \sigma(\phi(x)) \\ &= (\sigma \circ \phi)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.3.1,  $gen(X, \mathbb{Z}_p) \leq gen(Y^*, \mathbb{Z}_p)$ .

Como  $dim Y^* \leq pk$ , segue do Teorema 2.4.2, que

$$gen(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq pk + 1. \quad (3.1)$$

Portanto,  $gen(X, \mathbb{Z}_p) \leq gen(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq pk + 1 < n + 1$ , o que é uma contradição pois  $gen(X, \mathbb{Z}_p) \geq n + 1$ . ■

Demonstração: ( **Caso** (ii)  $n = pk$ ). A estratégia utilizada para mostrar o caso  $n = pk$  com  $Y$  um cone  $CW$ -complexo, é a seguinte: vamos mostrar que o majorante da equação (3.1) pode ser diminuído em uma unidade, ou seja, vamos provar que  $gen(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq pk$ .

Para isto, seja  $Y$  um  $CW$ -complexo  $k$ -dimensional, o qual é um cone  $CW$ -complexo, ou seja,  $Y = CA = \frac{A \times [0, 1]}{\sim}$ , onde  $A$  é um  $CW$ -complexo de dimensão  $k - 1$  e  $\sim$  é a seguinte relação de equivalência:  $(a, 1) \sim (a', 1)$ ,  $\forall a, a' \in A$ .

Nesse sentido, obtemos coordenadas para  $Y$ . Um ponto em  $Y$  é representado pela classe  $[a, u]$ , com  $a \in A$  e  $u \in [0, 1]$ .

Tome  $Y^* = Y \times Y \times \dots \times Y$  ( $p$  vezes)  $- \Delta$ . Defina  $\sigma : Y^* \rightarrow Y^*$  por

$$\sigma(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_p, y_1, \dots, y_{p-1}), \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y^*,$$

ou usando coordenadas, por

$$\begin{aligned} \sigma([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) &= ([a_p, u_p], [a_1, u_1], \dots, [a_{p-1}, u_{p-1}]), \quad \forall a_1, \dots, a_p \in A \text{ e} \\ &\quad \forall u_1, \dots, u_p \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Note que,  $\sigma$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $Y^*$ .

**Lema 3.3.1.**  $gen(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq pk$ .

Demonstração: Sejam  $Z = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \setminus \{(1, \dots, 1)\}$  e  $s : Z \rightarrow Z$  dada por

$$s(u_1, \dots, u_p) = (u_p, u_1, \dots, u_{p-1}), \quad \forall (u_1, \dots, u_p) \in Z.$$

A projeção  $\pi : Y^* \rightarrow Z$  dada por

$$\pi([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) = (u_1, \dots, u_p), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^*,$$

está bem definida, é contínua e  $s \circ \pi = \pi \circ \sigma$ . De fato,

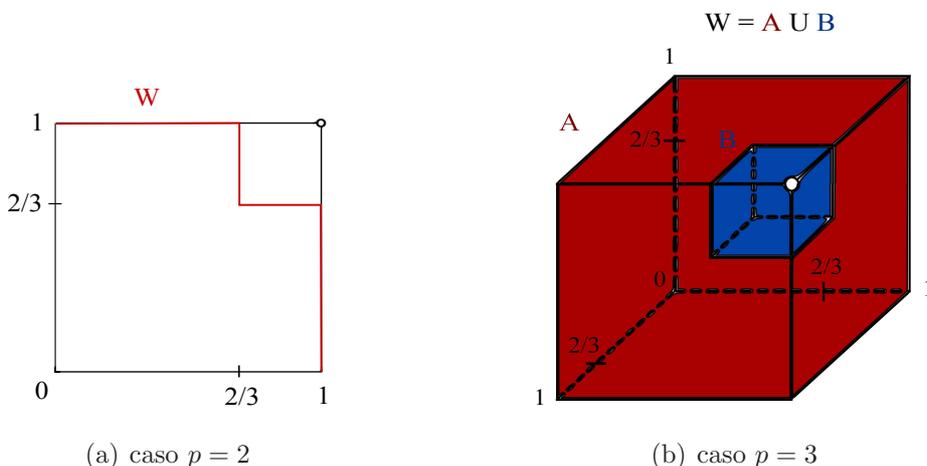
$$\begin{aligned} (s \circ \pi)([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) &= s(u_1, \dots, u_p) \\ &= (u_p, u_1, \dots, u_{p-1}) \\ &= \pi([a_p, u_p], [a_1, u_1], \dots, [a_{p-1}, u_{p-1}]) \\ &= (\pi \circ \sigma)([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^*. \end{aligned}$$

Assim,  $s \circ \pi = \pi \circ \sigma$ .

Seja  $W$  o seguinte subconjunto de  $Z$  :

$$\begin{aligned} &\{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times \{\frac{2}{3}\} \\ &(p \text{ parcelas}) \cup \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \\ &\{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \text{ } ((p-1) \text{ parcelas}) \cup [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \\ &[\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \\ &((p-1) \text{ parcelas}) \cup \dots \cup [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times \\ &[0, 1] \times \{1\} \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} \text{ } ((p-1) \text{ parcelas}). \end{aligned}$$

Assim,  $W$  é a união de  $p^2 = p + p(p-1)$  subconjuntos fechados de  $Z$ , como mostra as figuras abaixo (casos  $p = 2$  e  $p = 3$ ):



Definimos uma retração  $r : Z \rightarrow W$  como segue:

- No canto superior de  $Z$ , a retração  $r$  é a projeção central sobre  $W$  com centro de projeção  $(1, 1, \dots, 1)$ ;
- Na parte inferior de  $Z$ , a retração  $r$  é a projeção sobre  $W$  paralela a diagonal principal de  $Z$  ( $\{(z, z, \dots, z) \mid z \in [0, 1]\}$ ).

Note que,

(i) •  $r(\{1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \subset \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}]$ ;

•  $r([0, 1] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \subset [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}]$ ;

⋮

•  $r([0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\}) \subset [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times \{1\}$ .

(ii) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq p - 1$  coordenadas iguais a 1. Temos duas possibilidades:

•  $z \in W$ : então  $r(z) = z$ , ou seja,  $r(z)$  terá todas as coordenadas iguais as coordenadas de  $z$ .

•  $z \in Z - W$ : então  $z$  pertencerá a parte superior de  $Z$  e podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z = (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_p)$ . Assim,

$$\begin{aligned} r(z) &= (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_p) + \lambda \cdot \overrightarrow{z(1, \dots, 1)} \\ &= (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_p) + \lambda \cdot (1 - 1, 1 - 1, \dots, 1 - 1, x_{n+1} - 1, \dots, x_p - 1) \\ &= (1, 1, \dots, 1, x_{n+1} + \lambda \cdot (x_{n+1} - 1), \dots, x_p + \lambda \cdot (x_p - 1)) \cap W, \end{aligned}$$

mais precisamente,  $r(z) = (1, 1, \dots, 1, x_{n+1} + \lambda \cdot (x_{n+1} - 1), \dots, x_p + \lambda \cdot (x_p - 1))$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de modo que  $r(z) \in W$ . Assim, as coordenadas em  $z$  que são iguais a 1 continuam sendo iguais a 1 em  $r(z) \in W$ .

Usando a retração  $r$ , definimos uma retração  $\rho : Y^* \rightarrow \pi^{-1}(W)$  por

$$\rho([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) = ([a_1, u'_1], \dots, [a_p, u'_p]), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^*,$$

onde  $(u'_1, \dots, u'_p) = r(u_1, \dots, u_p)$ .

Temos que  $\rho$  assim definida é contínua e de (i) e (ii), segue que  $\rho$  está bem definida.

Agora, mostremos que  $s \circ r = r \circ s$ . Primeiro, observemos que  $s(W) \subseteq W$ .

Seja  $P \in Z$  tal que  $P$  pertença a parte inferior de  $Z$ . Tome  $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1, \dots, 1)}$ . Então,  $(s \circ r)(P) = s(r(P)) = s(P + \lambda \vec{v})$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  de modo que  $P + \lambda \vec{v} \in W$ . Assim,

$$(s \circ r)(P) = s(P + \lambda \vec{v}) = s(P) + \lambda \vec{v} \stackrel{s(W) \subseteq W}{=} r(s(P)) = (r \circ s)(P).$$

Agora, seja  $P \in Z$  tal que  $P$  pertença a parte superior de  $Z$ . Seja  $\vec{u} = \overrightarrow{P(1, 1, \dots, 1)}$  e  $\vec{u}' = \overrightarrow{s(P)(1, 1, \dots, 1)}$ . Daí,  $(s \circ r)(P) = s(r(P)) = s(P + \lambda \vec{u})$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  e de forma que  $P + \lambda \vec{u}$  intercepte  $W$ . Logo,

$$(s \circ r)(P) = s(P + \lambda \vec{u}) = s(P) + \lambda \vec{u} \stackrel{s(W) \subset W}{=} r(s(P)) = (r \circ s)(P).$$

Portanto,  $s \circ r = r \circ s$ . Assim,  $s^{p-1} \circ r = r \circ s^{p-1}$ .

Consideremos  $\sigma' = \sigma|_{\pi^{-1}(W)}$ . Temos que  $\sigma'(\pi^{-1}(W)) \subseteq \pi^{-1}(W)$  e  $\sigma'$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $\pi^{-1}(W)$ .

Afirmção:  $\rho : (Y^*, \sigma) \rightarrow (\pi^{-1}(W), \sigma')$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante. De fato,

$$\begin{aligned} (\sigma' \circ \rho)([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) &= \sigma'([a_1, u'_1], \dots, [a_p, u'_p]) \\ &= ([a_p, u'_p], [a_1, u'_1], \dots, [a_{p-1}, u'_{p-1}]), \end{aligned}$$

onde  $(u'_1, \dots, u'_p) = r(u_1, \dots, u_p)$ .

$$\begin{aligned} (\rho \circ \sigma)([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) &= \rho([a_p, u_p], [a_1, u_1], \dots, [a_{p-1}, u_{p-1}]) \\ &= ([a_p, \tilde{u}_p], [a_1, \tilde{u}_1], \dots, [a_{p-1}, \tilde{u}_{p-1}]), \end{aligned}$$

onde  $(\tilde{u}_p, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{p-1}) = r(u_p, u_1, \dots, u_{p-1})$ .

Agora,

$$\begin{aligned} s^{p-1}(\tilde{u}_p, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{p-1}) &= s^{p-2}(\tilde{u}_{p-1}, \tilde{u}_p, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{p-2}) \\ &\vdots \\ &= s(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \dots, \tilde{u}_p, \tilde{u}_1) \\ &= (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s^{p-1}(r(u_p, u_1, \dots, u_{p-1})) &\stackrel{s^{p-1} \circ r = r \circ s^{p-1}}{=} r(s^{p-1}(u_p, u_1, \dots, u_{p-1})) \\ &= r(u_1, \dots, u_p). \end{aligned}$$

Logo,  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p) = r(u_1, \dots, u_p)$  e assim,  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p) = (u'_1, \dots, u'_p)$ .

Portanto,  $\rho \circ \sigma = \sigma' \circ \rho$  e daí,  $\rho$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante.

Disto, concluímos que  $\text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), \mathbb{Z}_p)$ .

Observe que  $W$  é escrito como uma união de fechados de  $Z$ , suponhamos  $W = \bigcup_{i=1}^{p^2} W_i$ .

Seja  $W_1 = \{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1]$  e calculemos  $\pi^{-1}(W_1)$  :

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(W_1) &= \{([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^* \mid \pi([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in \{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1]\} \\ &= \{([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^* \mid (u_1, \dots, u_p) \in \{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1]\} \\ &= \left( \frac{A \times \{\frac{2}{3}\}}{\sim} \times \frac{A \times [0, 1]}{\sim} \times \dots \times \frac{A \times [0, 1]}{\sim} \right) \cap Y^*. \end{aligned}$$

Assim,

$$\dim \pi^{-1}(W_1) \leq p(k-1) + (p-1) = pk - p + p - 1 = pk - 1.$$

Fazendo raciocínio análogo com cada  $W_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, p^2 - 1, p^2$ , obtemos o mesmo resultado, isto é,

$$\dim \pi^{-1}(W_i) \leq pk - 1, \quad \forall i = 2, 3, \dots, p^2 - 1, p^2.$$

Como  $\pi^{-1}(W) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{p^2} W_i\right) = \bigcup_{i=1}^{p^2} \pi^{-1}(W_i)$  é uma união de subespaços fechados com  $\dim \pi^{-1}(W_i) \leq pk - 1$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, p^2$ , por [15, The sum theorem, p.42], segue que

$$\dim \pi^{-1}(W) \leq pk - 1.$$

Pelo Teorema 2.4.2,

$$\text{gen}(\pi^{-1}(W), \mathbb{Z}_p) \leq \dim \pi^{-1}(W) + 1 \leq (pk - 1) + 1 = pk.$$

Portanto,

$$\text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), \mathbb{Z}_p) \leq pk,$$

o que completa a prova do lema ■

Agora, vamos mostrar que o Lema 3.3.1 também é válido quando o espaço  $k$ -dimensional  $Y$  for a suspensão de um  $CW$ -complexo  $A$  de dimensão  $k-1$ , isto é,  $Y = SA = \frac{A \times [0, 1]}{\sim}$ , onde  $\sim$  é a seguinte relação de equivalência:  $(a, 0) \sim (a', 0)$  e  $(a, 1) \sim (a', 1)$ ,  $\forall a, a' \in A$ .

Seja  $Y^* = Y \times Y \times \dots \times Y$  ( $p$  vezes)  $- \Delta$ , onde  $\Delta$  é a diagonal. Definimos  $\sigma : Y^* \rightarrow Y^*$  por  $\sigma(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_p, y_1, \dots, y_{p-1})$ ,  $\forall (y_1, y_2, \dots, y_p) \in Y^*$ , ou usando a representação por classes,

$$\begin{aligned} \sigma([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) &= ([a_p, u_p], [a_1, u_1], \dots, [a_{p-1}, u_{p-1}]), \quad \forall a_1, \dots, a_p \in A \text{ e} \\ &\quad \forall u_1, \dots, u_p \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Note que,  $\sigma$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $Y^*$ .

**Lema 3.3.2.**  $\text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq pk$ .

Demonstração: Sejam  $Z = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$  e  $s : Z \rightarrow Z$  dada por  $s(u_1, \dots, u_p) = (u_p, u_1, \dots, u_{p-1})$ ,  $\forall (u_1, \dots, u_p) \in Z$ .

Como no Lema 3.3.1, tomemos o mesmo subconjunto  $W$  de  $Z$  e definimos a projeção  $\pi : Y^* \rightarrow Z$  dada por

$$\pi([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) = (u_1, \dots, u_p), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^*.$$

Aqui, também temos que  $\pi$  está bem definida, é contínua e  $s \circ \pi = \pi \circ \sigma$ .

Definimos uma retração  $r : Z \rightarrow W$  como segue:

- No canto superior de  $Z$ , a retração  $r$  é a projeção central para  $W$  com centro de projeção  $(1, 1, \dots, 1)$ ;
- Na parte inferior de  $Z$ , a retração  $r$  é a projeção central para  $W$  com centro de projeção  $(0, 0, \dots, 0)$ .

Notemos que,

$$(i) \bullet r(\{1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \subset \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}];$$

$$\bullet r([0, 1] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \subset [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}];$$

⋮

$$\bullet r([0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\}) \subset [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times \{1\}.$$

(ii) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq p - 1$  coordenadas iguais a 1. Temos duas possibilidades:

•  $z \in W$ : então  $r(z) = z$ , ou seja,  $r(z)$  terá todas as coordenadas iguais as coordenadas de  $z$ .

•  $z \in Z - W$ : então  $z$  pertencerá a parte superior de  $Z$  e podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z = (1, \dots, 1, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p)$ ,  $0 < x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p < 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} r(z) &= (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_p) + \lambda \cdot \overrightarrow{z(1, \dots, 1)} \\ &= (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_p) + \lambda \cdot (1 - 1, 1 - 1, \dots, 1 - 1, x_{n+1} - 1, \dots, x_p - 1) \\ &= (1, 1, \dots, 1, x_{n+1} + \lambda \cdot (x_{n+1} - 1), \dots, x_p + \lambda \cdot (x_p - 1)) \cap W, \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas em  $z$  que são iguais a 1 continuam sendo iguais a 1 em  $r(z) \in W$ .

(**iii**) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq p - 1$  coordenadas iguais a 0 e as outras  $p - n$  coordenadas estão entre 0 e 1.

Se  $z \in Z - W$  então  $z$  está na parte inferior de  $Z$  e podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p)$ ,  $0 < x_{n+1}, \dots, x_p < 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} r(z) &= (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_p) + \lambda \cdot \overrightarrow{z(0, \dots, 0)} \\ &= (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_p) + \lambda \cdot (0 - 0, 0 - 0, \dots, 0 - 0, x_{n+1} - 0, \dots, x_p - 0) \\ &= (0, 0, \dots, 0, x_{n+1} + \lambda \cdot x_{n+1}, \dots, x_p + \lambda \cdot x_p) \cap W, \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas em  $z$  que são iguais a 0 continuam sendo iguais a 0 em  $r(z) \in W$ .

(**iv**) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq p - 1$  coordenadas iguais a 0,  $1 < m \leq p - 1$  coordenadas iguais a 1 e as outras  $p - (n + m)$  coordenadas estão entre 0 e 1. Então,  $z \in W$  e daí,  $r(z) = z$ . Logo, as coordenadas de  $z$  que eram iguais a 0 e 1 continuam sendo iguais a 0 e 1, respectivamente, em  $r(z) \in W$ .

Usando a retração  $r$ , definimos uma retração  $\rho : Y^* \rightarrow \pi^{-1}(W)$  por

$$\rho([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) = ([a_1, u'_1], \dots, [a_p, u'_p]), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_p]) \in Y^*,$$

onde  $(u'_1, \dots, u'_p) = r(u_1, \dots, u_p)$ .

Temos que  $\rho$  assim definida é contínua e de (**i**), (**ii**), (**iii**) e (**iv**), segue que  $\rho$  está bem definida.

Usando os mesmos argumentos usados no Lema 3.3.1, podemos mostrar que  $\sigma' = \sigma|_{\pi^{-1}(W)}$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $\pi^{-1}(W)$  e  $\rho$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante. Logo,

$$\text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), \mathbb{Z}_p).$$

Sabemos que  $W$  é escrito como uma união de fechados de  $Z$  e fazendo os mesmos cálculos feitos para o caso  $Y$  cone  $CW$ -complexo, obtemos que

$$\dim \pi^{-1}(W) \leq pk - 1.$$

Pelo Teorema 2.4.2,

$$\text{gen}(\pi^{-1}(W), \mathbb{Z}_p) \leq \dim \pi^{-1}(W) + 1 \leq (pk - 1) + 1 = pk.$$

Portanto,

$$\text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), \mathbb{Z}_p) \leq pk,$$

o que completa a prova do lema. ■

Agora, suponha que  $f : X \rightarrow Y$  não tenha pontos de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Assim, como na prova do Teorema 3.3.1 (i), existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $\phi : X \rightarrow Y^*$ . Deste modo, segue do Lema 3.3.1 (respectivamente do Lema 3.3.2), que

$$\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) \leq \text{gen}(Y^*, \mathbb{Z}_p) \leq pk,$$

contradizendo o fato de  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) \geq n + 1 = pk + 1$ . Isso completa a prova do Teorema 3.3.1 (ii). ■

Demonstração: (**Caso (iii)  $n < pk$  e  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) = n + 1$** ). Neste caso, temos que  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) = n + 1 \leq pk$  e, segue do Teorema 2.4.1 que existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $F : X \rightarrow S_{\mathbb{Z}_p}^{pk}$ . Por outro lado, segue de [39, Corollary 6.1] que existem um  $\mathbb{Z}_p$ -espaço  $X'$ , um cone CW-complexo  $Y$  de dimensão  $k$  e uma aplicação  $\varphi : X' \rightarrow Y$  sem pontos de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Mais ainda, existe uma aplicação  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante  $E : S_{\mathbb{Z}_p}^{pk} \rightarrow X'$  e, conseqüentemente, a aplicação  $f = \varphi \circ E \circ F : X \rightarrow Y$  não possui pontos de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Observamos que tal construção mostra que a hipótese  $n \geq pk$  no Teorema 3.3.1(i) e (ii) é a melhor condição para garantir a existência de pontos de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, quando consideramos qualquer  $\mathbb{Z}_p$ -espaço paracompacto Hausdorff  $X$  de  $\text{gen}(X, \mathbb{Z}_p) = n + 1$ . Isso completa a prova do Teorema 3.3.1. ■

**Observação 3.3.4.** Os espaços  $X'$  e  $Y$  e a aplicação contínua  $\varphi : X \rightarrow Y$  citados na demonstração do Teorema 3.3.1(iii) foram construídos inicialmente no artigo [21] de Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov para o caso  $G = \mathbb{Z}_p$ . Recordemos aqui tal construção.

Inicialmente, notemos que  $\text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}) = \{\eta : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta \text{ é contínua}\}$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^p$ . Para ver isto, basta considerarmos a aplicação  $\xi : \text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^p$  dada por  $\xi(h) = (h(e), h(g_2), \dots, h(g_p))$ ,  $\forall h \in \text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R})$  onde  $\mathbb{Z}_p = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_p\}$ , com  $e$  elemento neutro de  $\mathbb{Z}_p$ .

Mais ainda,  $\mathbb{Z}_p$  atua sobre  $\mathbb{R}^p$  pela permutação cíclica das coordenadas. Consideremos  $\mathbb{R}^p$  como o espaço  $\text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R})$  e assim,  $\mathbb{Z}_p$  atua sobre  $\text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R})$  como segue:

$$\theta : \mathbb{Z}_p \times \text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R})$$

$$(g_i, \eta) \quad \mapsto \quad g_i \cdot \eta; \quad g_i \cdot \eta(g_j) := \eta(g_i^{-1}g_j), \quad \forall g_i, g_j \in \mathbb{Z}_p, \quad \forall \eta \in \text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}).$$

Seja  $S^{p-2} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_1 + \dots + x_p = 0 \text{ e } x_1^2 + \dots + x_p^2 = 1\}$  a  $(p-2)$ -esfera. Em termos de aplicações,

$$S^{p-2} = \left\{ \eta \in \text{Map}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}) \mid \sum_{g \in \mathbb{Z}_p} \eta(g) = 0 \text{ e } \sum_{g \in \mathbb{Z}_p} \eta^2(g) = 1 \right\}.$$

Notemos que,  $S^{p-2}$  é invariante sobre a ação  $\theta$ , ou seja,  $\theta(\mathbb{Z}_p \times S^{p-2}) \subseteq S^{p-2}$ .

Consideremos  $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_1 = \dots = x_p\}$  a diagonal de  $\mathbb{R}^p$ . Temos que,  $\mathbb{Z}_p$  atua livremente sobre  $\mathbb{R}^p - \Delta$  e ainda,  $S^{p-2} \subset \mathbb{R}^p - \Delta$ . Assim,  $\mathbb{Z}_p$  atua livremente sobre  $S^{p-2}$ .

Seja  $\pi : S^{p-2} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\pi(x_1, \dots, x_p) = x_1, \forall (x_1, \dots, x_p) \in S^{p-2}$ . Ou, em termos de aplicações,  $\pi(\eta) = \eta(e), \forall \eta \in S^{p-2}$ . Então,

$\pi(x_1, \dots, x_p) = \pi(g \cdot (x_1, \dots, x_p)), \forall (x_1, \dots, x_p) \in S^{p-2}, \forall g \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p) \in \Delta$ , o que é um absurdo pois  $S^{p-2} \subset \mathbb{R}^p - \Delta$ . Logo,  $\pi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Agora, seja  $T$  o  $CW$ -complexo 1-dimensional sobre o 2-plano que é a união do segmento  $I_1 = [-1, 1]$  do eixo  $x$  com o segmento  $I_2 = [0, 1]$  do eixo  $y$ . Então,  $\pi(S^{p-2}) \subset I_1$ .

Tomemos o espaço  $X^{p-1} = S^{p-2} * \mathbb{Z}_p$ , que é um  $CW$ -complexo de dimensão  $p-1$ . Os pontos de  $X^{p-1}$  podem ser vistos como classes  $[\eta, g, t]$ , onde  $\eta \in S^{p-2}, g \in \mathbb{Z}_p, t \in [0, 1]$ . Definimos a ação:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p \times X^{p-1} &\rightarrow X^{p-1} \\ (h, [\eta, g, t]) &\mapsto [h\eta, hg, t] \end{aligned}$$

Observemos que esta ação é livre pois  $\mathbb{Z}_p$  atua livremente sobre  $S^{p-2}$ .

Definimos  $\psi : X^{p-1} \rightarrow T$  por

$$\psi([\eta, g, t]) = \begin{cases} t\eta(e) \in I_1, & g \neq e, \\ (2t-1)\eta(e) \in I_1, & g = e, \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 1-2t \in I_2, & g = e, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Temos que:

- $\psi$  é contínua;
- $\psi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. De fato, a órbita de um ponto  $[\eta, e, t]$  consiste dos pontos  $[g\eta, g, t], g \in \mathbb{Z}_p$ . Se  $\psi$  é constante sobre tal órbita e  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  então,  $(2t-1)\eta(e) = \psi([\eta, e, t]) = \psi([g\eta, g, t]) = t g \eta(e) = t \eta(g^{-1}), \forall g \neq e$ .

Assim,  $\psi([h\eta, h, t]) = \psi([g\eta, g, t]), \forall g, h \in \mathbb{Z}_p, g \neq h \Rightarrow t\eta(h^{-1}) = t\eta(g^{-1}), \forall g, h \in \mathbb{Z}_p - \{e\}, g \neq h \Rightarrow \eta(h) = \eta(g), \forall g, h \in \mathbb{Z}_p - \{e\}, g \neq h$ . E ainda, temos que  $\sum_{g \in \mathbb{Z}_p} \eta(g) =$

$0$  e  $\sum_{g \in \mathbb{Z}_p} \eta^2(g) = 1$ , o que implica que  $(p-1)\eta(g) + \eta(e) = 0$  e  $(p-1)\eta^2(g) + \eta^2(e) = 1$ .

Com isto, concluímos que  $\eta(g) = \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}}$  e  $\eta(e) = \frac{1-p}{\sqrt{p(p-1)}}$  ou  $\eta(g) = \frac{-1}{\sqrt{p(p-1)}}$

$$\text{e } \eta(e) = \frac{p-1}{\sqrt{p(p-1)}}.$$

Logo,  $(2t-1)\eta(e) = t\eta(g)$ ,  $\forall g \neq e$  e  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow t = \frac{(2t-1)\eta(e)}{\eta(g)} = (2t-1)(1-p) \Rightarrow t = 2t - 2tp - 1 + p \Rightarrow t - 2tp = 1 - p \Rightarrow t = \frac{1-p}{1-2p} = \frac{p-1}{2p-1} < \frac{1}{2}$ , o que é uma contradição pois  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

Agora, se  $t \in [0, \frac{1}{2})$  obtemos que  $\psi([\eta, e, t]) = 1 - 2t \in I_2 - \{(0, 0)\}$  e  $\psi([g\eta, g, t]) = t\eta(g) = t\eta(g^{-1}) \in I_1$ . Nesse caso,  $\psi$  também não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Portanto,  $\psi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Consideremos agora o join  $X' = X^{p-1} * \dots * X^{p-1}$  de  $k$  cópias de  $X^{p-1}$ . Temos que  $X'$  é um CW-complexo  $(kp-1)$ -dimensional.

Um ponto de  $X'$  pode ser escrito como  $[t_1x_1 + \dots + t_kx_k]$ , com  $t_i \geq 0$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $t_1 + \dots + t_k = 1$  e  $G$  atua livremente sobre  $X'$  pela ação diagonal:

$$\begin{aligned} \theta : \quad \mathbb{Z}_p \times X' &\rightarrow X' \\ (g, [t_1x_1 + \dots + t_kx_k]) &\mapsto [t_1(g \cdot x_1) + \dots + t_k(g \cdot x_k)] \end{aligned}$$

Definimos  $\varphi : X' \rightarrow Y = T^k = T \times \dots \times T$  ( $k$  vezes) como sendo

$$\varphi([t_1x_1 + \dots + t_kx_k]) = (t_1\psi(x_1), \dots, t_k\psi(x_k)), \forall [t_1x_1 + \dots + t_kx_k] \in X'.$$

Além de  $\varphi$  ser contínua, notemos que  $\varphi$  só tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência se  $\psi$  tiver ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Portanto,  $\varphi$  não tem ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Note que o espaço metrizável  $k$ -dimensional  $Y = T^k$  é um cone CW-complexo, pois  $T$  é um cone CW-complexo.

### 3.4 Teoremas de $(H, G)$ -coincidências para aplicações de $G$ -espaços livres

Suponhamos que  $X$  e  $Y$  sejam espaços topológicos,  $G$  é um grupo finito que atua livremente sobre  $X$  e  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua. Se  $H$  é um subgrupo de  $G$ , então  $H$  atua à direita de cada órbita  $Gx$  de  $G$  como segue: se  $y \in Gx$  e  $y = gx$ ,  $g \in G$ , então  $hy = ghx$ .

Seguindo [19], [20] e [23], o conceito de  $G$ -coincidência é generalizado como segue:

**Definição 3.4.1.** Um ponto  $x \in X$  é um ponto de  $(H, G)$ -coincidência de  $f$  se  $f$  leva cada órbita da ação de  $H$  sobre a  $G$ -órbita de  $x$  em um único ponto de  $Y$ . Denotaremos

por  $A(f, H, G)$  o conjunto de todos os pontos de  $(H, G)$ -coincidência de  $f$ .

**Observação 3.4.1.** Se  $H$  é o subgrupo trivial, então todo ponto de  $X$  é um ponto de  $(H, G)$ -coincidência. Se  $H = G$ , esta é a definição usual de  $G$ -coincidência. Se  $G = \mathbb{Z}_p$ , com  $p$  primo, então o único subgrupo  $H$  de  $G$  não-trivial é  $H = \mathbb{Z}_p$  e assim, um ponto de  $(H, G)$ -coincidência é um ponto de  $G$ -coincidência.

Inicialmente, desejamos encontrar condições sobre  $X$ ,  $Y$  e  $G$  que garantam que toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tenha um ponto de  $(H, G)$ -coincidência, com  $G$  grupo finito e  $H \cong \mathbb{Z}_p$  subgrupo de  $G$ ,  $p$  primo. Neste sentido, nós provamos o seguinte:

**Teorema 3.4.1.** Seja  $G$  um grupo finito que atua livremente sobre um espaço  $X$  paracompacto Hausdorff. Suponha que  $H \subset G$  seja um subgrupo normal cíclico de ordem  $p$ , com  $p$  primo, e  $\text{gen}(X, H) \geq n + 1$ .

(i) Se  $n > |G|k$  e  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

(ii) Se  $n = |G|k$  e  $Y$  for um cone CW-complexo  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

Demonstração: (**Caso (i)**  $n > |G|k$ ). Sejam  $s = \frac{|G|}{p}$  o número de classes laterais à esquerda de  $G$  por  $H \cong \mathbb{Z}_p$  e  $\{a_1, \dots, a_s\}$  um conjunto de representantes destas classes laterais.

Definimos  $F : X \rightarrow Y^s = Y \times \dots \times Y$  por  $F(x) = (f(a_1x), \dots, f(a_sx))$ ,  $\forall x \in X$ . Temos que,  $F$  está bem definida e é contínua.

Mostremos agora que  $A(f, H, G) = A(F, H)$ , onde

$$A(F, H) = \{x \in X \mid F(x) = F(hx), \forall h \in H\}$$

é o conjunto das  $H$ -coincidências de  $F$ .

Para isto, seja  $x \in A(f, H, G)$ . Então,  $f$  colapsa cada órbita determinada pela ação de  $H$  sobre  $a_ix$  num único ponto,  $i = 1, \dots, s$ . Se  $h \in H$ ,

$$F(hx) = (f(a_1hx), \dots, f(a_ihx), \dots, f(a_shx)).$$

Como  $H$  é normal em  $G$ ,  $a_ihx = \tilde{h}a_ix$ , para algum  $\tilde{h} \in H$ . Assim,  $a_ix$  e  $a_ihx$  pertencem a mesma  $H$ -órbita e  $f(a_ix) = f(a_ihx)$ ,  $\forall i = 1, \dots, s$ , o que implica que  $F(x) = F(hx)$ ,  $\forall h \in H$ . Logo,  $x \in A(F, H)$ .

Por outro lado, seja  $x \in A(F, H)$ . Então,  $F(x) = F(hx)$ ,  $\forall h \in H$ . Assim,  $f(a_i x) = f(a_i hx)$ ,  $\forall h \in H$ ,  $\forall i = 1, \dots, s$ . Mas, pela definição da ação à direita de  $H$  sobre cada órbita  $Gx$ ,  $a_i hx = ha_i x$ ,  $\forall h \in H$ ,  $\forall i = 1, \dots, s$ . Então, para  $\forall h \in H$  e  $\forall i = 1, \dots, s$ ,  $a_i x$  e  $a_i hx$  estão na mesma  $H$ -órbita e são colapsados pela  $f$  num único ponto. Portanto,  $x \in A(f, H, G)$ .

Deste modo, mostramos que  $A(f, H, G) = A(F, H)$ .

Agora, como  $\dim Y^s = s \cdot k$  e por hipótese  $n > |G|k = p \cdot (s \cdot k)$ , segue do Teorema 3.3.1(i), que  $F$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja,  $A(F, H) \neq \emptyset$ . Deste modo,  $A(f, H, G) \neq \emptyset$  e, portanto,  $f$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

**(Caso (ii))**  $n = |G|k$ . Como no caso (i) mostramos de maneira análoga que  $A(f, H, G) = A(F, H)$ . Além disso,  $Y^s$  é um cone CW-complexo de dimensão  $s \cdot k$  e, do Teorema 3.3.1(ii), concluimos que  $F$  tem um ponto de  $\mathbb{Z}_p$ -coincidência e, portanto,  $A(f, H, G) \neq \emptyset$ .

■

**Observação 3.4.2.** No caso  $n < |G|k$  e  $\text{gen}(X, H) = n + 1$ , o Teorema 3.4.1 não vale e para ver isto, basta considerarmos o Teorema 3.3.1(iii), onde  $G = H = \mathbb{Z}_p$ .

Agora, queremos encontrar condições sobre  $X$ ,  $Y$  e  $G$  que garantam que toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tenha um ponto de  $(H, G)$ -coincidência, com  $G$  grupo finito e para algum subgrupo não-trivial  $H \subset G$ . Neste sentido, nós provamos o seguinte

**Teorema 3.4.2.** Sejam  $G$  um grupo finito,  $X$  um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff, com  $\text{gen}(X, G) \geq n + 1$  e  $k$  um número natural.

(i) Se  $n > |G|k$  e  $Y$  for um espaço metrizável  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência para algum subgrupo não-trivial  $H \subset G$ .

(ii) Se  $n = |G|k$  e  $Y$  for um cone (ou suspensão) CW-complexo  $k$ -dimensional, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tem um ponto de  $(H, G)$ -coincidência, para algum subgrupo não-trivial  $H \subset G$ .

(iii) Se  $n < |G|k$  e  $\text{gen}(X, G) = n + 1$ , então existem  $Y$  cone CW-complexo  $k$ -dimensional e aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f$  não tem ponto de  $G$ -coincidência. Em particular, se  $G = H = \mathbb{Z}_p$ ,  $f$  não tem ponto de  $(H, G)$ -coincidência.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 3.4.2, faremos algumas considerações sobre o resultado:

**Observação 3.4.3.** O Teorema 3.4.2 é uma generalização natural do Teorema 3.4.1, pois no caso particular onde  $G = H \cong \mathbb{Z}_p$ , detectar pontos de  $(H, G)$ -coincidência com  $H$  subgrupo não trivial de  $G$  é equivalente a detectar pontos de  $G$ -coincidência (vide Observação 3.4.1). Dessa forma, a demonstração do Teorema 3.4.2 segue a mesma linha da demonstração do Teorema 3.4.1. Observamos que a sutil e principal diferença é a forma de determinar uma  $G$ -ação sobre o produto cartesiano de  $|G|$ -cópias de um determinado espaço usando permutações que estão associadas a multiplicação interna dos elementos de  $G$ . Este conceito foi definido inicialmente em [20] e, generaliza o conceito de  $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre o produto cartesiano de  $p$ -cópias de um determinado espaço usando a permutação cíclica das coordenadas.

**Observação 3.4.4.** O Teorema 3.4.2 generaliza parcialmente o Teorema 3.3.2, resultado principal provado por Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov em [21], para o caso  $n > |G|k$  conforme Observação 3.3.2.

No entanto, como mostra o Exemplo 3.3.1, no caso  $n = |G|k$  o Teorema 3.4.2(ii) não pode ser estendido para a classe mais ampla dos CW-complexos  $Y$  de dimensão  $k$ .

**Observação 3.4.5.** Utilizando o Teorema 2.3.2 que afirma que se  $X$  é um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff então,  $gen(X, G) = n + 1$  se, e somente se,  $col(X, G) = n + |G|$ , concluímos que o Teorema 3.4.2 generaliza o Teorema 3.3.3, resultado principal provado por Aarts, Fokkink e Vermeer em [2].

**Observação 3.4.6.** Segue do Teorema 3.4.2 (iii) que a hipótese  $n \geq |G|k$  no Teorema 3.4.2(i) e (ii), tem a seguinte propriedade: É a melhor condição para se garantir a existência de  $(H, G)$ -coincidências se todos os grupos finitos  $G$  são considerados.

### 3.4.1 Demonstração do Teorema 3.4.2

Demonstração: (**Caso (i)**  $n > |G|k$ ). Suponhamos que  $|G| = r$  e seja  $G = \{g_1, \dots, g_r\}$  uma enumeração para os elementos de  $G$ .

Consideremos a aplicação  $G \times Y^r \rightarrow Y^r$  dada por  $(g, (y_1, \dots, y_r)) \mapsto (y_{\sigma_g(1)}, \dots, y_{\sigma_g(r)})$ , onde a permutação  $\sigma_g$  é definida por  $\sigma_g(i) = j$ , e  $j$  é tal que  $g_i g = g_j$ . Esta aplicação é uma  $G$ -ação à esquerda de  $Y^r$ .

Para um subgrupo  $H \subset G$ , sejam  $(Y^r)^H = \{z \in Y^r \mid h \cdot z = z, \forall h \in H\}$  o conjunto dos pontos fixos de  $H$  e  $F = \bigcup_H (Y^r)^H$ , onde  $H$  é qualquer subgrupo não-trivial de  $G$ .

Seja  $Y^{**} = Y^r - F$ . Temos que  $G$  atua livremente sobre  $Y^{**}$  e  $Y^{**}$  é um espaço metrizável (pois é subespaço de  $Y^r$ ).

Como  $X$  é um espaço com uma  $G$ -ação então uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  induz uma aplicação  $G$ -equivariante  $\phi : X \rightarrow Y^r$  dada por  $\phi(x) = (f(g_1x), \dots, f(g_rx))$ ,  $\forall x \in X$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(gx) &= (f(g_1gx), \dots, f(g_rgx)) \\ &= (f(g_{\sigma_g(1)}x), \dots, f(g_{\sigma_g(r)}x)). \end{aligned}$$

Por outro lado,  $g\phi(x) = g(f(g_1x), \dots, f(g_rx)) = g(y_1, \dots, y_r)$ , onde  $y_i = f(g_ix)$ . Assim,

$$\begin{aligned} g\phi(x) &= (y_{\sigma_g(1)}, \dots, y_{\sigma_g(r)}) \\ &= (f(g_{\sigma_g(1)}x), \dots, f(g_{\sigma_g(r)}x)) \\ &= \phi(gx). \end{aligned}$$

Suponhamos que  $f : X \rightarrow Y$  não tenha pontos de  $(H, G)$ -coincidência. Assim,  $\phi(X) \subset Y^{**}$  e temos  $\phi : X \rightarrow Y^{**}$  uma aplicação  $G$ -equivariante.

Logo, da Proposição 2.3.1, vem que  $gen(X, G) \leq gen(Y^{**}, G)$ .

Pelo Teorema 2.4.2, temos que

$$gen(Y^{**}, G) \leq dim Y^{**} + 1 \leq |G|k + 1. \quad (3.2)$$

Consequentemente, como  $n > |G|k$ ,  $gen(X, G) \leq |G|k + 1 < n + 1$ , o que é um absurdo pois  $gen(X, G) \geq n + 1$ . ■

**Observação 3.4.7.** No caso  $n = |G|k$ , o Teorema 3.4.2(i) é válido quando  $Y$  for um cone (ou suspensão)  $CW$ -complexo  $k$ -dimensional (Lemas 3.4.1 e 3.4.2), e a prova deste caso será feita usando a mesma estratégia já utilizada no caso  $H = G = \mathbb{Z}_p$  (Lemas 3.3.1 e 3.3.2), ou seja, vamos diminuir o majorante da equação (3.2) em uma unidade.

Demonstração: (**Caso (ii)**  $n = |G|k$ ). Seja  $Y$  um cone  $CW$ -complexo  $k$ -dimensional, ou seja,  $Y = CA = \frac{A \times [0, 1]}{\sim}$ , onde  $A$  é um  $CW$ -complexo de dimensão  $k - 1$ .

Tome  $Y^{**} = Y^r - F$ , onde  $F = \bigcup_H (Y^r)^H$  e  $H$  é qualquer subgrupo não-trivial de  $G$ . Vamos chamar de  $\alpha$  a  $G$ -ação livre sobre  $Y^{**}$  dada na prova do Teorema 3.4.2(i). Usando coordenadas, a  $G$ -ação  $\alpha$  é dada por

$$\alpha([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) = ([a_{\sigma_g(1)}, u_{\sigma_g(1)}], \dots, [a_{\sigma_g(r)}, u_{\sigma_g(r)}]), \quad (3.3)$$

$\forall a_1, \dots, a_r \in A$  e  $\forall u_1, \dots, u_r \in [0, 1]$ , onde a permutação  $\sigma_g$  é definida por  $\sigma_g(i) = j$ , e  $j$  é tal que  $g_i g = g_j$ .

**Lema 3.4.1.**  $gen(Y^{**}, G) \leq |G| k$ .

Demonstração: Sejam  $Z = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \setminus \{(1, \dots, 1)\}$  e  $s : Z \rightarrow Z$  dada por

$$s(u_1, \dots, u_r) = (u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)}), \quad \forall (u_1, \dots, u_r) \in Z.$$

A projecção  $\pi : Y^{**} \rightarrow Z$  dada por

$$\pi([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) = (u_1, \dots, u_r), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) \in Y^{**},$$

está bem definida, é contínua e  $s \circ \pi = \pi \circ \alpha$ . De fato,  $\forall ([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) \in Y^{**}$ ,

$$\begin{aligned} (s \circ \pi)([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) &= s(u_1, \dots, u_r) \\ &= (u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)}) \\ &= \pi([a_{\sigma_g(1)}, u_{\sigma_g(1)}], \dots, [a_{\sigma_g(r)}, u_{\sigma_g(r)}]) \\ &= (\pi \circ \alpha)([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]). \end{aligned}$$

Assim,  $s \circ \pi = \pi \circ \alpha$ .

Seja  $W$  o seguinte subconjunto de  $Z$  :

$\{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{\frac{2}{3}\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times \{\frac{2}{3}\}$   
 $(r \text{ parcelas}) \cup \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup$   
 $\{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] ((r-1) \text{ parcelas}) \cup [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup$   
 $[\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}]$   
 $((r-1) \text{ parcelas}) \cup \dots \cup [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times$   
 $[0, 1] \times \{1\} \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} ((r-1) \text{ parcelas}).$

Assim,  $W$  é a união de  $r^2 = r + r(r-1)$  subconjuntos fechados de  $Z$ .

Definimos uma retração  $\gamma : Z \rightarrow W$  como segue:

- No canto superior de  $Z$ , a retração  $\gamma$  é a projecção central sobre  $W$  com centro de projecção  $(1, 1, \dots, 1)$ ;

- Na parte inferior de  $Z$ , a retração  $\gamma$  é a projecção sobre  $W$  paralela a diagonal principal de  $Z$  ( $\{(z, z, \dots, z) \mid z \in [0, 1]\}$ ).

Usando a retração  $\gamma$ , definimos uma retração  $\rho : Y^{**} \rightarrow \pi^{-1}(W)$  por

$$\rho([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) = ([a_1, u'_1], \dots, [a_r, u'_r]), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) \in Y^{**},$$

onde  $(u'_1, \dots, u'_r) = \gamma(u_1, \dots, u_r)$ .

Temos que  $\rho$  é contínua e de usando argumento análogo ao do Lema 3.3.1, segue que  $\rho$  está bem definida e  $s \circ \gamma = \gamma \circ s$ .

Consideremos  $\alpha' = \alpha|_{\pi^{-1}(W)}$ . Temos que  $\alpha(\pi^{-1}(W)) \subseteq \pi^{-1}(W)$  e  $\alpha'$  gera uma  $G$ -ação livre sobre  $\pi^{-1}(W)$ .

Afirmção:  $\rho : (Y^{**}, \alpha) \rightarrow (\pi^{-1}(W), \alpha')$  é uma aplicação  $G$ -equivariante. De fato,

$$\begin{aligned} (\alpha' \circ \rho)([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) &= \alpha'([a_1, u'_1], \dots, [a_r, u'_r]) \\ &= ([a_{\sigma_g(1)}, u'_{\sigma_g(1)}], \dots, [a_{\sigma_g(r)}, u'_{\sigma_g(r)}]), \end{aligned}$$

onde  $(u'_1, \dots, u'_r) = \gamma(u_1, \dots, u_r)$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\rho \circ \alpha)([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) &= \rho([a_{\sigma_g(1)}, u_{\sigma_g(1)}], \dots, [a_{\sigma_g(r)}, u_{\sigma_g(r)}]) \\ &= ([a_{\sigma_g(1)}, \tilde{u}_{\sigma_g(1)}], \dots, [a_{\sigma_g(r)}, \tilde{u}_{\sigma_g(r)}]), \end{aligned}$$

onde  $(\tilde{u}_{\sigma_g(1)}, \dots, \tilde{u}_{\sigma_g(r)}) = \gamma(u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)})$ .

Observemos que, para algum  $l \in \{1, \dots, r\}$ ,  $g^l = e$  ( $e$  é o elemento neutro de  $G$ ).

Assim,

$$\begin{aligned} s^l(u_1, \dots, u_r) &= s^{l-1}(u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)}) \\ &= s^{l-2}(u_{\sigma_{g^2}(1)}, \dots, u_{\sigma_{g^2}(r)}) \\ &\vdots \\ &= s(u_{\sigma_{g^{l-1}}(1)}, \dots, u_{\sigma_{g^{l-1}}(r)}) \\ &= (u_{\sigma_{g^l}(1)}, \dots, u_{\sigma_{g^l}(r)}) \\ &\stackrel{\sigma_{g^l} = Id}{=} (u_1, \dots, u_r). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} s^{l-1}(\tilde{u}_{\sigma_g(1)}, \dots, \tilde{u}_{\sigma_g(r)}) &= s^{l-2}(\tilde{u}_{\sigma_{g^2}(1)}, \dots, \tilde{u}_{\sigma_{g^2}(r)}) \\ &\vdots \\ &= (\tilde{u}_{\sigma_{g^l}(1)}, \dots, \tilde{u}_{\sigma_{g^l}(r)}) \\ &\stackrel{\sigma_{g^l} = Id}{=} (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s^{l-1}(\gamma(u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)})) &\stackrel{s^{l-1} \circ \gamma \equiv \gamma \circ s^{l-1}}{=} \gamma(s^{l-1}(u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)})) \\ &= \gamma(u_1, \dots, u_r). \end{aligned}$$

Então, temos que  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r) = \gamma(u_1, \dots, u_r)$  e assim,  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p) = (u'_1, \dots, u'_p)$ . Logo,  $s(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r) = s(u'_1, \dots, u'_r)$  e daí,  $(\tilde{u}_{\sigma_g(1)}, \dots, \tilde{u}_{\sigma_g(r)}) = (u'_{\sigma_g(1)}, \dots, u'_{\sigma_g(r)})$ .

Portanto,  $\rho$  é uma aplicação  $G$ -equivariante e, deste modo, concluímos que

$$\text{gen}(Y^{**}, G) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), G).$$

De modo análogo à prova do Lema 3.3.1, podemos mostrar que  $\dim \pi^{-1}(W) \leq |G|k - 1$ .

Pelo Teorema 2.4.2,

$$\text{gen}(\pi^{-1}(W), G) \leq \dim \pi^{-1}(W) + 1 \leq (|G|k - 1) + 1 = |G|k.$$

Portanto,  $\text{gen}(Y^{**}, G) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), G) \leq |G|k$ , o que completa a prova do lema. ■

Agora, mostremos que o Lema 3.4.1 também é válido quando o espaço  $k$ -dimensional  $Y$  é uma suspensão de um  $CW$ -complexo  $(k-1)$ -dimensional  $A$ , isto é,  $Y = SA = \frac{A \times [0, 1]}{\sim}$ , com  $A$   $CW$ -complexo de dimensão  $k-1$ .

Sejam  $Y^{**} = Y^r - F$  e  $\alpha$  a  $G$ -ação livre sobre  $Y^{**}$  dada pela equação (3.3). Neste caso temos o seguinte:

**Lema 3.4.2.**  $\text{gen}(Y^{**}, G) \leq |G|k$ .

Demonstração: Sejam  $Z = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$  e  $s : Z \rightarrow Z$  dada por  $s : Z \rightarrow Z$  dada por

$$s(u_1, \dots, u_r) = (u_{\sigma_g(1)}, \dots, u_{\sigma_g(r)}), \quad \forall (u_1, \dots, u_r) \in Z.$$

Como no Lema 3.4.1, tomemos o subconjunto  $W$  de  $Z$  e definimos a aplicação projeção  $\pi : Y^{**} \rightarrow Z$  dada por

$$\pi([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) = (u_1, \dots, u_r), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_p, u_r]) \in Y^{**}.$$

Aqui, também temos que  $\pi$  está bem definida, é contínua e  $s \circ \pi = \pi \circ \alpha$ .

Definimos uma retração  $\eta : Z \rightarrow W$  como segue:

- No canto superior de  $Z$ , a retração  $\eta$  é a projeção central sobre  $W$  com centro de projeção  $(1, 1, \dots, 1)$ ;
- Na parte inferior de  $Z$ , a retração  $\eta$  é a projeção central sobre  $W$  com centro de projeção  $(0, 0, \dots, 0)$ .

Notemos que,

$$(i) \bullet \eta(\{1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \subset \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}];$$

$$\bullet \eta([0, 1] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \subset [0, \frac{2}{3}] \times \{1\} \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}];$$

⋮

$$\bullet \eta([0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\}) \subset [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \times \{1\} \cup \dots \cup [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \times \dots \times [\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{2}{3}] \times \{1\}.$$

(ii) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq r - 1$  coordenadas iguais a 1. Temos duas possibilidades:

•  $z \in W$ : então  $\eta(z) = z$ , ou seja,  $\eta(z)$  terá todas as coordenadas iguais as coordenadas de  $z$ .

•  $z \in Z - W$ : então  $z$  pertencerá a parte superior de  $Z$  e podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z = (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_r)$ ,  $0 < x_{n+1}, \dots, x_r < 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \eta(z) &= (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_r) + \lambda \cdot \overrightarrow{z(1, \dots, 1)} \\ &= (1, \dots, 1, x_{n+1}, \dots, x_r) + \lambda \cdot (1 - 1, \dots, 1 - 1, x_{n+1} - 1, \dots, x_r - 1) \\ &= (1, 1, \dots, 1, x_{n+1} + \lambda \cdot (x_{n+1} - 1), \dots, x_r + \lambda \cdot (x_r - 1)) \cap W, \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas em  $z$  que são iguais a 1 continuam sendo iguais a 1 em  $\eta(z) \in W$ .

(iii) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq r - 1$  coordenadas iguais a 0 e as outras  $r - n$  coordenadas estão entre 0 e 1.

Se  $z \in Z - W$  então  $z$  está na parte inferior de  $Z$  e podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r)$ ,  $0 < x_{n+1}, \dots, x_r < 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \eta(z) &= (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_r) + \lambda \cdot \overrightarrow{z(0, \dots, 0)} \\ &= (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_r) + \lambda \cdot (0 - 0, \dots, 0 - 0, x_{n+1} - 0, \dots, x_r - 0) \\ &= (0, 0, \dots, 0, x_{n+1} + \lambda \cdot x_{n+1}, \dots, x_r + \lambda \cdot x_r) \cap W, \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas em  $z$  que são iguais a 0 continuam sendo iguais a 0 em  $\eta(z) \in W$ .

(*iv*) Seja  $z \in Z$  tal que  $z$  tenha  $1 < n \leq r - 1$  coordenadas iguais a 0,  $1 < m \leq r - 1$  coordenadas iguais a 1 e as outras  $r - (n + m)$  coordenadas estão entre 0 e 1. Então,  $z \in W$  e deste modo,  $\eta(z) = z$ . Logo, as coordenadas de  $z$  que eram iguais a 0 e 1 continuam sendo iguais a 0 e 1, respectivamente, em  $\eta(z) \in W$ .

Usando a retração  $\eta$ , definimos uma retração  $\rho : Y^{**} \rightarrow \pi^{-1}(W)$  por

$$\rho([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) = ([a_1, u'_1], \dots, [a_r, u'_r]), \quad \forall ([a_1, u_1], \dots, [a_r, u_r]) \in Y^{**},$$

onde  $(u'_1, \dots, u'_r) = \eta(u_1, \dots, u_r)$ .

Temos que  $\rho$  assim definida é contínua e usando os mesmos argumentos utilizados na prova do Lema 3.3.2,  $\rho$  está bem definida e  $s \circ \eta = \eta \circ s$ .

Consideremos  $\alpha' = \alpha|_{\pi^{-1}(W)}$ . Temos que  $\alpha(\pi^{-1}(W)) \subseteq \pi^{-1}(W)$  e  $\alpha'$  gera uma  $G$ -ação livre sobre  $\pi^{-1}(W)$ .

Novamente, por argumentos análogos aos da prova do Lema 3.4.1, podemos mostrar que  $\rho$  é uma aplicação  $G$ -equivariante. Logo,  $\text{gen}(Y^{**}, G) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), G)$ .

Sabemos que  $W$  é escrito como uma união de fechados de  $Z$  e de maneira análoga ao caso  $Y$  cone  $CW$ -complexo, obtemos que  $\dim \pi^{-1}(W) \leq |G|k - 1$ .

Pelo Teorema 2.4.2,

$$\text{gen}(\pi^{-1}(W), G) \leq \dim \pi^{-1}(W) + 1 \leq (|G|k - 1) + 1 = |G|k.$$

Portanto,  $\text{gen}(Y^{**}, G) \leq \text{gen}(\pi^{-1}(W), G) \leq |G|k$ , o que completa a prova do lema. ■

Agora, suponha que  $f : X \rightarrow Y$  não tenha pontos de  $(H, G)$ -coincidência. Assim, como na prova do Teorema 3.4.2 (*i*), existe uma aplicação  $G$ -equivariante  $\phi : X \rightarrow Y^{**}$ . Deste modo, segue do Lema 3.4.1 (respectivamente do Lema 3.4.2), que

$$\text{gen}(X, G) \leq \text{gen}(Y^{**}) \leq |G|k,$$

contradizendo o fato de  $\text{gen}(X, G) \geq n + 1 = |G|k + 1$ . Isso completa a prova do Teorema 3.4.2 (*ii*). ■

Demonstração: (**Caso (*iii*)  $n < |G|k$  e  $\text{gen}(X, G) = n + 1$** ). Neste caso, temos que  $\text{gen}(X, G) = n + 1 \leq |G|k$  e, segue do Teorema 2.4.1 que existe uma aplicação  $G$ -equivariante  $F : X \rightarrow S_G^{|G|k}$ . Por outro lado, segue de [39, Corollary 6.1] que existem um  $G$ -espaço  $X'$ , um cone  $CW$ -complexo  $Y$  de dimensão  $k$  e uma aplicação  $\psi_k : X' \rightarrow Y$  sem pontos de  $G$ -coincidência. Mais ainda, existe uma aplicação  $G$ -equivariante  $E : S_G^{|G|k} \rightarrow$

$X'$  e, conseqüentemente, a aplicação  $f : \psi_k \circ E \circ F : X \rightarrow Y$  não possui pontos de  $G$ -coincidência.

Além disto, no caso particular  $G = H = \mathbb{Z}_p$  temos que  $f$  não tem ponto de  $G$ -coincidência e, desde que  $\mathbb{Z}_p$  não possui subgrupos próprios não triviais, segue da Observação 3.4.1 que  $f$  não tem ponto de  $(H, G)$ -coincidência, o que completa a prova do Teorema 3.4.2 (iii) ■

---

## O Teorema de Borsuk-Ulam para ações de um grupo compacto de Lie

---

### 4.1 Introdução

Resultados sobre a existência de aplicações  $G$ -equivariante tem importantes consequências. Por exemplo, o Teorema Clássico de Borsuk-Ulam afirma que toda aplicação contínua de uma esfera  $n$ -dimensional em um espaço euclidiano  $n$ -dimensional possui um par de pontos antipodais em  $S^n$  que assumem o mesmo valor em  $\mathbb{R}^n$ , o que é equivalente a afirmar que não existe aplicação  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante de  $S^n$  em  $S^{n-1}$ , onde  $\mathbb{Z}_2$  atua sobre a esfera pela involução antipodal.

Para provar que um espaço não pode ser mergulhado em outro é suficiente mostrar a não existência de uma aplicação equivariante entre seus produtos deletados considerados com a ação natural de uma involução livre, ou podemos considerar, de modo geral, outros espaços de configurações relacionados com os espaços em questão e dotados de ações de grupos apropriados. Um exemplo de tal fato é o conhecido Teorema de van Kampen-Flores, provado em [41] por Volovikov, o qual diz que o  $k$ -esqueleto de um  $(2k+2)$ -simplexo não pode ser mergulhado em  $\mathbb{R}^{2k}$ .

Sejam  $R$  um PID e  $X$  um  $G$ -espaço livre. Denotemos por  $\beta_i(X; R)$  o  $i$ -ésimo número de Betti de  $X$ .

Em [7, 12], Biasi e Mattos provaram o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.1.** Sejam  $G$  um grupo compacto de Lie e  $X, Y$   $G$ -espaços livres, conexos por caminhos, paracompactos e Hausdorff. Suponhamos que para algum natural  $m \geq 1$ ,  $H^q(X; R) = 0$ , para  $0 < q < m$  e que  $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$ , onde  $Y/G$  é o espaço de órbitas de  $Y$  por  $G$ . Então, se  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ , não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

Nosso objetivo, neste capítulo, é generalizar este resultado usando o índice definido por Volovikov (Definição 1.6.3). Especificamente, nós provamos o seguinte:

**Teorema 4.1.2.** Sejam  $G$  um grupo compacto de Lie e  $X, Y$   $G$ -espaços livres, paracompactos Hausdorff e conexos por caminhos. Suponha que para algum natural  $m \geq 1$ ,  $i(X) \geq m + 1$  e  $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$ . Então, se  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ , não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

**Observação 4.1.1.** Observemos que, de acordo com a Proposição 1.6.2(i), se  $H^i(X; R) = 0$ , para  $0 < i < m$ , então  $i(X) \geq m + 1$  e isto mostra que o Teorema 4.1.2 generaliza o Teorema 4.1.1 provado por Biasi e Mattos. Notemos ainda que, no Exemplo 1.6.1, o espaço  $X = P_2^q(K)$  é tal que  $i(X) = q(s - 1) + 1$  e por [39, p.918],  $H^{s-1}(X) \neq 0$ , o que mostra que existe um espaço  $X$  que satisfaz a hipótese  $i(X) \geq m + 1$  do Teorema 4.1.2 e não satisfaz a hipótese  $H^q(X; R) = 0$ , para  $0 < q < m$  do Teorema 4.1.1.

Se  $Y$  é uma variedade topológica conexa com ação livre de um grupo compacto de Lie  $G$ , então  $\dim(Y/G) = \dim Y - \dim G$  ([9, Cap.IV, Seção 3, Teorema 3.8]). Assim, se  $\dim G \geq 1$ ,  $\dim(Y/G) < \dim Y$ . Neste sentido, temos o seguinte corolário do Teorema 4.1.2.

**Corolário 4.1.1.** Consideremos  $G$  um grupo compacto de Lie de dimensão  $p$ . Sejam  $X$  um  $G$ -espaço livre, conexo por caminhos, paracompacto e Hausdorff, tal que  $i(X) \geq m + 1$  e  $Y$  uma variedade topológica  $(m + p)$ -dimensional conexa por caminhos com uma ação livre de  $G$ . Se  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ , então não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

Demonstração: Como  $Y$  é uma  $(m + p)$ -dimensional variedade topológica conexa com uma ação livre de  $G$ , então  $\dim(Y/G) = (m + p) - p = m$ . Portanto,  $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$ . Segue do Teorema 4.1.2, que não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ . ■

**Exemplo 4.1.1.** Sejam  $G = S^1 \times S^1$ ,  $X = S^5 \times S^5$  e  $Y = S^3 \times S^3$ , os quais admitem ações livres de  $G$ . Temos que  $H^q(X; \mathbb{Z}) = 0$ , for  $0 < q < m = 5$  e, pela Proposição 1.6.2,  $i(X) \geq 5 + 1$ . Além disso,  $H^6(Y/G; \mathbb{Z}) = 0$ , pois  $\dim(Y/G) = 4$ , e  $B(S^1 \times S^1) = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ , o que implica que  $\beta_5(X; \mathbb{Z}) = 2 < \beta_6(BG; \mathbb{Z}) = 4$ . Segue do Corolário 4.1.1 que não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

## 4.2 Demonstração do Teorema 4.1.2

A prova do Teorema 4.1.2 seguirá dos Lemas 4.2.1 e 4.2.2, que demonstraremos a seguir.

**Lema 4.2.1.** Sejam  $R$  um PID,  $G$  um grupo compacto de Lie e  $X$  um  $G$ -espaço livre paracompacto Hausdorff e conexo por caminhos. Suponha que para algum natural  $m \geq 1$ ,  $i(X) \geq m + 1$ . Então, existe a seguinte sequência exata com coeficientes em  $R$ ,

$$E_{m+1}^{0,m} \rightarrow H^{m+1}(BG; R) \xrightarrow{p_X^*} H^{m+1}(X_G; R).$$

Demonstração: Dada a fibração  $p_X : X_G = EG \times_G X \rightarrow BG$ , com fibra  $X$ , segue do Teorema 1.4.1, que existe uma sequência espectral do primeiro quadrante  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ , com  $E_2^{p,q} = H^p(BG; \mathcal{H}^q(X))$ , a cohomologia de  $BG$  com coeficientes locais na cohomologia de  $X$ , a fibra de  $p$  e convergindo para  $H^*(X_G; R)$ .

Como  $X$  é conexo por caminhos, temos que o sistema de coeficientes locais  $\mathcal{H}^0(X)$  sobre  $BG$  é trivial. Assim,

$$E_2^{p,0} = H^p(BG; \mathcal{H}^0(X)) \cong H^p(BG; H^0(X)) \cong H^p(BG; R), \quad \forall p. \quad (4.1)$$

De  $i(X) \geq m + 1$ , temos que  $E_2^{p,0} \cong E_3^{p,0} \cong \dots \cong E_{m+1}^{p,0}, \forall p$ .

Notemos que  $H^{m+1}(BG; R) = E_2^{m+1,0} = E_3^{m+1,0} = \dots = E_{m+1}^{m+1,0}$ , pois de (4.1), temos que  $E_2^{m+1,0} \cong H^{m+1}(BG; R)$ .

Agora, consideremos a sequência exata:

$$0 \rightarrow \text{Ker } d_r \rightarrow E_r^{0,r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{r,0} \rightarrow \frac{E_r^{r,0}}{\text{Im } d_r} \rightarrow 0,$$

onde  $\text{Im}(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})$ . Mostremos que,

$$\text{Ker } d_r = E_\infty^{0,r-1} \quad \text{e} \quad \frac{E_r^{r,0}}{\text{Im } d_r} = E_\infty^{r,0}.$$

De fato, segue da definição de sequência espectral que

$$E_{r+1}^{0,r-1} \cong \frac{Ker(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})}{Im(d_r : E_r^{-r,2r-2} \rightarrow E_r^{0,r-1})}$$

Como  $-r < 0$  temos que  $Im(d_r : E_r^{-r,2r-2} \rightarrow E_r^{0,r-1}) = 0$ . Deste modo,

$$E_{r+1}^{0,r-1} = Ker(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0}). \quad (4.2)$$

Temos ainda que,

$$E_{r+2}^{0,r-1} \cong \frac{Ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+1}^{r+1,-1})}{Im(d_{r+1} : E_{r+1}^{-r-1,2r-1} \rightarrow E_{r+1}^{0,r-1})}$$

e desde que  $E_{r+1}^{r+1,-1} = 0$ , pois a sequência  $E_2^{*,*}$  é do primeiro quadrante, segue que  $Ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+1}^{r+1,-1})$ . Por outro lado,  $-r - 1 < 0$  e assim,  $Im(d_{r+1} : E_{r+1}^{-r-1,2r-1} \rightarrow E_{r+1}^{0,r-1}) = 0$ . Portanto,

$$E_{r+2}^{0,r-1} \cong E_{r+1}^{0,r-1}.$$

Mais geralmente, para todo  $k \geq 2$ ,

$$E_{r+k}^{0,r-1} \cong \frac{Ker(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1})}{Im(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-r-k+1,2(r-1)+k-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{0,r-1})}$$

Desde que  $k \geq 2$ ,  $-k + 1 < 0$ , assim  $E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1} = 0$  e, conseqüentemente,  $Ker(d_{r+k-1}) = E_{r+k-1}^{0,r-1}$ . Além disso,  $-r - k + 1 < 0$  e temos que  $Im(d_{r+k-1}) = 0$ . Assim, para todo  $k \geq 2$ ,

$$E_{r+k}^{0,r-1} \cong E_{r+k-1}^{0,r-1}. \quad (4.3)$$

Observe que os diferenciais,

$$\begin{aligned} d_{r+k-1} &: E_{r+k-1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1} \text{ e} \\ d_{r+k-1} &: E_{r+k-1}^{-r-k+1,2(r-1)+k-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{0,r-1}, \end{aligned}$$

se anulam para todo  $k \geq 2$  e a sequência colapsa em  $N = r + 1$ .

Assim, combinando (4.2) e (4.3), concluímos que

$$Ker d_r \cong E_{r+1}^{0,r-1} \cong E_{r+2}^{0,r-1} \cong \dots \cong E_{r+k-1}^{0,r-1} \cong E_{r+k}^{0,r-1} \cong \dots \cong E_{\infty}^{0,r-1}.$$

Mostremos agora que  $\frac{E_r^{r,0}}{Im d_r} = E_{\infty}^{r,0}$ . Temos que,

$$E_{r+1}^{r,0} = \frac{\text{Ker}(d_r : E_r^{r,0} \rightarrow E_r^{2r,-r+1})}{\text{Im}(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})}$$

Como anteriormente  $E_r^{2r,-r+1} = 0$ , pois  $-r + 1 < 0$ .

Logo,  $\text{Ker}(d_r : E_r^{r,0} \rightarrow E_r^{2r,-r+1}) = E_r^{r,0}$  e portanto,

$$E_{r+1}^{r,0} = \frac{E_r^{r,0}}{\text{Im}(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})}.$$

Para todo  $k \geq 2$ , note que:

$$E_{r+k}^{r,0} = \frac{\text{Ker}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{r,0} \rightarrow E_r^{2r+k-1,-r-k+2})}{\text{Im}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-k+1,r+k-2} \rightarrow E_{r+k-1}^{r,0})}$$

e, desde que,  $-r - k + 2 < 0$ ,  $E_{r+k-1}^{2r+k-1,-r-k+2} = 0$ , o que implica que

$$\text{Ker}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{r,0} \rightarrow E_{r+k-1}^{2r+k-1,-r-k+2}) = E_{r+k-1}^{r,0}.$$

Da mesma forma, concluímos que  $\text{Im}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-k+1,r+k-2} \rightarrow E_{r+k-1}^{r,0})$  é nula, pois  $-k + 1 < 0$ . Consequentemente,

$$\frac{E_r^{r,0}}{\text{Im} d_r} \cong E_{r+1}^{r,0} \cong \dots \cong E_{r+k-1}^{r,0} \cong E_{r+k}^{r,0} \cong \dots \cong E_\infty^{r,0}.$$

Assim, obtemos a sequência,

$$0 \rightarrow E_\infty^{0,r-1} \rightarrow E_r^{0,r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{r,0} \rightarrow E_\infty^{r,0} \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

Agora, mostremos que existe uma injeção natural,

$$0 \rightarrow E_\infty^{m+1,0} \hookrightarrow H^{m+1}(X_G; R). \quad (4.5)$$

Para isto, consideremos a seguinte filtração decrescente de  $H^r(X_G; R)$ ,

$$0 = F^{r+1}(H^r(X_G)) \subset F^r(H^r(X_G)) \subset \dots \subset F^1(H^r(X_G)) \subset F^0(H^r(X_G)) = H^r(X_G; R).$$

Desde que a sequência espectral  $\{E_r^{*,*}; d_r\}$  converge para o  $R$ -módulo graduado  $H^*(X_G; R)$ , temos que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*(X_G)) = F^p(H^{p+q}(X_G))/F^{p+1}(H^{p+q}(X_G)),$$

onde  $E_\infty^{*,*}$  é o termo limite da sequência espectral e  $E_0^{*,*}(H^r(X_G))$  é o módulo bigraduado associado.

Como  $F^{r+1}(H^r(X_G)) = \{0\}$ , segue que

$$E_{\infty}^{r,0} \cong F^r(H^r(X_G))/F^{r+1}(H^r(X_G)) \cong F^r(H^r(X_G)) \subset H^r(X_G; R),$$

para qualquer  $r$ , o que prova (4.5).

Agora, fazendo  $r = m + 1$  e juntando (4.4) e (4.5) obtemos a exatidão no seguinte pedaço de sequência:

$$E_{m+1}^{0,m} \xrightarrow{d_{m+1}} E_{m+1}^{m+1,0} \rightarrow H^{m+1}(X_G; R), \quad (4.6)$$

onde  $d_{m+1}$  é o diferencial. Mas, note que  $H^{m+1}(BG; R) = E_{m+1}^{m+1,0}$ . Consequentemente, da sequência (4.6), obtemos a sequência desejada,

$$E_{m+1}^{0,m} \rightarrow H^{m+1}(BG; R) \xrightarrow{p_X^*} H^{m+1}(X_G; R).$$

■

**Lema 4.2.2.** Seja  $X$  um  $G$ -espaço livre, paracompacto Hausdorff e conexo por caminhos. Suponha que para algum natural  $m \geq 1$ ,  $i(X) \geq m + 1$  e que  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ . Então, o homomorfismo  $h^* : H^{m+1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(X/G; R)$  é não-trivial, onde  $h : X/G \rightarrow BG$  é a aplicação classificante para o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$ .

Demonstração: Sejam  $EG \rightarrow BG$  o  $G$ -fibrado universal e  $h : X/G \rightarrow BG$  uma aplicação classificante para o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$ .

Consideremos  $p_X : X_G \rightarrow BG$  a fibração de Borel associado ao  $G$ -espaço  $X$ , onde  $X_G$  é o espaço de Borel.

Temos que a aplicação  $X_G \rightarrow X/G$  é uma equivalência de homotopia. Seja  $r : X/G \rightarrow X_G$  a sua inversa homotópica.

Então,  $p_X \circ r : X/G \rightarrow BG$  também classifica o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$  e segue que  $p_X \circ r$  é homotópica a  $h$ . Como  $r^* : H^{m+1}(X_G; R) \rightarrow H^{m+1}(X/G; R)$  é um isomorfismo, é suficiente provar que  $p_X^* : H^{m+1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(X_G; R)$  é não-trivial.

Pelo Lema 4.2.1, temos a seguinte sequência exata:

$$E_{m+1}^{0,m} \xrightarrow{d_{m+1}} H^{m+1}(BG; R) \xrightarrow{p_X^*} H^{m+1}(X_G; R). \quad (4.7)$$

Suponhamos que  $p_X^* : H^{m+1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(X_G; R)$  seja o homomorfismo nulo. De (4.7), segue que a aplicação  $d_{m+1} : E_{m+1}^{0,m} \rightarrow H^{m+1}(BG; R)$  é sobrejetora, o que implica que

$$\text{rank}(E_{m+1}^{0,m}) \geq \text{rank}(H^{m+1}(BG; R)) = \beta_{m+1}(BG; R). \quad (4.8)$$

Por outro lado, observemos que

$$E_{m+1}^{0,m} \cong \frac{\text{Ker}(d_m : E_m^{0,m} \rightarrow E_m^{m,1})}{\text{Im}(d_m : E_m^{-m,2m-1} \rightarrow E_m^{0,m})} \stackrel{-m < 0}{\cong} \text{Ker}(d_m : E_m^{0,m} \rightarrow E_m^{m,1})$$

que é submódulo de  $E_m^{0,m} \cong \frac{\text{Ker}(d_{m-1} : E_{m-1}^{0,m} \rightarrow E_{m-1}^{m-1,2})}{\text{Im}(d_{m-1} : E_{m-1}^{-m+1,2m-2} \rightarrow E_{m-1}^{0,m})} \stackrel{-m+1 < 0}{\cong} \text{Ker}(d_{m-1} : E_{m-1}^{0,m} \rightarrow E_{m-1}^{m-1,2})$

que é submódulo de  $E_{m-1}^{0,m}$  e assim, sucessivamente, teremos que  $E_{m+1}^{0,m}$  é isomorfo a um submódulo de  $E_2^{0,m} \cong H^0(BG; \mathcal{H}^m(X))$ .

Mas  $H^0(BG; \mathcal{H}^m(X))$  é isomorfo a um submódulo de  $H^m(X; R)$  (para detalhes, ver [43, Teorema 3.2]). Logo,  $E_{m+1}^{0,m}$  é isomorfo a um submódulo de  $H^m(X; R)$ . Assim,  $\text{rank}(H^m(X; R)) \geq \text{rank}(E_{m+1}^{0,m})$ . Portanto,

$$\beta_m(X; R) = \text{rank}(H^m(X; R)) \geq \text{rank}(E_{m+1}^{0,m}) \stackrel{(4.8)}{\geq} \beta_{m+1}(BG; R),$$

o que é uma contradição pois, por hipótese,  $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$ .

Portanto, o homomorfismo  $h^*$  é não-trivial. ■

Demonstração do Teorema 4.1.2: Suponhamos que  $f : X \rightarrow Y$  seja uma aplicação  $G$ -equivariante. Como  $Y$  é um espaço paracompacto Hausdorff, podemos tomar uma aplicação classificante  $g : Y/G \rightarrow BG$  para o  $G$ -fibrado principal  $Y \rightarrow Y/G$ .

Então, a aplicação  $h = g \circ \bar{f} : X/G \rightarrow BG$  pode ser tomada como uma aplicação classificante para o  $G$ -fibrado principal  $X \rightarrow X/G$ , onde  $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$  é a aplicação induzida por  $f$  entre os espaços de órbitas.

Por hipótese,  $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$  e assim,  $g^* : H^{m+1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(Y/G; R)$  é trivial e conseqüentemente,  $h^* : H^{m+1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(X/G; R)$  é o homomorfismo trivial, o que contradiz o Lema 4.2.2. ■

### 4.3 Algumas considerações sobre o Teorema 4.1.2: resultados relacionados

Clapp e Puppe provaram, em [10], o seguinte resultado:

**Teorema 4.3.1.** Seja  $G$  um  $p$ -toro ou um toro (isto é,  $G = \mathbb{Z}_p^n$  ou  $G = S^1 \times \dots \times S^1$ ). Sejam  $X$  e  $Y$   $G$ -espaços com ações sem pontos fixos. Além disso, no caso  $G = S^1 \times \dots \times S^1$  assumamos que  $Y$  tenha tipo finito de órbitas. Suponha que  $\tilde{H}^i(X) = 0$  para  $i < N$ ,  $Y$  é compacto ou paracompacto de dimensão finita, e  $H^i(Y) = 0$  para  $i \geq N$ ; onde a cohomologia é

considerada com coeficientes em  $\mathbb{Z}_p$  no caso  $G = \mathbb{Z}_p^n$  e em  $\mathbb{Q}$  no caso  $G = S^1 \times \dots \times S^1$ . Então, não existe aplicação  $G$ -equivariante de  $X$  em  $Y$ .

**Observação 4.3.1.** Sejam  $G = S^1 \times S^1$ ,  $X = S^5 \times S^5$  e  $Y = S^3 \times S^3$ , os quais admitem ações livres de  $G$ , como no Exemplo 4.1.1. Temos que  $\tilde{H}^i(X; \mathbb{Q}) = 0$ , para  $i < N = 5$  e  $H^6(Y; \mathbb{Q}) \neq 0$ . Então, aqui não temos válido  $H^i(Y; \mathbb{Q}) = 0$  para  $i \geq 5$ . Assim, de acordo com o Teorema 4.3.1, não podemos afirmar que não existe aplicação  $G$ -equivariante de  $X$  em  $Y$ . No entanto, como consequência do Teorema 4.1.2, podemos afirmar que não existe aplicação  $G$ -equivariante de  $X$  em  $Y$  (Ver Exemplo 4.1.1). Isto mostra que em algumas situações o Teorema 4.1.2 é mais eficiente que o Teorema 4.3.1, embora os resultados não sejam comparáveis devido às suas hipóteses.

Mais geralmente, no caso especial onde  $G = \mathbb{Z}_p^n$ ,  $X$  e  $Y$  são  $G$ -espaços livres, o Teorema 4.1.2 estende o Teorema 4.3.1, uma vez que a condição  $\tilde{H}^i(X, \mathbb{Z}_p) = 0$  para  $i < N$  implica  $i(X) \geq N + 1 > N$  (Proposição 1.6.2(i)) e  $\beta_{N-1}(X; \mathbb{Z}_p) = 0 < 1 \leq \beta_N(BG; \mathbb{Z}_p)$  (Ver Definição 1.5.1), a condição  $Y$  compacto ou paracompacto de dimensão finita, e  $H^i(Y, \mathbb{Z}_p) = 0$  para  $i \geq N$  implica  $H^N(Y/G; \mathbb{Z}_p) = 0$  ([35, Proposition A.11.]). Assim, fazendo  $m = N - 1$  no Teorema 4.1.2, concluímos que não existe aplicação  $G$ -equivariante de  $X$  em  $Y$ .

Para finalizarmos o trabalho, nós provamos um resultado similar aos Teoremas 4.1.2 e 4.3.1. Especificamente, nós provamos

**Teorema 4.3.2.** Sejam  $R$  um PID,  $G$  grupo compacto de Lie,  $X$  um  $G$ -espaço livre Hausdorff, paracompacto e  $Y$  um  $G$ -espaço Hausdorff, compacto ou paracompacto de dimensão finita que admite uma ação livre de  $G$ . Suponhamos que  $i(X) \geq m + 1$  e  $H^i(Y; R) = 0$ , para  $i \geq m$ . Então, não existe aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ .

Demonstração: Suponhamos que exista aplicação  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$ . Então, pela Proposição 1.6.1(ii),  $i(X) \leq i(Y)$ .

Temos, por hipótese, que  $H^i(Y; R) = 0$ , for  $i \geq m$ , o que implica que  $i(Y) \leq m$  (pela Proposição 1.6.2(ii)).

Portanto,  $i(X) \leq i(Y) \leq m$ , o que contradiz a hipótese. ■

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] J.M. Aarts, R.J. Fokkink, H. Vermeer, *Variations on a Theorem of Lusternik and Schnirelmann*, *Topology* 35 (4) (1995) 1051-1056.
- [2] J.M. Aarts, R.J. Fokkink, H. Vermeer, *Coincidence theorems for involutions*, *Topology Appl.* 85 (1998) 3-8.
- [3] J.M. Aarts, G.A. Brouwer, R.J. Fokkink, H. Vermeer, *Intersection properties for covering of  $G$ -spaces*, *Topology Appl.* 125 (2002) 249-261.
- [4] S. Ageev, S. Bogaty, R. Jiménez, *Free equivariant extensors*, *Topology Appl.* 105 (2000) 157-166.
- [5] AMARAL, F. M. *Estimativas Ótimas para certos Teoremas Generalizados de Borsuk-Ulam e Ljusternik-Schnirelmann*. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos - São Carlos. 2005.
- [6] T.E. Barros and C. Biasi, *A note on the theorems of Ljusternik-Schnirelmann and Borsuk-Ulam*, *Colloq. Math.* 111 (2008) no. 1, 35-42.
- [7] C. Biasi and D. Mattos, *A Borsuk-Ulam theorem for compact Lie group actions*, *Bull Braz Math Soc, New Series* 37(1) (2006) 127-137.
- [8] K. Borsuk, *Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre*, *Fund. Math.* 20 177-190, 1933.

- [9] Bredon, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups*. New York and London: Pure and Applied Mathematics 46 Academic Press, 1972.
- [10] M. Clapp and D. Puppe, *Critical point theory with symmetries*, J. Reine Angew. Math. 418 (1991), 1-29.
- [11] P.E. Conner and E.E. Floyd, *Fixed point free involutions and equivariant maps*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 66 (1960), 416-441.
- [12] DE MATTOS, D. *Sobre Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam*. Tese de doutorado (Doutorado em Matemática) - Universidade de São Paulo - ICMC - São Carlos. 2005.
- [13] Dieck, t. T., *Transformation Groups*. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1987.
- [14] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, in: Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa, 1982.
- [15] Engelking, R. *Dimension Theory*. New York: North-Holland Pub. Co., 1978.
- [16] E. Fadell and S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 8 (Mem. Volume) (1988), 259-268.
- [17] Hu, Sze-Tsen. *Homotopy Theory*. New York: Academic Press, 1959.
- [18] Hurewicz, W. and Wallman, H. *Dimension Theory*. Princeton Univ. Press Princeton, 1941.
- [19] D.L. Gonçalves, P.L.Q. Pergher,  *$\mathbb{Z}_p$ -coincidences for maps of spheres into CW-complexes*, Kobe J. Math. 15 (1998), 191-195.
- [20] D.L. Gonçalves, J. Jaworowski, P.L.Q. Pergher, *G-coincidences for maps of homotopy spheres into CW-complexes*, Proc. Amer. Soc. 130 (10) (2002), 3111-3115.
- [21] D.L. Gonçalves, J. Jaworowski, P.L.Q. Pergher, A.Yu. Volovikov, *Coincidences for maps of spaces with finite group actions*, Topology Appl. 145 (2004), no. 1-3, 61-68.
- [22] M. Izydorek and J. Jaworowski, *Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 1947-1950.

- [23] J. Jaworowski, *Periodic coincidence for maps of spheres*, Kobe J. Math. 17 (2000), 21-26.
- [24] H. Steinlein, *Some abstract generalizations of the Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk covering theorem*, Pacific J. Math. 83 (1979), 285-296.
- [25] H. Steinlein, *On the theorems of Borsuk-Ulam and Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk*, Canad. Math. Bull. vol. 27 (2) (1984) 192-204.
- [26] M. van Hartskamp, *Colorings of fixed-point free maps*, Thesis, Free University of Amsterdam, 1999.
- [27] M. van Hartskamp, J. Vermeer, *On colorings of maps*, Topology Appl. 73 (1996) 181-190.
- [28] Hungerford, T.W. *Algebra*. New York: Springer Verlag, 1974.
- [29] Husemoller, D. *Fibre Bundles Second Edition*, New York: Springer-Verlag, 1966.
- [30] M.A. Krasnosel'skiĭ, *On special coverings of a finite-dimensional sphere*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955) 961-964 (in Russian).
- [31] Matoušek, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [32] McCleary, J. *User's Guide to Spectral Sequences*. Wilmington, Delaware (U.S.A): Publish or Perish, Inc., 1985.
- [33] Milnor, J., *Construction of Universal Bundles I*, Ann. of Math. 63 n.2 272-284, 1956.
- [34] Mimura, M., Toda, H., *Topology of Lie Groups I and II*. American Mathematical Society Providence Rhode Island, 1991.
- [35] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring: I*, Ann. of Math., 94 n.3 549-572, 1971.
- [36] Spanier, E.H. *Algebraic Topology*. New York: Springer, 1966.
- [37] A.S. Švarc, *Some estimates of the genus of a topological space in the sense of Krasnosel'skiĭ*. Uspekhi Mat. Nauk 12 : 4 (1957), 209-214. (Russian)

- [38] A.S. Švarc, *The genus of a fiber space*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. 11 (1962), 99-126; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 55 (1966).
- [39] A.Yu. Volovikov, *Coincidence points of mappings of  $\mathbb{Z}_p^n$ -spaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 69 (2005), no. 5, 53-106, translation in Izv. Math. 69 (2005), no. 5, 913-962.
- [40] A.Yu. Volovikov, *On the index of  $G$ -spaces*, Sb. Math. 191 (9-10) (2000) 1259-1277.
- [41] A.Yu. Volovikov, *On the van Kampen-Flores Theorem*, Mat. Zametki 59:5 (1996), 663-670; English Transl. in *Math. Notes* 59 (1996).
- [42] A.Yu. Volovikov, *A theorem of Bourgin-Yang type for  $\mathbb{Z}_p^n$ -action*, Mat. Sb. 183:7 (1992), 115-144; English Transl. in Russian Acad. Sci. Math. 76 (1993).
- [43] Whitehead, G. W., *Elements of Homotopy Theory*. New York: Heidelberg and Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [44] C.T. Yang, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson. I*, Ann. of Math. 60:2 (1954), 262-282.
- [45] C.T. Yang, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson. II*, Ann. of Math. 62, No. 2, 271-283 (1955).