UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atrator no sentido pullback e trajetórias completas extremas para problemas governados pelo p-Laplaciano

Érika Capelato

SÃO CARLOS
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ÉRIKA CAPELATO

ATRATOR NO SENTIDO PULLBACK E TRAJETÓRIAS COMPLETAS EXTREMAS PARA PROBLEMAS GOVERNADOS PELO *p*-LAPLACIANO

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de doutor em Matemática.

Orientação:Prof^a.Dr^a.Cláudia Buttarello Gentile

SÃO CARLOS
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

	Capelato, Érika.
C238as	Atrator no sentido pullback e trajetórias completas extremas para problemas governados pelo *p*-Laplaciano / Érika Capelato. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
	129 p.
	Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.
	1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Processos multívocos. I. Título.
	CDD: 510 (20ª)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile
DM - UFSCar

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
DM - UFSCar

Profa. Dra. Margareth da Silva Alves
DMA - UFV

Prof. Dr. German Lozada Cruz
IBILCE - UNESP

Prof. Dr. Eduardo Hernández Morales
FFCLRP - USP

Deus quer, o homem sonha,
a obra nasce.

(Fernando Pessoa)

Ao meu pai Jair, à minha mãe
Sonia e à minha irmã Karina,
com amor e gratidão.

Agradecimentos

Muitas pessoas passaram por minha vida e contribuíram de alguma forma para meus estudos e aqui faço meus agradecimentos a elas. Desde já peço desculpas aos não citados, mas que merecem minha gratidão.

À Deus que me deu o dom da vida, me inspirou sabedoria para eu fazer as escolhas certas e me presenteou com o dom da ciência durante todos os dias vividos na pós-graduação.

Aos meus pais, pela educação e amor que deles recebi, pela oportunidade que me deram de levar adiante meus estudos e pelo apoio nos momentos de preocupações.

A minha orientadora Cláudia Butarello Gentile, que sempre me atendeu com bom humor, escolheu com muito talento o tema deste projeto (com o qual tive muito prazer em trabalhar) e contribuiu imensamente para o seu desenvolvimento e para minha formação como pesquisadora. A CAPES pelo apoio financeiro, indispensável para minha permanência em São Carlos.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro responsáveis pelo início de minha formação e pelo prazer que tenho em estudar matemática, aos professores do ICMC - USP junto aos quais agreguei mais aprendizado e obtive o título de mestre e finalmente aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar com os quais convivi agradavelmente durante estes quatro anos.

Aos amigos da graduação e da pós-graduação, pela troca de conhecimentos e risadas e aos amigos que não são matemáticos, pelo apoio e companheirismo.

Aos citados acima, Muito Obrigada!

Érika Capelato

Abstract

We study non-autonomous problems with the main part given by the p-Laplacian and establish existence results of pullback attractor, comparison of solutions and existence of a maximal and a minimal complete trajectories. In bounded smooth domains we assume rather general conditions on the perturbative operator and we admit the process associated with the problem being multivalued. We obtain analogous results for systems in R^n with further restrictions in perturbative terms in such way that we deal with a univocal process.

Resumo

Neste trabalho estudamos problemas não autônomos com parte principal dada pelo p-laplaciano, e estabelecemos resultados de existência de atrator no sentido pullback, comparação de soluções e a existência de duas trajetórias completas, uma maximal e outra minimal. Em domínios limitados e suaves consideramos termos perturbativos bastante gerais e admitimos que o processo associado ao problema seja multívoco. Obtivemos resultados análogos para sistemas definidos em todo o $\mathbb{R}^n$ com restrições adicionais no termo perturbativo de forma a lidarmos com um processo unívoco.

Introdução

Quando um sistema dinâmico é determinado por uma equação diferencial autô - noma podemos associar a ele um semigrupo e analisar o comportamento assintótico do problema considerando a existência de um atrator global (um conjunto compacto invariante maximal que atrai as órbitas) que, uma vez provada, permite que façamos inúmeras restrições em nossa análise sem perder a generalidade do problema. Existe uma teoria bastante estabelecida para o tratamento de tais sistemas no caso unívoco [42, 52, 73].

Sistemas dinâmicos multívocos surgem quando o problema de Cauchy de uma equação diferencial não possui a propriedade da unicidade. Há pouco mais de vinte anos, a ausência de unicidade parecia ser um obstáculo incontornável para o estudo do comportamento assintótico de um problema ou, mais especificamente, para concluir a existência de um atrator. Nestes casos, não podemos associar aos problemas um semigrupo de operadores de forma que não se aplica a eles o elenco de resultados que se encontram na teoria clássica.

Na verdade, quando estudamos um problema de valor inicial, antes de tudo é usual nos questionarmos sobre sua boa colocação. Estamos acostumados a fazer três perguntas básicas:

1. Dada uma condição inicial, existe uma solução global?

2. Se assim for, é única?

3. As soluções se comportam de forma contínua com relação aos dados iniciais?

Se a resposta fosse "não" para algumas dessas questões, há poucos anos diríamos que o problema é "mal-pôsto" e, ainda que uma análise assintótica fizesse sentido, ela poderia estar comprometida por falta de ferramentas. No entanto, existem inúmeros problemas interessantes a serem estudados que não são bem postos, como inclusões diferenciais por exemplo, usadas para descrever problemas com termos perturbativos descontínuos (veja por exemplo[3]), ou os problemas de Navier-Stokes tridimensionais (veja por exemplo [9]).

Hoje é sabido que a ausência de unicidade não constitui um obstáculo para se obter a existência de atratores globais para problemas autônomos. De fato, para se concluir a existência de um atrator, são necessárias basicamente propriedades de dissipatividade e compacidade assintótica, e uma ampla classe de problemas de Cauchy usualmente denominados como mal-postos satisfazem estas condições. Vários autores têm lidado com problemas autônomos multívocos e alguns esforços nesse sentido surgiram já na primeira metade do século 20: 1948-Barbašin [10], 1948-Minkevič [57], 1952-Budak [18], 1962-Bronšteĭn [15], 1965-Roxin [64, 65], 1969-Bridgland [14], 1969-Szegö and Treccani [72], 1973-Sell [68], 1978-Kloeden [47], 1985-Babin and Vishik [6], 1995-Chepyzhov and Vishik [35], 1995-Melnik [53], 1997-Ball [9], 1998-Kapustyan and Melnik [43], 1998-Melnik and Valero [54], 1999-Carvalho and Gentile [28], 2008-Simsen and Gentile [69].

Podemos classificar estes têxtos em três grupos de abordagens: uma delas lida com a falta de unicidade trabalhando em um espaço de trajetórias $\varphi : [0, +\infty) \to X$ e definindo nesses espaços semigrupos de translações $T(\cdot)$, por $T(t)\varphi = \varphi^t$, [35, 68]. Um segundo grupo, que inclui a maioria dos trabalhos acima, considera uma trajetória multívoca $t \mapsto T(t)z$ que é composta por todos os possíveis pontos alcançados no tempo t por soluções com os dados iniciais em z (por exemplo [54]) . O terceiro grupo, representado por [9], considera a soluções propriamente como os objetos primitivos da teoria, e considera conjuntos de funções que compõem um semigrupo generalizado. Acreditamos que uma abordagem adequada para estudar problemas diferenciais de valores multívocos é obtida pela mistura dos métodos utilizados pelos segundo e terceiro grupos acima mencionados, como é feito em [69], onde os semigrupos multívocos são definidos de forma a não perder de vista cada possível solução.

Porém, quando o sistema é não-autônomo, para descrever sua evolução a ele associamos um processo, isto é, uma família a dois parâmetros na qual a dependência do dado inicial é tão importante quanto a dependência do dado final [67]. A teoria de atratores para problemas não autônomos é relativamente recente (Cheban et al. [31], Kloeden and Schamalfuss [49]; Crauel and Flandoli [37], Crauel et al. [38], os dois últimos em um contêxto de sistemas dinâmicos estocásticos) e, nos últimos anos, para buscar algum entendimento do comportamento assintótico desta classe de problemas, tem sido largamente usado o conceito de atrator no sentido pullback, uma família a um parâmetro de conjuntos compactos que estende para problemas não autônomos o conceito de atrator, [4, 19, 22, 23, 24, 30, 48, 50, 51, 63, 66, 78]. Quando não temos (ou não conseguimos provar) que a solução correspondente a cada dado inicial é única introduzimos o conceito de processo multívoco, para o qual já se encontram na literatura generalizações de diversos resultados originalmente provados para problemas bem postos, (veja por exemplo [19]).

Neste trabalho estamos considerando problemas não autônomos governados pelo p-laplaciano, $p > \max\{2, n/2\}$, aos quais se associam processos multívocos em domínios limitados e processos unívocos em $\mathbb{R}^n$. Para estas classes de problemas, sob condições apropriadas, exibimos a existência de atrator no sentido pullback, estimativas em L^∞ através de resultados de comparação e obtivemos a existência de uma trajetória completa maximal e uma trajetória completa minimal delimitando em um certo sentido tais atratores.

Existe um número expressivo de trabalhos na literatura sobre problemas parabólicos envolvendo o operador p-laplaciano. Vários deles estabelecendo a existência de atrator para problemas autônomos em domínios limitados, veja por exemplo [7, 25, 28, 41, 54, 70, 79] e referências neles contidas. Para problemas não autônomos, a existência de atrator no sentido pullback já havia sido obtida em [19]. Em [32] o autor lida com problemas não autônomos mas obtém a existência de um outro tipo de atrator, o atrator uniforme, introduzido por Chepyzhov e Vishik em [36], que a grosso modo atrai todas as órbitas independentemente de quando e onde elas começaram. Nosso acréscimo neste trabalho foi, no que diz respeito aos problemas em domínios limitados, obter com diferentes condições impostas ao termo perturbativo, resultados que permitem comparar soluções e demonstrar a existência de trajetórias completas extremas.

A existência de tais trajetórias foi obtida em [63] para problemas não autônomos semilineares. Em sistemas quasilineares, a principal dificuldade em se provar a existência de soluções globais extremas se dá por que as demonstrações existentes para este fato apoiam-se em fortes resultados de comparação de soluções, os quais não se aplicam, via de regra, para problemas multívocos. Mais especificamente, em [21], onde primeiramente se obtém um resultado abstrato que garante a existência de equilíbrios extremos em problemas autônomos, supõe-se que o semigrupo multívoco associado ao sistema satisfaz uma condição de monotonicidade bastante exigente, a saber, se dois dados iniciais satisfazem $u_0(x) \leq v_0(x)$ (em um sentido que será apropriadamente descrito ao longo deste têxto), então deve-se ter que *toda* solução que se inicia em u_0 permaneça menor que *toda* solução que se inicia em v_0. No entanto, a literatura envolvendo resultados de comparação para sistemas dinâmicos envolvendo o operador p-laplaciano parabólico é bastante escassa.

Neste têxto estendemos um resultado de comparação originalmente provado para problemas autônomos em [26], no qual garante-se que, para uma determinada categoria de problemas (em que se enquadram os sistemas em domínios limitados considerados neste trabalho), se $u_0(x) \leq v_0(x)$, então *dada* uma solução u com dado inicial em u_0, *existe* uma solução v que se inicia em v_0 e tal que $u(t) \leq v(t)$ para todo tempo $t > 0$. Como essencialmente o mecanismo que se usa para garantir a existência de tais trajetórias extremas em sistemas não autônomos é o mesmo enunciado em [21], a ausência de unicidade torna-se um forte obstáculo. Neste trabalho esta dificuldade foi contornada provando-se que, quando restrito ao atrator, o fluxo é de fato unívoco e desta forma, a existência das soluções extremas pode ser demonstrada.

A unicidade de solução dentro do atrator (que chamamos de unicidade em tempo grande ou unicidade eventual) é garantida também através de resultados de comparação. Normalmente, problemas governados por operadores do tipo maximal monótono gozam de unicidade se o termo perturbativo for globalmente Lipschitziano. Porém, de acôrdo com o trabalho [28], pode-se afrouxar esta condição trabalhando-se com perturbações que são localmente Lipschitzianas, mas em contrapartida podem ser estimadas (em tempo grande) por termos de crescimento linear. A estratégia usada neste caso é obter estimativas em L^∞ através de comparação de soluções de forma que a análise assintótica possa ser feita em um conjunto no qual o termo perturbativo é essencialmente Lipchitz. A primeira parte deste trabalho transcreve estas idéias para problemas não autônomos. Muito embora a adaptação tenha sido feita de uma forma bastante natural, foi necessário ajustar a grande maioria dos resultados usados, originalmente desenvolvidos para problemas autônomos. Em especial, os resultados de comparação foram reformulados para contemplar nossas necessidades e, além destes, foram feitas algumas extensões ao contexto dos processos multívocos de fatos anteriormente observados na literatura apenas para processos unívocos.

Em particular, vale ressaltar que, em [19], para se demonstrar que atratores no sentido pullback de processos multívocos são invariantes sob a ação do fluxo, os autores impõem uma condição extremamente forte de continuidade do processo com relação aos estados iniciais, a saber, a semicontinuidade inferior que não é, em geral, verificada para a classe de problemas que consideramos. No entanto, as soluções dos nossos problemas gozam da propriedade da concatenação, (ou seja, se duas soluções se interceptam, qualquer função obtida através da concatenação delas ainda é solução), e esta observação nos permitiu garantir a invariância dos atratores ainda que tenhamos apenas a semicontinuidade superior do fluxo com relação aos dados iniciais. Nossa demonstração deste fato reforça nossa crença de que, para tratar problemas multívocos, sejam eles autônomos ou não autônomos, as técnicas que lidam com operadores multívocos de evolução construídos a partir das trajetórias, nos mesmos moldes de [69], revelam-se ferramentas poderosas para a análise assintótica.

A segunda parte deste trabalho destina-se a análise de problemas definidos em todo o $\mathbb{R}^n$. Em domínios ilimitados a maior dificuldade, em geral, se dá pela perda das imersões compactas dos espaços de funções e, para contornar este problema, diversos métodos têm sido desenvolvidos. Alguns autores ambientam seus sistemas em espaços cuja norma é definida com um peso, de forma que se possa resgatar propriedades de compacidade, [1, 7, 71]. Outro recurso comumente utilizado consiste em decompor o espaço $\mathbb{R}^n$ em uma bola limitada e seu complemento, e então mostrar que o fluxo é assintoticamente totalmente limitado através de estimativas das soluções em variáveis espaciais com norma grande, aliadas às imersões compactas usuais em domínios limitados [11, 45, 76]. Nos trabalhos [39, 58] os autores, seguindo uma direção diferente dos anteriores, utilizam espaços de funções limitadas e uniformemente contínuas em $\mathbb{R}^n$ como espaço base e, sob hipóteses convenientes no termo perturbativo, exibem a existência de uma solução estacionária maximal e a compacidade assintótica do sistema é obtida através de um argumento de comparação. Uma excelente discussão sobre problemas em domínios ilimitados pode ser encontada em [2], onde os autores fazem uma descrição bastante detalhada das principais técnicas usadas em problemas autônomos.

Para o p-laplaciano, até onde temos conhecimento, a literatura estabelecendo existência de atrator em $\mathbb{R}^n$ resume-se aos trabalhos [45, 46, 71, 80], todos no contêxto de problemas autônomos unívocos e, para problemas não autônomos recentemente foi publicado [77]. Dentre estes, os três primeiros e o último obtêm a existência de solução apoiados no método de Galerkin. Em [71] a existência de soluções é obtida via operadores monótonos em espaços de funções definidos com um peso na norma. No Capítulo 4 fazemos uma breve apresentação deste método e exibimos a existência de atrator no sentido pullback, bem como mostramos que os resultados de comparação e a existência das trajetórias completas extremas seguem de forma análoga ao caso do domínio limitado.

Nosso principal desafio nesta etapa do trabalho foi estabelecer a existência de solução através da teoria de operadores maximais monótonos, sem considerar tais pesos na definição do operador principal, de forma que pudéssemos lançar mão dos resultados de comparação previamente desenvolvidos neste têxto. Isso foi feito no último capítulo seguindo um esquema anteriormente utilizado em um problema semilinear por Morillas e Valero em [59] que nos permitiu estabelecer um resultado de comparação que garante a existência de trajetórias completas extremas dêsde que o sistema seja unívoco. De fato, podemos afirmar que, se $u_0(x) \leq v_0(x)$ então *existe* uma solução u com dado inicial em u_0 e *existe* uma solução v que se inicia em v_0 satisfazendo $u(t) \leq v(t)$ para todo tempo $t > 0$. A necessidade de se considerar problemas que têm uma única solução aparece já na técnica que utilizamos para demonstrar a compacidade assintótica no sentido pullback, que requer que o processo seja fracamente fechado, propriedade que só obtivemos para processos unívocos e vem ser reforçada pelas características do resultado de comparação que demonstramos.

Este têxto está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo apresentamos diversos resultados preliminares que serão utilizados ao longo do trabalho. Nos Capítulos 2 e 3 tratamos os problemas em domínios limitados sendo que, no Capítulo 2 enfocamos os resultados de comparação de soluções e o Capítulo 3 é dedicado à existência de atrator no sentido pullback e à existência de trajetórias extremas completas. No Capítulo 4 exibimos a existência de atrator no sentido pullback e trajetórias extremas em $\mathbb{R}^n$ utilizando espaços definidos com peso na norma e, no Capítulo 5 tratamos o mesmo problema em $\mathbb{R}^n$ retirando da definição do operador principal as funções peso auxiliares.

Vale a pena observar que não tivemos a preocupação de supor condições ótimas nas perturbações que consideramos. De fato, quase todas as condições impostas ao termo perturbativo nos Capítulos 4 e 5 poderiam ser consideravelmente relaxadas, no entanto as estimativas se tornariam bastante mais complicadas, de forma que optamos por uma exposição mais simplificada que não obscurecesse o objetivo principal. Ainda assim, as condições que consideramos são bastante compatíveis com as impostas em [45, 46, 80] nos quais são consideradas apenas a parte monótona da perturbação, e em [77], onde $B = f(x, u) + g(t, x)$, ou seja, não há um termo que dependa simultaneamente de t e de u. A exigência $p > n/2$ está relacionada com as estimativas em L^∞ que são essenciais para se obter a unicidade eventual na primeira parte do trabalho e garantem estimativas uniformes no procedimento que garante existência de solução na segunda parte.

Conteúdo

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos definições, notações e resultados, alguns adaptados da literatura, que foram fundamentais para o desenvolvimento da tese, uma vez que foram utilizados em demonstrações de teoremas importantes. Este capítulo está dividido em várias seções, onde cada uma trata de um tema específico. Na Seção 1.1 demonstramos duas desigualdades que são na verdade pequenas adaptações do Lema 5.1 e Lema Uniforme de Gronwall, [73]. Na Seção 1.2 apresentamos os principais resultados que usaremos da Teoria de Operadores Monótonos. A Seção 1.3 é dedicada a propriedades de compacidade de solução de problemas diferenciais e na Seção 1.4 introduzimos os conceitos de atração pullback para processos multívocos.

1.1 Principais Desigualdades

Desigualdade 1.1.1 *(Desigualdade de Tartar, p.2 [75]) Seja $p \geq 2$. Então para todo $a,b \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ temos*

$$\left\langle |a|^{p-2}\, a - |b|^{p-2}\, b, a - b \right\rangle \geq \gamma_0 \, |a-b|^p \, ,$$

onde γ_0 é positivo e depende apenas de p e de n. Se $1 < p < 2$ então para todo $a,b \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\left\langle |a|^{p-2}\, a - |b|^{p-2}\, b, a - b \right\rangle \leq \gamma_1 \, |a-b|^p \, ,$$

onde γ_1 depende apenas de p e de n.

Desigualdade 1.1.2 *(Desigualdade de Gronwall-Bellman p.156 [12]) Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$. Sejam $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p. em (τ, T) e $a \geq 0$ uma constante. Seja $\phi : [\tau, T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que verifica*

$$\phi(t) \leq a + \int_\tau^t m(s)\phi(s) ds, \quad \forall \ t \in [\tau, T].$$

Então
$$\phi(t) \leq a e^{\int_\tau^t m(s)ds}, \quad \forall\ t \in [\tau, T].$$

Desigualdade 1.1.3 *(Desigualdade de Gronwall p. 157 [12]) Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$. Sejam $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p. em (τ, T) e $a \geq 0$ uma constante. Seja $\phi : [\tau, T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando*
$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_\tau^t m(s)\phi(s)ds, \quad \forall\ t \in [\tau, T].$$
Então
$$|\phi(t)| \leq a + \int_\tau^t m(s)ds, \quad \forall\ t \in [\tau, T].$$

Os próximos dois lemas são ligeiras adaptações do Lema 5.1 e Lema Uniforme de Gronwall encontrados em [73].

Lema 1.1.1 *(Lema 5.1, [73]) Seja $y : [\tau, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função positiva absolutamente contínua onde $\tau \in \mathbb{R}$, a qual satisfaz para cada $t \geq \tau$*
$$\dot{y} + \gamma y^R \leq \delta,$$
com $R > 1, \gamma > 0$ e $\delta : [\tau, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função positiva absolutamente contínua e não decrescente limitada em limitados. Então para cada $t \geq \tau$ temos
$$y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R} + \frac{1}{(\gamma(R-1)(t-\tau))^{1/(R-1)}}$$

Demonstração: Se $y(\tau) \leq \left(\frac{\delta(\tau)}{\gamma}\right)^{1/R}$ então para cada $t \geq \tau$, $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R}$. De fato, suponha que para algum $t \geq \tau$, $y(t) > \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R}$. Então teremos que para algum $t_0 \in [\tau, t)$, $y(t_0) = \left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma}\right)^{1/R}$. Logo
$$\dot{y}(t_0) + \gamma \left[\left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma}\right)^{1/R}\right]^R \leq \delta(t_0) \Rightarrow \dot{y}(t_0) \leq 0$$

Assim, y atinge a função $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/R}$ decrescendo. Como δ é não decrescente, para cada $t \geq \tau$ temos que $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R} + \frac{1}{(\gamma(R-1)(t-\tau))^{1/(R-1)}}$.

Se $y(\tau) > \left(\frac{\delta(\tau)}{\gamma}\right)^{1/R}$, suponha que $y(t) > \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R}$ para algum $t_0 > \tau$ então
$$\delta(t) \geq \dot{y}(t) + \gamma y^R(t) \geq \dot{y}(t) + \gamma \left[\left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R}\right]^R = \dot{y}(t) + \delta(t)$$

isto implica que $\dot{y}(t) \leq 0$ para cada $t = t_0$. Como δ é não decrescente a partir de t_0, $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R}$ e então $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R} + \frac{1}{(\gamma(R-1)(t-\tau))^{1/(R-1)}}$ para $t \geq t_0$.

Para cada $t \in [\tau, t_0]$ escreva $z(t) = y(t) - \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R} \geq 0$. Como $a^R + b^R \leq (a+b)^R$ se a,b são positivos e $R \geq 1$, temos

$$y(t)^R = \left(z(t) + \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R}\right)^R \geq z(t)^R + \frac{\delta(t)}{\gamma}.$$

Portanto

$$\dot{z}(t) + \gamma z(t)^R \leq \dot{y}(t) - \frac{\delta(t)^{(1/R)-1}}{R\gamma^{1/R}}\dot{\delta}(t) + \gamma y(t)^R - \delta(t)$$

Como por hipótese $\dot{y}(t) + \gamma y(t)^R - \delta(t) \leq 0$ e δ é uma função positiva e não decrescente temos que

$$\dot{z}(t) + \gamma z(t)^R \leq 0$$

Integrando de τ a t temos

$$\int_\tau^t z(s)^{-R}\dot{z}(s)ds \leq \int_\tau^t -\gamma ds$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{z(t)^{1-R}}{1-R} - \frac{z(\tau)^{1-R}}{1-R} &\leq -\gamma(t-\tau) \\
z(t)^{1-R} &\leq z(\tau)^{1-R} + \gamma(R-1)(t-\tau) \\
z(t)^{R-1} &\geq \frac{1}{\gamma(R-1)(t-\tau)} \\
z(t) &\leq \frac{1}{[\gamma(R-1)(t-\tau)]^{1/(R-1)}}
\end{aligned}$$

Portanto temos para cada $t \in [\tau, t_0]$

$$y(t) = z(t) + \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R} \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{1/R} + \frac{1}{[\gamma(R-1)(t-\tau)]^{1/(R-1)}}$$

Isto conclui a demonstração.■

Lema 1.1.2 *(Lema Uniforme de Gronwall, [73]) Sejam g,h,y funções positivas com $\dot{y},g,h$ e y localmente integráveis em $[t_0,\infty]$ com*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h.$$

Seja $R > 0$ fixo e suponha que para cada $t \geq t_0$ tenhamos

$$\int_t^{t+R} g(s)ds \leq a_1(t), \int_t^{t+R} h(s)ds \leq a_2(t), \int_t^{t+R} y(s)ds \leq a_3(t).$$

Então para cada $t \geq t_0$ temos

$$y(t+R) \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)\right) e^{a_1(t)}$$

Demonstração: Seja $t_0 \leq t \leq \theta \leq s \leq \tau \leq t+R$.
Multiplicando $\frac{dy}{d\tau} - gy \leq h$ por $e^{-\int_s^\tau g(\sigma)d\sigma}$ obtemos

$$\frac{d}{d\tau}\left(y(\tau)e^{-\int_s^\tau g(\sigma)d\sigma}\right) \leq h(\tau)e^{-\int_s^\tau g(\sigma)d\sigma} \leq h(\tau)$$

Integrando em τ de θ a $t+R$

$$\begin{aligned}
&y(t+R)e^{-\int_s^{t+R} g(\sigma)d\sigma} - y(\theta)e^{-\int_s^\theta g(\sigma)d\sigma} \leq \int_\theta^{t+R} h(\tau)d\tau \leq \int_t^{t+R} h(\tau)d\tau \leq a_2(t)\\
&y(t+R) \leq y(\theta)e^{-\int_s^\theta g(\sigma)d\sigma + \int_s^{t+R} g(\sigma)d\sigma} + a_2(t)e^{\int_s^{t+R} g(\sigma)d\sigma}\\
&y(t+R) \leq (y(\theta) + a_2(t))\, e^{\int_\theta^{t+R} g(\sigma)d\sigma}\\
&y(t+R) \leq (y(\theta) + a_2(t))\, e^{a_1(t)}
\end{aligned}$$

Integrando em θ de t a $t+R$

$$\int_t^{t+R} y(t+R)d\theta \leq \int_t^{t+R} y(\theta)e^{a_1(t)}d\theta + \int_t^{t+R} a_2(t)e^{a_1(t)}d\theta$$

$$Ry(t+R) \leq e^{a_1(t)} \int_t^{t+R} y(\theta)d\theta + a_2(t)e^{a_1(t)} \int_t^{t+R} d\theta \leq e^{a_1(t)}a_3(t) + a_2(t)e^{a_1(t)}R$$

Portanto para cada $t \geq t_0$ temos

$$y(t+R) \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)\right) e^{a_1(t)}$$

■

Observação 1.1.1 *Com as mesmas hipóteses do Lema 1.1.2, mas considerando agora $g \equiv 0$ temos para $R > 0$ fixo $y(t+R) \leq \frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)$.*

1.2 Operador Maximal Monótono em Espaços de Hilbert

Nesta seção vamos exibir algumas definições e resultados que podem ser encontrados em [12].

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um operador multívoco, A, em H é uma aplicação de H em $\wp(H)$, conjunto das partes de H. Se para todo $x \in H$ o conjunto Ax contém no máximo um elemento dizemos que A é unívoco. O domínio de A é o conjunto $\mathcal{D}(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é o conjunto $\mathcal{R}(A) = \cup_{x \in H} Ax$.

Identificaremos A com seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y); y \in Ax\}$. O operador A^{-1} é aquele cujo gráfico é simétrico ao de A, isto é, $y \in A^{-1}x \Longleftrightarrow x \in Ay$; evidentemente $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$.

O conjunto dos operadores de H é parcialmente ordenado pela inclusão dos gráficos: $A \subset B$ se e somente se para todo $x \in H, Ax \subset Bx$.

Definição 1.2.1 *Dizemos que um operador A em H é monótono se para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$, $\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$ ou, mais precisamente, para todo $y_1 \in Ax_1$ e para todo $y_2 \in Ax_2$, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$.*

Exemplo 1.2.1 *(Exemplo 2.1.4 p. 21 [12]) Seja φ uma função convexa e própria sobre H, ou seja, uma aplicação de H em $]-\infty, +\infty]$, tal que $\varphi \not\equiv +\infty$ e*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in H$ e para todo $t \in (0,1)$. O domínio da função $\varphi, \mathcal{D}(\varphi)$, é dado por $\mathcal{D}(\varphi) = \{x \in H; \varphi(x) < +\infty\}$. A subdiferencial $\partial\varphi$ de φ, definida por

$$y \in \partial\varphi(x) \Longleftrightarrow \textit{para todo} \quad \xi \in H, \varphi(\xi) \geq \varphi(x) + \langle y, \xi - x \rangle,$$

é monótona em H.

Definição 1.2.2 *O operador monótono A de H é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de H.*

Em outras palavras: A é maximal monótono se e somente se A é monótono e, se $(x, y) \in H \times H$ for tal que

$$\langle y - A\xi, x - \xi \rangle \geq 0$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(A)$ (ou mais precisamente, $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$, para todo $(\xi, \eta) \in A$), então $y \in Ax$.

Outra caracterização para operadores maximais monótonos é a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1 *(Proposição 2.2 p.23 [12]) Seja A um operador de H. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *A é maximal monótono;*

2. *A é monótono e $\mathcal{R}(I + A) = H$;*

3. *Para todo $\lambda > 0$, $\quad (I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo H.*

Exemplo 1.2.2 *(Exemplo 2.3.3 p.25, [12]) Seja φ uma função convexa e própria sobre H. Se φ é semicontínua inferiormente então $\partial\varphi$ é maximal monótono.*

Exemplo 1.2.3 *(Exemplo 2.3.7 p.26, [12]) Seja V um espaço de Banach reflexivo e V^* o seu dual tal que $V \subset H \subset V^*$ injeções contínuas e densas. Seja $A : V \to V^*$ um operador unívoco definido em todo V, hemicontínuo e coercivo. Então o operador A_H restrição de A a H definido por*

$$\mathcal{D}(A_H) = \{x \in V; Ax \in H\}$$

e $A_H = A$ é um operador maximal monótono em H.

Para os próximos resultados precisamos da seguinte definição:

Definição 1.2.3 *(Definição 3.1 p. 64, [12]) Seja A um operador de H e $f \in L^1(0, T; H)$. Uma solução forte da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ é toda função $u \in C([0, T]; H)$, absolutamente contínua em todo compacto de $(0, T)$ verificando: $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$, q.t.p $t \in (0, T)$.*

Dizemos que $u \in C([0, T]; H)$, é uma solução fraca da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ se existem sequências $f_n \in L^1(0, T; H)$ e $u_n \in C([0, T]; H)$ tal que u_n é uma solução forte da equação $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $\quad f_n \to f$ em $L^1(0, T; H)$ e $u_n \to u$ uniformemente em $[0, T]$.

Lema 1.2.1 *(Teorema 3.4 p.65, [12]) Seja A um operador maximal monótono de H. Para toda $f \in L^1(0, T; H)$ e todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, existe uma única solução fraca da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ tal que $u(0) = u_0$.*

Proposição 1.2.2 *(Proposição 3.6 p.70, [12]) Seja A um operador maximal monótono, $u \in C([0,T];H)$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Então u é uma solução fraca da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ se e somente se u verifica*

$$\frac{1}{2}\|u(t) - x\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u(s) - x\|_H^2 + \int_s^t \langle f(\sigma) - y, u(\sigma) - x\rangle \, d\sigma,$$

$\forall \ [x,y] \in A, \ \ \forall \ \ 0 \leq s \leq t \leq T.$

Teorema 1.2.1 *(Teorema 3.6 p.72, [12]) Suponha que o operador A seja subdiferencial de uma função φ própria, convexa e semicontínua inferiormente. Se $f \in L^2(\tau,T;H)$ então toda solução fraca da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ é uma solução forte e $\sqrt{t}\frac{du}{dt} \in L^2(\tau,T;H)$. Além disso, se o dado inicial, $u_0 \in \mathcal{D}(\varphi)$, então $\frac{du}{dt} \in L^2(\tau,T;H)$.*

Lema 1.2.2 *(Lema 3.3 p.73, [12]) Seja φ convexa, própria e semicontínua inferiormente em H. Seja $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ tal que $u(t) \in D(\partial\varphi)$ q.t.p. em $(0,T)$. Suponha que exista $g \in L^2(0,T;H)$ tal que $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ q.t.p. em $(0,T)$. Então $t \mapsto \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$. Além disso, seja $\mathcal{L}$ o conjunto dos pontos $t \in (0,T)$ tais que $u(t) \in D(\partial\varphi)$ e $u(\cdot)$ e $\varphi(u(\cdot))$ são deriváveis em t então para todo $t \in \mathcal{L}$ temos*

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle h, \frac{d}{dt}u(t)\right\rangle, \forall h \in \partial\varphi(u(t)).$$

Proposição 1.2.3 *(Proposição 3.13 p.107, [12]) Seja A um operador maximal monótono tal que $Int(\mathcal{D}(A)) \neq \emptyset$ e seja a aplicação $B : [0,T] \times \overline{\mathcal{D}(A)} \to H$ verificando*

- *Existe $\omega \geq 0$ tal que $\|B(t_1,x_1) - B(t_2,x_2)\|_H \leq \omega \|x_1 - x_2\|_H, \quad \forall t \in [0,T], \forall x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$;*

- *Para todo $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ a aplicação $t \mapsto B(t,x)$ pertence a $L^\infty(0,T;H)$.*

Então para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ existe uma única solução $u \in W^{1,1}(0,T;H)$ da equação $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) - B(t,u(t)) \ni 0$.

Uma vez que o operador é do tipo subdiferencial de uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente, o semigrupo gerado por este operador exerce um efeito regularizante sobre o dado inicial:

Teorema 1.2.2 *(Teorema 3.2 pg 57, [12]) Sejam φ uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente em H, $A = \partial\varphi$ e $S(t)$ o semigrupo gerado por $-A$ em $\overline{\mathcal{D}(\partial\varphi)}$. Então para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\partial\varphi)}$ e todo $t > 0$, $S(t)u_0 \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$ e $t \mapsto S(t)u_0$ é Lipschitz em $[\delta, +\infty), \forall \delta > 0$.*

1.2.1 O Operador p-Laplaciano em Domínios Limitados

Neste trabalho os problemas de evolução que consideraremos têm como parte principal o operador p-Laplacino, Δ_p, com $p > 2$. Segundo os autores [16] e [60] se V é um espaço de Banach reflexivo e V' o seu dual, e H é um espaço de Hilbert, com $V \subset H \subset V'$ com imersões contínuas e densas, $A : V \to V'$ é um operador monótono, unívoco, definido em todo V, hemicontínuo e coercivo, então o operador A_H, restrição de A à H, definido por

$$\mathcal{D}(A_H) = \{u \in V; Au \in H\}, \qquad A_H(u) = A(u), \quad u \in \mathcal{D}(A_H)$$

é maximal monótono em H.

Usando este resultado é possível mostrar que quando multiplicado por (-1) o operador p-Laplaciano, $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ definido por

$$Au = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

é tal que a sua realização A_H, $H = L^2(\Omega)$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira regular e $p > 2$. Vamos denotar por $-\Delta_p$ o operador A_H.

Além disso, o operador A_H é do tipo subdiferencial. Considere $\varphi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.1}$$

Esta é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente. Então é possível mostrar que $\partial\varphi$ é maximal monótono, pelo Exemplo 1.2.2, $\mathcal{D}(\partial\varphi) \subset \mathcal{D}(\varphi) \subset \overline{\mathcal{D}(\varphi)} = \overline{\mathcal{D}(\partial\varphi)}$, e, além disso, $\partial\varphi = -\Delta_p$.

Assim, o semigrupo gerado pelo operador $-\Delta_p$ possui a propriedade regularizante enunciada no Teorema 1.2.2 e este semigrupo é compacto, para esta demonstração é necessário fazer uma adaptação da Observação 2.1.1, p.47, [75].

Para obtermos informações sobre o domínio do operador p-Laplaciano podemos encontrar o seguinte resultado:

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) = f(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\langle g(u), u\rangle \geq 0$ qualquer que seja $u \in \mathcal{D}(\Delta_p)$.

Teorema 1.2.3 *(Teorema A3, p.271, [28]) Se $f \in L^v(\Omega)$ com $v > n/p$ e u é solução de (1.2) então $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^v(\Omega)}, |A_k|)$, onde $A_k = \{x \in \Omega; u(x) > k\}$.*

1.3 Teoremas de Compacidade

O objetivo desta seção é enunciar resultados de compacidade para o conjunto de soluções de uma família de equações diferenciais.

Considere o seguinte problema do valor inicial

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n \\ u_n(\tau) = u_{0_n} \in H \end{cases}$$

onde A é maximal monótono em um espaço de Hilbert H, $u_{0_n} \in H$ e $f_n \in L^1(\tau, T; H)$. Quando variamos f_n e u_{0_n} obtemos uma família de problemas e então uma família de soluções.

Definição 1.3.1 *Um subconjunto $K \subset L^1(a, b; H)$ é uniformemente integrável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E \|f(t)\|_H \, dt < \epsilon$$

para cada subconjunto mensurável $E \subset [a, b]$ cuja medida de Lebesgue, $m(E) < \delta(\epsilon)$, uniformemente para $f \in K$.

Definimos $M(K) = \{u_n; u_n \text{ é a única solução fraca de (1.3)}; (f_n, u_{0_n}) \in K \times H\}$. O próximo resultado é uma adaptação do Teorema de Baras p. 47, [75].

Teorema 1.3.1 *(Teorema 2.5 [70]) Sejam H um espaço de Hilbert real, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \wp(H)$ um operador maximal monótono em H o qual gera um semigrupo compacto, $\{u_{0_n}\} \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$ com $u_{0_n} \to u_0$ em H, e $K = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto uniformemente integrável em $L^1(\tau, T; H)$ então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([\tau, T]; H)$.*

Teorema 1.3.2 *([62] p. 214)Sejam X, Y e H espaços de Banach, com $X \subset\subset H \subset Y$, e X reflexivo. Suponha que $\{u_n\}$ é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(\tau, T; X)$ e $\left\{\frac{d}{dt}u_n\right\}$ uniformemente limitada em $L^p(\tau, T; Y)$, para algum $p > 1$. Então existe uma subsequência de $\{u_n\}$ que converge fortemente em $L^2(\tau, T; H)$.*

1.4 Atrator Pullback e Processo Dinâmico Multívoco

Antes de definirmos um processo multívoco, vamos considerar algumas definições básicas e resultados abstratos sobre a existência do atrator pullback para um processo.

Seja X um espaço métrico munido da métrica $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ e sejam

$$\mathcal{B}(X) = \{A \in \wp(X); A \text{ é limitado}\},$$

$$\mathcal{K}(X) = \{A \in \wp(X); A \text{ é compacto}\},$$

$$\text{dist}(Z, Y) = \sup_{z \in Z} \inf_{y \in Y} \rho(z, y),$$

para $Z, Y \subset X$.

Definição 1.4.1 *(ver [23] p.1967) Uma família de aplicações $U(t, s) : X \to X$ com $-\infty < s \leq t < \infty$ satisfazendo:*

1. $U(t, t) = Id$;
2. $U(t, s)v = U(t, \tau)U(\tau, s)v$, *para todo* $v \in X$ *e para todo* $t \geq \tau \geq s$;
3. *A aplicação* $v \to U(t, \tau)v$ *é contínua para todo* $t \geq \tau$

é chamada de processo de evolução ou simplesmente processo.

Definição 1.4.2 *(Definição 1.1 p.1968, [23]) Uma família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos compactos de X é o atrator pullback associado ao processo $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ se:*

1. $\mathcal{A}(t) = U(t, \tau)\mathcal{A}(\tau)$, *para todo* $t \geq \tau$ *(propriedade da invariância).*
2. $\mathcal{A}(t)$ *atrai no sentido pullback todos os subconjuntos limitados de X por $\{U(t, s)\}_{t \geq s}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, para qualquer subconjunto limitado $D \subset X$, temos para todo $t \in \mathbb{R}$:*
$$\lim_{\tau \to -\infty} dist(U(t, \tau)D, \mathcal{A}(t)) = 0.$$
3. $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ *é minimal no sentido que se existe outra família invariante de conjuntos fechados $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, a qual atrai subconjuntos limitados de X, no sentido pullback, então $\mathcal{A}(t) \subset C(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.4.3 *(Definição 2.1 p.1969, [23]) Sejam $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ um processo em um espaço métrico X e B um subconjunto de X. O conjunto ω-limite de B, no tempo t, é definido por*

$$\omega(t, B) = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq \sigma} U(t, \tau)B}.$$

Para cada subconjunto $B \subset X$ temos

$$\omega(t,B) = \big\{ y \in X : \text{existe uma sequência}\, \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t], s_k \to -\infty \\ \text{e}\, \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B, \text{tal que} \quad y = \lim_{k\to+\infty} U(t,s_k)x_k \big\}\,.$$

O próximo teorema dá uma condição necessária e suficiente para que exista o atrator no sentido pullback e além disso caracteriza-o como o fecho da reunião dos $\omega(t)$-limites dos limitados.

Teorema 1.4.1 *(Teorema 2.2 p.1969,[23]) Seja $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo em um espaço métrico completo X. São equivalentes:*

1. *Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que atrai limitados de X, no sentido pullback.*

2. *$\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ tem pullback attractor $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, onde*
$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)}.$$

Quando não temos que a solução correspondente a cada dado inicial é única introduzimos o conceito de processo multívoco. As definições e resultados abaixo são baseados no trabalho [19].

Definição 1.4.4 *Uma família de aplicações $U(t,s) : X \to \wp(X)$ com $-\infty < s \leq t < \infty$ satisfazendo:*

1. *$U(t,t) = Id$;*

2. *$U(t,s)v \subseteq U(t,\tau)U(\tau,s)v$, para todo $v \in X$ e para todo $t \geq \tau \geq s$;*

é chamada de Processo Multívoco.

O *Processo Multívoco* é chamado *exato* se

$$U(t,s)v = U(t,\tau)U(\tau,s)v,$$

para todo $v \in X$e para todo $t \geq \tau \geq s$.

Se $B \subset X$ é um subconjunto qualquer, definimos

$$U(t,s)B = \{U(t,s)b : b \in B\}\,,$$

para todo $t \geq s$.

Definição 1.4.5 *Seja $t \in \mathbb{R}$. O conjunto $D(t) \subset X$ atrai no sentido pullback o conjunto $B \in \mathcal{B}(X)$ no tempo t por $\{U(t,s)\}_{t \geq s}$, se:*

$$\lim_{s \to -\infty} dist\,(U(t,s)B, \mathcal{D}(t)) = 0. \tag{1.4}$$

Definição 1.4.6 *A família $\{D(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é atratora no sentido pullback se $D(t)$ atrai no sentido pullback todos os subconjuntos limitados de X no tempo t por $\{U(t,s)\}_{t \geq s}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, dados $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e dado $B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, \tau_\varepsilon \leq t$ tal que*

$$dist\,(U(t,s)B, \mathcal{D}(t)) \leq \varepsilon, \qquad se\ s \leq \tau_\varepsilon$$

Definição 1.4.7 *A família de conjuntos compactos $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o atrator pullback associado ao processo multívoco $\{U(t,s)\}_{t \geq s}$ se:*

1. *é semi-invariante, isto é $\mathcal{A}(t) \subset U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau)$, para todo $t \geq s$;*

2. *é atratora no sentido pullback;*

3. *é minimal no sentido que se, $\left\{\tilde{\mathcal{A}}(t)\right\}_{t \in \mathbb{R}}$ é outra família de conjuntos fechados atratora, temos que $\mathcal{A}(t) \subset \tilde{\mathcal{A}}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Neste texto sempre que mencionarmos a propriedade de atração estaremos nos referindo à atração no sentido pullback.

Definição 1.4.8 *Dados $B \subset \mathcal{B}(X)$ e $t \in \mathbb{R}$ quaisquer definimos a órbita do subconjunto $B \subset X$ no tempo t como*

$$\gamma^s(t,B) = \bigcup_{\tau \leq s} U(t,\tau)B$$

e o conjunto ω-limite de B no tempo t como

$$\omega(t,B) = \bigcap_{s \leq t} \overline{\gamma^s(t,B)}.$$

Lema 1.4.1 *(Lema 5 p.156, [19]) Seja $B \subset X$ um subconjunto qualquer. São equivalentes:*

1. *$y \in \omega(t,B)$;*

2. *existe uma sequência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\xi_n \in U(t,\tau_n)B$ com $\tau_n \to -\infty$, tal que $\xi_n \to y$ em X,*

Teorema 1.4.2 *(Teorema 6 p. 157, [19]). Suponha que para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \subset \mathcal{B}(X)$ exista $D(t,B) \in \mathcal{K}(X)$, tal que*

$$\lim_{s \to -\infty} dist\,(U(t,s)B, D(t,B)) = 0.$$

Então $w\,(t,B)$ é não-vazio, compacto e é o conjunto minimal fechado que atrai B no tempo t.

Definição 1.4.9 *O processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é condicionalmente assintoticamente compacto no sentido pullback se para cada $t \in \mathbb{R}$ com $t \geq \tau$ e $B \in \mathcal{B}(X)$ tais que para algum $t_0 = t_0(t,\tau,B)$, $\gamma^{t_0}(t,B) \in \mathcal{B}(X)$ então qualquer sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\xi_n \in U(t,\tau_n)B$, $\tau_n \to -\infty$, é precompacta.*

Proposição 1.4.1 *(Lema 8 pg 158, [19]) O processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é condicionalmente assintoticamente compacto se, e somente se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X)$ existe um conjunto compacto $D(t,B)$, satisfazendo*

$$\lim_{s \to -\infty} dist(U(t,s)B, D(t,B)) = 0.$$

Segue diretamente do Teorema 1.4.2 e da Proposição 1.4.1 o seguinte resultado:

Corolário 1.4.1 *Se o processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é condicionalmente assintoticamente compacto então para todo $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X), \omega(t,B)$ é não-vazio, compacto e é o conjunto minimal fechado que atrai B no tempo t.*

A seguir vamos enunciar e demonstrar um teorema já conhecido que nos dá condições necessárias e suficientes para a existência do atrator pullback para um processo multívoco. Precisaremos das seguintes definições:

Definição 1.4.10 *(Definição 10 p.159, [19]) Sejam X, Y espaços métricos. A aplicação multívoca $F : X \to \wp(Y)$ é semicontínua superiormente se para todo $x \in X$ e qualquer vizinhança de $F(x)$, $O(F(x))$, existe $\delta > 0$ tal que se $\rho(x,z) < \delta$, então $F(z) \subset O(F(x))$.*

Definição 1.4.11 *(Definição 2 p.108, [5]) Sejam X, Y espaços métricos. A aplicação multívoca $F : X \to \wp(Y)$ é semicontínua inferiormente em $x_0 \in X$ se para qualquer $y_0 \in F(x_0)$ e qualquer vizinhança $O(y_0)$ de y_0, existe uma vizinhança $O(x_0)$ de x_0 tal que*

$$\forall x \in O(x_0), \quad F(x) \cap O(y_0) \neq \emptyset.$$

Dizemos que F é semicontínua inferiormente se o é em todo $x_0 \in X$.

Podemos ainda, fazer a seguinte observação:

Observação 1.4.1 *Sejam X, Y espaços métricos. A aplicação multívoca $F : X \to \wp(Y)$*

- *é semicontínua superiormente se qualquer sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\xi_n \in F(x_n)$, $x_n \to x$ tem uma subsequência convergente com limite pertencendo $F(x)$. (Lema 1.1, [29]).*
- *é semicontínua inferiormente se para todo $x \in X, x_n \to x$ e $y \in F(x)$, existe uma sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n \in F(x_n)$ e $y_n \to y$ (p.159, [19]).*

A aplicação multívoca é contínua se é semicontínua inferiormente e superiormente.

Observação 1.4.2 *A aplicação $F : X \to \wp(Y)$ tem gráfico fechado se dada $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Y com $\xi_n \in F(x_n)$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \to x$ e $\xi_n \to \xi$, então $\xi \in F(x)$. Se a aplicação F tem gráfico fechado então F é semicontínua superiormente. Por outro lado, se F é semicontínua superiormente e $F(x)$ é um conjunto fechado $\forall x \in X$ temos que o gráfico de F é fechado (Proposição 7 p.110 em [5]).*

Teorema 1.4.3 *Seja X um espaço métrico completo e seja $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo multívoco semicontínuo superiormente. São equivalentes:*

1. *Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que atrai limitados de X, no sentido pullback.*
2. *$\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ tem atrator no sentido pullback $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, dado por*

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Demonstração: Se $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ possui atrator no sentido pullback $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, cada $\{\mathcal{A}(t)\}$ é compacto e atrai limitados de X no tempo t, no sentido pullback.

Para provarmos a recíproca procedemos da seguinte maneira. Do Teorema 1.4.2 temos que a família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é não-vazia e atratora, pois para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X), \omega(t,B)$ é não-vazio e é o minimal fechado atrator de B no tempo t. Como $\omega(t,B) \subset \mathcal{A}(t)$ temos que $\mathcal{A}(t)$ é atrator de B no tempo t e assim, a família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é atratora.

Provemos a minimalidade da família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}, \forall t \in \mathbb{R}$. Suponha que $\left\{\widetilde{\mathcal{A}}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos fechados atratora de conjuntos limitados de X. Afirmamos que $\mathcal{A}(t) \subset \widetilde{A}(t)$. De fato, seja $t \in \mathbb{R}$ e tome $y \in \mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)}$. Então existe uma sequência $y_n \in \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)$ tal que $y_n \to y$.

Temos que $y_n \in \omega(t, B_n)$ para algum $B_n \in \mathcal{B}(X)$. Como $\omega(t, B_n) \subset \widetilde{A}(t)$, pois é o minimal fechado que atrai B_n no tempo t então $y_n \in \widetilde{A}(t), \quad \forall n$. Como $\widetilde{A}(t)$ é fechado, $y \in \widetilde{A}(t)$. Portanto, $\mathcal{A}(t) \subset \overline{\mathcal{A}}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Agora mostremos que $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos compactos. Por hipótese existe uma família, $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, de conjuntos compactos atratora de limitados de X ou seja, dado $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X)$ temos $\lim_{s \to -\infty} \text{dist}\,(U(t,s)B, K(t)) = 0$. Porém, da minimalidade da família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ temos que $\mathcal{A}(t) \subset K(t) \quad \forall t$, pois para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{A}(t)$ é o menor fechado atrator de B no tempo t. Portanto, $\mathcal{A}(t)$ é um subconjunto fechado em um subconjunto compacto, o que implica que $\mathcal{A}(t)$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $\omega(t, B)$ é semi-invariante, isto é, dado $B \in \mathcal{B}(X)$ temos $\omega(t, B) \subset U(t, \tau)\omega(\tau, B)$, para todo $t \geq \tau$. De fato, seja $y \in \omega(t, B)$ arbitrário. O Lema 1.4.1 implica que podemos encontrar uma sequência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\xi_n \in U(t, s_n)B, s_n \to -\infty$ tal que $\xi_n \to y$. Como $s_n \to -\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \leq \tau$ para todo $n \geq n_0$, temos da definição de processo multívoco $U(t, s_n)B \subset U(t, \tau)U(\tau, s_n)B, \forall n \geq n_0$. Então $\xi_n \in U(t, \tau)\zeta_n$, onde $\zeta_n \in U(\tau, s_n)B$. Como por hipótese existe uma família de conjuntos compactos atratora, pela Proposição 1.4.1 o processo multívoco é condicionalmente assintoticamente compacto. Então podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $\zeta_n \to \zeta \in \omega(\tau, B)$. Como por hipótese o processo é semicontínuo superiormente pela Observação 1.4.1 temos que $y \in U(t, \tau)\zeta \subset U(t, \tau)\omega(\tau, B), \forall t \geq \tau$.

Da semi-invariância de $\omega(t, B)$ temos que $\mathcal{A}(t) \subset U(t, \tau)\mathcal{A}(\tau), \forall\, t \geq \tau$. De fato, seja $z \in \mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} \omega(t, B)}$ então existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} \omega(t, B)$, onde $z_n \in \omega(t, B_n)$ com $B_n \in \mathcal{B}(X)$, tal que $z_n \to z$. Da semi-invariância do ω-limite, $\omega(t, B_n) \subset U(t, \tau)\omega(\tau, B_n)$, temos que $z_n \in U(t, \tau)\sigma_n$, onde $\sigma_n \in \omega(\tau, B_n)$. Então, para cada n, existe uma sequência $\{\overline{\xi}_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $\overline{\xi}_{n,j} \in U(\tau, s_j)B_n$ com $s_j \to -\infty$ tal que $\rho(\sigma_n, \overline{\xi}_{n,j}) < 1/j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha $\xi_n := \overline{\xi}_{n,j_n}$ tal que $j_n > n$ e $s_n := s_{j_n} < -n$ e $\text{dist}(\xi_n, \mathcal{A}(\tau)) \overset{n \to \infty}{\to} 0$. Como $\xi_n \in U(\tau, s_n)B_n$ com $s_n \to -\infty$ e $\mathcal{A}(\tau)$ atrai todos os subconjuntos limitados de X então $\text{dist}\,(\xi_n, \mathcal{A}(\tau)) \overset{n \to \infty}{\to} 0$. Sendo $\mathcal{A}(\tau)$ compacto existe $\sigma \in \mathcal{A}(\tau)$ e uma subsequência de $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, a qual denotaremos da mesma forma, tal que $\xi_n \to \sigma$, logo $\sigma_n \to \sigma$ pois $\rho(\sigma_n, \xi_n) < 1/n$, por construção. Como o processo é semicontínuo superiormente, novamente pela Observação 1.4.1 temos que $z \in U(t, \tau)\sigma \subset U(t, \tau)\mathcal{A}(\tau)$. ■

É interessante observarmos que, com relação à invariância dos atratores, em [19] os autores apresentam o seguinte resultado:

Proposição 1.4.2 *(Proposição 19 pg 163, [19]). Se o processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é exato e a aplicação $v \mapsto U(t,\tau)v, \forall v \in X$ é semicontínua inferiormente então o atrator no sentido pullback obtido no Teorema 2.1.2 é invariante, isto é, $\mathcal{A}(t) = U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau)$.*

No entanto, a semicontinuidade inferior do processo com relação aos dados iniciais não é uma propriedade esperada. Na Proposição 3.2.4 obtemos a invariância da família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ usando outras propriedades do processo multívoco, as quais podem ser verificadas mais facilmente para os nossos problemas.

Em [23] encontramos um texto bastante claro e completo, mas visando o tratamento de problemas bem postos. No que segue adequamos alguns resultados deste texto para o contexto multívoco. Primeiramente considere as seguintes definições:

Definição 1.4.12 *Dado $t \in \mathbb{R}$ o conjunto $B(t) \subset X$ absorve no sentido pullback limitados de X no tempo t se, para cada $D \subset X$ limitado, existe $T = T(t,D) \leq t$ tal que*

$$U(t,\tau)D \subset B(t), \forall \ \ \tau \leq T.$$

A família $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ absorve no sentido pullback subconjuntos limitados de X se $B(t)$ absorve, no sentido pullback, subconjuntos limitados de X no tempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4.13 *O processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é limitado dissipativo no sentido pullback se existe uma família $\{B(t)\}_{t\geq\tau}$ de conjuntos limitados de X os quais absorve, no sentido pullback, subconjuntos limitados de X.*

Teorema 1.4.4 *Se o processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ semicontínuo superiormente é limitado dissipativo e condicionalmente assintoticamente compacto então $\mathcal{A}(t)$ dado por (1.5) é fechado, atrai no sentido pullback subconjuntos limitados de X no tempo t, é semi-invariante e a família $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é minimal.*

Demonstração: Observe que estamos nas hipóteses do Corolário 1.4.1 então, dado $B \in \mathcal{B}(X), \omega(t,B)$ é não vazio, compacto e atrai B, no sentido pullback, no tempo t. Portanto, se $\mathcal{A}(t)$ dado por (1.5), a famılia $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é fechada e atrai subconjuntos limitados de X no tempo t.

Mostremos que a família é semi-invariante isto é, $\mathcal{A}(t) \subset U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau), \forall t \geq \tau$. Seja $z \in \mathcal{A}(t)$, desde que $\mathcal{A}(t)$ é dado por (1.5) temos que existe uma sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi_n \to z$. Para cada $n \in \mathbb{N}, \xi_n \in \omega(t, B_n)$, para algum $B_n \in \mathcal{B}(X)$. Da semi-invariância do ω-limite, provada no Teorema 1.4.3, temos $\xi_n \in U(t,\tau)\omega(\tau, B_n)$ então $\xi_n \in U(t,\tau)\zeta_n$, com $\zeta_n \in \omega(\tau, B_n)$. Como fizemos no Teorema 1.4.3, podemos escolher uma sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\xi_n \in U(\tau, s_n)B_n$, onde $s_n < -n$ tal que $\rho(\zeta_n, \xi_n) < 1/n$, com $s_n \to -\infty$. Como o processo multívoco é limitado dissipativo existem um conjunto limitado $B(\tau)$ e $T = T(\tau, B_n) < \tau$ tal que $U(\tau, s_n)B_n \subset B(\tau), \forall s_n < T$. Então $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e como o processo multívoco é condicionalmente assintoticamente compacto existem uma subsequência de $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a qual denotaremos por ela mesma, e $\xi \in X$ tal que $\xi_n \to \xi$ então $\xi \in \omega(\tau, B_n)$ pelo Lema 1.4.1. Temos também que $\zeta_n \to \xi \in \mathcal{A}(\tau)$ como o processo multívoco é semicontínuo superiormente temos que $z \in U(t,\tau)\xi \subset U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau)$.

Vamos provar que $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é minimal. Se $B(t)$ é fechado e atrai no sentido pullback subconjuntos limitados de X então, dado qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$ temos

$$\lim_{s\to-\infty} \text{dist}\,(U(t,s)B, B(t)) = 0 \tag{1.6}$$

Temos que para cada $t \in \mathbb{R}$ $\omega(t,B) \subset B(t)$. De fato, tome $y \in \omega(t,B)$ arbitrário então pelo Lema 1.4.1 existe uma sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\xi_n \in U(t,s_n)B$ com $s_n \to -\infty$ tal que $\xi_n \to y$. De (1.6), tomando $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{dist}(\xi_n, B(t)) < \epsilon/2, \forall n > N_0$. Da convergência, $\xi_n \to y$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\xi_n, y) < \epsilon/2, \forall n > N_1$. Tomando $N = \max\{N_0, N_1\}$ temos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, B(t)) &= \inf_{b\in B(t)} \rho(y,b) \leq \inf_{b\in B(t)} \rho(y,\xi_n) + \rho(\xi_n, b) \\ &= \rho(y,\xi_n) + \text{dist}(\xi_n, B(t)) < \epsilon, \forall n > N. \end{aligned}$$

Isto implica que $y \in B(t)$, pois $B(t)$ é fechado e então que $\omega(t,B) \subset B(t)$.

Afirmamos que para cada $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{A}(t) \subset B(t)$. De fato, tome $y \in \mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)}$ então existe uma sequência $y_n \in \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)$ tal que $y_n \to y$. Temos que $y_n \in \omega(t, B_n)$ para algum $B_n \in \mathcal{B}(X)$, como acabamos de observar $\omega(t,B_n) \subset B(t)$, então $y_n \in B(t)$. Como $B(t)$ é fechado $y \in B(t), \forall t \in \mathbb{R}$. ■

Para o próximo resultado precisamos da seguinte definição:

Definição 1.4.14 *O processo multívoco* $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ *é fortemente limitado dissipativo no sentido pullback se para cada* $t \in \mathbb{R}$ *existe um subconjunto limitado* $B(t)$ *de* X *o qual atrai, no sentido pullback, subconjuntos limitados de* X *no tempo* τ *para cada* $\tau \leq t$ *isto é, dado* $B \in \mathcal{B}(X)$ *e* $\tau \leq t$ *existe* $s_0 = s_0(\tau, B)$ *tal que*

$$U(\tau, s)B \subset B(t), \forall \quad s \leq s_0(\tau, B).$$

O resultado pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.4.5 *Se um processo multívoco* $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ *é fortemente limitado dissipativo e possui um atrator no sentido pullback* $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$*, como em (1.5), então* $\bigcup_{s\leq t}\mathcal{A}(s)$ *é limitado para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Como $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é fortemente limitado dissipativo, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe $B(t) \in \mathcal{B}(X)$ que absorve subconjuntos limitados de X em qualquer tempo $\tau \leq t$. Seja $\tau \leq t$ qualquer e $D \in \mathcal{B}(X)$. Então $\omega(\tau, D) \subset \overline{B(t)}$. De fato, tome $x_0 \in \omega(\tau, D)$ então, pelo Lema 1.4.1, existe $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\xi_n \in U(\tau, s_n)D$ com $s_n \to -\infty$ tal que $\xi_n \overset{n\to\infty}{\to} x_0$. Como $U(\tau, s_n)D \in B(t)$, para todo n suficientemente grande $x_0 \in \overline{B(t)}$. Isto implica que $\cup_{D\in\mathcal{B}(X)}\omega(\tau, D) \subset \overline{B(t)}$ e portanto $\mathcal{A}(\tau) \subset \overline{B(t)}, \forall\tau \leq t$. ∎

Capítulo 2

Existência e Comparação de Soluções

Neste capítulo vamos mostrar a existência de solução global e um resultado de comparação para problemas com parte principal dada por uma subdiferencial e perturbações que não são globalmente Lipschitz ou seja, consideremos problemas da seguinte forma:

$$
\begin{cases} u_t + \partial\varphi(u) \in B(t, u(t)), t \geq \tau \\ u(\tau) = u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u(t, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq \tau \end{cases} \tag{2.1}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $H = L^2(\Omega)$ o espaço de fase, $\tau \in \mathbb{R}$ e $p > \max\{2, n/2\}$. A subdiferencial, $\partial\varphi(u)$, é um operador maximal monótono, onde $\varphi : H \to [0, +\infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente tal que, para cada $L \in (0, +\infty)$ o conjunto $\left\{u \in H; \varphi(u) + \|u\|_H^2 \leq L\right\}$ é compacto em H.

A perturbação $B(t, \cdot)$ é um operador multívoco não linear de $D(B(t, \cdot)) \subset H$ em H, tal que $D(\partial\varphi) \subset D(B(t, \cdot))$. A seguir listamos o conjunto de hipóteses a qual B está submetida neste capítulo:

H.1 Dados $\tau, T \in \mathbb{R}$ com $T > \tau$, para cada intervalo $[a, b]$ em $[\tau, T]$ vale:

- $B(t, u)$ é um subconjunto convexo de H, para todo $t \in [a, b]$ e todo $u \in D(\partial\varphi)$
- $B(t, \cdot)$ é mensurável no seguinte sentido: Para cada função $u(t) \in C([a, b]; H)$ existe uma função mensurável $b(t)$ com valores em H tal que $b(t) \in B(t, u(t))$, q.t.p $t \in [a, b]$. A função b é chamada seleção mensurável da aplicação B.
- $B(t, \cdot)$ é semi-fechada no seguinte sentido: Se $u_n \to u$ em $C([a, b]; H)$, $\partial\varphi(u_n) \rightharpoonup \partial\varphi(u)$ em $L^2(a, b; H)$, e se $b_n \rightharpoonup b$ em $L^2(a, b; H)$, com $b_n(t) \in B(t, u_n(t))$ q.t.p. $t \in [a, b]$, então $b(t) \in B(t, u(t))$ q.t.p. $t \in [a, b]$.

H.2 Dados $\tau, T \in \mathbb{R}$, com $\tau < T$, existem uma função $c \in L^1(\tau, T; \mathbb{R})$, uma função $l(\cdot)$ monótona e crescente de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}$, e uma constante $k \in (0,1)$ tais que

$$\|B(t,u)\|_+^2 \leq k\,\|\partial\varphi(u)\|_H^2 + l(\|u\|_H)(\varphi(u)^2 + |c(t)|)$$

para todo $t \in [\tau, T]$ e $u \in D(\partial\varphi)$, onde $\|B(t,u)\|_+ = \sup\{\|b\|_H \,; b \in B(t,u)\}$;

Se fixarmos $u_0 \in D(A) = D(\varphi)$ e assumirmos as hipóteses H.0, H.1-H.2 segue de [61] que o problema (2.1) possui ao menos uma solução local em $W_0^{1,p}(\Omega)$. A existência global de soluções será obtida na Seção 2.2 deste capítulo, com o auxílio da seguinte hipótese:

H.3 Existe uma constante positiva α e uma função positiva $d \in L^1(\tau, T; \mathbb{R})$ tal que

$$\langle\langle -\partial\varphi(u) + B(t,u), u\rangle\rangle_H + \alpha\varphi(u) \leq d(t)(\|u\|_H^2 + 1) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [\tau, T] \quad \text{e} \quad u \in D(\partial\varphi),$$

onde $\langle\langle -\partial\varphi(u) + B(t,u), u\rangle\rangle_H = \sup\{\langle -\partial\varphi(u) + b(t), u\rangle_H \,; b \in B(t,u)\}$.

2.1 Existência local de solução

Nesta seção vamos mostrar a existência de solução local para o problema (2.1) para isto considere a seguinte definição:

Definição 2.1.1 *([61] pg.272) A função $u \in C([\tau, T]; H)$ é uma solução forte de (2.1) se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$u(t)$ é absolutamente contínua sobre todo compacto de (τ, T) e $u(t) \to u_0$ quando $t \downarrow \tau$*

2. *$u(t) \in D(\partial\varphi)$ q.t.p $t \in (\tau, T)$ e existe $b \in L^2(\tau, T; H)$ tal que $b(t) \in B(t, u(t))$ e a equação*
$$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi u(t) = b(t)$$

é satisfeita q.t.p $t \in (\tau, T)$.

A existência de solução local para o problema (2.1) é um caso particular do resultado encontrado em [61], a prova usa a seguinte versão do Teorema de Schauder-Tychonoff, [17]:

Teorema 2.1.1 *Seja K um subconjunto compacto e convexo de um espaço vetorial topológico X localmente convexo. Seja T uma aplicação multívoca semicontínua superiormente de K em X tal que para cada $x \in K$, $T(x)$ é um subconjunto fechado e convexo de X tal que $T(x) \cap K \neq \emptyset$. Então T tem um ponto fixo em K; isto é, existe $x_0 \in K; x_0 \in T(x_0)$.*

Definição 2.1.2 *Para cada $u_0 \in D(\varphi)$, $S \in [\tau, T]$ e $h \in L^2(\tau, S; H)$ denotamos por $\mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h)$ a única solução forte da equação:*

$$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi u(t) = h(t) \tag{2.2}$$

em $[\tau, S]$ satisfazendo $u(\tau) = u_0$, a existência e unicidade desta solução é garantida pelo Teorema 1.2.1. Seja R um número real positivo fixo e seja

$$K_{S,R} = \Big\{u \in L^2(\tau, S; H); \|u\|_{L^2(\tau,S;H)} \leq R\Big\}$$

munido com a topologia fraca de $L^2(\tau, S; H)$.

Seja $\mathbb{B}_{u_0,S,R} : K_{S,R} \to \wp(L^2(\tau, T; H))$ definida da seguinte maneira: dado $h \in K_{S,R}$, se existe $b \in K_{S,R}$ tal que $b(t) \in B(t, \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h)(t))$ q.t.p. em (τ, S), então $b \in \mathbb{B}_{u_0,S,R}(h)$ e

$$D(\mathbb{B}_{u_0,S,R}) = \{h \in K_{S,R}; \mathbb{B}_{u_0,S,R}(h) \neq \emptyset\}$$

Lema 2.1.1 *Sejam H.1 e H.2 satisfeitas e suponha que $\mathbb{B}_{u_0,S,R}(K_{S,R}) \subset K_{S,R}$. Então o gráfico de $\mathbb{B}_{u_0,S,R}$, $Gr(\mathbb{B}_{u_0,S,R})$, é fechado em $K_{S,R} \times K_{S,R}$. E ainda, para cada $h \in D(\mathbb{B}_{u_0,S,R}), \mathbb{B}_{u_0,S,R}(h)$ é um subconjunto fechado e convexo de $K_{S,R}$.*

Demonstração: Sejam as sequências $\{h^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in K_{S,R}$ e $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}_{u_0,S,R}(h^n)$ com $h^n \rightharpoonup h$ em $K_{S,R}$ e $b^n \rightharpoonup b$ em $K_{S,R}$.

Temos que, para cada n, $u^n = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h^n)$ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u^n + \partial\varphi(u^n) = h^n \\ u^n(\tau) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Mostremos que $u^n = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h^n)$ converge para $u = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h)$ em $C([\tau, S]; H)$.

Pelo Teorema de Baras (Teorema 2.3.3, p.47, [75] e Teorema 1.3.1), $\{u^n\}$ é pré-compacto em $C([\tau, S]; H)$. Então existe uma subsequência $\{u^{n_k}\}$ de $\{u^n\}$ tal que $u^{n_k} \to v$ em $C([\tau, S]; H)$. Vamos mostrar que v é solução de (2.1) quando $n \to \infty$ e então, por unicidade de solução , $v = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h) = u$. Ou seja $u^n = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h^n)$ converge para $u = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h)$ em $C([\tau, S]; H)$.

Como $u^n = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h^n)$ é uma solução fraca de (2.3) $\forall n$, pela Proposição 1.2.2 temos:

$$\frac{1}{2}\|u^{n_k}(t)-x\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u^{n_k}(S)-x\|_H^2 + \int_S^t \langle h^{n_k}(\sigma)-\partial\varphi(x), u^{n_k}(\sigma)-x\rangle \, d\sigma,$$

$\forall \tau \leq S \leq t$ e $x \in D(\partial\varphi)$.

Como $u^{n_k} \to v$ em $C([\tau,S];H)$ então $u^{n_k} \to v$ em $L^2(\tau,S;H)$. Como tomamos $h^{n_k} \rightharpoonup h$ em $L^2(\tau,S;H)$ temos que

$$\frac{1}{2}\|v(t)-x\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|v(S)-x\|_H^2 + \int_S^t \langle h(\sigma)-\partial\varphi(x), v(\sigma)-x\rangle \, d\sigma,$$

ou seja, v é uma solução fraca pela Proposição 1.2.2 daí, pelo Teorema 1.2.1, v é uma solução forte de (2.1) quando $n \to \infty$. Assim, $u^n = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h^n)$ converge em $C([\tau,S;H])$ para $v = u = \mathbb{E}_{\tau,S,u_0}(h)$, pela unicidade de solução .

Temos que $\left\{\frac{d}{dt}u^n\right\}$ é uma sequência limitada em $L^2(\tau,S;H)$, pois

$$\left\langle \frac{d}{dt}u^n, \frac{d}{dt}u^n \right\rangle + \left\langle \partial\varphi(u^n), \frac{d}{dt}u^n \right\rangle = \left\langle h^n, \frac{d}{dt}u^n \right\rangle$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy e de Young e o Lema 1.2.2 temos:

$$\left\|\frac{d}{dt}u^n(t)\right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u^n(t)) \leq \|h^n(t)\|_H \left\|\frac{d}{dt}u^n(t)\right\|_H \leq \frac{1}{2}\|h^n(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{d}{dt}u^n(t)\right\|_H^2$$

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{d}{dt}u^n(t)\right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u^n(t)) \leq \frac{1}{2}\|h^n(t)\|_H^2$$

Integrando

$$\int_\tau^S \left\|\frac{d}{dt}u^n(t)\right\|_H^2 dt + 2\varphi(u^n(S)) \leq 2\varphi(u^n(\tau)) + \int_\tau^S \|h^n(t)\|_H^2 \, dt$$

Como $\{h^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $K_{S,R}$ e $\varphi(u^n(S)) \geq 0$ temos:

$$\left\|\frac{d}{dt}u^n\right\|_{L^2(\tau,S;H)}^2 \leq 2\varphi(u_0) + R^2 < \infty,$$

pois $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim, $\left\{\frac{d}{dt}u^n\right\}$ é uma sequência que converge fracamente em $L^2(\tau,S;H)$.

Desde que $b^n \rightharpoonup b$ em $K_{S,R}$, $b^n \rightharpoonup b$ em $L^2(\tau,S;H)$. Como $h^n \rightharpoonup h$ em $L^2(\tau,S;H)$, temos que $\partial\varphi(u^n) = h^n - \frac{d}{dt}u^n$ converge fracamente para $\partial\varphi(u) = h - \frac{d}{dt}u$ em $L^2(\tau,S;H)$.

Agora, pela hipótese H.1, $b(t) \in B(t,u(t))$ q.t.p. $t \in (\tau,S)$, isto é $h \in D(\mathbb{B}_{u_0,S,R})$ e $b \in \mathbb{B}_{u_0,S,R}(h)$.

Portanto, $\mathbb{B}_{u_0,S,R}(h)$ é fechado em $K_{S,R}$ para cada $b \in D(\mathbb{B}_{u_0,S,R})$. Também por H.1 $\mathbb{B}_{u_0,S,R}(h)$ é um subconjunto fechado e convexo de $K_{S,R}$. ■

Teorema 2.1.2 *Suponha que as hipóteses H.1 e H.2 são satisfeitas. Se* $u_0 \in D(\varphi)$ *o problema (2.1) tem uma solução forte em* $[\tau, T_0]$ *para algum* $T_0 \in (\tau, T]$.

Demonstração: Seja ϵ_0 um número positivo e

$$R^2 = \frac{2k\varphi(u_0) + \epsilon_0}{(1-k)}, \tag{2.4}$$

onde $k \in (0,1)$ é dado na hipótese H.2.

Sejam $h \in K_{T_0,R}$, $u = \mathbb{E}_{\tau,T,u_0}(h)$, e T_0 um número positivo que será determinado. Pelo Lema 1.2.2, para quase todo $t \in [\tau, T_0]$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle -\frac{d}{dt}u(t) + h(t), \frac{d}{dt}u(t) \right\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = -\left\| -\frac{d}{dt}u(t) + h(t) \right\|_H^2 + \left\langle -\frac{d}{dt}u(t) + h(t), h(t) \right\rangle.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left\| -\frac{d}{dt}u(t) + h(t) \right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \le \left\| -\frac{d}{dt}u(t) + h(t) \right\|_H \|h(t)\|_H .$$

Aplicando a Desigualdade de Young

$$\left\| -\frac{d}{dt}u(t) + h(t) \right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \le \frac{1}{2}\left\| -\frac{d}{dt}u(t) + h(t) \right\|_H^2 + \frac{1}{2}\|h(t)\|_H^2 .$$

Portanto

$$\frac{1}{2}\left\| -\frac{d}{dt}u(t) + h(t) \right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \le \frac{1}{2}\|h(t)\|_H^2 .$$

Integrando,

$$\frac{1}{2}\int_\tau^t \left\| -\frac{d}{dt}u(s) + h(s) \right\|_H^2 ds + \int_\tau^t \frac{d}{dt}\varphi(u(s))ds \le \frac{1}{2}\int_\tau^t \|h(s)\|_H^2 ds$$

$$\frac{1}{2}\int_\tau^t \left\| -\frac{d}{dt}u(s) + h(s) \right\|_H^2 ds + \varphi(u(t)) \le \varphi(u(\tau)) + \frac{1}{2}\int_\tau^t \|h(s)\|_H^2 ds.$$

Como $h \in K_{T_0,R}$ temos que $\|h\|_{L^2(\tau,T_0;H)} \le R$ e isto implica que:

$$\int_\tau^t \left\| -\frac{d}{dt}u(s) + h(s) \right\|_H^2 ds \le 2\varphi(u_0) + R^2. \tag{2.5}$$

Por outro lado temos que:

$$\varphi(u(t)) \le \varphi(u_0) + R^2. \tag{2.6}$$

Ou seja, $\max\{\varphi(u(t)); t \in [\tau, T_0]\} \leq C_0$, onde

$$C_0 = \varphi(u_0) + R^2. \tag{2.7}$$

Da definição de subdiferencial temos:

$$\varphi(u(t)) - \varphi(u_0) \leq \left\langle -\frac{d}{dt}u(t) + h(t), u(t) - u(\tau) \right\rangle = \left\langle -\frac{d}{dt}u(t), u(t) - u(\tau) \right\rangle + \langle h(t), u(t) - u(\tau) \rangle$$

$$\varphi(u(t)) - \varphi(u_0) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - u_0\|_H^2 + \langle h(t), u(t) - u(\tau) \rangle .$$

Portanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - u_0\|^2 + \varphi(u(t)) \leq \varphi(u_0) + \langle h(t), u(t) - u(\tau) \rangle .$$

Da Desigualdade de Cauchy temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - u_0\|_H^2 + \varphi(u(t)) \leq \varphi(u_0) + \|h(t)\|_H \|u(t) - u(\tau)\|_H .$$

Integrando

$$\frac{1}{2}\int_\tau^t \frac{d}{dt}\|u(s) - u_0\|_H^2 \, ds \leq \int_\tau^t \varphi(u_0) ds + \int_\tau^t \|h(s)\|_H \|u(s) - u(\tau)\|_H \, ds$$

$$\frac{1}{2}\|u(t) - u_0\|_H^2 \leq (t - \tau)\varphi(u_0) + \int_\tau^t \|h(s)\|_H \|u(s) - u(\tau)\|_H \, ds.$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall 1.1.3 temos:

$$\|u(t) - u_0\|_H \leq \sqrt{2(t - \tau)\varphi(u_0)} + \int_\tau^t \|h(s)\|_H \, ds.$$

Da Desigualdade de Hölder temos

$$\|u(t) - u_0\|_H \leq \sqrt{2(t - \tau)\varphi(u_0)} + \left(\int_\tau^t \|h(s)\|_H^2 \, ds\right)^{1/2} \left(\int_\tau^t 1 ds\right)^{1/2}$$

$$\|u(t) - u_0\|_H \leq \sqrt{2(t - \tau)\varphi(u_0)} + \sqrt{t - \tau}\left(\int_\tau^t \|h(s)\|_H^2 \, ds\right)^{1/2}$$

$$\|u(t)\|_H \leq \sqrt{2(t - \tau)\varphi(u_0)} + \sqrt{t - \tau} R + \|u_0\|_H$$

Portanto, $\max\{\|u(t)\|_H ; \tau \leq t \leq T_0\} \leq C_1$, onde

$$C_1 = (\sqrt{2\varphi(u_0)} + R)(T_0 - \tau)^{1/2} + \|u_0\|_H . \tag{2.8}$$

Agora seja $b(t) \in B(t, u(t))$. Por H.3, (2.7) e (2.8) temos que $\forall t \in [\tau, T_0]$ e $u \in D(\partial\varphi)$

$$\|b(t)\|_H^2 \leq k \|\partial\varphi(u(t))\|_H^2 + l(\|u\|_H)\left(\{\varphi(u(t))\}^2 + |c(t)|\right)$$

$$\|b(t)\|_H^2 \leq k\,\|\partial\varphi(u(t))\|_H^2 + l\,(C_1)\,\big(C_0^2 + |c(t))|\big).$$

Integrando

$$\int_\tau^{T_0} \|b(s)\|_H^2\,ds \leq k\int_\tau^{T_0} \|\partial\varphi(u(s))\|_H^2\,ds + \int_\tau^{T_0} C_0^2 l(C_1)ds + l(C_1)\int_\tau^{T_0} |c(s)|\,ds$$

$$\|b\|^2_{L^2(\tau,T_0;H)} \leq k\,\|\partial\varphi(u)\|^2_{L^2(\tau,T_0;H)} + C_0^2 l(C_1)(T_0-\tau) + l(C_1)\int_\tau^{T_0} |c(s)|\,ds.$$

Por (2.5) temos que:

$$\|b\|^2_{L^2(\tau,T_0;H)} \leq k(2\varphi(u_0) + R^2) + C_0^2 l(C_1)(T_0-\tau) + l(C_1)\int_\tau^{T_0} |c(s)|\,ds.$$

De (2.4) temos que $(1-k)R^2 - \epsilon_0 = 2k\varphi(u_0)$ então

$$\|b\|^2_{L^2(\tau,T_0;H)} \leq R^2 - \epsilon_0 + C_0^2 l(C_1)(T_0-\tau) + l(C_1)\int_\tau^{T_0} |c(s)|\,ds$$

Escolhendo T_0 suficientemente pequeno para que

$$C_0^2 l(C_1)(T_0-\tau) + l(C_1)\int_\tau^{T_0} |c(s)|\,ds \leq \epsilon_0,$$

obtemos que

$$\|b\|_{L^2(\tau,T_0;H)} \leq R.$$

Portanto, pelo Lema 2.1.1, o gráfico $Gr(\mathbb{B}_{u_0,T_0,R})$ é fechado em $K_{T_0,R} \times K_{T_0,R}$ e ainda para cada $h \in D(\mathbb{B}_{u_0,T_0,R})$, $\mathbb{B}_{u_0,T_0,R}(h)$ é um subconjunto fechado e convexo de $K_{T_0,R}$. Sendo $\mathbb{B}_{u_0,S,R} : K_{S,R} \to \wp(K_{S,R})$ uma aplicação multívoca entre espaços topológicos compacto e convexo com gráfico fechado, temos pela Observação 1.4.2 que $\mathbb{B}_{u_0,S,R}$ é semi-contínua superiormente. Além disso, se $h \in K_{T_0,R}$, $u = \mathbb{E}_{\tau,T_0,u_0}(h)$ e $b(t) \in B(t,u(t))$ q.t.p. $t \in [\tau, T_0]$ pelas contas feitas acima, $b \in K_{T_0,R}$, de maneira que $\mathbb{B}_{u_0,T_0,R}(K_{T_0,R}) \subset K_{T_0,R}$ com $\mathbb{B}_{u_0,T_0,R}(h) \cap (K_{T_0,R}) \neq \emptyset$.

Agora estamos nas hipóteses do Teorema 2.1.1 que dá a existência de $h_0 \in K_{T_0,R}$ tal que $h_0 \in \mathbb{B}_{u_0,T_0,R}(h_0)$, o que garante a existência de uma solução para o problema (2.1) no intervalo $[\tau, T_0]$. ∎

2.2 Existência Global de Solução

Para concluirmos que a solução obtida em $[\tau, T_0]$, pela seção anterior, pode ser estendida a todo intervalo $[\tau, T]$, seguimos as mesmas idéias em [75], capítulo 3.

Considere $I(\tau,T)$ o conjunto de todos os intervalos da forma $[\tau,T]$ ou $[\tau,T_0)$, $T_0 < T$.

Definição 2.2.1 *Uma solução forte $u : I \to D(\varphi)$ de (2.1), onde $I \in I(\tau,T)$, é chamada solução não continuável se, ou $I = [\tau,T]$ ou não existe outra solução forte de (2.1), $v : J \to D(\varphi)$, com $J \in I(\tau,T)$, $I \subset J$, $I \neq J$ e $u(t) = v(t)$ para todo $t \in I$.*

Lema 2.2.1 *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ uma função própria convexa e semicontínua inferiormente. Seja $B(t,\cdot) : D(\varphi) \to \wp(H)$ um operador satisfazendo H.1 e H.2. Se $u : I \to D(\varphi)$, $I \in I(\tau,T)$ é uma solução forte não continuável de (2.1) para a qual existe uma vizinhança V de sup de I tal que a função $t \longmapsto \|u(t)\|_H + \varphi(u(t))$ é limitada de $V \cap I$ em $\mathbb{R}$ então u está definida em $[\tau,T]$.*

Demonstração: Vamos assumir por contradição que ou $I = [\tau,T_0)$ ou $I = [\tau,T_0]$ com $\tau < T_0 < T$.

Se $I = [\tau,T_0]$ com $\tau < T_0 < T$, por hipótese temos que $\varphi(u(T_0)) < +\infty$ e portanto pode-se concluir que a solução u pode ser continuada à direita de T_0.

De fato, como $\varphi(u(T_0)) < +\infty$ temos que $u(T_0) \in D(\varphi)$. Considere o problema:

$$\text{(2.9)} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}v + \partial\varphi v(t) \in B(t,v(t)) \\ v(T_0) = u(T_0) \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.1.2 existe uma solução v de (2.9) em $[T_0, T_0+\tilde{T}_0]$, para algum $\tilde{T}_0$. Defina $w : [\tau, T_0+\tilde{T}_0] \to H$ por:

$$\text{(2.10)} \qquad w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [\tau,T_0] \\ v(t), & t \in [T_0, T_0+\tilde{T}_0] \end{cases}$$

Observe que w é solução de (2.1) e está definida à direita de T_0.

Então podemos assumir, sem perda de generalidade, que $I = [\tau,T_0)$, com $\tau < T_0 < T$ e para completar a demonstração é suficiente mostrar que o limite $\lim_{t\uparrow T_0} u(t) = u^*$ existe e pertence a $D(\varphi)$.

Para isso observemos que para quase todo $t \in I$ e $b(t) \in B(t,u(t))$, pelo Lema 1.2.2 temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle b(t) - \frac{d}{dt}u(t), \frac{d}{dt}u(t) \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle b(t) - \frac{d}{dt}u(t), \frac{d}{dt}u(t) - b(t) \right\rangle + \left\langle b(t) - \frac{d}{dt}u(t), b(t) \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = -\left\langle b(t) - \frac{d}{dt}u(t), -\frac{d}{dt}u(t) + b(t)\right\rangle + \left\langle b(t) - \frac{d}{dt}u(t), b(t)\right\rangle$$

$$\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle b(t) - \frac{d}{dt}u(t), b(t)\right\rangle, \text{q.t.p. em } I$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy e Young temos

$$\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \leq \frac{1}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\|b(t)\|_H^2 .$$

Então

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) + \frac{1}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|b(t)\|_H^2 . \tag{2.11}$$

Seja V a vizinhança de T_0 cuja existência é garantida por hipótese. Podemos assumir, sem perda de generalidade, diminuindo V, se necessário, que $V \cap I = [t_0, T_0)$, com $\tau \leq t_0 < T_0 < T$.

Seja $\mathrm{M} = \sup\{\varphi(u(t)) + \|u(t)\|_H \,; t \in [t_0, T_0)\}$. Por H.2 temos $\forall u \in D(\varphi)$ e $t \in V \cap I$

$$\|b(t)\|_H^2 \leq k\,\|\varphi(u(t))\|_H^2 + l(\|u(t)\|_H)\left(\{\varphi(u(t))\}^2 + |c(t)|\right),$$

$$\|b(t)\|_H^2 \leq k\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 + l(\|u(t)\|_H)\left(\{\varphi(u(t))\}^2 + |c(t)|\right).$$

Voltando a (2.11) temos:

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t))+\frac{1}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 \leq \frac{k}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2+\frac{1}{2}l(\|u(t)\|_H)\left(\{\varphi(u(t))\}^2 + |c(t)|\right).$$

E ainda

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) + \frac{(1-k)}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}l(\mathrm{M})\left(M^2 + |c(t)|\right).$$

Integrando de t_0 a t onde $t_0 < t < T_0$ obtemos:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\varphi(u(s))ds + \frac{(1-k)}{2}\int_{t_0}^t \left\|b(s) - \frac{d}{dt}u(s)\right\|_H^2 ds \leq \frac{1}{2}l(\mathrm{M})\mathrm{M}^2(t-t_0) + \frac{l(\mathrm{M})}{2}\int_{t_0}^t |c(s)|\,ds$$

E assim,

$$\varphi(u(t))+\frac{(1-k)}{2}\int_{t_0}^t \left\|b(s) - \frac{d}{dt}u(s)\right\|_H^2 ds \leq \varphi(u(t_0))+\frac{1}{2}l(\mathrm{M})\mathrm{M}^2(t-t_0)+\frac{l(\mathrm{M})}{2}\int_{t_0}^t |c(s)|\,ds.$$

Portanto, como $c \in L^1(\tau, T; \mathbb{R})$ podemos concluir que

$$\left(b(s) - \frac{d}{dt}u(s)\right) \in L^2(t_0, T_0; H)$$

E também que $t \longmapsto b(t) \in L^2(t_0, T_0; H)$, $b(t) \in B(t, u(t))$ q.t.p em I.

Agora considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}v(t) + \partial\varphi(v(t)) = b(t), t_0 < t \leq T_0 \\ v(t_0) = u(t_0) \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Esta equação tem uma única solução forte $v : [t_0, T_0] \rightarrow D(\varphi)$, pelo Lema 1.2.1. Obviamente v deve coincidir com u em $[t_0, T_0)$ e

$$\lim_{t \uparrow T_0} u(t) = \lim_{t \uparrow T_0} v(t) = v(T_0) = u^*.$$

Por outro lado, desde que φ é semicontínua inferiormente e $t \longmapsto \varphi(v(t))$ é limitada em $[t_0, T_0)$, segue que $\varphi(u^*) < \infty$, isto é, $u^* \in D(\varphi)$. Com isto podemos concluir que $u(t)$ pode ser continuada à direita de T_0, contradizendo o fato de que u é não continuável.

Isto mostra que a suposição inicial é falsa, e portanto, u está definida em $[\tau, T]$.■

Teorema 2.2.1 *Se $\varphi : D(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente e B satisfaz H.1, H.2 e H.3 então podemos concluir que a solução $u(t)$ de (2.1) pode ser estendida a uma solução definida em $[\tau, T]$.*

Demonstração: Seja $u : I \rightarrow D(\varphi)$ uma solução forte de (2.1) não continuável, com $I \in I(0, T)$. Mostraremos que $V \cap I \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $t \longmapsto \|u(t)\| + \varphi(u(t))$ é limitada, onde V é uma vizinhança adequada de sup de I, e então usaremos o Lema 2.2.1.

Multiplicando a equação (2.1) por $u(t)$ obtemos:

$$\left\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t) \right\rangle + \langle \partial\varphi(u(t)), u(t) \rangle \in \langle B(t, u(t)), u(t) \rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 \in \langle -\partial\varphi(u(t)) + B(t, u(t)), u(t) \rangle,$$

Somando o termo $\alpha\varphi(u(t))$, onde α é uma constante positiva, dos dois lados da desigualdade temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \alpha\varphi(u(t)) \in \langle -\partial\varphi(u(t)) + B(t, u(t)), u(t) \rangle + \alpha\varphi(u(t))$$

e por H.3 obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \alpha\varphi(u(t)) \leq d(t)\left(\|u(t)\|_H^2 + 1\right), \text{q.t.p. em } \ I.$$

Integrando em $[\tau, t) \subset I$,

$$\int_\tau^t \frac{d}{ds}\|u(s)\|_H^2\, ds + 2\alpha\int_\tau^t \varphi(u(s))ds \leq 2\int_\tau^t d(s)\left(\|u(s)\|_H^2 + 1\right)ds$$

$$\|u(t)\|_H^2 + 2\alpha \int_\tau^t \varphi(u(s))ds \leq \|u(\tau)\|_H^2 + 2\int_\tau^t d(s)ds + 2\int_\tau^t d(s)\left(\|u(s)\|_H^2\right)ds.$$

Por um lado,

$$2\alpha \int_\tau^t \varphi(u(s))ds \leq \|u(\tau)\|_H^2 + 2\int_\tau^t d(s)ds + 2\int_\tau^t d(s)\left(\|u(s)\|_H^2\right)ds.$$

Por outro lado, como $2\alpha \int_\tau^t \varphi(u(s))ds > 0$, pois $\alpha > 0$ e φ é não negativa temos:

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 + 2\int_\tau^t d(s)ds + \int_\tau^t d(s)\left(\|u(s)\|_H^2\right)ds.$$

Como $a = \|u_0\|_H^2 + 2\int_\tau^t d(s)ds$ é uma constante positiva, pois d é uma função positiva, temos pela Desigualdade de Gronwall 1.1.2 que:

$$\|u(t)\|_H^2 \leq a e^{\int_\tau^t d(s)ds}.$$

Então existe um $m_0 > 0$ tal que $\|u(t)\|_H \leq m_0$ e $\int_I \varphi(u(s))ds \leq m_0$ para cada $t \in I$.

Fixemos $t_0 \in I$ tal que $u(t_0) \in D(\varphi)$, o que sempreé possível já que $u(t) \in D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$, q.t.p. em I. Vamos definir $V = [t_0, \infty)$ vizinhança de sup de I. Se mostrarmos que existe $m_1 > 0$ tal que $\varphi(u(t)) \leq m_1$, para cada $t \in I$, a aplicação $t \longmapsto \|u(t)\|_H + \varphi(u(t))$ será limitada de $V \cap I$ em $\mathbb{R}^+$ e o resultado segue pelo Lema 2.2.1.

Para mostrarmos que existe $m_1 > 0$ tal que $\varphi(u(t)) \leq m_1$, para cada $t \in I$, observemos que da demonstração do Lema 2.2.1 temos:

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) + \frac{1}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 \leq \frac{k}{2}\|\partial\varphi(u(t))\|_H^2 + \frac{l(\|u(t)\|)}{2}\left(\varphi(u(t))^2 + |c(t)|\right).$$

E assim,

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) + \frac{1-k}{2}\left\|b(t) - \frac{d}{dt}u(t)\right\|_H^2 \leq \frac{l(\|u(t)\|)}{2}\left(\varphi(u(t))^2 + |c(t)|\right).$$

Como $k \in (0,1)$ e $\|u(t)\|_H \leq m_0$, para cada $t \in I$, temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \leq \frac{l(m_0)}{2}\left(\varphi(u(t))^2 + |c(t)|\right).$$

Como $t_0 \in I$, $u(t_0) \in D(\varphi)$ então integrando em $[t_0, t] \subset I$, obtemos:

$$\varphi(u(t)) \leq \varphi(u(t_0)) + \frac{l(m_0)}{2}\int_{t_0}^t \left(\varphi(u(s))^2 + |c(s)|\right)ds.$$

$$\varphi(u(t)) \leq \varphi(u(t_0)) + \frac{l(m_0)}{2}\int_{t_0}^t |c(s)|\,ds + \frac{l(m_0)}{2}\int_{t_0}^t \varphi(u(s))\varphi(u(s))ds.$$

Como $\bar{a} = \varphi(u(t_0)) + \frac{l(m_0)}{2}\int_{t_0}^{t}|c(s)|\,ds$ é uma constante positiva, pela Desigualdade de Gronwall 1.1.2 temos:

$$\varphi(u(t)) \leq \bar{a}e^{\int_{t_0}^{t}\varphi(u(s))ds}.$$

Então existe $m_1 > 0$, tal que $\varphi(u(t)) \leq m_1$, $\forall t \in V \cap I$ e o resultado fica provado. ∎

2.3 Comparação de Solução

Nesta seção é desenvolvida a prova do resultado de comparação para problemas com subdiferencial como parte principal e perturbação não autônoma e não globalmente Lipschitz. Para isso vamos usar [26] e o resultado de existência demonstrado na seção anterior.

Primeiramente, vamos introduzir um conceito de ordem em espaço de Banach, o qual será essencial para os resultados a seguir.

Definição 2.3.1 *Um espaço de Banach ordenado é um par $(X, \leq)$, onde X é um espaço de Banach e $\leq$ é uma relação de ordem em X satisfazendo:*

1. *$x \leq y$ implica que $x + z \leq y + z$, onde $x,y,z \in X$;*

2. *$x \leq y$ implica que $\lambda x \leq \lambda y$, onde $x,y \in X$ e $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$;*

3. *O cone positivo $C = \{x \in X : x \geq 0\}$ é fechado em X.*

Definição 2.3.2 *Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \prec)$ espaços de Banach ordenados. Dizemos que a aplicação $T : X \to Y$ é crescente se, e s omente se, $x \leq y$ implica que $T(x) \prec T(y)$.*

Considere H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $|\cdot|$. Seja A um operador maximal monótono em H possivelmente multívoco e $S(t)$ o semigrupo gerado por $-A$. Vamos colocar as seguintes notações:

- A^0x é o elemento com menor norma;

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ é o resolvente de A;

- $A_\lambda := \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$ é a aproximação de Yosida de A;

- Seja C o cone positivo fechado em H e seja a aplicação $I_C : H \to [0, +\infty]$ dada por

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in C \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin C \end{cases} \tag{2.13}$$

  a qual é convexa, própria e semicontínua inferiormente e portanto ∂I_C é um operador maximal monótono em H.

Seja $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ uma aplicação própria, convexa e semicontínua inferiormente (s.c.i). Definimos

$$\varphi_\mu(u) = \frac{1}{2\mu} \left| u - (I + \mu\partial\varphi)^{-1} u \right|^2 + \varphi\left(I + \mu\partial(\varphi)^{-1} u\right).$$

Como está definida, φ_μ é convexa, Frechêt-diferenciável e $\partial\varphi_\mu = (\partial\varphi)_\mu$. Além disso, $\varphi_\mu(x) \uparrow \varphi(x)$ quando $\mu \downarrow 0$, $\forall x \in H$. (ver Proposição 2.11 em [12]).

O próximo teorema é usado na demonstração de todos os resultados de comparação desta seção.

Teorema 2.3.1 *(Teorema 2.2 p. 321, [26]) Seja φ uma aplicação em H convexa, própria e s.c.i. e sejam A, B operadores maximais monótonos em H satisfazendo*

O-2 $\quad \varphi\left(Proj_{\overline{D(A)}} x - Proj_{\overline{D(B)}} y\right) \leq \varphi(x - y)$, $\forall x, y \in H$.

Então são equivalentes:

1- $\varphi((I + \lambda A)^{-1} x - (I + \lambda B)^{-1} y) \leq \varphi(x - y)$ $\forall x, y \in H$, $\forall \lambda > 0$;

2- $\langle A_\lambda x - B_\lambda y, z \rangle \geq 0$, $\forall z \in \partial\varphi(x - y)$, $\lambda > 0$;

3- $\langle A_\lambda x - B_\lambda y, \partial\varphi_\mu(x - y) \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in H$, $\forall \lambda, \mu > 0$;

4- $\langle A^0 x - B^0 y, \partial\varphi_\mu(x - y) \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in H$, $\forall \mu > 0$;

5- $\varphi_\mu(S_A(t)x - S_B(t)y) \leq \varphi_\mu(x - y)$, $\forall t, \mu > 0$, $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\forall y \in \overline{D(B)}$.

6- $\varphi(S_A(t)x - S_B(t)y) \leq \varphi(x - y)$, $\forall t > 0$, $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\forall y \in \overline{D(B)}$.

O próximo teorema dá uma condição necessária e suficiente para que o semigrupo $S(t); t \geq \tau$ gerado por um operador maximal monótono $-A$ seja crescente.

Teorema 2.3.2 *(Teorema 3.1 p.324, [26]) Seja A um operador maximal monótono em H satisfazendo:*

O-3 $\quad I_C(Proj_{\overline{D(A)}} x - Proj_{\overline{D(A)}} y) \leq I_C(x - y)$, $\forall x, y \in H$.

Então são equivalentes:

1- *Se* $x \geq y$ *então* $(I + \lambda A)^{-1} x \geq (I + \lambda A)^{-1} y$, $\forall x, y \in H$, $\forall \lambda > 0$;

2- Se $x \geq y$ *então* $S(t)x \geq S(t)y$, $\forall t \geq \tau$, $\forall x, y \in \overline{D(A)}$.

Além disso, se $S(t)0 = 0$, $t \geq \tau$ *temos que*

3- Se $x \geq 0$ *então* $S(t)x \geq 0$ $\forall t \geq \tau$, $\forall x \in \overline{D(A)}$ *e neste caso dizemos que o semigrupo é positivo.*

Teorema 2.3.3 *(Teorema 3.3 p.325, [26]) Sejam* $\tau \in \mathbb{R}$ *qualquer e* $T \geq \tau$. *Sejam* $f(t), \overline{f}(t) \in L^1(\tau, T; H)$ *e* $u_0 \in \overline{D(A)}$. *Suponha que* u *e* $\overline{u}$ *são, respectivamente, soluções fracas dos seguintes problemas:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + A(u(t)) \ni f(t) \\ u(\tau) = u_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{u}(t) + A(\bar{u}(t)) \ni \bar{f}(t) \\ \bar{u}(\tau) = \bar{u}_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Se A *é um operador maximal monótono em* H *com resolvente crescente e satisfazendo O-3 e se, além disso,* $f(t) \geq \overline{f}(t)$ *q.t.p. em* $[\tau, T]$, *então* $u_0 \geq \overline{u}_0$ *implica* $u(t) \geq \overline{u}(t)$, $\forall t \in [\tau, T]$.

O Teorema a seguir é uma adaptação para problemas não-autônomos do Teorema 4.3, [26].

Teorema 2.3.4 *Sejam* φ *uma aplicação própria, convexa e s.c.i. e* $u_0, \bar{u}_0 \in D(\varphi)$ *com* $u_0 \leq \bar{u}_0$. *Sejam* $B, \bar{B} : [\tau, T] \times D(\varphi) \to \wp(H)$ *satisfazendo H.1, H.2 e H.3. Suponha que* $\partial\varphi$ *tem resolvente crescente e satisfaz O3. Suponha ainda que se* $x, \bar{x} \in D(\varphi)$ *e* $x \leq \bar{x}$ *então para qualquer* $b \in B(s, x)$ *e* $\bar{b} \in \bar{B}(s, x)$ *temos* $b(s) \leq \bar{b}(s)$, $\forall s \in [\tau, T]$.

Então dada uma solução $u(t)$ *do problema*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi(u(t)) \in B(t, u(t)) \\ u(\tau) = u_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

existe uma solução $\bar{u}(t)$ *do problema*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{u}(t) + \partial\varphi(\bar{u}(t)) \in \bar{B}(t, \bar{u}(t)) \\ \bar{u}(\tau) = \bar{u}_0 \end{cases} \tag{2.17}$$

onde $\bar{u}(t)$ *está definida em* $[\tau, T_0)$ *para algum* $T_0 > \tau$ *e* $u(t) \leq \bar{u}(t)$, $\forall t \in [\tau, T_0)$.

Demonstração: Seja $T_1 > \tau$ tal que $u(t)$, é uma solução de (2.16) em $[\tau, T_1)$. Como $\bar{B}$ satisfaz H.2, existe $\overline{k} \in (0,1)$, tal que

$$\left\|\overline{B}(t,u)\right\|_{+}^{2} \leq \overline{k}\,\|\partial\varphi(u)\|_{H}^{2} + \overline{l}(\|u\|_{H})(\varphi(u)^{2} + |\overline{c}(t)|)$$

para todo $t \in [\tau, T]$ e $u \in D(\partial\varphi)$.

Dado $\epsilon_0 > 0$ seja

$$R^2 = \frac{2\overline{k}\varphi(\overline{u}_0) + \epsilon_0}{1 - \overline{k}}$$

Seja $h(t) \in B(t, u(t))$, onde $u(t)$ é a solução de (2.16) em $[\tau, T_1)$. Com a mesma notação da seção anterior, considere $\mathbb{B}|_{\overline{K}}$, a restrição de $\overline{\mathbb{B}}_{\overline{u}_0, T_0, R}$ ao seguinte subconjunto

$$\overline{K} = \{g \in K_{R,T_0}; g \geq h\}$$

o qual é compacto em $L^2(\tau, T; H)$, pois é um subconjunto fechado em um espaço compacto, e convexo pois se $g_1, g_2 \in \overline{K}$ e $s \in (0,1)$ temos

$$sg_1 + (1-s)g_2 \geq sh + (1-s)h = h.$$

Afirmação: $\mathbb{B}|_{\overline{K}}$ é uma aplicação multívoca de $\overline{K}$ em $\overline{K}$. De fato. Seja $g \in \overline{K}$, como $u_0 \leq \overline{u}_0$, pelo Teorema 2.3.3 $\mathbb{E}_{\tau,T_0,u_0}(h)(t) \leq \mathbb{E}_{\tau,T_0,\overline{u}_0}(g)(t)$.

Por hipótese $\overline{b}(t) \geq h(t)$, para concluirmos que $\overline{b}(t) \in \overline{K}$ basta mostrar que $\left\|\overline{b}\right\|_{L^2(\tau,T_0;H)} \leq R$, o que é feito de forma inteiramente análoga a demonstração do Teorema 2.1.2, já que $\overline{K} \subset \overline{K_{R,T_0}}$.

Assim, do Teorema 2.1.1 existe $\overline{h} \in \overline{K}$ tal que $\overline{h} \in \overline{\mathbb{B}}(\overline{h})$, isto é $\overline{h}(t) \in \overline{B}(t, \mathbb{E}_{\tau,,T_0,\overline{u}_0}(\overline{h})(t))$, onde $\mathbb{E}_{\tau,T_0,\overline{u}_0}(\overline{h})(t)\overline{u}(t)$ é a solução de (2.17). Como $\overline{h}(t) \geq h(t)$, pois $\overline{h} \in \overline{K}$ pelo Teorema 2.3.3 $\overline{u}(t) \geq u(t)$, $\forall t \in [\tau, T_0]$. ∎

Capítulo 3

Atrator Pullback e Trajetórias Extremas em Domínios Limitados

Neste capítulo vamos considerar problemas não autônomos governados pelo p-laplaciano aos quais se associam processos multívocos. Para esta classe de problemas, sob condições apropriadas, vamos obter a existência de atrator no sentido pullback bem como a existência de uma solução global maximal e uma solução global minimal delimitando o atrator.

Vamos considerar problemas da forma:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial t}u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in B(t, u(t)), t \geq \tau \\ u(\tau) = u_0 \in H \\ u(t,x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq \tau\end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $H = L^2(\Omega)$ o espaço de fase, $\tau \in \mathbb{R}$, $p > \max\{2, n/2\}$. O operador $Au = -\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 2$, é a subdiferencial $\partial\varphi$ de uma função $\varphi : H \to [0, +\infty]$ própria, convexa e semicontínua inferiormente, tal que para cada $L \in (0, +\infty)$ o conjunto $\left\{u \in H; \varphi(u) + \|u\|_H^2 \leq L\right\}$ é compacto em H e $B(t, \cdot)$ um operador multívoco em H submetido as seguintes hipóteses:

- **H.1** - **H.2** dadas no capítulo 2;

Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $b(t) \in B(t, u(t))$ temos:

- **H.3** Existem $c^-(t) > 0$ e $d^-(t)$ tais que $b(t) \geq c^-(t)s + d^-(t)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

  Além disso, c^- e d^- são funções limitadas em limitados, diferenciáveis com derivada limitada, e as funções $|c^-(t)|$ e $|d^-(t)|$ são absolutamente contínuas não decrescentes e limitadas em limitados;

- **H.4** Existe $c^+(t) > 0$ tal que para todo $\delta \in \mathbb{R}$ podemos escolher $d^+(t) = d^+_\delta(t)$ tal que $b(t) \leq c^+(t)s + d^+_\delta(t)$ para todo $s \geq -\delta$

Além disso, c^+ e d^+ são funções limitadas em limitados, diferenciáveis com derivada limitada, e as funções $|c^+(t)|$ e $|d^+(t)|$ são absolutamente contínuas não decrescentes e limitadas em limitados;

- **H.5** Para todo $t \in \mathbb{R}$, o operador multívoco $B(t,u)$ é crescente, no seguinte sentido: se $u(x) \leq v(x)$ q.t.p. em Ω e $a \in B(t,u)$, $b \in B(t,v)$ então $a(x) \leq b(x)$ q.t.p. em Ω;

- **H.6** Para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t,\cdot)$ é Lipschitz em limitados de H no seguinte sentido: Para $u(t) \in C([a,b];H)$ e $v(t) \in C([a,b];H)$ com $u(t), v(t)$ pertencentes a um subconjunto limitado $\mathcal{B} \subset H$ qualquer que seja $t \in [a,b]$, existem seleções mensuráveis $b(t), \bar{b}(t) \in H$ tal que $b(t) \in B(t,u(t))$ e $\bar{b}(t) \in B(t,v(t))$ e existe $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ localmente integrável e limitada em limitados, tal que

$$\left\|b(t) - \bar{b}(t)\right\|_H \leq l(t) \left\|u(t) - v(t)\right\|_H,$$

para todo $t \in [a,b]$.

Com $B(t,\cdot)$ submetida ás hipóteses H.1-H.6 mostramos a existência de duas trajetórias completas, uma maximal e uma minimal, para o problema (3.1) usando a propriedade de preservação de ordem desta equação e a comparação das soluções de (3.1) com a solução do seguinte sistema auxiliar

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}w - \operatorname{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w) = C(t)w + D(t), t \geq \tau \\ w(\tau) = u_0 \in H \\ w(t,x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq \tau \end{array}\right. \tag{3.2}$$

onde C e D são funções limitadas em limitados, diferenciáveis com derivada limitada, e as funções $|C(t)|$ e $|D(t)|$ são absolutamente contínuas não decrescentes e limitadas em limitados.

Observação 3.0.1 *Como a equação (3.1) satisfaz as hipóteses H-1 - H2, pelo Teorema 2.1.2 temos que (3.1) possui solução local quando o dado inicial, u_0, está em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Vamos denotar a solução local por $\widetilde{u}(t,\tau)u_0$, e quando o dado inicial não for relevante para as contas apenas por $\widetilde{u}(t)$. Mostraremos que esta solução será globalmente definida na Proposição 3.1.1 .*

Além disso, podemos garantir a existência de solução forte do problema (3.1) quando o dado inicial está em H, mas não está em $W_0^{1,p}(\Omega)$ fazendo um prolongamento por continuidade no seguinte sentido: Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é denso em H, dado $u_0 \in H$ existe $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n^0 \to u_0$ em H. Pelo Teorema 1.3.1 temos que a sequência de solução forte do problema (2.3) quando o dado inicial está em $W_0^{1,p}(\Omega)$, denotada por $\{u^n(t,\tau)u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$, é pré-compacta em H. Passando a uma subsequência se necessário, temos que $u^{n_k}(t,\tau)u_{n_k}^0 \to v(t,\tau)$ em H. Definindo $u(t,\tau)u_0 := v(t,\tau)$ temos que $u(t,\tau)u_0$ é uma solução fraca e assim, pelo Teorema 1.2.1, uma solução forte para o problema (3.1).

Observação 3.0.2 *Sejam $u, v \in \overline{D(A)}$ quaisquer e denote $F(t,u) = C(t)u + D(t)$ e $F(t,v) = C(t)v + D(t)$, onde C e D satisfazem as hipóteses exigidas na colocação do problema* (3.2). *Então*

$$\|F(t,u) - F(t,v)\|_H \leq |C(t)| \, \|u - v\|_H \,, \textit{para todo} \;\; t \in [\tau, T].$$

Por hipótese a aplicação $|C(t)|$ é limitada em limitados então segue da Proposição 1.2.3 que o problema (3.2) é bem posto. Denotaremos por $w(t,\tau)u_0$ a única solução, calculada no tempo t, com dado inicial $w(\tau,\tau)u_0 = u_0$.

As Hipóteses H.3 e H.4 são usadas para comparar as soluções do problema (3.1) com a solução de dois problemas auxiliares:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} w^+ - \Delta_p w^+ = C^+(t) w^+ + D^+(t), t \geq \tau \\ w^+(\tau) = u_0 \in H \\ w^+(t,x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq \tau \end{array}\right. \tag{3.3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} w^- - \Delta_p w^- = C^-(t) w^- + D^-(t), t \geq \tau \\ w^-(\tau) = u_0 \in H \\ w^-(t,x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq \tau \end{array}\right. , \tag{3.4}$$

e assim obter estimativas em $L^\infty(\Omega)$ para as soluções de (3.1), o que garante que, restrito ao atrator, o fluxo é unívoco e assim podemos obter a existência das trajetórias completas maximal e minimal para o pullback attractor.

3.1 Estimativas para as Soluções

Nesta seção, inspirados nas idéias de [63], vamos usar os problemas auxiliares e o resultado de comparação, Teorema 2.3.4, para obtermos estimativas para a solução do problema (3.1) as quais garantem a existência de solução global e do atrator no sentido pullback em $L^2(\Omega)$ para o problema (3.1).

Lema 3.1.1 *Se w é solução de (3.2) existe uma função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ crescente e limitada em limitados e existe $T_1 > 0$ tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\|w(t)\|_H^2 \leq \alpha(t)$ para todo $t - \tau \geq T_1$ e para todo $u_0 \in H$.*

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (3.2) por w temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \int_\Omega -\mathrm{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)\cdot w \mathrm{dx} \leq \int_\Omega |C(t)|\,|w(t)|^2\,\mathrm{dx} + \int_\Omega |D(t)|\,|w(t)|\,\mathrm{dx}$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \int_\Omega (|\nabla w|^{p-2}\nabla w)\nabla w \mathrm{dx} \leq |C(t)|\,\|w(t)\|_H^2 + \|D(t)\|_H\,\|w(t)\|_H$$

Multiplicando e dividindo por uma constante $\eta > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{\eta}|C(t)|\,\eta\,\|w(t)\|^2 + \frac{1}{\eta}\|D(t)\|_H\,\eta\,\|w(t)\|_H$$

Usando a Desigualdade de Poincaré e a Desigualdade de Young temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + k_1\|w(t)\|_H^p \leq \frac{1}{r\eta^r}|C(t)|^r + \frac{\eta^r}{\bar{r}}\|w(t)\|_H^{2\bar{r}} + \frac{1}{\bar{p}\eta^{\bar{p}}}\|D(t)\|_H^{\bar{p}} + \frac{\eta^p}{p}\|w(t)\|_H^p$$

onde a constante $k_1 = k_1(\Omega, p)$, $\bar{r}$ e $\bar{p}$ é o conjugado de r e p, respectivamente, $\bar{r} = p/2$, $r = p/(p-2)$ e $\bar{p} = p/(p-1)$ então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + k_1\|w(t)\|_H^p \leq k_2|C(t)|^{p/(p-2)} + k_3\|w(t)\|_H^p + k_4\|D(t)\|_H^{p/(p-1)}$$

onde as constantes $k_2 = k_2(\eta, p)$, $k_3 = k_3(\eta, p)$ e $k_4 = k_4(\eta, p)$. Logo, fazendo η tão pequeno para que $k_1 - k_3$ seja positivo teremos

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + 2(k_1 - k_3)\left(\|w(t)\|_H^2\right)^{p/2} \leq 2k_2|C(t)|^{p/(p-2)} + 2k_4|\Omega|^{p/(2p-2)}|D(t)|^{p/(p-1)}$$

Como por hipótese $|C(t)|$ e $|D(t)|$ são funções absolutamente contínuas, não decrescentes e limitadas em limitados, pelo Lema 1.1.1 temos que para cada $t \geq \tau$

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_H^2 \leq & \left(\frac{2k_2 |C(t)|^{p/(p-2)} + 2k_4 |\Omega|^{p/(2p-2)} |D(t)|^{p/(p-1)}}{2(k_1 - k_3)}\right)^{2/p} \\ & + \frac{1}{[2(k_1 - k_3)((p/2) - 1)(t - \tau)]^{1/((p/2)-1)}}\end{aligned}$$

Então existe $T_1 > 0$, tal que

$$\frac{1}{[2(k_1 - k_3)((p/2) - 1)(t - \tau)]^{1/((p/2)-1)}} \leq 1$$

e para cada $t \geq T_1 + \tau$ temos

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \left(\frac{2k_2 |C(t)|^{p/(p-2)} + 2k_4 |\Omega|^{p/(2p-2)} |D(t)|^{p/(p-1)}}{2(k_1 - k_3)}\right)^{2/p} + 1 = \alpha(t). \qquad \blacksquare$$

Observação 3.1.1 *Além disso, dado $B \subset H$ conjunto limitado, existe uma função $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ crescente e limitada em limitados, tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ $\|w(t)\|_H^2 \leq \tilde{\alpha}(t)$ para todo $t \geq \tau$ e para todo $u_0 \in B$. De fato. Temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 &\leq |C(t)| \|w(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|D(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2 \\ &= (|C(t)| + 1/2)\|w(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}|\Omega| |D(t)|^2\end{aligned}$$

Integrando a equação acima de τ a t com $t < T_1 + \tau$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2 \leq & \frac{1}{2}\|w(\tau)\|_H^2 + \frac{|\Omega|}{2}\int_\tau^t |D(\sigma)|^2 d\sigma \\ & + \int_\tau^t (|C(\sigma)| + 1/2)\|w(\sigma)\|_H^2 d\sigma\end{aligned}$$

Por hipótese $C \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $D \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ então pela Desigualdade de Gronwall-Bellman (Desigualdade 1.1.2) temos para cada $t \in [\tau, T_1]$

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \alpha_1(t).$$

Tomamos $\tilde{\alpha}(t) = max_{t \geq \tau}\{\alpha(t), \alpha_1(t)\}$.

Observação 3.1.2 *Veja que $T_1 > 0$ foi escolhido tal que*

$$\frac{1}{[2(k_1 - k_3)((p/2) - 1)(t - \tau)]^{1/((p/2)-1)}} \leq 1$$

o que não é necessário. Na prática precisamos que esta expressão seja limitada, de forma que $T_1 > 0$ possa ser escolhido qualquer.

Lema 3.1.2 *Se w é solução de* (3.2) *existe uma função $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ limitada em limitados e crescente e existe $T_2 > 0$, tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \beta(t)$ para todo $t - \tau \geq T_2$.*

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (3.2) por w_t temos

$$\|w_t(t)\|_H^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|C(t)w + D(t)\|_H \|w_t(t)\|_H$$

Usando a Desigualdade de Young temos

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|_H^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|C(t)w + D(t)\|_H^2$$

Como $\|w_t(t)\|_H^2 \geq 0$, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Young obtemos

$$\frac{2}{p}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{r}|C(t)|_H^{2r} + \frac{1}{\bar{r}}\|w(t)\|_H^{2\bar{r}} + |\Omega|\,|D(t)|^2$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e sendo $r = p/p-2$ e $2\bar{r} = p$ temos

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{(p-2)}{2}|C(t)|^{2p/(p-2)} + \frac{|\Omega|\,p}{2}|D(t)|^2 + L_1\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante $L_1 = L_1(\Omega, p)$. Temos para R fixo que

$$\int_t^{t+R} L_1 d\theta = L_1 R = a_1,$$

Por hipótese as funções $|C(t)|$ e $|D(t)|$ são não decrescentes então

$$\begin{aligned}\int_t^{t+R} \frac{(p-2)}{2}|C(\theta)|^{2p/(p-2)} + \frac{|\Omega|\,p}{2}|D(\theta)|^2 d\theta &\leq R\frac{(p-2)}{2}|C(t+R)|^{2p/(p-2)} \\ &\quad + R\frac{|\Omega|\,p}{2}|D(t+R)|^2 = a_2(t)\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.2) por w e usando a Desigualdade de Cauchy obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq |C(t)|\,\|w(t)\|_H^2 + \|D(t)\|_H\|w(t)\|_H$$

Integrando de t a $t+R$ e usando novamente que por hipótese as funções $|C(t)|$ e $|D(t)|$ são não decrescentes temos

$$\begin{aligned}\int_t^{t+R}\|w(\theta)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} d\theta &\leq \frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2 + |C(t+R)|\int_t^{t+R}\|w(\theta)\|_H^2 d\theta \\ &\quad + |\Omega|^{1/2}|D(t+R)|\int_t^{t+R}\|w(\theta)\|_H d\theta\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.1, para $t-\tau > T_1$

$$\int_t^{t+R} \|w(\theta)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\, d\theta \leq \frac{1}{2}\alpha(t) + R\,|C(t+R)|\,\alpha(t+R) + R\,|\Omega|^{1/2}\,|D(t+R)|\,(\alpha(t+R))^{1/2} = a_3(t)$$

Usando o Lema Uniforme de Gronwall (Lema 1.1.2) temos

$$\|w(t+R)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)\right) e^{a_1} = \beta(t), \text{para todo } \ t-\tau \geq T_1.$$

Fazendo $R = T_1$, obtido pelo Lema 3.1.1, temos $T_2 = 2T_1$ e assim,

$$\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \beta(t),$$

para todo $t-\tau > T_2$. ■

Observação 3.1.3 *Além disso, dado $\mathcal{M} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ conjunto limitado, existe uma função $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ crescente e limitada em limitados, tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ $\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \tilde{\beta}(t)$ para todo $t \geq \tau$ e para todo $u_0 \in \mathcal{M}$. De fato. Temos*

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{(p-2)}{2}\,|C(t)|^{2p/(p-2)} + \frac{p\,|\Omega|}{2}\,|D(t)|^2 + L_1\,\|w_t(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

onde $L_1 = L_1(p,\Omega)$.

Como por hipótese $C \in L^{2p/(p-2)}_{loc}(\mathbb{R})$ e $D \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ podemos integrar de τ a t com $t \leq T_2$ então

$$\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|w(\tau)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{(p-2)}{2}\int_\tau^t |C(\theta)|^{2p/p-2}\, d\theta + \frac{p\,|\Omega|}{2}\int_\tau^t |D(\theta)|^2\, d\theta + \int_\tau^t L_1\,\|w(\theta)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\, d\theta.$$

Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman (Desigualdade 1.1.2)

$$\|w(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \beta_1(t), \textit{para todo } \ t \in [\tau, T_2] \textit{e para todo } \ u_0 \in \mathcal{M}.$$

Tomamos $\tilde{\beta}(t) = max_{t\geq\tau}\{\beta(t), \beta_1(t)\}$.

Lema 3.1.3 *Se w é solução de (3.2) existe uma função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ limitada em limitados e existe $T_3 > 0$ tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\|w_t(t)\|^2_H \leq \xi(t)$ para todo $t-\tau \geq T_3$.*

Demonstração: O raciocínio abaixo tem sido usado para obter estimativas em L^2 na derivada temporal. As justificativas quanto à regularidade via de regra são obtidas através da sequência de aproximação das soluções no processo de Galerkin [32, 33, 80]. Abaixo apresentamos apenas o procedimento formal.

Derivando a primeira equação de (3.2) e denotando $w_t = v$ obtemos

$$v_t - \operatorname{div}\left(|\nabla w|^{p-2}\nabla v\right) + (p-2)\left(-\operatorname{div}\left(|\nabla w|^{p-4}\nabla w\right)\right)\langle \nabla w, \nabla v\rangle$$
$$= C_t(t)w(t) + C(t)v(t) + D_t(t)$$

Multiplicando a equação acima por v obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 &+ \int_\Omega |\nabla w(t,x)|^{p-2}|v(t,x)|^2\,dx + (p-2)\int_\Omega |\nabla w(t,x)|^{p-4}\langle \nabla w(t,x), \nabla v(t,x)\rangle^2\,dx\\ &= \langle C_t(t)w(t) + C(t)v(t) + D_t(t), v\rangle\\ &\leq \int_\Omega |C_t(t)w(t,x) + C(t)v(t,x) + D_t(t)|\,|v(t,x)|\,dx\end{aligned}$$

Sendo as integrais do lado esquerdo da desigualdade positivas e usando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 \leq \|C_t(t)w(t) + C(t)v(t) + D_t(t)\|_H\,\|v(t)\|_H$$

Usando a Desigualdade de Young e a Desigualdade Triangular temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\left[\|C_t(t)w(t) + D_t(t)\|_H + |C(t)|^2\|v(t)\|_H\right]^2 + \frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2$$

Desenvolvendo o quadrado acima e usando novamente a Desigualdade de Young obtemos

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 \leq 2\|C_t(t)w(t) + D_t(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_H^2\left(2|C(t)|^2 + 1\right)$$

Por hipótese $|C(t)|$ é crescente então, fixando $R > 0$ temos:

$$\int_t^{t+R} 2|C(\sigma)|^2 + 1 d\sigma \leq 2R|C(t+R)|^2 + R = a_1(t).$$

Também por hipótese C_t e D_t são limitadas então, usando o Lema 3.1.1 para $t - \tau > T_1$ temos

$$\begin{aligned}\int_t^{t+R} 2\left\|C'(t)w(t) + D'(t)\right\|_H^2 dx &\leq \int_t^{t+R} |C_s(s)|^2\|w(s)\|_H^2\,ds\\ &+ \int_t^{t+R} |C_s(s)||D_s(s)|\,\|w(s)\|_H + \int_t^{t+R} |\Omega||D_s(s)|ds\\ &\leq a_2(t).\end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação de (3.2) por w_t e usando a Desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w_t(t)\|_H^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}}^p &\leq \frac{1}{2}\|C(t)w(t)+D(t)\|_H^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |C(t)|^2|w(t)|^2 + 2|C(t)||w(t)||D(t)|\right. \\
&\quad \left. + |D(t)|^2\,dx\right].
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young temos

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|_H^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}}^p \leq \frac{1}{r}|C(t)|^{2r} + |\Omega|\,|D(t)|^2 + \frac{1}{\overline{r}}\|w(t)\|_H^{2\overline{r}}$$

Sendo $r = p/p-2$ e $\overline{r} = p/2$ integrando de t a $t+R$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+R}\frac{1}{2}\|w_t(t)\|_H^2\,dx + \int_t^{t+R}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}}^p\,dx \\
&\qquad \leq \int_t^{t+R}\frac{p-2}{p}|C(t)|^{2p/p-2}\,dx + |\Omega|\int_t^{t+R}|D(t)|^2\,dx \\
&\qquad + \int_t^{t+R}\frac{2}{p}\|w(t)\|_H^p\,dx
\end{aligned}$$

Como $T_2 > T_1$ usando a hipótese que $|C(t)|$ e $|D(t)|$ são crescentes, o Lema 3.1.1 e o Lema 3.1.2 para $t-\tau > T_2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+R}\|w_t(t)\|_H^2\,dx + \frac{1}{p}\|w(t+R)\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}}^p &\leq \frac{2}{p}\beta(t) + R\left(\frac{p-2}{p}\right)|C(t+R)|^{2p/p-2} \\
&\quad + |\Omega|R\,|D(t+R)|^2 + \frac{2R}{p}(\alpha(t))^{1/p} = a_3(t)
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema Uniforme de Gronwall (Desigualdade 1.1.2) temos que

$$\|w_t(t+R)\|_H^2 \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)\right)e^{a_1(t)} = \xi(t), \text{para todo } \ t-\tau \geq T_2.$$

Fazendo $R = T_2$, obtido pelo Lema 3.1.2, temos $T_3 = 2T_2$ e assim

$$\|w_t(t)\|_H^2 \leq \xi(t),$$

para todo $t - \tau > T_3$. ■

Lema 3.1.4 *Se u é uma solução de* (3.1) *em $[\tau, T_{max})$, intervalo maximal de existência da solução, com $T_{max} < \infty$, existe $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ limitada em limitados e existe $0 < T_4 < T_{max} - \tau$ tal que $u(t,\tau)u_0 \geq -K(t)$ para todo $t - \tau > T_4$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e para todo $u_0 \in H$, enquanto u existir.*

Demonstração: Pela hipótese H.3 para cada $t \in \mathbb{R}$ temos $B(t, u) \geq C^-(t)u + D^-(t)$, para todo $u \in H$. Então pelo princípio da comparação, Teorema 2.3.4, para cada $t \geq \tau$ enquanto u existir, temos

$$u(t, \tau)u_0 \geq w^-(t, \tau)u_0.$$

Considerando o problema auxiliar (3.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p w^-(t) = C^-(t)w^-(t) + D^-(t) - w_t^-(t), t \geq \tau \\ w^-(t, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq \tau \end{array} \right. \tag{3.5}$$

é conhecido (ver Teorema 1.2.3) que se $C^-(t)w^-(t) + D^-(t) - w_t^-(t) \in H = L^2(\Omega)$ com $p > n/2$ então $w^- \in L^\infty(\Omega)$ e ainda

$$\left\|w^-(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k\left(\left\|C^-(t)w^-(t) + D^-(t) - w_t^-(t)\right\|_H\right).$$

Pela Desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \left\|C^-(t)w^-(t) + D^-(t) - w_t^-(t)\right\|_H \leq \left|C^-(t)\right| \left\|w^-(t)\right\|_H \\ + |\Omega|^{1/2}\left|D^-(t)\right| + \left\|w_t^-(t)\right\|_H. \end{aligned}$$

Tomando $T_4 = \max\{T_1, T_2\}$, onde T_1, T_2 são dados respectivamente, pelos Lema 3.1.1 e Lema 3.1.2, existe uma aplicação $K(t)$, a qual para cada t depende apenas de $|C^-(t)|$, $|D^-(t)|$, $\|w^-(t)\|_H$ e $\left\|w_t^-(t)\right\|_H$, tal que para todo $t - \tau > T_4$ e para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos

$$\left\|w^-(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K(t), \text{para todo } \ u_0 \in H.$$

Desde que T_4 é escolhido no intervalo onde u está definida, temos para $t - \tau > T_4$ e para todo $\tau \in \mathbb{R}$:

$$u(t, \tau)(u_0)(x) \geq w^-(t, \tau)(u_0)(x) \geq -K(t), \text{q.t.p } \ x \in \Omega, \text{para todo } \ u_0 \in H,$$

enquanto u existir. ∎

Lema 3.1.5 *Se u é uma solução de* (3.1) *em* $[\tau, T_{max})$, *intervalo maximal de existência da solução, existe $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ limitada em limitados e existe $0 < T_6 < T_{max} - \tau$ tal que $\|u(t, \tau)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta(t)$ para todo $t - \tau > T_6$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e para todo $u_0 \in H$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.4, pela hipótese H.4 e pelo princípio de comparação, Teorema 2.3.4, para cada $t - \tau \geq T_4$ enquanto u existir, temos

$$u(t, \tau)u_0 \leq w^+(t, \tau)u_0.$$

Da mesma maneira como foi demonstrado no Lema 3.1.4 se w^+ é solução de (3.3) no intervalo $[\tau, T_{max}]$, podemos encontrar $\tilde{K} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ limitada em limitados e $0 < T_5 < T_{max} - \tau$ tal que $\|w^+(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{K}(t)$, para todo $t - \tau > T_5$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e para todo $u_0 \in H$. Assim, $u(t,\tau)u_0 \leq \tilde{K}(t)$, para todo $t - \tau > T_5$ e todo $u_0 \in H$, enquanto u existir. Tomando $T_6 = \max\{T_4, T_5\}$ temos para $t - \tau > T_6$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, q.t.p. $x \in \Omega$ e para todo $u_0 \in H$

$$-K(t)(x) \leq w^-(t,\tau)(u_0)(x) \leq u(t,\tau)(u_0)(x) \leq w^+(t,\tau)(u_0)(x) \leq \tilde{K}(t)(x),$$

enquanto u existir.

Portanto, existe η tal que $\|u(t,\tau)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta(t)$ para todo $t - \tau > T_6$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e para todo $u_0 \in H$, enquanto u existir. ■

Observação 3.1.4 *Se $\tilde{u}$ é solução de (3.1) no intervalo $[\tau, T_{max})$ e Ω é limitado, pela inclusão $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ temos que para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $t - \tau > T_6$ e $u_0 \in H$*

$$\|\tilde{u}(t,\tau)u_0\|_H \leq k(\Omega,p)\,\|\tilde{u}(t,\tau)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k(\Omega,p)\eta(t) \tag{3.6}$$

enquanto $\tilde{u}$ existir.

Além disso, dado $\mathcal{B} \subset H$ conjunto limitado, existe uma aplicação $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ crescente, limitada em limitados tal que $\|\tilde{u}(t)\|_H^2 \leq \tilde{\eta}(t)$, para todo $t \geq \tau$, $\tilde{u}_0 \in \mathcal{B}$, enquanto $\tilde{u}$ existir.

De fato, se $\tilde{u}$ é solução forte de (2.3) em $[\tau, T_{max})$ existe $b \in L^2(\tau, T_{max}; H)$ tal que $b(t) \in B(t, \tilde{u}(t))$, $\tilde{u}(\tau) = u_0$ e

$$\tilde{u}_t + \partial\varphi(\tilde{u}(t)) = b(t) \tag{3.7}$$

Multiplicando (3.7) por $\tilde{u}$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}(t)\|_H^2 + \|\nabla\tilde{u}(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \int_\Omega |b(t,x)|\,|\tilde{u}(t,x)|\,dx.$$

Como $\|\nabla\tilde{u}(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \geq 0$ usando a desigualdade de Hölder e de Young temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|b(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{u}(t)\|_H^2.$$

Para $\tau \leq t \leq T_6 + \tau$, temos

$$\int_\tau^t \frac{d}{d\theta}\|\tilde{u}(\theta)\|_H^2\,d\theta \leq \int_\tau^t \|b(\theta)\|_H^2\,d\theta + \int_\tau^t \|\tilde{u}(\theta)\|_H^2\,d\theta.$$

Então

$$\|\tilde{u}(t)\|_H^2 \leq \|\tilde{u}(\tau)\| + \|b(t)\|^2_{L^2(\tau,T_{max};H)} + \int_\tau^t \|\tilde{u}(\theta)\|_H^2 \, d\theta.$$

Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman (Desigualdade 1.1.2) temos

$$\|\tilde{u}(t)\|_H \leq \left(\|\tilde{u}_0\| + \|b(t)\|^2_{L^2(\tau,T_{max};H)}\right) e^{t-\tau} = \eta_1(t),$$

para cada $\tau \leq t \leq T_6 + \tau$,

Tomando $\tilde{\eta}(t) = max_{t\geq\tau}\{\eta(t), \eta_1(t)\}$ *temos*

$$\|\tilde{u}(t)\|_H \leq \tilde{\eta}(t),$$

para todo $t \geq \tau$, *todo* $\tau \in \mathbb{R}$ *e todo* $u_0 \in \mathcal{B}$.

Observação 3.1.5 *Se* $\widetilde{u}$ *é solução de* (3.1) *em* $[\tau, T_{max})$ *pelo Lema 3.1.5 se considerarmos o intervalo* $t \in [T_6, T_{max}]$ *teremos* $\|u(t,\tau)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{\eta}$, *onde* $\eta(t) \leq \tilde{\eta}$, *para todo* $t \in [T_6, T_{max}]$, *pois* η *é uma aplicação limitada em limitados. Seja*

$$\mathcal{L} = \left\{u \in H; \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{\eta}\right\}$$

pela hipótese H.6, B é Lipschitz em limitados, mais especificamente existe $l_{\tilde{\eta}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *localmente integrável e limitada em limitados, tal que*

$$\left\|b(t) - \overline{b}(t)\right\|_H \leq l_{\tilde{\eta}}(t) \|u - v\|_H ,$$

para todo $t \in [T_6, T_{max}]$ *e para todo* $u, v \in \mathcal{L}$, *onde* $b(t), \overline{b}(t) \in H$ *são funções mensuráveis tais que* $b \in B(t,u)$ *e* $\overline{b} \in B(t,v)$. *Então podemos definir uma aplicação* $\tilde{B}$ *globalmente Lipschitz, basta definirmos para cada* $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{b}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da seguinte maneira:*

$$\tilde{b}(t,r) = \begin{cases} b(t,r) & r \in [-\tilde{\eta}, \tilde{\eta}] \\ b(t,-\tilde{\eta}) & r \leq -\tilde{\eta} \\ b(t,\tilde{\eta}) & r \geq \tilde{\eta} \end{cases} \tag{3.8}$$

Desta forma se $t - \tau$ *for suficientemente grande, então* $B(t, u(t)) = \tilde{B}(t, u(t))$, *onde* $\tilde{B}$ *é operador de Nemitskii associado a* $\tilde{b}$. ■

Lema 3.1.6 *Seja* $\tilde{u}$ *solução local de* (3.1) *no intervalo* $[\tau, T_{max})$. *Dado* $u_0 \in H$ *existe* $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *limitada em limitados e existe* $0 < T_7 < T_{max} - \tau$, *tal que* $\|\tilde{u}(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \omega(t)$, *para todo* $t - \tau > T_7$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ *e* $u_0 \in H$.

Demonstração: Se $\tilde{u}$ é solução forte de (3.1) em $[\tau, T_{max})$ existe $b \in L^2(\tau, T_{max}; H)$ tal que $b(t) \in B(t, \tilde{u}(t))$, $\tilde{u}(\tau) = u_0$ e

$$\tilde{u}_t + \partial\varphi(\tilde{u}(t)) = b(t). \tag{3.9}$$

q.t.p. em t. Multiplicando a equação acima por $\tilde{u}_t$ temos

$$\|\tilde{u}_t\|_H^2 + p\frac{d}{dt}\varphi(\tilde{u}(t)) \leq \langle b(t), \tilde{u}_t(t)\rangle$$

Usando a Desigualdade de Cauchy e a de Young temos

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_t\|_H^2 + p\frac{d}{dt}\varphi(\tilde{u}(t)) \leq \frac{1}{2}\|b(t)\|^2 \tag{3.10}$$

Escolhendo $T_7 = T_6$, dado pelo Lema 3.1.5 e considerando a Observação 3.1.5, temos que B é localmente Lipschitz no intervalo $[T_6, T_{max})$, ou seja existem funções reais positivas d e l localmente integráveis tais que $\forall \widetilde{u} \in \mathcal{L}$ e $t \in [T_6, T_{max})$

$$\|b(t)\|_H \leq l(t)\|\tilde{u}(t)\|_H + d(t)$$

Integrando (3.10) no intervalo $[T_6, T_{max})$ e usando que neste, B é localmente Lipschitz temos

$$p\varphi(\tilde{u}(t)) \leq p\varphi(\tilde{u}(T_6)) + \frac{1}{2}\int_{T_6}^{t}\left(l(\theta)\|\tilde{u}(\theta)\|_H + d(\theta)\right)^2 d\theta$$

Desenvolvendo o quadrado e usando a Desigualdade de Young temos

$$p\|\tilde{u}(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \leq p\|\tilde{u}(T_6)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \int_{T_6}^{t}|l(\theta)|^2\|\tilde{u}(\theta)\|_H^2 + |d(\theta)|^2 d\theta$$

Pelo Teorema 1.2.2 a norma $\|\tilde{u}(T_6)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p$ é finita então, usando (3.6) temos que para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $t - \tau > T_6$, enquanto $\tilde{u}$ existir,

$$\|\tilde{u}(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \leq \|\tilde{u}(T_6)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \left(\tilde{l}(t)k(\Omega,p)\eta(t)^{1/2} + \tilde{d}(t)\right) = \omega(t), \tag{3.11}$$

onde $\tilde{l}(t) = \int_{T_6}^{t}|l(\theta)|^2 d\theta$ e $\tilde{d}(t) = \int_{T_6}^{t}|d(\theta)|^2 d\theta$. ■

Proposição 3.1.1 *Considere as hipóteses do teorema de existência local. Então podemos demonstrar a existência global da solução do problema* (3.1).

Demonstração: Pelo Teorema 2.1.2 e pelo Lema de Zorn existe um intervalo maximal, $[\tau, T_{max})$, onde está definida a solução local de (3.1) que denotaremos por $\tilde{u}$.

Sejam $\mathcal{M} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ subconjunto limitado, T_6 dado no Lema 3.1.5 e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números tais que $t_n \to T_{max}$. Considerando o intervalo limitado $[T_6, T_{max}]$ por (3.6) temos $\|\tilde{u}(t,\tau)u_0\|_H \le r$, pois η é uma função limitada em limitados assim, a sequência $\{\tilde{u}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $B_r^H(0)$, a bola de centro zero e raio r em H. Como esta bola é fracamente compacta em H temos que, passando a uma subsequência, $\tilde{u}(t_{n_k}) \rightharpoonup v$ em H.

Por (3.11) em $[T_6, T_{max}]$ temos $\|\tilde{u}(t,\tau)u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le \tilde{r}$, pois ω é uma função limitada em limitados assim, a sequência $\{\tilde{u}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $B_{\tilde{r}}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)$, a bola de centro zero e raio $\tilde{r}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $p > n/2$ a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta e temos que $\tilde{u}(t_{n_k}) \to v$ em H. Defina $\tilde{u}(T_{max}) = v$ e considere

$$
\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_t - \Delta_p \hat{u} \in B(t, \hat{u}(t)), t \ge T_{max} \\ \hat{u}(T_{max}) = v \in H \end{array} \right. \tag{3.12}
$$

Pelo Teorema 2.1.2 existe $\tilde{T}_{max}$, tal que $\hat{u}$ é solução de (3.12) em $[T_{max}, \tilde{T}_{max})$. Defina

$$
u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}(t), & t \in [\tau, T_{max}) \\ \hat{u}(t), & t \in [T_{max}, \tilde{T}_{max}) \end{array} \right. \tag{3.13}
$$

Se mostrarmos que u é contínua ou seja, que toda subsequência de $\{\tilde{u}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v em H e que u é solução forte de (3.1) teremos uma solução em $[\tau, \tilde{T}_{max})$, contradizendo a maximalidade do intervalo dado inicialmente.

Suponhamos que existam subsequências $\{\tilde{u}(t_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\tilde{u}(t_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\tilde{u}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\tilde{u}(t_{n_k}) \to v_1$ quando $t_{n_k} \to T_{max}$ e $\tilde{u}(t_{n_j}) \to v_2$ quando $t_{n_j} \to T_{max}$, com $v_1 \neq v_2$.

Seja $0 < \delta = dist(v_1, v_2)/4$ tal que as vizinhanças $\mathcal{O}_\delta(v_1)$ e $\mathcal{O}_\delta(v_2)$ satisfaçam $\mathcal{O}_\delta(v_1) \cap \mathcal{O}_\delta(v_2) = \emptyset$. Pelas convergências existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\tilde{u}(t_{n_k}) \in \mathcal{O}_\delta(v_1)$ para todo $k \ge N_1$ e existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que $\tilde{u}(t_{n_j}) \in \mathcal{O}_\delta(v_2)$ para todo $j \ge N_2$ então $\left\|\widetilde{u}(t_{n_k}) - \widetilde{u}(t_{n_j})\right\|_H > \delta$ para $j, k \ge N = \max\{N_1, N_2\}$.

Como $\widetilde{u}$ é solução forte de (3.1) em $[\tau, T_{max})$ existe $\widetilde{b} \in L^2(\tau, T_{max})$ com $\widetilde{b}(t) \in B(t, \widetilde{u}(t))$. Então

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}(\theta) - \tilde{u}(\theta+s)\|_H^2 \le \left\langle \widetilde{b}(\theta) - \widetilde{b}(\theta+s), \tilde{u}(\theta) - \tilde{u}(\theta+s) \right\rangle
$$

Integrando no intervalo $[T_6, T_{max})$ e usando a Desigualdade de Cauchy temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\tilde{u}(t) - \tilde{u}(t+s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|\tilde{u}(T_6) - \tilde{u}(T_6+s)\|_H^2 \\
&\qquad \le \int_{T_6}^{t} \left\|\widetilde{b}(\theta) - \widetilde{b}(\theta+s)\right\|_H \|\tilde{u}(\theta) - \tilde{u}(\theta+s)\|_H \, d\theta
\end{aligned}
$$

Neste intervalo B é Lipschitz, ou seja existe $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ localmente integrável tal que

$$\|\tilde{u}(t) - \tilde{u}(t+s)\|_H^2 \leq \|\tilde{u}(T_6) - \tilde{u}(T_6+s)\|_H^2 + \int_{T_6}^{t} 2l(\theta)\,\|\tilde{u}(\theta) - \tilde{u}(\theta+s)\|_H^2\,d\theta$$

Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman (Desigualdade 1.1.2), fazendo $\theta = t_{n_k}$ e $\theta + s = t_{n_j}$ temos:

$$\left\|\tilde{u}(t_{n_k}) - \tilde{u}(t_{n_j})\right\|_H \leq \|\tilde{u}(T_6) - \tilde{u}(T_6+s)\|_H^2\, e^{2\tilde{l}(t)},$$

onde $\tilde{l}(t) = \int_{T_6}^{t} l(\theta)d\theta$. Fazendo $s \to 0$, pela continuidade de $\tilde{u}$ temos que o lado direito da desigualdade vai a zero, contradizendo os argumentos acima. Logo, toda subsequência de $\{\tilde{u}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v em H.

Mostremos que u é solução forte de (3.1) em $[\tau, \widetilde{T}_{max})$ para isso vamos checar a desigualdade da Proposição 1.2.2 para o caso $s \leq T_{max} \leq \theta$, pois os casos $s \leq \theta \leq T_{max}$ e $T_{max} \leq s \leq \theta$ são diretos.

Como $\widehat{u}$ é solução forte de (3.12) em $[T_{max}, \widetilde{T}_{max})$ existe $\widehat{b} \in L^2(\tau, T_{max})$ com $\widehat{b}(t) \in B(t, \widehat{u}(t))$. Então definimos

$$b(t) = \begin{cases} \widetilde{b}(t), & t \in [\tau, T_{max}] \\ \widehat{b}(t), & t \in [T_{max}, \widetilde{T}_{max}] \end{cases} \tag{3.14}$$

Claramente $b(t) \in B(t, u(t))$ q.t.p. $t \in (\tau, \widetilde{T}_{max})$. Então para $x \in D(A)$, e sabendo que por definiçãoo $\widetilde{u}(T_{max}) = v = \widehat{u}(T_{max})$ temos:

$$\begin{aligned}
\|u(\theta) - x\|_H^2 &= \|\widehat{u}(\theta) - x\|_H^2 \\
&\leq \|\widehat{u}(T_{max}) - x\|_H^2 + 2\int_{T_{max}}^{\theta} \left\langle \widehat{b}(r) + Ax, \widehat{u}(r) - x \right\rangle dr \\
&= \|\widetilde{u}(T_{max}) - x\|_H^2 + 2\int_{T_{max}}^{\theta} \left\langle \widehat{b}(r) + Ax, \widehat{u}(r) - x \right\rangle dr \\
&\leq \|\widetilde{u}(s) - x\|_H^2 + 2\int_{s}^{T_{max}} \left\langle \widetilde{b}(r) + Ax, \widetilde{u}(r) - x \right\rangle dr \\
&+ 2\int_{T_{max}}^{\theta} \left\langle \widehat{b}(r) + Ax, \widehat{u}(r) - x \right\rangle dr \\
&\leq \|u(s) - x\|_H^2 + 2\int_{s}^{\theta} \langle b(r) + Ax, u(r) - x \rangle\, dr
\end{aligned}$$

Assim, provamos que u é uma solução fraca, mas como $b \in L^2(\tau, T_{max}; H)$ é conhecido do Teorema 1.2.1 que é uma solução forte. ■

Observação 3.1.6 *Se u é solução global de* (3.1), $\forall \tau \in \mathbb{R}$ *temos pelo Lema 3.1.5 que* $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta(t)$, $\forall t - \tau > T_6$, *pela Observação 3.1.4 que* $\|u(t)\|_H \leq \widetilde{\eta}(t)$, $\forall t - \tau > T_6$ *e de (3.11) que* $\|u(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \omega(t)$, $\forall t - \tau > T_6$.

3.2 Trajetórias extremas para o atrator pullback

Nesta seção vamos mostrar que o problema (3.1) possui um processo multívoco o qual é semi-contínuo superiormente e depois provaremos a existência do atrator pullback o qual será invariante pelo processo. Em seguida mostraremos que, uma vez que o processo goza de uma propriedade de unicidade eventual, então existem duas trajetórias completas extremas, uma maximal e outra minimal.

3.2.1 O Processo Multívoco

Definição 3.2.1 *(ver [74] pg. 501) A função contínua $u : [\tau, T] \to \overline{D(A)}$ é solução integral de* (3.1) *se $u(\tau) = u_0$ e existe $b(\cdot) \in L^1([\tau, T]; H)$ com $b(t) \in B(t, u(t))$ e a seguinte desigualdade é verificada*

$$\|u(t) - x\|^2 \leq \|u(\sigma) - x\|^2 + 2 \int_\sigma^t \langle b(s) + Au(s), u(s) - x \rangle \, ds,$$

para todo $x \in D(A)$, q.t.p em $[\tau, T]$, e $\tau \leq \sigma \leq t \leq T$.

É conhecido da Proposição 3.6 em ([12]) que toda solução forte de (3.1) é também uma solução integral.

Como provamos na Proposição 3.1.1 a existência global de solução forte para o problema (3.1) podemos definir o Processo Multívoco $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$, como segue:

$$U(t, \tau)v = \{\varphi(t); \varphi(\tau) = v\} \tag{3.15}$$

onde $\varphi(\cdot)$ são as soluções integrais de (3.1) em $[\tau, t]$ tais que $\varphi(\tau) = v$. Também denotaremos um elemento de $U(t, \tau)v$ como $\varphi(t, \tau)v$.

Vamos mostrar que com esta definição $\{U(t, s)\}_{t \geq s}$ é de fato um processo multívoco exato:

Proposição 3.2.1 *Se $-\infty < \tau \leq s \leq t < +\infty$ e se $v \in H$ temos*

1. $U(\tau, \tau)v = v$

2. $U(t,\tau)v = U(t,s)U(s,\tau)v$

Demonstração: Pela definição de $U(\tau,\tau)v$ temos que a primeira sentença é verdadeira. Para mostrarmos 2, provemos inicialmente a seguinte inclusão

$$U(t,\tau)v \subset U(t,s)U(s,\tau)v$$

Dado $\varphi(t) \in U(t,\tau)v$, claramente $\varphi(s) \in U(s,\tau)v$. Se definirmos $\psi(t) = \varphi(t), \forall t \geq s$ temos que $\psi(t) \in U(t,s)\varphi(s)$ ou seja, $\psi(t) \in U(t,s)U(s,\tau)v$.

Agora mostremos a inclusão contrária

$$U(t,s)U(s,\tau)v \subset U(t,\tau)v$$

Tome $\varphi_1(s) \in U(s,\tau)v$ e $\varphi_2(t) \in U(t,s)\varphi_1(s)$. Defina

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} \varphi_1(\sigma), & \sigma \in [\tau,s] \\ \varphi_2(\sigma), & \sigma \in [s,t] \end{cases} \tag{3.16}$$

Como $\varphi_1(\cdot)$ é uma solução integral de (3.1) em $[\tau,s]$, sabemos que existe $b_1(\cdot) \in L^1(\tau,s;H)$ com $b_1(\sigma) \in B(\sigma,\varphi_1(\sigma))$, q.t.p. em (τ,s). Analogamente existe $b_2(\cdot) \in L^1(s,t;H)$ com $b_2(\sigma) \in B(\sigma,\varphi_2(\sigma))$, q.t.p em (s,t). Defina

$$b(\sigma) = \begin{cases} b_1(\sigma), & \sigma \in [\tau,s] \\ b_2(\sigma), & \sigma \in [s,t] \end{cases} \tag{3.17}$$

Claramente $b(t) \in B(t,\psi(t))$ q.t.p. em (τ,t) e, para completar a demonstração, basta provarmos que $\psi(\cdot)$ é uma solução integral de (3.1) em $[\tau,t]$. Vamos mostrar a desigualdade da Definição 3.2.1 para o caso $\sigma \leq s \leq \theta$, pois os casos $\sigma \leq \theta \leq s$ e $s \leq \sigma \leq \theta$ são imediatos. Então

$$\begin{aligned}
\|\psi(\theta)-x\|_H^2 &= \|\varphi_2(\theta)-x\|_H^2 \\
&\leq \|\varphi_2(s)-x\|_H^2 + 2\int_s^\theta \langle b_2(r)+Ax, \varphi_2(r)-x\rangle\, dr \\
&= \|\varphi_1(s)-x\|_H^2 + 2\int_s^\theta \langle b_2(r)+Ax, \varphi_2(r)-x\rangle\, dr \\
&\leq \|\varphi_1(\sigma)-x\|_H^2 + 2\int_\sigma^s \langle b_1(r)+Ax, \varphi_1(r)-x\rangle\, dr \\
&+ 2\int_s^\theta \langle b_2(r)+Ax, \varphi_2(r)-x\rangle\, dr \\
&\leq \|\psi(\sigma)-x\|_H^2 + 2\int_\sigma^\theta \langle b(r)+Ax, \psi(r)-x\rangle\, dr
\end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in D(A)$. ■

3.2.2 Existência do atrator pullback em $L^2(\Omega)$

O próximo resultado é necessário para garantirmos a existência do atrator pullback para $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$. Observamos que basta mostrarmos a semicontinuidade superior no caso da perturbação B ser Lipschitz pois ainda assim, o Teorema 1.4.3 continua válido.

Proposição 3.2.2 *A aplicação $v \to U(t,\tau)v$ é semicontínua superiormente para todo $v \in H$ e todo $t \geq \tau$. Além disso, para cada $v \in H, U(t,\tau)v$ é fechado.*

Demonstração: Considere uma sequência de dados iniciais $\{u_0^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ com $u_0^n \to u_0$ em H. Mostremos que $u^n(t) \to u(t)$ em H, onde $\{u^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência onde cada elemento $u^n(t)$ é uma solução de (3.1) com dado inicial u_0^n ou seja, $u^n(t) \in U(t,\tau)u_0^n$. Como a perturbação B é Lipschitz, da Observação 3.1.4 e do Teorema 1.3.1 a sequência $\{u^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é pré-compacta em H ou seja, existe uma subsequência $\left\{u^k(t)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{u^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u^k(t) \to w(t)$ em H. Pela Observação 1.4.1 basta mostrarmos que w é solução de (3.1) com dado inicial u_0.

Desde que $u^n(t)$ é uma solução forte, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b^n \in L^2(\tau,T;H)$ tal que $b^n(t) \in B(t,u^n(t))$ q.t.p. $t \in (\tau,T)$ com

$$\frac{1}{2}\|u^n(t)-x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u^n(s)-x\|^2 + \int_s^t \langle b^n(\sigma)+Ax, u^n(\sigma)-x\rangle\, d\sigma \tag{3.18}$$

q.t.p. $\tau \leq s \leq t \leq T$ e $x \in D(A)$.

Temos que $\|b^n(t)\|_{L^2(\tau,T;H)}$ é limitada $\forall n$, então existe uma subsequência $\left\{b^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b^k \rightharpoonup b$ em $L^2(\tau,T;H)$ daí, pela Hipótese H.1, $b(t) \in B(t,u(t))$ q.t.p. $t \in [\tau,T]$. Passando o limite em (3.18) quando $n \to \infty$, do lado esquerdo da desigualdade teremos pela Proposição III.5 em [13]

$$\langle b^n - Ax, u^n - x\rangle_{L^2(s,t:H)} \to \langle b - Ax, u - x\rangle_{L^2(s,t:H)}$$

Ou seja,

$$\int_s^t \langle b^n(\sigma)+Ax, u^n(\sigma)-x\rangle\, d\sigma \to \int_s^t \langle b(\sigma)+Ax, u(\sigma)-x\rangle\, d\sigma$$

Então

$$\frac{1}{2}\|w(t)-x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|w(s)-x\|^2 + \int_s^t \langle b(\sigma)+Ax, w(\sigma)-x\rangle\, d\sigma$$

Isto implica que w é uma solução de fraca de (3.1) e pelo Teorema 1.2.1 uma solução forte. Como para todo $t \geq \tau$ $u^n(t) \rightharpoonup w(t)$ em H, pois as soluções $u^n(t)$ são uniformemente limitadas em H temos que $u^n(\tau) = u_0^n \rightharpoonup w(\tau)$. Pela unicidade do limite $w(\tau) = u_0$.

Dado qualquer $v \in H$, para mostrarmos que $U(t,\tau)v$ é fechado, tomamos $z \in \overline{U(t,\tau)v}$ então existe uma sequência $\{u^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \in U(t,\tau)v$ tal que $u^n(t) \to z$ em H. Como provamos anteriormente, z é uma solução de (3.1) então temos que $z \in U(t,\tau)v$, o que implica que $U(t,\tau)v$ é fechado. ∎

Teorema 3.2.1 *Suponha que o operador B satisfaz as condições H.1-H.4 e H.6, então o problema* (3.1) *tem um atrator pullback $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ em H.*

Demonstração: Da Observação 3.1.6 obtivemos, para cada $t - \tau > T_6$, uma bola de centro zero e raio $\omega(t)$ que denotaremos por $B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que atrai no sentido pullback as soluções de (3.1) no instante t com dados iniciais em um subconjunto limitado $\mathcal{M} \subset H = L^2(\Omega)$.

De fato. Como $\|u(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \leq \omega(t)$ para $t - \tau > T_6$, quando fazemos $\tau \to -\infty$ temos que $U(t,\tau)\mathcal{M} \subset B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)$ para $t - \tau > T_6$. Ou seja, para cada t existe $\tau_0 = t - T_6 < t$ tal que

$$dist(U(t,\tau)\mathcal{M}, B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)) \to 0, \quad \forall \tau < \tau_0.$$

Sendo $p > n/2$ a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \subset H$ é compacta e assim, o conjunto $\overline{B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)}^H$ é compacto em H. Logo, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $t-\tau > T_6$ obtemos uma família, $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, de conjuntos compactos onde $\mathcal{A}(t) = \overline{B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)}^H$ que atrai, no sentido pullback, as soluções de (3.1) em H. Pelo Teorema 1.4.3, $\mathcal{A}$ é o atrator pullback para (3.1) em H. ∎

3.2.3 Invariância do Atrator Pullback

Primeiramente observe que o atrator pullback possui a seguinte caracterização:

Proposição 3.2.3 *Seja $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo multívoco associado ao problema* (3.1) *e $\mathcal{A}$ seu atrator pullback. Então $\bigcup_{\tau\leq t}\mathcal{A}(\tau)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.4.5 basta mostrarmos que $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é fortemente limitado dissipativo. Dado $B \subset H$ limitado e $t_0 \leq t$ pelo Teorema 3.2.1, $\overline{B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)}^H$ atrai $U(t_0,\tau)B$ ou seja, existe $\tau_0 < t_0$

$$dist(U(t_0,\tau)B, \overline{B_{\omega(t_0)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)}^H) \to 0, \quad \forall \tau < \tau_0.$$

Dado $u(t_0) \in U(t_0,\tau)B$ temos pela Observação 3.1.6 que $\|u(t_0)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \omega(t_0) \leq \omega(t)$, para todo $t - \tau > T_6$, pois a função real ω é crescente. Logo, $U(t_0,\tau)B \subset \overline{B_{\omega(t)}^{W_0^{1,p}(\Omega)}(0)}^H$, para todo $\tau < \tau_0$. Isto implica que $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é fortemente limitado dissipativo. ■

A demonstração da Proposição 3.1.1 mostra que as soluções dos problemas que consideramos gozam da propriedade da concatenação descrita abaixo, que será referida posteriormente como Hipótese ou Condição H.7:

H.7 Sejam $\tau, s \in \mathbb{R}$ quaisquer com $\tau \geq s$. Suponha que $\varphi_1(\cdot) := \varphi_1(\cdot, s)v_1$ é uma solução integral com dado inicial (s, v_1), isto é, $\varphi_1(t,s)v_1 \in U(t,s)v_1$, para todo $t \geq s$, e $\varphi_2(\cdot) := \varphi_2(\cdot,\tau)v_2$ é uma solução integral com dado inicial (τ, v_2). Se $\varphi_1(\sigma) = \varphi_2(\sigma)$ para algum $\sigma \geq \tau$ e $\sigma \geq s$. Seja

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [s,\sigma] \\ \varphi_2(t), & t > \sigma \end{cases} \tag{3.19}$$

então $\psi(\cdot)$ é uma solução integral de (3.1) com dado inicial (s, v_1), ou seja, $\psi(t,s)v_1 \in U(t,s)v_1$ para todo $t > s$.

Proposição 3.2.4 *Seja $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo multívoco semi-contínuo superiormente com $U(t,\tau)$ fechado para todo par (t,τ) com $t \geq \tau$, satisfazendo a Hipótese H.7. Suponha ainda, que exista um atrator no sentido pullback $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ para $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$, com $\bigcup_{\tau\leq t}\mathcal{A}(\tau)$ limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Então temos que $\mathcal{A}$ é invariante pelo processo. Ou seja,*

$$U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(t).$$

Demonstração: Já temos da Definição 1.4.7 a semi-invariância do atrator, ou seja $\mathcal{A}(t) \subset U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau), \forall t \geq \tau$. Provaremos agora a inclusão $U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau) \subset \mathcal{A}(t), \forall t \geq \tau$.

Tome $y \in \mathcal{A}(\tau)$. Pela semi-invariância temos que $y \in U(\tau, s_n)\mathcal{A}(s_n)$ para todo $s_n \in (-\infty, \tau]$. Então $y = \varphi_n(\tau) := \varphi_n(\tau, s_n)y_n$ para algum $\varphi_n(\tau) \in U(\tau, s_n)y_n$ e $y_n \in \mathcal{A}(s_n)$.

Seja $\varphi(t) := \varphi(t,\tau)y = \varphi(t,\tau)\varphi_n(\tau,s_n)y_n$. Defina

$$\psi_n(s) = \begin{cases} \varphi_n(s), & s \in [s_n,\tau] \\ \varphi(s), & s \in [\tau,t] \end{cases} \tag{3.20}$$

Temos da Hipótese H.7 que $\psi_n(t) \in U(t,s_n)y_n$. Além disso $\varphi(t,\tau)y = \psi_n(t,s_n)y_n$.

Logo, $\varphi(t,\tau)y = \lim_{s_n \to -\infty}\psi_n(t,s_n)y_n$. Uma vez que estamos supondo que existe atrator, pela Proposição 1.4.1 o processo é condicionalmente assintoticamente compacto. Como $y_n \in \mathcal{A}(s_n) \subset \bigcup_{s_n \leq \tau} \mathcal{A}(s_n) \subset B \in \mathcal{B}(H)$, temos que este limite existe e assim, pelo Lema 1.4.2, $\varphi(t,\tau)y \in \omega(t,B)$ para algum $B \in \mathcal{B}(H)$. Portanto, do Teorema 1.4.3, item 2, vem que $\varphi(t,\tau)y \in \mathcal{A}(t)$, o que implica que $U(t,\tau)\mathcal{A}(\tau) \in \mathcal{A}(t)$. ∎

3.2.4 Trajetórias completas extremas

Antes de enunciarmos o resultado que garante a existência das trajetórias completas extremas para o atrator pullback associado ao problema (3.1) vamos fazer as seguintes definições.

Definição 3.2.2 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach ordenado. Um processo multívoco é monótono se dados $x_0, y_0 \in X$ com $x_0 \leq y_0$ temos:*

Dada $\varphi(t,\tau)x_0 \in U(t,\tau)x_0$ existe $\psi(t,\tau)y_0 \in U(t,\tau)y_0$ tal que

$$\varphi(t,\tau)x_0 \leq \psi(t,\tau)y_0, \forall t \geq \tau.$$

Analogamente, dada $\xi(t,\tau)y_0 \in U(t,\tau)y_0$ existe $\eta(t,\tau)x_0 \in U(t,\tau)x_0$, tal que

$$\eta(t,\tau)x_0 \leq \xi(t,\tau)y_0, \forall t \geq \tau.$$

É importante assumir que a ordem é compatível com a topologia no seguinte sentido (ver [21] pg 303):

1. Qualquer conjunto limitado $\mathcal{B} \subset X$ está contido em algum 'intervalo', isto é, existe $a \leq b$ tal que $B \subset [a,b] = \{x \in X; a \leq x \leq b\}$.

2. Se $x_n \to x$, $y_n \to y$ e $x_n \leq y_n$, então $x \leq y$.

Definição 3.2.3 *Seja X um espaço métrico. Uma trajetória completa ou solução global para um processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \to X$, tal que $\xi(t) \in U(t,\tau)\xi(\tau), \forall t \geq \tau$.*

A próxima definição é importante para garantir a unicidade dentro do atrator e assim provarmos a existência das trajetórias maximal e minimal para o atrator pullback.

Definição 3.2.4 *Dizemos que um problema tem eventual unicidade de solução se dado $\mathcal{B} \subset H$ subconjunto limitado existe $T_0 > 0$ tal que se $S - \tau > T_0$ e $v \in U(S,\tau)\mathcal{B}$ então $U(t,S)v$ é unitário $\forall t > S > \tau + T_0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$.*

Observação 3.2.1 *Dado $B \in \mathcal{B}(H)$, pelo Lema 3.1.5 (considerando que a solução é global) fazemos $T_0 = T_6$ e teremos para $S - \tau > T_0$ e $v \in U(S,\tau)B$ que existe um aplicação positiva limitada em limitados η, tal que $-\eta(t) \leq u(t,\tau)v \leq \eta(t)$. Para $t \in [T_0 + \tau, T]$, onde $T > T_0 + \tau$ é um número qualquer, B é globalmente Lipschitz pela Observação 3.1.5. Assim, para $t > S > \tau + T_0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ temos unicidade de solução para* (3.1). *Ou seja, o problema* (3.1) *tem eventual unicidade.*

Observação 3.2.2 *Dentro do atrator pullback $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}$ temos unicidade de solução. De fato, tome $a(t) \in \mathcal{A}(t)$, pela semi-invariância do atrator $a(t) \in U(t,\sigma)\mathcal{A}(\sigma), \forall \sigma \in \mathbb{R}$, com $t \geq \sigma$. Em particular escolha σ tal que $\sigma > T_0 + \tau$. Como $U(t,\sigma)\mathcal{A}(\sigma)$ é unitário se $t > \sigma > \tau + T_0$ temos que $a(t) = u(t,\sigma)a_\sigma$, para algum $a_\sigma \in \mathcal{A}(\sigma) \subset U(\sigma,\tau)\mathcal{A}(\tau)$, com $\sigma > T_0 + \tau$ e $\mathcal{A}(\tau)$ subconjunto limitado.*

Definição 3.2.5 *Uma trajetória completa para um processo $\{U(t,s)\}_{t \geq s}$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\xi(t) = U(t,\tau)\xi(\tau)$ (ver [23]).*

Agora podemos enunciar o teorema que garante a existência de trajetórias completas que "delimitam" em um certo sentido o atrator pullback.

Teorema 3.2.2 *Seja $\{U(t,\tau)\}_{t \geq \tau}$ um processo multívoco semicontínuo superiormente e monótono e seja $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ seu atrator pullback com $\cup_{\tau \leq t}\mathcal{A}(\tau)$ limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Se vale a eventual unicidade de soluções então existem $T_0 > 0$ e $x_*(t)$, $x^*(t) \in \mathcal{A}$ tal que, para todo $t \geq S \geq T_0 + \tau$ e $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer, temos:*

1. *$x_*(t)$ (respectivamente $x^*(t)$) é a trajetória completa minimal (respectivamente maximal) no sentido que para qualquer $a(t) \in \mathcal{A}$ temos $x_*(t) \leq a(t) \leq x^*(t), \forall t \geq S \geq T_0 + \tau$;*

2. *$U(t,S)x_*(S) = x_*(t), \forall t \geq S \geq T_0 + \tau$ e $U(t,S)x^*(S) = x^*(t), \forall t \geq S \geq T_0 + \tau$ ou seja, x_* e x^* são trajetórias completas;*

Demonstração: Se $\{U(t,\tau)\}_{t \geq \tau}$ é um processo multívoco monótono e $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ seu atrator pullback temos que $\mathcal{A}(t) \subset [\underline{x}(t), \overline{x}(t)]$, onde $\underline{x}(t)$ e $\overline{x}(t)$ pertencem ao subconjunto limitado $B \subset H$.

Da invariância do atrator pullback $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}$ e para $t \geq S$ temos

$$U(t,S)\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(t), \forall t \geq S \geq T_0 + \tau.$$

Seja $a(t) \in \mathcal{A}(t)$ para todo $t \geq S \geq T_0+\tau$, então existe $a(S) \in \mathcal{A}(S)$ tal que $U(t,S)a(S) = a(t)$ e $\underline{x}(S) \leq a(S) \leq \overline{x}(S)$. Como o processo é monótono, dado $u(t,S)\underline{x}(S)$ existe $u(t,S)a(S)$ tal que $u(t,S)\underline{x}(S) \leq u(t,S)a(S)$.

Como dentro do atrator pullback para $t \geq S \geq T_0+\tau$ temos unicidade de solução, dado $u(t,S)\overline{x}(S)$ temos que $u(t,S)a(S) \leq u(t,S)\overline{x}(S)$. Desde que $U(t,S)a(S) = a(t)$ então $u(t,S)\underline{x}(S) \leq a(t) \leq u(t,S)\overline{x}(S), \forall t \geq S \geq T_0 + \tau$.

Temos que $\mathcal{A}(t)$ atrai no sentido pullback $\underline{x}(S)$ e $\overline{x}(S)$ pois são limitados em H ou seja, para cada $t \geq S \geq T_0 + \tau$ $\operatorname{dist}(u(t,S)\underline{x}(S), \mathcal{A}(t)) \overset{S\to-\infty}{\to} 0$ e analogamente, $\operatorname{dist}(u(t,S)\overline{x}(S), \mathcal{A}(t)) \overset{S\to-\infty}{\to} 0$.

Isto implica, como $\mathcal{A}(t)$ é compacto, que existem $x_*(t), x^*(t) \in \mathcal{A}(t)$ e subsequências $\{u(t,s_n)\underline{x}(s_n))\}_{s_n \leq S}$ e $\{u(t,s_n)\overline{x}(s_n)\}_{s_n \leq S}$ tais que,

$$\lim_{n\to\infty} u(t,s_n)\underline{x}(s_n) = x_*(t) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} u(t,s_n)\overline{x}(s_n) = x^*(t),$$

onde $x_*(t), x^*(t) \in \mathcal{A}(t)$, pois $\cup_{\tau \leq t}\mathcal{A}(\tau)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Pela compatibilidade da ordem com a topologia $x_*(t) \leq a(t) \leq x^*(t), \forall t \geq S \geq T_0 + \tau$ e $\forall a(t) \in \mathcal{A}(t)$.

Afirmação: Existe único $x_*(t) \in \mathcal{A}(t)$ tal que $x_*(t) \leq a(t)$, para todo $a(t) \in \mathcal{A}(t)$ e $t \geq S$.

De fato. Suponha que $x_*^1(t) \in \mathcal{A}(t)$ e $x_*^1(t) \leq a(t)$ para todo $a(t) \in \mathcal{A}(t)$, em particular $x_*^1(t) \leq x_*(t)$. Por outro lado, $x_*(t) \leq a(t)$ para todo $a(t) \in \mathcal{A}(t)$ então $x_*(t) \leq x_*^1(t)$ e assim, $x_*(t) = x_*^1(t)$. Analogamente, prova-se que existe único $x^*(t) \geq a(t)$ e assim, $\mathcal{A}(t) \subset [x_*(t), x^*(t)]$, para todo $t \geq S \geq T_0 + \tau$.

Afirmação: $U(t,S)x_*(S) = x_*(t)$.

De fato. Seja $x_*^1(t) = U(t,S)x_*(S)$ mostremos que $x_*^1(t) \in \mathcal{A}(t)$ e $x_*^1(t) \leq a(t)$, para todo $a(t) \in \mathcal{A}(t)$ e todo $t \geq S$ então pela afirmação anterior $x_*(t) = x_*^1(t)$. Como $x_*(S) \in \mathcal{A}(S)$ e $U(t,S)\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{A}(t)$ temos $x_*^1(t) = U(t,S)x_*(S) \in U(t,S)\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{A}(t)$.

Agora seja $a(t) \in \mathcal{A}(t)$ então existe $a(S) \in \mathcal{A}(S)$ tal que $U(t,S)a(S) = a(t)$, pois $\mathcal{A}(t) \subset U(t,S)\mathcal{A}(S)$. Sendo $x_*(S) \leq a(S)$ como o processo multívoco é monótono temos $x_*^1(t) = U(t,S)x_*(S) \leq U(t,S)a(S) = a(t)$ ∎

Conclusão: Seja $B \subset H$ um subconjunto qualquer limitado. Considerando as hipóteses H.1-H.4 e H.6 e a Proposição 3.1.1 o problema (3.1) tem solução global garantida, assim podemos definir o processo multívoco $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$. Pelo Teorema 3.2.1 conseguimos um pullback attractor para $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$, pela Observação 3.2.1 existe $T_0 > 0$ tal que temos a eventual unicidade de solução para o problema (3.1), $\forall t \geq S \geq T_0 + \tau$. Então pela Observação 3.1.6 $\mathcal{A}(t) \subset [\underline{x}(t), \overline{x}(t)]$, onde $\underline{x}(t) = -\eta(t)$ e $\overline{x}(t) = \eta(t)$ pertencem a B. Da Observação 3.2.3 temos unicidade de solução dentro do atrator pullback e então vale a invariância. Portanto, considerando a Proposição 3.2.3, a hipótese H.5 e o princípio da comparação obtido no Teorema 2.3.4 estamos nas condições do Teorema 3.2.2 e assim, garantimos a existência de trajetórias completas maximal e minimal para o atrator pullback associado ao problema (3.1).

Capítulo 4

Sistemas Globalmente Lipschitz em Espaços com Peso

Neste capítulo vamos mostrar a existência do atrator pullback e de trajetórias extremas completas para uma equação não autônoma envolvendo o p-Laplaciano e perturbação global-
mente Lipschitz em $L^2(\mathbb{R}^n)$ do seguinte tipo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + a(x)\,|u|^{p-2}\,u = C(t,x)u + D(t,x), t \geq \tau \\ u(\tau) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $C(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \geq \tau$; $t \mapsto \|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, t \mapsto \|C(t)\|_H$ e $t \mapsto \|D(t)\|_H$ são funções limitadas em limitados do tempo, absolutamente contínuas, não decrescentes e diferenciáveis com derivada positiva e $2 < p < n$.

A função contínua $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é não-negativa, $a(x) \geq 1$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz a seguinte condição:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a(x)^{2/(p-2)}}dx < +\infty \tag{4.2}$$

A maior dificuldade quando trabalhamos com domínios ilimitados é estabelecer as imersões compactas de Sobolev dos espaços de funções e daí a compacidade das soluções pode não ser obtida de uma forma padrão. Neste capítulo vamos obter estimativas uniformes sobre o dado inicial em um espaço com peso, E definido a seguir, e usando a idéia desenvolvida em [71] provaremos a compacidade das soluções em $\mathbb{R}^n$. O espaço com peso é um método utilizado pelos autores [7] e [27]. Em particular, o espaço E foi usado em [1] e suas referências, em trabalhos com Equações Elípticas.

4.1 O Espaço E

Considere a seguinte definição dada pelos autores [7], [27], [71], sobre o espaço com peso:

$$E = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

com norma dada por $\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p + a(x)\, |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$.

Proposição 4.1.1 *Se $a(x) \geq 1$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ a inclusão $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$é contínua. Além disso, $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: A inclusão $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, pois dado $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se $2 \leq p < \infty$ temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p + |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p + a(x)\, |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_E \end{aligned}$$

Para provar que E é Banach tome $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E ou seja, dado $\epsilon^p > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $m, n \geq N$ temos

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_E^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_n(x) - \nabla u_m(x)|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u_n(x) - u_m(x)|^p \, dx \\ &= \|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \left\| a^{1/p}(u_n - u_m) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \epsilon^p \end{aligned}$$

É possível extrair uma subsequência $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left\| \nabla u_{n_{j+1}} - \nabla u_{n_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| a^{1/p}(u_{n_{j+1}} - u_{n_j}) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^j} \tag{4.3}$$

Seja $v_m(x) = \sum_{j=1}^m \left| \nabla u_{n_{j+1}}(x) - \nabla u_{n_j}(x) \right|$ uma sequência monótona de funções. De (4.3) temos para $m = 1, 2, ...$

$$\|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^m \left\| \nabla u_{n_{j+1}} - \nabla u_{n_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2^j} \right) \leq 1. \tag{4.4}$$

Pondo $v(x) = \lim_{m\to\infty} v_m(x)$, o qual pode ser infinito para algum $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos pelo Teorema da Convergência Monótona e por (4.4)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |v_m(x)|^p \, dx < 1$$

Portanto $v(x) < \infty$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ e a série

$$\nabla u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\nabla u_{n_{j+1}}(x) - \nabla u_{n_j}(x) \right) \tag{4.5}$$

converge a um limite $u_1(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, com $u_1(x) = 0$ onde este não está definido como limite, pois

$$\nabla u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{m} \left(\nabla u_{n_{j+1}}(x) - \nabla u_{n_j}(x)\right) \leq v_m(x). \tag{4.6}$$

De (4.5) temos

$$u_1(x) = \nabla u_{n_1}(x) + \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\nabla u_{n_{j+1}}(x) - \nabla u_{n_j}(x)\right)$$

ou seja

$$u_1(x) = \lim_{m\to\infty} \nabla u_{n_m}(x) \quad \text{q.t.p.} x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.7}$$

Agora considere $\overline{v}_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \left|a(x)^{1/p}(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))\right|$ uma sequência monótona de funções. De (4.3) temos para $m = 1, 2, ...$

$$\|\overline{v}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^{m} \left\|a(x)^{1/p}(u_{n_{j+1}} - u_{n_j})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2^j}\right) \leq 1. \tag{4.8}$$

Pondo $\overline{v}(x) = \lim_{m\to\infty} \overline{v}_m(x)$, o qual pode ser infinito para algum $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos pelo Teorema da Convergência Monótona e por (4.8)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{v}(x)|^p \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{v}_m(x)|^p \, dx < 1$$

Portanto $\overline{v}(x) < \infty$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ e analogamente, a série

$$a(x)^{1/p} u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a(x)^{1/p}(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))\right) \tag{4.9}$$

converge a um limite $a(x)^{1/p} u_2(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, com $u_2(x) = 0$ onde este não está definido como limite. De (4.9) temos

$$a(x)^{1/p} u_2(x) = a(x)^{1/p} u_{n_1}(x) + \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(a(x)^{1/p}(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))\right)$$

ou seja,

$$a(x)^{1/p} u_2(x) = \lim_{m\to\infty} a(x)^{1/p} u_{n_m}(x) \quad \text{q.t.p.} x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

Observe que $u_2(x) = \lim_{m\to\infty} u_{n_m}(x)$ q.t.p.$x \in \mathbb{R}^n$. De fato, de (4.10) temos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$ temos $\left|a(x)^{1/p}\right| |u_{n_m}(x) - u_2(x)| < \epsilon$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Então para o mesmo $N > 0$ escolhido anteriormente, como $a(x)^{1/p} > 1$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|u_{n_m}(x) - u_2(x)| \leq \left|a(x)^{1/p}\right| |u_{n_m}(x) - u_2(x)| < \epsilon, \quad \text{q.t.p.} x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

Podemos observar também que $u_1 = \nabla u_2$. De fato, de (4.7) temos que $\nabla u_{n_m}(x) \to u_1(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ e de (4.11) temos que $u_{n_m}(x) \to u_2(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Se φ é uma função teste qualquer ou seja, uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto então por definição $\langle \nabla u_{n_m}, \varphi \rangle \to \langle u_1, \varphi \rangle$.

Da definição de derivada fraca temos para todo $i = 1, ..., n.$:

$$\left\langle \frac{\partial u_{n_m}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u_{n_m}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u_2, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Como $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ também é uma função teste temos:

$$\left\langle u_{n_m}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \to \left\langle u_2, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall i = 1, ..., n.$$

Portanto, $\langle u_{n_m}, \nabla \varphi \rangle \to \langle u_2, \nabla \varphi \rangle$ e assim, $u_1 = \nabla u_2$.

Observe que $\|\nabla u_2 - \nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \stackrel{m\to\infty}{\to} 0$. De fato, pelo Lema de Fatou e sendo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, se $m \geq N$ temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_2 - \nabla u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_2(x) - \nabla u_{n_m}(x)|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u_1(x) - \nabla u_n(x)|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} |\nabla u_{n_m}(x) - \nabla u_n(x)|^p \, dx \\
&\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{n_m}(x) - \nabla u_n(x)|^p \, dx \\
&< (\epsilon/2)^p
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar que $\left\|a(x)^{1/p}(u_2 - u_n)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \stackrel{m\to\infty}{\to} 0$. De fato, se $m \geq N$ temos

$$\begin{aligned}
\left\|a(x)^{1/p}(u_2 - u_n)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|a(x)^{1/p} u_2(x) - a(x)^{1/p} u_{n_m}(x)\right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} \left|a(x)^{1/p} u_{n_m}(x) - a(x)^{1/p} u_n(x)\right|^p dx \\
&\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|a(x)^{1/p}(u_{n_m}(x) - u_n(x))\right|^p dx \\
&< (\epsilon/2)^p
\end{aligned}$$

Temos que $\|u_2 - u_m\|^p_E = \|\nabla u_2 - \nabla u_m\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|a(x)^{1/p}(u_2 - u_n)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ então $\|u_2 - u_m\|_E < \epsilon$ provando assim, que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em E e $u_2 = (u_2 - u_n) + u_n \in E$. Portanto, E é Banach.

Para mostrar que E é reflexivo devemos provar que E é uniformemente convexo, isto é, se para todo $0 < \epsilon \leq 2$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se $u, v \in E$ satisfaz $\|u\|_E = \|v\|_E = 1$ e $\|u - v\|_E \geq \epsilon$ então $\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_E \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

Dados $u, v \in E$ temos que $\nabla u, \nabla v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então pela Primeira Desigualdade de Clarkson, ver Teorema IV.10 pg. 59 em [13] temos

$$\left\|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \left\|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right).$$

Da demonstração do Teorema IV.10 pg. 59 em [13] temos para $z, w \in \mathbb{R}$ que

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right)$$

Como $a(x) \geq 1$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$a(x)\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + a(x)\left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(a(x)\,|z|^p + a(x)\,|w|^p\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^p dx &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|v(x)|^p\,dx\right)\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_E^p \leq \frac{1}{2}\left(\|u\|_E^p + \|v\|_E^p\right). \tag{4.12}$$

Agora, fixe $\epsilon > 0$ e suponha que $\|u\|_E = \|v\|_E = 1$ e $\|u - v\|_E \geq \epsilon$. De (4.12) temos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E^p \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

Ou seja,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E \leq \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$$

Então

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E \leq 1 - \delta(\epsilon),$$

onde $\delta(\epsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$

Como o espaço E é Banach e uniformemente convexo pelo Teorema III.29 pg. 51 em [13] E é reflexivo. ■

O resultado abaixo é demonstrado em [71] mas colocaremos a demonstração para facilitar a leitura.

Lema 4.1.1 *Assuma verdadeira a condição (4.2). Então $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n)$ para $2 \leq s \leq p^* = \frac{pn}{n-p}$. Além disso, E está compactamente imerso em $L^s(\mathbb{R}^n)$ para $2 \leq s < p^*$*

Demonstração: Tome $\theta = p/2$. Usando a Desigualdade de Hölder e a condição (4.2), pois $\frac{\theta'}{\theta} = \frac{2}{p-2}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{a(x)^{1/\theta}}{a(x)^{1/\theta}} |u(x)|^2\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a(x)^{\theta'/\theta}} dx\right)^{1/\theta'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\leq K\,\|u\|_E^2\,, \forall u \in E.
\end{aligned}$$

Portanto, $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

Note também que $E \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ desde que $E \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $p \leq q \leq p^*$, ver Corolário IX.10 pg. 165 em [13]. Agora, como $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ usando a desigualdade de interpolação, ver Observação 2 pg.57 em [13], temos

$$\|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\,,$$

onde $\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{p^*}, 0 \leq \alpha \leq 1$ e $2 \leq s \leq p^*$. Assim, obtemos que $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n), \forall 2 \leq s \leq p^*$.

Agora vamos mostrar que $E \subset\subset L^s(\mathbb{R}^n), \forall\, 2 \leq s < p^*$. Usando a condição (4.2) temos para $R > 0$ suficientemente grande que

$$\int_{B_R^c} \frac{1}{a(x)^{2/p-2}} dx < \epsilon,$$

onde B_R^c é o complementar em $\mathbb{R}^n$ da bola de centro zero e raio R.

Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em E tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em E então para n grande temos:

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} |u_n(x)|^2\,dx &= \int_{B_R^c} \frac{a(x)^{1/\theta}}{a(x)^{1/\theta}} |u_n(x)|^2\,dx \\
&\leq \left(\int_{B_R^c} \frac{1}{a(x)^{\theta'/\theta}} dx\right)^{1/\theta'} \left(\int_{B_R^c} a(x)\,|u_n(x)|^2\,dx\right)^{1/p} \\
&\leq \epsilon\,\|u_n\|_E^2\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $u_n \to 0$ em $L^2(B_R^c)$, pois $\|u_n\|_E^2$ é limitado uma vez que $u_n \rightharpoonup 0$ em E. No conjunto limitado B_R temos o mergulho compacto $W^{1,p}(B_R) \subset\subset L^2(B_R)$ então $u_n \to 0$ em $L^2(B_R)$. Isto implica que $E \subset\subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E temos que ela também é limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Usando a desigualdade de interpolação onde $0 \leq \alpha \leq 1$ teremos:

$$\|u_n\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_n\|^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_n\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_n\|^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^n)} C \to 0.$$

Portanto, $E \subset\subset L^s(\mathbb{R}^n), \forall\ \ 2 \leq s < p^*$. ■

4.2 Existência de solução

Nesta seção vamos mostrar que o operador da parte principal da equação (4.1) é maximal monótono e daí, como a perturbação é globalmente Lipschitz, teremos pela Proposição 1.2.3 que existe uma única solução para (4.1).

Agora, considere E^* o espaço dual de E. Como em [71] definimos o operador $A_1 : E \to E^*$ por:

$$A_1u(v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u(x)|^{p-2}\, u(x)v(x)dx$$

para cada $u \in E$.

Note que $A_1u \in E^*$, isto é, A_1u é linear e limitada. A linearidade sai das propriedades de integral e a limitação é obtida pois para cada $u, v \in E$ temos

$$\begin{aligned}
|A_1u(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)^{1/q} |u(x)|^{p-1} a(x)^{1/p} |v(x)|\, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^p dx\right) \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |v(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}\right]^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&+ \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u(x)|^p dx\right)^{1/p}\right]^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |v(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} + a(x)|u(x)|\right)^{1/p}\right]^{p-1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + a(x)|u(x)|^p\right]^{p-1} \\
&+ \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} + a(x)|u(x)|\right)^{1/p}\right]^{p-1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + a(x)|u(x)|^p\right]^{p-1} \\
&\leq 2\, \|u\|^{p-1}_E \|v\|_E \\
&< \infty
\end{aligned}$$

pois $u, v \in E$.

Observe agora que se $u \in E$ então $A_1 u \in E^*$. Como A_1 está bem definido resta mostrar que $A_1 u$ é linear e limitado. A linearidade segue direto da definição e das propriedades da integral. $A_1 u$ é limitado pois

$$\|A_1 u\|_{E^*} = \sup_{v \in E; \|u\|_E \leq 1} |A_1 u(v)| .$$

Sendo $\|v\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p + a(x)\, |v(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leq 1$ temos das contas feitas acima que

$$\|A_1 u\|_{E^*} = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p + a(x)\, |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}\right]^{p-1} = 2\, \|u\|_E^{p-1} < \infty,$$

pois $u \in E$.

Temos também que A_1 é monótono. Sejam $u_1, u_2 \in E$

$$\begin{aligned}
\langle A_1 u_1 - A_2 u_2, u_1 - u_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \left(\nabla u_1 - \nabla u_2\right) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u_1|^{p-2} u_1 (u_1 - u_2) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \left(\nabla u_1 - \nabla u_2\right) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u_2|^{p-2} u_2 (u_1 - u_2) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2\right) (\nabla u_1 - \nabla u_2) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right) (u_1 - u_2) dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Tartar (Desigualdade 1.1.1) temos

$$\begin{aligned}
\langle A_1 u_1 - A_2 u_2, u_1 - u_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_0 \, |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_1 a(x)\, |u_1 - u_2|^p \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

onde γ_0, γ_1 são constantes positivas e dependem apenas de p e n.

O operador A, definido como realização de A_1 em $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(A) = \{u \in E; A_1 u \in H\} \\ A(u) = A_1 u, \text{se } \; u \in \mathcal{D}(A) \end{array} \right. \tag{4.13}$$

Observação 4.2.1 *A inclusão* $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ *é densa.*

De fato. Repetindo as contas acima, para $p > 2$ e $u \in E$ as seguintes condições são verdadeiras

$$\langle A_1 u, u\rangle_{E^*,E} \geq 2\,\|u\|_E^p\,,$$

$$\|A_1 u\|_{E^*} \leq \|u\|_E^{p-1} + 1.$$

Assim, pelo Lema 1, pg.696 em [25] $\mathcal{D}(A)$ é denso em H e assim, $\overline{E} = \overline{\mathcal{D}(\varphi)} = \overline{\mathcal{D}(A)} = L^2(\mathbb{R}^n)$, com φ definida em (4.15).

As próximas duas proposições foram enunciadas em [71]. Daremos sua demonstração para que o trabalho fique completo.

Proposição 4.2.1 *Seja A o operador definido em* (4.13). *Então A é maximal monótono.*

Demonstração: Pela Proposição 4.1.1, pelo Lema 4.1.1 e pela Observação 4.2.1, E é um espaço de Banach reflexivo e $E \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset E^*$ são injeções contínuas e densas, ver pg.82 em [13]. Sendo A_1, definido acima, um operador monótono, unívoco e definido em todo E, se mostrarmos que é hemicontínuo e coercivo, pelo Exemplo 1.2.3 teremos que A é um operador maximal monótono.

Primeiramente, mostremos que A_1 é coercivo, isto é,

$$\lim_{\|u\|_H \to \infty} \frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|u\|_H} = \infty.$$

Temos que $\langle A_1 u, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p\,dx = \|u\|_E^p$. Pelo Lema 4.1.1 temos $\|u\|_H^p \leq K\,\|u\|_E^p$ então

$$\frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|u\|_H} = \frac{\|u\|_E^p}{\|u\|_H} \geq \frac{K\,\|u\|_H^p}{\|u\|_H} = K\,\|u\|_H^{p-1} \tag{4.14}$$

Passando o limite quando $\|u\|_H \to \infty$ em (4.14) temos que A_1 é coercivo.

Observe também que A_1 é hemicontínuo, isto é, para todo $u_1, u_2 \in E$ temos que $\langle A_1(u_1 + tu_2), v\rangle_{E^*,E} \to \langle A_1 u_1, v\rangle_{E^*,E}$ quando $t \to 0, \forall v \in E$. Seja $t \in (-1,1)$ então

$$\begin{aligned}
&\Big|\langle A_1(u_1 + tu_2), v\rangle_{E^*,E} - \langle A_1 u_1, v\rangle_{E^*,E}\Big| = \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big||\nabla(u_1 + tu_2)(x)|^{p-2}\,\nabla(u_1 + tu_2)(x)\nabla v(x)dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|(u_1 + tu_2)(x)|^{p-2}\,(u_1 + tu_2)(x)v(x)dx \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1|^{p-2}\,\nabla u_1 \nabla v - a(x)\,|u_1|^{p-2}\,u_1 v\Big|\,dx \to 0,
\end{aligned}$$

$t \to 0$, pois $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}\,u, u \in \mathbb{R}$é contínua e $\nabla(u_1 + tu_2) = \nabla u_1 + t\nabla u_2 \overset{t\to 0}{\to} \nabla u_1$. Portanto, A é um operador maximal monótono. ■

Proposição 4.2.2 *O operador, definido em* (4.13), *é subdiferencial da função* $\varphi : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup +\infty$ *definida por*

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u|^p\, dx\right], u \in E \\ +\infty, \ \ \textit{caso contrário} \end{cases} \tag{4.15}$$

Demonstração: Primeiramente, observe que $\varphi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_E^p$ então φ é convexa. Se $u \in E$ então $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u|^p\, dx < \infty$, por definição. Logo, $\varphi(u) \neq \infty$.

Temos também que φ é semicontínua inferiormente isto é,

$$\varphi(u) \leq \lim\ \inf \varphi(u_n)$$

sempre que $u_n \to u$.

De fato. Seja $u_n \to u$. Se $\lim\ \inf\varphi(u_n) = \infty$ o resultado segue. Se $\lim\ \inf\varphi(u_n) = a < \infty$ então existe uma subsequência $\left\{u_{n_j}\right\}$ de $\{u_n\}$ satisfazendo

$$\lim\varphi(u_{n_j}) = \lim\frac{1}{p}\left\|u_{n_j}\right\|_E^p = a.$$

De fato, $a = \lim_{j\to\infty} A_j$, onde $A_j = \inf\{\varphi(u_j), \varphi(u_{j+1}), ...\}$. Observe que $\{A_j\}$ é uma sequência de números reais positivos então para todo j podemos encontrar $\varphi(u_{n_j})$ tal que $A_j \leq \varphi(u_{n_j}) \leq A_j + \frac{1}{j}$. Fazendo $j \to \infty$ temos $a \leq \lim_{j\to\infty}\varphi(u_{n_j}) \leq a$. Portanto, $\lim_{j\to\infty}\varphi(u_{n_j}) = a$.

Logo, $\left\|u_{n_j}\right\|_E$ é uma sequência limitada e portanto, pelo Teorema III.27, pg.50 em [13], existe uma subsequência $\left\{u_{n_{j_k}}\right\}$, que converge fracamente para v em E. Como $E \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ continuamente, segue da unicidade do limite que $u = v$. Portanto, pela Proposição III.5 pg.35 em [13],

$$\|u\|_E \leq \lim\ \inf\|u_n\|_E\,,$$

e pela definição de φ temos

$$\varphi(u) \leq \lim\ \inf\varphi(u_n)$$

isto implica que φ é semicontínua inferiormente.

Mostremos agora que $\partial\varphi$ é maximal monótona. Sabemos que $\partial\varphi$ é um operador monótono pelo Exemplo 2.1.4 pg.21 em [12] logo, pela Proposição 1.2.1, basta mostrar que $H = \mathcal{R}(I + \partial\varphi)$. Seja $y \in H$. Sabemos que a função $x \to \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2$ é convexa pelo Lema 2.1 pg. 25 em [12]. Além disso, como a aplicação $x \to \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2$é contínua e portanto, semicontínua inferiormente, temos que $x \to \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2$ é semicontínua inferiormente e ainda, $\varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2 \to +\infty$ quando $\|x\|_H \to +\infty$ então, pelo Corolário III.20 pg.46 em [13], $\varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2$ atinge seu mínimo em algum $x_0 \in H$ e pelo Lema 2.1 pg.25 em [12], $(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. Portanto, existe $x_0 \in H$ tal que $y \in (I + \partial\varphi)x_0$.

Logo, $H = \mathcal{R}(I + \partial\varphi)$ e portanto $\partial\varphi$ é maximal monótono.

Finalmente, para mostrarmos que $Au = \partial\varphi(u)$ basta mostramos que $Au \subset \partial\varphi(u)$, pois como ambos são maximais teremos a igualdade. Seja $u \in \mathcal{D}(A)$ e $v = Au$. Então para todo $\xi \in E$ temos:

$$
\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(\xi - u)dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u(\xi - u)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla\xi - \nabla u)dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u(\xi - u)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p}\nabla u(\nabla\xi)dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u\xi dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}dx
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle &+ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla\xi)dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u\xi dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^{p-1}\right)(|\nabla\xi|)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(a(x)^{1/p}|u|^{p-1}\right)\left(a(x)^{1/p}|\xi|\right)dx \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(p-1)q}dx\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\xi|^p dx\right)^{1/p} \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{(p-1)q}dx\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\xi|^p dx\right)^{1/p} \\
&\le \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\xi|^p dx \\
&+ \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\xi|^p dx
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\langle v, \xi - u \rangle + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + a(x) |u|^{p-2} \, dx \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \xi|^p + a(x) |\xi|^p \, dx.$$

Assim,

$$\langle v, \xi - u \rangle + \varphi(u) \leq \varphi(\xi).$$

Note que se $\xi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $\varphi(\xi) = \infty$ e portanto, $v \in \partial\varphi(u)$. ■

Observação 4.2.2 *Sejam* $u_1, u_2 \in \overline{D(A)}$ *quaisquer e denote* $F(t, u_1) = C(t,x)u_1 - D(t,x)$ *e* $F(t,u_2) = C(t,x)u_2 - D(t,x)$, *onde* C *e* D *satisfazem as hipóteses impostas no início deste capítulo.*

Então $F(t,u_1) - F(t,u_2) = C(t,x)(u_1 - u_2)$, *assim*

$$\begin{aligned} \|F(t,u_1) - F(t,u_2)\|_H^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |C(t,x)(u_1 - u_2)(x)|^2 \, dx \\ &\leq supess_{x \in \Omega} |C(t)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u_1(x) - u_2(x)|^2 \, dx \\ &= \|C(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_H^2 \end{aligned}$$

para todo $t \in [\tau, T]$. *Como a aplicação* $\|C(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ *é limitada em limitados do tempo temos a condição de Lipschitz satisfeita e assim, como* A *é um operador maximal monótono, da Proposição 1.2.3 temos que o problema* (4.1) *tem uma única solução global. Denotaremos por* $u(t,\tau)u_0$ *a solução no tempo* t *que no instante* τ *vale* u_0. *Então para cada* $v \in H$ *podemos definir o processo*

$$U(t,\tau)v = u(t,\tau)v \tag{4.16}$$

O próximo resultado é importante para aplicarmos o resultado de comparação, Teorema 2.3.4.

Proposição 4.2.3 *Seja* A *o operador definido em* (4.13). *O resolvente de* A *é crescente.*

Demonstração: Para demonstrar este resultado vamos utilizar a equivalência entre os itens (1) e (4) do Teorema 2.3.1, pois como $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ temos suas hipóteses garantidas. Podemos substituir φ pela aplicação

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in C \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin C \end{cases} \tag{4.17}$$

a qual é convexa, própria e semicontínua inferiormente e portanto, o operador ∂I_C é maximal monótono em H e $C = \{x \in H; x \geq 0\}$ (para mais detalhes ver [12] pg.46)

Se mostrarmos o item (iv) pela equivalência com o (i) teremos que se $u, v \in H, \lambda > 0$ e $u \geq v$

$$I_C\left((I+\lambda A)^{-1}(u) - (I+\lambda A)^{-1}(v)\right) \leq I_C(u-v).$$

Como o lado direito da desigualdade é igual a zero temos que

$$(I+\lambda A)^{-1}(u) \geq (I+\lambda A)^{-1}(v)$$

isto é, A tem resolvente crescente.

Para mostrarmos o item (iv) definimos $u = (u^+ - u^-) \in H$ onde

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } \ x \in \Omega_+^u = \{x \in \mathbb{R}^n; u(x) \geq 0\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.18}$$

$$u^-(x) = \begin{cases} -u(x) & \text{se } \ x \in \Omega_-^u = \{x \in \mathbb{R}^n; u(x) < 0\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Note que se $u \in E$ então $u^- \in E$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|u^-(x)\right|^p dx = \int_{\Omega_-^u} a(x)\left|u(x)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\left|u(x)\right|^p dx < \infty.$$

Em [12] pg.46 podemos encontrar a seguinte caracterização:

- a aproximação de Yosida de ∂I_C é dada por:

$$\left(\partial I_C\right)_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(x - Proj_C x.$$

Agora tome $u, v \in E$. Como $E \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ temos que $(u-v) \in E$ e então $(u-v)^- \in E$. Por definição da aproximação de Yosida e do conjunto C temos que

$$\begin{aligned} \left(\partial I_C\right)_\mu(u-v) &= \frac{1}{\mu}((u-v) - Proj_C(u-v)) = \frac{1}{\mu}((u-v) - (u-v)^+) \\ &= \frac{1}{\mu}(u-v)^- \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle Au - Av, (\partial I_C)_\mu (u-v) \Big\rangle = \Big\langle Au, \frac{1}{\mu}(u-v)^- \Big\rangle - \Big\langle Av, \frac{1}{\mu}(u-v)^- \Big\rangle \\
&= \frac{1}{\mu}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla (u-v)^- dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u(x)|^{p-2}\, u(x)(u-v)^-(x) dx\right] \\
&- \frac{1}{\mu}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^{p-2} \nabla v(x) \nabla (u-v)^- dx - \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|v(x)|^{p-2}\, v(x)(u-v)^-(x) dx\right] \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{\Omega_-^{(u-v)}} (|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p-2} \nabla v(x)) \nabla (u-v)(x) dx \\
&+ \frac{1}{\mu}\int_{\Omega_-^{(u-v)}} a(x)(|u(x)|^{p-2}\, u(x) - |v(x)|^{p-2}\, v(x))(u-v)(x) dx \\
&= \frac{1}{\mu}\left\langle |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p-2} \nabla v(x), \nabla u(x) - \nabla v(x)) \right\rangle \\
&+ \frac{1}{\mu} a(x) \left\langle |u(x)|^{p-2}\, u(x) - |v(x)|^{p-2}\, v(x), (u-v)(x) \right\rangle
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Tartar temos

$$
\begin{aligned}
\Big\langle Au - Av, (\partial I_C)_\mu (u-v) \Big\rangle &\geq \frac{1}{\mu}\gamma_0 \|\nabla u - \nabla v\|_E^p + \gamma_1 \frac{1}{\mu} a(x) \|u - v\|_E^p \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Portanto, o item (4) está verificado e temos que o resolvente de A é crescente. ■

A partir de agora vamos escrever $-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + a(x)\,|u|^{p-2}$ por Au como definimos. Então o sistema (4.1) pode ser reescrito por:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_t + Au = C(t,x)u + D(t,x), t \geq \tau \\
u(\tau) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)
\end{array}
\right. \tag{4.20}
$$

4.3 Atrator pullback e trajetórias extremas em $L^2(\mathbb{R}^n)$

4.3.1 Estimativa em $L^2(\mathbb{R}^n)$, em E e existência do atrator pullback

Denotaremos as soluções de (4.1) que no tempo τ valia u_0 por $u(t,\tau)u_0$ e quando o dado inicial não for relevante para as contas, apenas por $u(t)$. As estimativas para as soluções em $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ e em E garantem a existência do pullback attractor e são obtidas usando os Lemas 1.1.1 e 1.1.2.

Lema 4.3.1 *Se u é solução de* (4.1) *existe uma função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ crescente e limitada em limitados e existe $T_1 > 0$ tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\|u(t)\|_H^2 \leq \alpha(t)$ para todo $t - \tau \geq T_1$ e para todo $u_0 \in H$.*

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (4.20) por u temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u(x)|^p\,dx \leq & \int_{\mathbb{R}^n} |C(t,x)|\,|u(t,x)|^2\,dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} |D(t,x)|\,|u(t,x)|\,dx\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \|u\|_E^p &\leq \operatorname{supess}_{x\in\mathbb{R}^n} |C(t)|\,\|u(t)\|_H^2 \\ &\quad + \|D(t)\|_H\,\|u(t)\|_H \\ &= \|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u(t)\|_H^2 \\ &\quad + \|D(t)\|_H\,\|u(t)\|_H\end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por uma constante $\eta > 0$ e usando o Lema 4.1.1

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + K\,\|u\|_H^p \leq \frac{1}{\eta}\,\|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\eta\,\|u(t)\|_H^2 + \frac{1}{\eta}\,\|D(t)\|_H\,\eta\,\|u(t)\|_H$$

Usando a Desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + K\,\|u(t)\|_H^p &\leq \frac{1}{r\eta^r}\,\|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^r + \frac{\eta^{\bar r}}{\bar r}\,\|u(t)\|_H^{2\bar r} \\ &\quad + \frac{1}{\bar p\eta^{\bar p}}\,\|D(t)\|_H^{\bar p} + \frac{\eta^p}{p}\,\|u(t)\|_H^p\end{aligned}$$

onde $\bar r$ e $\bar p$ é o conjugado de r e p, respectivamente, $\bar r = p/2, r = p/(p-2)$ e $\bar p = p/(p-1)$ então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + K\,\|u(t)\|_H^p \leq k_2\,\|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p/(p-2)} + k_3\,\|u(t)\|_H^p + k_4\,\|D(t)\|_H^{p/(p-1)}$$

onde as constantes $k_2 = k_2(\eta,p)$, $k_3 = k_3(\eta,p)$ e $k_4 = k_4(\eta,p)$. Logo, fazendo η tão pequeno para que $K - k_3$ seja positivo teremos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2(K-k_3)\left(\|u(t)\|^2\right)_H^{p/2} \leq 2k_2\,\|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p/(p-2)} + 2k_4\,\|D(t)\|_H^{p/(p-1)}$$

Pelo Lema 1.1.1 temos que para cada $t \geq \tau$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_H^2 \leq & \left(\frac{2k_2\,\|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p/(p-2)} + 2k_4\,\|D(t)\|_H^{p/(p-1)}}{2(K-k_3)}\right)^{2/p} \\ & + \frac{1}{[2(K-k_3)((p/2)-1)(t-\tau)]^{1/((p/2)-1)}}\end{aligned}$$

Então existe $T_1 > 0$, tal que

$$\frac{1}{[2(K-k_3)((p/2)-1)(t-\tau)]^{1/((p/2)-1)}} \leq 1$$

e para cada $t \geq T_1 + \tau$ temos

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \left(\frac{2k_2 \|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p/(p-2)} + 2k_4 \|D(t)\|_H^{p/(p-1)}}{2(K-k_3)} \right)^{2/p} + 1 = \alpha(t). \qquad \blacksquare$$

Lema 4.3.2 *Se u é solução de* (4.1) *existe uma função $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ limitada em limitados e crescente e existe $T_2 > 0$, tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\|u(t)\|_E^p \leq \beta(t)$ para todo $t - \tau \geq T_2$.*

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (4.20) por u_t temos

$$\|u_t(t)\|_H^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\|u(t)\|_E^p \leq \|C(t)u + D(t)\|_H \|u_t(t)\|_H$$

Usando a Desigualdade de Young temos

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_H^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\|u(t)\|_E^p \leq \frac{1}{2}\|C(t)u + D(t)\|_H^2$$

Como $\|u_t(t)\|_H^2 \geq 0$, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Young obtemos

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_E^p \leq \frac{1}{r}\|C(t)\|_H^{2r} + \frac{1}{\bar{r}}\|u(t)\|_H^{2\bar{r}} + \|D(t)\|_H^2$$

Usando o Lema 4.1.1 e sendo $r = p/p-2$ e $2\bar{r} = p$ temos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_E^p \leq (p-2)\|C(t)\|_H^{2p/p-2} + p\|D(t)\|_H^2 + pK\|u(t)\|_E^p.$$

Temos para R fixo que

$$\int_t^{t+R} pK d\theta = pKR = a_1,$$

$$\int_t^{t+R} (p-2)\|C(\theta)\|_H^{2p/p-2} + p\|D(\theta)\|_H^2 d\theta \leq R(p-2)\|C(t+R)\|_H^{2p/p-2} + Rp\|D(t+R)\|_H^2 = a_2(t)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.20) por u e usando a Desigualdade de Cauchy obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_E^p \leq \|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u(t)\|_H^2 + \|D(t)\|_H\|u(t)\|_H$$

Integrando de t a $t+R$ temos

$$\int_t^{t+R} \|u(\theta)\|_E^p \, d\theta \leq \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \|C(t+R)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_t^{t+R} \|u(\theta)\|_H^2 \, d\theta$$
$$+ \|D(t+R)\|_H \int_t^{t+R} \|u(\theta)\|_H \, d\theta$$

Pelo Lema 4.3.1, para $t - \tau > T_1$

$$\int_t^{t+R} \|u(\theta)\|_E^p \, d\theta \leq \frac{1}{2}\alpha(t) + R \|C(t+R)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \alpha(t+R)$$
$$+ R \|D(t+R)\|_H (\alpha(t+R))^{1/2} = a_3(t)$$

Usando o Lema Uniforme de Gronwall (Lema 1.1.2) temos

$$\|u(t+R)\|_E^p \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t)\right) e^{a_1} = \beta(t), \text{para todo} \quad t \geq \tau.$$

Fazendo $R = T_1$, obtido pelo Lema 4.3.1, temos $T_2 = 2T_1$ e assim,

$$\|u(t)\|_E^p \leq \beta(t),$$

para todo $t - \tau > T_2$. ■

Proposição 4.3.1 *A igualdade em* (4.16) *define um processo.*

Demonstração: Claramente temos que $U(\tau,\tau)u_0 = u_0$. Mostremos agora que dado qualquer $v \in H$ temos

$$U(t,s)v = U(t,\tau)U(\tau,s)v \tag{4.21}$$

Defina $v_0 = U(\tau,s)v$. Sabemos que $U(t,s)v$ e $U(t,\tau)U(\tau,s)v$ são soluções de (4.1), como a solução de (4.1) é única elas devem coincidir. Como v foi tomado arbitrário, temos (4.21).

Mostremos agora que $v \mapsto U(t,\tau)v$ é contínua para todo $v \in H$ e todo $t \geq \tau$. Tome $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de dados iniciais tal que $v_n \to v$ em H. Fixe qualquer $t, \tau \in \mathbb{R}$ tal que $t \geq \tau$. Pelo Teorema de Baras $u_n(t,\tau)v_n \to y(t,\tau)v$ em H quando $n \to \infty$. Para concluir basta mostrarmos que $y(t,\tau)v$ é solução de (4.1).

$$\|u_n(t,\tau) - \overline{x}\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u_n(s,\tau) - \overline{x}\|_H^2$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \langle C(\sigma,\tau)u_n(\sigma,x) + D(\sigma,\tau) - A\overline{x}, u_n(\sigma,\tau) - \overline{x}\rangle \, d\sigma$$

para todo $\tau \leq s \leq t \leq T$.

Tomando o limite, quando $n \to \infty$, na desigualdade acima e usando o Teorema da Convergência Dominada, onde para todo $n \in \mathbb{N}$ a função que domina $u_n(t)$ é dada pelo Lema 4.3.1, temos:

$$\|y(t,\tau) - \overline{x}\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|y(s,\tau) - \overline{x}\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \langle C(\sigma,\tau)y(\sigma,x) + D(\sigma,\tau) - A\overline{x}, y(\sigma,\tau) - \overline{x}\rangle \, d\sigma$$

para todo $\tau \leq s \leq t \leq T$.

Portanto, $y(t,\tau)v$ é uma solução fraca de (4.1). Como $F(t,u) = C(t,x)u - D(t,x) \in L^2(\tau,T;H)$, pois $\|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ e $\|D(t)\|_H$ são limitadas em limitados do tempo por hipótese e $\|u(t)\|_H$ é limitada por uma aplicação limitada em limitados do tempo pelo Lema 4.3.1, temos pela Proposição 1.2.2 que $y(t,\tau)v$ é uma solução forte de (4.1). ■

Observação 4.3.1 *Pelo Lema* 4.1.1 *o espaço* $E \subset\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ *então para cada* $t \in \mathbb{R}$ *o fecho da bola de centro zero e raio* $\beta(t)$ *em* H, $\overline{B_{\beta(t)}(0)}^H$, *forma uma família de um conjuntos compactos que atrai (pullback) no tempo* t *todos os subconjunto limitados de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *por* $\{U(t,s)\}_{t\geq\tau}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Portanto, pelo Teorema* 1.4.3 *o processo associado ao problema* (4.1) *tem um pullback attractor.*

Observação 4.3.2 *Se* $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ *é um processo associado ao problema* (4.1) *e* $\mathcal{A}$ *seu pullback attractor então* $\bigcup_{\tau\leq t}\mathcal{A}(\tau)$ *é limitado para cada* $t \in \mathbb{R}$.

4.3.2 Trajetórias completas extremas

Portanto, pela Observação 4.2.2 a equação (4.1) tem uma solução global e portanto pela Proposição 4.3.1 podemos definir o processo contínuo. Considerando as Observações 4.3.1 e 4.3.2 e o princípio da comparação, obtido no Teorema 3.5 em [26], pois temos que o resolvente de A é crescente pela Proposição 4.2.3, estamos nas condições do Teorema 3.2.2 e assim, garantimos a existência de trajetórias completas maximal e minimal para o pullback attractor associado ao problema (4.1).

Capítulo 5
Atrator Pullback e Trajetórias Extremas em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Neste capítulo mostraremos a existência de atrator no sentido pullback e de trajetórias completas extremas para problemas não autônomos em $\mathbb{R}^n$ governados pelo p-Laplaciano, $p > \max\{2, n/2\}$. Em contraste com o capítulo anterior não usaremos espaços com peso como auxiliar na nossa análise, o que nos exige lançar mão de um outro mecanismo para obter a existência de solução, a compacidade assintótica das soluções e, portanto, a existência do atrator. Para existência do atrator no sentido pullback e para existência das trajetórias completas extremas vamos supor adicionalmente que a solução é única.

Consideremos o seguinte problema:

$$
(5.1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + |u|^{p-2} u + u \in B(t,x,u), t \geq \tau \\ u(\tau) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}
$$

onde $p > \max\{2, n/2\}$, $\tau \in \mathbb{R}$ e abaixo listamos as condições que estamos impondo em B.

A.1 $B = B_1 + B_2$, onde $-B_1$ é um operador monótono e B_2 é o operador de Nemitskii associado a alguma aplicação $\widetilde{B} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujas propriedades serão descritas abaixo.

(i) Para cada par $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, se $y_n \in \widetilde{B}(t,x,s_n)$, $s_n \to s$, e $y_n \to y$ então $y \in \widetilde{B}(t,x,s)$;

(ii) Para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ temos $\widetilde{B}(t,x,0) = \{0\}$.

A.2 (caso $p < n$) Para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existe uma aplicação real positiva $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ crescente em t tal que

$$
\left|\widetilde{B}(t,x,s) - \widetilde{B}(t,x,r)\right| \leq L(t,x)\,|s-r|\left(|s|^{q-2} + |r|^{q-2} + 1\right), \forall \quad s, r \in \mathbb{R},
$$

com $2 < q < p$. Além disso, $L \in L^{p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{np/(np-(n-p)q)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{2p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{p/p-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^n))$.

A.3 Existem funções contínuas $c^- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ e $d^- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_-$, $c^- \in L^2(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^n))$ tais que para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$\widetilde{B}(t,x,s) \geq c^-(t,x)s + d^-(t,x), \forall s \in \mathbb{R}$$

Vamos supor ainda que $c^- \in L^{p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{2p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $d^- \in L^{p/p-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $c_t^- \in L^{2p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e $d_t^- \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, onde c_t^- e d_t^- denotam as derivadas de c^- e d^- com relação a t.

A.4 Existe uma função contínua $c^+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $c^+ \in L^2(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^n))$, tal que para qualquer $\delta \in \mathbb{R}$ podemos escolher $d^+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\widetilde{B}(t,x,s) \leq c^+(t,x)s + d^+(t,x), \forall s \geq -\delta$$

Além disso $c^+ \in L^{p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{2p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $d^+ \in L^{p/p-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $c_t^+ \in L^{2p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e $d_t^+ \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

A.5 Se $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_2$, qualquer que seja a seleção $\widetilde{b} \subset \widetilde{B}$, tem-se $\widetilde{b}(t,x,s_1) \leq \widetilde{b}(t,x,s_2)$, q.t.p $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Observação 5.0.3 *As condições acima enumeradas são suficientes para garantir a existência de ao menos uma solução para o Problema* (5.1). *A partir da Seção 5.3 vamos supor que esta solução é única. Uma forma de se garantir esta unicidade é supondo-se que B_2 é um operador globalmente Lipschitziano em $L^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $q = 2$ em A.2. Esta condição é bastante compatível com as impostas em [45, 46, 80] nos quais são consideradas apenas a parte monótona da perturbação, e em [77], onde $B = f(x,u) + g(t,x)$, ou seja, não há um termo que dependa simultaneamente de t e de u.*

A idéia de decompor o operador B em uma soma de operadores com o oposto de uma das partes sendo monótono é também adequada para se relaxar a condição de crescimento do lado direito em A.2, já que o expoente $q < 2$ é determinado basicamente pela Hipótese H.2 enunciada no início do Capítulo 2 (uma verificação deste fato está feita com detalhes na demonstração do Lema 5.0.3 a seguir). Assim, a grosso modo, estamos considerando B como soma de um termo que "decresce" e outro que descreve sua oscilação. Vamos levar em consideração apenas a parte que oscila e desprezar a parte decrescente. Assim, temos por certo que a condição de crescimento imposta a B_2 em A.2 poderia ser melhorada se explicitássemos o crescimento de B_1, já que pela Hipótese H.2 o crescimento de B_2 deve ser dominado por $-\Delta_p - B_1$. O mesmo artifício, de se decompor o operador perturbativo em uma soma em que o oposto de uma das partes é monótono, é usado em [28] para relaxar a condição de crescimento imposta em B. Para mais detalhes veja [28], Exemplos 3.1, 3.2 e Observação 3.5. Outra simplificação que faremos nas estimativas desta seção é tratar apenas o caso $p < n$ que, por englobar as situações que envolvem as imersões de Sobolev mais restritas, merece naturalmente maior cuidado.

Como o foco principal da discussão que fazemos neste capítulo está em estabelecer a existência de solução de forma que se possa estender os resultados de comparação a este novo contêxto, vamos tratar B como se fosse B_2, sem considerar sua parte monótona. A partir da Seção 5.3, quando houver necessidade vamos considerar o termo perturbativo globalmente Lipschitziano.

Definição 5.0.1 *A função $u : [\tau, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (5.1) em $[\tau, T]$ se, dado $\delta > \tau$, $u \in L^p(\delta, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$, $u(\tau, x) = u_0(x)$ e u satisfaz (5.1) no sentido das distribuições, isto é, existe $b \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ com $b(t, x) \in B(t, x, u(t, x))$ q.t.p em $[\tau, T] \times \mathbb{R}^n$, tal que*

$$
\begin{aligned}
& \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} -u(t,x)\tfrac{\partial v}{\partial t}(t,x)dxdt + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^{p-2}\, \nabla u(t,x) \nabla v(t,x)dxdt \\
+ \quad & \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^{p-2}\, u(t,x)v(t,x)dxdt + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)v(t,x)dxdt \\
- \quad & \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} b(t,x)v(t,x)dxdt = 0
\end{aligned}
$$

para todo $v \in C_c^\infty((\tau, T) \times \mathbb{R}^n)$.

Observação 5.0.4 *É uma consequência da definição acima que para todo* $v \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(\tau, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ *e qualquer solução fraca* u*, no sentido acima, temos:*

$$\int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(t,x)dxdt + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^{p-2} \nabla u(t,x) \nabla v(t,x)dxdt$$
$$+ \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^{p-2} u(t,x)v(t,x)dxdt + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)v(t,x)dxdt$$
$$- \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} b(t,x)v(t,x)dxdt = 0$$

para detalhes veja [59].

O recurso que usaremos para exibir a existência de solução baseia-se na resolução de uma restrição da equação em (5.1) a uma sequência de bolas concêntricas com raio tendendo a infinito, de forma que, em cada bola, o problema possa receber um tratamento análogo ao feito no Capítulo 3 para domínios limitados. A cada restrição obtemos uma solução e assim exibimos uma sequência cujo "limite" é solução de (5.1). Impomos uma condição de fronteira de Dirichlet homogênea nos domínios menores que nos permite apelar para a teoria de operadores monótonos e desta forma usar os recursos que ela nos oferece. Em contrapartida, antes de passarmos a um processo de limite, temos que considerar restrições de tais soluções para podermos fixar uma norma e eliminar a condição artificial imposta no bordo.

Seja $r_j > 1$ uma sequência crescente de números reais tal que $r_j \to \infty$, quando $j \to \infty$. Seja $\Omega_{r_j} = B(0, r_j)$ a bola aberta de centro zero e raio r_j em $\mathbb{R}^n$. Agora considere o problema restrito a Ω_{r_j}:

$$\text{(5.2)} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_{r_j} - \operatorname{div}\left(\left|\nabla u_{r_j}\right|^{p-2} \nabla u_{r_j}\right) + |u_{r_j}|^{p-2} u_{r_j} + u_{r_j} \in B(t,x,u_{r_j}), t \geq \tau, x \in \Omega_{r_j} \\ u_{r_j}(\tau, x) = u_{0r_j}(x), \quad x \in \Omega_{r_j} \\ u_{r_j}(\tau, x) = 0, x \in \partial\Omega_{r_j} \end{cases}$$

onde $u_{0r_j}(x)$ é a restrição a Ω_{r_j} de $\psi_{r_j}(|x|)u_0(x)$, e $\psi_{r_j} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ tal que

$$\text{(5.3)} \qquad \psi_{r_j}(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq r_j - 1 \\ 0 \leq \psi_{r_j}(\xi) \leq 1, & r_j - 1 < \xi < r_j \\ 0, & \xi \geq r_j \end{cases}$$

e além disso max $\left\{ \left|\psi'_{r_j}(\xi)\right|, \left|\psi''_{r_j}(\xi)\right| \right\} \leq C$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^+$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.

Observação 5.0.5 *Quando não houver risco de confusão vamos usar a mesma notação para uma função definida em $\mathbb{R}^n$ e a restrição dela a um determinado conjunto.*

Observação 5.0.6 *Observemos que $u_{0r_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, $u_{0r_j} \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, quando $r_j \to \infty$.*

De fato,

$$\begin{aligned}
\left\| u_{0r_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| u_{r_j}(x) \right|^2 dx = \int_{\Omega_{r_j}} \left| \psi_{r_j}(|x|) \right|^2 |u_0(x)|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega_{r_j}} |u_0(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2 dx < \infty \\
\left\| u_{0r_j} - u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| u_{0r_j}(x) - u_0(x) \right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi_{r_j}(|x|) - 1 \right|^2 |u_0(x)|^2 dx \\
&= \int_{|x| \leq r_j - 1} \left| \psi_{r_j}(|x|) - 1 \right|^2 |u_0(x)|^2 dx \\
&+ \int_{|x| > r_j - 1} \left| \psi_{r_j}(|x|) - 1 \right|^2 |u_0(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Para $|x| \leq r_j - 1$ temos que $\psi_{r_j}(|x|) = 1$ e para $|x| > r_j - 1$ temos $0 \leq \psi_{r_j}(|x|) < 1$, então

$$\left\| u_{0r_j} - u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{|x| > r_j - 1} |u_0(x)|^2 dx \to 0,$$

quando $r_j \to \infty$, pois $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ considere o operador que a cada elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})$ associa o elemento de $W^{-1,p'}(\Omega_{r_j})$, $A^{r_j} u : W_0^{1,p}(\Omega_{r_j}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}
A^{r_j} u(v) &= \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega_{r_j}} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \\
&+ \int_{\Omega_{r_j}} u(x) v(x) dx
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Observação 5.0.7 *A realização em $L^2(\Omega_{r_j})$ do operador A^{r_j} definido em (5.4) é maximal monótona e é subdiferencial da função $\phi_{r_j} : L^2(\Omega_{r_j}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por*

$$\phi_{r_j}(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega_{r_j}} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} |u|^p dx \right] + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{r_j}} |u|^2 dx, u \in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j}) \\ +\infty \quad \textit{caso contrário} \end{cases} \tag{5.5}$$

No que segue usaremos a mesma notação A^{r_j} para indicarmos a realização $A^{r_j}_{L^2}$ de A^{r_j} em $L^2(\Omega_{r_j})$, dada por

$$D(A^{r_j}_{L^2}) = \{u \in W^{1,p}_0(\Omega_{r_j}); A^{r_j}u \in L^2(\Omega_{r_j})\}, \qquad e\ A^{r_j}_{L^2}u = A^{r_j}u,\ para\ u \in D(A^{r_j}_{L^2}).$$

O próximo resultado garante que, em domínios limitados, as condições A.1 e A.2 implicam nas hipóteses H.1 e H.2 enunciadas no Capítulo 2 e assim, bastam para assegurar a existência local de solução do problema (5.2).

Lema 5.0.3 *Dado Ω_{r_j}, seja $B : L^2(\Omega_{r_j}) \to L^2(\Omega_{r_j})$ dado por $B(t,u)(x) \doteq \widetilde{B}(t,x,u(x))$, $\forall t \geq 0$ e q.t.p em Ω_{r_j}. Então para cada dado inicial $u_0 \in L^2(\Omega_{r_j})$ existe uma solução local no sentido da Definição 2.1.1 do problema*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u + A^{r_j}u \in B(t,u), t \geq \tau, \\ u(\tau) = u_0, \end{cases}$$

Demonstração: Basicamente precisamos garantir que os operadores A^{r_j} e B acima estão nas condições do Teorema 2.1.2.

As condições A.1 (i)-(iii), claramente implicam que H.1 está satisfeita. Mostremos agora que A.2 implica H.2. Seja $b \in B(t,u)$ com $u \in W^{1,p}_0(\Omega_{r_j})$. Então

$$\|b\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \int_{\Omega_{r_j}} |L(t,x)|^2|u(x)|^{2q-2} + 2|L(t,x)|^2|u(x)|^q + |L(t,x)|^2|u(x)|^2 dx$$

Vamos estimar o primeiro termo à direita.

$$\int_{\Omega_{r_j}} |L(t,x)|^2|u(x)|^{2q-2}dx \leq \|L(T)\|^2_{L^\infty(\Omega_{r_j})} \left(\int_{\Omega_{r_j}} |u(x)|^{2\theta}dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_{\Omega_{r_j}} |u(x)|^{(2q-4)\theta'}dx\right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

com $\theta = \frac{np}{2(n-p)}$ e $\theta' = \frac{np}{np-2(n-p)}$ expoente conjungado de θ. Como $\frac{2(q-2)np}{np-2(n-p)} \leq \frac{np}{n-p}$, pois

$$\begin{aligned} \frac{2(q-2)}{np-2(n-p)} &\leq \frac{2(q-2)}{n(p-2)+(n-2p)(p-2)} \\ &\leq \frac{q-2}{p-2} \cdot \frac{2}{2n-2p} \\ &\leq \frac{1}{n-p}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{r_j}} |u(x)|^2|u(x)|^{2q-4}dx &\leq \|u\|^2_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega_{r_j})}\|u\|^{2(q-2)}_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega_{r_j})} \\ &= \|u\|^{2(q-1)}_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega_{r_j})} \leq \frac{\xi^r}{r}\|u\|^{2(p-1)}_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega_{r_j})} + \frac{1}{r'\xi^{r'}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde $r = \frac{p-1}{q-1} > 1$ e ξ pode ser tomada tão pequena quanto se queira. Por outro lado temos $-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u + u = \partial\phi_{r_j}(u)$. Multiplicando por u teremos

$$\int_{\Omega_{r_j}} |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} |u(x)|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} |u(x)|^2 dx \leq \left\|\partial\phi_{r_j}(u)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})} \|u\|_{L^2(\Omega_{r_j})}$$

Logo

$$\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} \leq \left\|\partial\phi_{r_j}(u)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})} \|u\|_{L^2(\Omega_{r_j})}$$

de onde concluimos que

$$\|u\|^{2p-2}_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega_{r_j})} \leq C \left\|\partial\phi_{r_j}(u)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}.$$

para alguma constante C. Portanto qualquer que seja $t \in [\tau, T]$

$$\|b\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \|L(T)\|^2_{L^\infty(\Omega_{r_j})} \left(\frac{\xi^r}{r} C \left\|\partial\phi_{r_j}(u)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \frac{1}{r'\xi^{r'}} + p\phi_{r_j}(u)\right) \tag{5.7}$$

∎

5.0.3 Estimativas em domínios limitados

Como fizemos anteriormente, vamos considerar os seguintes problemas auxiliares

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w_{r_j} + A^{r_j}w_{r_j} = C^+(t)w_{r_j} + D^+(t), t \geq \tau \\ w_{r_j}(\tau) = (u_{0_{r_j}})^+ \in L^2(\Omega_{r_j}) \end{cases} \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_{r_j} + A^{r_j}v_{r_j} = C^-(t)v_{r_j} + D^-(t), t \geq \tau \\ v(\tau) = (u_{0_{r_j}})^- \in L^2(\Omega_{r_j}) \end{cases}, \tag{5.9}$$

onde c^+, c^-, d^+ e d^-, dados por A.3 e A.4, definem os operadores C^-, C^+, D^-, D^+, respectivamente em cada Ω_{r_j}. Pela Proposição 1.2.3 os problemas acima são globalmente bem postos. Além disso, temos:

Lema 5.0.4 *Se w_{r_j} é solução do problema (5.8) então, dado $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \alpha$, para todo $t \geq \tau$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (5.8) por w_{r_j} temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &+ \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla w_{r_j}(t,x)|^p + \left|w_{r_j}(t,x)\right|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} \left|w_{r_j}(t,x)\right|^2 \\ &\leq \int_{\Omega_{r_j}} |C^+(t,x)| \left|w_{r_j}(t,x)\right|^2 dx + \int_{\Omega_{r_j}} |D^+(t,x)| \left|w_{r_j}(t,x)\right| dx \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por uma constante $\eta > 0$ e usando Desigualdade de Young onde $r' = \frac{p}{p-2}$, $r = \frac{p}{2}$ e $p' = \frac{p}{p-1}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &+ \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla w_{r_j}(t)|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} \left|w_{r_j}(t)\right|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} \left|w_{r_j}(t)\right|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{r' \eta^{r'}} \|C^+(t)\|^{r'}_{L^{p/p-2}(\Omega_{r_j})} + \frac{\eta^r}{r} \left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})} \\
&+ \frac{1}{p'\eta^{p'}} \|D^+(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega_{r_j})} + \frac{\eta^p}{p} \left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})}
\end{aligned}$$

Escolha $\eta > 0$ tal que $\widetilde{k} = (1 - (\eta^r/r) - (\eta^p/p)) > 0$ então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &+ \widetilde{k}\left[\int_{\Omega_{r_j}} |\nabla w_{r_j}(t)|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} \left|w_{r_j}(t)\right|^p dx\right] + \left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \\
&\leq \frac{1}{r'\eta^{r'}} \|C^+(t)\|^{r'}_{L^{p/p-2}(\Omega_{r_j})} + \frac{1}{p'\eta^{p'}} \|D^+(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega_{r_j})}
\end{aligned}$$

Integrando de τ a t temos

$$\begin{aligned}
\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &+ 2\widetilde{k}\left[\int_\tau^t \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla w_{r_j}(\sigma)|^p dx d\sigma + \int_\tau^t \int_{\Omega_{r_j}} \left|w_{r_j}(\sigma)\right|^p dx d\sigma\right] \\
&+ \int_\tau^t \left\|w_{r_j}(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} d\sigma \leq \left\|u_{0r_j}\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \frac{2}{r'\eta^{r'}} \int_\tau^t \|C^+(\sigma)\|^{p/p-2}_{L^{p/p-2}(\mathbb{R}^n)} d\sigma \\
&+ \frac{2}{p'\eta^{p'}} \int_\tau^t \|D^+(\sigma)\|^{p/p-1}_{L^{p/p-1}(\mathbb{R}^n)} d\sigma \\
&\leq \left\|u_{0r_j}\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \frac{2}{r'\eta^{r'}} \int_{\mathbb{R}} \|C^+(\sigma)\|^{p/p-2}_{L^{p/p-2}(\mathbb{R}^n)} d\sigma \\
&+ \frac{2}{p'\eta^{p'}} \int_{\mathbb{R}} \|D^+(\sigma)\|^{p/p-1}_{L^{p/p-1}(\mathbb{R}^n)} d\sigma
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &+ 2\widetilde{k}\left[\int_\tau^t \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla w_{r_j}(\sigma)|^p dx d\sigma + \int_\tau^t \int_{\Omega_{r_j}} \left|w_{r_j}(\sigma)\right|^p dx d\sigma\right] \\
&+ \int_\tau^t \left\|w_{r_j}(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} d\sigma \leq \alpha(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) := \alpha
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde α é uma constante que depende do dado inicial $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. ■

Lema 5.0.5 *Se $w_{r_j}(t)$ é solução de (5.8), dados $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $T_1 > 0$, existe uma constante $\beta > 0$ tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} \leq \beta$ para todo $t \geq \tau + T_1$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (5.8) por $\frac{d}{dt}w_{r_j}$ e usando as Desigualdades de Hölder e de Young temos

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{p}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} + \tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{2}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &\leq \tfrac{p-2}{p}\left\|C^+(t)\right\|^{2p/p-2}_{L^{2p/p-2}(\Omega_{r_j})} \\ &+ \tfrac{2}{p}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})} + \tfrac{1}{2}\left\|D^+(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}\end{aligned}$$

Queremos usar o Lema 1.1.2. Assim, primeiro notemos que

De (5.10) e da Hipótese A.4 segue que, fixado $R > 0$:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+R}\frac{p-2}{p}\left\|C^+(\sigma)\right\|^{2p/p-2}_{L^{2p/p-2}(\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}\sigma + \int_t^{t+R}\frac{2}{p}\left\|w_{r_j}(\sigma)\right\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})}\mathrm{d}\sigma + \int_t^{t+R}\frac{1}{2}\left\|D^+(\sigma)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}\sigma \\ \leq \left[\frac{p-2}{p}\int_{\mathbb{R}}\left\|C^+(t)\right\|^{2p/p-2}_{L^{2p/p-2}(\mathbb{R}^n)}dt + \frac{2R}{p\widetilde{k}}\alpha \right. \\ \left. +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left\|D^+(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\right] := a_2\end{aligned}$$

Também de (5.10) temos para $t \geq \tau$

$$\int_t^{t+R}\left\|w_{r_j}(\sigma)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}\mathrm{d}\sigma + \int_t^{t+R}\left\|w_{r_j}(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}d\sigma \leq \frac{\alpha}{2\widetilde{k}} := a_3$$

Portanto, pelo Lema 1.1.2

$$\left\|w_{r_j}(t+R)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} \leq \left(\frac{a_3}{R} + a_2\right) := \beta, \quad \forall t \geq \tau.$$

Fazendo $R = T_1$ temos

$$\left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} \leq \beta, \quad \forall\, t - \tau > T_1 \tag{5.11}$$

uniformemente em j. ■

Lema 5.0.6 *Se w_{r_j} é solução de (5.8), dados $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $T_2 > 0$, existe uma constante $\xi > 0$ tal que, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\left\|\frac{d}{dt}w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \xi$ para todo $t \geq \tau + T_2$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Derivando a primeira equação de (5.8) e denotando $\frac{d}{dt}w_{r_j}(t) := v$ e as derivadas de C^+ e D^+, em relação a t, respectivamente por C_t^+ e D_t^+, obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}v(t) - div(|\nabla w_{r_j}|^{p-2}\nabla v(t)) - (p-2)div(|\nabla w_{r_j}(t)|^{p-4}\nabla w_{r_j}(t)\nabla w_{r_j}(t)\cdot\nabla v(t)) \\ &\quad + (p-2)|w_{r_j}(t)|^{p-4}w_{r_j}(t)w_{r_j}(t)\cdot v(t) + |w_{r_j}(t)|^{p-2}v(t) + v(t) \\ &\quad = C_t^+(t,x)w_{r_j}(t) + C^+(t,x)v(t) + D_t^+(t,x)\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por v obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &\leq \left(\left\|C_t^+(t)w_{r_j}(t)+D_t^+(t)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})}+\|C^+(t)v(t)\|_{L^2(\Omega_{r_j})}\right)\|v(t)\|_{L^2(\Omega_{r_j})} \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|C_t^+(t)w_{r_j}(t)+D_t^+(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_{r_j}}|C^+(t,x)|^2|v(t)|^2dx+\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}
\end{aligned}$$

usando a hipótese que $C^+ \in L^2(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^n))$ temos

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \left\|C_t^+w+D_t^+\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}+\left[\left\|C^+(t)\right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+2\right]\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega_{rj})}$$

Nosso objetivo é usar o Lema 1.1.2. Assim, seja $R>0$ fixo e arbitrário. Da condição A.4 temos que existe um número real a_1 tal que

$$\int_t^{t+R}\left\|C^+(\sigma)\right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+2\,\mathrm{d}\sigma \leq a_1,$$

Além disso

$$\left\|C_t^+(t)w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \frac{p-2}{p}\left\|C_t^+(t)\right\|^{p/p-2}_{L^{p/p-2}(\mathbb{R}^n)}+\frac{2}{p}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})}$$

Assim, de A.4 e de (5.10) temos que existe um número real a_2 tal que

$$\int_t^{t+R}\left\|C_t^+(\sigma)w_{r_j}(\sigma)+D_t^+(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}\mathrm{d}\sigma \leq a_2$$

Por outro lado, multiplicando (5.8) por $\frac{d}{dt}w_{r_j}$ e usando as Desigualdades de Hölder e de Young temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\|\frac{d}{dt}w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &+ \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|C^+(t)w_{r_j}(t)+D^+(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}
\end{aligned}$$

Integrando de t a $t+R$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_t^{t+R}\left\|\frac{d}{d\sigma}w_{r_j}(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}\mathrm{d}\sigma &\leq \frac{1}{p}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}+\frac{1}{2}\left\|w_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \\
&+ \int_t^{t+R}\frac{1}{2}\left\|C^+(\sigma)w_{r_j}(\sigma)+D^+(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

Como anteriormente, segue de A.4, de (5.10), e dos dois últimos lemas que, dado $T_1 > 0$ existe a_3 tal que, se $t > \tau + T_1$,

$$\int_t^{t+R} \left\| \frac{d}{dt} w_{r_j}(\sigma) \right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} d\sigma \leq a_3$$

Assim, segue do Lema 1.1.2 que para $t - \tau > T_1$,

$$\left\| \frac{d}{dt} w_{r_j}(t+R) \right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \left(\frac{a_3}{R} + a_2 \right) e^{a_1} := \xi$$

Fazendo $T_1 = R$ como no lema anterior,

$$\left\| \frac{d}{dt} w_{r_j}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \xi, \quad \forall\, t - \tau > T_2 = 2T_1. \tag{5.12}$$

■

Dos três últimos lemas e do Teorema 1.2.3 segue o seguinte resultado:

Lema 5.0.7 *Se w_{r_j} é solução de* (5.8), *dados $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $T_3 > 0$, existe uma constante $\zeta > 0$ tal que, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $\left\|w_{r_j}(t)\right\|_{L^\infty(\Omega_{r_j})} \leq \zeta$ para todo $t \geq \tau + T_3$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: A demonstração segue diretamente do Teorema 1.2.3. No entanto, devemos tomar o cuidado de observar que a estimativa obtida neste lema é independente do domínio Ω_{r_j}. De fato, temos que, para cada $t > \tau + T_3$, $\left\|w_{r_j}(t)\right\|_{L^\infty(\Omega_{r_j})}$ é menor do que uma constante que depende de $\left\|w_{r_j}(t)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})}$, $\left\|\frac{d}{dt} w_{r_j}(t)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})}$, $\|C^+(t)\|_{L^2(\Omega_{r_j})}$, $\|D^+(t)\|_{L^2(\Omega_{r_j})}$, e da medida de A_{k_0}, onde $A_{k_0} = \{x \in \Omega_{r_j}; w_{r_j}(t,x) > k_0\}$, para algum $k_0 > 0$. Para nos assegurarmos que $|A_{k_0}|$ é independente de j, basta notarmos que, para cada $t > \tau$,

$$\begin{aligned} k_0^2|A_{k_0}| + \int_{\Omega_{r_j} \setminus A_{k_0}} |w_{r_j}(t,x)|^2 dx &\leq \int_{A_{k_0}} k_0^2 dx + \int_{\Omega_{r_j} \setminus A_{k_0}} |w_{r_j}(t,x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_{r_j}} |w_{r_j}(t,x)|^2 dx \leq \alpha^2, \end{aligned}$$

onde α é independente de j, conforme demonstrado no Lema 5.0.4. Assim o resultado segue do Teorema 1.2.3, das condições impostas em C^+ e D^+ em A.4, e dos Lemas 5.0.4 e 5.0.6. ■

Observação 5.0.8 *Como as condições em C^- e D^- impostas em A.3 são análogas às condições em A.4, então as estimativas obtidas nos quatro últimos lemas também podem ser obtidas para as soluções de* (5.9).

Lema 5.0.8 *Se u_{r_j} é solução de* (5.2), *dados T_4 e $u_{0r_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $\eta > 0$ tal que $\|u_{r_j}(t)\|_{L^\infty(\Omega_{r_j})} \leq \eta$ para todo $t > \tau + T_4$, t pertencente ao intervalo maximal de existência de u_{r_j}, qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $t > \tau + T_4$, tal que $u_{r_j}(t)$ esteja definida. Da condição A.3 e do Teorema 2.3.4 segue que $u_{r_j}(t) \geq v_{r_j}(t)$, onde v_{r_j} é solução de 5.9. Logo, do Lema 5.0.7 e da Observação 5.0.8, existe uma constante k_- tal que $u_{r_j}(t) \geq k_-$. Da condição A.4 e do Teorema 2.3.4, é possível escolher D^+ tal que $u_{r_j}(t) \leq w_{r_j}(t)$, onde w_{r_j} é solução de 5.8 . Assim, para tais valores de t, em vista do Lema 5.0.7, existe $\eta > 0$ tal que $\|u_{r_j}(t)\|_{L^\infty(\Omega_{r_j})} \leq \eta$. ■

Corolário 5.0.1 *Se u_{r_j} é solução de* (5.2), *dados T_5 e $u_{0r_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\|u_{r_j}(t)\|_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \lambda$ para todo $t > \tau + T_5$, t pertencente ao intervalo maximal de existência de u_{r_j}, qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: De fato, para $t - \tau > T_5$ temos $v_{r_j}(t,x) \leq u_{r_j}(t,x) \leq w_{r_j}(t,x)$, x q.t.p em Ω_{r_j}. Então $|u_{r_j}(t,x)| \leq \max\left\{|v_{r_j}(t,x)|, |w_{r_j}(t,x)|\right\} \leq |v_{r_j}(t,x)| + |w_{r_j}(t,x)|$. Isto implica que $\|u_{r_j}(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq C\,\left\{\|v_{r_j}(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}, \|w_{r_j}(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}\right\}$. ■

A observação abaixo garante que essencialmente, para efeito de análise assintótica no sentido pullback, podemos dar ao problema (5.2) o mesmo tratamento que daríamos a um problema com perturbação globamente Lipschitz.

Observação 5.0.9 *Seja η dada pelo Lema 5.0.8, e consideremos o conjunto*

$$\mathcal{L} = \left\{u_{r_j} \in L^2(\Omega_{r_j}); \|u_{r_j}(t)\|_{L^\infty(\Omega_{r_j})} \leq \eta\right\}.$$

Por A.2 temos que restrito a $\mathcal{L}$ o operador B satisfaz uma condição global de Lipschitz.

Lema 5.0.9 *Seja u_{r_j} uma solução de* (5.2). *Dados T_6 e $u_{0r_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $\gamma > 0$ tal que $\|u_{r_j}(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} \leq \gamma$ para todo $t > \tau + T_6$, t pertencente ao intervalo maximal de existência de u_{r_j}, qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Multiplicando a equação em (5.2) por $\frac{d}{dt}u_{r_j}$ e aplicando a Desigualdade de Young obtemos

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{d}{dt}u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \frac{d}{dt}\phi_{r_j}(u_{r_j}(t)) \leq \frac{1}{2}\|b(t)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}$$

com $b(t,x) \in B(t,x,u_{r_j}(t))$. Pela Observação 5.0.9, podemos supor B satisfazendo uma condição global de Lipschitz para $t \in [\tau + T_6, T_{max}]$, onde $[\tau, T_{\max})$ é o intervalo maximal de existência de u_{r_j}. Mais precisamente, de A.2 temos

$$|b(t,x)| \leq |L(t,x)|(\eta+1)|u_{r_j}(t,x)|$$

Então para $t - \tau > T_6$

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_{r_j}} |L(t,x)|^2(\eta+1)^2|u_{r_j}(t,x)|^2 dx$$

Integrando de s a t com $[s,t] \subset (\tau + T_6, T_{\max})$,

(5.13)
$$\begin{aligned}\left\|u_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} &\leq \left\|u_{r_j}(s)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} + \frac{p}{2}\left\|u_{r_j}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \\ &+ \frac{p}{2}\left(\frac{p(\eta+1)^2}{p-2}\int_s^t \|L(\sigma)\|^{\frac{2p}{p-2}}_{L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega_{r_j})} d\sigma + \int_s^t \left\|u_{r_j}(\sigma)\right\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})} d\sigma\right)\end{aligned}$$

Agora notemos que, ao multiplicarmos a equação em (5.2) por u_{r_j}, obtemos, como no Lema 5.0.4,

(5.14)
$$\begin{aligned} k\left(\int_{\tau+T_6}^t \|\nabla u_{r_j}(\sigma)\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})} d\sigma\right. &+ \left.\int_{\tau+T_6}^t \|u_{r_j}(\sigma)\|^p_{L^p(\Omega_{r_j})} d\sigma + \int_{\tau+T_6}^t \left\|u_{r_j}(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} d\sigma\right) \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|u(\tau+T_6)\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \\ &+ \frac{\zeta p}{p-2}\int_{\tau+T_6}^t \left(\|L(\sigma)\|^{\frac{p}{p-2}}_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^n)}(\eta+1)\right) d\sigma \end{aligned}$$

para algum $k > 0$ e ζ suficientemente pequeno.

Integrando novamente 5.13 em s de $\tau + T_6$ a T temos

$$\begin{aligned}\left\|u_{r_j}(t)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}[T - (\tau+T_6)] &\leq \textstyle\int_{\tau+T_6}^T \left\|u_{r_j}(s)\right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})} ds \\ &+ \frac{p}{2}\int_{\tau+T_6}^T \left\|u_{r_j}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} ds + C(u_0, L)[T - (\tau+T_6)]\end{aligned}$$

onde $C(u_0, L)$ é uma constante que depende das normas de $L(t,x)$ em $L^{p/p-2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ e $L^{2p/p-2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, e também da norma de u_0 em $L^2(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 5.0.2 *Se u_{r_j} é solução de* (5.2), *u_{r_j} está globalmente definida.*

Lema 5.0.10 *Se u_{r_j} é solução de* (5.2) *então, dados $T_0 > 0$ e $t > \tau + T_0$,*

$$u_{r_j} \in L^2(\tau + T_0, T; L^2(\Omega_{r_j})) \cap L^p(\tau + T_0, T; W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})) \cap C(\tau + T_0, T; L^2(\Omega_{r_j})),$$

e $\{u_{r_j}\}$ é uma sequência limitada neste espaço.

Demonstração: Multiplicando a primeira equação do problema (5.2) por u_{r_j} temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla u_{r_j}(x)|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}(x)|^p dx + \int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}(x)|^2 dx \\ \leq \int_{\Omega_{r_j}} b(t,x,u_{r_j}) u_{r_j} dx \\ \leq \int_{\Omega_{r_j}} L(t,x)|u_{r_j}|^2(\eta+1) dx \\ \leq \int_{\Omega_{r_j}} \frac{1}{r' \lambda^{r'}} |(\eta+1)L(t,x)|^{r'} + \frac{\lambda^r}{r}|u_{r_j}(t,x)|^{2r} dx\end{aligned}$$

para algum $\lambda > 0$. Tomando $r = \frac{p}{2}$ temos $r' = \frac{p}{p-2}$, fazendo λ tão pequeno tal que $k_1 := (1 - \lambda^r/r) > 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{r_j}\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla u_{r_j}(x)|^p dx + k_1 \int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}(x)|^p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}(x)|^2 dx \\ \leq \int_{\Omega_{r_j}} \frac{1}{r'\lambda^{r'}} |(\eta+1)L(t,x)|^{p/p-2} dx\end{aligned}$$

Logo, dado T_0, integrando de $\tau + T_0$ a T temos,

$$\begin{aligned}\left\|u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + 2k_1 \left[\int_{\tau+T_0}^t \int_{\Omega_{r_j}} |\nabla u_{r_j}(x)|^p dxdt + \int_{\tau+T_0}^t \int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}(x)|^p dxdt\right] \\ + \int_{\tau+T_0}^t \int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}(x)|^2 dxdt \\ \leq \left\|u_{r_j}(\tau+T_0)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + k_2 \int_{\tau+T_0}^t \int_{\Omega_{r_j}} |(\eta+1)L(t,x)|^{p/p-2} dxdt \leq \delta_1\end{aligned}$$

(5.15)

onde δ_1 é uma constante que depende das normas de $L(t,x)$ em $L^{p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, de η (obtido no Lema 5.0.8), e também da norma de u_0 em $L^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Lema 5.0.11 *Seja u_{r_j} uma solução de* (5.2). *Dados T_7 e $u_{0r_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $\kappa > 0$ tal que $\left\|\frac{d}{dt}u_{r_j}(t)\right\|_{L^2(T_7,T;L^2(\Omega_{r_j}))} \leq \kappa$, qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Novamente, como na demonstração do Lema 5.0.9, multiplicando a equação em (5.2) por $\frac{d}{dt}u_{r_j}$ e aplicando a Desigualdade de Young obtemos

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{d}{dt}u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} + \frac{d}{dt}\phi_{r_j}(u_{r_j}(t)) \leq \frac{1}{2}\left(\eta+1)\|L(T)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_{r_j}(t,x)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})}$$

O resultado segue integrando a desigualdade acima em t de T_7 a T e usando as estimativas obtidas no Corolário 5.0.1 e nos Lemas 5.0.9 e 5.0.10. ■

Para finalizar, mostramos algumas inclusões que usaremos ao longo da próxima demonstração.

Lema 5.0.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio limitado e sejam $p > 2, p^{,}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{,}} = 1$. Então, dados $\tau, T \in \mathbb{R}$, $\tau \leq T$, as seguintes inclusões são verificadas:*

1. $L^2(\tau, T; L^2(\Omega)) \subset L^{p^{,}}(\tau, T; W^{-1,p^{,}}(\Omega))$.
2. $L^{p'}(\tau, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^2(\tau, T; L^2(\Omega)) \subset L^{p^{,}}(\tau, T; W^{-1,p^{,}}(\Omega))$.
3. *Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2$ domínios limitados com fronteira suave. Então*
$$L^{p'}(\tau, T; W^{-1,p'}(\Omega_2)) \subset L^{p'}(\tau, T; W^{-1,p'}(\Omega_1)).$$

Demonstração:

1 - Mostremos primeiramente que $L^p(\tau, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$. Seja $u \in L^p(\tau, T; W^{1,p}(\Omega))$ então como $p > 2$ temos:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\tau,T;L^2(\Omega))} &\leq \mathcal{K}(T,\tau)\,\|u\|_{L^p(\tau,T;L^2(\Omega))} \\
&= \mathcal{K}(T,\tau)\int_\tau^T \|u(t)\|^p_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq \widetilde{\mathcal{K}}(\Omega,T,\tau)\int_\tau^T \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)}\,dt \\
&\leq \widetilde{\mathcal{K}}(\Omega,T,\tau)\int_\tau^T \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\Omega)}\,dt \\
&= \widetilde{\mathcal{K}}(\Omega,T,\tau)\int_\tau^T \|u(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,dt \\
&= \widetilde{\mathcal{K}}(\Omega,T,\tau)\,\|u\|_{L^p\left(\tau,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)} \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Portanto, $L^2(\tau, T; L^2(\Omega)) \subset L^{p'}(\tau, T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

2- Segue diretamente do item anterior.

3- Suponha $u \in L^{p'}(\tau, T; W^{-1,p'}(\Omega_2))$. Para t qtp em $[\tau, T]$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega_1)} &= \sup_{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega_1); \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_1)} \leq 1\}} \left| \int_{\Omega_1} u(t,x)v(x)dx \right| \\ &= \sup_{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega_1); \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_1)} \leq 1\}} \int_{\Omega_1} u(t,x)v(x)dx \end{aligned} \tag{5.17}$$

Esta última igualdade é possível, pois se $v \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$ e $\int_{\Omega_1} u(x)v(x)dx \leq 0$ então, como $-v \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$ temos que $\int_{\Omega_1} u(x)v(x)dx \geq 0$. Observemos ainda que, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$ se ainda denotarmos por v a prolongação canônica por 0 fora de Ω_1, então $v \in W_0^{1,p}(\Omega_2)$ ([12], Proposição IX.18). Portanto,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega_1)} &= \sup_{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega_1); \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_1)} \leq 1\}} \int_{\Omega_1} u(t,x)v(x)dx \\ &\leq \sup_{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega_2); \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_2)} \leq 1\}} \int_{\Omega_2} u(t,x)v(x)dx \\ &= \|u(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega_2)} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p'}(\tau,T;W^{-1,p'}(\Omega_1))} &= \int_\tau^T \|u(t)\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega_1)} dt \\ &\leq \int_\tau^T \|u(t)\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega_2)} dt \\ &= \|u\|_{L^{p'}(\tau,T;W^{-1,p'}(\Omega_2))} \end{aligned}$$

■

5.0.4 Existência de solução

Agora podemos enunciar o teorema que garante a existência de solução para problemas do tipo (5.1) em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.0.1 *Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$ quaisquer com $T > \tau$ e suponha que A.1-A.4 são satisfeitas. Então* (5.1) *tem uma solução fraca, no sentido da definição 5.0.1, para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Seja $\{r_j\}$ uma sequência crescente de números reais com $r_j > 1$ tal que $r_j \to \infty$, quando $j \to \infty$. Seja $\Omega_{r_j} = B(0, r_j)$ a bola aberta de centro zero e raio r_j em $\mathbb{R}^n$. Dado $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, seja $\{u_{r_j}\}$ uma sequência de soluções de (5.2). Ou seja, $u_{r_j} \in C([\tau, T]; L^2(\Omega_{r_j}))$ e existe $b^{r_j} \in L^2(\tau, T; L^2(\Omega_{r_j}))$ com $b^{r_j}(t,x) \in B(t, x, u_{r_j}(t))$, q.t.p. $(t,x) \in [\tau, T] \times \Omega_{r_j}$, tal que

$$\frac{d}{dt} u_{r_j} + A^{r_j} u_{r_j} = b^{r_j}, \tag{5.18}$$

q.t.p $(t,x) \in (\tau, T) \times \Omega_{r_j}$. Estendemos cada u_{r_j} definindo-a em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$\widehat{u}_{r_j}(x) = \begin{cases} u_{r_j}(x)\psi_{r_j}(|x|) & \text{em} \quad B(0, r_j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.19}$$

Temos que, dado $\delta > \tau$, qualquer que seja $T > \delta$, $\widehat{u}_{r_j}$ é uma sequência limitada em

$$L^p(\delta, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$$

e $\frac{d}{dt}\widehat{u}_{r_j}$ é limitada em $L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. Verificaremos inicialmente que $\widehat{u}_{r_j}$ é uniformemente limitado em $L^p(\delta, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^p(\delta,T;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))} = \textstyle\int_\delta^T \left\|\widehat{u}_{r_j}(t)\right\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} dt \\
= \;& \textstyle\int_\delta^T \left\|\nabla\widehat{u}_{r_j}(t)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\widehat{u}_{r_j}(t)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} dt \\
= \;& \textstyle\int_\delta^T \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla(u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|))\right|^p + \left|u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|)\right|^p dxdt \\
= \;& \textstyle\int_\delta^T \int_{|x|\le r_j-1} \left(\left|\nabla u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|) + u_{r_j}(t,x)\nabla\psi_{r_j}(|x|)\right|^p + \left|u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|)\right|^p\right) dxdt \\
+ \;& \textstyle\int_\delta^T \int_{r_j-1\le|x|\le r_j} \left(\left|\nabla u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|) + u_{r_j}(t,x)\nabla\psi_{r_j}(|x|)\right|^p + \left|u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|)\right|^p\right) dxdt
\end{aligned}$$

Da definição de ψ_{r_j} temos

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^p(\delta,T;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))} &\le \int_\delta^T \int_{|x|\le r_j-1} \left|\nabla u_{r_j}(t,x)\right|^p + \left|u_{r_j}(t,x)\right|^p dxdt \\
&+ \int_\delta^T \int_{r_j-1\le|x|\le r_j} \left|\nabla u_{r_j}(t,x) + Cu_{r_j}(t,x)\right|^p + \left|u_{r_j}(t,x)\right|^p dxdt \\
&\le \left\|u_{r_j}\right\|^p_{L^p(\delta,T;W_0^{1,p}(\Omega_{r_j}))} + \left\|\nabla u_{r_j} + Cu_{r_j}\right\|^p_{L^p(\delta,T;L^p(\Omega_{r_j}))} \\
&+ \left\|u_{r_j}\right\|^p_{L^p(\delta,T;L^p(\Omega_{r_j}))}
\end{aligned}$$

Do Lema (5.0.10) e do fato que

$$\left\|\nabla u_{r_j} + C u_{r_j}\right\|^p_{L^p(\delta,T;L^p(\Omega_{r_j}))} \leq 2^p(\left\|\nabla u_{r_j}\right\|^p_{L^p(\delta,T;L^p(\Omega_{r_j}))} + C^p \left\|u_{r_j}\right\|^p_{L^p(\delta,T;L^p(\Omega_{r_j}))}),$$

(ver p.173, [40]) temos

$$\left\|\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^p(\delta,T;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))} \leq \widetilde{k}_1(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$$

Verificaremos agora que $\widehat{u}_{r_j}$ é limitado em $L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$, uniformemente em j.

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathbb{R}^n))} &= \int_\delta^T \left\|\widehat{u}_{r_j}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \\
&= \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}^n} \left|u_{r_j}(t,x)\psi_{r_j}(|x|)\right|^2 dxdt \\
&= \int_\delta^T \int_{\Omega_{r_j}} \left|u_{r_j}(t,x)\right|^2 \left|\psi_{r_j}(|x|)\right|^2 dxdt \\
&\leq \int_\delta^T \left\|u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} dt \\
&= \left\|u_{r_j}\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\Omega_{r_j}))} \leq \widetilde{k}_2(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[\delta,T]} \left\|\widehat{u}_{r_j}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{t\in[\delta,T]} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{u}_{r_j}(t,x)\right|^2 dx \\
&= \sup_{t\in[\delta,T]} \int_{\mathbb{R}^n} \left|u_{r_j}(t,x)\right|^2 \left|\psi_{r_j}(|x|)\right|^2 dx \\
&\leq \sup_{t\in[\delta,T]} \int_{\Omega_{r_j}} \left|u_{r_j}(t,x)\right|^2 dx \\
&= \sup_{t\in[\delta,T]} \left\|u_{r_j}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} \leq \widetilde{k}_3(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})
\end{aligned}$$

Para concluir, como $\frac{d}{dt}\widehat{u}_{r_j} = \psi_{r_j} \cdot \frac{d}{dt}u_{r_j}$, segue do Lema 5.0.11 e da definição de ψ_{r_j} que $\left\{\frac{d}{dt}\widehat{u}_{r_j}\right\}$ é limitada em $L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Portanto, existe uma subsequência de $\left\{\widehat{u}_{r_j}\right\}$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$\widehat{u}_{r_j} \rightharpoonup u_\infty \quad \text{em} \quad L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{5.20}$$

Mostraremos que u_∞ é solução fraca, no sentido da Definição 5.0.1, de (5.1).

Para isso, fixemos $r_k > 0$. Seja r_j tal que $r_k < r_j - 1$. Defina $L_k\widehat{u}_{r_j}$ a restrição de $\widehat{u}_{r_j}$ a $\Omega_{r_k} := B(0, r_k)$, a bola aberta de centro zero e raio r_k em $\mathbb{R}^n$.

Claramente, $L_k\widehat{u}_{r_j} \in L^p(\delta, T; W^{1,p}(\Omega_{r_k}) \cap L^2(\delta, T; L^2(\Omega_{r_k})) \cap C(\delta, T; L^2(\Omega_{r_k}))$ e é uniformemente limitada neste espaço. Então existe uma subsequência de $\left\{L_k\widehat{u}_{r_j}\right\}$, que ainda denotaremos da mesma forma, tal que

$$L_k\widehat{u}_{r_j} \rightharpoonup u_{k\infty} \quad \text{em} \quad L^p(\delta, T; W^{1,p}(\Omega_{r_k})) \qquad \text{e} \tag{5.21}$$

$$L_k\widehat{u}_{r_j} \rightharpoonup u_{k\infty} \quad \text{em} \quad L^2(\delta, T; L^2(\Omega_{r_k})) \quad \text{quando} \quad j \to \infty. \tag{5.22}$$

Mostremos que $L_k u_\infty = u_{k\infty}$, onde $L_k u_\infty$ é a restrição de u_∞ a Ω_{r_k}. De fato, seja $v \in C_c^\infty((\tau, T) \times \Omega_{r_k})$. Como o suporte de v está contido em um compacto de $(\delta, T) \times \Omega_{r_k}$ para algum $\delta > \tau$, segue de (5.22) que

$$\int_\delta^T \int_{\Omega_{r_k}} L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)v(t,x)dxdt \to \int_\delta^T \int_{\Omega_{r_k}} u_{k\infty}(t,x)v(t,x)dxdt.$$

Por outro lado, como $v(t,x) = 0, \quad x \notin \Omega_{r_k}$, e vale (5.20), temos

$$\int_\delta^T \int_{\Omega_{r_k}} L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)v(t,x)dxdt =$$

$$\begin{aligned} \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}_{r_j}(t,x)v(t,x)dxdt \to & \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}^n} u_\infty(t,x)v(t,x)dxdt \\ = & \int_\delta^T \int_{\Omega_{r_k}} L_k u_\infty(t,x)v(t,x)dxdt \end{aligned}$$

Da unicidade do limite temos

$$\int_\delta^T \int_{\Omega_{r_k}} u_{k\infty}(t,x)v(t,x)dxdt = \int_\delta^T \int_{\Omega_{r_k}} L_k u_\infty(t,x)v(t,x)dxdt.$$

Portanto, $u_{k\infty}(t,x) = L_k u_\infty(t,x)$, q.t.p em $[\tau, T] \times \Omega_{r_k}$.

Mostremos que $L_k u_\infty$ é solução fraca, no sentido da Definição 5.0.1, de (5.1) em $[\tau, T] \times \Omega_{r_k}$ e então, como r_k é qualquer, para todo $v \in C_c^\infty((\tau, T) \times \mathbb{R}^n)$ podemos encontrar r_k, tal que $v \in C_c^\infty((\tau, T) \times \Omega_{r_k})$ e concluir que u_∞ é solução fraca de (5.1) em $[\tau, T] \times \mathbb{R}^n$.

Assim, seja $v \in C_c^\infty((\tau,T)\times\Omega_{r_k})$. Como $B(0,r_k) \subset B(0,r_j)$, então $v \in C_c^\infty((\tau,T)\times\Omega_{r_j})$. Denotemos por $b_k^{r_j} := L_k b^{r_j}$, a restrição de b^{r_j} a Ω_{r_k}. Uma vez que $b^{r_j}(t,x) \in B(t,x,u_{r_j}(t,x))$ q.t.p $(t,x) \in [\tau,T]\times\Omega_{r_j}$, então $b_k^{r_j}(t,x) \in B(t,x,L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x))$ q.t.p $(t,x) \in [\tau,T]\times\Omega_{r_k}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^T\int_{\Omega_{r_k}} - L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \left|\nabla L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)\right|^{p-2}\nabla L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)\nabla v(t,x)\\
&\quad + \left|L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)\right|^{p-2}L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)v(t,x) + L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)v(t,x) - b_k^{r_j}(t,x)v(t,x)dxdt\\
&\quad = \int_\tau^T\int_{\Omega_{r_j}} -u_{r_j}(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \left|\nabla u_{r_j}(t,x)\right|^{p-2}\nabla u_{r_j}(t,x)\nabla v(t,x)\\
&\quad + \left|u_{r_j}(t,x)\right|^{p-2}u_{r_j}(t,x)v(t,x) + u_{r_j}(t,x)v(t,x) - b^{r_j}(t,x)v(t,x)dxdt = 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

O próximo passo é passar o limite na igualdade acima, quando $r_j \to \infty$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ considere o operador que a cada elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})$ associa o elemento de $W^{-1,p'}(\Omega_{r_j})$, $\widehat{A}^{r_j}u : W_0^{1,p}(\Omega_{r_j}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\widehat{A}^{r_j}u(v) \;=\; \int_{\Omega_{r_j}}|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega_{r_j}}|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx$$

Temos que $\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}$ é uniformemente limitado em $L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))$ qualquer que seja $\delta > \tau$, pois

$$\left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}\right\|_{L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))} = \int_\delta^T\left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}(s)\right\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega_{r_j})}ds \tag{5.24}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}(t)\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_{r_j})} &= \sup_{\{v\in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j});\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}\le 1\}}\left|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}(t)(v)\right|\\
\le&\quad \sup_{\{v\in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j});\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}\le 1\}}\Big[\int_{\Omega_{r_j}}\left|\nabla u_{r_j}(t)\right|^{p-1}|\nabla v|\\
+&\quad \left|u_{r_j}(t)\right|^{p-1}|v|\,dx\Big]
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}(t)\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_{r_j})} &\leq \sup_{\{v\in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j});\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}\leq 1\}}\left[\left(\int_{\Omega_{r_j}}\left|\nabla u_{r_j}(t)\right|^p\right)^{1/p'}\left(\int_{\Omega_{r_j}}|\nabla v|^p\right)^{1/p}\right.\\
&\left.+\left(\int_{\Omega_{r_j}}\left|u_{r_j}(t)\right|^p\right)^{1/p'}\left(\int_{\Omega_{r_j}}|v|^p\right)^{1/p}\right]\\
&= \sup_{\{v\in W_0^{1,p}(\Omega_{r_j});\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}\leq 1\}}\left[\left\|\nabla u_{r_j}(t)\right\|_{L^p(\Omega_{r_j})}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_{r_j})}\right.\\
&\left.+\left\|u_{r_j}(t)\right\|_{L^p(\Omega_{r_j})}^{p-1}\|v\|_{L^p(\Omega_{r_j})}\right]\\
&\leq \left\|\nabla u_{r_j}(t)\right\|_{L^p(\Omega_{r_j})}^{p-1}+\left\|u_{r_j}(t)\right\|_{L^p(\Omega_{r_j})}^{p-1}
\end{aligned}
$$

Lembremos que se a,b são números reais positivos e $R>1$ temos $a^R+b^R\leq(a+b)^R$ então

$$
\begin{aligned}
\left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}(t)\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_{r_j})} &\leq \left(\left\|\nabla u_{r_j}(t)\right\|_{L^p(\Omega_{r_j})}+\left\|u_{r_j}(t)\right\|_{L^p(\Omega_{r_j})}\right)^{p-1}\\
&= \left\|u_{r_j}(t)\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega_{r_j})}^{p-1}
\end{aligned}
$$

De (5.24) e do Lema 5.0.10 temos que $\{\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}\}$ é limitada em $L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))$.

Assim, do exposto acima, da Hipótese A.2 e do Lema 5.0.10, podemos concluir que

$$
\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\in L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))+L^2\left(\delta,T;L^2(\Omega_{r_j})\right) \tag{5.25}
$$

e a sequência $\left\{\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\}$ é uniformemente limitada em

$$
U_{r_j}:=L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))+L^2\left(\delta,T;L^2(\Omega_{r_j})\right),
$$

já que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\|_{U_{r_j}} &= \inf\left\{\left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}\right\|_{L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))}+\left\|u_{r_j}+b^{r_j}\right\|_{L^2\left(\delta,T;L^2(\Omega_{r_j})\right)}\right\}\\
&\leq \left\|\widehat{A}^{r_j}u_{r_j}\right\|_{L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_j}))}+\left\|u_{r_j}\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\Omega_{r_j}))}+\left\|b^{r_j}\right\|_{L^2\left(\delta,T;L^2(\Omega_{r_j})\right)}
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Seja $U_{r_k}:=L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_k}))+L^2\left(\delta,T;L^2(\Omega_{r_k})\right)$. Do Lema (5.0.12) temos que

$$
\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\|_{U_{r_k}}\leq\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\|_{U_{r_j}} \tag{5.27}
$$

e portanto $\left\{\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\}$ é uniformemente limitada em U_{r_k}. Logo, passando a uma subsequência se necessário, $\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}$ converge fracamente para $\overline{u}_\infty$ em U_{r_k} ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}, \varphi \right\rangle \to \langle \overline{u}_\infty, \varphi\rangle, \forall \varphi \in (U_{r_k})^*,$$

onde $(U_{r_k})^*$ denota o dual topológico de U_{r_k}.

Do Lema 5.0.12, $U_{r_k} \subset L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'}(\Omega_{r_k}))$. Então $(L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'}(\Omega_{r_k})))^* \subset (U_{r_k})^*$. Logo, em particular,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}, \varphi \right\rangle \to \langle \overline{u}_\infty, \varphi\rangle, \forall \varphi \in \left(L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'}(\Omega_{r_k}))\right)^*,$$

ou seja $\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}_\infty$ em $L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'}(\Omega_{r_k}))$, quando $j \to \infty$. 1 Portanto, (pela Proposição III.12 (iii) [13]), $\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\|_{L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_k}))}$ é uniformemente limitado em j.

Notemos agora que $L_k\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j} = \frac{\partial}{\partial t}L_k\widehat{u}_{r_j}$. De fato, seja $v \in C_c^\infty((\tau, T) \times \Omega_{r_k})$ qualquer. Então

$$\begin{aligned}
\int_\tau^T \int_{\Omega_{r_k}} L_k \frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}(t,x)v(t,x)dtdx &= \int_\tau^T \int_{\Omega_{r_j}} \frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}(t,x)v(t,x)dtdx \\
&= -\int_\tau^T \int_{\Omega_{r_k}} u_{r_j}\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)dtdx \\
&= -\int_\tau^T \int_{\Omega_{r_k}} L_k\widehat{u}_{r_j}\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)dtdx \\
&= \int_\tau^T \int_{\Omega_{r_k}} \frac{\partial}{\partial t}L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)v(t,x)dtdx
\end{aligned}$$

Aqui devemos observar que $L_k\widehat{u}_{r_j} := u_{r_j}(x)\psi_{r_j}(|x|)|_{\Omega_{r_k}} = u_{r_j}(x)|_{\Omega_{r_k}}$ então $L_k\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j} = \frac{\partial}{\partial t}L_k\widehat{u}_{r_j} = \frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}$, em Ω_{r_k}, então $\left\|\frac{\partial}{\partial t}L_k\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^{p'}(\delta,T;W^{-1,p'}(\Omega_{r_k}))}$ é uniformemente limitada. Do Teorema 1.3.2 concluímos que $\left\{L_k\widehat{u}_{r_j}\right\}$ possui uma subsequência convergindo fortemente em $L^2(\delta, T; L^2(\Omega_{r_k}))$. Portanto, passando a uma subsequência se necessário,

$$L_k\widehat{u}_{r_j} \to u_{k\infty} \quad \text{em} \quad L^2(\delta, T; L^2(\Omega_{r_k})). \tag{5.28}$$

Assim, como $b_k^{r_j}$ é uniformemente limitada em $L^2(\tau, T; L^2(\Omega_{r_k}))$ temos que $\{b_k^{r_j}\}$ possui uma subsequência (denotada da mesma forma) que converge fracamente para um b_k^∞ em $L^2(\tau, T; L^2(\Omega_{r_k}))$. De A.1 segue que $b_k^\infty \in B(t, u_{k\infty})$.

A partir de agora nosso objetivo passa a ser mostrar que $\{\nabla L_k \widehat{u}_{r_j}\}$ é uma sequência pré-compacta em $L^p((\delta,T)\times\Omega_{r_k})$. Vamos usar o Teorema de Frechet- Kolmogorov, [13]. Assim, para checarmos as hipóteses deste teorema, precisamos garantir que, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_0>0$, tal que

$$\|\tau_h \nabla L_k \widehat{u}_{r_j} - \nabla L_k \widehat{u}_{r_j}\|_{L^p((\delta,T)\times\Omega_{r_k})} \leq \varepsilon, \qquad \text{se } |h|\leq \delta_0,\ \forall\, j,$$

onde $h=(h_t,h_x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e $\tau_h\nabla L_k\widehat{u}_{r_j}(t,x)=\nabla L_k\widehat{u}_{r_j}(t+h_t,x+h_x)$.

Sem perda de generalidade podemos supor que existe δ_0 tal que, para todo j, $\delta_0<$ dist $\left(\Omega_{r_{j-1}},\complement\Omega_{r_j}\right)$. Para cada j, sabemos que a equação

$$-\Delta_p\, u_{r_j}(t,x)+|u_{r_j}(t,x)|^{p-2}u_{r_j}(t,x)+u_{r_j}(t,x)=B(t,u_{r_j}(t,x))-\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}(t,x) \tag{5.29}$$

é satisfeita x qtp em Ω_{r_j} e para todo $t>\tau$. Em particular,

$$-\Delta_p\tau_h u_{r_j}(t,x)+|\tau_h u_{r_j}(t,x)|^{p-2}\tau_h u_{r_j}(t,x)+\tau_h u_{r_j}(t,x)=B(t+h_t,\tau_h u_{r_j}(t,x))-\frac{\partial}{\partial t}\tau_h u_{r_j}(t,x) \tag{5.30}$$

é satisfeita x qtp no conjunto Ω_{r_j}, estendendo por zero fora de Ω_{r_j}, e para todo $t>\tau$. Fazendo (5.30) – (5.29), teremos para toda φ em $C^\infty((\delta,T)\times\mathbb{R}^n)$ que,

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\delta^T\int_{\Omega_{r_j}}\left(|\nabla\tau_h u_{r_j}(x)|^{p-2}\nabla\tau_h u_{r_j}(x)-|\nabla u_{r_j}(x)|^{p-2}\nabla u_{r_j}(x)\right)\nabla\varphi && +\\
&\left(|\tau_h u_{r_j}(x)|^{p-2}\tau_h u_{r_j}(x)-|u_{r_j}(x)|^{p-2}u_{r_j}(x)\right)\varphi && +\\
&\left(\tau_h u_{r_j}(x)-u_{r_j}(x)\right)\varphi\,dx\,dt && =\\
&\textstyle\int_\delta^T\int_{\Omega_{r_j}}\left(B(t+h_t,\tau_h u_{r_j}(x))-B(t,u_{r_j}(x))\right)\varphi && -\\
&\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\,\tau_h u_{r_j}(x)-\tfrac{\partial}{\partial t}\,u_{r_j}(x)\right)\varphi\,dx\,dt &&
\end{aligned} \tag{5.31}$$

A partir de agora, vamos escolher φ adequadamente para podermos concluir o raciocínio. Fixemos j e h e observemos que se $|h|$ for suficientemente pequeno a função $\tau_h u_{r_j}-u_{r_j}$ pertence a $W^{1,2}((\delta,T)\times\mathbb{R}^n)$. Sendo assim, existe uma sequência $\varphi_m\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$\varphi_m\to\tau_h u_{r_j}-u_{r_j}\quad\text{em } L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})\quad\text{e}$$

$$\nabla\varphi_m\to\tau_h\nabla u_{r_j}-\nabla u_{r_j}\quad\text{em } L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})$$

onde $(\delta, T) \subset\subset (\tau, T)$. Além disso,

$$\|\varphi_m\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \leq \|\tau_h u_{r_j} - u_{r_j}\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \leq 2\|u_{r_j}\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})}$$

$$\|\nabla\varphi_m\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \leq \|\nabla\tau_h u_{r_j} - \nabla u_{r_j}\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \leq 2\|\nabla u_{r_j}\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})}$$

Finalmente, voltando a (5.31), temos

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\delta^T \int_{\Omega_{r_j}} \left(|\nabla\tau_h u_{r_j}(x)|^{p-2}\nabla\tau_h u_{r_j}(x) - |\nabla u_{r_j}(x)|^{p-2}\nabla u_{r_j}(x)\right)\nabla\varphi_m && + \\
&(|\tau_h u_{r_j}(x)|^{p-2}\tau_h u_{r_j}(x) - |u_{r_j}(x)|^{p-2}u_{r_j}(x))\,\varphi_m && + \\
&(\tau_h u_{r_j}(x) - u_{r_j}(x))\,\varphi_m\, dx\, dt && = \\
&\textstyle\int_\delta^T \int_{\Omega_{r_j}} (B(t+h_t, \tau_h u_{r_j}(x)) - B(t, u_{r_j}(x)))\,\varphi_m && - \\
&(\tfrac{\partial}{\partial t}\,\tau_h u_{r_j}(x) - \tfrac{\partial}{\partial t}\,u_{r_j}(x))\varphi_m\, dx\, dt &&
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Tomando o limite em m e usando a Desigualdade de Tartar (Desigualdade 1.1.1) temos que existe λ_0 que depende apenas de p e n tal que

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \left\|\tau_h\nabla u_{r_j} - \nabla u_{r_j}\right\|^p_{L^p((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} &+ \lambda_0\left\|\tau_h u_{r_j} - u_{r_j}\right\|^p_{L^p((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} + \left\|\tau_h u_{r_j} - u_{r_j}\right\|^2_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \\
&\leq \left(\int_\delta^T \left\|B(t+h_t, \tau_{h_x} u_{r_j}(t))\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_\delta^T \left\|B(t+h_t, \tau_{h_x} u_{r_j})\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} dt\right) \left\|\tau_h u_{r_j} - u_{r_j}\right\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \\
&\quad + \left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}\tau_h u_{r_j}\right\|_{L^2((\delta,T)\times\mathbb{R}^n)} \right. \\
&\quad \left. + \left\|\frac{\partial}{\partial t} u_{r_j}\right\|_{L^2((\delta,T)\times\mathbb{R}^n)}\right) \left\|\tau_h u_{r_j} - u_{r_j}\right\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})}.
\end{aligned}$$

Usando que $u_{r_j} \in W^{1,2}((a,b)\times\mathbb{R}^n)$, onde $(\delta, T) \subset\subset (a, b)$, pela Proposição IX.3 em [13] temos

$$\|\tau_h u_{r_j} - u_{r_j}\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \leq C_1|h|$$

com $C_1 = C_1\left(\|\nabla u_{r_j}\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}u_{r_j}\right\|_{L^2((\delta,T)\times\Omega_{r_j})}\right)$ ou seja, uniforme em j.

Logo,

$$\left\|\tau_h\nabla u_{r_j} - \nabla u_{r_j}\right\|_{L^p((\delta,T)\times\Omega_{r_j})} \leq \widetilde{C}_1|h|^{1/p}$$

e

$$\left\|\tau_h\nabla u_{r_j} - \nabla u_{r_j}\right\|_{L^p((\delta,T)\times\Omega_{r_k})} \leq \widetilde{C}_1|h|^{1/p} \to 0$$

quando h é pequeno. Então, pelo Teorema de Frechet- Kolmogorov [13], $\{\nabla L_k \widehat{u}_{r_j}\}$ é uma sequência pré-compacta em $L^p((\delta, T) \times \Omega_{r_k})$.

Assim, $\nabla L_k \widehat{u}_{r_j} \to \nabla u_{k\infty}$ em $L^p([\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k}) \subset L^1([\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k})$. Além disso, temos $L_k \widehat{u}_{r_j} \to u_{k\infty}$ em $L^2([\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k}) \subset L^1([\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k})$. Logo,

$$L_k \widehat{u}_{r_j}(t,x) \to u_{k\infty}(t,x), \quad \text{q.t.p} \ \ (t,x) \in [\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k} \quad \text{e} \tag{5.33}$$

$$\nabla L_k \widehat{u}_{r_j}(t,x) \to \nabla u_{k\infty}(t,x), \quad \text{q.t.p} \ \ (t,x) \in [\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k}$$

Como a função $z \mapsto |z|^{p-2} z$, é contínua, então

$$\begin{aligned} &\left|\nabla L_k \widehat{u}_{r_j}(t,x)\right|^{p-2} \nabla L_k \widehat{u}_{r_j}(t,x) + \left|L_k \widehat{u}_{r_j}(t,x)\right|^{p-2} L_k \widehat{u}_{r_j}(t,x) \\ &\qquad \to |\nabla u_{k\infty}(t,x)|^{p-2} \nabla u_{k\infty}(t,x) + |u_{k\infty}(t,x)|^{p-2} u_{k\infty}(t,x) \end{aligned}$$

q.t.p $(t,x) \in [\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k}$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\tau+T_0}^{T} \int_{\Omega_{r_k}} \left|\nabla L_k \widehat{u}_{r_j}\right|^{p-2} \nabla L_k \widehat{u}_{r_j} \nabla v + \left|L_k \widehat{u}_{r_j}\right|^{p-2} L_k \widehat{u}_{r_j} v \\ &\qquad \to \int_{\tau+T_0}^{T} \int_{\Omega_{r_k}} |\nabla u_{k\infty}|^{p-2} \nabla u_{k\infty} \nabla v + |u_{k\infty}|^{p-2} u_{k\infty} v \end{aligned}$$

para todo $v \in C_c^\infty([\tau + T_0, T] \times \Omega_{r_k})$.

Finalmente voltando a (5.23) e passando o limite quando $r_j \to \infty$ temos $\forall v \in C_c^\infty((\tau + T_0, T) \times \Omega_{r_k})$

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\tau^T \int_{\Omega_{r_k}} -u_{k\infty}(t,x) \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + |\nabla u_{k\infty}(t,x)|^{p-2} \nabla u_{k\infty}(t,x) \nabla v(t,x) &+ \\ |u_{k\infty}(t,x)|^{p-2} u_{k\infty}(t,x) v(t,x) &+ \\ u_{k\infty}(t,x) v(t,x) - B(t, u_{k\infty}(t,x)) v(t,x) dx dt &= 0 \end{aligned} \tag{5.34}$$

■

A seguir mostraremos que algumas propriedades da solução u_∞ de (5.1) exibida acima.

Lema 5.0.13 *Dados $T_8 > \tau$ e $u_{0r_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $\varrho > 0$ tal que $\|u_{k_\infty}(t)\|_{L^\infty(\Omega_{r_k})} \leq \varrho$, t qtp em (T_8, T), qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como $L_k\widehat{u}_{r_j}(t) \to u_{k\infty}(t)$ em $L^2(\Omega_{r_k})$, então existe uma subsequência de $\left\{L_k\widehat{u}_{r_j}(t)\right\}$, que vamos denotar da mesma forma, tal que

$$L_k\widehat{u}_{r_j}(t)(x) \to u_{k\infty}(t)(x), \qquad \text{qtp em } (T_8, T) \times \Omega_{r_k}. \tag{5.35}$$

Do Lema 5.0.8 concluimos que $\left\|u_{r_j}(t)\right\|_{L^\infty(\Omega_{r_k})} \leq \eta$, qtp em (T_8, T) e uniformemente em j. Logo, de (5.35) temos que

$$\|u_{k\infty}(t)\|_{L^\infty(\Omega_{r_k})} \leq \eta, \quad \text{qtp em } (T_8, T). \tag{5.36}$$

■

Observação 5.0.10 *Dado $T_8 > \tau$, $\|u_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \eta$, qtp em (T_8, T). De fato, suponha que exista $E \subset \mathbb{R}^n$ com $m(E) > 0$ tal que $u_\infty(t)(x) > \eta, x \in E$. É possível escolher $k > 0$ tal que $E_k := E \cap \Omega_{r_k}$ tenha $m(E_k) > 0$. Logo, como $E_k \subset E$ temos que $\|u_\infty(t)\|_{L^\infty(E_k)} > \eta$, $\forall t \in (T_8', T')$, mas isto contradiz o lema anterior.*

Observação 5.0.11 *$\frac{\partial}{\partial t}u_\infty \in L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. De fato, como $\left\{\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}_{r_j}\right\}$ é uniformemente limitada em $L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$, então $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}_{r_j} \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}u_\infty$ em $L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. Assim*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_\infty\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \liminf_{j\to\infty} \left\|\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathbb{R}^n))}.$$

Lema 5.0.14 $u_\infty \in C((\delta, T); L^2(\mathbb{R}^n))$.

Demonstração: Já provamos que $u_\infty \in L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ e $\frac{d}{dt}u_\infty \in L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ qualquer que seja $\delta > \tau$.

Seja

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} u_\infty(t), & t \in [\delta, T] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.37}$$

Por regularização da função $\widehat{u} : [\delta, T] \to L^2(\mathbb{R}^n)$ nós podemos obter uma sequência de funções $\{u_m\} \subset C^1([\delta, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$, tal que

$$u_m \to u \quad \text{em } L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$$

e

$$\frac{d}{dt}u_m \to \frac{d}{dt}u \quad \text{em } L^2(\delta, T; L^2(\mathbb{R}^n))$$

é claro que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\langle \frac{d}{dt}u_m(t), u_m(t)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ então para todo t^* temos

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_m(t^*)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t^*}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}u_m(\sigma), u_m(\sigma)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\sigma \tag{5.38}$$

Escolha t^* tal que $\|u_m(t^*)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{T-\delta}\int_\delta^T \|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Vamos estimar a integral em (5.38). Pelo Teorema de Riez p.81 [13] temos

$$\left|\left\langle \frac{d}{dt}u_m(\sigma), u_m(\sigma)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right| \leq \left\|\frac{d}{dt}u_m(\sigma)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{5.39}$$

Voltando a (5.38)

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{T-\delta}\int_\delta^T \|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_\delta^t \left\|\frac{d}{dt}u_m(\sigma)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\sigma$$

Usando a desigualdade de Young temos

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{T-\delta}\int_\delta^T \|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_\delta^t \left\|\frac{d}{dt}u_m(\sigma)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\sigma$$

Então

$$\sup_{t\in(\delta,T)} \|u_m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\left\|\frac{d}{dt}u_m\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \|u_m\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathbb{R}^n))}\right)$$

Como $\left\{\frac{d}{dt}u_m\right\}$ e $\{u_m\}$ são sequências de Cauchy em $L^2(\delta,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ então $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([\delta,T];L^2(\mathbb{R}^n))$. Disto segue que $u \in C([\delta,T];L^2(\mathbb{R}^n))$.
■

5.1 Existência e Semi-continuidade superior do Processo Multívoco

Nesta seção definimos o processo multívoco U associado às soluções de (5.1) e provamos que ele é semi-contínuo superiormente.

Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e denote por $\mathcal{D}(u_0)$ o conjunto de todas as soluções de (5.1), no sentido da Definição 5.0.1, correspondentes ao dado inicial u_0. Denotemos por $\wp(L^2(\mathbb{R}^n))$ o conjunto de todos os subconjuntos não-vazios de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos a aplicação multívoca

$$U(t,\tau) : L^2(\mathbb{R}^n) \to \wp(L^2(\mathbb{R}^n)), \quad -\infty < \tau \leq t < +\infty$$

por

$$U(t,\tau)u_0 = \left\{z \in L^2(\mathbb{R}^n); \exists \;\; u \in \mathcal{D}(u_0); u(\tau) = u_0 \;\text{ e }\; u(t) = z\right\}$$

Lema 5.1.1 *Mostremos que U, como definido acima, é um processo multívoco em $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou seja, satisfaz as seguintes condições:*

1. $U(\tau,\tau) = Id$,
2. $U(t,\tau)v \subset U(t,s)U(s,\tau)v, \forall t \geq s \geq \tau, \forall v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Para mostrarmos *1* basta olharmos para a definição de U. Dado $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$U(\tau,\tau)v = \left\{z \in L^2(\mathbb{R}^n); \exists \quad u \in \mathcal{D}(v); u(\tau) = v \quad \text{e} \quad u(\tau) = z\right\} = \{v\}.$$

Para mostrarmos *2* tome $z \in U(t,\tau)v$ então existe $\varphi \in \mathcal{D}(v)$ tal que $\varphi(t) = z$ e $\varphi(\tau) = v$. Claramente, $\varphi(s) \in U(s,\tau)v$. Se definirmos $\psi(t) = \varphi(t), \forall t \geq s$ temos que $\psi(t) \in U(t,s)\varphi(s)$ ou seja, $\psi(t) \in U(t,s)U(s,\tau)v$. Portanto, $z = \varphi(t) = \psi(t) \in U(t,s)U(s,\tau)v$. ∎

Para provarmos a semi-continuidade superior do processo multívoco U vamos tomar uma sequência convergente de dados iniciais e uma sequência de problemas da forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}u^m_{r_j} - \operatorname{div}\left(\left|\nabla u^m_{r_j}\right|^{p-2}\nabla u^m_{r_j}\right) + |u^m_{r_j}|^{p-2}u^m_{r_j} + u^m_{r_j} \in B(t,x,u^m_{r_j}), t \geq \tau \\ u^m_{r_j}(\tau,x) = u^m_{0r_j}(x), \quad x \in \Omega_{r_j} \end{array}\right. \tag{5.40}$$

Afirmação 1: Se $u^m_0 \overset{m\to\infty}{\rightarrow} u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então $u^m_{0r_j} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} u_{0r_j}$ em $L^2(\Omega_{r_j})$ uniformemente em j.

De fato,

$$\begin{aligned} \left\|u^m_{0r_j} - u_{0r_j}\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_j})} &= \int_{\Omega_{r_j}} \left|u^m_{0r_j} - u_{0r_j}\right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_{r_j}} |u^m_0 - u_0|^2 \left|\psi_{r_j}(|x|)\right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_{r_j}} |u^m_0 - u_0|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u^m_0 - u_0|^2 dx \\ &= \|u^m_0 - u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \end{aligned}$$

uniformemente em j quando $m \to \infty$.

Lema 5.1.2 *Seja* $\left\{u_{0r_j}^m\right\}$ *uma sequência de dado iniciais, tal que* $u_{0r_j}^m \overset{m\to\infty}{\to} u_{0r_j}$ *em* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Então para todo* $t \geq \tau$ $u_{r_j}^m(t) \overset{m\to\infty}{\to} u_{r_j}(t)$ *em* $L^2(\Omega_{r_j})$, *uniformemente em* j, *onde* $u_{r_j}^m(t)$ *e* $u_{r_j}(t)$ *são soluções de* (5.40) *com dados iniciais* $u_{0r_j}^m$ *e* u_{0r_j}, *respectivamente.*

Demonstração: Se $u_{0r_j}^m$ é uma solução de (5.40) então existe $b_{r_j}^m \in L^2(\tau, T; L^2(\Omega_{r_j}))$ com $b_{r_j}^m \in B(t, x, u_{r_j}^m)$ q.t.p $t \in [\tau, T]$. Das Hipóteses A.1 e A.2, usando as estimativas em domínios limitados feitas na Seção 5.0.3, temos que o conjunto $B(t, x, u_{r_j}^m)$ é uniformemente integrável em $L^2(\Omega_{r_j})$. Logo, pelo Teorema 1.3.1 a sequência $\left\{u_{r_j}^m(t)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ é pré-compacta $C([0, T]; L^2(\Omega_{r_j}))$. Ou seja, existe uma subsequência, que denotaremos da mesma forma, tal que $u_{r_j}^m(t) \to u_{r_j}(t)$ em $L^2(\Omega_{r_j})$. Da mesma forma que fizemos na Proposição 3.2.2 é possível mostrar que $u_{r_j}(t)$ é uma solução do problema (5.2). ∎

Proposição 5.1.1 *Seja* $\{u_0^m\}$ *uma sequência de dados iniciais em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *com* $u_0^m \to u_0$ *em* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Dado* $u^m(t) \in U(t, \tau)u_0^m$ *temos* $u^m(t) \to u(t)$ *em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $u(t) \in U(t, \tau)u_0$.

Demonstração: Se $u_0^m \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos pela Afirmação 2 que $u_{0r_j}^m \overset{m}{\to} u_{0r_j}$ em $L^2(\Omega_{r_j})$ uniformemente em j, então pelo Lema 5.1.2 se $u_{r_j}^m(\cdot)$ e $u_{r_j}(\cdot)$ são soluções de (5.40) e (5.2) com dados iniciais $u_{0r_j}^m$ e u_{0r_j}, respectivamente para todo $t \geq \tau$, $u_{r_j}^m(t) \to u_{r_j}(t)$ em $L^2(\Omega_{r_j})$, esta convergência é uniforme em j quando $m \to \infty$.

Ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\widetilde{M} > 0$ tal que

$$\left\|u_{r_j}^m(t) - u_{r_j}(t)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})} < \epsilon/3, \quad \forall m > \widetilde{M}, \quad \forall t \geq \tau. \tag{5.41}$$

Para cada t, τ fixos seja $T_0 > 0$ tal que $t - \tau > T_0$. Fixe $k > 0$ qualquer tal que $\Omega_{r_k} \subset \Omega_{r_j}$. Em Ω_{r_k}, com as mesmas notações do Teorema 5.0.1 temos $L_k\widehat{u}_{r_j}^m \overset{m}{\to} L_k\widehat{u}_{r_j}$ em $L^2(\Omega_{r_k})$ $\forall t \geq \tau$, uniformemente em j.

De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\widetilde{M} > 0$, como acima, e teremos

$$\left\|L_k\widehat{u}_{r_j}^m - L_k\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^2(\Omega_{r_k})}^2 = \int_{\Omega_{r_k}} |L_k\widehat{u}_{r_j}^m(x) - L_k\widehat{u}_{r_j}(x)|^2 \leq \int_{\Omega_{r_j}} |u_{r_j}^m(x) - u_{r_j}(x)|^2 dx$$

De (5.41) temos

$$\left\|L_k\widehat{u}_{r_j}^m - L_k\widehat{u}_{r_j}\right\|_{L^2(\Omega_{r_k})} \leq \left\|u_{r_j}^m(t) - u_{r_j}(t)\right\|_{L^2(\Omega_{r_j})} < \epsilon/3, \quad \forall m > \widetilde{M}, \quad \forall t \geq \tau. \tag{5.42}$$

uniformemente em j.

Do Lema 5.0.13 temos que dado $\epsilon > 0$ existe $J > 0$ tal que

$$\left\|L_k\widehat{u}_{r_j}(t) - u_{k\infty}(t)\right\|_{L^2(\Omega_{r_k})} < \epsilon/3, \quad \forall j > J, \quad \forall t - \tau > T_0 \tag{5.43}$$

então para cada m existe J_m tal que

$$\left\| L_k \widehat{u}^m_{r_j}(t) - u^m_{k\infty}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{r_k})} < \epsilon/3, \quad \forall j > J_m, \quad \forall t - \tau > T_0. \tag{5.44}$$

Assim dado $\epsilon > 0$ seja $\widetilde{M}(\epsilon) > 0$, como em (5.42). Seja $m > \widetilde{M}(\epsilon)$ para $j > \max\{J, J_m\}$, escolhidos como em (5.43) e (5.44) temos para todo $t - \tau > T_0$.

$$\begin{aligned} \|u^m_{k\infty}(t) - u_{k\infty}(t)\|_{L^2(\Omega_{r_k})} &\le \left\| L_k \widehat{u}^m_{r_j}(t) - u^m_{k\infty}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{r_k})} \\ &+ \left\| L_k \widehat{u}^m_{r_j} - L_k \widehat{u}_{r_j} \right\|_{L^2(\Omega_{r_k})} + \left\| L_k \widehat{u}_{r_j}(t) - u_{k\infty}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{r_k})} \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, como $k > 0$ é qualquer $u^m(t) \to u(t)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo $t - \tau > T_0$.

■

5.2 Existência do Atrator Pullback

A partir desta seção vamos considerar que o termo perturbativo B no problema 5.1 satisfaz uma condição que garanta a unicidade de solução, conforme a Observação 5.0.3.

Lema 5.2.1 *Para qualquer solução fraca u do problema* (5.1) *temos*

$$\|u\|_X \le K_1(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}), \quad \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_U \le K_2(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}),$$

onde K_1 e K_2 são constantes que dependem de $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$,

$$X = L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n)) \,\cap\, L^p(\tau, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \,\cap\, C([\tau, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$$

e

$$U = L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n)) + L^{p'}(\tau, T; (W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*).$$

Demonstração: Como u é uma solução fraca temos que existe $b \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ com $b \in B(t, x, u)$. Pela definição de solução fraca temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} b(t,x)u(t,x)$$

q.t.p em t. Pela Hipótese A.2 temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x)|u(x)|^2(|u(x)|^{q-2}+1)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)||u(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)||u(x)|^q\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\eta}|L(t,x)|\eta|u(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda}|L(t,x)|\lambda|u(x)|^q\end{aligned}$$

para η e λ positivos. Aplicando a Desigualdade de Young com $r = \frac{p}{2}$ e $\theta = \frac{np}{(n-p)q}$ e os seus conjugados $r' = \frac{p}{p-2}$ e $\theta' = \frac{np}{np-(n-p)q}$, respectivamente, teremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \frac{1}{r'\eta^{r'}}\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{p/p-2}dx + \frac{\eta^r}{r}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p dx\\
&+ \frac{1}{\theta'\lambda^{\theta'}}\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{\theta'}dx + \frac{\lambda^\theta}{\theta}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^{p^*}dx,\end{aligned}$$

onde $p^* = \frac{np}{n-p}$. Usando teorema IX.9 p.162, [13] existe uma constante C que depende apenas de p e n tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \frac{1}{r'\eta^{r'}}\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{p/p-2}dx + \frac{\eta^r}{r}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p dx\\
&+ \frac{1}{r'\lambda^{r'}}\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{\theta'}dx + \frac{C\lambda^\theta}{\theta}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^p dx.\end{aligned}$$

Escolhendo η e λ tão pequenos tal que $\left(1 - \frac{C\lambda^{\theta'}}{\theta'}\right) > 0$ e $\left(1 - \frac{\eta^r}{r}\right) > 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left(1 - \frac{C\lambda^{\theta'}}{\theta'}\right)\|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(1 - \frac{\eta^r}{r}\right)\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \frac{1}{r'\eta^{r,}}\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{p/p-2}dx + \frac{1}{\theta'\lambda^{\theta'}}\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{\theta'}dx\end{aligned}$$

(5.45)

Fazendo $M = \min\left\{\left(1 - \frac{C\lambda^{\theta'}}{\theta'}\right), \left(1 - \frac{\eta^r}{r}\right)\right\}$, $M_1 = \frac{1}{r'\eta^{r'}}$, $M_2 = \frac{1}{\theta'\lambda^{\theta'}}$ e integrando de τ a t temos para todo $t \geq \tau$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + M\left[\|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right] + 2\int_\tau^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\\
&\leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2M_1\int_\tau^t\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{p/p-2}dxds + 2M_2\int_\tau^t\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{\theta,}dx.\end{aligned}$$

Por hipótese $L \in L^{p/(p-2)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{np/(np-(n-p)q)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ portanto para todo $t \geq \tau$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + M\left[\|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right] + 2\int_\tau^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, ds \\ \leq K_1(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}).\end{aligned}$$

Ainda da definição de solução fraca temos

$$\frac{d}{dt}u = -Au - u + b, \quad \text{q.t.p } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{5.46}$$

onde $Au : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to (W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*$ é definido por

$$Au(v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx.$$

Vamos olhar para a primeira parcela do lado direito de (5.46):

Afirmação: $-Au \in L^{p'}(\tau, T; (W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)$. De fato, temos

$$\begin{aligned}\|-Au\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)} \leq \sup_{v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n); \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)||\nabla v(x)|dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-2}|u(x)||v(x)|dx\Bigg].\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder teremos

$$\|-Au\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)} \leq \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Então

$$\begin{aligned}\|-Au\|_{L^{p'}(\tau,T;(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)} &= \int_\tau^t \|-Au(t)\|^{p'}_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)}\, dt \leq \int_\tau^t \|u(t)\|^{(p-1)p'}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\, dt \\ &= \int_\tau^t \|u(t)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\, dt \leq K_1(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\end{aligned}$$

Como u é uma solução fraca de (5.1) a segunda parcela de (5.46), $(-u+b)$, claramente pertence a $L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ e além disso,

$$\|-u+b\|_{L^2(\tau,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \widetilde{K}_1(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

Portanto $\frac{d}{dt}u \in L^{p'}(\tau, T; (W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*) + L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ e então

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d}{dt}u\right\|_U &= \inf\left\{\|-Au\|_{L^{p'}(\tau,T;(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)} + \|-u+b\|_{L^2(\tau,T;L^2(\mathbb{R}^n))}\, ; \frac{d}{dt}u = -Au + (-u+b)\right\} \\ &\leq \|-Au\|_{L^{p'}(\tau,T;(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))^*)} + \|-u+b\|_{L^2(\tau,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \overline{K}_1(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\end{aligned}$$

■

Observação 5.2.1 *Da Hipótese A.2 temos que*

$$L \in L^{p/(p-2)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L^{np/(np-(n-p)q)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^n))$$

então para todo $t \in \mathbb{R}$ *temos* $\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)}|L(s,x)|^\vartheta dxds \leq \frac{1}{2} \|L(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^\vartheta$, *onde* $\vartheta = \frac{p}{p-2}$ *ou* $\vartheta = \frac{np}{np-(n-p)q}$, *onde* $2 < q < p$.

Lema 5.2.2 *Se* u *é uma solução fraca do problema* (5.1) *então para todo* $t \geq \tau$

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2M \int_\tau^t e^{-2(t-s)} \|u(s)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p ds \leq e^{-2(t-\tau)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \zeta(t),$$

com $\zeta(t) = 2M_1 \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)}|L(s,x)|^{p/(p-2)}ds + 2M_2 \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)}|L(s,x)|^{np/(np-(n-p)q)}ds$, M, M_1 *e* M_2 *constantes dadas no Lema 5.2.1.*

Demonstração: Como u é uma solução fraca de (5.1) existe $b \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ com $b \in B(t,x,u)$ e de (5.45) temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{ds} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + M\left[\|\nabla u(s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|u(s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right] + \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\qquad \leq M_1 \int_{\mathbb{R}^n} |L(s,x)|^{p/p-2} dx + M_2 \int_{\mathbb{R}^n} |L(s,x)|^{\theta'} dx
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por e^{2s} e integrando em s de τ a t temos

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2M \int_\tau^t e^{-2(t-s)} \|u(s)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p ds \leq e^{-2(t-\tau)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&+ 2M_1 \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)}|L(s,x)|^{p/(p-2)} dxds + 2M_2 \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)}|L(s,x)|^{np/(np-(n-p)q)} dxds,
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $t \geq \tau$,

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2M \int_\tau^t e^{-2(t-s)} \|u(s)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p ds \leq e^{-2(t-\tau)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \zeta(t).$$

■

Lema 5.2.3 *Dados* u *uma solução qualquer de* (5.1) *e* $\epsilon > 0$, *existe* $T = T(\epsilon) > 0$ *e* $R = R(\epsilon) > 0$; *tal que*

$$\int_{|x| \geq \sqrt{2}r} |u(t,x)|^2 dx < \epsilon, \forall t - \tau > T, r > R.$$

Demonstração: Seja a função de classe C^1

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq \varphi(s) \leq 1, & 1 \leq s \leq 2 \\ 1, & s \geq 2 \end{cases} \tag{5.47}$$

a qual obviamente satisfaz $|\varphi'(s)| \leq C$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$.

Defina $\varphi_r(x) = \varphi(\frac{|x|^2}{r^2}), x \in \mathbb{R}^n$. Se u é uma solução fraca de (5.1) temos por definição

$$\langle u_t, \varphi_r^p u\rangle - \left\langle div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + |u|^{p-2}u, \varphi_r^p u\right\rangle + \langle u, \varphi_r^p u\rangle = \langle b(t,x), \varphi_r^p u\rangle\,,$$

q.t.p $t \in \mathbb{R}$, uma vez que usando o Lema 5.2.1 temos que $\varphi_r^p u \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(\tau, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Vamos olhar para cada parcela separadamente:

$$\begin{aligned} \langle u_t, \varphi_r^p u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi_r^p(x)u(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi_r^{p/2}(x)\varphi_r^{p/2}(x)u(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u(x)\varphi_r^{p/2}(x))_t\varphi_r^{p/2}(x)u(x)dx = \left\langle (u\varphi_r^{p/2})_t, \varphi_r^{p/2}u\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{5.48}$$

Da segunda parcela temos

$$\begin{aligned} &-\left\langle \text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + |u|^{p-2}u, \varphi_r^p(x)u\right\rangle = \langle Au, \varphi_r^p u\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla(\varphi_r^p(x)u(x)) + |u(x)|^{p-2}u(x)(\varphi_r^p(x)u(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla u(x)\varphi_r^p(x) + |\nabla u(x)|^{p-2}u(x)\nabla u(x)\varphi_r^{p-1}(x)\varphi'\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2px}{r^2}dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi_r^p(x)u(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p\varphi_r^p(x) + |u(x)|^p\varphi_r^p(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2}u(x)\nabla u(x)\varphi_r^{p-1}(x)\varphi'\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2px}{r^2}dx \\ &= \|\nabla u\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}u\nabla u\varphi_r^{p-1}\varphi'\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2px}{r^2}dx \end{aligned} \tag{5.49}$$

Observe que como $\varphi\text{'}\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right) = 0$ para $|x| < r$ e $|x| > \sqrt{2}r$ e usando que $|\varphi\text{'}(s)| \leq C$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2} u(x)\nabla u(x)\varphi_r^{p-1}(x)\varphi\text{'}\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2px}{r^2}dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|\,|u(x)|\,\left|\varphi_r^{p-1}\right|\left|\varphi\text{'}\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\right|\frac{2p\,|x|}{r^2}dx \\ &\leq \frac{2pC\sqrt{2}r}{r^2}\int_{r\leq|x|\leq\sqrt{2}r} |\nabla u(x)|^{p-1}|u(x)|\,dx \\ &\leq \frac{2pC\sqrt{2}}{r}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-1}|u(x)|\,dx\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{p-2} u(x)\nabla u(x)\varphi_r^{p-1}(x)\varphi\text{'}\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2px}{r^2}dx \\ &\leq \frac{2pC\sqrt{2}}{r}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \frac{2pC\sqrt{2}}{r}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned} \tag{5.50}$$

Na terceira parcela temos

$$\langle u, \varphi_r^p u\rangle = \left\|u\varphi_r^{p/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \tag{5.51}$$

Finalmente, na última parcela usamos a hipótese que garante a unicidade de solução ou seja, B é globalmente Lipschitz então

$$\begin{aligned}\langle b(t,x,u), \varphi_r^p u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} b(t,x,u)\varphi_r^p(x)u(x)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)||u(t,x)|^2\varphi_r^p(x)dx\end{aligned}$$

Escolhendo $\eta > 0$ e aplicando a Desigualdade de Young

$$\langle b(t,x,u), \varphi_r^p u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{1}{\eta^{r\text{'}}r\text{'}}|L(t,x)|^{r\text{'}} + \frac{\eta^r}{r}|u(t,x)|^{2r}\right]\varphi_r^p(x)dx$$

Fazendo $r = \frac{p}{2}$ e $r\text{'} = \frac{p}{p-2}$ temos

$$\langle b(t,x,u), \varphi_r^p u\rangle = M_1\int_{\mathbb{R}^n} |L(t,x)|^{\frac{p}{p-2}}\varphi_r^p(x)dx + \frac{\eta^r}{r}\|u(t)\varphi_r\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Usando que $\varphi_r^p(x) = 0$ para $|x| \leq r$, $\varphi_r^p(x) = 1$ para $|x| \geq \sqrt{2}r$ e $\varphi_r^p(x) \leq 1$ para $r \leq |x| \leq \sqrt{2}r$ temos

$$\langle b(t,x,u), \varphi_r^p u\rangle \leq \frac{\eta^r}{r}\|u(t)\varphi_r\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + M_1\int_{|x|\geq r} |L(t,x)|^{\frac{p}{p-2}}\,dx$$

Como $L \in L^{p/p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, dado $\widetilde{\epsilon} > 0$, existe $\widetilde{R} > 0$, tal que

$$\int_{|x|\geq r} |L(t,x)|^{p/p-2}\, dx < \widetilde{\epsilon}, \quad r \geq \widetilde{R}, \text{q.t.p. } t \in [\tau, T].$$

Ento

$$\langle b(t,x,u), \varphi_r^p u\rangle \leq \frac{\eta^r}{r} \|u(t)\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + M_1\widetilde{\epsilon} \tag{5.52}$$

Usando (5.48), (5.49), (5.51) e (5.52) temos q.t.p em t

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &+ \|\nabla u(t)\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^{p-2} u(x)\nabla u(t,x) p\varphi_r^{p-1}(x)\varphi\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2x}{r^2}dx \\ &+ \left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\eta^r}{r}\|u(t)\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + M_1\widetilde{\epsilon}\end{aligned}$$

Escolha $\eta > 0$ tal que $k := (1 - \eta^r/r) > 0$ então

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + k\|\nabla u(t)\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\varphi_r\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dx \\ &\leq M_1\widetilde{\epsilon} - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^{p-2} u(t,x)\nabla u(t,x) p\varphi_r^{p-1}(x)\varphi\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\frac{2x}{r^2}dx\end{aligned}$$

Usando (5.50) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M_1\widetilde{\epsilon} + \frac{2pC\sqrt{2}}{r}\|\nabla u(t)\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando a Desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq M_1\widetilde{\epsilon} \\ &+ \frac{2pC\sqrt{2}}{r}\left[\frac{p-1}{p}\|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{p}\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right].\end{aligned}$$

Portanto, q.t.p em t temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\|u(t)\varphi_r^{p/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M_1\widetilde{\epsilon} + \frac{2(p-1)C\sqrt{2}}{r}\|u(t)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

Faça $Y(s) := \int_{\mathbb{R}^n}\left|u(s,x)\varphi_r^{p/2}(x)\right|^2 dx$. Então q.t.p em s teremos

$$\dot{Y}(s) + 2Y(s) \leq M_1\widetilde{\epsilon} + \frac{4(p-1)C\sqrt{2}}{r}\|u(t)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Multiplicando a equação acima por e^{2s} teremos

$$\frac{d}{ds}\left[Y(s)e^{2s}\right] \leq M_1\widetilde{\epsilon}e^{2s} + \frac{4(p-1)C\sqrt{2}}{r}e^{2s}\|u(t)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Integrando de τ a t temos

$$Y(t) \leq Y(\tau)e^{-2(t-\tau)} + M_1\widetilde{\epsilon} + \frac{4(p-1)C\sqrt{2}}{r}\int_\tau^t e^{-2(t-s)}\left\|u(s)\right\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}ds.$$

Usando o Lema 5.2.2 temos para todo $t \geq \tau$

$$Y(t) \leq \left\|u_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-2(t-\tau)} + M_1\widetilde{\epsilon} + \frac{2(p-1)C\sqrt{2}}{r}\left(e^{-2(t-\tau)}\left\|u_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \zeta(t)\right).$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon) > 0$ e $R = R(\epsilon) > \widetilde{R}$ tal que para todo $t - \tau > T$ e $r > R$

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}^n}\left|u(t,x)\varphi_r^{p/2}(x)\right|^2 dx < \epsilon.$$

Ou seja, para todo $t - \tau > T$ e $r > R$

$$\int_{|x|\geq\sqrt{2}r}\left|u(s,x)\right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|u(t,x)\varphi_r^{p/2}(x)\right|^2 dx < \epsilon$$

■

O próximo resultado mostra que o gráfico da aplicação unívoca $v \mapsto U(t,\tau)v$, para todo $t \geq \tau$ e todo $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ é fracamente fechado.

Lema 5.2.4 *Seja $\beta_m \rightharpoonup \beta$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $\xi_m \in U(t,\tau)\beta_m$ com $\xi_m \rightharpoonup \xi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\xi \in U(t,\tau)\beta$.*

Demonstração: Seja j_m uma sequência crescente de números reais tal que $j_m \to \infty$ e seja $\Omega_{r_{j_m}}$ como na demonstração do Teorema 5.0.1. Para cada m seja $u_{r_{j_m}}$ uma solução da equação (5.2) em $\Omega_{r_{j_m}}$ com dado inicial $u_{0r_{j_m}}$.

De forma inteiramente análoga à demonstração do Teorema 5.0.1 mostramos que para cada $k > 0$, $L_k u_{r_{j_m}} \rightharpoonup L_k u_\infty$ em $L^2(\tau, T, L^2(\Omega_{r_k}))$, onde u_∞ é solução fraca de (5.1).

Para concluir basta deduzir que $u_\infty(\tau) = \beta$ e que $u_\infty(t) = \xi$. Para isto, vamos mostrar que $L_k u_{r_{j_m}}(r) \rightharpoonup L_k u_\infty(r)$, para todo $r \in [\tau, T]$, em $L^2(\Omega_{r_k})$. Primeiramente, como fizemos na demonstração do Teorema 5.0.1, podemos notar que $\left\{\frac{\partial L_k u_{r_{j_m}}}{\partial t}\right\}$ é uma sequência limitada de $L^{p'}(\tau, T; (W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*)$, então $L_k u_{r_{j_m}} : [\tau, T] \to (W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*$ é uma família equicontínua de funções. Para cada $r \in [\tau, T]$ fixo, temos do Lema 5.2.1 que $\left\|L_k u_{r_{j_m}}(r)\right\|^2_{L^2(\Omega_{r_k})}$ é uniformemente limitada em j_m então $L_k u_{r_{j_m}}(r) \rightharpoonup L_k u_\infty(r)$ em $L^2(\Omega_{r_k})$, q.t.p em r, quando $j_m \to \infty$, ou seja

$$\int_{\Omega_{r_k}}(L_k u_{r_{j_m}}(r) - L_k u_\infty(r))\varphi(r)dx \to 0, \text{ para todo } \varphi \in L^2(\Omega_{r_k}).$$

Em particular,

$$\int_{\Omega_{r_k}} (L_k u_{r_{jm}}(r) - L_k u_\infty(r))\varphi(r)dx \to 0, \text{ para todo } \varphi \in W^{1,p}(\Omega_{r_k}),$$

uma vez que $W^{1,p}(\Omega_{r_k}) \subset L^2(\Omega_{r_k})$. Portanto, $L_k u_{r_{jm}}(r) \to L_k u_\infty(r)$ em $(W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*$. De fato

$$\left\| L_k u_{r_{jm}}(r) - L_k u_\infty(r) \right\|_{(W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*} =$$
$$\sup_{v\in W^{1,p}(\Omega_{r_k});\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_{r_k})}\leq 1} \int_{\Omega_{r_k}} (L_k u_{r_{jm}}(r) - L_k u_\infty(r))v(r)dx \to 0$$

Aplicando o teorema de Ascoli-Arzelá deduzimos que $\left\{L_k u_{r_{jm}}(t)\right\}$ é uma sequência precompacta em $C([\tau, T]; (W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*)$.

Portanto, como $L_k u_{r_{jm}} \rightharpoonup L_k u_\infty$ em $L^{p'}(\tau, T; (W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*)$, passando a uma subsequência temos que $L_k u_{r_{jm}}(r) \to L_k u_\infty(r)$ em $C([\tau, T]; (W^{1,p}(\Omega_{r_k}))^*)$. A limitação de $L_k u_{r_{jm}}(r)$ em $L^2(\Omega_{r_k})$ implica por um argumento padrão que $L_k u_{r_{jm}}(r) \rightharpoonup L_k u_\infty(r)$, em $L^2(\Omega_{r_k})$ para todo r.

Em particular, $L_k u_{r_{jm}}(\tau) \rightharpoonup L_k u_\infty(\tau)$, e então $L_k u_\infty(\tau) = L_k\beta$. Como k é arbitrário temos $u_\infty(\tau) = \beta$. Argumento similar prova que $u_\infty(t) = \xi$.

■

Pelo Lema 5.2.1 temos que o Processo é dissipativo. Assim, para garantirmos a existência do atrator pullback basta mostrarmos o próximo resultado:

Lema 5.2.5 *O Processo $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração: Seja $\{\xi_m\}$ uma sequência qualquer com $\xi_m \in U(t,\tau_m)u_0^m$, onde $u_0^m \in \mathcal{B} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ limitado. Pela dissipatividade $\xi_m \rightharpoonup \xi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\tau_m < \tau_0 < t$ um número arbitrário. Temos pela definição de Processo que $\xi_m \in U(t,\tau_m)u_0^m = U(t,\tau_0)U(\tau_0,\tau_m)u_0^m$. Então existe $\beta_m \in U(\tau_0,\tau_m)u_0^m$ tal que $\xi_n \in U(t,\tau_0)\beta_n$ e ainda pela dissipatividade $\beta_n \rightharpoonup \xi_{\tau_0}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então, pelo Lema 5.2.4, $\xi \in U(t,\tau_0)\xi_{\tau_0}$ e $\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf \|\xi_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Vamos provar que $\limsup \|\xi_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e então teremos que $\xi_m \to \xi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou seja, o processo é assintoticamente compacto.

Dada u solução fraca de (5.1) existe $b \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ com $b \in B(t,x,u)$ tal que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} b(t,x)u(t,x)dx$$

q.t.p em t. Multiplicando a equação por e^{2s} teremos

$$\frac{d}{ds}\left(\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{2s}\right) = 2\int_{\mathbb{R}^n} e^{2s} b(t,x)u(t,x)dx - 2e^{2s}\|u(s)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Integrando de τ a τ_0 temos para todo $t \geq \tau$

$$\begin{aligned}\|u(\tau_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-2(t-\tau)} + 2\int_\tau^{\tau_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)} b(t,x)u(t,x)dxds \\ &\quad - 2\int_\tau^{\tau_0} e^{-2(t-s)}\|u(s)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ds \end{aligned} \tag{5.53}$$

Seja $\{u_m(\cdot)\}$ uma sequência de soluções fracas tal que $u_m(\tau_0) = \xi_n$ e $u_m(\tau) = \beta_m$. Como u_m é uma solução fraca existe $b_n \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ com $b_m \in B(t, x, u_m)$. Como u_m satisfaz (5.53) temos

$$\begin{aligned}\|\xi_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\beta_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-2(t-\tau)} - 2\int_\tau^{\tau_0} e^{-2(t-s)}\|u_m(s)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\quad + 2\int_\tau^{\tau_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)} b_m(t,x)u_m(t,x)dxds \end{aligned} \tag{5.54}$$

Vamos olhar cada termo separadamente. Como β_m é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\|\beta_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-2(t-\tau)} \leq M e^{-2(t-\tau)}, \quad \forall n. \tag{5.55}$$

Além disso, do Lema 5.2.1 temos

$$\begin{aligned}\limsup_{m\to\infty}&\left(-2\int_\tau^{\tau_0} e^{-2(t-s)}\|u_m(s)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ds\right) \\ &= -\liminf_{m\to\infty}\int_\tau^{\tau_0} e^{-2(t-s)}\|u_m(s)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq -2\int_\tau^{\tau_0} e^{-2(t-s)}\|u(s)\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ds \end{aligned} \tag{5.56}$$

Antes de analisarmos o lim sup da última parcela observe o seguinte. Dado $r > 0$ qualquer, temos que $u_m \to u$ em $L^2(\tau, T; L^2(\Omega_r))$. De fato, por hipótese temos unicidade de solução ou seja, cada u_m é uma solução obtida conforme o Teorema 5.0.1 então é possível mostrar que $u_m \to u$ em $L^2(\tau, T; L^2(\Omega_r))$ pelo Teorema 1.3.2.

Portanto, $u_m \to u$ em $L^2((\tau, T)\times\Omega_r)$ então $u_m(t,x) \to u(t,x)$ q.t.p. $(t,x) \in (\tau, T)\times\Omega_r$. Como $r > 0$ é qualquer temos que $u_m(t,x) \to u(t,x)$ q.t.p. $(t,x) \in (\tau, T)\times\mathbb{R}^n$.

Vamos analisar a última parcela.

Afirmação: $b_m \in L^2(\tau, T; L^2(\Omega_r))$ e é uniformemente limitado neste espaço. De fato, como B é globalmente Lipschitz por hipótese,

$$\begin{aligned} \|b_m\|_{L^2(\tau,T;L^2(\Omega_r))} &= \int_\tau^T \|b_m(t)\|^2_{L^2(\Omega_r)} \\ &\leq \|L(T)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\tau^T \|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega_r)}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.2.1 esta integral é limitada por uma contante que depende da norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$ dado inicial, ou seja, $\|u_0^m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, mas esta é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Logo, $b_m \rightharpoonup b$ em $L^2(\tau, T; L^2(\Omega_r))$ e além disso, como $u_m(t,x) \to u(t,x)$ q.t.p em $(t,x) \in (\tau, T) \times \Omega_r$ temos pela hipótese A.1 que $b \in B(t,x,u)$. Como $u_m \to u$ em $L^2((\tau,T) \times \Omega_r)$ então

$$\left\langle e^{-2(t-s)} b_m(t,x), u_m(t,x) \right\rangle_{L^2(\tau,T;L^2(\Omega_r))} \to \left\langle e^{-2(t-s)} b(t,x), u(t,x) \right\rangle_{L^2(\tau,T;L^2(\Omega_r))}$$

Além disso, usando a Desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} 2\int_\tau^{\tau_0} \int_{|x|\geq r} e^{-2(\tau_0-s)} b_m(t,x) u_m(t,x) &\leq \int_\tau^{\tau_0} e^{-2(\tau_0-s)} \int_{|x|\geq r} |b_m(t,x)|^2 dxds \\ &+ \int_\tau^{\tau_0} e^{-2(\tau_0-s)} \int_{|x|\geq r} |u_m(t,x)|^2 dxds. \end{aligned}$$

Como por hipótese B é globalmente Lipschitz temos

$$\begin{aligned} 2\int_\tau^{\tau_0} \int_{|x|\geq r} e^{-2(\tau_0-s)} b_m(t,x) u_m(t,x) &\leq \|L(\tau_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\tau^{\tau_0} e^{-2(\tau_0-s)} \int_{|x|\geq r} |u_m(t,x)|^2 dxds \\ &+ \int_\tau^{\tau_0} e^{-2(\tau_0-s)} \int_{|x|\geq r} |u_m(t,x)|^2 dxds. \end{aligned}$$

Usando o Lema 5.2.3 temos

$$\begin{aligned} 2\int_\tau^{\tau_0} \int_{|x|\geq r} e^{-2(\tau_0-s)} b_m(t,x) u_m(t,x) &\leq \|L(\tau_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \epsilon \int_\tau^{\tau_0} e^{-2(\tau_0-s)} ds \\ &+ \epsilon \int_\tau^{\tau_0} e^{-2(\tau_0-s)} ds \\ &\leq \epsilon \|L(\tau_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty} + 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)} b_m(t,x)u_m(t,x)dxds \\
&\quad = \limsup_{m\to\infty} + 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{\Omega_r} e^{-2(t-s)} b_m(t,x)u_m(t,x)dxds \\
&\quad + \limsup_{m\to\infty} + 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{|x|\geq r} e^{-2(t-s)} b_m(t,x)u_m(t,x)dxds \\
&\quad \leq 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{\Omega_r} e^{-2(t-s)} b(t,x)u(t,x)dxds \\
&\quad + \leq \epsilon \left\| L(\tau_0) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $r \to \infty$ teremos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty} + 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)} b_m(t,x)u_m(t,x)dxds \\
&\quad \leq 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)} b(t,x)u(t,x)dxds \\
&\quad + \leq \epsilon \left\| L(\tau_0) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \epsilon. \qquad (5.57)
\end{aligned}$$

Usando (5.55), (5.56) e (5.57) teremos

$$\begin{aligned}
\limsup \left\| u_m \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq Me^{-2(t-\tau)} - 2\int_{\tau}^{\tau_0} e^{-2(t-s)} \left\| u(s) \right\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ds \\
&+ 2\int_{\tau}^{\tau_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2(t-s)} b(t,x)u(t,x)dxds \\
&+ \epsilon \left\| L(\tau_0) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\xi \in U(t,\tau_0)\xi_{\tau_0}$ temos

$$\limsup \left\| \xi_m \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq Me^{-2(t-\tau)} + \left\| \xi \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \left\| \xi_{\tau_0} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} e^{-2(t-\tau)} + \epsilon \left\| L(\tau_0) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \epsilon.$$

Passando o limite quando $\tau \to -\infty$ e $\epsilon \to 0$ teremos

$$\limsup \left\| \xi_m \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \xi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

■

5.3 Trajetórias Completas Extremas

Para provarmos a existência de trajetórias completas extremas devemos verificar as hipóteses do Teorema 3.2.2. Para garantirmos condição de monotonicidade do processo vamos provar um resultado de comparação das soluções de (5.1).

Antes de enunciarmos o resultado de comparação considere, como anteriormente, $\Omega_{r_j} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < r_j\}$ com $r_j \to \infty$, e o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\overline{u}_{r_j} - \operatorname{div}\left(\left|\nabla \overline{u}_{r_j}\right|^{p-2} \nabla \overline{u}_{r_j}\right) + \left|\overline{u}_{r_j}\right|^{p-2} \overline{u}_{r_j} + \overline{u}_{r_j} \in \overline{B}(t, \overline{u}_{r_j}), t \geq \tau \\ \overline{u}_{r_j}(\tau, x) = \overline{u}_{0r_j}(x) \in L^2(\Omega_{r_j}) \\ \overline{u}_{r_j}(t, x) = 0, x \in \partial\Omega_{r_j}, \quad \forall t \geq \tau \end{cases} \tag{5.58}$$

Teorema 5.3.1 *Sejam $u_0, \overline{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ com $u_0 \leq \overline{u}_0$. Então existe uma solução $u_\infty(\cdot)$ de (5.1) com dado inicial u_0 e existe uma solução $\overline{u}_\infty(\cdot)$ de (5.1) com dado inicial $\overline{u}_0$ definidas em $[\tau, T)$ tais que $u_\infty(t, x) \leq \overline{u}_\infty(t, x)$, para todo $t \in [\tau, T)$ e q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.4 dada uma solução $u_{r_j}(t)$ de (5.58) com dado inicial u_{0r_j} existe uma solução $\overline{u}_{r_j}(t)$ de (5.58) tal que

$$u_{r_j}(t, x) \leq \overline{u}_{r_j}(t, \overline{x}), \quad \text{para todo} \quad t \in [\tau, T) \quad \text{e q.t.p. } x \in \Omega_{r_j}.$$

Considere $\widehat{u}_{r_j}(t)$ e $\widehat{\overline{u}}_{r_j}(t)$ como na demonstração do Teorema 5.0.1. Claramente

$$\widehat{u}_{r_j}(t, x) \leq \widehat{\overline{u}}_{r_j}(t, x), \quad \text{para todo} \quad t \in [\tau, T) \quad \text{e q.t.p. } x \in \Omega_{r_j}.$$

Fixe $k > 0$ tal que $r_k < r_j - 1$ e sejam $L_k\widehat{u}_{r_j}$ e $L_k\widehat{\overline{u}}_{r_j}$ as restrições de u_{r_j} e $\overline{u}_{r_j}$, respectivamente a $\Omega_{r_k} \subset \Omega_{r_j}$. Então

$$L_k\widehat{u}_{r_j}(t, x) \leq L_k\widehat{\overline{u}}_{r_j}(t, x), \quad \text{para todo} \quad t \in [\tau, T] \quad \text{e q.t.p. } x \in \Omega_{r_j} \tag{5.59}$$

De (5.33) temos que $L_k\widehat{u}_{r_j}(t, x) \to u_{k\infty}(t, x)$ q.t.p. $(t, x) \in (\tau, T] \times \Omega_{r_k}$ e analogamente, $L_k\widehat{\overline{u}}_{r_j}(t, x) \to \overline{u}_{k\infty}(t, x)$ q.t.p. $(t, x) \in (\tau, T] \times \Omega_{r_k}$. Passando o limite quando $j \to \infty$ em (5.59) temos

$$u_{k\infty}(t, x) \leq \overline{u}_{k\infty}(t, x)$$

q.t.p. $(t, x) \in (\tau, T] \times \Omega_{r_k}$.

Assim, como $k > 0$ é qualquer,

$$u_\infty(t, x) \leq \overline{u}_\infty(t, x)$$

q.t.p. $(t, x) \in (\tau, T] \times \Omega_{r_k}$. Do Lema 5.0.14 $u_\infty, \overline{u_\infty} \in C((\tau, T); L^2(\mathbb{R}^n))$ então

$$u_\infty(t, x) \leq \overline{u}_\infty(t, x)$$

para todo $t \in [\tau, T]$ e q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. ∎

Finalmente, para verificarmos as hipóteses do Teorema 3.2.2 basta mostrarmos que $\bigcup_{\tau \leq t} \mathcal{A}(\tau)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$, para isso vamos mostrar que o processo multívoco é fortemente limitado dissipativo e então, pelo Teorema 1.4.5, teremos que $\bigcup_{\tau \leq t} \mathcal{A}(\tau)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Mas isso segue diretamente do Lema 5.2.2. Portanto, o atrator pullback do problema (5.1) possui soluções extremas de acordo com o Teorema 3.2.2.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, C. O.; GONÇALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. On elliptic equation in $\mathbb{R}^n$ with critical exponents. Electronic Journal of Differential Equation, no.9 (1996) 1-11.

[2] ARRIETA, J. M.; CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T.; BERNAL, A. R. Asymptotic behavior and attractors for reaction diffusion equations in unbounded domains. Nonlinear Analysis 56 (2004) 515-554.

[3] ARRIETA, J. M.; BERNAL, A. R.; VALERO, J. Dynamics of a reaction-diffusion equation with a discontinuous nonlinearity. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 16, no. 10, (2006) 2965-2984.

[4] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; BERNAL, A. R. Continuity of Dynamical Strutures for non autonomous evolution equation under singular perturbations, Cadernos de Matemática 10, SMA 307, May (2009) 35-98.

[5] AUBIN, J. P.; EKELAND, I. *Applied Nonlinear Analysis.* John Wiley and Sons, Canada, 1976.

[6] BABIN, A. V.; VISHIK, M. I. Maximal attractors of semigroups corresponding to evolutionary differential equations. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 126(168), no. 3, (1985) 397-419.

[7] BABIN, A. V.; VISHIK, M. I. Attractors of differential evolution equation in unbounded domain. Proceeding Royal Society Edinburgh A 116 (1990) 221-243.

[8] BALL, J. M. On the asymptotic behavior of Generalized processes with applications to nonlinear evolution equations. Journal of Differential Equations 27 (1978) 224-265.

[9] BALL, J. M. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations. J. Nonlinear Sci. 7, no. 5, (1997) 475-502.

[10] BARBASHIN, E. A. On the theory of general dynamical systems. (Russian) Ucenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. 135, (1948). Matematika, Tom II, 110-133.

[11] BERNAL, A. R.; WANG, B. Attractors for partly dissivative reaction-diffusion systems in $\mathbb{R}^n$. J. Math. Anal. Appl. 252 (2000) 790-803.

[12] BRÉZIS, H. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[13] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Matrise. Masson, Paris, 1983.

[14] BRIDGLAND, T. F., Jr. Contributions to the theory of generalized differential equations. I, II. Math. Systems Theory 3 (1969), 17-50;

[15] BRONSTEIN, I. U. Dynamical systems without uniqueness as semigroups of non-single-valued mappings of a topological space. (Russian) Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven, no. 1, (1963) 3-18.

[16] BROWDER, F. *Nonlinear elliptic boundary value problems.*Bull.Amer. Math. Soc., 1963.

[17] BROWDER, F. E. *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces,* in "‘Proceedings, Symposium in Pure Mathematics,"’ Vol.18, Part 2, Amer.Math.Soc., 1976.

[18] BUDAK, B. M. *The concept of motion in a generalized dynamical system.* (Russian) Moskov. Gos. Univ. Uc. Zap. Mat. 155(5) (1952), 174-194.

[19] CARABALLO, T.; LANGA, J. A.; MELNIK, V. S.; VALERO, J. Pullback attractors of Nonautonomous and Stochastic Multivalued Dynamical Systems. Set-Valued Analysis 11 (2) (2003) 153-201.

[20] CARABALLO, T., MARIN-RUBIO, P., ROBINSON, J.C. A comparison between two theories for multi-valued semiflows and their asymptotic behaviour. Set-Valued Anal. 11(3) (2003) 297-322.

[21] CARABALLO, T.; LANGA, J. A.; VALERO, J. Asymptotic behavior of monotone multi-valued dynamical systems. Dynamical System, vol. 20, no.3 (2005) 301-321.

[22] CARABALLO, T.; LUKASZEWICZ, G.; REAL, L. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems. Nonlinear Anal. 64 (2006) 484-498.

[23] CARABALLO, T.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; RIVERO, F. Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes. Nonlinear Analysis 72 (2010) 1967-1976.

[24] CARABALLO, T.; RIVERO, F.; LANGA, J. A.; CARVALHO, A. N. A Gradient-like non autonomous evolution process. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 20, (2010) 2751-2760.

[25] CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T. Global attractors for problems with monotone operators. Bolletino U.M.I., v.2, no.3, (1999) 693-706.

[26] CARVALHO, A. N.; GENTILE, C. B. Comparison results for nonlinear parabolic equations with monotone principal part. J. Math. Anal. Appl. 259 (2001) 319-337.

[27] CARVALHO, A. N.; DLOTKO, T. Partially Dissipative Systems in Uniformly Local Spaces. Colloquium Mathematicum, 100(2), (2004) 221-242.

[28] CARVALHO, A. N.; GENTILE, C. B. Asymptotic behaviour of non-linear parabolic equations with monotone principal part. J. Math. Anal. Appl. 280 (2003) 252-272.

[29] CARVALHO, A. N.; PISKAREV, S. A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems. Numerical functional analysis and optimization. v.27, no.7-8, (2006) 785-829.

[30] CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C.; SUAREZ, A. Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system. (English summary) J. Differential Equations 236, no. 2, (2007) 570-603.

[31] CHEBAN, D. N.; KLOEDEN, P. E.; SCHMALFUß, B. The relationship between pullback, forward and global attractors of nonautonomous dynamical systems. Nonlinear Dyn. Syst. Theory 2, no. 2, (2002) 125-144.

[32] CHEN, G.; ZHONG, C. Uniform attractors for non-autonomous p-Laplacian equations. Nonlinear Analysis 68 (2008) 3349-3363.

[33] CHEN, G. Uniform attractors for the non-autonomous parabolic equation with nonlinear Laplacian principal part in unbounded domain. Differ. Equ. Appl. 2, no. 1, (2010) 105-121

[34] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension. J.Math.Pures Appl.73 (1994), 279-333.

[35] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. Trajectory attractors for evolution equations. C. R. Acad. Sci. Paris Série. I Math. 321, no. 10, (1995) 1309-1314.

[36] CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. Attractors for equations of mathematical physics. American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. American Mathematical Society, Providence, RI, (2002) 37-02.

[37] CRAUEL, H.; FLANDOLI, F. Attractors for random dynamic systems. Prob. Theory Related Fields,100(1994) 365-393.

[38] CRAUEL, H.; DEBUSSCHE, A.; FLANDOLI, F. Random Attractors. Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol.9. No.2 (1997) 307-341.

[39] DANERS, D.; MERINO, S. Gradient-like parabolic semiflows on BUC($\mathbf{R}^N$). (English summary) Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128, no. 6, (1998) 1281-1291.

[40] FOLLAND, G. B. *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons Publication, 1984.

[41] GENTILE, C. B.; PRIMO, M. R. T. *Parameter Dependent Quasi-linear Parabolic Equations.* Nonlinear Anal. 59, no.5, (2004) 801-812.

[42] HALE, J. K. *Asymptotic Behavior of Dissipative System.* American Mathematical Society (1989).

[43] KAPUSTYAN, A. V.; MELNIK, V. S. Global attractors of multivalued semidynamical systems and their approximations. (Russian) Kibernet. Sistem. Anal. no. 5 (1998) 102-111,

[44] KAPUSTYAN, A. V.; MELNIK, V. S.; VALERO, J.; YASINSKY, V. V. Global Attractors of Multivalued Dynamical Systems and Evolution Equations Without Uniqueness. Monograph - K. Nauk. dumka, 2008 -215.

[45] KHANMAMEDOV, A. K. Existence of a global attractor for the parabolic equation with nonlinear Laplacian principal part in an unbounded domain. J. Math. Anal. Appl. 316 (2006) 601-615.

[46] KHANMAMEDOV, A. K. Global attractors for one dimensional p-Laplacian equation. Nonlinear Anal. 71, no. 1-2, (2009) 155-171.

[47] KLOEDEN, P. E. *General control systems.* Mathematical control theory (Proc. Conf., Australian Nat. Univ., Canberra, 1977), pp. 119-137, Lecture Notes in Math., 680, Springer, Berlin, 1978.

[48] KLOEDEN, P. E.; SCHMALFUß, B. Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization. Numerical Algorithms 14 (1997), 141-152.

[49] KLOEDEN, P. E.; SCHMALFUß, B. Asymptotic behaviour of non-autonomous difference inclusions. Systems and Control Letters, 33 (1998) 275-280.

[50] KLOEDEN, P. E. Pullback attractors in nonautonomous difference equations. J. Difference Equ. Appl. 6 (2000) 33-52.

[51] LANGA, J. A., SUAREZ, A. Pullback permanence for non-autonomous partial differential equations. Electron. J. Differential Equations, no.72, (2002) 275-280.

[52] LADYZHENSKAYA, O. *Attractors for Semigroups and Evolution Equations.* Lezioni Lincee, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[53] MELNIK, V. S. Multivalued semiflows and their attractors. (Russian) Dokl. Akad. Nauk 343, no. 3, (1995) 302-305.

[54] MELNIK, V. S.; VALERO, J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions. Set-Valued Analysis. 6(1) (1998) 83-111.

[55] MELNIK, V. S. On global attractors of multivalued semiprocesses. Dokl.A.Kad. 7 (1999), 12-17.

[56] MELNIK, V. S.; VALERO, J. On global attractors of multivalued semiprocesses and nonautonomous evolution inclusions. Set-Valued Analysis.8 (2000) 375-403.

[57] MINKEVIČ, M. I. The theory of integral funnels in generalized dynamical systems without a hypothesis of uniqueness. (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 59, (1948) 1049-1052.

[58] MERINO, S. On the existence of the compact global attractor for semilinear reaction diffusion systems on $\mathbb{R}^N$. J. Differential Equations 132, no. 1, (1996) 87-106.

[59] MORILLAS, F.; VALERO, J. Atractors for reaction-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$ with continuous nonlinearity. Asymptotic Analysis. 44, no. 1-2, (2005) 111-130.

[60] MINTY, G. *On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces.* Proc.Nat. Acad. Sci. USA, 1963.

[61] ÔTANI, M. Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems. J. Differential Equations 46 (1982) 268-299.

[62] ROBINSON, J. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[63] ROBINSON, J. C.; BERNAL, A. R.; LOPEZ, A. V. Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems. J. Differential Equations 238 (2007) 289-337.

[64] ROXIN, E. On generalized dynamical systems defined by contingent equations. J. Differential Equations 1 (1965) 188-205.

[65] ROXIN, E. Stability in general control systems. J. Differential Equations 1 (1965) 115-150.

[66] SCHMALFUß, B. Attractors for the non-autonomous dynamical systems, in: International Conference on Differential Equations, vols. 1, 2, Berlin (1999) World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000, 684-689.

[67] SELL, G. Nonautonomous differential equations and dynamical systems. Trans. Am. Math. Soc. 127 (1967) 241-283.

[68] SELL, G. R. Differential equations without uniqueness and classical topological dynamics. J. Differential Equations 14 (1973), 42-56.

[69] SINSEM, J.; GENTILE, C. B. On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows. Set-Valued Anal. 16 (2008), no. 1, 105-124.

[70] SINSEM, J.; GENTILE, C. B. On p-laplacian differential inclusions-global existence, compactness properties and asymptotic behavior. Nonlinear Analysis. 71 (2009) 4388-3500.

[71] SIMSEN, J. Degenerate p-Laplacian parabolic problems in $\mathbb{R}^n$. Preprint (2009).

[72] SZEGO, G. P.; TRECCANI, G. *Semigruppi di transformazioni multivoche.* (Italian) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 101 Springer-Verlag, Berlin-New York 1969

[73] TEMAM, R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[74] TOLSTONOGOV, A. A. On solutions of evolution inclusion I. Sibirsk. Mat. Zh. 33(3)(1992) 161-174 (English translation in Siberian Math.J.33(3)(1992).

[75] VRABIE, I. I. *Compactness methods for nonlinear evolutions,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Pitman, London,1987.

[76] WANG, B. Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domain. Phys. D 128 (1999) 41-52.

[77] WANG, B.; JONES, R. Asymptotic behavior of a class of non-autonomous degenerate parabolic equations. Nonlinear Anal. 72, no. 9-10, (2010) 3887-3902.

[78] WANG, Y.; WANG, L.; ZHAO, W. Pullback attractors for nonautonomous reaction-diffusion equations in unbounded domain. J.Math.Anal.Appl. 336 (2007) 330-347.

[79] YANG, M.; SUN, C.; ZHONG, C. Global attractors for p-Laplacian equation. J. Math. Anal. Appl. 327, no. 2, (2007) 1130-1142.

[80] YANG, M.; SUN, C.; ZHONG, C. Existence of a global attractor for a p-Laplacian equation in $\mathbb{R}^n$. Nonlinear Anal. 66, no. 1, (2007) 1-13.