

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores efetivos para guia de ondas com condição
de Robin no plano e espaço

Alex Ferreira Rossini

São Carlos - SP
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores efetivos para guia de ondas com condição de Robin no plano e espaço

Alex Ferreira Rossini

Tese apresentada ao PPG-M da
UFSCar como parte dos requisitos
para obtenção do título de Doutor
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

São Carlos - SP

2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

R835oe Rossini, Alex Ferreira.
Operadores efetivos para guia de ondas com condição de Robin no plano e espaço / Alex Ferreira Rossini. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
107 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Física matemática. 2. Operadores efetivos. 3. Guia de ondas. 4. Condição de Robin. 5. Plano e espaço. I. Título.

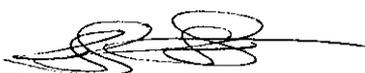
CDD: 530.15 (20^a)

Banca Examinadora:



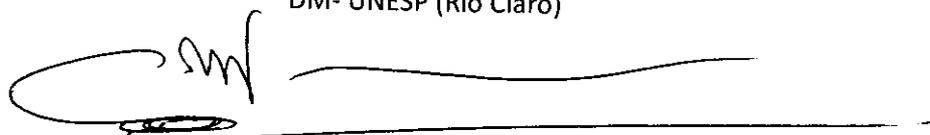
Prof. Dr. Cesar R. de Oliveira

Orientador



Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

DM- UNESP (Rio Claro)



Prof. Dr. Paulo Faria da Veiga

ICMC- USP



Prof. Dr. Arnaldo S. do Nascimento

DM- UFSCar



Prof^a. Dr^a. Alessandra A. Verri

DM- UFSCar

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Confia, espera, Ele vem e seu compromisso assumido se cumpre!

Na busca incessante pelo conhecimento é certo que me abstive de muitos momentos importantes pra mim. Nesse longo período acadêmico, contar com a minha família foi essencial. Não posso deixar de mencionar o apoio de meus pais em todos os sentidos. Pai, Mãe saibam que vós sois a minha maior motivação, são os meus modelos de conduta e vida. Obrigado pelo amor que me deram cada um a sua maneira, seria muito mais difícil sem vocês. A dívida será eterna.

Quero me desculpar a uma pessoa muito especial que eu uni neste tempo em São Carlos. Maria Rosilene, amor permanente, desculpe-me pelas vezes que eu permiti a preocupação com o trabalho de doutorado ir além dos limites. Obrigado por permanecer comigo, às vezes quando possível pessoalmente e mesmo de longe, o estado do Pará não é logo ali, por emails e por horas incontáveis pelo telefone.

Aos professores do Departamento de Matemática grato pelos cursos e conversas, igualmente quero agradecer as secretárias da pós-graduação por toda assistência e convivência. Aos professores da minha banca de defesa meu muitíssimo obrigado por suas leituras e sugestões. Meus amigos de departamento agradeço o convívio nem sempre fácil e a paciência.

Quero agradecer ao professor César Rogério de Oliveira, não apenas por sua orientação, disponibilidade e sempre produtivas sugestões; mas também por sua dedicação com todos seus orientandos; trabalhar ao seu lado é garantia de motivação e crescimento acadêmico, sua ideologia de trabalho é um legado que levarei por onde atuar. A mediação da professora Alessandra Verri neste doutorado foi imprescindível; além disso, agradeço por se dispor a discussões sobre o trabalho de tese. Obrigado madrinha, tu és meu anjo da guarda.

Finalmente, agradeço à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento deste projeto.

Resumo

Iniciamos com uma breve análise das propriedades espectrais do laplaciano de Robin em uma faixa reta infinita, com parâmetro de acoplamento de Robin mudando de sinal. Assumindo que tal parâmetro é uma constante fora de um compacto, encontramos o espectro essencial, e também derivamos uma condição suficiente que garante a existência de estados ligados. Em seguida, temos nos dedicado a estudar o laplaciano em alguns domínios finos e encurvados no plano e no espaço, com um tipo particular de condições de contorno de Robin e de seções transversais; tais condições são não homogêneas, no sentido de que o parâmetro de acoplamento de Robin depende da curvatura da curva de referência. Obtivemos, quando o diâmetro das seções transversais tendem a zero, operadores efetivos por meio de um tipo de convergência em norma dos resolventes. Com essa estrutura de modelagem, as principais novidades são que a curvatura contribui com um potencial repulsivo enquanto a torção (no caso espacial) não desempenha nenhum papel para os operadores efetivos.

Abstract

First we briefly discuss the spectral properties of the Robin Laplacian in a straight and infinitely long planar strip with Robin coupling parameter changing signs. Assuming that such parameter is a constant outside a compact set, we find the essential spectrum, and also derive a sufficient condition that guarantees the existence of bound states. Next, we have studied the Laplacian in some thin curved domains in the plane and space, with a particular type of Robin boundary conditions and cross-sections; such conditions are nonhomogeneous, in the sense that the Robin coupling parameter depends on the curvature of the reference curve. We derive, when the diameter of the cross sections tends to zero, effective operators by means of a kind of convergence of the resolvents. With such modeling framework, the main novelties are that the curvature contributes with a repulsive potential whereas the torsion (in the spatial case) plays no role to effective operators.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Visão geral	1
1.2	Mais detalhes	3
2	Análise funcional e traço	8
2.1	Formas e teoria espectral	8
2.1.1.	Espaços de Sobolev: traço	12
3	Laplaciano de Robin unidimensional	17
3.1	Seção transversal	17
3.2	Espectro: seção transversal	20
3.2.1.	Espectro essencial	22
3.2.2.	Espectro pontual	23
3.3	Laplaciano de Robin sobre uma faixa infinita	25
3.4	Espectro do hamiltoniano na faixa estreita Ω_ϵ	31
3.4.1.	Existência de espectro discreto	38
4	Domínios finos no plano	40
4.1	Mudança de variável	40
4.1.1.	Transformação do hamiltoniano	41
4.2	Redução de dimensão	42
4.2.1.	Potencial e operador efetivo	44
4.3	Aplicação: teoria geral	45

4.4	Teorema principal	46
4.5	Apêndice	48
4.5.1.	Estimativas	48
4.5.2.	Energia potencial	51
4.5.3.	Demonstração do Teorema 18	52
5	Domínios finos e encurvados no plano	55
5.1	Preliminares geométricas	55
5.2	Formas quadráticas e convergência	56
5.2.1.	Condição de fronteira de Robin	57
5.3	Estratégia padrão	58
5.3.1.	Transformação unitária: passo 1	58
5.3.2.	Transformação unitária: passo 2	60
5.4	Forma quadrática	60
5.5	Subespaço para redução de dimensão	62
5.6	Convergência uniforme para formas	63
5.6.1.	Resultado Principal	66
5.7	Apêndice	68
5.7.1.	Demonstração do Lema 5	68
5.7.2.	Demonstração do Lema 6	71
5.7.3.	Demonstração da Proposição 3	71
5.7.4.	Demonstração do Teorema 21	72
5.7.5.	Função potencial	74
6	Tubos finos no espaço	75
6.1	Construção da região tubular	76
6.2	Forma quadrática	77
6.2.1.	Subespaço	81
6.2.2.	Limitação inferior	82
6.3	Laplaciano de Robin na seção transversal	83
6.4	Redução de dimensão	86

SUMÁRIO

ix

6.4.1. Potencial e operador efetivo	86
6.4.2. Resultado Principal	89
6.5 Apêndice	91
6.5.1. Parte não diagonal	91
6.5.2. Potencial efetivo	96
6.5.3. Demonstração do Lema 9	98
6.5.4. Demonstração do Lema 10	100
6.5.5. Demonstração do Lema 11	102
6.5.6. Demonstração da Proposição 6	102

Bibliografia

104

Capítulo 1

Introdução

1.1 Visão geral

Alguns estudos sobre sistemas microfluídicos apresentam modelagens naturais pela equação de Laplace, com condições de contorno que dependem da curvatura [Bat, WS, WSN], e isso passa a ser (tem sido) considerado uma parte crucial dos modelos. Tais condições de contorno estão relacionadas com as relações Young-Laplace [Bat] que descrevem a pressão capilar na interface entre dois fluidos estáticos, devido à tensão superficial.

Tais estruturas finas com condições de contorno dependendo da curvatura, também justificam propor um modelo que poderia ser geral o suficiente para ser de interesse e simultaneamente passível de uma abordagem matemática rigorosa. A ideia consiste em investigar os operadores efetivos para o operador de Laplace em domínios finos, construído ao longo de curvas de referência, com condições de contorno de Robin cujo “parâmetro de Robin” depende da curvatura da curva. Nós temos resultados para modelos específicos em que outras propriedades também desempenham um papel (por exemplo, sinal do parâmetro de Robin). Além do interesse matemático dos nossos modelos, em termos de aplicações em experimentos eles constituem um primeiro passo, mas evidentemente é mais teórico no momento.

Pense numa partícula movimentando-se sobre uma curva no plano ou no espaço. Para manter tal vínculo, seriam necessárias “forças infinitas” na direção normal à cada ponto

dessa curva, e uma maneira de modelar esse vínculo seria considerar o movimento da partícula em uma vizinhança tubular da curva e então tomar o limite em que o diâmetro da seção transversal vai a zero. Entre as questões interessantes que surgem desse procedimento, destacam-se:

- (i) Tal procedimento tem sentido? Como seria possível efetivá-lo?
- (ii) Na descrição da dinâmica limite, surgiriam grandezas que “lembrariam” das dimensões descartadas no processo?
- (iii) Esse processo dependeria de condições de contorno escolhidas?

Neste trabalho vamos investigar alguns casos particulares desse procedimento no caso de uma partícula quântica “livre”, ou seja, o operador de interesse é o operador energia em Mecânica Quântica, o qual é dado pelo laplaciano negativo. Assim, podemos precisar um pouco mais as questões acima neste contexto, em que em princípio o operador sobre a curva seria simplesmente o laplaciano dado em termos da variável comprimento de arco, o operador na vizinhança tubular seria o laplaciano nessa vizinhança com determinadas condições de contorno na fronteira da mesma. Destacamos:

- (j) que já existem técnicas para abordar (i) acima, mas note que os limites são altamente singulares devido, principalmente, à redução de dimensão envolvida, e devem ser entendidos de forma apropriada [BMT₁, dOl₂, DE, FS₁, GJ];
- (jj) de fato, no processo limite podem surgir termos adicionais ao laplaciano sobre a curva, alguns deles de natureza geométrica, contribuindo para formar o que chamamos de *operador efetivo* sobre a curva, o qual guarda certa memória do processo de redução de dimensão;
- (jjj) o operador efetivo depende sensivelmente de algumas condições, particularmente de contornos (Dirichlet [BMT₁, DE] e Neumann [Sch] são os casos mais estudados), e se existe ou não algum defeito na vizinhança tubular [FS₁, dOlV₁].

Nosso principal objetivo é considerar a situação acima em que o laplaciano na vizinhança tubular da curva apresenta uma classe especial de condições de contorno de Robin

e com a seção transversal dessa vizinhança indo a zero uniformemente (i.e., sem defeitos). Há muito pouco na literatura sobre o caso de condição de Robin neste contexto de redução de dimensão [BMT₂, J₁₂, FK].

Dois pontos novos são destaques em nossas considerações: a possibilidade (que de fato ocorre) de mudança de sinal do parâmetro da condição de contorno e uma não-homogeneidade da mesma, no sentido de que algumas vezes a condição depende da curvatura de curva; tais particularidades levam a novos operadores efetivos, destacando-se um papel repulsivo para a curvatura (até então, a curvatura sempre apareceu através de um potencial atrativo) e a ausência da torção da curva de referência no caso de tubos no espaço. Detalhes aparecem mais adiante.

Cabe ressaltar que, aparentemente, o primeiro a propor um processo dessa natureza foi Linus Pauling em 1936 [Pal] para estudos teóricos do benzeno, o que foi desenvolvido de forma um tanto heurística por Ruedenberg e Scherr em 1953 [RSc].

1.2 Mais detalhes

Uma classe de domínios (aberto conexo) que denotamos por Ω de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , que iremos trabalhar, tem como principal característica seu tamanho em uma direção, tais domínios modelam vizinhanças tubulares muito estreitas no plano e espaço. O mais simples cenário é quando Ω é uma faixa infinita no plano, ou seja, uma vizinhança tubular de largura constante ao longo de uma curva Γ em \mathbb{R}^2 , usualmente chamada de *curva de referência*.

Em regiões dessa natureza (alongadas), é de interesse estudar o espectro do laplaciano sujeito a três tipos de condição de fronteira, a saber, Dirichlet, Neumann e combinação destas, chamadas de Robin. Muitos trabalhos dedicam a analisar qual a conexão entre propriedades geométricas e condição de fronteira, por exemplo quando a geometria do domínio induz ou não estados ligados; referimos aos artigos [GJ, KK, FK] e suas referências para mais detalhes.

Tratemos um pouco mais sobre a condição de Robin, a qual homenageia o matemático francês Victor Gustave Robin (1855–1897). Um exemplo concreto de faixa infinita é o espaço $\Omega = \mathbb{R} \times (0, d)$, considerada no trabalho [J₁₂] com a seguinte condição de Robin

imposta sobre a fronteira,

$$\begin{cases} -\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) + \alpha(x)\psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, d) + \alpha(x)\psi(x, d) = 0 \end{cases}, \quad (1.1)$$

$x \in \mathbb{R}$, com o parâmetro de Robin $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *positivo*. No referido artigo o autor dá condições suficientes para garantir a existência de autovalor discreto abaixo do ínfimo do espectro essencial. Seguindo de perto as idéias lá contidas, também demos uma condição para a existência de estado ligado para o laplaciano com a seguinte condição de Robin modificada, aqui escolhemos $d = 1$, note também a mudança de sinal no parâmetro $\alpha(x)$,

$$\begin{cases} -\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) - \alpha(x)\psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1) + \alpha(x)\psi(x, 1) = 0 \end{cases}; \quad (1.2)$$

para mais detalhes vide Capítulo 4, Teorema 16. Observamos que $\psi(x, 0)$ e $\psi(x, d)$ denotam o traço da função ψ sobre as respectivas componentes conexas da fronteira; no Capítulo 2 há mais informações sobre traço de funções. Cabe ressaltar que em geral os operadores com condição de fronteira de Robin são introduzidos através de formas quadráticas apropriadas; isto será seguido em capítulos posteriores.

Como já mencionado, uma questão a qual este trabalho em grande parte se dedicou é com relação à redução de dimensão, em domínio tais como certas faixas planas e certos tubos tridimensionais, no que diz respeito a ação do operador efetivo e de como aproximá-lo. Outras questões importantes, veja por exemplo, [BMT₁, BMT₂, dOIV₁, dOl₂, K], também estão atreladas à redução dimensional, tais como existência de espectro discreto e aproximação dos autovalores em função de termos que dependem do diâmetro da seção transversal. Nos trabalhos citados as questões são abordadas usando técnicas diferentes, a saber, a teoria de Γ -convergência [BMT₁, dOl₂] e a técnica em [FS₁, FS₂] que fornece um tipo de convergência em norma dos resolventes e será nossa principal ferramenta técnica.

A organização da tese é dividida em cinco capítulos, além desta introdução. Os Capítulos 2 e 3 dão suporte para os demais. O Capítulo 2 se preocupa com alguns resultados sobre análise funcional e traço de funções no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$, Ω aberto de \mathbb{R}^2 ou

\mathbb{R}^3 , bem como exemplos para esclarecer as integrais de fronteira em alguns cálculos. Já no Capítulo 3 fizemos alguns cálculos sobre o espectro do laplaciano, com nossa condição de Robin dada em (1.2); esses resultados são básicos para o que segue, e são empregados fortemente nos Capítulos 4, 5 e 6.

A partir do Capítulo 4, focalizamos nosso interesse, o qual trata-se de redução de dimensão, com destaque em como se dá a aproximação pelo operador efetivo. Demonstramos uma aproximação tipo em norma dos resolventes, isto é, consideramos o operador laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ de Robin em $L^2(\Omega_\epsilon)$, sendo $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ uma faixa plana reta, então após identificar o espaço de Hilbert $L^2(\Omega_\epsilon)$ com $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, obtemos que $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ converge para T , quando $\epsilon \downarrow 0$, em “norma dos resolventes”, em que

$$Tw = -w'' + V^{\text{eff}}w, \quad w \in \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}),$$

com potencial $V^{\text{eff}}(x) = -\alpha(x)^2$, sendo que a função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define basicamente a condição de fronteira (1.2). De fato, não temos convergência clássica pois os operadores resolventes estão sobre domínios diferentes. Porém, o operador efetivo em $L^2(\Omega)$ é comparado, de maneira apropriada, com a ação do operador T em $L^2(\mathbb{R})$.

Por um lado geométrico, entendemos que quando comprimimos a faixa $\Omega_\epsilon = \mathbb{R} \times (0, \epsilon)$ até colapsar sobre a reta \mathbb{R} real, isto é, $\Omega_\epsilon \approx \mathbb{R}$ para $\epsilon \downarrow 0$, diz-se, intuitivamente, que houve uma redução de dimensão, o que analiticamente corresponde então a dizer, de modo grosseiro, que o laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ sobre Ω_ϵ converge para T em \mathbb{R} . Veja o Teorema 19 para fortalecer estas ideias e completar o sentido geométrico da convergência entre os operadores.

De modo a considerar regiões mais complexas que a faixa reta acima, porém que seja acessível a manipulações matemáticas, propomos no Capítulo 5, estudar o laplaciano sobre uma região Ω_ϵ , dada por meio de uma curva de referência $\Gamma(s)$ plana; por construção temos que Ω_ϵ é uma vizinhança tubular, cujo significado geométrico é de uma faixa plana encurvada. Quando a função curvatura $k(s)$ da curva Γ é identicamente nula $k \equiv 0$, diz-se que a faixa Ω_ϵ é reta, recuperando o caso discutido no Capítulo 4. Geometricamente, quando $\Omega_\epsilon \rightarrow \Gamma$, para $\epsilon \downarrow 0$, então é esperado que ao considerarmos o laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ de Robin sobre Ω_ϵ , sejamos levados a estabelecer um tipo de (aproximação) convergência

em norma dos resolventes para um operador sobre Γ , em símbolos,

$$-\Delta_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}} \rightarrow T, \quad \epsilon \downarrow 0, \quad (1.3)$$

com

$$Tw = -w'' + \left(\frac{k^2}{4} - \alpha^2\right)w, \quad w \in \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}).$$

No Capítulo 5, melhoramos o resultado do Teorema 19, veja o resultado central do capítulo no Teorema 23 (este resultado poderia ser realizado no Capítulo 4).

Organizamos este trabalho seguindo a evolução do problema, primeiro estudamos o nosso laplaciano de Robin num intervalo limitado, então em faixas infinitas e retas, ou seja, curvatura nula, em seguida em faixas encurvadas e por fim em alguns tubos tridimensionais. Quando lidamos com tubos tridimensionais a abordagem difere um pouco dos demais casos no plano; pois o que se faz é trabalhar com um forma quadrática aproximada em vez da original, veja (6.12).

Tratamos desses tubos em \mathbb{R}^3 no Capítulo 6. Seguindo [dOIV₂, BMT₂] para a construção do tubo estreito Ω_{ϵ} , seja $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, e denotemos por $k(s)$ e $\tau(s)$ as funções curvatura e torção, respectivamente. Construiremos uma região tubular Ω_{ϵ} que é entendida por deslocar uma seção transversal ϵS (i.e., a seção transversal S multiplicada pelo parâmetro pequeno $\epsilon > 0$) limitada ao longo da curva Γ , de maneira apropriada. Em tubos, no espaço, limitados ou ilimitados é conhecido que o operador efetivo herda propriedades geométricas do ambiente, veja os trabalhos [DE, dOIV₁, dOl₂, BMT₁] para mais esclarecimentos. Para tubos ilimitados com condição de Dirichlet foi obtido em [dOl₂], via Γ -convergência, que o operador efetivo, no sentido de convergência forte dos resolventes, tem a forma

$$Tw = -w'' + C(S)\tau^2(s)w - \frac{k^2(s)}{4}w, \quad w \in \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}),$$

com $C(S) > 0$; veja o Teorema 5 em [dOl₂], para uma generalização de [BMT₁] (o qual trata de tubos limitados). Também nessa direção, ainda em tubos ilimitados e condição de contorno de Dirichlet, em [dOIV₃] (Veja Teorema 3) usando a técnica em [FS₁, FS₂] e uma adicional mudança de variável a convergência em norma dos resolventes foi estabelecida, e a ação do operador efetivo é como acima.

Em se tratando de condição de contorno de Robin citamos o trabalho [BMT₂]; nesse trabalho a técnica de Γ -convergência é empregada para a construção de operadores efetivos, mas o parâmetro α associado à condição de fronteira não muda de sinal e o fator de escala ϵ aparece explicitamente junto com α . Essas características diferem bastante de nossa abordagem nesta tese.

Após a construção do tubo Ω_ϵ , no Capítulo 6, seguimos as ideias iniciais em [BMT₂] e, a partir daí, o método em [FS₁] será a nossa principal ferramenta. Estabelecemos que o operador efetivo é influenciado pela geometria do tubo e, segundo nossa escolha de condição de contorno de Robin, obtemos a seguinte forma para o operador efetivo

$$Tw = -w'' + \left(\frac{k^2}{4} - 2\alpha^2 \right) w, \quad w \in \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}),$$

e a convergência é do tipo norma dos resolventes; veja Teorema 27 que realiza a aproximação para o operador efetivo. Notemos que a curvatura aparece na forma de um potencial repulsivo, o que é uma novidade do modelo aqui estudado; outra novidade é a ausência da torção no potencial efetivo (compare com os casos Dirichlet [BMT₁, dOl₂] e Robin com parâmetro positivo [BMT₂]).

Capítulo 2

Resultados de análise funcional e traço de funções

Antes de expor alguns resultados que iremos utilizar, fixemos algumas notações. Na presente seção, denotamos por \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Também escrevemos $Y \sqsubseteq X$ para denotar que Y é um subconjunto denso de X . O domínio de uma transformação T será indicado por $\text{dom } T$. A norma do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ de ordem 1 será denotada por $\|\cdot\|_{1,2}$, e em demonstrações nas demais seções as normas sobre $L^2(\Omega), L^\infty(\Omega)$ serão denotadas por $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, respectivamente. O vetor normal unitário exterior é denotado por $\vec{\nu}$, então $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal, isto será usado à frente para introduzirmos a nossa condição de fronteira. Agora, apresentamos as ferramentas técnicas necessárias para uma leitura rigorosa dos capítulos subsequentes. Esta primeira seção tem como principais fontes [Da], [dOl₂], [Fe], e [Gi].

2.1 Formas e teoria espectral

Seja b uma forma sesquilinear *simétrica*, isto é, $b(\phi, \psi) = \overline{b(\psi, \phi)}$, para todas $\phi, \psi \in \text{dom } b$, quando $\text{dom } b \sqsubseteq \mathcal{H}$, diz-se que b é *hermitiana*. Quando existe algum $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que $b(\phi) := b(\phi, \phi) \geq \beta \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2$, escrevemos $b \geq \beta$, e dizemos que a forma é limitada

inferiormente. Neste caso, um produto interno $(\cdot, \cdot)_+$ sobre $\text{dom } b \subset \mathcal{H}$ é definido por

$$(\phi, \psi)_+ := b(\phi, \psi) + (1 - \beta)(\phi, \psi)_{\mathcal{H}}.$$

Seja $b \geq \beta$ limitada inferiormente e fechada. Um *cerne* de b é um subconjunto $\mathcal{D} \subset \text{dom } b$ que é denso em $\text{dom } b$ equipado com o produto interno $(\cdot, \cdot)_+$.

Definição 1. *Dada uma forma $b(\cdot, \cdot)$ sesquilinear hermitiana, o operador T_b associado com b é definido como*

$$\text{dom } T_b := \{\psi \in \text{dom } b : \exists \eta \in \mathcal{H} \text{ com } b(\phi, \psi) = (\phi, \eta)_{\mathcal{H}}, \forall \phi \in \text{dom } b\},$$

$$T_b \psi := \eta, \quad \psi \in \text{dom } T_b,$$

isto é, $b(\phi, \psi) = (\phi, T_b \psi)_{\mathcal{H}}, \forall \phi \in \text{dom } b, \forall \psi \in \text{dom } T_b$. Tal operador está bem definido pois $\text{dom } b$ é denso em \mathcal{H} .

O Teorema 1, cuja demonstração pode ser encontrada em [dOl₁] Teorema 4.2.6., é conhecido como Teorema de representação de formas sesquilineares.

Teorema 1. *Sejam $\text{dom } b \sqsubseteq \mathcal{H}$ e $b : \text{dom } b \times \text{dom } b \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear fechada limitada inferiormente por $\beta \in \mathbb{R}$ (assim hermitiana). Então o operador T_b associado com b é o único operador autoadjunto com $\text{dom } T_b \sqsubseteq \text{dom } b \rightarrow \mathcal{H}$ tal que*

$$b(\phi, \psi) = (\phi, T_b \psi)_{\mathcal{H}}, \quad \forall \phi \in \text{dom } b, \quad \forall \psi \in \text{dom } T_b.$$

Além disso, $T_b \geq \beta$ e $\text{dom } T_b$ é um cerne de b . O subespaço $\text{dom } b$ é chamado de *domínio forma de T_b* .

Aqui resumimos alguns fatos sobre a teoria espectral que faremos uso neste trabalho.

Teorema 2. *Se \mathcal{H} admite uma base ortonormal de autovetores do operador simétrico $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, então T é essencialmente autoadjunto e $\sigma(\overline{T})$ é o fecho do conjunto de autovalores de T .*

Demonstração: Vide [dOl₁], Teorema 2.2.10. ■

Teorema 3. *Seja T um operador linear autoadjunto em \mathcal{H} Hilbert complexo. Então, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$ se e somente se existe uma sequência $(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \text{dom } T$ tal que*

1. $\|\psi_n\| = 1, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$
2. $\psi_n \xrightarrow{w} 0$ em \mathcal{H} .
3. $(T - \lambda 1)\psi_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ em \mathcal{H} .

Demonstração: Vide [dOl₁], Teorema 11.2.7. ■

Teorema 4. *Seja $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ autoadjunto e assumamos que $\dim \mathcal{H} = \infty$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$.
2. *Existe uma base ortonormal $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ de \mathcal{H} formada por autovalores do operador T , $T\psi_n = \lambda_n\psi_n$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, contados conforme suas multiplicidades, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ (e assim cada um deles tem multiplicidade finita).*
3. $R_z(T)$ é um operador compacto para algum $z \in \rho(T)$ (e assim para todo $z \in \rho(T)$).

Demonstração: Vide [dOl₁], Teorema 11.3.13. ■

Teorema 5. *Seja T um operador autoadjunto e limitado inferiormente em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , e sejam λ_m definido por*

$$\lambda_m = \inf \left\{ \sup_{0 \neq \phi \in L} \frac{(\phi, T\phi)_{\mathcal{H}}}{\|\phi\|_{\mathcal{H}}^2}; L \subseteq \text{dom } T, \dim L = m \right\}.$$

Se T tem espectro essencial não vazio ($\sigma_{\text{ess}}(T) \neq \emptyset$) então um dos seguintes casos ocorrem.

- 1) *Existe $a < \infty$ tal que $\lambda_m < a$ para todo m e $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = a$. Então a é o menor número no espectro essencial, e a parte do espectro de T em $(-\infty, a)$ consiste dos autovalores λ_m*

cada um contado o número de vezes de sua multiplicidade.

2) Existe $a < \infty$ e $N < \infty$ tal que $\lambda_N < a$ e $\lambda_m = a$ para $m > N$. Então a é o menor número no espectro essencial, e a parte do espectro de T em $(-\infty, a)$ consiste dos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ cada um contado o número de vezes de sua multiplicidade.

Demonstração: Vide [Da], Teorema 4.5.3.

Teorema 6. Seja $T \geq 0$ um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Defina uma forma b^T sesquilinear por

$$b^T(\phi, \psi) := (T^{1/2}\phi, T^{1/2}\psi)_{\mathcal{H}},$$

com $\text{dom } b^T = \text{dom } T^{1/2}$. Seja L um subespaço de $\text{dom } T^{1/2}$ de dimensão m e defina λ'_m

$$\lambda'_m = \inf \left\{ \sup_{0 \neq \phi \in L} \frac{b^T(\phi)}{\|\phi\|_{\mathcal{H}}^2}; L \subseteq \text{dom } T^{1/2}, \dim L = m \right\},$$

então $\lambda_m = \lambda'_m$, para todo $m \geq 1$.

Demonstração: Vide [Da], Teorema 4.5.2. ■

Teorema 7. Seja T um operador limitado inferiormente autoadjunto atuando em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Suponha que, a menos de multiplicidade, os autovalores de T são

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \inf \sigma_{\text{ess}}(T).$$

Então,

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T} \frac{(\xi, T\xi)_{\mathcal{H}}}{\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2}, \quad E_1 := N(T - \lambda_1),$$

$$\lambda_2 = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T \cap E_1^\perp} \frac{(\xi, T\xi)_{\mathcal{H}}}{\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2}.$$

Demonstração: Vide [dOl₁], Teorema 11.4.28.

Observação 1. Seja $b \geq \beta$ uma forma sesquilinear hermitiana e fechada com operador associado $T_b \geq \beta$. Então, supondo λ_1 simples podemos escrever a identidade

$$\lambda_2 = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } b \cap E_1^\perp} \frac{b(\xi)}{\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2}.$$

2.1.1. Espaços de Sobolev: traço

Esta seção é uma breve consideração sobre espaços de Sobolev e Traço de funções. Seguiremos fielmente as referências [EG] e [Gi].

Definição 2 (Fronteira de Classe C). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que a fronteira $\partial\Omega$ satisfaz,*

1. $\partial\Omega = \partial(\overline{\Omega})$
2. *Para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existem uma vizinhança A (A é um aberto contendo x_0) de x_0 , coordenadas locais $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, com $y = 0$ em $x = x_0$, e uma função $f \in C(\overline{Q_{n-1}(0, r)})$, $r > 0$, tal que*

$$\partial\Omega \cap A = \{(y', f(y')); y' \in Q_{n-1}(0, r)\},$$

$$\text{com } Q_{n-1}(0, r) = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1}; |y'| < r\}.$$

A fronteira $\partial\Omega$ de um aberto satisfazendo 1. e 2. é chamada de Classe C.

Observação 2. *Em 2. o cubo $(n-1)$ -dimensional $Q_{n-1}(0, r)$ pode ser substituído por qualquer aberto contendo $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Também, $y(x) := R_{x_0}(x - x_0)$, sendo R_{x_0} uma matriz $n \times n$ ortogonal. Estamos interessados nos seguintes abertos de fronteira C, a saber, faixas retas $\mathbb{R} \times (0, d)$ e tubos retos $(0, 1) \times (0, 1) \times \mathbb{R}$. Estes mesmos conjuntos serão exemplos de conjuntos uniformemente Lipschitz, definição dada a seguir.*

Definição 3 (Uniformemente Lipschitz). *A fronteira $\partial\Omega$ de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente Lipschitz se existem $\epsilon, L > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ e uma cobertura (Ω_n) contável localmente finita de $\partial\Omega$ tal que*

1. *Se $x \in \partial\Omega$ então $B(x, \epsilon) \subset \Omega_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$,*
2. *Nenhum ponto de \mathbb{R}^n está contido em mais de M dos Ω_n .*
3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem coordenadas locais $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e uma função Lipschitz $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\text{Lip}f \leq L$, tal que*

$$\Omega_n \cap \Omega = \Omega_n \cap \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; y_n > f(y')\}.$$

Teorema 8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que a fronteira $\partial\Omega$ é de Classe C. Então $C_0^\infty(\overline{\Omega}) := \{\phi|\Omega; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$, $\forall 1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Vide [Gi], Teorema 10.29.

Teorema 9 (Traço). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ um aberto cuja $\partial\Omega$ é uniformemente Lipschitz e seja $1 < p < \infty$. Então existe um operador linear contínuo*

$$\text{tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tal que

- $\text{tr}(u) = u$ sobre $\partial\Omega$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,
- Para toda $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi dx + \int_{\partial\Omega} \phi \text{tr}(u) \nu_i d\mathcal{H}^{n-1},$$

em que ν é o normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e \mathcal{H}^{n-1} é a $(n-1)$ -dimensional medida de Hausdorff.

Demonstração: Vide [Gi], Teorema 15.23.

Teorema 10. *Se $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz e $m \leq n$, então*

$$\int_A g(h(x)) J_m h(x) dx = \int_{h(A)} g(y) N(h|A, y) d\mathcal{H}^m(y)$$

sempre que A for um conjunto Lebesgue \mathcal{L}^m -mensurável, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e (1) g é \mathcal{H}^m -mensurável, ou (2) $N(h|A, y) = \#\{A \cap h^{-1}(y)\} < \infty$ para \mathcal{H}^m -q.t.p y ou (3) $\chi_A \cdot (g \circ h) \cdot J_m h$ é \mathcal{L}^m -mensurável.

Demonstração: Vide [Fe], Teorema 3.2.5.

Observação 3. *Note que, [FM], $J_m h(x)^2$ é igual a soma dos quadrados dos determinantes de submatrizes $m \times m$ da matriz jacobiana $Dh(x)$. Ou equivalentemente, $J_m h(x)^2$ é igual ao determinante da matriz $m \times m$ $Dh(x)^t Dh(x)$.*

A seguir, alguns exemplos serão dados para futuras referências, note que quando $h|_A$ é injetora temos $N(h|_A, y) = 1$, com $y \in f(A)$, em todos os exemplos abaixo h é injetora.

Exemplo 1. *Sejam $m = 1$ e $n = 2$. Sejam $u : \partial\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função \mathcal{H}^m -mensurável, com $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ e $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i \in \{0, 1\}$, dada por*

$$\begin{aligned} h_i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, i) \end{aligned} \tag{2.1}$$

daí, notando que $J_m h_i(x) = [\det(Dh_i(x)^t Dh_i(x))]^{1/2} = 1$, $i \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u(y_1, y_2) d\mathcal{H}^m(y) &= \int_{h_1(\mathbb{R})} u(y) d\mathcal{H}^m(y) + \int_{h_0(\mathbb{R})} u(y) d\mathcal{H}^m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (u(x, 1) + u(x, 0)) dx. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2. *Sejam $m = 1$ e $n = 2$. Sejam $u : \partial S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função \mathcal{H}^m -mensurável, com $S = (0, 1) \times (0, 1)$, $h_{i,y_1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i \in \{0, 1\}$, dada por*

$$\begin{aligned} h_{i,y_1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y_1 &\mapsto (y_1, i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

e $h_{i,y_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i \in \{0, 1\}$, dada por

$$\begin{aligned} h_{i,y_2} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y_2 &\mapsto (i, y_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

daí, notando que $J_m h_{i,y_j}(x)^2 = \det(Dh_{i,y_j}(x)^t Dh_{i,y_j}(x)) = 1$, $i = 0, 1, j = 1, 2$, e denotando $I = [0, 1]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} u(y_1, y_2) d\mathcal{H}^m(y) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 \int_{h_{i,y_j}(I)} u(y) d\mathcal{H}^m(y) \\ &= \int_0^1 (u(y_1, 1) + u(y_1, 0)) dy_1 + \int_0^1 (u(1, y_2) + u(0, y_2)) dy_2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3. *Sejam $m = 2, n = 3$ e S dado no Exemplo 2. Sejam $u : \partial S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função \mathcal{H}^m -mensurável, com $\Omega = S \times \mathbb{R}$, e $h_{i,y_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{0, 1\}$, dada por*

$$\begin{aligned} h_{i,y_1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (y_1, s) &\mapsto (y_1, i, s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

e $h_{i,y_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{0, 1\}$, dada por

$$\begin{aligned} h_{i,y_2} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (y_2, s) &\mapsto (i, y_2, s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

daí, notando que $J_m h_{i,y_j}(x)^2 = \det(Dh_{i,y_j}(x)^t Dh_{i,y_j}(x)) = 1$, $i = 0, 1, j = 1, 2$, e denotando $I = [0, 1]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u(y, s) d\mathcal{H}^m(y, s) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 \int_{h_{i,y_j}(I \times \mathbb{R})} u(y) d\mathcal{H}^m(y, s) \\ &= \sum_{i=0}^1 \int_{I \times \mathbb{R}} u(y_1, i, s) dy_1 ds + \sum_{i=0}^1 \int_{I \times \mathbb{R}} u(i, y_2, s) dy_2 ds. \end{aligned}$$

Com um certo abuso de notação, em vista do exemplo anterior, podemos reescrever a identidade acima por

$$\int_{\partial\Omega} u(y, s) d\mathcal{H}^2(y, s) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} u(y, s) d\mathcal{H}^1(y) \right) ds.$$

■

Exemplo 4. *Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um aberto conexo e limitado, com fronteira ∂S dada pelo traço de uma curva $y(t)$ simples de classe $C^1([a, b])$, denote $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ e suponha $\|\dot{y}\| = 1$. Seja $\mathcal{L} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ injetora em que $\Omega = S \times \mathbb{R}$, além disso, suponha $\mathcal{L}|_{\Omega}$ um difeomorfismo. Defina uma parametrização de $\partial\mathcal{L}(\overline{\Omega}) = \mathcal{L}(\partial\Omega)$ por*

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) &\mapsto \mathcal{L}(y(t), s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

então segue por hipótese que $\frac{\partial\sigma}{\partial t} \times \frac{\partial\sigma}{\partial s} \neq \vec{0}$. Além disso,

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial t} \times \frac{\partial\sigma}{\partial s} \right\| = J_2\sigma(t, s) = [\det(D\sigma(t, s)^t D\sigma(t, s))]^{1/2}.$$

Portanto, para $u : \partial\mathcal{L}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{H}^2 -mensurável temos pelo Teorema 10 a expressão

$$\int_{\partial\mathcal{L}(\overline{\Omega})} u(y) \, d\mathcal{H}^2(y) = \int_{[a,b] \times \mathbb{R}} u(\mathcal{L}(y(t), s)) \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial t} \times \frac{\partial\sigma}{\partial s} \right\| dt ds.$$

■

Capítulo 3

Laplaciano de Robin unidimensional

Primeiramente neste capítulo, estudamos o laplaciano de Robin num intervalo limitado, sua definição precisa, demonstração de que seu espectro essencial é vazio e cômputo explícito de seus autovalores. Optamos por uma troca de sinal no parâmetro α da condição de fronteira, o que servirá de guia para as construções mais elaboradas de faixas e tubos mais adiantes; destaca-se que o primeiro autovalor é negativo (e vale $-\alpha^2$), sendo todos os outros positivos. Então passamos ao estudo correspondente numa faixa reta estreita infinita, dando condições suficientes para que o espectro discreto seja não-vazio.

3.1 Seção transversal

A princípio alguns resultados serão apresentados para o nosso laplaciano de Robin no intervalo (seção transversal) $I = (0, 1)$, estes por sua vez serão importantes para os demais capítulos. Aqui, verificamos que o operador laplaciano $-\Delta_\alpha^I$ (clássico) em $\mathcal{H} = L^2(I)$ é autoadjunto via teoria de formas quadráticas.

Considere o operador

$$-\Delta_\alpha^I : \text{dom}(-\Delta_\alpha^I) \rightarrow L^2(I)$$

com $\text{dom}(-\Delta_\alpha^I) = \{\psi \in H^2(0, 1); \psi \text{ satisfaz (3.1)}\}$,

$$\begin{cases} -\psi'(0) - \alpha\psi(0) = 0 \\ \psi'(1) + \alpha\psi(1) = 0 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Seja $b_\alpha \geq -|\alpha|^2$ a forma sesquilinear fechada em \mathcal{H} , com domínio $\text{dom } b_\alpha = H^1(I) \subseteq \mathcal{H}$,

$$b_\alpha(\phi, \psi) = \int_0^1 \overline{\phi'(y)} \psi'(y) dy + \alpha(\overline{\phi(1)}\psi(1) - \overline{\phi(0)}\psi(0)),$$

então certificamos que $-\Delta_\alpha^I$ é autoadjunto, seguem os detalhes no próximo teorema.

Teorema 11. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então, o laplaciano $-\Delta_\alpha^I$ negativo é o único operador autoadjunto associado a forma b_α sesquilinear, ou seja,*

$$b_\alpha(\phi, \psi) = (\phi, -\Delta_\alpha^I \psi)_\mathcal{H}$$

para cada $\phi \in \text{dom } b_\alpha$, e $\psi \in \text{dom}(-\Delta_\alpha^I)$.

Demonstração: Vamos primeiramente verificar que b_α é limitada inferiormente e fechada. De fato, denotaremos por $b_\alpha(\phi) := b_\alpha(\phi, \phi)$, com $\phi \in \text{dom } b_\alpha$ e por $\| \cdot \|$ a norma em $L^2(I)$, temos explicitamente que

$$b_\alpha(\phi) \geq -|\alpha|^2 \|\phi\|^2, \quad \forall \phi \in \text{dom } b_\alpha.$$

Com efeito, basta notar que para todo $a > 0$ tem-se

$$2\|\phi'\| \|\phi\| \leq a^2 \|\phi\|^2 + \frac{1}{a^2} \|\phi'\|^2.$$

Se $\phi \in \text{dom } b_\alpha$, então

$$\begin{aligned} \pm \left(|\phi(1)|^2 - |\phi(0)|^2 \right) &= \pm \int_0^1 \frac{d}{dx} |\phi|^2 dx = \pm \int_0^1 (\overline{\phi'}\phi + \phi'\overline{\phi}) dx \\ &\leq 2\|\phi'\| \|\phi\| \leq a^2 \|\phi\|^2 + \frac{1}{a^2} \|\phi'\|^2. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} b_\alpha(\phi) &= \|\phi'\|^2 + \alpha(|\phi(1)|^2 - |\phi(0)|^2) \\ &\geq \|\phi'\|^2 - |\alpha| \left(a^2 \|\phi\|^2 + \frac{1}{a^2} \|\phi'\|^2 \right) \\ &\geq \left(1 - \frac{|\alpha|}{a^2} \right) \|\phi'\|^2 - |\alpha| a^2 \|\phi\|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $a = \sqrt{|\alpha|}$,

$$b_\alpha(\phi) \geq -|\alpha|^2 \|\phi\|^2.$$

Note que escolhendo $a = \sqrt{2|\alpha|}$, teremos

$$b_\alpha(\phi) \geq \frac{1}{2} \|\phi'\|^2 - 2|\alpha|^2 \|\phi\|^2. \quad (3.2)$$

Veamos que b_α é fechada. Dada uma sequência $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ em $H^1(I)$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ em $L^2(I)$ e $b_\alpha(\phi_n - \phi_m) \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$. Devemos concluir que $\phi \in H^1(I)$ e $b_\alpha(\phi_n - \phi) \rightarrow 0$. De fato, por hipótese e desigualdade (3.2), temos que $\{\phi'_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy de $L^2(I)$, então existe $\psi \in L^2(I)$ tal que $\|\phi'_n - \psi\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Portanto, $\phi \in H^1(I)$, e desde que $\phi' = \psi$, obtemos a convergência $\phi_n \rightarrow \phi$ em $H^1(I)$. Desde que $H^1(I)$ é imerso continuamente em $C[0, 1]$ valem as convergências:

$$\phi_n(0) \rightarrow \phi(0) \quad \text{e} \quad \phi_n(1) \rightarrow \phi(1) \quad \text{em} \quad \mathbb{C}.$$

Portanto,

$$b_\alpha(\phi_n - \phi) \rightarrow 0 \quad \text{e segue que } b_\alpha \text{ é fechada.}$$

Denote por T_{b_α} o único operador associado com a forma b_α , então $T_{b_\alpha} = -\Delta_\alpha^I$ com $\text{dom } T_{b_\alpha} = \text{dom } (-\Delta_\alpha^I)$. De fato, se $\psi \in \text{dom } (-\Delta_\alpha^I)$ então, por integração por partes, temos a identidade $b_\alpha(\phi, \psi) = (\phi, -\psi'')_{L^2(I)}$; daí obtemos $T_{b_\alpha}|_{\text{dom } (-\Delta_\alpha^I)} = -\Delta_\alpha^I$, pois $\text{dom } (-\Delta_\alpha^I) \subseteq \text{dom } T_{b_\alpha}$.

Agora, sejam $\psi \in \text{dom } T_{b_\alpha}$ e $\eta := T_{b_\alpha} \psi \in L^2(I)$ então $(\phi, \eta)_{L^2(I)} = b_\alpha(\phi, \psi)$, isto é,

$$\int_0^1 \bar{\phi} \eta \, dx = \int_0^1 \bar{\phi}' \psi' \, dx + \alpha \left(\bar{\phi}(1) \psi(1) - \bar{\phi}(0) \psi(0) \right). \quad (3.3)$$

Seguindo as idéias em ([Ka], Exemplo VI. 2.16), seja $z \in H^1(I)$ uma primitiva de η , ou seja, $z' = \eta$ (igualdade de funções), então

$$\int_0^1 \bar{\phi} \eta \, dx = \int_0^1 \bar{\phi} z' \, dx = - \int_0^1 \bar{\phi}' z \, dx + \left(\bar{\phi}(1) z(1) - \bar{\phi}(0) z(0) \right). \quad (3.4)$$

Comparando (3.3) e (3.4) tem-se

$$\int_0^1 \bar{\phi}' (\psi' + z) \, dx + \bar{\phi}(1) [\alpha \psi(1) - z(1)] + \bar{\phi}(0) [-\alpha \psi(0) + z(0)] = 0, \quad \forall \phi \in H^1(I). \quad (3.5)$$

Em particular, para $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$ temos

$$\int_0^1 \bar{\phi}'(\psi' + z) dx = 0,$$

consequentemente

$$\psi' + z = c \quad \text{q.t.p. } x \in I. \quad (3.6)$$

Portanto, $\psi \in H^2(I)$, pois $\psi' = c - z \in H^1(I)$. Além disso, $\psi'' = -z' = -\eta$ e

$$\begin{cases} \psi'(0) = c - z(0) \\ \psi'(1) = c - z(1) \end{cases}. \quad (3.7)$$

Assim, resta apenas verificar a condição de Robin para ψ , e seguirá a inclusão $\text{dom } T_{b_\alpha} \subseteq \text{dom } (-\Delta_\alpha^I)$. Substituímos $(\psi' + z) = c$ em (3.5) e integramos por partes para obter

$$\bar{\phi}(1)[c + \alpha\psi(1) - z(1)] + \bar{\phi}(0)[-c - \alpha\psi(0) + z(0)] = 0, \quad \forall \phi \in H^1(I). \quad (3.8)$$

Como ϕ é escolhida arbitrariamente, produzimos as igualdades: $c + \alpha\psi(1) - z(1) = 0$ e $c + \alpha\psi(0) - z(0) = 0$. Portanto, de (3.7), temos

$$\psi'(0) + \alpha\psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(1) + \alpha\psi(1) = 0.$$

■

3.2 Espectro: seção transversal

A idéia desta seção é informar ao leitor o conteúdo das Proposições 1-2 as quais encontram-se basicamente na Tese [Jí₁] (embora a condição de fronteira seja um pouco diferente). O Teorema 11 teve sua demonstração seguindo os mesmos passos realizados na demonstração da Proposição 4.1 em [Jí₁], que aqui corresponde à Proposição 1. Já o nosso Teorema 13, veja também Proposição 2, tem argumentos próprios.

Seja b^α uma forma quadrática em $L^2(I)$ dada por

$$b^\alpha(\phi) = \int_0^1 |\phi'(y)|^2 dy + \alpha(|\phi(1)|^2 + |\phi(0)|^2),$$

com domínio $\text{dom } b^\alpha = H^1(I)$ e considere a seguinte condição de Robin,

$$\begin{cases} -\psi'(0) + \alpha\psi(0) = 0 \\ \psi'(1) + \alpha\psi(1) = 0 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Proposição 1. *Seja $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Então, o laplaciano negativo $H_\alpha := -\Delta$ com a condição (3.9) é o único operador autoadjunto associado à forma quadrática $b^\alpha \geq 0$, ou seja,*

$$b^\alpha(\phi, \psi) = (\phi, H_\alpha\psi)_{L^2(I)}$$

para toda $\phi \in \text{dom } b^\alpha$ e toda $\psi \in \text{dom}(H_\alpha) := \{\psi \in H^2(I); \psi \text{ satisfaz (3.9)}\}$.

Demonstração: Vide [J1]. ■

Proposição 2. *Seja $\alpha \geq 0$, então com as notações da Proposição 1 vale que o espectro de H_α é puramente discreto, ou seja, $\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha) = \emptyset$.*

Demonstração: Vide [J1].

Observação 4. *Note que o Teorema 11 ou Proposição 1 é válido para $\alpha = 0$, ou seja, o laplaciano $-\Delta_N^I$ com condição de Neumann é o operador associado com*

$$b_N(\phi) = \int_0^1 |\phi'|^2 dx,$$

$\text{dom } b_N = H^1(I)$ e $\text{dom}(-\Delta_N^I) = \{\psi \in H^2(I); \psi'(0) = \psi'(1) = 0\}$. Além disso, sabemos que os autovalores de $-\Delta_N^I$ rearranjados em ordem crescente são dados por

$$\lambda_0^N = 0, \quad \lambda_n^N = n^2\pi^2, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

As correspondentes autofunções normalizadas são:

$$\psi_n^N(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{2} \cos(n\pi x), & \text{se } n \geq 1 \end{cases}. \quad (3.10)$$

A sequência $\{\psi_n^N\}_{n=1}^\infty$ é uma base ortonormal de $L^2(I)$ e do fato que $\lambda_n^N \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que o espectro essencial de $-\Delta_N^I$ é vazio. Portanto,

$$\sigma(-\Delta_N^I) = \sigma_{\text{disc}}(-\Delta_N^I) = \{\lambda_n^N\}_{n=0}^\infty.$$

Para futura referência, seja $\psi_D(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$, $n \geq 1$, as autofunções normalizadas associadas ao laplaciano $-\Delta_D^I$ de Dirichlet, isto é, ao operador associado a forma quadrática

$$b_D(\phi) = \int_0^1 |\phi'|^2 dx,$$

$\text{dom } b_D = H_0^1(I)$ e $\text{dom } (-\Delta_D^I) = \{\psi \in H^2(I), \psi(0) = \psi(1) = 0\}$. Citamos [J₁],[KK] para mais informações.

3.2.1. Espectro essencial

O espectro do operador Δ_α^I é demonstrado ser puramente discreto. Vimos na Proposição 2 que o laplaciano de Robin sem mudança de sinal admite espectro essencial vazio, isto é, $\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha) = \emptyset$. Tendo como motivação [KBZ], veja seção (6.2), concluímos o mesmo resultado para o laplaciano de Robin com mudança de sinal, segue detalhes no Teorema 13. Para demonstração deste fato necessitamos do seguinte resultado.

Teorema 12. *Seja $\{\psi_n^N\}_{n=0}^\infty$ uma família ortonormal completa em \mathcal{H} e seja $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência tal que $\sum_{n=0}^\infty \|\psi_n - \psi_n^N\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$. Então, ψ_n é uma base de \mathcal{H} se $0 = \sum_{n=0}^\infty c_n^\psi \psi_n$ implicar que todo $c_n^\psi = 0$.*

Demonstração: Vide [Ka], Teorema V.2.20.

Teorema 13. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então o laplaciano de Robin tem espectro puramente discreto, isto é, $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\alpha^I) = \emptyset$.*

Demonstração: Veremos na subseção seguinte que os elementos

$$\psi_0(x) = ce^{-\alpha x}, \quad \psi_n(x) = \frac{n\pi}{(n^2\pi^2 + \alpha^2)^{1/2}} \left(\psi_n^N - \frac{\alpha}{n\pi} \psi_n^D \right), \quad n \geq 1$$

são as autofunções de $-\Delta_\alpha^I$, associadas aos autovalores

$$\lambda_0 = -\alpha^2 \quad \text{e} \quad \lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \geq 1,$$

respectivamente. Para $n \geq 1$ temos

$$\|\psi_n - \psi_n^N\|_{L^2(I)}^2 = 2 - \frac{2n\pi}{\sqrt{n^2\pi^2 + \alpha^2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Segue que a função $f(x) = 2 - \frac{2x\pi}{\sqrt{x^2\pi^2 + \alpha^2}}$ é decrescente no intervalo $[1, \infty[$ e

$$\int_1^\infty f(x) dx < \infty.$$

Então, pelo critério da Integral para séries temos que $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ é convergente, consequentemente,

$$\sum_{n=0}^\infty \|\psi_n - \psi_n^N\|_{L^2(I)}^2 < \infty.$$

Afirmção 2: A sequência $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ é uma base (ortonormal) de $L^2(I)$, ou seja, para toda $\psi \in L^2(I)$, temos

$$\psi = \sum_{n=0}^\infty c_n^\psi \psi_n, \quad \text{com } c_n^\psi \in \mathbb{C} \text{ unicamente escolhidos.} \quad (3.11)$$

De fato, para $\phi \in L^2(I)$ arbitrária e ψ como na identidade (3.11) implicaria que

$$(\phi, \psi)_{L^2(I)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\phi, \sum_{n=0}^m c_n^\psi \psi_n)_{L^2(I)}. \quad (3.12)$$

Para $\psi = 0$ e $\phi = \psi_k$, $k = 0, 1, \dots$ segue de (3.12) e ortogonalidade que $c_k^0 = 0$. Portanto, do Teorema 12, segue a afirmação 2.

Escolha $\phi = \psi_k$, $k = 0, 1, \dots$ em (3.12), já que $\{\psi_0\} \cup \{\psi_n\}$ é uma família ortonormal $c_k^\psi = (\psi_k, \psi)_{L^2(I)}$. Portanto,

$$\psi = \sum_{k=0}^\infty (\psi_k, \psi)_{L^2(I)} \psi_k.$$

Assim, de Teorema 4, segue que $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\alpha^I) = \emptyset$. ■

3.2.2. Espectro pontual

Para obter o espectro pontual de $-\Delta_\alpha^I$, vamos determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual exista $0 \neq \psi \in H^2(0, 1)$ normalizada em $L^2(0, 1)$ satisfazendo

$$-\psi'' = \lambda\psi \quad (3.13)$$

juntamente com a condição de contorno ($\alpha \neq 0$),

$$\begin{cases} -\psi'(0) - \alpha\psi(0) = 0 \\ \psi'(1) + \alpha\psi(1) = 0 \end{cases}. \quad (3.14)$$

Se $\lambda > 0$, sabemos que a solução geral (clássica) de (3.13) é dada por

$$\psi(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad (3.15)$$

com $A, B \in \mathbb{C}$ determinados pela condição de Robin e a condição de normalização. Então, impondo as condições de Robin sobre a solução geral obtemos o seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & \alpha \\ \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) + \alpha \sin(\sqrt{\lambda}) & \alpha \cos(\sqrt{\lambda}) - \lambda \sin(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Como não estamos interessados na solução nula devemos exigir que o determinante da matriz acima seja nulo. Esta exigência nos possibilita obter λ explicitamente:

$$(\alpha^2 + \lambda) \sin(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

ou seja,

$$\lambda = -\alpha^2 \quad \text{ou} \quad \lambda = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Já que o sistema (3.16) é equivalente a equação $\sqrt{\lambda}A + \alpha B = 0$, podemos expressar A em função de B , ou seja, $A = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}B$. Portanto, a autofunção correspondente ao autovalor positivo $\lambda = n^2\pi^2, n \geq 1$ é dada por:

$$\psi_n(x) = B \left(-\frac{\alpha}{n\pi} \sin(n\pi x) + \cos(n\pi x) \right),$$

com $1 = |B|^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2\pi^2} \right) \right]$. Daí, para $n \geq 1$ e escolhendo $B > 0$ temos explicitamente

$$\psi_n(x) = \frac{n\pi}{(n^2\pi^2 + \alpha^2)^{1/2}} \left(\sqrt{2} \cos(n\pi x) - \frac{\alpha}{n\pi} \sqrt{2} \sin(n\pi x) \right),$$

ou ainda,

$$\psi_n(x) = \frac{n\pi}{(n^2\pi^2 + \alpha^2)^{1/2}} \left(\psi_n^N - \frac{\alpha}{n\pi} \psi_n^D \right),$$

com $\psi_n^D := \sqrt{2} \sin(n\pi x)$, $n \geq 1$, recorde que ψ_n^D são as autofunções para $-\Delta_D^I$ o operador laplaciano de Dirichlet.

Agora, suponha $\lambda < 0$, então a solução geral é da forma

$$\psi(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x},$$

com $\mu = -\lambda$. Impondo as condições de contorno obtem-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\mu} + \alpha & \alpha - \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu}e^{\sqrt{\mu}} + \alpha e^{\sqrt{\mu}} & \alpha e^{-\sqrt{\mu}} - \sqrt{\mu}e^{-\sqrt{\mu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

Novamente, supondo que o determinante é nulo, segue a igualdade:

$$(\alpha^2 - \mu)(e^{-\sqrt{\mu}} - e^{\sqrt{\mu}}) = 0,$$

desde que $\mu \neq 0$, temos $\mu = \alpha^2$, ou seja, $\lambda = -\alpha^2$. Segue da identidade $\psi'(0) + \alpha\psi(0) = 0$ que a autofunção associada ao autovalor negativo $\lambda = -\alpha^2$ é

$$\psi(x) = ce^{-\alpha x}, \quad \text{com } c = \left(\frac{2\alpha}{1 - e^{-2\alpha}} \right)^{1/2}.$$

Se $\lambda = 0$ então a solução geral é $\psi(x) = Ax + B$ e das condições de contorno segue que $A = B = 0$. Portanto, $\lambda = 0$ não é autovalor.

Em suma, $\lambda_0 := -\alpha^2$ é o primeiro autovalor (negativo) do operador autoadjunto $-\Delta_\alpha^I$ com $\phi_0(y) = ce^{-\alpha y}$, $c > 0$, a correspondente autofunção normalizada, isto é,

$$-\Delta_\alpha^I \phi_0 = \lambda_0 \phi_0, \quad 0 < \phi_0 \in H^2(I) \quad \text{e} \quad \int_0^1 |\phi_0|^2 dy = 1,$$

e satisfaz a condição de Robin (3.14).

3.3 Laplaciano de Robin sobre uma faixa infinita

Do ponto de vista físico, considere uma partícula quântica cujo movimento está confinado em uma faixa estreita infinita no plano de largura constante ϵ ; denotamos este cenário por $\Omega_\epsilon = \mathbb{R} \times (0, \epsilon)$, e como barreira de impenetrabilidade impomos um tipo de condição de contorno de Robin sobre a fronteira $\partial\Omega_\epsilon$ da faixa Ω_ϵ .

A teoria de formas quadráticas ainda é instrumento fundamental. De fato, empregando tal teoria encontramos que o laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ clássico em $L^2(\Omega_\epsilon)$ com um adequado domínio é autoadjunto, agora, no entanto α é uma função de $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Sob certas condições no infinito com relação à aplicação α podemos garantir a existência de estados ligados, isto é, a existência de autovalores (de multiplicidade finita) abaixo do ínfimo do espectro essencial. Seguimos de perto algumas das ideias de [J12, BK, GJ].

A forma sesquilinear fechada de interesse é $b_\alpha^{\Omega_\epsilon} \geq -\|\alpha\|_\infty^2$ em $L^2(\Omega_\epsilon)$, com domínio sendo o espaço de Hilbert $H^1(\Omega_\epsilon)$,

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi, \psi) = \int_{\Omega_\epsilon} \overline{\nabla \phi}(x, y) \nabla \psi(x, y) \, dx dy \\ + \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) \left(\overline{\text{tr}(\phi)}(x, \epsilon) \text{tr}(\psi)(x, \epsilon) - \overline{\text{tr}(\phi)}(x, 0) \text{tr}(\psi)(x, 0) \right) dx,$$

em que $\text{tr}(\phi)$ denota o traço em $L^2(\partial\Omega_\epsilon)$ da função $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Considere o laplaciano negativo

$$-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon} : \text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}) \rightarrow L^2(\Omega_\epsilon),$$

com $\text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}) = \{\psi \in H^2(\Omega_\epsilon); \psi \text{ satisfaz (3.18)}\}$,

$$\begin{cases} -\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) - \alpha(x)\psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \epsilon) + \alpha(x)\psi(x, \epsilon) = 0 \end{cases}, \quad (3.18)$$

na condição de contorno (3.18) exigimos que $\alpha(x) \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$.

A limitação inferior da forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é realizada inicialmente para $\phi|_{\Omega_\epsilon}$ com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, e por densidade, Teorema 8, para toda $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Note que $\text{tr}(\phi|_{\Omega_\epsilon}) = \phi|_{\Omega_\epsilon}$ em $L^2(\partial\Omega_\epsilon)$, daí temos

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi) \geq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^\epsilon \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 dy + \alpha(x) (|\phi(x, \epsilon)|^2 - |\phi(x, 0)|^2) \right] dx,$$

desde que $\phi(x, \cdot) \in H^1(0, \epsilon)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$, por argumento em Teorema 11, obtemos

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi) \geq -\|\alpha\|_\infty^2 \int_{\Omega_\epsilon} |\phi|^2 \, dx dy,$$

para toda $\phi|_{\Omega_\epsilon}$ com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sejam $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$ e $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$, uma sequência em $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\phi_m|_{\Omega_\epsilon} \rightarrow \phi$ em $H^1(\Omega_\epsilon)$. Então, para ϕ_m vale

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi_m) \geq -\|\alpha\|_\infty^2 \int_{\Omega_\epsilon} |\phi_m|^2 \, dx dy, \quad (3.19)$$

e ao observarmos o limite (veja os exemplos)

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \alpha |\operatorname{tr}(\phi_m)|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon \rightarrow \int_{\partial\Omega_\epsilon} \alpha |\operatorname{tr}(\phi)|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon, \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

produzimos a limitação inferior

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi) \geq -\|\alpha\|_\infty^2 \int_{\Omega_\epsilon} |\phi|^2 \, dx \, dy,$$

ou ainda, seguindo os mesmos argumentos produzimos uma segunda desigualdade, a saber

$$\begin{aligned} b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi) &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^\epsilon \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 \, dy + 2\alpha(x) (|\phi(x, \epsilon)|^2 - |\phi(x, 0)|^2) \right] \, dx \\ &\geq -2\|\alpha\|_\infty^2 \int_{\Omega_\epsilon} |\phi|^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Resta verificar que $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é fechada. Considere a forma quadrática (positiva) auxiliar $b(\phi) := b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi) + c_1 \|\phi\|_2^2$, com domínio $\operatorname{dom} b = H^1(\Omega_\epsilon)$, a qual é fechada, com $c_1 = 2\|\alpha\|_\infty^2$. De fato, ao limitarmos a forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ inferiormente pode ser observado a existência de uma constante $C > 0$ de tal sorte que $C\|\phi\|_{1,2}^2 \leq b(\phi)$, para qualquer $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Sejam $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ e $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ uma seqüência em $\operatorname{dom} b$ de modo que $b(\phi_m - \phi_n) \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$, e $\phi_m \rightarrow \phi$, $m \rightarrow \infty$, em $L^2(\Omega_\epsilon)$, queremos mostrar i) e ii) :

i) $\phi \in \operatorname{dom} b$

ii) $b(\phi_m - \phi) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Visto que $C\|\phi_m - \phi_n\|_{1,2}^2 \leq b(\phi_m - \phi_n)$, então $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ é de Cauchy em $H^1(\Omega_\epsilon)$, assim existe $\psi \in H^1(\Omega_\epsilon)$ tal que $\phi_m \rightarrow \psi$, $m \rightarrow \infty$ em $L^2(\Omega_\epsilon)$. Segue o item i) uma vez que a igualdade $\phi = \psi$ em $L^2(\Omega_\epsilon)$ é obtida. Para o item ii) basta notar que quando $m \rightarrow \infty$, os limites $\|\phi_m - \phi\|_{1,2} \rightarrow 0$, $\|\operatorname{tr}(\phi_m - \phi)\|_{L^2(\partial\Omega_\epsilon)} \rightarrow 0$ e (3.20). Portanto, $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é fechada.

No próximo teorema demonstramos que de fato o laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é autoadjunto, isto é, $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é o laplaciano de Robin, o que entendemos por operador associado a forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$. Para a demonstração do teorema seguimos as ideias em [Jí₂, BK].

Teorema 14. *Seja $\alpha \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$. Então, o laplaciano negativo $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é o único operador autoadjunto associado à forma sesquilinear $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$, ou seja, $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi, \psi) = (\phi, -\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon} \psi)_{L^2(\Omega_\epsilon)}$ para $\phi \in \operatorname{dom} b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$, $\psi \in \operatorname{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$.*

A demonstração é apresentada via Lema 1 e Lema 2. O primeiro Lema mostra que para o operador $T_{b_\alpha^{\Omega_\epsilon}}$ associado com $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ temos a inclusão $\text{dom } T_{b_\alpha^{\Omega_\epsilon}} \subset \text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$. Já o segundo Lema conclui que $T_{b_\alpha^{\Omega_\epsilon}}$ é uma extensão de $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$. Portanto, obtemos a igualdade $T_{b_\alpha^{\Omega_\epsilon}} = -\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$.

Lema 1. *Seja $\alpha \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$. Para cada $F \in L^2(\Omega_\epsilon)$, toda solução $\psi \in H^1(\Omega_\epsilon)$ do problema*

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi, \psi) = (\phi, F)_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \quad \forall \phi \in \text{dom } b_\alpha^{\Omega_\epsilon} = H^1(\Omega_\epsilon), \quad (3.21)$$

pertence ao conjunto $\text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$. Como consequência, $\text{dom } T_{b_\alpha^{\Omega_\epsilon}} \subset \text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$.

Demonstração: Para $\psi \in H^1(\Omega_\epsilon)$, introduzimos o quociente de Newton

$$\psi_\delta(x, y) := \frac{\psi(x + \delta, y) - \psi(x, y)}{\delta}, \quad 0 \neq \delta \in \mathbb{R}.$$

Desde que

$$|\psi(x + \delta, y) - \psi(x, y)| = \left| \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + \delta t, y) \delta dt \right| \leq |\delta| \int_0^1 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + \delta t, y) \right| dt$$

temos

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\psi_\delta|^2 dx dy \leq \int_0^1 \left[\int_{\Omega_\epsilon} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + \delta t, y) \right|^2 dx dy \right] dt = \int_{\Omega_\epsilon} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \right|^2 dx dy$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\psi_\delta|^2 dx dy \leq \|\psi\|_{1,2}^2, \quad \forall 0 \neq \delta \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Se $\psi \in H^1(\Omega_\epsilon)$ é solução de (3.21), então ψ_δ é uma solução para o problema

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi, \psi_\delta) = (\phi, F_\delta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} - \int_{\mathbb{R}} \alpha_\delta(x) \left(\overline{\phi(x, \epsilon)} \psi(x + \delta, \epsilon) - \overline{\phi(x, 0)} \psi(x + \delta, 0) \right) dx,$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Escolha $\phi = \psi_\delta$ e notando que $(\phi, F_\delta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = -(\phi_{-\delta}, F)_{L^2(\Omega_\epsilon)}$, obtemos

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) = -((\psi_\delta)_{-\delta}, F)_{L^2(\Omega_\epsilon)} - \int_{\mathbb{R}} \alpha_\delta(x) \left(\overline{\psi_\delta(x, \epsilon)} \psi(x + \delta, \epsilon) - \overline{\psi_\delta(x, 0)} \psi(x + \delta, 0) \right) dx. \quad (3.23)$$

Por questão de simplicidade escreva $b_\alpha^\Omega(\psi_\delta) = b_1^\Omega(\psi_\delta) + b_2^\Omega(\psi_\delta)$, com

$$b_1(\psi_\delta) = \int_{\Omega} |\nabla \psi_\delta|^2 dx dy,$$

$$b_2(\psi_\delta) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) \left(|\psi_\delta(x, \epsilon)|^2 - |\psi_\delta(x, 0)|^2 \right) dx dy.$$

Usando desigualdade de Schwarz, desigualdade de Cauchy, estimativa (3.22), limitação das funções α e α_δ , e a imersão de $H^1(\Omega_\epsilon)$ em $L^2(\partial\Omega_\epsilon)$, podemos produzir as estimativas para $t > 0$,

$$|((\psi_\delta)_{-\delta}, F)_{L^2(\Omega_\epsilon)}| \leq 2\|F\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|(\psi_\delta)_{-\delta}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq t^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + t\|\psi_\delta\|_{1,2}^2,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \alpha_\delta(x) \left(\overline{\psi_\delta(x, \epsilon)} \psi(x + \delta, \epsilon) - \overline{\psi_\delta(x, 0)} \psi(x + \delta, 0) \right) dx \right| \leq C\|\psi_\delta\|_{1,2}\|\psi\|_{1,2} + C\|\psi\|_{1,2}^2,$$

com $C > 0$ independente de δ ,

$$\begin{aligned} |b_2^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta)| &\leq \left| \int_{\Omega_\epsilon} \alpha(x) \frac{\partial}{\partial y} |\psi_\delta|^2 dx dy \right| \\ &\leq 2\|\alpha\|_\infty \|\psi_\delta\|_2 \|\partial_2 \psi_\delta\|_2 \leq t^{-1}\|\alpha\|_\infty^2 \|\psi\|_{1,2}^2 + t b_1^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) \end{aligned}$$

Por um lado, desde que $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) = b_1^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) + b_2^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta)$, obtemos

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) \geq (1-t)b_1^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) - t^{-1}\|\alpha\|_\infty^2 \|\psi\|_{1,2}^2.$$

Por outro lado, a identidade (3.23) produz

$$|b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta)| \leq C\|\psi_\delta\|_{1,2}\|\psi\|_{1,2} + \left(t^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + t\|\psi_\delta\|_{1,2}^2 + C\|\psi\|_{1,2}^2 \right).$$

Logo,

$$(1-t)b_1^{\Omega_\epsilon}(\psi_\delta) - t^{-1}\|\alpha\|_\infty^2 \|\psi\|_{1,2}^2 \leq C\|\psi_\delta\|_{1,2}\|\psi\|_{1,2} + \left(t^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + t\|\psi_\delta\|_{1,2}^2 + C\|\psi\|_{1,2}^2 \right).$$

Agora, suponha $0 < t < 1$ e acrescente $(1-t)\|\psi_\delta\|_2^2$ em ambos os lados da desigualdade anterior, para obtermos

$$\begin{aligned} (1-t)\|\psi_\delta\|_{1,2}^2 &\leq C\|\psi_\delta\|_{1,2}\|\psi\|_{1,2} + \left(t^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + t\|\psi_\delta\|_{1,2}^2 + C\|\psi\|_{1,2}^2 \right) + t^{-1}\|\alpha\|_\infty^2 \|\psi\|_{1,2}^2 \\ &\quad + (1-t)\|\psi_\delta\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (2t-1)\|\psi_\delta\|_{1,2}^2 + C\|\psi\|_{1,2}\|\psi_\delta\|_{1,2} \\ &\quad + \left(t^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + t^{-1}\|\alpha\|_\infty^2 \|\psi\|_{1,2}^2 + C\|\psi\|_{1,2}^2 + (1-t)\|\psi\|_{1,2}^2 \right). \end{aligned}$$

Assim, exigindo $0 < t < 1/2$ teremos uma função quadrática com concavidade para baixo. E por desigualdade acima devemos ter $\|\psi_\delta\|_{1,2}^2 \leq \tilde{C}$, sendo \tilde{C} independente de δ . Daí, esta estimativa implica

$$\sup_{\delta} \|\psi_{-\delta}\|_{1,2} < \infty,$$

e já que $H^1(\Omega_\epsilon)$ é reflexivo, toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente, logo existe $v \in H^1(\Omega_\epsilon)$ e uma subsequência $\delta_k \rightarrow 0$ de modo que $\psi_{-\delta_k} \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega_\epsilon)$. Daí,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \phi \, dx \, dy &= \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\psi} \partial_x \phi \, dx \, dy = \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\psi} \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \phi_{\delta_k} \, dx \, dy = \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\psi} \phi_{\delta_k} \, dx \, dy \\ &= - \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\psi}_{-\delta_k} \phi \, dx \, dy = - \int_{\Omega_\epsilon} v \phi \, dx \, dy, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon). \end{aligned}$$

Portanto, $\partial_x \psi = v$ no sentido fraco, e assim $\partial_x \psi \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Consequentemente $\partial_{xx} \psi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ e $\partial_{yy} \psi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Segue do Teorema de Regularidade (veja [E] Teorema 1 pag. 309) que $\psi \in W_{loc}^{2,2}(\Omega_\epsilon)$, daí a equação $-\Delta \psi = F$ vale q.t.p. em Ω_ϵ . Portanto, $\partial_{yy} \psi = -(F + \partial_{xx} \psi) \in L^2(\Omega_\epsilon)$, e portanto $\psi \in W^{2,2}(\Omega_\epsilon)$.

Finalmente, resta verificar que ψ satisfaz a condição de contorno. Após integração por partes

$$\begin{aligned} (\phi, F)_{L^2(\Omega_\epsilon)} &= b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\psi, \phi) = (\phi, -\Delta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x, 0)} [-\partial_y \psi(x, 0) - \alpha(x) \psi(x, 0)] \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x, \epsilon)} [\partial_y \psi(x, \epsilon) + \alpha(x) \psi(x, \epsilon)] \, dx \end{aligned}$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Isto implica a condição de contorno, pois $-\Delta \psi = F$ vale q.t.p. em Ω_ϵ e ϕ é arbitrária. ■

Lema 2. Se $\alpha \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$ então $T_\alpha = -\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$.

Demonstração: Seja $\psi \in \text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$, então $\psi \in W^{2,2}(\Omega_\epsilon)$ e satisfaz a condição de contorno (3.18). Por integração por partes e (3.18) obtemos para toda $\phi \in \text{dom} b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ a

identidade

$$\begin{aligned} b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x, \epsilon)} \partial_y \psi(x, \epsilon) dx - \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x, 0)} \partial_y \psi(x, 0) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \overline{\phi(x, y)} \Delta \psi(x, y) dx dy + \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) \overline{\phi(x, \epsilon)} \psi(x, \epsilon) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) \overline{\phi(x, 0)} \psi(x, 0) dx = - \int_{\Omega_\epsilon} \overline{\phi(x, y)} \Delta \psi(x, y) dx dy = (\phi, -\Delta \psi)_{L^2(\Omega_\epsilon)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\psi \in \text{dom } T_\alpha$, e segue que T_α é uma extensão de $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$. Segue do lema anterior a igualdade desejada. \blacksquare

3.4 Espectro do hamiltoniano na faixa estreita Ω_ϵ

Vamos investigar o espectro $\sigma(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$ do hamiltoniano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ na faixa Ω_ϵ quando a função α em $W^{1, \infty}(\mathbb{R})$ satisfaz a condição:

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}; \quad \alpha(x) = \alpha_0 \quad \text{para} \quad |x| > a.$$

Neste caso, demonstramos que a componente essencial do espectro de $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é o intervalo $[-\alpha_0^2, \infty)$. Esta afirmação é o conteúdo do Teorema 15, cuja demonstração é realizada em duas etapas. A primeira etapa é dada pelo Lema 3 e a segunda etapa pelo Lema 4; neste último empregamos o método chamado de Dirichlet-Neumann bracketing, para mais informações citamos [Jí₂] e [RS].

Lema 3. *Seja $\alpha \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$. Além disso, suponha que existe $a > 0$ tal que $\alpha(x) = \alpha_0$ para $|x| > a$. Então,*

$$[-\alpha_0^2, \infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}).$$

Demonstração: Seja $\lambda \in [\mu_0, \infty)$, com $\mu_0 = -\alpha_0^2$. Vamos construir uma sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ nas condições do Teorema 3 (veja [dOl₁], Teorema 11.2.7.). Seguindo as mesmas construções como em [Jí₂], definimos as seguintes funções

$$\psi_n(x, y) := \zeta_n(x) \phi_0(y) e^{i \left(\sqrt{\lambda - \mu_0} \right) x}.$$

sendo $\phi_0(y) = c(\alpha_0)e^{-\alpha_0 y}$ normalizada em $L^2(0, \epsilon)$ e os elementos ζ_n funções cut-off. Mais claramente, considere $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com $0 \leq \zeta \leq 1$ tal que $\zeta \equiv 1$ em $(-1/4, 1/4)$, $\zeta \equiv 0$ em $\mathbb{R} \setminus (-1/2, 1/2)$ e $\|\zeta\|_2 = 1$, e defina $\zeta_n(x) := n^{-1/2}\zeta(x/n - n)$. Note que

- 1) $\text{supp}(\zeta_n) \subset (n^2 - n, n^2 + n)$;
- 2) $\|\zeta_n'\|_2 = n^{-1}\|\zeta'\|_2$;
- 3) $\|\zeta_n''\|_2 = n^{-2}\|\zeta''\|_2$.

As derivadas das funções ψ_n são

$$\begin{aligned}\partial_1 \psi_n(x, y) &= \phi_0(y) e^{i(\sqrt{\lambda - \mu_0})x} \left(\zeta_n'(x) + i\zeta_n(x) \sqrt{\lambda - \mu_0} \right), \\ \partial_1^2 \psi_n(x, y) &= \phi_0(y) e^{i(\sqrt{\lambda - \mu_0})x} \left(\zeta_n''(x) + 2i\sqrt{\lambda - \mu_0} \zeta_n'(x) - (\lambda - \mu_0) \zeta_n \right), \\ \partial_2 \psi_n(x, y) &= \zeta_n \phi_0'(y) e^{i(\sqrt{\lambda - \mu_0})x}, \\ \partial_2^2 \psi_n(x, y) &= \zeta_n \phi_0''(y) e^{i(\sqrt{\lambda - \mu_0})x} = \zeta_n(-\mu_0) \phi_0(y) e^{i(\sqrt{\lambda - \mu_0})x} = -\mu_0 \psi_n.\end{aligned}$$

A condição 1) do Teorema 3 é satisfeita devido à normalização da função ϕ_0 e a hipótese sobre ζ . Já o item 2) temos que $(\phi, \psi_n)_{L^2(\Omega_\epsilon)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$, uma vez que para n suficientemente grande o conjunto $\text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(\psi_n) = \emptyset$, e daí desde que $C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$ é denso em $L^2(\Omega_\epsilon)$ segue a validade do item 2) para a sequência $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$.

Assim, resta apenas verificar o item 3). De fato, para toda $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ temos

$$\begin{aligned}|(\phi, (-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon} - \lambda)\psi_n)| &\leq \left| \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\phi} \zeta_n'' \phi_0 \exp\left(i\sqrt{\lambda - \mu_0}x\right) dx dy \right| \\ &\quad + \left| 2i \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\phi} \zeta_n' \phi_0 \exp\left(i\sqrt{\lambda - \mu_0}x\right) \sqrt{\lambda - \mu_0} dx dy \right| \\ &\leq n^{-2} \|\phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|\phi_0\|_{L^2(0, \epsilon)} \|\zeta''\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2n^{-1} \|\phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|\phi_0\|_{L^2(0, \epsilon)} \|\zeta'\|_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

logo segue que

$$\|(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon} - \lambda)\psi_n\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq \frac{\text{const.}}{n},$$

então

$$\|(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon} - \lambda)\psi_n\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

É claro que $\psi_n \in \text{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$, pois ψ_n e suas derivadas parciais clássicas pertencem ao espaço $L^2(\Omega_\epsilon)$ e $\text{supp}(\zeta_n) \subset (n^2 - n, n^2 + n) \subset [a, \infty[$ para n suficientemente grande.

Portanto, vale a inclusão $[-\alpha_0^2, \infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$. ■

Para o caso particular $\alpha(x) = \alpha_0, x \in \mathbb{R}$, recorremos ao Corolário 1, em razão de sua breve demonstração. No que diz respeito a este caso, podemos resgatá-lo no Teorema 15. Note, ainda que, neste caso temos $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon}) = \emptyset$.

Corolário 1. *Se $\alpha(x) \equiv \alpha_0$, então $[-\alpha_0^2, \infty) = \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon})$.*

Demonstração: Com efeito, de maneira análoga ao lema anterior vale a inclusão $[-\alpha_0^2, \infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon})$. Por outro lado, temos a limitação inferior $b_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon} \geq -\alpha_0^2$, logo temos a inclusão $\sigma(-\Delta_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon}) \subset [-\alpha_0^2, \infty)$. Portanto, $\sigma(-\Delta_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon}) = \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha_0}^{\Omega_\epsilon}) = [-\alpha_0^2, \infty)$. ■

Lema 4. *Suponha $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Além disso, que exista $a > 0$ tal que $\alpha(x) = \alpha_0$ para $|x| > a$, então $\inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}) \geq -\alpha_0^2$.*

Demonstração: Seja $\{\lambda_n^\alpha(\Omega_\epsilon)\}_{n=1}^\infty$ a sequência associada com a forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ dada pelo Teorema 5, isto é,

$$\lambda_n^\alpha(\Omega_\epsilon) := \inf_{\substack{L \subset \text{dom } b_\alpha^{\Omega_\epsilon} \\ \dim L = n}} \sup_{\phi \in L} \frac{\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \phi|^2 dx dy + \int_{\partial \Omega_\epsilon} \alpha |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma(x)}{\int_{\Omega_\epsilon} |\phi|^2 dx dy}.$$

Seja $\lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon)$ o ínfimo do espectro essencial de $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^\alpha(\Omega_\epsilon) := \lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon).$$

Dividimos Ω_ϵ da seguinte maneira,

$$\Omega_\epsilon = \Omega_l \cup \Gamma_l \cup \Omega_c \cup \Gamma_r \cup \Omega_r,$$

em que

$$\Omega_l = (-\infty, -a) \times (0, \epsilon), \quad \Omega_c = (-a, a) \times (0, \epsilon) \quad \text{e} \quad \Omega_r = (a, \infty) \times (0, \epsilon),$$

$$\Gamma_l = \{(-a, y); 0 < y < \epsilon\} \quad \text{e} \quad \Gamma_r = \{(a, y); 0 < y < \epsilon\}.$$

Seja $b_{\alpha, N}^{\Omega_\epsilon}$ uma forma quadrática, cujo domínio é o espaço soma direta $T_l \oplus T_c \oplus T_r$, dada por

$$b_{\alpha, N}^{\Omega_\epsilon}(\phi) = \sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{\Omega_i} |\nabla(\phi|_{\Omega_i})|^2 dx dy + \\ + \sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{I_i} \alpha(x) (|\text{tr}_i(\phi|_{\Omega_i})(x, 1)|^2 - |\text{tr}_i(\phi|_{\Omega_i})(x, 0)|^2) dx,$$

com

$$T_l = \{\phi_l \in L^2(\Omega_\epsilon); \phi_l|_{\Omega_l} \in H^1(\Omega_l) \text{ e } \phi_l = 0 \text{ q.t.p em } \Omega_\epsilon \setminus \Omega_l\}, \\ T_c = \{\phi_c \in L^2(\Omega_\epsilon); \phi_c|_{\Omega_c} \in H^1(\Omega_c) \text{ e } \phi_c = 0 \text{ q.t.p em } \Omega_\epsilon \setminus \Omega_c\}, \\ T_r = \{\phi_r \in L^2(\Omega_\epsilon); \phi_r|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r) \text{ e } \phi_r = 0 \text{ q.t.p em } \Omega_\epsilon \setminus \Omega_r\}.$$

Já que Γ_l, Γ_r são conjuntos de medida nula, então para toda $\phi \in \text{dom } b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}$ vale,

$$\phi = \phi\chi_l + \phi\chi_c + \phi\chi_r, \quad \text{q.t.p em } \Omega_\epsilon,$$

sendo que χ_i denota a função característica de Ω_i , para $i \in \{l, c, r\}$. Daí, a inclusão

$$\text{dom } b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon} \subset \text{dom } b_{\alpha, N}^{\Omega_\epsilon}$$

segue por decomposição anterior. Em seguida reescrevemos a forma quadrática $b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(\phi)$ de maneira conveniente, a saber,

$$b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(\phi) = \sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{\Omega_i} |\nabla(\phi|_{\Omega_i})|^2 dx dy + \\ + \sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{I_i} \alpha(x) (|\text{tr}(\phi)(x, 1)|^2 - |\text{tr}(\phi)(x, 0)|^2) dx,$$

enunciamos a seguinte afirmação e deixemos sua verificação para o fim dos argumentos.

Afirmação 1. $b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(\phi) = b_{\alpha, N}^{\Omega_\epsilon}(\phi)$, para $\phi \in \text{dom } b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}$.

Denotemos por $\{\lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon)\}_{n=1}^\infty$ a sequência associada com $b_{\alpha, N}^{\Omega_\epsilon}$ dada pelo Teorema 5. Então, decorre da afirmação acima a seguinte desigualdade:

$$\lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \leq \lambda_n^\alpha(\Omega_\epsilon),$$

daí, mostramos que

$$\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \leq \lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon),$$

em que

$$\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \quad \text{e} \quad \lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^\alpha(\Omega_\epsilon).$$

Agora, anote as expressão, a qual corresponde a sequência $\{\lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon)\}_{n=1}^\infty$,

$$\begin{aligned} \lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) &:= \inf_{\substack{L \subset T_l \oplus T_c \oplus T_r \\ \dim L = n}} \sup_{\phi \in L} \frac{\sum_{i \in \{l, c, r\}} \left(\int_{\Omega_i} |\nabla(\phi_i|_{\Omega_i})|^2 dx dy + \int_{\partial\Omega_i} \alpha |\text{tr}_i(\phi_i|_{\Omega_i})|^2 \nu_2 d\sigma(x) \right)}{\sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{\Omega_i} |\phi_i|_{\Omega_i}|^2 dx dy} \\ &= \inf_{\substack{L_l \subset T_l, L_c \subset T_c, L_r \subset T_r \\ \dim L_l + \dim L_c + \dim L_r = n}} \sup_{\phi_l \in L_l, \phi_c \in L_c, \phi_r \in L_r} \frac{\sum_{i \in \{l, c, r\}} \left(\int_{\Omega_i} |\nabla(\phi_i|_{\Omega_i})|^2 dx dy + \int_{\partial\Omega_i} \alpha |\text{tr}_i(\phi_i|_{\Omega_i})|^2 \nu_2 d\sigma(x) \right)}{\sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{\Omega_i} |\phi_i|_{\Omega_i}|^2 dx dy}. \end{aligned}$$

Defina, para $i \in \{l, c, r\}$, os números $\lambda_{n_i}^{\alpha, N}(\Omega_i)$ em correspondência as formas $b_{\alpha, N}^{\Omega_i}$, com $\text{dom } b_{\alpha, N}^{\Omega_i} = H^1(\Omega_i)$,

$$\begin{aligned} b_{\alpha, N}^{\Omega_i}(\phi_i) &:= \int_{\Omega_i} |\nabla(\phi_i)|^2 dx dy + \\ &+ \int_{I_i} \alpha(x) (|\text{tr}_i(\phi_i)(x, 1)|^2 - |\text{tr}_i(\phi_i)(x, 0)|^2) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_{n_i}^{\alpha, N}(\Omega_i) = \inf_{\substack{L_i \subset H^1(\Omega_i) \\ \dim L_i = n_i}} \sup_{\phi_i \in L_i} \frac{\int_{\Omega_i} |\nabla(\phi_i)|^2 dx dy + \int_{\partial\Omega_i} \alpha |\text{tr}_i(\phi_i)|^2 \nu_2 d\sigma(x)}{\int_{\Omega_i} |\phi_i|^2 dx dy}. \quad (3.24)$$

Considere a forma $b_N^{\Omega_c} \geq 0$ sesquilinear fechada com $\text{dom } b_N^{\Omega_c} = H^1(\Omega_c)$

$$b_N^{\Omega_c}(\phi_c) = \int_{-a}^a \int_0^\epsilon |\nabla(\phi_c)|^2 dx dy,$$

logo,

$$\lambda_n^N(\Omega_c) = \inf_{\substack{L \subset H^1(\Omega_c) \\ \dim L = n}} \sup_{\phi \in L} \frac{\int_{\Omega_c} |\nabla(\phi_c)|^2 dx dy}{\int_{\Omega_c} |\phi_c|^2 dx dy}.$$

Segue do Teorema 7.2.2 e Exercício 7.3 em [Da] que o espectro essencial do laplaciano de Neumann é vazio, ou seja, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^N(\Omega_c) := \lambda_\infty^N(\Omega_c) = +\infty.$$

Para $i = c$ vale a limitação inferior $b_{\alpha, N}^{\Omega_c} \geq -\|\alpha\|_\infty^2$, recordamos tal forma quadrática

$$b_{\alpha, N}^{\Omega_c}(\phi_c) = \int_{-a}^a \int_0^\epsilon |\nabla(\phi_c)|^2 dx dy + \int_{-a}^a \alpha(x) (|\text{tr}_c(\phi_c)(x, 1)|^2 - |\text{tr}_c(\phi_c)(x, 0)|^2) dx.$$

Além disso,

$$\frac{1}{2} b_N^{\Omega_c}(\phi_c) \leq b_{\alpha, N}^{\Omega_c}(\phi_c) + 2\|\alpha\|_\infty^2 \|\phi_c\|_{L^2(\Omega_c)}^2,$$

para $\phi_c \in H^1(\Omega_c)$, conseqüentemente,

$$\frac{1}{2} \lambda_n^N(\Omega_c) \leq \lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_c) + 2\|\alpha\|_\infty^2,$$

logo temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_c) = +\infty$, então $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha, N}^{\Omega_c}) = \emptyset$. Portanto, vale que

$$\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_c) = +\infty. \quad (3.25)$$

Dado $n \geq 1$, seja $L \subset \text{dom } b_{\alpha, N}^{\Omega_c}$, com $\dim L = n$. Então $L = L_l \oplus L_c \oplus L_r$, com $\dim L_l = n_l$, $\dim L_c = n_c$, $\dim L_r = n_r$ e $n_l + n_c + n_r = n$.

Segue de (3.24) que

$$\begin{aligned} & \sup_{\phi_l \in L_l, \phi_c \in L_c, \phi_r \in L_r} \frac{\sum_{i \in \{l, c, r\}} \left(\int_{\Omega_i} |\nabla(\phi_i)|^2 dx dy + \int_{\partial_i} \alpha |\text{tr}_i(\phi_i)|^2 \nu_2 d\sigma(x) \right)}{\sum_{i \in \{l, c, r\}} \int_{\Omega_i} |\phi_i|^2 dx dy} \\ & \geq \max\{\lambda_{n_l}^{\alpha, N}(\Omega_l), \lambda_{n_c}^{\alpha, N}(\Omega_c), \lambda_{n_r}^{\alpha, N}(\Omega_r)\}, \end{aligned}$$

com a convenção que $\lambda_{n_i}^{\alpha, N}(\Omega_i) = 0$ se $n_i = \dim L_i = 0$ para $i \in \{l, c, r\}$. Daí, segue que

$$\lambda_n^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \geq \min_{n_l + n_c + n_r = n} \left\{ \max [\lambda_{n_l}^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon), \lambda_{n_c}^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon), \lambda_{n_r}^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon)] \right\}.$$

Finalmente, para $n \rightarrow \infty$,

$$\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \geq \min [\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_l), \lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_c), \lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_r)].$$

Notemos que, para $\phi \in \text{dom } b_{\alpha, N}^{\Omega_r} = H^1(\Omega_r)$,

$$\begin{aligned} b_{\alpha, N}^{\Omega_r}(\phi_r) &= \int_{\Omega_r} |\nabla(\phi_r)|^2 \, dx dy + \int_a^\infty \alpha_0 (|\text{tr}_r(\phi_r)(x, 1)|^2 - |\text{tr}_r(\phi_r)(x, 0)|^2) \, dx \\ &\geq -\alpha_0^2 \int_{\Omega_r} |\phi_r|^2 \, dx dy, \end{aligned}$$

então $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha, N}^{\Omega_r}) \subset [-\alpha_0^2, \infty)$, logo

$$\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_r) := \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha, N}^{\Omega_r}) \geq -\alpha_0^2.$$

Analogamente,

$$\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_l) := \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha, N}^{\Omega_l}) \geq -\alpha_0^2.$$

Portanto, como já verificamos a desigualdade $\lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \leq \lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon)$, então

$$-\alpha_0^2 \leq \lambda_\infty^{\alpha, N}(\Omega_\epsilon) \leq \lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon),$$

ou seja,

$$\lambda_\infty^\alpha(\Omega_\epsilon) := \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}) \geq -\alpha_0^2.$$

(*Demonstração da afirmação 1:*) Com efeito, se $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon) \cap C(\overline{\Omega_\epsilon})$ então pelo Teorema (do Traço) vale, $\text{tr}(\phi) = \phi$ em $L^2(\partial\Omega_\epsilon)$, e para cada $i \in \{l, c, r\}$, $\text{tr}_i(\phi|_{\Omega_i}) = \phi|_{\Omega_i}$ em $L^2(\partial\Omega_i)$, pois $\phi|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i) \cap C(\overline{\Omega_i})$. Logo, a afirmação é satisfeita para cada $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon) \cap C(\overline{\Omega_\epsilon})$.

Dada $\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)$ existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ em $H^1(\Omega_\epsilon) \cap C(\overline{\Omega_\epsilon})$ tal que os limites, quando $n \rightarrow \infty$, valem:

$$\begin{aligned} \phi_n &\rightarrow \phi && \text{em } H^1(\Omega_\epsilon) \\ \phi_n|_{\Omega_i} &\rightarrow \phi|_{\Omega_i} && \text{em } H^1(\Omega_i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

e via Teorema do Traço,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\phi_n) &\rightarrow \text{tr}(\phi) && \text{em } L^2(\partial\Omega_\epsilon) \\ \text{tr}_i(\phi_n|_{\Omega_i}) &\rightarrow \text{tr}_i(\phi|_{\Omega_i}) && \text{em } L^2(\partial\Omega_i) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Daí, já que $b_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}(\phi_n) = b_{\alpha, N}^{\Omega_{\epsilon}}(\phi_n)$, então

$$b_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}(\phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{\alpha, N}^{\Omega_{\epsilon}}(\phi_n) = b_{\alpha, N}^{\Omega_{\epsilon}}(\phi).$$

De fato, vamos justificar apenas a última igualdade, é claro dos limites acima que

$$\int_{\Omega_i} |\nabla(\phi_n|_{\Omega_i})|^2 dx dy \rightarrow \int_{\Omega_i} |\nabla(\phi|_{\Omega_i})|^2 dx dy, \quad n \rightarrow \infty,$$

para $i \in \{l, c, r\}$ seguem as integrais de fronteira:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_i} \alpha \left[|\text{tr}_i(\phi_n|_{\Omega_i})(x, 1)|^2 - |\text{tr}_i(\phi_n|_{\Omega_i})(x, 0)|^2 \right] dx = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_i} \alpha |\text{tr}_i(\phi_n|_{\Omega_i})|^2 \nu_2 d\sigma = \int_{\partial\Omega_i} \alpha |\text{tr}_i(\phi|_{\Omega_i})|^2 \nu_2 d\sigma. \end{aligned}$$

■

Para a demonstração do Teorema 15, meramente empregamos os Lemas 3-4.

Teorema 15. *Seja $\alpha \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$. Suponha que existe $a > 0$ tal que $\alpha(x) = \alpha_0$ para $|x| > a$. Então $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}) = [-\alpha_0^2, \infty)$.*

Demonstração: Por Lema 4 temos $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}) \subset [-\alpha^2, \infty)$. E a inclusão oposta segue do Lema 3. ■

3.4.1. Existência de espectro discreto

Como já havíamos comentado no início desta seção, damos uma condição para que $\sigma(-\Delta_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}) \cap (-\infty, -\alpha_0^2] \neq \emptyset$, ainda supondo $\alpha(x) = \alpha_0$ para $|x| > a$, $a > 0$. Isto, juntamente com o Teorema 15 implica que o espectro abaixo de $\mu_0 = -\alpha_0^2$ é formado por autovalores isolados de multiplicidade finita, ou seja, $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}) \neq \emptyset$. Tal condição para puxar o espectro do operador $-\Delta_{\alpha}^{\Omega_{\epsilon}}$ para baixo de μ_0 é introduzida no Teorema 16, o qual tem base na seção 3.3 de [Jí₂].

Teorema 16. *Suponha $\alpha_0 > 0$ ($\alpha_0 < 0$). Se, além disso, $(\alpha(x) - \alpha_0)$ é integrável com*

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha(x) - \alpha_0) dx > 0, \quad \left(\int_{\mathbb{R}} (\alpha(x) - \alpha_0) dx < 0 \right),$$

então,

$$\inf \sigma(-\Delta_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}) < \mu_0.$$

Demonstração: Considere a forma quadrática $Q_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}$, com $\text{dom } Q_{\alpha}^{\Omega_\epsilon} = \text{dom } b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}$,

$$Q_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(\phi) := b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(\phi) + \alpha_0^2 \|\phi\|_2^2.$$

Sejam $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções testes dadas por $u_n(x, y) = f_n(x)\phi_0(y)$ sendo ζ uma função cut-off como no Lema 3, $f_n(x) = \frac{\zeta(x/n)}{\sqrt{n}}$ e $\phi_0 = c(\alpha_0)e^{-\alpha_0 y}$ a autofunção (normalizada) de $-\Delta_{\alpha_0}^{(0, \epsilon)}$, associada ao primeiro autovalor $\lambda_0 = -\alpha_0^2$, isto é,

$$-\Delta_{\alpha_0}^{(0, \epsilon)}\phi_0 = \lambda_0\phi_0, \quad \int_0^\epsilon |\phi_0|^2 dy = 1.$$

Daí, após uma integração por partes, obtemos

$$Q_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(u_n) = n^{-2} \|\zeta'\|_2^2 + \int_0^\epsilon |\phi_0'|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) |f_n|^2 (|\phi_0(\epsilon)|^2 - |\phi_0(0)|^2) dx + \alpha_0^2 \int_0^\epsilon |\phi_0|^2 dx,$$

Desde que

$$\int_0^\epsilon \left(|\phi_0'|^2 + \alpha_0^2 |\phi_0|^2 \right) dx = -\alpha_0 (|\phi_0(\epsilon)|^2 - |\phi_0(0)|^2),$$

temos

$$Q_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(u_n) = n^{-2} \|\zeta'\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\alpha(x) - \alpha_0 \right) |f_n|^2 (|\phi_0(\epsilon)|^2 - |\phi_0(0)|^2) dx,$$

já que $(\alpha(x) - \alpha_0) \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_n(x) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e produzir o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(u_n) = (|\phi_0(\epsilon)|^2 - |\phi_0(0)|^2) \int_{\mathbb{R}} (\alpha(x) - \alpha_0) dx < 0,$$

em que $(|\phi_0(\epsilon)|^2 - |\phi_0(0)|^2) = c(\alpha_0)^2 (e^{-2\alpha_0 \epsilon} - 1)$.

Portanto, existe $N \geq 1$ tal que $b_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}(u_N) < \mu_0$, assim, inferimos do Teorema 6 que $\inf \sigma(-\Delta_{\alpha}^{\Omega_\epsilon}) < \mu_0$. ■

Capítulo 4

Domínios finos no plano

Consideramos o laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ em uma família de domínios Ω_ϵ compreendido entre duas retas paralelas no plano, e propomos um tipo de condição de Robin particular na fronteira deste domínio. Investigamos o limite da família $\{-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ quando o diâmetro da seção transversal tende a zero. O resultado desta análise assintótica, que teve como principal técnica a de [FS₁, FS₂], diz que podemos aproximar a referida família de operadores laplacianos, após devidas identificações, por um operador efetivo em norma dos resolventes.

4.1 Mudança de variável

Primeiramente, recorde as notações do capítulo anterior e que $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ é autoadjunto e correspondente à forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ quadrática. Aqui, impomos que o parâmetro α cumpra as exigências:

- A função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ está em $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, com $1/\alpha$ limitada.

Comumente em análise de redução de dimensão, expressamos o laplaciano em novas coordenadas (s, u) determinadas pela inversa da aplicação f_ϵ , a seguir definida.

Introduzimos a região $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ (faixa reta plana infinita); podemos definir a faixa $\Omega_\epsilon = \mathbb{R} \times (0, \epsilon)$, simplesmente notando que $\Omega_\epsilon = f_\epsilon(\Omega)$,

$$\begin{aligned} f_\epsilon : \mathbb{R} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \times [0, \epsilon] \\ (x, y) &\mapsto (x, \epsilon y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Por sua simplicidade é imediato concluir que a aplicação f_ϵ é um difeomorfismo e de determinante jacobiano igual a $\det \nabla f_\epsilon = \epsilon$. Uma mudança de região de integração é realizada ao consideramos a transformação unitária

$$\begin{aligned} U_\epsilon : L^2(\Omega_\epsilon) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ \psi &\mapsto \phi := \sqrt{\epsilon}(\psi \circ f_\epsilon) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tal transformação induz a família $\{B_\epsilon := U_\epsilon(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})U_\epsilon^{-1}\}_{\epsilon>0}$ em $L^2(\Omega)$ de operadores unitariamente equivalente ao laplaciano de Robin $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$.

4.1.1. Transformação do hamiltoniano

A forma sesquilinear b_ϵ^Ω é fechada e limitada inferiormente, com domínio independente de ϵ ,

$$b_\epsilon^\Omega(\phi) = b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(U_\epsilon^{-1}\phi), \quad \text{com } \phi \in \text{dom } b_\epsilon^\Omega = H^1(\Omega).$$

Por observar as identidades (4.3)-(4.4) com $\phi \in \text{dom } b_\epsilon^\Omega$, apresentamos sua ação. Em (4.3) obtemos o gradiente da composição $(\phi \circ f_\epsilon^{-1})$, e a identidade (4.4) trata da integral de fronteira,

$$|\nabla(\phi \circ f_\epsilon^{-1})(s, u)|^2 = \left| \partial_x \phi \left(s, \frac{u}{\epsilon} \right) \right|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \left| \partial_y \phi \left(s, \frac{u}{\epsilon} \right) \right|^2, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \alpha(s) |\text{tr}_\epsilon(\phi \circ f_\epsilon^{-1})|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) (|\text{tr}(\phi)(x, 1)|^2 - |\text{tr}(\phi)(x, 0)|^2) \, dx. \quad (4.4)$$

Algumas palavras à respeito da segunda identidade. Estabelecemos (4.4) para funções $\phi_m \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ e, veja Teorema 8, daí para toda $\phi \in H^1(\Omega)$. Em vista do Teorema 10 (veja também Exemplo 1) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_\epsilon} \alpha(s) |\text{tr}_\epsilon(\phi_m \circ f_\epsilon^{-1})|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon &= \int_{h_0(\mathbb{R})} \alpha(s) |(\phi_m \circ f_\epsilon^{-1})|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon \\
&+ \int_{h_1(\mathbb{R})} \alpha(s) |(\phi_m \circ f_\epsilon^{-1})|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) (|\phi_m(x, 1)|^2 - |\phi_m(x, 0)|^2) \, dx,
\end{aligned}$$

assim, quando $m \rightarrow \infty$,

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \alpha |\text{tr}_\epsilon(\phi \circ f_\epsilon^{-1})|^2 \nu_2 \, d\sigma_\epsilon = \int_{\partial\Omega} \alpha |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 \, d\sigma.$$

Logo, podemos descrever a ação da forma quadrática b_ϵ^Ω , por

$$\begin{aligned}
b_\epsilon^\Omega(\phi) &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|^2 \, dx dy + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|^2 \, dx dy \\
&+ \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) (|\text{tr}(\phi)(x, 1)|^2 - |\text{tr}(\phi)(x, 0)|^2) \, dx.
\end{aligned}$$

Ocasionalmente, faremos uso da forma quadrática b_ϵ^Ω usando a expressão que envolve o vetor normal à fronteira $\partial\Omega$ de Ω , a saber,

$$\begin{aligned}
b_\epsilon^\Omega(\phi) &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|^2 \, dx dy + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|^2 \, dx dy \\
&+ \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha(x) |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 \, d\sigma,
\end{aligned}$$

ambas expressões tem suas vantagens técnicas.

4.2 Redução de dimensão

Seja $\lambda_0^I(x) = -(\epsilon\alpha(x))^2$ o primeiro autovalor do laplaciano $-\Delta_{\epsilon\alpha(x)}^I$ de Robin na seção transversal I , e $\phi_0^\epsilon(x, y) = c_\epsilon(x) e^{-\alpha(x)\epsilon y}$ a correspondente autofunção normalizada. Isto

é, para cada $x \in \mathbb{R}$ (fixo) escolhamos a autofunção (normalizada) associada ao primeiro autovalor do laplaciano $-\Delta_{\epsilon\alpha(x)}^I$, com domínio formado pelas $\chi \in H^2(I)$ tal que χ satisfaz

$$-\chi'(0) - \epsilon\alpha(x)\chi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \chi'(1) + \epsilon\alpha(x)\chi(1) = 0, \quad (4.5)$$

a função $c_\epsilon(x)$ é simplesmente $\left(\int_0^1 |e^{-\alpha(x)\epsilon y}|^2 dy\right)^{-1/2}$, ou seja, $c_\epsilon(x) = \left(\frac{2\alpha(x)\epsilon}{1 - e^{-2\alpha(x)\epsilon}}\right)^{1/2}$.

Para estarmos em acordo com as ideias de [FS₁, FS₂], veja Seção 4.3, distingamos o subespaço fechado \mathcal{H}_ϵ de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_\epsilon = \{w(x)\phi_0^\epsilon; w \in L^2(\mathbb{R})\}$. Naturalmente, podemos identificar, via a isometria π_ϵ os espaços \mathcal{H}_ϵ e $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \pi_\epsilon : \mathcal{H}_\epsilon &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ w\phi_0^\epsilon &\mapsto w \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se restringimos a forma b_ϵ^Ω quadrática a elementos do subespaço \mathcal{H}_ϵ com $w \in H^1(\mathbb{R})$, isto é, consideramos $b_\epsilon^\Omega|_{d_\epsilon}$ com $d_\epsilon = \{w\phi_0^\epsilon; w \in H^1(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{H}_\epsilon$ então, veja Seção 4.5.2., obtemos a expressão

$$b_\epsilon^\Omega(w\phi_0^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + |w|^2 V_\epsilon^{\text{eff}}\right) dx,$$

com função potencial efetivo $V_\epsilon^{\text{eff}}(x)$ dada por

$$V_\epsilon^{\text{eff}}(x) = \int_I |(\phi_0^\epsilon)'|^2 dy - \alpha^2(x).$$

Note que contamos com a convergência essencial,

$$V_\epsilon^{\text{eff}} \rightarrow -\alpha^2 \quad \text{quando} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (\text{uniformemente}).$$

Já que $b_\epsilon^\Omega \geq -c_2$, com $c_2 = \|\alpha\|_\infty^2$, defina $c_1 = 2c_2$. Assim, investigamos o comportamento assintótico da família $\{a_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de formas quadráticas positivas e fechadas, a saber $a_\epsilon(\phi) = b_\epsilon^\Omega(\phi) + c_1\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2$. É claro da escolha de c_1 que $a_\epsilon(\phi) \geq c_2\|\phi\|_2^2$ para cada $\phi \in H^1(\Omega)$. Em particular, se $\phi \in d_\epsilon$, isto é, se $\phi = w\phi_0^\epsilon$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$, então

$$a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left[|w'|^2 + |w|^2(V_\epsilon^{\text{eff}} + c_1)\right] dx \geq c_2 \int_{\mathbb{R}} |w|^2 dx$$

e, além disso,

$$a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left[|w'|^2 + |w|^2(V_\epsilon^{\text{eff}} + c_1)\right] dx \geq \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 dx,$$

uma vez que a função $(V_\epsilon^{\text{eff}} + c_1) \geq 0$ para ϵ suficientemente pequeno.

4.2.1. Potencial e operador efetivo

À vista da restrição $a_\epsilon|_{d_\epsilon}$ podemos estabelecer o Teorema 17, que é uma etapa para a demonstração do principal resultado, Teorema 19. Defina a forma $q_\epsilon := b_\epsilon^\Omega|_{d_\epsilon} \geq -c_2$ quadrática, que por isometria π_ϵ temos $\text{dom } q_\epsilon = H^1(\mathbb{R}) \equiv d_\epsilon$, e

$$q_\epsilon(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + V_\epsilon^{\text{eff}} |w|^2 \right) dx.$$

Indicamos por T_{q_ϵ} o (único) operador autoadjunto associado com q_ϵ , segue por desigualdade prévia que $\|(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}\| \leq c_2^{-1}$, para todo ϵ suficientemente pequeno. Naturalmente, para $T_{q_\epsilon} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ confere-se a ação

$$T_{q_\epsilon}(w) = -w'' + V_\epsilon^{\text{eff}}(x)w.$$

Por convergência uniforme, $\|V_\epsilon^{\text{eff}} - \alpha^2\|_\infty \rightarrow 0, \epsilon \downarrow 0$, considera-se a forma quadrática

$$q(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 - \alpha(x)^2 |w|^2 \right) dx, \quad \text{dom } q = H^1(\mathbb{R}),$$

com operador (*efetivo*) associado $T : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$,

$$T(w) = -w'' + V^{\text{eff}}w, \tag{4.7}$$

em que $V^{\text{eff}}(x) = -\alpha(x)^2$, por fim anote a desigualdade $\|(T + c_1)^{-1}\| \leq c_2^{-1}$.

Teorema 17. *Suponha $0 < \alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Então, sob as condições sobre o parâmetro α introduzidas, vale a convergência na norma dos operadores*

$$\|(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1} - (T + c_1)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração: Se $u, v \in H^1(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} |\langle (T_{q_\epsilon} + c_1)^{1/2}u, (T_{q_\epsilon} + c_1)^{1/2}v \rangle - \langle (T + c_1)^{1/2}u, (T + c_1)^{1/2}v \rangle| &= |q_\epsilon(u, v) - q(u, v)| \\ &\leq \|V_\epsilon^{\text{eff}} - V^{\text{eff}}\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2. \end{aligned}$$

Daí, para $u = (T + c_1)^{-1}g$ and $v = (T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}h$, with $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ temos

$$\langle (T + c_1)^{-1}g, h \rangle = \langle (T_{q_\epsilon} + c_1)^{1/2}(T + c_1)^{-1}g, (T_{q_\epsilon} + c_1)^{1/2}(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}h \rangle,$$

$$\langle g, (T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}h \rangle = \langle (T + c_1)^{1/2}(T + c_1)^{-1}g, (T + c_1)^{1/2}(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}h \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\langle (T + c_1)^{-1}g, h \rangle - \langle g, (T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}h \rangle| &\leq \|V_\epsilon^{\text{eff}} - V^{\text{eff}}\|_\infty \|(T + c_1)^{-1}g\|_2 \|(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}h\|_2 \\ &\leq c_2^{-2} \|V_\epsilon^{\text{eff}} - V^{\text{eff}}\|_\infty \|h\|_2 \|g\|_2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|\langle (T_{q_\epsilon}^{-1} - T^{-1})g, h \rangle| \leq c_2^{-2} \|V_\epsilon^{\text{eff}} - V^{\text{eff}}\|_\infty \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Portanto,

$$\|T_{q_\epsilon}^{-1} - T^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq c_2^{-2} \|V_\epsilon^{\text{eff}} - V^{\text{eff}}\|_\infty \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

■

4.3 Aplicação: teoria geral

Na presente seção, apresentamos o Teorema 18 que nos fornece um método ou uma técnica para redução de dimensão. Para a referida técnica citamos o trabalho [FS₁, FS₂] que originalmente contém igualmente esta seção.

Para cada $\epsilon > 0$, seja a_ϵ uma sequência de formas sesquilinear não negativas fechada em um espaço de Hilbert \mathcal{H} separável e A_ϵ os correspondentes operadores autoadjunto positivos associados. Seja \mathcal{H}_ϵ um subespaço fechado (Hilbert) de \mathcal{H} e $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$ o complemento ortogonal de \mathcal{H}_ϵ em \mathcal{H} . Então, após a decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\epsilon \oplus \mathcal{H}_\epsilon^\perp$, cada $\phi \in \mathcal{H}$ pode ser escrita de maneira única como

$$\phi = \phi_\epsilon + \phi^\epsilon, \quad P_\epsilon \phi = \phi_\epsilon \in \mathcal{H}_\epsilon, \quad P^\epsilon \phi = \phi^\epsilon \in \mathcal{H}_\epsilon^\perp,$$

em que P_ϵ, P^ϵ denotam as projeções ortogonais sobre \mathcal{H}_ϵ e $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$, respectivamente.

Suponha que $\phi \in \text{dom } a_\epsilon$ implique $\phi_\epsilon \in \text{dom } a_\epsilon$, assim também $\phi^\epsilon \in \text{dom } a_\epsilon$. Portanto, estão bem definidos os seguintes subconjuntos densos de \mathcal{H}_ϵ e de $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$, respectivamente,

$$d_\epsilon = \{\phi_\epsilon; \phi \in \text{dom } a_\epsilon\} \sqsubseteq \mathcal{H}_\epsilon \quad \text{e} \quad d^\epsilon = \{\phi^\epsilon; \phi \in \text{dom } a_\epsilon\} \sqsubseteq \mathcal{H}_\epsilon^\perp.$$

De fato, se $\psi \in \mathcal{H}_\epsilon$ e $(\psi, \phi_\epsilon)_\mathcal{H} = 0$ para toda $\phi_\epsilon \in d_\epsilon$, então $(\psi, \phi)_\mathcal{H} = 0$ para toda $\phi \in \text{dom } a_\epsilon \sqsubseteq \mathcal{H}$, portanto $\psi = 0$.

Considere a seguinte família de restrições

$$q_\epsilon = a_\epsilon|_{d_\epsilon}, \quad b_\epsilon = a_\epsilon|_{d^\epsilon}$$

de formas quadráticas em \mathcal{H}_ϵ e $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$ respectivamente. Note que ambas são formas quadráticas positivas e fechadas.

Denotemos por Q_ϵ e B_ϵ os correspondentes operadores autoadjuntos associados. Assim, a forma quadrática pode ser escrita da seguinte maneira

$$a_\epsilon(\phi) = q_\epsilon(\phi_\epsilon) + b_\epsilon(\phi^\epsilon) + 2m_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon), \quad (4.8)$$

seguindo a nomenclatura de [FS₁], a forma $q_\epsilon(\phi_\epsilon) + b_\epsilon(\phi^\epsilon)$ é chamada de parte *diagonal* de a_ϵ e ao termo $m_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)$ chamamos de parte *não-diagonal* de a_ϵ ; e para os parâmetros $p(\epsilon) > 0$, $q(\epsilon) > 0$, suponha que as condições ocorrem,

$$q_\epsilon(\phi_\epsilon) \geq c(\epsilon)\|\phi_\epsilon\|_\mathcal{H}^2, \quad \forall \phi_\epsilon \in d_\epsilon, \quad c(\epsilon) \geq c_0 > 0; \quad (4.9)$$

$$b_\epsilon(\phi^\epsilon) \geq p(\epsilon)\|\phi^\epsilon\|_\mathcal{H}^2, \quad \forall \phi^\epsilon \in d^\epsilon; \quad (4.10)$$

$$|m_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)|^2 \leq q(\epsilon)^2 q_\epsilon(\phi_\epsilon) b_\epsilon(\phi^\epsilon), \quad \forall \phi \in \text{dom } a_\epsilon; \quad (4.11)$$

$$q(\epsilon) \rightarrow 0, p(\epsilon) \rightarrow +\infty, c(\epsilon) = O(p(\epsilon)) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0; \quad (4.12)$$

sob estas hipóteses enunciamos o Teorema 18, cuja demonstração é o objeto na Seção 4.5.3..

Teorema 18. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o operador A_ϵ é positivo e existe $D > 0$ de modo que*

$$\|A_\epsilon^{-1} - [Q_\epsilon^{-1} \oplus 0]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq p(\epsilon)^{-1} + D q(\epsilon) c(\epsilon)^{-1},$$

em que 0 é o operador nulo sobre o subespaço $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$.

4.4 Teorema principal

Na corrente seção o Teorema 18 é colocado em prática. Neste contexto, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $d_\epsilon \sqsubseteq \mathcal{H}_\epsilon$ definidos na Seção 4.2 com $d^\epsilon = H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$. Dada $\psi \in H^1(\Omega)$ temos a

decomposição

$$\psi = w(x)\phi_0^\epsilon + \eta(x, y)$$

com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $\eta \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$. Recorde a família $\{a_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de formas sesquilineares que supomos, sem perda de generalidade, reais. Então podemos escrever a decomposição

$$a_\epsilon(\psi) = a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) + a_\epsilon(\eta) + 2a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon, \eta), \quad \psi \in \text{dom } a_\epsilon.$$

Suponha que cada parcela em a_ϵ admite um comportamento do tipo como listado:

$$a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) \geq c_2 \|w\|_2^2, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}); \quad (4.13)$$

$$a_\epsilon(\eta) \geq \frac{\pi^2}{\epsilon^2} \|\eta\|_2^2, \quad \forall \eta \in d^\epsilon := H^1(\Omega_\epsilon) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp; \quad (4.14)$$

$$|a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon, \eta)|^2 \leq \mathcal{M}^2 \epsilon^2 a_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) a_\epsilon(\eta), \quad \psi \in \text{dom } a_\epsilon; \quad (4.15)$$

Conferimos a validade de (4.13)-(4.15) à partir da Subseção 4.5.1., deste modo enunciamos de imediato o

Teorema 19. *Seja $B_\epsilon \geq -c_2$ o único operador autoadjunto associado com b_ϵ^Ω unitariamente equivalente ao hamiltoniano $(-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon})$ e considere T dado em (4.7) e o operador correspondente à restrição $\tilde{q}_\epsilon := a_\epsilon|_{d^\epsilon}$ denotado por $\tilde{Q}_\epsilon \geq c_2$. Então, vale a convergência em norma dos resolventes*

$$\left\| (B_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 é o operador nulo sobre o subespaço $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$.

Demonstração: Suponha (4.13)-(4.15) e denote por $A_\epsilon = (B_\epsilon + c_1)$ o operador autoadjunto associado com a_ϵ , então via Teorema 18,

$$\left\| A_\epsilon^{-1} - [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \leq \tilde{D}\epsilon.$$

Segue do Teorema 17 a convergência

$$\left\| [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

De fato, apenas notemos que $\tilde{Q}_\epsilon : \text{dom } \tilde{Q}_\epsilon \rightarrow \mathcal{H}_\epsilon$ é dada por

$$\tilde{Q}_\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(T_{q_\epsilon} + c_1)\pi_\epsilon, \quad \text{com} \quad \text{dom } \tilde{Q}_\epsilon = \{w\phi_0^\epsilon : w \in H^2(\mathbb{R})\} \equiv H^2(\mathbb{R}).$$

Seguindo, por desigualdade triangular, obteremos

$$\begin{aligned} \|(B_\epsilon + c_1)_\epsilon^{-1} - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\| &\leq \| [Q_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] \| \\ &\quad + \| A_\epsilon^{-1} - [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] \| \end{aligned}$$

daí, como cada parcela tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, segue a demonstração. \blacksquare

Observação 5. Dada $\psi = w\phi_0^\epsilon + \eta$ em $H^1(\Omega)$ podemos concluir que $w \in H^1(\mathbb{R})$, logo $w\phi_0^\epsilon \in H^1(\Omega)$. Deste fato, obtemos que $d_\epsilon = \{w\phi_0^\epsilon; w \in H^1(\mathbb{R})\}$.

4.5 Apêndice

4.5.1. Estimativas

Realizamos aqui as estimativas necessárias para empregarmos o Teorema 18 à família $\{a_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de formas quadráticas. Por escolha de $c_1 > 0$, temos $a_\epsilon(\phi) \geq c_2\|\phi\|_2^2$, para toda $\phi \in H^1(\Omega)$, então (4.13) segue por definição de a_ϵ .

Para conferir (4.14), usamos a caracterização minimax (Teorema 7) para o segundo autovalor λ_1^I do operador laplaciano $-\Delta_{\epsilon\alpha(x)}^I$ de Robin na seção transversal I com x fixado arbitrariamente. Seja $\eta \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$, então $\eta(x, \cdot) \perp [e^{-\alpha(x)\epsilon y}]$ q.t.p.- $x \in \mathbb{R}$. Daí, aplicando o Teorema 7 ao termo entre colchetes, obtemos a segunda desigualdade abaixo

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\eta) &\geq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|^2 + \epsilon^2 c_1 |\eta|^2 dy + \epsilon \alpha(x) (|\eta(x, 1)|^2 - |\eta(x, 0)|^2) \right] dx \\ &\geq \frac{\lambda_1^I + \epsilon^2 c_1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\eta|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_\epsilon(\eta) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\eta|^2 dx dy, \quad \text{com} \quad \lambda_1^I = \pi^2.$$

Mais sobre a estimativa de $a_\epsilon(\eta)$

Sabemos que $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é um subconjunto denso em $H^1(\Omega)$, por Teorema 8. Logo, deste fato, o conjunto $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$ é também denso em $H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$.

Se $\eta \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$ então

$$\eta(x, \cdot) \perp \phi_0^\epsilon(x, \cdot) \quad \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}.$$

Seja, para cada tal x fixado, a forma quadrática

$$b_\alpha(u) = \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dy + \epsilon \alpha(x) (|u(1)|^2 - |u(0)|^2), \quad u \in H^1(I).$$

Em virtude do Teorema 11 temos que $T_{b_\alpha} = -\Delta_{\epsilon\alpha(x)}^I$ é o operador associado e

$$\lambda_0^I(x) = -(\epsilon\alpha(x))^2$$

é o primeiro autovalor e

$$\lambda_1^I = \pi^2$$

o segundo autovalor, o qual não depende da variável longitudinal x . Por hipótese,

$$\eta(x, \cdot) \in H^1(0, 1) \cap C[0, 1] \cap [e^{-\alpha(x)\epsilon y}]^\perp$$

então, por observação 1 após Teorema 7, temos

$$b_\alpha(\eta(x, \cdot)) \geq \lambda_1^I \int_0^1 |\eta(x, y)|^2 dy,$$

uma vez que

$$\lambda_1^I = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T_{b_\alpha} \cap E_0^\perp} \frac{(\xi, T_{b_\alpha} \xi)_{\mathcal{H}}}{\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2}, \quad E_0 := N(T_{b_\alpha} - \lambda_0^I).$$

Ou seja,

$$a_\epsilon(\eta) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por densidade declarada acima, obtém-se, $a_\epsilon(\eta) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \|\eta\|_2^2$, para cada $\eta \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$.

Estimativa: parte não-diagonal

Para a estimativa de (4.15) recorde que $0 < \alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e $1/\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$. Por hipótese $\eta \in \mathcal{H}_\epsilon^\perp \cap H^1(\Omega)$ então $\alpha^2 w \phi_0^\epsilon \perp \eta$, e por integração por partes obtemos

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha \operatorname{tr}(\bar{w} \phi_0^\epsilon) \operatorname{tr}(\eta) \nu_2 \, d\sigma(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \alpha \bar{w} \phi_0^\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial y} \, dx dy.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\bar{w} \phi_0^\epsilon, \eta) &= \int_{\Omega} \bar{w}' \phi_0^\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx dy + \int_{\Omega} \bar{w} \frac{c'_\epsilon}{c_\epsilon} \phi_0^\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega} \bar{w} \phi_0^\epsilon (\alpha' \epsilon y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx dy. \end{aligned}$$

Mais uma vez a ortogonalidade $w \phi_0^\epsilon \perp \eta$ será fundamental. Desde que $w \in H^1(\mathbb{R})$ é arbitrária,

$$\int_0^1 e^{-\alpha(x)\epsilon y} \eta(x, y) \, dy = 0, \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R},$$

derivando esta última igualdade (com relação à variável x) sob o sinal de integração obtém-se

$$\int_0^1 e^{-\alpha(x)\epsilon y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dy = - \int_0^1 e^{-\alpha(x)\epsilon y} \alpha'(x) \epsilon y \eta(x, y) \, dy, \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Agora multiplique a identidade (4.16) por $w' c_\epsilon$ e integre sobre \mathbb{R} ,

$$\int_{\Omega} w' \phi_0^\epsilon \partial_x \eta \, dx dy = - \int_{\Omega} (\alpha' y \epsilon) w' \phi_0^\epsilon \eta \, dx dy,$$

também ao multiplicamos por $c'_\epsilon w$ produzimos a identidade

$$\int_{\Omega} \frac{c'_\epsilon}{c_\epsilon} w \phi_0^\epsilon \partial_x \eta \, dx dy = - \int_{\Omega} (\alpha' y \epsilon) \frac{c'_\epsilon}{c_\epsilon} w \phi_0^\epsilon \eta \, dx dy.$$

Sob as hipóteses em α , temos $c'_\epsilon/c_\epsilon \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$, e como $y \in [0, 1]$ a valem as estimativas

$$\begin{aligned} a_\epsilon(w \phi_0^\epsilon) &\geq \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 \, dx, \\ a_\epsilon(\eta) &\geq \int_{\Omega} |\partial_x \eta|^2 \, dx dy, \\ a_\epsilon(\eta) &\geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\eta|^2 \, dx dy, \\ a_\epsilon(w \phi_0^\epsilon) &\geq c_2 \int_{\Omega} |w \phi_0^\epsilon|^2 \, dx dy, \end{aligned}$$

finalmente, podemos obter a estimativa desejada,

$$|a_\epsilon(w \phi_0, \eta)|^2 \leq \mathcal{M}^2 \epsilon^2 a_\epsilon(w \phi_0^\epsilon) a_\epsilon(\eta).$$

4.5.2. Energia potencial

Derivando as funções $c_\epsilon(\cdot)$ e ϕ_0^ϵ com relação à variável x obtemos:

$$\frac{dc_\epsilon}{dx} = \frac{\alpha'c_\epsilon}{2\alpha}[1 - c_\epsilon^2 e^{-2\alpha(x)\epsilon}] = \frac{\alpha'c_\epsilon}{2\alpha}[1 - |\phi_0^\epsilon(x, 1)|^2],$$

$$(\phi_0^\epsilon)' = \frac{c_\epsilon'}{c_\epsilon}\phi_0^\epsilon - (\alpha'\epsilon y)\phi_0^\epsilon.$$

Desde que

$$\int_I |\phi_0^\epsilon|^2 y dy = -\frac{1}{2\alpha(x)\epsilon} [|\phi_0^\epsilon(x, 1)|^2 - 1]$$

então $\int_I [(\phi_0^\epsilon)'\phi_0^\epsilon] dy = 0$.

Daí, podemos anotar a identidade

$$\begin{aligned} \int_\Omega |(w\phi_0^\epsilon)'|^2 dy dx &= \int_\Omega \left(|w'\phi_0^\epsilon|^2 + |w(\phi_0^\epsilon)'|^2 + 2\text{Re}(\bar{w}w')\phi_0^\epsilon(\phi_0^\epsilon)' \right) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \left(\int_I |(\phi_0^\epsilon)'|^2 dy \right) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, os termos remanescentes são (4.17)-(4.18), com

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega |w\partial_y \phi_0^\epsilon|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \alpha^2 dx, \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha |\text{tr}(w\phi_0^\epsilon)|^2 \nu_2 d\sigma = -2 \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \alpha^2 dx. \quad (4.18)$$

Portanto,

$$b_\epsilon^\Omega(w\phi_0^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + V_\epsilon^{\text{eff}} |w|^2 \right) dx,$$

com

$$V_\epsilon^{\text{eff}}(x) = \int_I |(\phi_0^\epsilon)'(x, y)|^2 dy - \alpha^2(x),$$

Desde que $|(\phi_0^\epsilon)'(x, y)|^2 \rightarrow 0$ (uniformemente) então $V_\epsilon^{\text{eff}} \rightarrow -\alpha^2$ uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$.

4.5.3. Demonstração do Teorema 18

Por conveniência dos leitores, agora vamos apresentar a demonstração do importante método de Friedlander e Solomyak, que originalmente apareceu em [FS₁, FS₂].

Demonstração: Para cada $\epsilon > 0$, analisemos a parte *diagonal* de a_ϵ , isto é, a forma quadrática fechada e positiva

$$t_\epsilon(\phi) := q_\epsilon(\phi_\epsilon) + b_\epsilon(\phi^\epsilon), \quad \forall \phi \in \text{dom } a_\epsilon.$$

Temos que t_ϵ é fechada e positiva, pois ambas componentes são fechadas e positivas. Com efeito, que ambas são positiva é imediato uma vez que $a_\epsilon \geq 0$. Vejamos que $a_\epsilon|_{d_\epsilon}$ é fechada. Suponha que $\phi_{\epsilon,n} \rightarrow \psi$, $n \rightarrow \infty$, em \mathcal{H}_ϵ e $a_\epsilon(\phi_{\epsilon,n} - \phi_{\epsilon,m}) \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$; devemos mostrar que $\psi \in d_\epsilon$ e $a_\epsilon(\phi_{\epsilon,n} - \psi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Por hipótese, vale a convergência $\phi_{\epsilon,n} \rightarrow \psi$, $n \rightarrow \infty$ em \mathcal{H} e como a_ϵ é fechada temos $\psi = P_\epsilon \psi + P^\epsilon \psi \in \text{dom } a_\epsilon$, com $P_\epsilon \psi \in d_\epsilon$, e vale $a_\epsilon(\phi_{\epsilon,n} - \psi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Basta mostrar que $\psi \in d_\epsilon$. Para isso, dada $\mu \in \mathcal{H}_\epsilon^\perp$ temos $(\psi, \mu) = 0$, pois $\phi_{\epsilon,n} \rightarrow \psi$, $n \rightarrow \infty$, então $\psi \in (\mathcal{H}_\epsilon^\perp)^\perp = \mathcal{H}_\epsilon$, logo $P^\epsilon \psi = 0$, ou seja, $\psi = P_\epsilon \psi \in d_\epsilon$. Analogamente, obtemos que $a_\epsilon|_{d^\epsilon}$ é fechada.

Denotemos por T_ϵ o único operador autoadjunto associado a t_ϵ . Das hipóteses sobre as componentes de t_ϵ para ϵ suficientemente pequeno

$$\|T_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq D_1 c(\epsilon)^{-1}.$$

De fato, desde que $c(\epsilon) = O(p(\epsilon))$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, existem $M > 0$ e $0 < \epsilon_0$ tais que

$$\frac{c(\epsilon)}{p(\epsilon)} \leq M, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Daí, com $D_1^{-1} = \min\{1, M^{-1}\}$, temos

$$\begin{aligned} |t_\epsilon(\phi)| &= q_\epsilon(\phi_\epsilon) + b_\epsilon(\phi^\epsilon) \geq c(\epsilon)\|\phi_\epsilon\|^2 + p(\epsilon)\|\phi^\epsilon\|^2 \\ &\geq c(\epsilon) \min\{1, M^{-1}\}\|\phi\|^2. \end{aligned}$$

Notando que $q_\epsilon(\phi_\epsilon)$, $b_\epsilon(\phi^\epsilon) \leq t_\epsilon(\phi)$ obtemos a desigualdade, para a parte não-diagonal de a_ϵ ,

$$|a_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)| \leq q(\epsilon)t_\epsilon(\phi).$$

Consequentemente,

$$|a_\epsilon(\phi) - t_\epsilon(\phi)| \leq 2|a_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)| \leq 2q(\epsilon)t_\epsilon(\phi).$$

Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno de modo que $q(\epsilon) \leq 1/4$ a desigualdade anterior implica

$$1/2 t_\epsilon(\phi) \leq a_\epsilon(\phi) \leq 3/2 t_\epsilon(\phi),$$

então

$$\frac{c(\epsilon)D_1^{-1}}{2} \|\phi\|^2 \leq a_\epsilon(\phi), \quad \forall \phi \in \text{dom } a_\epsilon.$$

Portanto,

$$\|A_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 2D_1c(\epsilon)^{-1}.$$

Segue das estimativas de b_ϵ a implicação

$$\|B_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\epsilon^\perp)} \leq p(\epsilon)^{-1}. \quad (4.19)$$

Para $\phi_1, \phi_2 \in \text{dom } a_\epsilon$, ($= \text{dom } A_\epsilon^{1/2} = \text{dom } T_\epsilon^{1/2}$) e para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$|\langle A_\epsilon^{1/2}\phi_1, A_\epsilon^{1/2}\phi_2 \rangle - \langle T_\epsilon^{1/2}\phi_1, T_\epsilon^{1/2}\phi_2 \rangle| = |a_\epsilon(\phi_1, \phi_2) - t_\epsilon(\phi_1, \phi_2)|,$$

desde que $|a_\epsilon(\phi_1, \phi_2) - t_\epsilon(\phi_1, \phi_2)| = |a_\epsilon(\phi_{1,\epsilon}, \phi_2^\epsilon) + a_\epsilon(\phi_1^\epsilon, \phi_{2,\epsilon})|$, vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |\langle A_\epsilon^{1/2}\phi_1, A_\epsilon^{1/2}\phi_2 \rangle - \langle T_\epsilon^{1/2}\phi_1, T_\epsilon^{1/2}\phi_2 \rangle| &\leq q(\epsilon) \left[\sqrt{q_\epsilon(\phi_{1,\epsilon})b_\epsilon(\phi_2^\epsilon)} + \sqrt{q_\epsilon(\phi_1^\epsilon)b_\epsilon(\phi_{2,\epsilon})} \right] \\ &\leq q(\epsilon)\sqrt{2}(t_\epsilon(\phi_1)t_\epsilon(\phi_2))^{1/2} \leq 2q(\epsilon)(t_\epsilon(\phi_1)a_\epsilon(\phi_2))^{1/2}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\phi_1 = T_\epsilon^{-1}\nu$ e $\phi_2 = A_\epsilon^{-1}\mu$, em que ν, μ são vetores arbitrários de \mathcal{H} , temos

$$\begin{aligned} |\langle A_\epsilon^{-1}\nu, \mu \rangle - \langle T_\epsilon^{-1}\nu, \mu \rangle| &\leq 2q(\epsilon)(\langle A_\epsilon^{-1}\mu, \mu \rangle \langle T_\epsilon^{-1}\nu, \nu \rangle)^{1/2} \\ &\leq 2\sqrt{2}D_1q(\epsilon)c(\epsilon)^{-1}\|\nu\|\|\mu\|. \end{aligned}$$

esta estimativa nos revela que

$$|\langle (A_\epsilon^{-1} - T_\epsilon^{-1})\nu, \mu \rangle| \leq 2\sqrt{2}D_1q(\epsilon)c(\epsilon)^{-1}\|\nu\|\|\mu\|$$

portanto,

$$\|A_\epsilon^{-1} - T_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 2\sqrt{2}D_1q(\epsilon)c(\epsilon)^{-1}.$$

Já que , $T_\epsilon^{-1} = Q_\epsilon^{-1} \oplus B_\epsilon^{-1}$ vale a igualdade

$$\|T_\epsilon^{-1} - [Q_\epsilon^{-1} \oplus 0]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|B_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\epsilon^\perp)} \quad (4.20)$$

lembrando de 0 é o operador nulo sobre o subespaço $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$. Por desigualdade triangular, de (4.19) e (4.20), com $D = 2\sqrt{2}D_1$ segue que

$$\|A_\epsilon^{-1} - [Q_\epsilon^{-1} \oplus 0]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq p(\epsilon)^{-1} + Dq(\epsilon)c(\epsilon)^{-1}.$$

■

Capítulo 5

Domínios finos e encurvados no plano

Introduzimos o laplaciano em um domínio encurvado plano de largura constante com um tipo particular de condição de Robin na fronteira; essa condição é não-homogênea, no sentido de que o parâmetro de Robin depende da curvatura (no nosso caso de uma maneira específica; veja (5.5)). Derivamos, quando o diâmetro da seção transversal tende a zero, via técnica de $[\text{FS}_1, \text{FS}_2]$, um operador limite (*operador efetivo*), graças a uma convergência uniforme de formas quadráticas implicando numa aproximação entre operadores dada em norma dos resolventes. Com tal quadro de modelagem, surge a novidade de que a curvatura contribui com um potencial repulsivo no potencial efetivo, a despeito de potenciais atrativos em todos os outros trabalhos publicados em que ela joga um papel explícito.

5.1 Preliminares geométricas

Seja Γ uma curva plana simples de classe $C^3(\mathbb{R})$ parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,

$$\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \{s \mapsto (\Gamma_1(s), \Gamma_2(s))\}, \quad (5.1)$$

satisfaz $\|\dot{\Gamma}(s)\| = 1$, para $s \in \mathbb{R}$. Seja $\{T(s), N(s)\}$ uma base de \mathbb{R}^2 , em a que função $N := (-\dot{\Gamma}_2, \dot{\Gamma}_1)$ define o vetor *normal unitário* e a função $T := \dot{\Gamma}$ o vetor *tangente* ($\dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{ds}$).

A *curvatura* é a aplicação escalar $k(s)$ satisfazendo as *Equações de Frenet*

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}.$$

Já que Γ é de classe C^3 então k é de classe $C^1(\mathbb{R})$. Uma adicional hipótese, muito comum em vários trabalhos, sobre a função curvatura é sua limitação, a saber,

$$(H) \quad k \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}).$$

Introduzimos o aberto conexo $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$, que geometricamente é uma faixa plana reta. Denotamos por Ω_ϵ um domínio plano encurvado o qual é obtido via a aplicação

$$\begin{aligned} f_\epsilon : \mathbb{R} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, u) &\mapsto \Gamma(s) + \epsilon u N(s), \end{aligned} \tag{5.2}$$

pondo

$$\Omega_\epsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) = \Gamma(s) + \epsilon u N(s), s \in \mathbb{R}, u \in (0, 1)\}.$$

A matriz jacobiana (∇f_ϵ) de f_ϵ é

$$\begin{bmatrix} \dot{\Gamma}_1(1 - \epsilon u k(s)) & -\epsilon \dot{\Gamma}_2 \\ \dot{\Gamma}_2(1 - \epsilon u k(s)) & \epsilon \dot{\Gamma}_1 \end{bmatrix}, \quad \det \nabla f_\epsilon = \epsilon(1 - \epsilon u k(s)).$$

Sendo k uma função contínua e limitada, para ϵ suficientemente pequeno a aplicação $\beta_\epsilon(s, u) := 1 - \epsilon u k(s)$ não é zero em nenhum ponto da faixa reta $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$. Neste caso, $\beta_\epsilon > 0$ com f_ϵ um difeomorfismo local. Sob a hipótese que f_ϵ é injetora (i.e, a faixa não tem auto-interseção), o difeomorfismo é global. No contexto acima, o domínio Ω_ϵ tem o significado geométrico de uma faixa plana encurvada sem auto-interseção de largura uniforme ϵ ao longo da curva Γ .

5.2 Formas quadráticas e convergência

Investigamos o comportamento de uma partícula quântica na faixa encurvada Ω_ϵ , sob a influência de um tipo condição de Robin na fronteira $\partial\Omega_\epsilon$ quando o parâmetro ϵ aproxima-se de zero, ou seja, quando a faixa $\Omega_\epsilon \rightarrow \Gamma$, quando $\epsilon \downarrow 0$, num sentido geométrico.

O operador $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ denota o único operador auto-adjunto em $L^2(\Omega_\epsilon)$ associado à forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ quadrática, com $\text{dom } b_\alpha^{\Omega_\epsilon} = H^1(\Omega_\epsilon)$, dada por

$$b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\psi) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla\psi|^2 dx dy + \int_{\partial\Omega_\epsilon} \tilde{\gamma} |\text{tr}_\epsilon(\psi)|^2 d\sigma_\epsilon, \quad (5.3)$$

em que $\text{tr}_\epsilon(\psi)$ (veja (5.9), confira também Observação 1 em [FK]) denota o traço de $\psi \in \text{dom } b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ e $d\sigma_\epsilon$ a medida unidimensional de superfície em $\partial\Omega_\epsilon$. Em termos das coordenadas $(x, y) = f_\epsilon(s, u)$ com $(s, u) \in \partial\Omega$, definimos a função $\tilde{\gamma} : \partial\Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ em $L^\infty(\partial\Omega_\epsilon, \mathbb{R})$, mais detalhes são apresentados em (5.5).

Considere o laplaciano de Robin $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ sobre o domínio Ω_ϵ encurvado, sem falar em identificações, obtemos que o operador $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ pode ser aproximado por um operador unidimensional T sobre a curva Γ .

Em princípio lidamos com operadores associados a formas, ou seja, operadores ilimitados, e assim, a convergência de $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ para T é entendida no sentido dos resolventes, no entanto, mesmo lidando com convergência em norma dos resolventes é preciso identificar os espaços de Hilbert envolvidos.

Com respeito ao operador T efetivo, este por sua vez é identificado com um operador em $L^2(\mathbb{R})$, o qual anota-se este por $T = -\Delta + \mathcal{V}^{\text{eff}}$. Em resumo, após identificações, estabelecemos um tipo de convergência em norma dos resolventes, quando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon} \rightarrow T.$$

Desde que $\mathcal{V}^{\text{eff}}(s) = \frac{k^2(s)}{4} - \alpha(s)^2$, observamos que quando a curvatura é identicamente nula, isto é, a curva é uma reta, recuperamos o caso estudado em domínios finos no capítulo anterior; também o potencial efetivo pode ser tanto repulsivo como atrativo, dependendo se $k(s) - 2\alpha(s)$ é positiva ou negativa, respectivamente.

5.2.1. Condição de fronteira de Robin

Para descrever nossa condição de fronteira usamos formalmente a equação em (5.4), neste contexto, tal equação é entendida no sentido do traço

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vec{\nu}} + \tilde{\gamma}\psi = 0, \quad \text{em } \partial\Omega_\epsilon. \quad (5.4)$$

A aplicação $\tilde{\gamma} : \partial\Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e muda de sinal, uma situação que em geral não é considerada em regiões estreitas. Pomos $\tilde{\gamma} := \gamma \circ f_\epsilon^{-1}$ em que $\gamma : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre o bordo de $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ (faixa reta), é dada por

$$\gamma(s, u) = \begin{cases} -\alpha_k(s), & (s, u) \in \mathbb{R} \times \{0\} \\ \alpha_k(s), & (s, u) \in \mathbb{R} \times \{1\} \end{cases}, \quad (5.5)$$

com $\alpha_k(s) = \alpha(s) - \frac{k(s)}{2}$. O parâmetro α satisfaz as hipóteses:

- A função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ está em $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, com $1/\alpha$ limitada.

5.3 Estratégia padrão

Comumente em trabalhos que tratam de redução de dimensão, a estratégia para dar sentido para aproximação entre operadores (ilimitados) e conseqüentemente obter um candidato a operador *efetivo* é trabalhar com famílias de formas quadráticas em regiões mais simples via mudança de “coordenada”, ou seja, lidamos com formas em $L^2(\Omega)$ em vez de tratar com o espaço $L^2(\Omega_\epsilon)$ mais complicado, o preço a pagar é que as formas se tornam mais complexas.

Em [K] o laplaciano $-\Delta_{DN}^{\Omega_\epsilon}$ em $L(\Omega_\epsilon)$ de Dirichlet-Neumann com condição de Dirichlet sobre Γ e de Neumann em $\Gamma + \epsilon N$ foi investigado, e um tipo de convergência em norma dos resolventes estabelecida, veja [K] Teorema 3.1. Além disso, uma abordagem com relação ao comportamento assintótico dos autovalores de $-\Delta_{DN}^{\Omega_\epsilon}$ foi derivada. Um tipo de condição de Dirichlet-Robin aparece em [FK] a estratégia é similar a esta seção, porém é direcionada para estabilidade espectral e desigualdades de Hardy.

5.3.1. Transformação unitária: passo 1

A estratégia é substituir a forma $b_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ quadrática com operador $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ em $L^2(\Omega_\epsilon)$ por uma forma b_ϵ^Ω quadrática mais complicada nas coordenadas (s, u) com operador agindo no espaço de Hilbert $L^2(\Omega, \epsilon\beta_\epsilon dsdu)$ mais simples.

Para cada elemento ψ em $L^2(\Omega_\epsilon)$ faça corresponder a um novo elemento $U_\epsilon(\psi) = \phi$ em $L^2(\Omega, \epsilon\beta_\epsilon dsdu)$ definido por $U_\epsilon(\psi) = \psi \circ f_\epsilon$. A transformação unitária

$$U_\epsilon : L^2(\Omega_\epsilon) \rightarrow L^2(\Omega, \epsilon\beta_\epsilon dsdu)$$

é para que possamos fixar a região de integração. No que segue, defina a família de formas quadráticas $b_\epsilon^\Omega : \text{dom } b_\epsilon^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $\text{dom } b_\epsilon^\Omega = H^1(\Omega)$, em $L^2(\Omega, \epsilon\beta_\epsilon dsdu)$ por

$$b_\epsilon^\Omega(\phi) = b_\alpha^{\Omega_\epsilon}(\phi \circ f_\epsilon^{-1});$$

de maneira explícita,

$$\begin{aligned} b_\epsilon^\Omega(\phi) &= \epsilon \int_\Omega \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon} dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega |\partial_u \phi|^2 \beta_\epsilon dsdu \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \alpha_k(s) (|\text{tr}(\phi)(s, 1)|^2 \beta_\epsilon(s, 1) - |\text{tr}(\phi)(s, 0)|^2) ds. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Seguem alguns detalhes para descrever a forma quadrática b_ϵ^Ω . O gradiente em novas coordenadas é dado pela expressão, haja visto ortogonalidade da base $\{T(s), N(s)\}$,

$$|\nabla(\phi \circ f_\epsilon^{-1})(f_\epsilon(s, u))|^2 = \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon^2} + \frac{|\partial_u \phi|^2}{\epsilon^2}.$$

Então, usando o Teorema de mudança de variáveis para $f_\epsilon : \Omega \rightarrow \Omega_\epsilon$ obtém-se

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(\phi \circ f_\epsilon^{-1})(x, y)|^2 dx dy = \int_\Omega \left(\epsilon \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon} + \beta_\epsilon \frac{|\partial_u \phi|^2}{\epsilon} \right) dsdu. \quad (5.7)$$

Desde que $\partial\Omega_\epsilon = \{\Gamma\} \cup \{\Gamma + \epsilon N\}$, a integral sobre $\partial\Omega_\epsilon$ é dada por

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \tilde{\gamma} |\text{tr}_\epsilon(\psi)|^2 d\sigma_\epsilon = \int_\Gamma \tilde{\gamma} |\text{tr}(\phi) \circ f_\epsilon^{-1}|^2 d\sigma_\epsilon + \int_{\Gamma + \epsilon N} \tilde{\gamma} |\text{tr}(\phi) \circ f_\epsilon^{-1}|^2 d\sigma_\epsilon,$$

evidenciamos que $\Gamma = h_0(\mathbb{R})$ e $\Gamma + \epsilon N = h_1(\mathbb{R})$, com

$$h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \{s \mapsto f_\epsilon(s, i)\} \quad (5.8)$$

para $i = 0, 1$. Daí, por Teorema 10, temos para $\psi \in H^1(\Omega_\epsilon)$

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \tilde{\gamma} |\text{tr}_\epsilon(\psi)|^2 d\sigma_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \alpha_k(s) (|\text{tr}(\phi)(s, 1)|^2 \beta_\epsilon(s, 1) - |\text{tr}(\phi)(s, 0)|^2) ds. \quad (5.9)$$

5.3.2. Transformação unitária: passo 2

Introduzimos a isometria

$$\begin{aligned} V_\epsilon : L^2(\Omega, \epsilon\beta_\epsilon dsdu) &\rightarrow L^2(\Omega, dsdu) \\ \phi &\mapsto (\sqrt{\epsilon\beta_\epsilon})\phi \end{aligned} \quad (5.10)$$

então $V_\epsilon(\text{dom } b_\epsilon^\Omega) = H^1(\Omega)$, recorde que $k \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Daí, definimos a forma quadrática

$$t_\epsilon(\phi) = b_\epsilon^\Omega(V_\epsilon^{-1}(\phi)), \quad \phi \in H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega).$$

Após alguns cálculos obtemos a expressão

$$\begin{aligned} t_\epsilon(\phi) &= \int_\Omega \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon^2} dsdu + \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega |\partial_u \phi|^2 dsdu \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \alpha_k (|\text{tr}(\phi)(s, 1)|^2 - |\text{tr}(\phi)(s, 0)|^2) ds + \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{k^2}{\beta_\epsilon^2} |\phi|^2 dsdu \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{\beta_\epsilon} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_u \phi) dsdu + \epsilon \int_\Omega u \frac{k'}{\beta_\epsilon^3} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) dsdu + \epsilon^2 \int_\Omega \frac{u^2}{4} \frac{|k'|^2}{\beta_\epsilon^4} |\phi|^2 dsdu. \end{aligned}$$

O Lema 5 é para que possamos lidar com formas quadráticas positivas; as constantes envolvidas são conhecidas. A demonstração pode ser encontrada na Subseção 5.7.1., preferimos adiar seu conteúdo técnico apenas para facilitar a leitura.

Lema 5. *Seja t_ϵ definida acima, sob as hipóteses sobre α e k ; existem constantes c_1, c_2 positivas as quais dependem de $\|\alpha\|_\infty, \|k\|_\infty$ e $\|k'\|_\infty$ de modo que, para ϵ suficientemente pequeno, para cada $\phi \in H^1(\Omega)$*

- $t_\epsilon(\phi) + c_1 \|\phi\|_2^2 \geq c_2 \|\phi\|_2^2$
- $t_\epsilon(\phi) + c_1 \|\phi\|_2^2 \geq (2\epsilon)^{-2} \|\partial_u \phi\|_2^2$.

Além disso, t_ϵ é hermitiana (a forma quadrática é real) e fechada.

5.4 Forma quadrática

Nas demais seções propomos investigar o limite da família $\{a_\epsilon = t_\epsilon + c_1\}_{\epsilon>0}$ quando $\epsilon \downarrow 0$. De acordo com a Proposição 3, a seguir, podemos chegar a um limite ao examinarmos a família mais simples $\{\tilde{a}_\epsilon = \tilde{t}_\epsilon + c_1\}_{\epsilon>0}$.

A forma quadrática $\tilde{a}_\epsilon \geq c_2$ é obtida de $t_\epsilon + c_1$ substituindo β_ϵ^2 por 1, é descartando a integral com $\operatorname{Re}(\bar{\phi}\partial_s\phi)$ e $|k'|^2$ no integrando, ou seja, para $\phi \in H^1(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{t}_\epsilon(\phi) &= \int_{\Omega} |\partial_s\phi|^2 \, dsdu + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u\phi|^2 \, dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha_k |\operatorname{tr}(\phi)|^2 \nu_2 \, d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{k^2}{4} |\phi|^2 \, dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{k}{\beta_\epsilon} \operatorname{Re}(\bar{\phi}\partial_u\phi) \, dsdu. \end{aligned}$$

Como a forma \tilde{t}_ϵ quadrática é uma aproximação de t_ϵ então as estimativas do Lema 5 também valem. Tais estimativas são dadas no Lema 6, cuja demonstração também aparece no Apêndice deste capítulo.

Lema 6. *Sejam c_1, c_2 constantes como no Lema 5 então $\tilde{a}_\epsilon \geq c_2$ é uma forma sesquilinear hermitiana e fechada. Além disso, para cada $\phi \in H^1(\Omega)$, vale $\tilde{a}_\epsilon(\phi) \geq (2\epsilon)^{-2} \|\partial_u\phi\|_{L^2(\Omega)}^2$.*

O próximo teorema, de caráter mais técnico, simplifica nossos cálculos, sua aplicação é o conteúdo da Proposição 3.

Teorema 20. *Sejam $(a_\epsilon)_\epsilon, (b_\epsilon)_\epsilon$ duas seqüências de formas sesquilineares positivas e fechadas em um espaço de Hilbert \mathcal{H} com $\operatorname{dom} a_\epsilon = \operatorname{dom} b_\epsilon = D$, para todo $\epsilon > 0$, e A_ϵ, B_ϵ os operadores auto-adjuntos associados com $(a_\epsilon)_\epsilon$, e $(b_\epsilon)_\epsilon$ respectivamente. Suponha que exista $c > 0$ de modo que $a_\epsilon, b_\epsilon > c$, para todo $\epsilon > 0$, e*

$$|a_\epsilon(\phi) - b_\epsilon(\phi)| \leq q(\epsilon)b_\epsilon(\phi), \quad \forall \phi \in D,$$

com $q(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Então, existe $\tilde{C} > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\|A_\epsilon^{-1} - B_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \tilde{C}q(\epsilon).$$

Demonstração: Veja Teorema 3 em [BdOIV]. ■

Como aplicação direta do Teorema 20 estabelecemos a Proposição 3 a qual é uma justificativa para manusearmos a família $\{\tilde{a}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ em vez de $\{a_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, isto é apenas consequência da convergência uniforme $\beta_\epsilon \rightarrow 1$, $\epsilon \downarrow 0$, e da escolha da constante $c_1 > 0$.

Proposição 3. *Seja $c_1 > 0$ a constante obtida em Lema 5. Denote por T_ϵ e \tilde{A}_ϵ os operadores associado com t_ϵ e \tilde{a}_ϵ , respectivamente. Então, para ϵ suficientemente pequeno, existem $\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}} > 0$ tais que*

$$|a_\epsilon(\phi) - \tilde{a}_\epsilon(\phi)| \leq \epsilon \mathcal{D} \tilde{a}_\epsilon(\phi), \quad \phi \in \text{dom } \tilde{a}_\epsilon,$$

$$\|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - \tilde{A}_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \leq \tilde{\mathcal{D}}\epsilon.$$

Demonstração: Vide Apêndice deste capítulo. ■

5.5 Subespaço para redução de dimensão

Os dados obtidos no Capítulo 3 a respeito do laplaciano de Robin $-\Delta^I$ na seção transversal $I = (0, 1)$ serão empregados. Emprestamos o conjunto \mathcal{H}_ϵ da Seção 4.2, isto é, considere $\mathcal{H}_\epsilon := \{w(s)\phi_0^\epsilon; w \in L^2(\mathbb{R})\}$ subespaço fechado de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Recorde também a transformação π_ϵ unitária,

$$\pi_\epsilon : \mathcal{H}_\epsilon \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : \{w\phi_0^\epsilon \mapsto w\}.$$

Para cada $\psi \in \text{dom } \tilde{a}_\epsilon$ escrevemos ψ como uma soma $w(s)\phi_0^\epsilon + \eta(s, u)$, com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $\eta \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp$. Então $\tilde{a}_\epsilon(\psi)$ se decompõe

$$\tilde{a}_\epsilon(\psi) = \tilde{a}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) + \tilde{a}_\epsilon(\eta) + 2\text{Re}[\tilde{a}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon, \eta)].$$

Para a família $\{\tilde{a}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$, verificamos, veja Apêndice deste capítulo, as estimativas

$$\tilde{a}_\epsilon(\phi_\epsilon) \geq c_2 \|\phi_\epsilon\|_2^2, \quad \forall \phi_\epsilon \in d_\epsilon := H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon; \quad (5.11)$$

$$\tilde{a}_\epsilon(\phi^\epsilon) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \|\phi^\epsilon\|_2^2, \quad \forall \phi^\epsilon \in d^\epsilon := H^1(\Omega) \cap \mathcal{H}_\epsilon^\perp; \quad (5.12)$$

$$|\tilde{a}_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)|^2 \leq \tilde{\mathcal{M}}\epsilon^2 \tilde{a}_\epsilon(\phi_\epsilon) \tilde{a}_\epsilon(\phi^\epsilon), \quad \phi = \phi_\epsilon + \phi^\epsilon \in \text{dom } \tilde{a}_\epsilon, \quad (5.13)$$

então invocamos o Teorema 18, e o reescrevemos na forma do Teorema 21.

Teorema 21. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\tilde{D} > 0$, de modo que,*

$$\left\| \tilde{A}_\epsilon^{-1} - [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \tilde{D}\epsilon,$$

em que 0 é o operador nulo sobre o subespaço $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$, \tilde{A}_ϵ denota o operador associado com \tilde{a}_ϵ e \tilde{Q}_ϵ o operador associado com a restrição $\tilde{q}_\epsilon = \tilde{a}_\epsilon|_{d_\epsilon}$.

Demonstração: Vide apêndice deste capítulo. ■

Por intermédio do Teorema 21 derivamos dois tipos de convergência em norma dos resolventes. Em ambas convergências, dizemos que T_ϵ , em $L^2(\Omega)$, converge para T , em $L^2(\mathbb{R})$, em norma dos resolventes. De fato, a convergência requer alguma identificação, uma vez que os resolventes possuem domínios diferentes. No primeiro tipo de convergência, Teorema 22, estabelecemos a convergência em norma dos resolventes da família de operadores $\{T_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ para o operador efetivo T identificado em $L^2(\Omega)$ através da isometria π_ϵ ; recorde que

$$Tw = -w'' + \mathcal{V}^{\text{eff}}w, \quad \text{dom } T \subseteq L^2(\mathbb{R}).$$

Adiante, no Teorema 22, a convergência entre tais operadores é apenas no sentido da diferença entre os correspondentes operadores resolventes na norma dos operadores.

Nosso principal resultado Teorema 23, veja Subseção 5.6.1., diz respeito ao segundo tipo de convergência. Neste, estabelecemos que a família de operadores $\{T_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ converge em norma dos resolventes para o operador efetivo T identificado em $L^2(\Omega)$ através da isometria π_0 ; veja Lema 8, Seção 5.6.1.. Adiante, note que o Teorema 22 é um passo intermediário, para estabelecermos nossa principal contribuição.

5.6 Convergência uniforme para formas

Considere $q_\epsilon = \tilde{t}_\epsilon|_{d_\epsilon}$ a restrição da forma \tilde{t}_ϵ ao espaço $d_\epsilon \subseteq \mathcal{H}_\epsilon$, então a forma \tilde{t}_ϵ quadrática torna-se,

$$\tilde{t}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + \mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}}|w|^2 \right) ds, \quad (5.14)$$

com função potencial $\mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}} \in L^\infty(\mathbb{R})$ convergindo uniformemente,

$$\mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}} \rightarrow -\alpha^2 + \frac{k^2}{4}, \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

A caracterização da função $\mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}}$ potencial é inferida na Seção 5.7.5. na qual também justificamos a convergência uniforme.

Por simplicidade, a forma $q_\epsilon \geq -c_2$ é definida em $\text{dom } q_\epsilon = H^1(\mathbb{R}) = \pi_\epsilon(d_\epsilon)$, ou seja,

$$q_\epsilon(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + \mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}} |w|^2 \right) ds, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}),$$

com operador associado dado por $T_{q_\epsilon}(w) = -w'' + \mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}}(s)w$, com $w \in H^2(\mathbb{R})$. Além disso, vale $\|(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1}\| \leq c_2^{-1}$. Induzidos pela convergência uniforme de $\mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}}$, somos levados a definir a forma $q \geq -c_2$,

$$q(w) = \int_{\mathbb{R}} \left[|w'|^2 + \left(\frac{k^2}{4} - \alpha(s)^2 \right) |w|^2 \right] ds, \quad \text{dom } q = H^1(\mathbb{R}),$$

o operador associado $T : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$,

$$T(w) = -w'' + \mathcal{V}^{\text{eff}}(s)w, \quad \text{com } \mathcal{V}^{\text{eff}} = \frac{k^2}{4} - \alpha(s)^2,$$

também satisfaz a desigualdade $\|(T + c_1)^{-1}\| \leq c_2^{-1}$. Assim, com as notações acima podemos enunciar o seguinte lema auxiliar, cuja demonstração é análoga à do Teorema 17.

Lema 7. *Sob as hipóteses para o parâmetro α , temos a convergência na norma dos operadores*

$$\|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - (T + c_1)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Com as notações já introduzidas no início desta seção, a Proposição 4 é estabelecida. Um indicador para a convergência no Teorema 22 é dado pela Proposição 4, pois por meio desta se permite descartar um subespaço de $L^2(\Omega)$ no processo de limite.

Proposição 4. *Considere a restrição $\tilde{q}_\epsilon = \tilde{a}_\epsilon|_{d_\epsilon}, d_\epsilon \sqsubseteq \mathcal{H}_\epsilon$, e o correspondente operador $\tilde{Q}_\epsilon = [\pi_\epsilon^{-1}(T_{q_\epsilon} + c_1)\pi_\epsilon] \geq c_2$ auto-adjunto. Então,*

$$\left\| [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

Demonstração: Basta apenas notar a desigualdade a seguir e aplicar o Lema 7,

$$\left\| [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] \right\| \leq \|(T_{q_\epsilon} + c_1)^{-1} - (T + c_1)^{-1}\|.$$

■

A demonstração do Teorema 22 é imediata das Proposições 3-4 e Teorema 21. O caso quando a função curvatura k é nula, ou seja, a curva Γ é uma reta como no Capítulo 4, pode ser então recuperado. Além disso, este resultado é um passo importante para apresentarmos o teorema principal.

Teorema 22. *Seja T_ϵ o único operador auto-adjunto associado com t_ϵ , o qual é unitariamente equivalente ao laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ de Robin. Então,*

$$\|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 é o operador nulo sobre o subespaço $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$.

Demonstração: Denotamos a norma dos operadores por $\|\cdot\|$. Após uso de desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} \|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\| &\leq \|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - \tilde{A}_\epsilon^{-1}\| + \|\tilde{A}_\epsilon^{-1} - [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0]\| \\ &\quad + \left\| [\tilde{Q}_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] \right\|. \end{aligned}$$

Daí, invocamos Proposição 3-4 e Teorema 21, o que encerra a demonstração. ■

Em nosso ponto de vista, por meio do Teorema 22, entendemos que família de operadores resolventes $\{(T_\epsilon + c_1)^{-1}\}_\epsilon$ em $L^2(\Omega)$, é aproximada por outra, em $L^2(\Omega)$, que efetivamente é descrita pela família $\{(\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon)\}_\epsilon$, já que podemos descartar um subespaço na aproximação. Por identificar cada elemento desta última coleção com o operador $(T + c_1)^{-1}$, em $L^2(\mathbb{R})$, completamos o sentido do primeiro tipo de convergência em norma dos resolventes.

5.6.1. Resultado Principal

Para apresentarmos o Teorema 23, introduzimos um outro subespaço de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, o qual consiste das funções que não dependem da variável longitudinal u , isto é, escolha $E \subset \mathcal{H}$ subespaço fechado da seguinte maneira,

$$E = \{w(s)1; w \in L^2(\mathbb{R})\} \text{ (tal subespaço identifica-se com } L^2(\mathbb{R}) \text{)}.$$

Denote por P_E, P_{E^\perp} as projeções ortogonais de $L^2(\Omega)$ sobre os subespaços E, E^\perp , respectivamente. Para $\phi \in \mathcal{H} = E \oplus E^\perp$ temos

$$\phi = P_E(\phi) + P_{E^\perp}(\phi),$$

além disso,

$$P_E(\phi)(s) = \int_0^1 \phi(s, u) du, \quad \text{q.t.p } s \in \mathbb{R}.$$

Outro subespaço fechado de \mathcal{H} , já apareceu no início da Seção 5.5, recordamos tal subespaço

$$\mathcal{H}_\epsilon = \{w\phi_0^\epsilon(s, u); w \in L^2(\mathbb{R})\},$$

com $\phi_0^\epsilon \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0$, uniformemente. Então, para $\phi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_\epsilon \oplus \mathcal{H}_\epsilon^\perp$ vale a decomposição,

$$\phi = w\phi_0^\epsilon + \eta, \quad \eta \in \mathcal{H}_\epsilon^\perp,$$

com

$$w(s) = \int_0^1 \phi\phi_0^\epsilon(s, u) du, \quad \text{q.t.p } s \in \mathbb{R}.$$

Em suma, podemos escrever

$$E \oplus E^\perp = \mathcal{H} = \mathcal{H}_\epsilon \oplus \mathcal{H}_\epsilon^\perp,$$

e para cada $\phi \in \mathcal{H}$ temos,

$$\phi = w\phi_0^\epsilon + \eta \quad \text{ou} \quad \phi = P_E(\phi) + P_{E^\perp}(\phi), \quad \eta \in \mathcal{H}_\epsilon^\perp.$$

Lema 8. *Seja $(T + c_1)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ como no Teorema 22. Então,*

$$\| [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0] - [\pi_0^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_0 \oplus 0_{E^\perp}] \|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 é o operador nulo sobre $\mathcal{H}_\epsilon^\perp$ e 0_{E^\perp} o operador nulo sobre E^\perp , e π_0 denota o operador $\pi_0 : E \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : \{w(s)1 \mapsto w(s)\}$.

Demonstração: Escreva $\phi = P_E(\phi) + P_{E^\perp}(\phi)$ e $\phi = w\phi_0^\epsilon + \eta$, com $\|\phi\| = 1$. Então,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0(\phi) \right] - \left[\pi_0^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_0 \oplus 0_{E^\perp}(\phi) \right] \right\|_{L^2(\Omega)} = \\ & = \|\phi_0^\epsilon(T + c_1)^{-1}w - (T + c_1)^{-1}P_E(\phi)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \|\phi_0^\epsilon(T + c_1)^{-1}w - (T + c_1)^{-1}P_E(\phi)\|_{L^2(\Omega)} & \leq \|\phi_0^\epsilon(T + c_1)^{-1}w - (T + c_1)^{-1}w\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \|(T + c_1)^{-1}w - (T + c_1)^{-1}P_E(\phi)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

O primeiro termo à direita da desigualdade acima tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$; de fato, dado $\delta > 0$, por convergência uniforme, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(\delta) > 0$ tal que

$$\|\phi_0^\epsilon - 1\|_\infty^2 < \frac{\delta^2}{\|(T + c_1)^{-1}\|^2}, \quad \text{sempre que } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|\phi_0^\epsilon(T + c_1)^{-1}w - (T + c_1)^{-1}w\|_{L^2(\Omega)}^2 & = \int_\Omega |\phi_0^\epsilon - 1|^2 |(T + c_1)^{-1}w|^2 ds du \\ & \leq \frac{\delta^2}{\|(T + c_1)^{-1}\|^2} \|(T + c_1)^{-1}\|^2 \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds \leq \delta^2, \end{aligned}$$

note que, como $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = 1$ então $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$. Por outro lado, a parcela restante pode ser estimada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \|(T + c_1)^{-1}P_E(\phi) - (T + c_1)^{-1}w\|_{L^2(\Omega)} & = \left(\int_\Omega |(T + c_1)^{-1}(w - P_E(\phi))|^2 ds du \right)^{1/2} \\ & \leq \|(T + c_1)^{-1}\| \left(\int_{\mathbb{R}} |w - P_E(\phi)|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |w(s) - P_E(\phi)(s)|^2 ds \right)^{1/2} & = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^1 \phi(\phi_0^\epsilon - 1) du \right|^2 ds \right)^{1/2} \\ & \leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 |\phi_0^\epsilon - 1|^2 ds \right)^{1/2} du \\ & \leq \delta / \|(T + c_1)^{-1}\| \int_0^1 1 \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 ds \right)^{1/2} du \\ & \text{(Hölder)} \leq \delta / \|(T + c_1)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\delta > 0$ existe ϵ_0 tal que, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$\|[\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0(\phi)] - [\pi_0^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_0 \oplus 0_{E^\perp}(\phi)]\|_{L^2(\Omega)} < 2\delta,$$

e a demonstração está completa. ■

Teorema 23. *Seja T_ϵ o único operador auto-adjunto em $L^2(\Omega)$ associado com t_ϵ , o qual é unitariamente equivalente ao laplaciano $-\Delta_\alpha^{\Omega_\epsilon}$ de Robin em $L^2(\Omega_\epsilon)$. Se T denota o operador auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R})$ dado no Teorema 22, então a convergência uniforme dos resolventes*

$$\|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_0^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_0 \oplus 0_{E^\perp}]\|_{B(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

vale, em que 0_{E^\perp} é o operador nulo sobre o espaço E^\perp .

Demonstração: Por uma desigualdade triangular, Lema 8 e Teorema 22 segue a demonstração. ■

O Teorema 23 esclarece o segundo tipo de convergência, já comentado anteriormente. Então, a luz do Teorema 23 dizemos que a família de operadores resolventes $\{(T_\epsilon + c_1)^{-1}\}_\epsilon$, em $L^2(\Omega)$, converge uniformemente ao operador efetivo $(\pi_0^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_0)$, o qual identifica-se com o operador $(T + c_1)^{-1}$, em $L^2(\mathbb{R})$; completando o sentido do tipo de convergência em norma dos resolventes.

5.7 Apêndice

5.7.1. Demonstração do Lema 5

Demonstração: Seja $\phi \in H^1(\Omega)$ então integrando por partes

$$\frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{\beta_\epsilon} \operatorname{Re}(\bar{\phi} \partial_u \phi) \, dsdu = - \int_\Omega \frac{k^2}{2\beta_\epsilon^2} |\phi|^2 \, dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \frac{k}{2\beta_\epsilon} |\operatorname{tr}(\phi)|^2 \nu_2 \, d\sigma. \quad (5.15)$$

Assim, forma t_ϵ pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} t_\epsilon(\phi) &= \int_{\Omega} \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon^2} dsdu + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi|^2 dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha_k |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\partial\Omega} \frac{k}{\beta_\epsilon} |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{k^2}{\beta_\epsilon^2} |\phi|^2 dsdu + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{k^2}{\beta_\epsilon^2} |\phi|^2 dsdu \\ &\quad + \epsilon \int_{\Omega} \frac{uk'}{\beta_\epsilon^3} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) dsdu + \epsilon^2 \int_{\Omega} \frac{u^2 |k'|^2}{4 \beta_\epsilon^4} |\phi|^2 dsdu. \end{aligned}$$

Recordando que $\alpha_k = (\alpha - k/2)$, temos a seguinte identidade em que a segunda integral à direita é não-negativa

$$\int_{\partial\Omega} \left[\alpha_k + \frac{k}{2\beta_\epsilon} \right] |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} \alpha |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma + \epsilon \int_{\partial\Omega} \frac{k^2}{2\beta_\epsilon} u |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma,$$

substituindo a igualdade acima na expressão de t_ϵ vale a desigualdade

$$\begin{aligned} t_\epsilon(\phi) &\geq \int_{\Omega} \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon^2} dsdu + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi|^2 dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha |\text{tr}(\phi)|^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{k^2}{\beta_\epsilon^2} |\phi|^2 dsdu + \epsilon \int_{\Omega} \frac{uk'}{\beta_\epsilon^3} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) dsdu + \epsilon^2 \int_{\Omega} \frac{u^2 |k'|^2}{4 \beta_\epsilon^4} |\phi|^2 dsdu. \end{aligned}$$

Recordando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, com $a \geq 0$, $b \geq 0$, vale a desigualdade ($1/2 < \beta_\epsilon < 3/4$)

$$\begin{aligned} \epsilon \left| \int_{\Omega} \frac{uk'}{\beta_\epsilon^3} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) dsdu \right| &\leq \epsilon 8 \|k'\|_\infty \left(\int_{\Omega} \frac{|\phi|^2}{2} + \frac{|\partial_s \phi|^2}{2} dsdu \right) \\ &\leq \epsilon 4 \|k'\|_\infty \left(\int_{\Omega} |\phi|^2 + |\partial_s \phi|^2 dsdu \right), \end{aligned}$$

então,

$$\epsilon \int_{\Omega} \frac{uk'}{\beta_\epsilon^3} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) dsdu \geq -4 \|k'\| \int_{\Omega} |\phi|^2 dsdu - 4\epsilon \|k'\| \int_{\Omega} |\partial_s \phi|^2 dsdu. \quad (5.16)$$

Em vista da convergência $\beta_\epsilon \rightarrow 1$, $\epsilon \rightarrow 0$, podemos escolher ϵ_0 positivo e suficientemente pequeno de modo que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ exista $L > 0$ independente de ϵ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{|\partial_s \phi|^2}{\beta_\epsilon^2} dsdu - 4 \|k'\| \epsilon \int_{\Omega} |\partial_s \phi|^2 dsdu \geq L \int_{\Omega} |\partial_s \phi|^2 dsdu. \quad (5.17)$$

Agora, usando (5.18) e em virtude de (5.16), (5.17) para ϵ suficientemente pequeno temos para $\phi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ a primeira desigualdade em (5.19) e por argumento feito em Teorema 11 a segunda desigualdade é justificada,

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi|^2 dsdu \geq \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi|^2 dsdu, \quad (5.18)$$

temos também a desigualdade:

$$\begin{aligned}
t_\epsilon(\phi_i) &\geq \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi_i|^2 \, dsdu - \int_{\Omega} \frac{k^2}{2\beta_\epsilon^2} |\phi_i|^2 \, dsdu - (4\|k'\|^2 + 4\|k'\|) \int_{\Omega} |\phi_i|^2 \, dsdu + \\
&+ \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^1 |\partial_u \phi_i|^2 \, du + 2\epsilon\alpha(s)(|\phi_i(s,1)|^2 - |\phi_i(s,0)|^2) \right] ds \quad (5.19) \\
&\geq -(2\|\alpha\|^2 + 2\|k\|^2 + 4\|k'\|^2 + 4\|k'\|) \int_{\Omega} |\phi_i|^2 \, dsdu + \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi_i|^2 \, dsdu.
\end{aligned}$$

Então,

$$t_\epsilon(\phi_i) + 2c_2 \int_{\Omega} |\phi_i|^2 \, dsdu \geq c_2 \int_{\Omega} |\phi_i|^2 \, dsdu,$$

com $c_2 = (2\|\alpha\|^2 + 2\|k\|^2 + 4\|k'\|^2 + 4\|k'\|)$, além disso,

$$t_\epsilon(\phi_i) + 2c_2 \int_{\Omega} |\phi_i|^2 \, dsdu \geq (2\epsilon)^{-2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi_i|^2 \, dsdu.$$

Note também que vale a desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi_i|^2 \, dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha_k |\text{tr}(\phi_i)|^2 \nu_2 \, d\sigma + \int_{\Omega} \frac{k}{\epsilon\beta_\epsilon} \text{Re}(\bar{\phi}_i \partial_u \phi_i) \, dsdu \quad (5.20) \\
+ (2\|\alpha\|^2 + 2\|k\|^2) \int_{\Omega} |\phi_i|^2 \, dsdu \geq 0.
\end{aligned}$$

Escolha $c_1 = 2c_2$ assim, para ϵ suficientemente pequeno, valem as desigualdades abaixo para toda $\phi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$t_\epsilon(\phi_i) + c_1 \|\phi_i\|_2^2 \geq c_2 \|\phi_i\|_2^2$$

$$t_\epsilon(\phi_i) + c_1 \|\phi_i\|_2^2 \geq (2\epsilon)^{-2} \|\partial_u \phi_i\|_2^2$$

$$t_\epsilon(\phi_i) + c_1 \|\phi_i\|_2^2 \geq L \|\partial_s \phi_i\|_2^2,$$

com a última desigualdade seguindo da escolha de $c_1 > 0$ e de (5.17). Sejam $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi_i|_\Omega \rightarrow \phi$ em $H^1(\Omega)$ então quando $i \rightarrow \infty$, vale a convergência $t_\epsilon(\phi_i) \rightarrow t_\epsilon(\phi)$, e segue a primeira parte do lema.

Verificamos que $b(\phi) := t_\epsilon(\phi) + c_1 \|\phi\|_2^2$ é fechada. A primeira parte da demonstração nos permite obter uma constante $c > 0$ tal que $\|\phi\|_{1,2}^2 \leq cb(\phi)$, para qualquer $\phi \in H^1(\Omega)$. Dadas $\phi \in L^2(\Omega)$ e $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ uma seqüência em $H^1(\Omega)$ tal que $b(\phi_m - \phi_n) \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$, e $\phi_m \rightarrow \phi$, $m \rightarrow \infty$, em $L^2(\Omega)$. Queremos mostrar que

i) $\phi \in \text{dom } b$

ii) $b(\phi_m - \phi) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

De fato, $\|\phi_m - \phi_n\|_{1,2}^2 \leq cb(\phi_m - \phi_n)$, logo $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega)$, então existe $\psi \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi_m \rightarrow \psi, m \rightarrow \infty$ em $L^2(\Omega)$. Assim, conclui-se a igualdade $\phi = \psi$ em $L^2(\Omega)$. Para o item ii) basta notar os limites $\|\phi_m - \phi\|_{1,2} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, $\|\text{tr}(\phi_m - \phi)\|_2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. ■

5.7.2. Demonstração do Lema 6

Como no Lema 5, para $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{t}_\epsilon(\phi) &\geq \frac{1}{2\epsilon^2} \int_\Omega |\partial_u \phi|^2 dsdu - \int_\Omega \frac{k^2}{2\beta_\epsilon^2} |\phi|^2 dsdu + \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^1 |\partial_u \phi|^2 du + 2\epsilon\alpha(s)(|\phi(s, 1)|^2 - |\phi(s, 0)|^2) \right] ds \\ &\geq -(2\|\alpha\|^2 + 2\|k\|^2 + 4\|k'\|^2 + 4\|k'\|) \int_\Omega |\phi|^2 dsdu + \frac{1}{2\epsilon^2} \int_\Omega |\partial_u \phi|^2 dsdu. \end{aligned}$$

Por densidade segue a primeira parte da afirmação. Para verificar que \tilde{t}_ϵ é fechada basta proceder de maneira análoga ao Lema 5, visto que, existe uma constante $c > 0$ de modo que $\|\phi\|_{1,2}^2 \leq c\tilde{a}_\epsilon(\phi)$.

5.7.3. Demonstração da Proposição 3

Demonstração: No que segue é suficiente verificarmos as hipóteses do Teorema 20. Primeiramente, para ϵ suficientemente pequeno, temos a desigualdade

$$|\beta_\epsilon^{-2} - 1| = \epsilon|uk| |\beta_\epsilon^{-2}(1 + \beta_\epsilon)| \leq \epsilon F, \quad F > 0,$$

a constante positiva F depende apenas de $\|k\|_\infty$. Daí, para ϵ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} |t_\epsilon(\phi) - \tilde{t}_\epsilon(\phi)| &\leq \epsilon F \int_\Omega |\partial_s \phi|^2 dsdu + \epsilon F \int_\Omega \frac{k^2}{4} |\phi|^2 dsdu \\ &\quad + \left| \epsilon \int_\Omega u \frac{k'}{\beta_\epsilon^3} \text{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) dsdu + \epsilon^2 \int_\Omega \frac{u^2 |k'|^2}{4 \beta_\epsilon^4} |\phi|^2 dsdu \right|, \end{aligned}$$

agora, como na demonstração do Lema 5,

$$\begin{aligned} & \left| \epsilon \int_{\Omega} u \frac{k'}{\beta_{\epsilon}^3} \operatorname{Re}(\bar{\phi} \partial_s \phi) \, dsdu + \epsilon^2 \int_{\Omega} \frac{u^2}{4} \frac{|k'|^2}{\beta_{\epsilon}^4} |\phi|^2 \, dsdu \right| \leq \\ & \leq 4\epsilon \|k'\|_{\infty} \left[\int_{\Omega} |\phi|^2 + |\partial_s \phi|^2 \, dsdu \right] + 4\epsilon \|k'\|^2 \int_{\Omega} |\phi|^2 \, dsdu. \end{aligned}$$

Daí, para $\mathcal{D} = 1 + F + 4\|k'\|_{\infty}$, obtemos

$$\begin{aligned} |t_{\epsilon}(\phi) - \tilde{t}_{\epsilon}(\phi)| & \leq \epsilon \mathcal{D} \int_{\Omega} |\partial_s \phi|^2 \, dsdu + \epsilon \mathcal{D} \int_{\Omega} \frac{k^2}{4} |\phi|^2 \, dsdu \\ & \quad + \epsilon \mathcal{D} \left[2(4\|k'\|_{\infty}^2 + 4\|k'\|_{\infty}) \right] \int_{\Omega} |\phi|^2 \, dsdu, \end{aligned}$$

também segue da demonstração do Lema 5, veja (5.20), que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi|^2 \, dsdu + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha_k |\operatorname{tr}(\phi)|^2 \nu_2 \, d\sigma + \int_{\Omega} \frac{k}{\epsilon \beta_{\epsilon}} \operatorname{Re}(\bar{\phi} \partial_u \phi) \, dsdu \\ + 2(2\|\alpha\|_{\infty}^2 + 2\|k\|_{\infty}^2) \int_{\Omega} |\phi|^2 \, dsdu \geq 0. \end{aligned}$$

Daí, e desde $c_1 = 2(2\|\alpha\|_{\infty}^2 + 2\|k\|_{\infty}^2 + 4\|k'\|_{\infty}^2 + 4\|k'\|_{\infty})$ obtemos

$$|t_{\epsilon}(\phi) - \tilde{t}_{\epsilon}(\phi)| \leq \epsilon \mathcal{D} [\tilde{a}_{\epsilon}](\phi).$$

Completamos a demonstração ao aplicarmos o Teorema 20. ■

5.7.4. Demonstração do Teorema 21

A desigualdade (5.11) é imediata da definição de \tilde{a}_{ϵ} . Já para a estimativa em (5.12) aplicamos o princípio do minimax (Teorema 7), desde que $\phi_0^{\epsilon} \perp \eta$ para quase todo $s \in \mathbb{R}$.

Por escolha da constante $c_1 > 0$ a desigualdade é possível

$$\tilde{a}_{\epsilon}(\eta) \geq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial u} \right|^2 \, du + \epsilon \alpha(s) (|\operatorname{tr}(\eta)(s, 1)|^2 - |\operatorname{tr}(\eta)(s, 0)|^2) \right] \, ds,$$

daí, em vista da Seção 4.5.1., temos,

$$\tilde{a}_{\epsilon}(\eta) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\eta|^2 \, dsdu, \quad (5.21)$$

recorde que $\lambda_1^I > 0$ denota o segundo autovalor do operador laplaciano de Robin $-\Delta_{\epsilon\alpha}^I$ na seção transversal I com condição de contorno

$$-\psi'(0) - \epsilon\alpha(s)\psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(1) + \epsilon\alpha(s)\psi(1) = 0.$$

Parte não-diagonal:

A meta é verificar (5.13) (parte não-diagonal). Dada $\phi \in H^1(\Omega)$, podemos escrever $\phi = w\phi_0^\epsilon + \eta$, com $\eta = \phi_\perp$. Considere a família de autofunções $\{\phi_0^\epsilon\}_{\epsilon>0}$; denote por I_1^ϵ a forma sesquilinear

$$I_\epsilon^1(\phi, \psi) = \int_\Omega \partial_s \bar{\phi} \partial_s \psi \, ds \, du + \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega \partial_u \bar{\phi} \partial_u \psi \, ds \, du + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha \operatorname{tr}(\bar{\phi}) \operatorname{tr}(\psi) \nu_2 \, d\sigma,$$

e desde que $\int_I (\partial_s \eta) \phi_0^\epsilon \, du = - \int_I \eta (\partial_s \phi_0^\epsilon) \, du$, q.t.p. $s \in \mathbb{R}$, e $|\partial_s \phi_0^\epsilon(s, u)| \leq C |\phi_0^\epsilon(s, u)|$ com $C > 0$ independente de ϵ , temos

$$\begin{aligned} |I_\epsilon^1(w\phi_0^\epsilon, \eta)| &\leq \left| \int_\Omega \bar{w}' \phi_0^\epsilon \partial_s \eta + \bar{w} \partial_s \phi_0^\epsilon \partial_s \eta \, ds \, du \right| \\ &\leq C(\|w\|_{1,2} \|\eta\|_2) + \epsilon \|w\|_2 \|\partial_s \eta\|_2. \end{aligned}$$

Assim, por (5.21) e do fato que $\tilde{a}_\epsilon(\eta) \geq L \|\partial_s \eta\|_2^2$, $\tilde{a}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) \geq \|w'\|_2^2$, existe $M > 0$ (independente de ϵ) tal que

$$|I_\epsilon^1(w\phi_0^\epsilon, \eta)| \leq \epsilon M \tilde{a}_\epsilon[w\phi_0^\epsilon]^{1/2} \tilde{a}_\epsilon[\eta]^{1/2}.$$

Seja

$$I_\epsilon^2(\phi, \psi) = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{2\beta_\epsilon} [\bar{\phi} \partial_u \psi + \partial_u \bar{\phi} \psi] \, ds \, du - \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \frac{k}{2} \operatorname{tr}(\bar{\phi}) \operatorname{tr}(\psi) \nu_2 \, d\sigma;$$

por integração por partes obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \frac{k}{2} \operatorname{tr}(\bar{\phi}) \operatorname{tr}(\psi) \nu_2 \, d\sigma = \int_\Omega \frac{k}{2} [\bar{\phi} \partial_u \psi + \partial_u \bar{\phi} \psi] \, ds \, du,$$

e daí

$$I_\epsilon^2(w\phi_0^\epsilon, \eta) = \int_\Omega \frac{uk^2}{2\beta_\epsilon} [\bar{w} \phi_0^\epsilon \partial_u \eta + \eta \partial_u (\bar{w} \phi_0^\epsilon)] \, ds \, du.$$

Já que $k(s)$ e $\beta_\epsilon(s)$ são funções limitadas, existe $C > 0$ tal que $\left\| \frac{uk^2}{2\beta_\epsilon} \right\|_\infty \leq C$, para ϵ pequeno o suficiente, e após combinar com Lema 6 segue que

$$\begin{aligned} |I_\epsilon^2(w\phi_0^\epsilon, \eta)| &\leq C(\|w\|_2 \|\partial_u \eta\|_2) + \epsilon \|\alpha\|_\infty \|w\|_2 \|\eta\|_2 \\ &\leq \epsilon \tilde{C} \tilde{a}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon)^{1/2} \tilde{a}_\epsilon(\eta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$|\tilde{a}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon, \eta)|^2 = |I_\epsilon^1(w\phi_0^\epsilon, \eta) + I_\epsilon^2(w\phi_0^\epsilon, \eta)|^2 \leq \mathcal{M}^2 \epsilon^2 \tilde{a}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) \tilde{a}_\epsilon(\eta).$$

Portanto, é suficiente invocar o Teorema 18 para completar a demonstração do Teorema 21. \blacksquare

5.7.5. Função potencial

Seja $\phi = w\phi_0^\epsilon$, with $w \in H^1(\mathbb{R})$; então

$$\tilde{t}_\epsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + |w|^2 V_\epsilon^{\text{eff}} \right) ds,$$

com $\mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}}(s) = V_\epsilon(s) + V_1(s) + V_2^\epsilon(s) + V_3(s)$, em que o primeiro termo em V_ϵ^{eff} é

$$V_\epsilon(s) = \int_I |\partial_s \phi_0^\epsilon|^2 du - \alpha^2(s),$$

o qual foi obtido de (5.22) e (5.23),

$$\int_{\Omega} |\partial_s \phi|^2 ds du = \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 + |w|^2 |\partial_s \phi_0^\epsilon|^2 ds, \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\partial_u \phi|^2 ds du + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \alpha |\text{tr}(\phi)|^2 \nu_2 d\sigma = - \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \alpha^2 ds. \quad (5.23)$$

Os outros termos são obtidos diretamente e dados por

$$V_1(s) := \frac{k^2}{4}, \quad V_2^\epsilon(s) := -\alpha k \int_I \frac{|\phi_0^\epsilon|^2}{\beta_\epsilon} du, \quad V_3(s) := \alpha k.$$

Sob as hipóteses sobre a função curvatura k e desde que β_ϵ converge uniformemente para 1 quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos o limite uniforme

$$V_2^\epsilon + V_3 \rightarrow 0, \quad V_1 + V_\epsilon \rightarrow \frac{k^2}{4} - \alpha^2, \quad V_\epsilon \rightarrow -\alpha^2, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, $\mathcal{V}_\epsilon^{\text{eff}} \rightarrow \frac{k^2}{4} - \alpha^2$, uniformemente.

Capítulo 6

Tubos finos no espaço

Investigamos neste capítulo o operador laplaciano em um tubo delgado tridimensional sujeito a um tipo de condição de Robin na fronteira; a região tubular é construída ao longo de uma curva $\Gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ por mover uma seção transversal limitada, usando a existência do referencial de Frenet.

Estudamos assintoticamente uma família de operadores auto-adjuntos ilimitados quando a seção transversal do tubo tende a zero de maneira uniforme. Como visto em domínios estreitos no plano, existe um *operador efetivo* o qual pode ser caracterizado por um operador unidimensional que depende das características geométricas do tubo estreito inicial.

Para a descrição de nosso quadro seremos um pouco mais precisos. Usamos formalmente a equação (6.1), a qual é entendida no sentido do traço, para definirmos a condição de fronteira e fixar algumas notações,

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \vec{\nu}} + \tilde{\gamma} u_\epsilon = 0, \quad \text{em } \partial\Omega_\epsilon. \quad (6.1)$$

Para cada parâmetro $\epsilon > 0$, seja $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ uma vizinhança tubular, de uma dada curva de referência Γ , construída por meio uma seção transversal $S_\epsilon = \epsilon S$ com $S \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado, por movê-la ao longo de $\Gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ de maneira apropriada. A função $\tilde{\gamma} : \partial\Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, veja Seção 6.2.1. para mais detalhes.

Com nossas escolhas específicas de condições de fronteira, a curvatura também dá uma contribuição repulsiva para o potencial efetivo (veja a ação do operador efetivo em (6.22)) e, com certa surpresa, a torção não joga qualquer papel nesse limite singular!

6.1 Construção da região tubular

Seja $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva simples C^3 com $\|\dot{\Gamma}(s)\| = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$. A *curvatura* de Γ é definida por $k(s) = \|\ddot{\Gamma}(s)\| \neq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, escolhamos a base ortonormal de campos de vetores $\{T, N, B\}$ chamada de vetor *tangente*, *normal* e *binormal*, movendo ao longo da curva Γ e definida por:

$$T = \dot{\Gamma}, \quad N = \dot{T}/\|\dot{T}\|, \quad B = T \times N.$$

As funções *curvatura* e *torção* associadas à curva Γ , denotadas por k e τ respectivamente, são supostas satisfazer as *equações de Frenet* (ou seja, supõe-se que o triedro de Frenet esteja globalmente definido):

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

a função torção τ é definida por (6.2).

Seja $S = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ (quadrado). Considere o conjunto

$$\Omega^F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \Gamma(s) + y_1 N(s) + y_2 B(s), s \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in S\},$$

obtido transladando a chamada seção transversal S ao longo da curva Γ .

Para cada $0 < \epsilon < 1$, comprimimos a seção transversal em Ω^F , assim, obtemos o conjunto Ω_ϵ cujo significado geométrico é de um tubo tridimensional com diâmetro da seção transversal em Ω_ϵ de ordem infinitesimal ϵ ,

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \Gamma(s) + \epsilon y_1 N(s) + \epsilon y_2 B(s), s \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in S\}.$$

Neste capítulo, estudamos o comportamento de uma partícula quântica livre em Ω_ϵ com condição de contorno de Robin na fronteira $\partial\Omega_\epsilon$, quando o parâmetro ϵ tende a zero. Geometricamente, o limite significa comprimir a região tubular Ω_ϵ em torno da curva Γ .

Introduzimos a família de formas quadráticas

$$F_\epsilon(\psi) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla\psi|^2 dx + \int_{\partial\Omega_\epsilon} \tilde{\gamma} |\text{tr}_\epsilon(\psi)|^2 d\sigma_\epsilon, \quad H^1(\Omega_\epsilon) = \text{dom } F_\epsilon, \quad (6.3)$$

a qual corresponde ao chamado operador laplaciano $-\Delta_R^{\Omega_\epsilon}$ de Robin em Ω_ϵ .

6.2 Forma quadrática

Para uma análise de redução de dimensão, é conveniente efetuar uma mudança de variáveis de modo a tornar a região de integração em (6.3) independente de ϵ . Será sobre um domínio fixo, a saber o tubo reto $\Omega := S \times \mathbb{R}$, que investigamos o limite $\epsilon \downarrow 0$. Para realizarmos esta tarefa, apresentamos para cada $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, a transformação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon : \bar{\Omega} &\rightarrow \bar{\Omega}_\epsilon \\ (y, s) &\mapsto \Gamma(s) + \epsilon y_1 N(s) + \epsilon y_2 B(s). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Em vista de (6.4), uma transformação unitária identifica os espaços de Hilbert $L^2(\Omega_\epsilon)$ com $L^2(\Omega)$, o último espaço com o produto interno

$$(\psi, \phi)_\epsilon = \int_{\Omega} \bar{\psi}(y, s) \phi(y, s) \epsilon^2 \beta_\epsilon(y, s) \, dy ds, \quad \forall \psi, \phi \in L^2(\Omega). \quad (6.5)$$

Para assegurar tal identificação, assumimos que $\|k\|_\infty, \|\tau\|_\infty < \infty$, assim \mathcal{L}_ϵ é um C^1 -difeomorfismo. Entretanto, por razões técnicas, veja seção “Parte não-diagonal” abaixo, exigimos que $k \in C^2(\mathbb{R}) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ e $\tau \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$; por isso a nossa hipótese de que Γ é de classe C^3 . Segue que o determinante da matriz jacobiana de \mathcal{L}_ϵ é obtido ser $\det \nabla \mathcal{L}_\epsilon = \epsilon^2 \beta_\epsilon$, com $\beta_\epsilon = (1 - \epsilon k(s) y_1)$. De fato, após alguns cálculos, a matriz jacobiana $\nabla \mathcal{L}_\epsilon$ é dada por

$$\nabla \mathcal{L}_\epsilon(y, s) := \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ \beta_\epsilon & -\tau \epsilon y_2 & \tau \epsilon y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

em que

$$e_1 = \frac{\partial \mathcal{L}_\epsilon}{\partial y_1} \quad e_2 = \frac{\partial \mathcal{L}_\epsilon}{\partial y_2}, \quad e_3 = \frac{\partial \mathcal{L}_\epsilon}{\partial s}.$$

A inversa da matriz acima é

$$\begin{bmatrix} \frac{\tau(s) y_2}{\beta_\epsilon(y, s)} & -\frac{\tau(s) y_1}{\beta_\epsilon(y, s)} & \frac{1}{\beta_\epsilon} \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & 0 \end{bmatrix}.$$

Desde que a função curvatura k é limitada, para $0 < \epsilon$ suficientemente pequeno, temos $\beta_\epsilon > 0$ em $S \times \mathbb{R}$ e segue que \mathcal{L}_ϵ é um difeomorfismo local. Ao exigirmos que \mathcal{L}_ϵ seja injetora (isto é, o tubo não tem auto-interseção), o difeomorfismo global é obtido.

A seguir, sob as hipóteses com relação às funções k, τ e para ϵ suficientemente pequeno, definimos a transformação unitária

$$\begin{aligned} U_\epsilon : L^2(\Omega_\epsilon) &\rightarrow L^2(\Omega, \epsilon^2 \beta_\epsilon dy ds) \\ \psi &\mapsto v = \psi \circ \mathcal{L}_\epsilon \end{aligned} \quad (6.7)$$

e a partir daí, obtemos uma família de operadores $\mathfrak{A}_\epsilon = U_\epsilon(-\Delta_R^{\Omega_\epsilon})U_\epsilon^{-1}$, associados com as formas quadráticas $\{\mathfrak{a}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ dadas por

$$\mathfrak{a}_\epsilon(v) = F_\epsilon(v \circ \mathcal{L}_\epsilon^{-1}), \quad \text{dom } \mathfrak{a}_\epsilon = H^1(\Omega) \sqsubseteq L^2(\Omega, \epsilon^2 \beta_\epsilon dy ds).$$

Denotamos o gradiente de v na forma $(\nabla_y v, v')$, sendo v' a derivada em relação a terceira variável $s \in \mathbb{R}$.

Daí, para $\psi = U_\epsilon^{-1}v$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \psi(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_S (|\nabla v(y, s) \nabla \mathcal{L}_\epsilon^{-1}(\mathcal{L}_\epsilon(y, s))|^2) \epsilon^2 \beta_\epsilon dy ds \\ &= \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \int_S \left[\frac{1}{\beta_\epsilon} |v' + (\nabla_y v \cdot Ry)\tau|^2 + \frac{\beta_\epsilon}{\epsilon^2} |\nabla_y v|^2 \right] dy ds \end{aligned}$$

em que R é a matriz de rotação no sentido anti-horário

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seguindo [BMT₂], escolhemmos uma parametrização $y = y(t)$ de classe $C^1[0, 1]$ por partes da fronteira ∂S de S , orientada no sentido anti-horário, a saber, $y(t) = (t, 0) \cup (1, t) \cup (t, 1) \cup (0, t)$, então, com $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, obtemos a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} \sigma_\epsilon : [0, 1] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) &\mapsto \mathcal{L}_\epsilon(y(t), s) \end{aligned} \quad (6.8)$$

da superfície $\partial\Omega_\epsilon$ em \mathbb{R}^3 , e desde que

$$\frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial t} \times \frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial s} = \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & \epsilon(\dot{y} \cdot e_1) & \epsilon(\dot{y} \cdot e_2) \\ \beta_\epsilon(y(t), s) & -\tau y_2(t) & \tau y_1(t) \end{vmatrix},$$

obtemos

$$\left\| \frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial t} \times \frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial s} \right\| = \epsilon (\sqrt{\beta_\epsilon^2 + \epsilon^2 \tau^2 (\dot{y} \cdot y)^2}) = \epsilon \beta_\epsilon \sqrt{1 + \epsilon^2 \frac{\tau^2}{\beta_\epsilon^2} (\dot{y} \cdot y)^2} = \epsilon (\beta_\epsilon + \epsilon^2 r_\epsilon). \quad (6.9)$$

Por expansão de Taylor da raiz quadrada, a função $r_\epsilon(t, s)$ satisfaz

$$r_\epsilon \geq 0 \quad \text{e} \quad \left| r_\epsilon - \frac{\tau^2}{2} (\dot{y} \cdot y)^2 \right| \leq C\epsilon. \quad (6.10)$$

De fato, da fórmula de Taylor com resto de Legendre para a função $g(\xi) = \sqrt{\xi}$, $\xi > 0$, em torno de $\xi = 1$, obtemos para ϵ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} g(1 + v_\epsilon) &= g(1) + \dot{g}(1)v_\epsilon + \frac{\ddot{g}(1 + \theta v_\epsilon)}{2} v_\epsilon^2 \\ &= 1 + \epsilon^2 \left[\frac{\tau^2 (\dot{y} \cdot y)^2}{2\beta_\epsilon^2(y(t), s)} + \frac{\ddot{g}(1 + \theta v_\epsilon)}{2} \epsilon^2 \frac{\tau^4 (\dot{y} \cdot y)^4}{\beta_\epsilon^4(y(t), s)} \right], \end{aligned}$$

com $0 < \theta < 1$ e

$$v_\epsilon(t, s) = \epsilon^2 \frac{\tau^2 (\dot{y} \cdot y)^2}{\beta_\epsilon^2(y(t), s)}.$$

Daí,

$$\beta_\epsilon g(1 + v_\epsilon) = \beta_\epsilon + \epsilon^2 \left[\frac{\tau^2 (\dot{y} \cdot y)^2}{2\beta_\epsilon(y(t), s)} + \epsilon^2 \frac{\ddot{g}(1 + \theta v_\epsilon)}{2} \frac{\tau^4 (\dot{y} \cdot y)^4}{\beta_\epsilon^3(y(t), s)} \right].$$

Denotando por $r_\epsilon(t, s)$ a expressão entre colchetes, segue que $r_\epsilon \geq 0$ e

$$\begin{aligned} \left| r_\epsilon - \frac{\tau^2}{2} (\dot{y} \cdot y)^2 \right| &\leq \left| \frac{\tau^2 (\dot{y} \cdot y)^2}{2} \left(\frac{1}{\beta_\epsilon} - 1 \right) \right| + C\epsilon \\ &\leq \left| \frac{\tau^2 (\dot{y} \cdot y)^2}{2} \left(\frac{\epsilon k(s) y_1}{\beta_\epsilon} \right) \right| + C\epsilon \\ &\leq \epsilon C. \end{aligned}$$

Seguindo, a integral de fronteira é dada por (confira Exemplo (4))

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \Omega_\epsilon} \tilde{\gamma} |\text{tr}_\epsilon(\psi)|^2 d\sigma_\epsilon(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \tilde{\gamma}(\mathcal{L}_\epsilon(y(t), s)) |\text{tr}(v)(y(t), s)|^2 \left\| \frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial t} \times \frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial s} \right\| dt ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \gamma(y(t), s) |\text{tr}(v)(y(t), s)|^2 \epsilon (\beta_\epsilon(y(t), s) + \epsilon^2 r_\epsilon(y(t), s)) dt ds \\ &= \epsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma |\text{tr}(v)|^2 (\beta_\epsilon + \epsilon^2 r_\epsilon) d\sigma(y) \right) ds. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Portanto, para toda $v \in \text{dom } \mathbf{a}_\epsilon$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\epsilon(v) &= \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \int_S \left[\frac{1}{\beta_\epsilon} |v' + (\nabla_y v \cdot Ry)\tau|^2 + \frac{\beta_\epsilon}{\epsilon^2} |\nabla_y v|^2 \right] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \gamma(y(t), s) |\text{tr}(v)(y(t), s)|^2 \epsilon (\beta_\epsilon(y(t), s) + \epsilon^2 r_\epsilon(y(t), s)) dt ds, \end{aligned}$$

na Subseção 6.2.1. apresentamos a definição das funções $\tilde{\gamma}, \gamma$. De (6.9)-(6.10) e do fato que $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$, segue a aproximação

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{\gamma} |\text{tr}_\epsilon(\psi)|^2 d\sigma_\epsilon(x) - \epsilon \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial S} \gamma |\text{tr}(v)|^2 \left(\beta_\epsilon + \frac{\epsilon^2 \tau^2}{2} (\dot{y} \cdot y)^2 \right) d\sigma(y) ds \right| \quad (6.12) \\ \leq C_1 \epsilon^4 \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial S} |\gamma| |v|^2 d\sigma(y) ds. \end{aligned}$$

Em virtude de (6.12), definimos a forma quadrática $\tilde{\mathbf{a}}_\epsilon : H^1(\Omega, \epsilon^2 \beta_\epsilon dy ds) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_\epsilon(v) &= \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \int_S \left[\frac{1}{\beta_\epsilon} |v' + (\nabla_y v \cdot Ry)\tau|^2 + \frac{\beta_\epsilon}{\epsilon^2} |\nabla_y v|^2 \right] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial S} \epsilon \gamma |\text{tr}(v)|^2 \left(\beta_\epsilon + \frac{\epsilon^2 \tau^2}{2} (\dot{y} \cdot y)^2 \right) d\sigma(y) \right] ds, \end{aligned}$$

e temos a seguinte estimativa

$$|F_\epsilon(v \circ \mathcal{L}_\epsilon^{-1}) - \tilde{\mathbf{a}}_\epsilon(v)| \leq \epsilon^4 C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (6.13)$$

A forma quadrática $\tilde{\mathbf{a}}_\epsilon$ é vista em $L^2(\Omega)$ via a transformação unitária

$$V_\epsilon : L^2(\Omega, \epsilon^2 \beta_\epsilon dy ds) \rightarrow L^2(\Omega) : \{v \mapsto (\sqrt{\epsilon^2 \beta_\epsilon})v\}, \quad (6.14)$$

isto é, passamos a considerar a família de formas quadráticas $\{b_\epsilon : \text{dom } b_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}\}_\epsilon$,

$$b_\epsilon(v) = \tilde{\mathbf{a}}_\epsilon(V_\epsilon^{-1}(v)), \quad \text{dom } b_\epsilon = V_\epsilon(\text{dom } \tilde{\mathbf{a}}_\epsilon) = H^1(\Omega),$$

com operador associado dado por $B_\epsilon = V_\epsilon \tilde{\mathfrak{A}}_\epsilon V_\epsilon^{-1}$, em que $\tilde{\mathfrak{A}}_\epsilon$ denota o operador associado com $\tilde{\mathbf{a}}_\epsilon$,

$$\begin{aligned} b_\epsilon(v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\beta_\epsilon^2} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_\epsilon} \left(\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry) \right) \right|^2 dy ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma |\text{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds + \int_{\Omega} |v|^2 \frac{k^2}{4\beta_\epsilon^2} dy ds \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \text{Re} \left(\nabla_y v \cdot \frac{\bar{v}}{\beta_\epsilon} \nabla_y \beta_\epsilon \right) dy ds + \epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau^2}{2} \left(\int_{\partial S} \gamma \frac{|\text{tr}(v)|^2}{\beta_\epsilon} (\dot{y} \cdot y)^2 d\sigma(y) \right) ds. \end{aligned}$$

Finalmente, introduzimos a forma quadrática \widehat{b}_ϵ , a qual corresponde à uma versão mais simples de b_ϵ , $\text{dom } \widehat{b}_\epsilon = H^1(\Omega)$, com ação

$$\begin{aligned} \widehat{b}_\epsilon(v) &:= \int_{\Omega} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_\epsilon} \left(\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry) \right) \right|^2 dy ds \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma |\text{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds \\ &+ \int_{\Omega} |v|^2 \frac{k^2}{4} dy ds - \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \text{Re} \left(\nabla_y v \cdot \frac{\bar{v}}{\beta_\epsilon} \nabla_y \beta_\epsilon \right) dy ds. \end{aligned}$$

6.2.1. Subespaço

Para a técnica de redução de dimensão em [FS₁, FS₂] devemos escolher uma família H_ϵ de subespaços fechados de $L^2(\Omega)$, tais subespaços levam em conta, como ocorreu nos Capítulos 4 e 5, as autofunções do laplaciano na seção transversal S .

Considere $H_\epsilon = \{wu_0^\epsilon; w \in L^2(\mathbb{R})\}$, com $u_0^\epsilon(y, s)$ autofunção normalizada associada ao primeiro autovalor $\lambda_0^S(s) = -2(\epsilon\alpha(s))^2$ do problema de autovalor (6.15) sobre a seção transversal S , que neste capítulo, como dissemos acima, é o cubo bidimensional $(0, 1) \times (0, 1)$; note que uma parametrização $y = y(t)$ da fronteira ∂S , de classe $C^1[0, 1]$ por partes, é dada juntamente com a definição de γ_α^s dada abaixo:

$$\begin{cases} -\Delta_y u = \lambda u, & \text{em } S \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} + \epsilon \gamma_\alpha^s u = 0, & \text{em } \partial S \end{cases}, \quad (6.15)$$

com

$$\gamma_\alpha^s(y_1, y_2) = \begin{cases} -\alpha(s), & (y_1, y_2) \in (0, 1] \times \{0\}, \\ \alpha(s), & (y_1, y_2) \in \{1\} \times (0, 1], \\ \alpha(s), & (y_1, y_2) \in [0, 1) \times \{1\}, \\ -\alpha(s), & (y_1, y_2) \in \{0\} \times [0, 1) \end{cases}. \quad (6.16)$$

Por todo este capítulo assumimos que o parâmetro de fronteira α satisfaz

- $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ pertence ao espaço $W^{1, \infty}(\mathbb{R})$;
- além disso, a quantia α é duas vezes diferenciável com $1/\alpha$ e α'' limitadas.

Note que podemos reformular a condição de fronteira em (6.15) como

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial u}{\partial y_2}(y_1, 0) - \epsilon\alpha(s)u(y_1, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_2}(y_1, 1) + \epsilon\alpha(s)u(y_1, 1) = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial u}{\partial y_1}(0, y_2) - \epsilon\alpha(s)u(0, y_2) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_1}(1, y_2) + \epsilon\alpha(s)u(1, y_2) = 0 \end{array} \right\}.$$

Assim, como discutido na Seção 4.2, pela definição de γ_α^s , temos

$$u_0^\epsilon(s, y) = \phi_0^\epsilon(s, y_1)\psi_0^\epsilon(s, y_2),$$

em que

$$\phi_0^\epsilon(s, y_1) = c_\epsilon(s)e^{-\alpha(s)y_1\epsilon} \quad \text{e} \quad \psi_0^\epsilon(s, y_2) = c_\epsilon(s)e^{-\alpha(s)y_2\epsilon},$$

são as autofunções normalizadas de $-\Delta_{\epsilon\alpha(s)}^{I_1}, -\Delta_{\epsilon\alpha(s)}^{I_2}$, respectivamente, com $I_i = I, i = 1, 2$ ($c_\epsilon(s)$ é o parâmetro de normalização). Desde que $S = I_1 \times I_2$ (quadrado), temos $\lambda_0^S(s) = \lambda_0^{I_1}(s) + \lambda_0^{I_2}(s) = -2(\epsilon\alpha(s))^2$.

Em suma:

$$\int_S |u_0^\epsilon(y)|^2 dy = 1, \quad \nabla_y(u_0^\epsilon) = -\epsilon\alpha(u_0^\epsilon, u_0^\epsilon),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta_y)u_0^\epsilon = \lambda_0^S u_0^\epsilon, \text{ em } S, \\ \frac{\partial u_0^\epsilon}{\partial \vec{\nu}} + \epsilon\gamma_\alpha^s u_0^\epsilon = 0, \text{ em } \partial S \end{array} \right\}. \quad (6.17)$$

A função $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \mathcal{L}_\epsilon^{-1}$ que ocorre em (6.1) é definida via γ que aqui é dada pela seguinte expressão:

$$\gamma(y, s) = \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha(s), & (y_1, y_2) \in (0, 1] \times \{0\}, s \in \mathbb{R} \\ (\alpha - k/2)(s), & (y_1, y_2) \in \{1\} \times (0, 1], s \in \mathbb{R} \\ \alpha(s), & (y_1, y_2) \in [0, 1] \times \{1\}, s \in \mathbb{R} \\ -(\alpha - k/2)(s), & (y_1, y_2) \in \{0\} \times [0, 1], s \in \mathbb{R} \end{array} \right\}. \quad (6.18)$$

6.2.2. Limitação inferior

Preferimos apenas enunciar os Lemas 9-10, os quais são resultados técnicos sem demonstração para que a leitura não se torne muito maçante, pois os argumentos completos são um tanto longos e os deixaremos para a última seção, o Apêndice. O conteúdo do Lema 9 é para que possamos lidar com formas quadráticas positivas, mas as constantes envolvidas são bem conhecidas e por meio das mesmas teremos estimativas mais importantes, com

relação ao Lema 10 este é de total interesse técnico. Passemos então ao enunciado dos lemas.

Lema 9. *Considere as quantias α, k e τ , com as hipóteses de regularidade já introduzidas. Então, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $b_\epsilon \geq -c_2$; além disso, esta forma sesquilinear é fechada, e $b_\epsilon(v) + c_1\|v\|^2 \geq (2\epsilon)^{-2}\|\nabla_y v\|_2^2$ para cada $v \in \text{dom } b_\epsilon = H^1(\Omega)$.*

Lema 10. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a seguinte estimativa*

$$\int_{\Omega} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - v \frac{1}{2\beta_\epsilon} \left(\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry) \right) \right|^2 dy ds + c_2 \int_{\Omega} |v|_2^2 dy ds \geq \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds,$$

vale para todo $v \in d_\epsilon := H^1(\Omega) \cap H_\epsilon = \{wu_0^\epsilon; w \in H^1(\mathbb{R})\}$.

Temos o mesmo resultado do Lema 9 para a forma \widehat{b}_ϵ , já que esta é de fato uma aproximação de b_ϵ ; veja a Seção 6.5.5. para a demonstração do Lema 11.

Lema 11. *Sob as hipóteses sobre $\widehat{b}_\epsilon \geq -c_2$, temos que esta forma quadrática é fechada, e para cada $v \in \text{dom } \widehat{b}_\epsilon = H^1(\Omega)$ temos $\widehat{b}_\epsilon(v) + c_1\|v\|_2^2 \geq (2\epsilon)^{-2}\|\nabla_y v\|_2^2$.*

Como consequência das escolhas das constantes c_1, c_2 , obtemos ainda que

$$\widehat{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon) + c_1\|w\|_2^2 \geq \|w'\|_2^2, \quad (6.19)$$

para $v \in d_\epsilon$, o subespaço de H_ϵ cujos elementos são da forma wu_0^ϵ , $w \in H^1(\mathbb{R})$.

6.3 Laplaciano de Robin na seção transversal

O objetivo aqui é analisar a convergência da família de formas quadráticas $\{b_\epsilon + c_1\}_{\epsilon > 0}$ quando $\epsilon \downarrow 0$. Entretanto, demonstraremos de acordo com a Proposição 6 que podemos considerar $\tilde{b}_\epsilon := \widehat{b}_\epsilon + c_1$ em vez de $b_\epsilon + c_1$, e a principal conclusão, Teorema 27, enunciaremos na Seção 6.4.

Também necessitaremos de informações sobre as autofunções do laplaciano $-\Delta_R^S$ de Robin na seção transversal S , as quais serão satisfatoriamente obtidas da Proposição 5 dada a seguir; tal proposição tem sua motivação em [RS], Proposição 1, página 264.

Defina o laplaciano de Robin em S , $-\Delta_R^S$, como o único operador auto-adjunto sobre $L^2(S)$ cuja forma quadrática é

$$b(u) = \int_S |\nabla u|^2 dy_1 dy_2 + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s |u|^2 d\sigma(y), \quad \text{dom } b = H^1(S).$$

Proposição 5. *Sejam S e γ_α^s como em (6.16), então*

$$D_R = \{u; u \in C^\infty(\bar{S}) \text{ com } \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) + \epsilon \gamma_\alpha^s(y)u(y) = 0 \text{ em } \partial S\},$$

é um cerne para o operador $-\Delta_R^S$, e se $u \in D_R$; então

$$-\Delta_R^S u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}.$$

Demonstração: Considere o operador simétrico $B = -\Delta$, $\text{dom } B = D_R$, então

$$\begin{aligned} (u, Bu)_{L^2(S)} &= \int_S \bar{u}(-\Delta u) dy = \int_S |\nabla u|^2 dy - \int_{\partial S} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(y) = \\ &= \int_S |\nabla u|^2 dy + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s |u|^2 d\sigma(y). \end{aligned}$$

Vimos, no Teorema 13, que $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ é uma base ortonormal de autofunções de $L^2(I)$ associadas com $-\Delta_{\epsilon\alpha}^I$, logo por resultado segue que $\{\Psi_{mn}(y) = \psi_n(y_1)\psi_m(y_2)\}_{m,n=0}^\infty$ é uma base de $L^2(S)$ ortonormal de autofunções de $B = -\Delta$, pois $\Psi_{mn} \in D_R$, e segue também que $D_R \subseteq L^2(S)$. Pelo Teorema 2, B é essencialmente auto-adjunto, ou seja, seu fecho \bar{B} é a sua única extensão auto-adjunta. Considere a forma sesquilinear fechada e limitada inferiormente

$$b(u, v) = \int_S \overline{\nabla u(y)} \nabla v(y) dy + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s \overline{\text{tr}(u)} \text{tr}(v) d\sigma(y), \quad u, v \in \text{dom } b = H^1(S).$$

Por definição,

$$b(u, v) = (u, -\Delta_R^S v), \quad u \in H^1(\Omega), \quad v \in \text{dom}(-\Delta_R^S).$$

Mas, para $v \in D_R \subset H^2(S) \subset \text{dom } b$, temos

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_S \nabla \bar{u} \nabla v dy + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s \overline{\text{tr}(u)} \text{tr}(v) d\sigma(y) = \\ &= \int_S \bar{u}(-\Delta v) dy + \int_{\partial S} \bar{u}(\nabla v \cdot \nu) d\sigma(y) + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s \bar{u} v d\sigma(y) = \int_S \bar{u}(-\Delta v) dy. \end{aligned}$$

Assim, $v \in \text{dom}(-\Delta_R^S)$ e $-\Delta_R^S|_{\text{dom } B} = -\Delta$. Então, $\bar{B} \subset -\Delta_R^S$. Portanto, $\bar{B} = -\Delta_R^S$. ■

Segue então da Proposição 5 que u_0^ϵ é uma autofunção para o laplaciano $-\Delta_R^S$ de Robin, na seção transversal S , pois $u_0^\epsilon \in D_R$ e $-\Delta_R^S = -\Delta$ sobre D_R . Recorde que u_0^ϵ está associada ao primeiro autovalor dado por

$$\lambda_0^S(s) = 2\lambda_1^I = -2(\epsilon\alpha(s))^2,$$

além disso, o segundo autovalor é

$$\lambda_1^S(s) = \lambda_1^I + \lambda_0^I(s) = \pi^2 - (\epsilon\alpha(s))^2.$$

Para efeito de completude, enunciaremos nesta seção o Teorema 20 dado no caso da faixa-curva. Este teorema tem como principal aplicação o conteúdo da Proposição 6. Recodemos o enunciado do teorema.

Teorema 24. *Sejam $(a_\epsilon)_\epsilon, (\tilde{a}_\epsilon)_\epsilon$ duas seqüências de formas sesquilineares positivas e fechadas em um espaço de Hilbert \mathcal{H} com $\text{dom } a_\epsilon = \text{dom } \tilde{a}_\epsilon = D$, para todo $\epsilon > 0$, e $A_\epsilon, \tilde{A}_\epsilon$ os operadores auto-adjuntos associados com $(a_\epsilon)_\epsilon$, e $(\tilde{a}_\epsilon)_\epsilon$ respectivamente. Suponha que existe $c > 0$ de modo que $a_\epsilon, \tilde{a}_\epsilon > c$, para todo $\epsilon > 0$, e*

$$|a_\epsilon(\phi) - \tilde{a}_\epsilon(\phi)| \leq q(\epsilon)\tilde{a}_\epsilon(\phi), \quad \forall \phi \in D,$$

com $q(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Então, existe $\tilde{C} > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\|A_\epsilon^{-1} - \tilde{A}_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \tilde{C}q(\epsilon).$$

A Proposição 6 é uma justificativa para considerarmos a expressão de \tilde{b}_ϵ em vez de $b_\epsilon + c_1$, e esta consideração está ligado à escolha da constante c_1 e também a convergência uniforme da função β_ϵ para a função constante igual 1, quando $\epsilon \downarrow 0$. Como consequência direta do Teorema 24 temos a Proposição 6 cuja demonstração detalhada é deixada para o Apêndice do capítulo.

Proposição 6. *Seja \tilde{B}_ϵ o operador auto-adjunto associado com $\tilde{b}_\epsilon \geq c_1$, com $c_1 > 0$ escolhido no Lema 11. Então, para ϵ suficientemente pequeno, existem $D, \tilde{D} > 0$ tais que*

$$|(b_\epsilon + c_1)(v) - \tilde{b}_\epsilon(v)| \leq \epsilon D \tilde{b}_\epsilon(v), \quad \forall v \in \text{dom } b_\epsilon,$$

$$\|(B_\epsilon + c_1)^{-1} - \tilde{B}_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \leq \epsilon \tilde{D}.$$

6.4 Redução de dimensão

Seja $H_\epsilon := \{w(s)u_0^\epsilon; w \in L^2(\mathbb{R})\}$ subespaço fechado do espaço de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\Omega)$. Considere a decomposição em soma direta $\mathcal{H} = H_\epsilon \oplus H_\epsilon^\perp$. Introduzimos a aplicação unitária para futura referência

$$\pi_\epsilon : H_\epsilon \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : \{wu_0^\epsilon \mapsto w\} \quad (6.20)$$

e recorde a definição de u_0^ϵ dada anteriormente.

Agora, daremos sentido ao que achamos de redução de dimensão. Neste contexto, façamos a restrição da forma quadrática \widehat{b}_ϵ ao subespaço H_ϵ e, após alguns cálculos que serão apresentados na Subseção 6.5.2., obtemos uma expressão da restrição que nos permitirá determinar um tipo de convergência em norma dos resolventes.

6.4.1. Potencial e operador efetivo

Esta seção é apenas um longo passo da demonstração de nosso principal resultado. A função potencial aqui denotada por V_{eff}^ϵ será deduzida nas seções seguintes. Note que a forma quadrática \widehat{b}_ϵ restrita ao subespaço $d_\epsilon \equiv H^1(\mathbb{R})$ é dada por

$$\widehat{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + V_{\text{eff}}^\epsilon(s)|w|^2 \right) ds, \quad (6.21)$$

com a seguinte convergência uniforme

$$V_{\text{eff}}^\epsilon \rightarrow V_{\text{eff}} := -2|\alpha|^2 + \frac{k^2}{4}, \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Em virtude desta redução da região de integração, ou seja, passamos da faixa Ω para a reta real, definimos a forma quadrática restrita $t_\epsilon = \widehat{b}_\epsilon|_{d_\epsilon} \geq -c_2$ em $L^2(\mathbb{R})$,

$$t_\epsilon(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + V_{\text{eff}}^\epsilon(s)|w|^2 \right) ds,$$

com $\text{dom } t_\epsilon = H^1(\mathbb{R})$; aqui d_ϵ é identificado com $H^1(\mathbb{R})$ via π_ϵ . Denote por T_ϵ o operador auto-adjunto associado com t_ϵ , dado por

$$T_\epsilon(w) = w'' + V_{\text{eff}}^\epsilon(s)w, \quad \text{dom } T_\epsilon = H^2(\mathbb{R}).$$

Defina, $t : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ uma forma quadrática, $t \geq -c_2$, por

$$t(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + V_{\text{eff}}(s)|w|^2 \right) ds,$$

e o correspondente operador auto-adjunto por

$$T(w) = w'' + V_{\text{eff}}(s)w, \quad \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}). \quad (6.22)$$

Portanto, obtemos o seguinte teorema auxiliar de redução de dimensão, cuja demonstração é análoga à do Teorema 17, e não será apresentada aqui.

Teorema 25. *Sob as condições sobre o parâmetro α e sobre k, τ a seguinte convergência $T_\epsilon \rightarrow T$ em norma dos resolventes vale, i.e.,*

$$\|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - (T + c_1)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 denota o operador nulo sobre o subespaço H_ϵ^\perp .

Corolário 2. *Considere a restrição $q_\epsilon := \tilde{b}_\epsilon|_{d_\epsilon}$, $d_\epsilon \sqsubseteq H_\epsilon$, e o correspondente operador $Q_\epsilon \geq c_2$ auto-adjunto. Então, $Q_\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(T_\epsilon + c_1)\pi_\epsilon$, e*

$$\|[Q_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 denota o operador nulo sobre o subespaço H_ϵ^\perp .

Demonstração: De fato, simplesmente note que

$$\|[Q_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\| \leq \|(T_\epsilon + c_1)^{-1} - (T + c_1)^{-1}\|.$$

■

O lema seguinte é mais um importante resultado técnico em que a estimativa encontrada será aplicada nas próximas seções.

Lema 12. *Seja $\eta \in d^\epsilon$, então existe $\mu > 0$ tal que, para ϵ suficientemente pequeno,*

$$\tilde{b}_\epsilon(\eta) \geq \frac{\mu}{\epsilon^2} \|\eta\|_2^2.$$

Demonstração: Denote por λ_1^S o segundo autovalor do laplaciano $-\Delta_R^S$ de Robin em S e considere $\eta \in d_\epsilon = H^1(\Omega) \cap H_\epsilon^\perp$. Da escolha de $c_1 > 0$ podemos escrever a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\epsilon(\eta) &\geq \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega |\nabla_y \eta|^2 ds dy + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_\alpha^s |\eta|^2 d\sigma(y) \right) ds + \|\alpha\|_\infty^2 \int_\Omega |\eta|^2 dy ds \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_S |\nabla_y \eta|^2 dy + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s |\eta|^2 d\sigma(y) \right] ds + \|\alpha\|_\infty^2 \int_\Omega |\eta|^2 dy ds. \end{aligned}$$

Produzimos, pelo Teorema 7, a próxima desigualdade envolvendo o segundo autovalor $\lambda_1^S = (\lambda_1^I - \epsilon^2 |\alpha(s)|^2)$ de $-\Delta_R^S$,

$$\int_S |\nabla_y \eta|^2 dy + \int_{\partial S} \epsilon \gamma_\alpha^s |\eta|^2 d\sigma(y) \geq \left(\lambda_1^I - \epsilon^2 \|\alpha\|_\infty^2 \right) \int_S |\eta|^2 dy.$$

Daí, obtemos

$$\tilde{b}_\epsilon(\eta) \geq \frac{(\lambda_1^I - \epsilon^2 \|\alpha\|_\infty^2)}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \int_S |\eta|^2 dy ds + \|\alpha\|_\infty^2 \int_\Omega |\eta|^2 dy ds.$$

Portanto,

$$\tilde{b}_\epsilon(\eta) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \int_\Omega |\eta|^2 dy ds,$$

o que termina a demonstração. ■

Descreveremos como a convergência uniforme de formas no sentido do Corolário 2 implica em um tipo de convergência em norma dos resolventes, este resultado é consequência da Proposição 6 e do Teorema 18 mais geral. Até o presente momento verificamos, para $\phi_\epsilon = wu_0^\epsilon$ e $\phi^\epsilon = \eta$,

$$\tilde{b}_\epsilon(\phi_\epsilon) \geq c_2 \|\phi_\epsilon\|^2, \quad \forall \phi_\epsilon \in d_\epsilon := H^1(\Omega) \cap H_\epsilon;$$
 (6.23)

$$\tilde{b}_\epsilon(\phi^\epsilon) \geq \frac{\lambda_1^I}{\epsilon^2} \|\phi^\epsilon\|^2, \quad \forall \phi^\epsilon \in d^\epsilon := H^1(\Omega) \cap H_\epsilon^\perp.$$
 (6.24)

Então, ao assumirmos que existe $D > 0$ tal que

$$|\tilde{b}_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)|^2 \leq D \epsilon^2 \tilde{b}_\epsilon(\phi_\epsilon) \tilde{b}_\epsilon(\phi^\epsilon), \quad \phi = \phi_\epsilon + \phi^\epsilon \in \text{dom } \tilde{b}_\epsilon,$$
 (6.25)

podemos concluir do Teorema 18 que existe $\tilde{D} > 0$ de modo que para ϵ pequeno,

$$\left\| \tilde{B}_\epsilon^{-1} - [Q_\epsilon^{-1} \oplus 0] \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \leq \tilde{D} \epsilon,$$
 (6.26)

em que 0 é o operador nulo sobre o subespaço H_ϵ^\perp . Recorde que \tilde{B}_ϵ denota o operador associado com \tilde{b}_ϵ e para a restrição $q_\epsilon := \tilde{b}_\epsilon|_{d_\epsilon}$, $d_\epsilon \sqsubseteq H_\epsilon$, denotamos por Q_ϵ o operador associado.

Então, admitindo verdadeira a estimativa (6.25) (veja a seção “Parte não-diagonal”), enunciamos o teorema. Este resultado é essencial para o resultado principal.

Teorema 26. *Sejam B_ϵ o operador auto-adjunto associado com $b_\epsilon \geq -c_2$, e $Q_\epsilon \geq c_2$ o correspondente operador auto-adjunto associado à restrição $q_\epsilon := \tilde{b}_\epsilon|_{d_\epsilon}$. Então, vale a convergência em norma dos resolventes*

$$\|(B_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\|_{B(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

com T definido em (6.22) e 0 denota o operador nulo sobre o subespaço H_ϵ^\perp .

Demonstração: Como quase todo o trabalho já foi realizado, apenas note a desigualdade

$$\begin{aligned} \|(B_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\| &\leq \|(B_\epsilon + c_1)^{-1} - \tilde{B}_\epsilon^{-1}\| + \|\tilde{B}_\epsilon^{-1} - [Q_\epsilon^{-1} \oplus 0]\| \\ &\quad + \|[Q_\epsilon^{-1} \oplus 0] - [\pi_\epsilon^{-1}(T + c_1)^{-1}\pi_\epsilon \oplus 0]\|, \end{aligned}$$

e aplique a Proposição 6, Corolário 2 e desigualdade (6.26) para completar o resultado. ■

6.4.2. Resultado Principal

Antes de apresentar nosso principal resultado, Teorema 27, introduzimos o subespaço E de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, das funções que não dependem da variável y , isto é, escolha $E \subset H$ subespaço fechado da seguinte maneira,

$$E = \{w(s)1; w \in L^2(\mathbb{R})\};$$

tal subespaço identifica-se com $L^2(\mathbb{R})$. Denotando por P_E, P_{E^\perp} as projeções ortogonais de $L^2(\Omega)$ sobre E, E^\perp , respectivamente. Para $v \in \mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, temos que $v = P_E(v) + P_{E^\perp}(v)$, além disso, notemos que

$$P_E(v)(s) = \int_S v(y, s) dy, \quad \text{q.t.p } s \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, da decomposição $\mathcal{H} = \mathbb{H}_\epsilon \oplus \mathbb{H}_\epsilon^\perp$, $v = wu_0^\epsilon + \eta$, $\eta \in \mathbb{H}_\epsilon^\perp$, temos

$$w(s) = \int_S v u_0^\epsilon(y, s) dy, \quad \text{q.t.p. } s \in \mathbb{R}.$$

Lema 13. *Seja $\mathcal{J} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ um operador limitado arbitrário. Então,*

$$\| [\pi_\epsilon^{-1} \mathcal{J} \pi_\epsilon \oplus 0] - [\pi_0^{-1} \mathcal{J} \pi_0 \oplus 0^\perp] \|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 é o operador nulo sobre $\mathbb{H}_\epsilon^\perp$, 0^\perp é o operador nulo sobre E^\perp e o operador π_0 tem a ação:

$$\pi_0 : E \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : \{w(s)1 \mapsto w(s)\}.$$

Demonstração: Dada $v \in H^1(\Omega)$ então $v = P_E(v) + P_{E^\perp}(v)$ e $v = wu_0^\epsilon + \eta$, com $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Então,

$$\| [\pi_\epsilon^{-1} \mathcal{J} \pi_\epsilon \oplus 0](v) - [\pi_0^{-1} \mathcal{J} \pi_0 \oplus 0^\perp](v) \|_{L^2(\Omega)} = \| u_0^\epsilon [\mathcal{J}w] - [\mathcal{J}P_E(v)]1 \|_{L^2(\Omega)}.$$

Por uma desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \| u_0^\epsilon [\mathcal{J}w] - [\mathcal{J}P_E(v)]1 \|_{L^2(\Omega)} &\leq \| u_0^\epsilon [\mathcal{J}w] - [\mathcal{J}w]1 \|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \| [\mathcal{J}w]1 - [\mathcal{J}P_E(v)]1 \|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

A primeira parcela tende a zero quando $\epsilon \downarrow 0$, pois dado $\delta > 0$, por convergência uniforme, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(\delta) > 0$ tal que $\|u_0^\epsilon - 1\|_\infty^2 < \delta^2 / \|\mathcal{J}\|^2$, para $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Daí,

$$\| u_0^\epsilon [\mathcal{J}w] - [\mathcal{J}w]1 \|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |u_0^\epsilon - 1|^2 |\mathcal{J}w|^2 dy ds \leq \frac{\delta^2}{\|\mathcal{J}\|^2} \|\mathcal{J}\|^2 \int_{\mathbb{R}} |w|^2 dy \leq \delta^2,$$

note que, como $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ então $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$. Por outro lado, a parcela restante pode ser estimada da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \| [\mathcal{J}P_E(v)]1 - [\mathcal{J}w]1 \|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |\mathcal{J}(w - P_E(v))|^2 dy ds \right)^{1/2} \\ &\leq \|\mathcal{J}\| \left(\int_{\mathbb{R}} |w - P_E(v)|^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

mas para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |w(s) - P_E(v)(s)|^2 ds \right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_S v(u_0^\epsilon - 1) dy \right|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \int_S \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2 |u_0^\epsilon - 1|^2 dy \right)^{1/2} ds \\ &\leq \delta / \|\mathcal{J}\| \int_S 1 \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2 dy \right)^{1/2} ds \\ &\text{(Hölder)} \leq \delta / \|\mathcal{J}\|. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que $\|[\pi_\epsilon^{-1} \mathcal{J} \pi_\epsilon \oplus 0](v) - [\pi_0^{-1} \mathcal{J} \pi_0 \oplus 0^\perp](v)\|_{L^2(\Omega)} < 2\delta$, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, ou seja,

$$\|[\pi_\epsilon^{-1} \mathcal{J} \pi_\epsilon \oplus 0] - [\pi_0^{-1} \mathcal{J} \pi_0 \oplus 0^\perp]\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

■

Teorema 27. *Seja B_ϵ o operador auto-adjunto associado com b_ϵ . Então, para alguma constante $c_1 > 0$, vale a convergência uniforme dos resolventes*

$$\|(B_\epsilon + c_1)^{-1} - [\pi_0^{-1}(T + c_1)^{-1} \pi_0 \oplus 0^\perp]\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

com T definido em (6.22) e 0^\perp denota o operador nulo sobre E^\perp .

Demonstração: Seja $\mathcal{J} = (T + c_1)^{-1}$ no Lema 13, por uma desigualdade triangular e Teorema 26 segue a demonstração. ■

6.5 Apêndice

6.5.1. Parte não diagonal

Dada $v \in \text{dom } \tilde{b}_\epsilon = H^1(\Omega)$, escreva $v = wu_0^\epsilon + \eta$, com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $\eta \in H^1(\Omega) \cap H_\epsilon^\perp$. Então, por lineariedade em cada entrada, vale

$$\tilde{b}_\epsilon(v) = \tilde{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon) + \tilde{b}_\epsilon(\eta) + 2\text{Re}[\tilde{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta)].$$

Verificaremos que cada parcela acima tem o seguinte comportamento, com $\phi_\epsilon = wu_0^\epsilon$ e $\phi^\epsilon = \eta$,

$$\tilde{b}_\epsilon(\phi_\epsilon) \geq c(\epsilon)\|\phi_\epsilon\|_2^2, \quad \forall \phi_\epsilon \in d_\epsilon, \quad c(\epsilon) \geq c_0 > 0; \quad (6.27)$$

$$\tilde{b}_\epsilon(\phi^\epsilon) \geq p(\epsilon)\|\phi^\epsilon\|_2^2, \quad \forall \phi^\epsilon \in d^\epsilon; \quad (6.28)$$

$$|\tilde{b}_\epsilon(\phi_\epsilon, \phi^\epsilon)|^2 \leq q(\epsilon)^2 \tilde{b}_\epsilon(\phi_\epsilon) \tilde{b}_\epsilon(\phi^\epsilon), \quad \phi \in \text{dom } \tilde{b}_\epsilon; \quad (6.29)$$

$$q(\epsilon) \rightarrow 0, p(\epsilon) \rightarrow +\infty, c(\epsilon) = O(p(\epsilon)) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

As estimativas (6.27)-(6.28) seguem da definição de \tilde{b}_ϵ e Lema 6, respectivamente. Já a estimativa da parte não-diagonal, isto é, o item (6.29), será mais trabalhosa e sua verificação detalhada é o conteúdo do que segue.

Estimativa para a parte não diagonal

Considere a forma sesquilinear \tilde{b}_ϵ , explicitamente

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta) &= \int_{\Omega} \{(\bar{w}u_0^\epsilon)' + \tau\bar{w}(\nabla_y u_0^\epsilon \cdot Ry) + \bar{w}u_0^\epsilon \psi_\epsilon\} \\ &\quad \times \{\eta' + \tau(\nabla_y \eta \cdot Ry) + \eta \psi_\epsilon\} dy ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \bar{w} \nabla_y(u_0^\epsilon) \nabla_y \eta dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma \bar{w} u_0^\epsilon \eta d\sigma(y) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{k}{2\beta_\epsilon} [(\bar{w}u_0^\epsilon) \partial_1 \eta + \partial_1(\bar{w}u_0^\epsilon) \eta] dy ds; \end{aligned}$$

acima usamos a identidade

$$-\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \text{Re} \left(\nabla_y v \cdot \frac{\bar{v}}{\beta_\epsilon} \nabla_y \beta_\epsilon \right) dy ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{k}{\beta_\epsilon} \text{Re}(\bar{v} \partial_1 v) dy ds \quad (6.30)$$

e a notação

$$\psi_\epsilon := \frac{1}{2\beta_\epsilon} (\beta_\epsilon' + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry)).$$

Denote por I_ϵ e J_ϵ as expressões, respectivamente, (recorde que $wu_0^\epsilon \perp \eta$)

$$\begin{aligned} I_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta) &= \int_{\Omega} \{(\bar{w}u_0^\epsilon)' + \tau\bar{w}(\nabla_y u_0^\epsilon \cdot Ry) + \bar{w}u_0^\epsilon \psi_\epsilon\} \\ &\quad \times \{\eta' + \tau(\nabla_y \eta \cdot Ry) + \eta \psi_\epsilon\} dy ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta) &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega \bar{w} \nabla_y(u_0^\epsilon) \nabla_y \eta \, ds dy + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma \bar{w} u_0^\epsilon \eta \, d\sigma(y) \right) ds \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{2\beta_\epsilon} [(\bar{w} u_0^\epsilon) \partial_1 \eta + \partial_1(\bar{w} u_0^\epsilon) \eta] \, dy ds.
\end{aligned}$$

Nas estimativas a seguir usamos as notações:

$$J_1^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega \bar{w} \nabla_y(u_0^\epsilon) \nabla_y \eta \, ds dy,$$

$$J_2^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma \bar{w} u_0^\epsilon \eta \, d\sigma(y) \right) ds,$$

$$J_3^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{2\beta_\epsilon} \partial_1(\bar{w} u_0^\epsilon) \eta \, dy ds,$$

$$J_4^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{2\beta_\epsilon} (\bar{w} u_0^\epsilon) \partial_1 \eta \, dy ds.$$

Agora, estimamos o valor absoluto de I_ϵ e J_ϵ em função das respectivas normas em $L^2(\Omega)$ das funções wu_0^ϵ e η .

- **J_ϵ -Estimativa:** Primeiramente, observamos que

$$J_1^\epsilon + J_2^\epsilon = -\frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \frac{k}{2} (\bar{w} u_0^\epsilon) \partial_1 \eta \, dy ds.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
J_2^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma \bar{w} u_0^\epsilon \eta \, d\sigma(y) \right) ds \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \bar{w} \alpha \left[\int_0^1 u_0^\epsilon \eta(y_1, 1, s) - u_0^\epsilon \eta(y_1, 0, s) \, dy_1 \right] ds \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \bar{w} \alpha_k \left[\int_0^1 u_0^\epsilon \eta(1, y_2, s) - u_0^\epsilon \eta(0, y_2, s) \, dy_2 \right] ds \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \bar{w} \alpha \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_2} (u_0^\epsilon \eta)(y, s) \, dy_2 \right) dy_1 \right] ds \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \bar{w} \alpha_k \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_1} (u_0^\epsilon \eta)(y, s) \, dy_1 \right) dy_2 \right] ds.
\end{aligned}$$

Ao realizamos as derivadas parciais entre parênteses,

$$\begin{aligned} J_2^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \bar{w} \alpha u_0^\epsilon \partial_2 \eta \, dy \, ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \bar{w} \alpha (\partial_2 u_0^\epsilon) \eta \, dy \, ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \bar{w} \alpha_k u_0^\epsilon \partial_1 \eta \, dy \, ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \bar{w} \alpha_k (\partial_1 u_0^\epsilon) \eta \, dy \, ds. \end{aligned}$$

Desde que $\eta \in H_\epsilon^\perp$, $\nabla_y(u_0^\epsilon) = -\epsilon \alpha u_0^\epsilon(1, 1)$, e os elementos $\alpha w, \alpha_k w$ pertencem ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, temos:

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \bar{w} \alpha (\partial_2 u_0^\epsilon) \eta \, dy \, ds = 0 = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \bar{w} \alpha_k (\partial_1 u_0^\epsilon) \eta \, dy \, ds.$$

Recorde que $\alpha_k = (\alpha - k/2)$ então podemos escrever

$$\begin{aligned} J_2^\epsilon &= -\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} w \nabla_y(u_0^\epsilon) \nabla_y \eta \, dy \, ds - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{k}{2} (w u_0^\epsilon) \partial_1 \eta \, dy \, ds \\ &= -J_1^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{k}{2} (w u_0^\epsilon) \partial_1 \eta \, dy \, ds. \end{aligned}$$

Para a estimativa de J_3^ϵ , note que $\left\| \frac{\alpha k}{2\beta_\epsilon} \right\|_\infty < C$ para ϵ suficientemente pequeno. Por desigualdade de Hölder,

$$|J_3^\epsilon| \leq C \|w\|_2 \|\eta\|_2.$$

Desde que $k \in L^\infty(\mathbb{R})$, $y \in S$ e S é um domínio limitado, escolha $D > 0$ tal que

$$\|\beta_\epsilon^{-1} - 1\|_\infty \leq \epsilon D.$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} |J_1^\epsilon + J_2^\epsilon + J_3^\epsilon + J_4^\epsilon| &\leq C \|w\|_2 \|\eta\|_2 + \left| \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} w k u_0^\epsilon \partial_1 \eta (\beta_\epsilon^{-1} - 1) \, dy \, ds \right| \\ &\leq C \|w\|_2 \|\eta\|_2 + \|k\|_\infty D \|w\|_2 \|\partial_1 \eta\|_2 \\ &\leq \tilde{C} \|w\|_2 (\|\eta\|_2 + \|\nabla_y \eta\|_2). \end{aligned}$$

Portanto, em vista do Lema 11, vale:

$$|J_\epsilon(w u_0^\epsilon, \eta)| \leq \epsilon \tilde{D} \tilde{b}_\epsilon [\bar{w} u_0^\epsilon]^{1/2} \tilde{b}_\epsilon [\eta]^{1/2},$$

com $\tilde{D} > 0$ independente de $\epsilon > 0$.

• **I_ϵ -Estimativa:** Por hipótese, $\tau \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e $k \in C^2(\mathbb{R}) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ então $\psi_\epsilon \in C^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, com $\|\psi_\epsilon\|_{1,\infty} < C$, para ϵ suficientemente pequeno.

Desde que $wu_0^\epsilon \perp \eta$, temos

$$\int_S u_0^\epsilon \eta' dy = - \int_S (u_0^\epsilon)' \eta dy, \quad \text{q.t.p } s \in \mathbb{R};$$

também note que $\nabla_y(u_0^\epsilon) = -\epsilon\alpha(u_0^\epsilon, u_0^\epsilon)$, $\|(u_0^\epsilon)'\|_\infty \leq C\|u_0^\epsilon\|_\infty$. Temos que $(\bar{w}u_0^\epsilon)' = \bar{w}'u_0^\epsilon + \bar{w}(u_0^\epsilon)'$, e mantendo em mente os dados acima vamos estimar apenas três tipos de integrais em I_ϵ , dadas abaixo, pois as demais seguem de maneira mais simples. Recorde que também temos a estimativa $\tilde{b}_\epsilon(w\phi_0^\epsilon) \geq \|w'\|_2^2$.

• **I_1 -Estimativa:** Usando integração por partes, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{w}(u_0^\epsilon)' \eta' dy ds &= 2 \int_\Omega c'_\epsilon/c_\epsilon \bar{w}u_0^\epsilon \eta' dy ds + \int_\Omega \epsilon \bar{w} \alpha'' u_0^\epsilon \eta ((1, -1) \cdot Ry) dy ds \\ &+ \int_\Omega \epsilon \bar{w}' \alpha' u_0^\epsilon \eta ((1, -1) \cdot Ry) dy ds + \int_\Omega \epsilon \bar{w} \alpha' (u_0^\epsilon)' \eta ((1, -1) \cdot Ry) dy ds, \end{aligned}$$

acima fizemos uso da identidade $(u_0^\epsilon)' = 2c'_\epsilon/c_\epsilon u_0^\epsilon - (\alpha'\epsilon)u_0^\epsilon((1, -1) \cdot Ry)$. Desde que $2\|c'_\epsilon/c_\epsilon\|_\infty < 1$, pois $c'_\epsilon/c_\epsilon \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$, e as quantias $\alpha, \alpha', \alpha''$ são uniformemente limitadas, obtemos

$$\left| \int_\Omega \bar{w}(u_0^\epsilon)' \eta' dy ds \right| \leq \epsilon D \tilde{a}_\epsilon [wu_0^\epsilon]^{1/2} \tilde{a}_\epsilon [\eta]^{1/2},$$

com $D > 0$ independente de ϵ .

• **I_2 -Estimativa:** Seja $g(y) = ((1, 1) \cdot Ry)$, $y \in S$; então $|g(y)| < 2$. Após integração por partes

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{w} \tau (\nabla_y u_0^\epsilon \cdot Ry) \eta' dy ds &= - \int_\Omega \bar{w} \tau \epsilon u_0^\epsilon \alpha g(y) \eta' dy ds \\ &= \int_\Omega \bar{w}' \tau \epsilon u_0^\epsilon \alpha g(y) \eta dy ds + \int_\Omega \bar{w} \tau' \epsilon u_0^\epsilon \alpha g(y) \eta dy ds \\ &+ \int_\Omega \bar{w} \tau \epsilon (u_0^\epsilon)' \alpha g(y) \eta dy ds + \int_\Omega \bar{w} \tau \epsilon u_0^\epsilon \alpha' g(y) \eta dy ds \end{aligned}$$

então

$$\left| \int_\Omega \bar{w} \tau (\nabla_y u_0^\epsilon \cdot Ry) \eta' dy ds \right| \leq (D\epsilon) \tilde{a}_\epsilon [wu_0^\epsilon]^{1/2} \tilde{a}_\epsilon [\eta]^{1/2}.$$

• **I_3 -Estimativa:** Após integração por partes,

$$\int_{\Omega} (\bar{w}u_0^\epsilon \psi_\epsilon) \eta' \, dy ds = - \int_{\Omega} [\bar{w}'u_0^\epsilon \psi_\epsilon + \bar{w}(u_0^\epsilon)' \psi_\epsilon + \bar{w}u_0^\epsilon (\psi_\epsilon)'] \eta \, dy ds,$$

e assim

$$\left| \int_{\Omega} \bar{w}u_0^\epsilon \psi_\epsilon \eta' \, dy ds \right| \leq (D\epsilon) \tilde{a}_\epsilon [wu_0^\epsilon]^{1/2} \tilde{a}_\epsilon [\eta]^{1/2}.$$

Portanto, podemos escrever

$$|I_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta)| \leq (\tilde{D}\epsilon) \tilde{b}_\epsilon [wu_0^\epsilon]^{1/2} \tilde{b}_\epsilon [\eta]^{1/2},$$

para ϵ pequeno o suficiente. Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta)|^2 &= |I_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta) + J_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta)|^2 \\ &\leq 4|I_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta)|^2 + 4|J_\epsilon(wu_0^\epsilon, \eta)|^2 \leq (\mathcal{M}'\epsilon)^2 \tilde{b}_\epsilon(wu_0^\epsilon)^{1/2} \tilde{b}_\epsilon(\eta)^{1/2}, \end{aligned}$$

com $\mathcal{M}' > 0$ independente de ϵ , o que é (6.29).

6.5.2. Potencial efetivo

Dado $v = wu_0^\epsilon$, com $w \in H^1(\mathbb{R})$, vamos explicitar cada integral em \widehat{b}_ϵ . Para cada integral, via Fubini, vamos destacar a integral sobre \mathbb{R} da função $|w|^2$, e a integral sobre a região S será vista como uma função de s , a qual fará parte da função potencial V_{eff}^ϵ . Recordemos a expressão de \widehat{b}_ϵ e façamos a substituição de v por wu_0^ϵ :

$$\begin{aligned} \widehat{b}_\epsilon(v) &= \int_{\Omega} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_\epsilon} \left(\beta_\epsilon' + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry) \right) \right|^2 \, ds dy \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 \, dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma |v|^2 \, d\sigma(y) \right) \, ds \\ &\quad + \int_{\Omega} |v|^2 \frac{k^2}{4} \, dy ds - \text{Re} \left[\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \frac{v}{\beta_\epsilon} (\nabla_y \bar{v} \cdot \nabla_y \beta_\epsilon) \, dy ds \right]. \end{aligned}$$

Deixemos a primeira integral para o fim, e na ordem que ocorrem as integrais temos as seguintes expressões:

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 \, ds dy = \int_{\mathbb{R}} 2\alpha^2 |w|^2 \, ds \tag{6.31}$$

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma |v|^2 d\sigma(y) \right) ds = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 (\alpha k - 4\alpha^2) ds \quad (6.32)$$

$$\int_{\Omega} |v|^2 \frac{k^2}{4} ds dy = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \frac{|k|^2}{4} ds \quad (6.33)$$

$$-\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \frac{v}{\beta_{\epsilon}} (\nabla_y \bar{v} \cdot \nabla_y \beta_{\epsilon}) dy ds = - \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \alpha k \left[\int_S \frac{|u_0^{\epsilon}|^2}{\beta_{\epsilon}} dy \right] ds \quad (6.34)$$

Agora substituímos v por $w\phi_0^{\epsilon}$ em $I_{\epsilon}(v)$,

$$\begin{aligned} I_{\epsilon}(v) &= \int_{\Omega} |v'|^2 ds dy + \int_{\Omega} \tau^2 |\nabla_y v \cdot Ry|^2 ds dy + 2\text{Re} \int_{\Omega} v' \tau (\nabla_y \bar{v} \cdot Ry) ds dy + \\ &+ \int_{\Omega} |v|^2 \left[\frac{1}{2\beta_{\epsilon}} (\beta'_{\epsilon} + \tau (\nabla_y \beta_{\epsilon} \cdot Ry)) \right]^2 ds dy - 2\text{Re} \int_{\Omega} v' \bar{v} \left[\frac{1}{2\beta_{\epsilon}} (\beta'_{\epsilon} + \tau (\nabla_y \beta_{\epsilon} \cdot Ry)) \right] ds dy \\ &- 2\text{Re} \int_{\Omega} \tau (\nabla_y v \cdot Ry) \left[\frac{\bar{v}}{2\beta_{\epsilon}} (\beta'_{\epsilon} + \tau (\nabla_y \beta_{\epsilon} \cdot Ry)) \right] ds dy, \end{aligned}$$

e obtemos

$$\int_{\Omega} |v'|^2 ds dy = \int_{\mathbb{R}} \left[|w'|^2 + |w|^2 \left(\int_S [(u_0^{\epsilon})']^2 dy \right) \right] ds, \quad (6.35)$$

$$\int_{\Omega} \tau^2 |\nabla_y v \cdot Ry|^2 ds dy = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \left(\int_S \tau^2 |\nabla_y u_0^{\epsilon} \cdot Ry|^2 dy \right) ds, \quad (6.36)$$

$$\int_{\Omega} 2v' \tau (\nabla_y \bar{v} \cdot Ry) ds dy = 2 \int_{\Omega} (wu_0^{\epsilon})' \tau \bar{w} (\nabla_y u_0^{\epsilon} \cdot Ry) ds dy = 0, \quad (6.37)$$

$$\int_{\Omega} |v|^2 \left[\frac{1}{2\beta_{\epsilon}} (\beta'_{\epsilon} + \tau (\nabla_y \beta_{\epsilon} \cdot Ry)) \right]^2 ds dy = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \left(\int_S |u_0^{\epsilon}|^2 |\psi_{\epsilon}|^2 dy \right) ds, \quad (6.38)$$

$$-2\text{Re} \int_{\Omega} v' \bar{v} \left[\frac{1}{2\beta_{\epsilon}} (\beta'_{\epsilon} + \tau (\nabla_y \beta_{\epsilon} \cdot Ry)) \right] ds dy = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \left(\int_S |u_0^{\epsilon}|^2 \psi'_{\epsilon} dy \right) ds, \quad (6.39)$$

$$2\operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{v} \tau(\nabla_y v \cdot Ry) \psi_{\epsilon} ds dy = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \left(\int_S \tau(\nabla_y (u_0^{\epsilon})^2 \cdot Ry) \psi_{\epsilon} dy \right) ds. \quad (6.40)$$

Note que as funções que multiplicam $|w|^2$ em (6.35)-(6.40) convergem uniformemente para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, a convergência uniforme de $V_{\text{eff}}^{\epsilon}$ vem das expressões em (6.31)-(6.34) já que $\alpha k \frac{(u_0^{\epsilon})^2}{\beta_{\epsilon}} \rightarrow \alpha k$ uniformemente, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Acima temos usado que

$$2\operatorname{Re} \int_{\Omega} |w|^2 u_0^{\epsilon} \tau(u_0^{\epsilon})' (\nabla_y u_0^{\epsilon} \cdot Ry) ds dy ds = 0,$$

e

$$2\operatorname{Re} \int_{\Omega} (w' \bar{w}) u_0^{\epsilon} (u_0^{\epsilon})' ds dy ds = 2 \int_{\Omega} \bar{w} w' u_0^{\epsilon} \tau(\nabla_y u_0^{\epsilon} \cdot Ry) ds dy ds = 0.$$

6.5.3. Demonstração do Lema 9

Vamos mostrar a existência de constantes positivas c_1, c_2 , independentes de ϵ , tais que $b_{\epsilon}(\phi) + c_1 \|\phi\|_2^2 \geq c_2 \|\phi\|_2^2$, daí obteremos que o operador autoadjunto $B_{\epsilon} + c_1$ é estritamente positivo. Usaremos as desigualdades $1/2 < \beta_{\epsilon} < 3/4$ para ϵ suficientemente pequeno.

- Após alguns cálculos, obtemos

$$\epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau^2}{2} \left(\int_{\partial S} \frac{\gamma}{\beta_{\epsilon}} |\operatorname{tr}(v)|^2 (\dot{y} \cdot y)^2 d\sigma(y) \right) ds = I_1^{\epsilon}(v) + I_2^{\epsilon}(v),$$

em que

$$I_1^{\epsilon}(v) = \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{\tau^2}{\beta_{\epsilon}} (\nabla_y |v|^2 \cdot (\alpha_k y_2^2, \alpha y_1^2)) dy ds, \quad I_2^{\epsilon}(v) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} \frac{k \tau^2 \alpha_k}{\beta_{\epsilon}^2} |v|^2 dy ds. \quad (6.41)$$

Agora estimamos cada um dos termos em (6.41). Afirmamos que existe $C_3 > 0$ de modo que

$$\epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau^2}{2} \left(\int_{\partial S} \frac{\gamma}{\beta_{\epsilon}} |\operatorname{tr}(v)|^2 (\dot{y} \cdot y)^2 d\sigma(y) \right) ds \geq -C_3 \left[\int_{\Omega} |v|^2 + |\nabla_y v|^2 dy ds \right]. \quad (6.42)$$

De fato,

$$\begin{aligned} |I_1^\epsilon(v)| &= \epsilon \left| \int_{\Omega} \frac{\tau^2}{2\beta_\epsilon} (\nabla_y |v|^2 \cdot (\alpha_k y_2^2, \alpha y_1^2)) \, dy ds \right| \\ &\leq \epsilon C_1 \left(\int_{\Omega} |v|^2 + |\nabla_y v|^2 \, dy ds \right) \\ &\leq C_1 \left(\int_{\Omega} |v|^2 + |\nabla_y v|^2 \, dy ds \right), \end{aligned}$$

com $C_1 = 1 + \|\tau^2\|_\infty (\|\alpha\|_\infty + \|\alpha_k\|_\infty)$. Por outro lado, para $0 < \epsilon < \epsilon_1$, com $\epsilon_1 < \frac{1}{\sqrt{2C_1}}$, temos

$$|I_1^\epsilon(v)| \leq \epsilon \left(C_1 \int_{\Omega} |v|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} |\nabla_y v|^2 \, dy ds \right). \quad (6.43)$$

A desigualdade (6.43) será usada na demonstração da Proposição 6. Para o termo I_2^ϵ temos

$$|I_2^\epsilon(v)| = \epsilon^2 \left| \int_{\Omega} \frac{\tau^2 \alpha_k k |v|^2}{2\beta_\epsilon^2} \, dy ds \right| \leq 2\epsilon C_2 \int_{\Omega} |v|^2 \, dy ds \leq 2C_2 \int_{\Omega} |v|^2 \, dy ds, \quad (6.44)$$

com $C_2 = 1 + \|\alpha_k\|_\infty \|k\|_\infty \|\tau^2\|_\infty$. Logo, em (6.42) podemos considerar $C_3 = C_1 + 2C_2$.

- Usamos integração por partes para estabelecer a identidade

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\nabla_y \bar{v} \cdot \frac{v}{\beta_\epsilon} \nabla_y \beta_\epsilon \right) \, dy ds = \int_{\Omega} \frac{k^2}{2\beta_\epsilon^2} |v|^2 \, dy ds - \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \frac{k}{2\beta_\epsilon} |\operatorname{tr}(v)|^2 \nu_1 \, d\sigma. \quad (6.45)$$

Por definição de γ , obtém-se que

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \gamma |\operatorname{tr}(v)|^2 \, d\sigma(y, s) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_\alpha^s |\operatorname{tr}(v)|^2 \, d\sigma(y) \right) \, ds \quad (6.46)$$

$$- \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \frac{k}{2} |\operatorname{tr}(v)|^2 \nu_1 \, d\sigma(y, s). \quad (6.47)$$

Como

$$\int_{\partial\Omega} \frac{y_1 k^2}{2\beta_\epsilon} |\operatorname{tr}(v)|^2 \nu_1 \, d\sigma(y, s) \geq 0,$$

então de (6.42) e (6.45)-(6.46), produzimos a desigualdade

$$\begin{aligned} b_\epsilon(v) &\geq \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 \, dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_\alpha^s |\operatorname{tr}(v)|^2 \, d\sigma(y) \right) \, ds \\ &\quad - (C_3 + 2\|k\|_\infty^2) \int_{\Omega} |v|^2 \, dy ds + \left(\frac{1}{2\epsilon^2} - C_3 \right) \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 \, dy ds. \end{aligned} \quad (6.48)$$

- Para a integral de fronteira em (6.48) temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_{\alpha}^s |\operatorname{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds = \\ &= \int_{\mathbb{R} \times (0,1)} \frac{1}{\epsilon^2} \left[\int_0^1 \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y_1} \right|^2 dy_1 + \epsilon \alpha(s) \left(|\operatorname{tr}(v)(1, y_2, s)|^2 - |\operatorname{tr}(v)(0, y_2, s)|^2 \right) \right] dy_2 ds \\ &+ \int_{\mathbb{R} \times (0,1)} \frac{1}{\epsilon^2} \left[\int_0^1 \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y_2} \right|^2 dy_2 + \epsilon \alpha(s) \left(|\operatorname{tr}(v)(y_1, 1, s)|^2 - |\operatorname{tr}(v)(y_1, 0, s)|^2 \right) \right] dy_1 ds. \end{aligned}$$

Com um argumento similar ao usado no Teorema 11, produzimos a limitação inferior

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_{\alpha}^s |\operatorname{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds \geq -4 \|\alpha\|_{\infty}^2 \int_{\Omega} |v|^2 dy ds.$$

- Finalmente, segue desta última desigualdade e (6.48) que

$$b_{\epsilon}(v) \geq -(C_3 + 4\|\alpha\|_{\infty}^2 + 2\|k\|_{\infty}^2) \int_{\Omega} |v|^2 dy ds + \left(\frac{1}{2\epsilon^2} - C_3 \right) \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds.$$

Escolha $c_1 = 2c_2$, com $c_2 = C_3 + 4\|\alpha\|_{\infty}^2 + 2\|k\|_{\infty}^2$. Para $0 < \epsilon < \epsilon_2 < 1/2\sqrt{C_3}$, vale que $(\frac{1}{2\epsilon^2} - C_3) > (2\epsilon)^{-2}$. Portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos para toda $v \in \operatorname{dom} b_{\epsilon}$

$$\begin{aligned} b_{\epsilon}(v) + c_1 \|v\|_2^2 &\geq c_2 \|v\|_2^2; \\ b_{\epsilon}(v) + c_1 \|v\|_2^2 &\geq (2\epsilon)^{-2} \|\nabla_y v\|_2^2. \end{aligned}$$

Isto termina a demonstração.

6.5.4. Demonstração do Lema 10

Denote por $I(v)$ a integral

$$I(v) = \int_{\Omega} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_{\epsilon}} \left(\beta'_{\epsilon} + \tau(\nabla_y \beta_{\epsilon} \cdot Ry) \right) \right|^2 dy ds,$$

e note que, como na demonstração do Lema 9,

$$b_{\epsilon}(v) - I(v) + c_2 \|v\|_2^2 \geq 0.$$

Então, expandindo o termo quadrático,

$$I(v) = \int_{\Omega} |v'|^2 \, dsdy + \int_{\Omega} \left| \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_\epsilon} (\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry)) \right|^2 \, dyds \\ + 2\text{Re} \int_{\Omega} v' \left[\tau(\nabla_y \bar{v} \cdot Ry) - \frac{\bar{v}}{2\beta_\epsilon} (\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry)) \right] \, dyds = I_1 + I_2 + I_3.$$

Para $v = wu_0^\epsilon$, obtemos $\int_{\Omega} |v'|^2 \, dsdy \geq \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 \, ds$. De fato,

$$\int_{\Omega} |v'|^2 \, dsdy = \int_{\Omega} |w' u_0^\epsilon|^2 + |w|^2 |(u_0^\epsilon)'|^2 + 2\text{Re}(w' \bar{w}) u_0^\epsilon (u_0^\epsilon)' \, dsdy \\ = \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 \, ds + \int_{\Omega} |w|^2 [(u_0^\epsilon)']^2 \, dsdy \\ \geq \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 \, ds.$$

Vamos estimar o terceiro termo de $I(v)$ acima. Para tanto, considere as seguintes etapas:

- **Etapa 1:** Para $v = wu_0^\epsilon$ temos

$$\int_{\Omega} 2v' \tau(\nabla_y \bar{v} \cdot Ry) \, dsdy = - \int_{\Omega} 2|w|^2 (u_0^\epsilon)' (\nabla_y u_0^\epsilon \cdot Ry) \, dsdy = 0. \quad (6.49)$$

- **Etapa 2:** Se $v = wu_0^\epsilon$ e $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente,

$$-2\text{Re} \int_S \int_{\mathbb{R}} v' \bar{v} \left[\frac{1}{2\beta_\epsilon} (\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry)) \right] \, dyds \geq -c_2 \int_{\mathbb{R}} |w|^2 \, dyds. \quad (6.50)$$

De fato, por integração por partes

$$-2\text{Re} \int_{\Omega} v' \bar{v} \left[\frac{1}{2\beta_\epsilon} (\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry)) \right] \, dyds = \int_{\Omega} |w|^2 |u_0^\epsilon|^2 \left[\frac{1}{2\beta_\epsilon} (\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry)) \right]' \, dyds,$$

e já que $k, \tau, k', \tau', k'', \tau''$ são limitadas, seja $\psi_\epsilon = \frac{1}{2\beta_\epsilon} (\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry))$, logo

$$\psi'_\epsilon, \psi_\epsilon \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

uniformemente, e temos concluída a etapa 2.

Portanto, para cada $v \in d_\epsilon$, obtemos por (6.49) e (6.50), que $I_\epsilon(v) + c_2 \|v\|_2^2 \geq \|w'\|_2^2$, e desde que $\tilde{b}_\epsilon(v) - I_\epsilon(v) + c_2 \|v\|_2^2 \geq 0$ segue $\tilde{b}_\epsilon(v) \geq \|w'\|_2^2$, para ϵ suficientemente pequeno. Isto completa a demonstração.

6.5.5. Demonstração do Lema 11

Considere a forma \widehat{b}_ϵ quadrática, com $\text{dom } \widehat{b}_\epsilon = H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \widehat{b}_\epsilon(v) &= \int_{\Omega} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_\epsilon} \left(\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry) \right) \right|^2 dy ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial\omega} \gamma |\text{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} |v|^2 \frac{k^2}{4} dy ds - \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \text{Re} \left(\nabla_y v \cdot \frac{\bar{v}}{\beta_\epsilon} \nabla_y \beta_\epsilon \right) dy ds. \end{aligned}$$

Procedendo como no Lema 9, obtemos:

$$\widehat{b}_\epsilon(v) \geq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_\alpha^s |\text{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds - 2\|k\|_\infty^2 \int_{\Omega} |v|^2 dy ds.$$

Notando que

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_\alpha |\text{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds \geq -2\|\alpha\|_\infty^2 \int_{\Omega} |v|^2 dy ds,$$

podemos escrever

$$\widehat{b}_\epsilon(v) \geq -2(\|\alpha\|_\infty^2 + \|k\|_\infty^2) \int_{\Omega} |v|^2 dy ds.$$

Por outro lado, também contamos com a desigualdade

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla_y v|^2 dy ds + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma_\alpha^s |\text{tr}(v)|^2 d\sigma(y) \right) ds \geq -4\|\alpha\|_\infty^2 \int_{\Omega} |v|^2 dy ds.$$

Logo, vale

$$\widehat{b}_\epsilon(v) \geq \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla_y v|^2 dy ds - 2(2\|\alpha\|_\infty^2 + \|k\|_\infty^2) \int_{\Omega} |v|^2 dy ds. \quad (6.51)$$

Portanto, basta escolher $c_1, c_2 > 0$ como na demonstração do Lema 9, para concluir nosso objetivo.

6.5.6. Demonstração da Proposição 6

Primeiramente, temos $\|\beta_\epsilon^{-2} - 1\|_\infty \leq D\epsilon$, com $D > 0$ dependendo apenas de $\|k\|_\infty$. Se

$$I_\epsilon(v) = \int_{\Omega} \left| v' + \tau(\nabla_y v \cdot Ry) - \frac{v}{2\beta_\epsilon} \left(\beta'_\epsilon + \tau(\nabla_y \beta_\epsilon \cdot Ry) \right) \right|^2 dy ds,$$

então

$$|b_\epsilon(v) - \widehat{b}_\epsilon(v)| \leq (D\epsilon) \left[I_\epsilon(v) + \int_\Omega \frac{k^2}{4} |v^2| \, dyds \right] \\ + \epsilon \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau^2}{2} \left(\int_{\partial S} \gamma \frac{|\text{tr}(v)|^2}{\beta_\epsilon} (\dot{y} \cdot y)^2 \, d\sigma(y) \right) \, ds \right|.$$

Pela demonstração do Lema 9 (veja também (6.43)-(6.44)), podemos inferir as estimativas (para ϵ pequeno o suficiente)

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau^2}{2} \left(\int_{\partial S} \gamma \frac{|\text{tr}(v)|^2}{\beta_\epsilon} (\dot{y} \cdot y)^2 \, d\sigma(y) \right) \, ds \right| \leq \left[2C_3 \int_\Omega |v|^2 \, dyds + \int_\Omega \frac{1}{2\epsilon^2} |\nabla_y v|^2 \, dyds \right] \quad (6.52)$$

e

$$(2C_3 - c_1) \int_\Omega |v|^2 \, dyds \leq \frac{1}{2\epsilon^2} \int_\Omega |\nabla_y v|^2 \, dyds + \epsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial S} \gamma |\text{tr}(v)|^2 \, d\sigma(y) \right) \, ds \\ - \epsilon^{-2} \int_\Omega \text{Re} \left(\nabla_y v \cdot \frac{\bar{v}}{\beta_\epsilon} \nabla_y \beta_\epsilon \right) \, dyds. \quad (6.53)$$

Portanto, as desigualdades (6.52)-(6.53) implicam

$$|b_\epsilon(v) - \widehat{b}_\epsilon(v)| \leq (D\epsilon) \left[I_\epsilon(v) + \int_\Omega \frac{k^2}{4} |v^2| \, dyds \right] + \epsilon \left\{ \tilde{b}_\epsilon(v) - \left[I_\epsilon(v) + \int_\Omega \frac{k^2}{4} |v^2| \, dyds \right] \right\} \\ \leq \epsilon \tilde{D} \tilde{b}_\epsilon(v),$$

com $\tilde{D} = (D+1)$. Aplicando o Teorema 1 in [dOIV₁], a demonstração da proposição segue.

Referências Bibliográficas

- [Ad] Adams R.A.: *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [Bat] Batchelor G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*, New York, Cambrid Univ. Press. 1967.
- [Br] Brézis, H.: *Funtional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [BdOIV] Bedoya, R., de Oliveira, C.R., Verri, A.A.: *Complex Γ -convergence and magnetic Dirichlet Laplacian in bounded thin tubes*. Journal of Spectral Theory, 2014.
- [BK] Borisov, D., Krejčířík, D.: *PT-symmetric waveguide*, Integral Equations and Operator Theory (62), 489-515.
- [BMT₁] Bouchitté, G., Mascarenhas, M.L., Trabucho, L.: *On the curvature and torsion effects in one-dimensional waveguides*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **13** (2007), 793–808.
- [BMT₂] Bouchitté, G., Mascarenhas, M.L., Trabucho, L.: *Thin waveguides with Robin boundary conditions*, Journal of Mathematical Physics, **53** (2012) American Institute of Physics.
- [Da] Davies, E.B.: *Spectral Theory and Differential Operators*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [dOl₁] de Oliveira, C.R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*, Birkhäuser, Basel (2009).

- [dOl₂] de Oliveira, C.R.: *Quantum singular operator limits of thin Dirichlet tubes via Γ -convergence*, Rep. Math. Phys. **67** (2011), 1–32.
- [dOIV₁] de Oliveira, C.R., Verri, A.A.: *On the spectrum and weakly effective operator for Dirichlet Laplacian in thin deformed tubes*, J. Math. Anal. Appl. **381** (2011), 454–468.
- [dOIV₂] de Oliveira, C.R., Verri, A.A.: *On norm resolvent and quadratic form convergences in asymptotic thin spatial waveguides*, Operator Theory: Advances and Applications, **224** (2012), 253–276.
- [dOIV₃] de Oliveira, C.R., Verri, A.A.: *Norm resolvent convergence of Dirichlet Laplacian in unbounded thin waveguides*, Bull. Braz. Math. Soc., to appear.
- [DE] Duclos, P., Exner, P.: *Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions*, Rev. Math. Phys. **7** (1995), 73–102.
- [E] Evans L.C.: *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [EG] Evans, L.C., Gariepy, R.F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press: Boca Raton, FL, 1992.
- [Fe] Federer H.: *Geometry Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [FK] Freitas, P., Krejčířík, D.: *Waveguides with combined Dirichlet and Robin boundary conditions*, Math. Phys. Anal. Geom. **9** (2006), 335–352.
- [FM] Morgan F.: *Geometry Measure Theory: A beginner's guide*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [FS₁] Friedlander, F., Solomyak, M.: *On the spectrum of the Laplacian in a narrow infinite strip*. Amer. Math. Soc. Transl. **225** (2008), 103–116.
- [FS₂] Friedlander, F., Solomyak, M.: *On the spectrum of the Laplacian in a narrow strip*. Israel J. Math. **170** (2009), 337–354.

- [Gi] Giovanni, L.: *A First Course in Sobolev Spaces*, American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [GJ] Goldstone, J., Jaffe, R.L.: *Bound states in twisting tubes*, Phys. Rev. B, **45** (1992), 14100–14107.
- [J₁] Jílek, M.: *Quantum waveguides with Robin boundary conditions*, Czech Technical University in Prague, Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering, Bachelor Thesis, 2006.
- [J₂] Jílek, M.: *Straight quantum waveguide with Robin boundary conditions*. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. SIGMA **3** (2007), 108 (12 páginas).
- [K] Krejčířík, D.: *Spectrum of the Laplacian in a narrow curved strip with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **15** (2009), 555–568.
- [Ka] Kato, T.: *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [KBZ] Krejčířík, D., Bíla, H. and Znojil, M.: *Closed formula the metric in the Hilbert space of a PT-symmetric model*. J. Phys. A **39** (2006), 10143–10153.
- [KK] Krejčířík, D., Kříž, J.: *On the spectrum of curved planar waveguides*. Publ. RIMS Kyoto Univ. **41** (2005), 757–791.
- [Pal] Pauling, L.: *The Diamagnetic Anisotropy of Aromatic Molecules*, J. Chem. Phys. **4** (1936), 673–677.
- [RS] Reed M., Simon B.: *Methods of modern mathematical physics*. IV. Analysis of operators, Academic Press, New York, 1978.
- [RSc] Ruedenberg, K., Scherr, C. W.: *Free-Electron Network Model for Conjugated Systems. I. Theory*, J. Chem. Phys. **21** (1953), 1565–1581.

- [Sch] Schatzman, M.: *On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann boundary conditions*, Appl. Anal. **61** (1996), 293–306. Erratum: Appl. Anal. **62** (1996), 405.
- [WS] Walker, S.W., Shapiro, B.: *Modeling the Fluid Dynamics of Electrowetting on Dielectric*, J. Microelectromech. Syst. **15** (2006), 986-1000.
- [WSN] Walker, S.W., Shapiro, B., Nochetto, R.H.: *Electrowetting with contact line pinning: Computational modeling and comparisons with experiments*, Phys. Fluids **21** (2009), 102103.