UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

G-variedades Riemannianas como hipersuperfícies de formas espaciais

Ion Moutinho Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior

São Carlos - SP
2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

G-variedades Riemannianas como hipersuperfícies de formas espaciais

Ion Moutinho Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
2006

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

G635gr	Gonçalves, Ion Moutinho. G-variedades riemannianas como hipersuperfícies de formas espaciais / Ion Moutinho Gonçalves. -- São Carlos : UFSCar, 2006. 73 p. Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006. 1. Geometria riemanniana. 2. Ações localmente polares. 3. Hipersuperfícies. 4. Cohomogeneidade k. I. Título. CDD: 516.3731 (20ª)

À Aneliza, minha esposa, e à Lana, minha filha.

Agradecimentos

Ao professor Ruy Tojeiro, meu orientador, professor, colega de estudo, corretor (até de Português), pela sua dedicação incansável e pelos seus ensinamentos de Matemática e de como ser um matemático.

Aos meus pais, em especial pela orientação de minha educação, e toda minha família.

À Universidade Federal de São Carlos, pelo ambiente e por suas instalações, principalmente a piscina.

Aos meus amigos e colegas (estudantes, professores e funcionários) do Departamento de Matemática, em especial ao Gustavo Hoepfner.

Aos guardiões da piscina, Eduardo (o Carioca) e Betão.

Resumo

Prova-se que uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ numa forma espacial de dimensão $n+1$ é equivariante com relação a um homomorfismo de grupos de Lie $\Phi\colon Iso^0(M^n) \to Iso(\mathbb{Q}_c^{n+1})$ da componente conexa da identidade $Iso^0(M^n)$ do grupo de isometrias $Iso(M^n)$ of $M^n.$ Para o caso em que $\mathbb{Q}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, obtém-se que Φ leva todo subgrupo fechado e conexo de $Iso(M^n)$ que age de modo localmente polar sobre M^n num subgrupo que age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostra-se também que as hipersuperfícies de rotação compactas do espaço Euclideano de dimensão $n \geq 3$ são caracterizadas por sua estrutura intrínseca de produto *warped*.

Desenvolve-se ainda um estudo das imersões isométricas $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ em uma forma espacial de uma variedade Riemanniana completa sobre a qual age de modo localmente polar e com órbitas principais umbílicas um subgrupo fechado e conexo de $Iso(M^n)$.

Abstract

It is proved that an isometric immersion $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ of a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 3$ into a space form of dimension $n+1$ is equivariant with respect to a Lie group homomorfism $\Phi\colon Iso^0(M^n) \to Iso(\mathbb{Q}_c^{n+1})$, where $Iso^0(M^n)$ denotes the identity component of the isometry group $Iso(M^n)$ of M^n. For the case $\mathbb{Q}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, it is shown that Φ takes every closed connected subgroup of $Iso(M^n)$ acting locally polarly on M^n into a group that acts polarly on $\mathbb{R}^{n+1}$. Moreover, compact Euclidean rotation hypersurfaces of dimension $n \geq 3$ are characterized by their underlying warped product structure.

Besides, isometric immersions $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ of a complete Riemannian manifold M^n under a locally polar action of a closed connected subgroup of $Iso(M^n)$ with umbilical principal orbits are studied.

Conteúdo

Introdução

Sejam M uma variedade Riemanniana sob a ação isométrica de um grupo de Lie G e $f\colon M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica de M em outra variedade Riemanniana $\overline{M}$. Se existe um homomorfismo de grupos de Lie $\tau\colon G \to \mathrm{Iso}(\overline{M})$ tal que $f(g(x)) = \tau(g)(f(x))$ para quaisquer $x \in M$ e $g \in G$, ou seja, se o grupo G se realiza como um subgrupo de isometrias de $\overline{M}$ que deixa $f(M)$ invariante, diz-se que f é *equivariante* com respeito a τ. Quando $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, diz-se que f é uma *linearização* da ação de G sobre M.

Um problema clássico é a existência de linearizações de ações isométricas de grupos de Lie sobre uma variedade Riemanniana. Um resultado importante neste sentido é um teorema de Moore que diz que para toda variedade Riemanniana homogênea compacta existe uma linearização de seu grupo de isometrias, ou seja, uma tal variedade sempre admite um mergulho isométrico e equivariante em um espaço Euclidiano ([Mo]). Por outro lado, um teorema de Kobayashi ([Ko]) afirma que uma imersão isométrica em codimensão um no espaço Euclidiano de uma variedade Riemanniana compacta e homogênea é sempre equivariante e, portanto, sua imagem é uma esfera.

A primeira contribuição desta tese é a seguinte generalização do Teorema de Kobayashi, a qual garante que toda imersão isométrica em codimensão um no espaço Euclidiano de uma variedade Riemanniana compacta M^n é uma linearização da ação da componente conexa da identidade do grupo de isometrias de M^n. O resultado é de fato mais geral, estendendo-se para qualquer forma espacial.

Teorema 1 (54) *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta (respectivamente completa) com $n \geq 3$ e $c \leq 0$ (respectivamente $n \geq 4$ e $c > 0$). Então existe um homomorfismo de grupos de Lie $\Phi\colon Iso^0(M) \to Iso^0(\mathbb{Q}_c^{n+1})$, onde $Iso^0(M)$ é a componente conexa da identidade do grupo de isometrias de M, tal que $f \circ g = \Phi(g) \circ f$, $\forall g \in Iso^0(M)$.*

Observação: As referências entre parênteses nos teoremas descritos nesta introdução dizem respeito aos mesmos enunciados que constam no texto, mas acompanhados da prova.

Este teorema não vale para imersões isométricas $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+p}$ com codimensão $p \geq 2$. Contra-exemplos podem ser facilmente construídos considerando composições $f = h \circ g$ de imersões isométricas $g\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ e $h\colon V \to \mathbb{Q}_c^{n+p}$, com $V \subset \mathbb{Q}_c^{n+1}$ sendo um aberto contendo $g(M^n)$.

A demonstração do Teorema 1 baseia-se em uma idéia já utilizada em [MPST] para o caso de hipersuperfícies Euclidianas sob a ação isométrica de um grupo com cohomogeneidade 1. A cohomogeneidade de uma ação de um grupo de Lie é a codimensão de uma órbita de dimensão máxima.

Uma classe importante de ações isométricas sobre variedades Riemannianas completas é a das ações *localmente polares*, para as quais existe uma subvariedade imersa completa que intercepta ortogonalmente todas as órbitas da ação. Tal subvariedade é chamada uma *seção*; se existe uma seção fechada e mergulhada, a ação é dita *polar*. Foi mostrado em [BCO] (Proposição 3.2.9) que, se um subgrupo fechado de $SO(N)$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^N$ e deixa invariante uma subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$, então a restrição da ação sobre M^n é localmente polar. O próximo resultado diz que toda ação isométrica localmente polar de um grupo de Lie compacto sobre uma hipersuperfície compacta de um espaço Euclidiano de dimensão $n \geq 3$ surge desta forma.

Teorema 2 (57) *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície compacta e $G \subset$ Iso(M) um subgrupo fechado conexo que age de modo localmente polar sobre M^n com cohomogeneidade k. Então, existe uma representação ortogonal $\Psi\colon G \to SO(n{+}1)$ tal que $f \circ g = \Psi(g) \circ f$, para todo $g \in G$, e $\Psi(G)$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ com cohomogeneidade $k+1$.*

O Teorema 1 garante que sempre existe uma tal representação $\Psi\colon G \to SO(n+1)$. O conteúdo do Teorema 2 é a afirmação de que $\Psi(G)$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ com cohomogeneidade $k+1$.

Uma consequência do Teorema 2 é uma obstrução para a existência de uma hipersuperfície compacta do espaço Euclidiano sobre a qual age um subgrupo fechado de isometrias de modo localmente polar.

Corolário 3 (60) *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ e G um subgrupo fechado e conexo de Iso(M^n) agindo de modo localmente polar sobre M^n. Se G possui uma órbita excepcional então M^n não pode ser isometricamente imersa num espaço Euclidiano como uma hipersuperfície.*

Os exemplos mais simples de hipersuperfícies $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que são invariantes por ações polares sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ de subgrupos fechados $G \subset SO(n+1)$ são fornecidos pelas hipersuperfícies de rotação (admitindo aqui hipersuperfícies com meridianos de dimensão maior do que ou igual a 1; para mais detalhes sobre as hipersuperfícies de rotação, veja a Seção 4.2). Neste caso, a ação induzida de G em M^n (é localmente polar e) tem órbitas principais umbílicas em M^n. Outra consequência do Teorema 2 é que isto caracteriza as hipersuperfícies de rotação.

Corolário 4 (59) *Sob as hipóteses do Teorema 2, se as G-órbitas principais são umbílicas em M^n então f é uma hipersuperfície de rotação e G é isomorfo a um dos subgrupos fechados de $SO(n-k+1)$ que agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^{n-k}$.*

Para uma lista de todos os subgrupos fechados de $SO(n)$ que agem transitivamente sobre a esfera, veja [EH], página 392.

A hipótese de que as órbitas principais sejam umbílicas em M^n é satisfeita, por exemplo, se o grupo de isotropia de G em algum ponto regular $x \in M^n$ age de modo irredutível em $T_xG(x)$, em particular se alguma órbita principal de G é uma variedade homogênea com representação isotrópica irredutível (ver Proposição 53).

Quanto à hipótese de que o grupo G seja conexo, esta não é de fato uma restrição para o Corolário 4, uma vez que, se G age de modo localmente polar, então o mesmo vale para G^0, a componente conexa da identidade. A única diferença é que, quando G não é conexo, não se tem necessariamente que f leva órbitas de G em paralelos da hipersuperfície de rotação.

O Corolário 4 generaliza um teorema devido a Podestà e Spiro, obtido em [PS] para o caso de uma hipersuperfície compacta sob a ação isométrica de um subgrupo fechado e conexo de isometrias com cohomogeneidade 1 e órbitas principais umbílicas.

Uma questão natural que aparece neste instante é analisar a situação em ambientes não planares, principalmente no caso hiperbólico, onde a classe das hipersuperfícies de rotação é bem mais rica. Embora não valha uma versão do Teorema 2 para ambientes não planares, foi possível obter a seguinte extensão do Corolário 4.

Teorema 5 (61) *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, com $n \geq 3$, se $c < 0$, e $n \geq 4$, se $c > 0$, uma hipersuperfície compacta. Suponha que exista um subgrupo fechado e conexo $G \subset Iso(M^n)$ agindo de modo localmente polar sobre M^n com cohomogeneidade k satisfazendo $1 \leq k \leq$*

$n-2$ e com órbitas principais umbílicas em M^n. Então f é uma hipersuperfície de rotação (do tipo elíptico se $c < 0$) e G é isomorfo a um dos subgrupos fechados de $SO(n-k+1)$ que agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^{n-k}$.

Voltando ao ambiente Euclidiano, o Corolário 4 permite abordar uma questão que, a princípio, não parece ter qualquer relação com ações isométricas.

Dada uma hipersuperfície de rotação $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, sabe-se que existe um aberto denso de M^n que é isométrico a um produto *warped* $L^k \times_\rho N^{n-k}$, sendo N^{n-k} um paralelo e L^k parte de um meridiano da hipersuperfície. Lembre-se que o produto *warped* $N_1 \times_\rho N_2$ das variedades Riemannianas $(N_1, \langle,\rangle_{N_1})$ e $(N_2, \langle,\rangle_{N_2})$, com função *warping* $\rho\colon N_1 \to \mathbb{R}_+$, é a variedade produto $N_1 \times N_2$ munida da métrica

$$\langle,\rangle = \pi_1^*\langle,\rangle_{N_1} + (\rho \circ \pi_1)^2 \pi_2^*\langle,\rangle_{N_2},$$

onde $\pi_i\colon N_1 \times N_2 \to N_i, 1 \leq i \leq 2$, denota as projeções canônicas.

O resultado a seguir diz que esta propriedade caracteriza as hipersuperfícies de rotação compactas de dimensão $n \geq 3$ do espaço Euclidiano.

Teorema 6 (62) *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, com $n \geq 3$, uma hipersuperfície compacta. Se existe uma isometria $\psi\colon L^k \times_\rho N^{n-k} \to U$ de um produto warped sobre um aberto denso $U \subset M^n$ (em particular, se M^n é isométrica a um produto warped $L^k \times_\rho N^{n-k}$), com N^{n-k} completa e L^k conexa, então f é uma hipersuperfície de rotação.*

O Teorema 6 pode ser visto como uma versão global para o caso de hipersuperfícies da classificação local em [DT] das imersões isométricas em codimensão menor do que ou igual a 2 de produtos *warped* $L^k \times_\rho N^{n-k}$, $n-k \geq 2$, em espaços euclidianos.

Ainda com relação ao Teorema 5, foi possível estendê-lo a uma subclasse das hipersuperfícies completas.

Teorema 7 (63) *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, com $n \geq 4$, uma hipersuperfície completa. Suponha que exista um subgrupo compacto e conexo $G \subset Iso(M^n)$ agindo de modo localmente polar sobre M^n com órbitas principais umbílicas em M^n e cohomogeneidade k satisfazendo $1 \leq k \leq n-3$ ($\leq n-2$ se $c > 0$). Se $c \leq 0$, suponha também que as componentes conexas do conjunto $\{x \in M_r^n : M^n$ tem curvatura seccional constante c em $x\}$ sejam limitadas. Então f é uma hipersuperfície de rotação (do tipo elíptico se $c < 0$) e G é isomorfo a um dos subgrupos fechados de $SO(n-k+1)$ que agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^{n-k}$.*

A hipótese adicional no caso $c \leq 0$ é de fato necessária, mesmo no caso em que $k = 1$ (ver [MS]).

Na mesma situação descrita no Teorema 7, foi possível ainda obter uma classificação no caso em que $G \subset \mathrm{Iso}(M^n)$ é um subgrupo fechado mas não compacto. Nessas condições, novos exemplos aparecem, cilindros no caso Euclidiano e, no caso hiperbólico, hipersuperfícies de rotação do tipo hiperbólico e parabólico, além de dois casos especiais de hipersuperfícies que estendem a noção de cone. Este assunto é tratado na Seção 5.2. O teorema obtido nessa seção, juntamente com o Teorema 7, estendem os resultados de [AC], [MS] e [Li] para o caso em que a cohomogeneidade é 1.

Capítulo 1

Preliminares

Os conceitos e resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em qualquer texto básico sobre o assunto. Algumas referências para a primeira seção podem ser [dC], [Sa] ou [Ol]. A principal referência para a teoria das subvariedades, na segunda seção, é [Da]. Mas [BCO] também pode ser uma referência interessante.

A primeira seção deste capítulo apenas fixa a notação para os elementos da geometria Riemanniana utilizados neste texto e para os objetos básicos da teoria das subvariedades Riemannianas. A segunda apresenta a teoria das subvariedades necessária para servir de base para os argumentos desenvolvidos neste trabalho.

1.1 Notações

Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional, sempre de classe C^∞. Admite-se que uma variedade é um espaço de Hausdorff com base enumerável. O conjunto das funções diferenciáveis de M em $\mathbb{R}$ é denotado por $C^\infty(M)$. Denota-se por T_pM o espaço tangente de M em $p \in M$ e por $\pi\colon TM = \bigcup_{x\in M} T_xM \to M$ o fibrado tangente de M. O conjunto das seções diferenciáveis de TM (também chamadas campos de vetores tangentes), $\{X\colon M \to TM : \pi\circ X = id\}$, é denotado por $\mathcal{X}(M)$. De modo mais geral, se E é um fibrado vetorial sobre M, então $\Gamma(E)$ representa o conjunto das seções diferenciáveis locais de E.

Seja $f\colon N^n \to M^m$ uma aplicação diferenciável entre variedades. A derivada de f é representada por f_*. Assim, para $X \in TN$ e $p = \pi(X) \in N$, a expressão

$$f_*X = f_*(p)(X)$$

representa a derivada de f no ponto p aplicada ao vetor X.

Suponha que f seja uma *imersão*, isto é, que

$$f_*(p)\colon T_pN \to T_{f(p)}M$$

seja injetora, qualquer que seja $p \in N$; em particular tem-se $m \geq n$. O número $p = m - n$ é chamado a *codimensão* de f. Diz-se que f é uma *hipersuperfície* se $p = 1$. É usual também referir-se a N, ou $f(N)$, como uma hipersuperfície de M.

Dada uma imersão $f\colon N^n \to M^{n+p}$, sabe-se que f é localmente um mergulho. Ou seja, para todo $x \in N$, existe um aberto $U \subset N$ contendo x tal que $f|_U$ é injetiva e aberta, donde $f(U)$ é uma subvariedade regular de M^{n+p} difeomorfa, por $f|_U$, a U. Deste modo, é comum identificar N com $f(N)$ e TN com $f_*(TN)$. Em particular, tem-se as identificações $x = f(x)$ e $X = f_*X$, para todo $x \in N^n$ e $X \in TN$. Contudo, algumas vezes é conveniente explicitar a imersão, sem fazer identificações, principalmente quando existem mais de uma imersão de uma mesma variedade.

Seja M^n uma variedade Riemanniana. O conjunto $\mathrm{Iso}(M^n)$ representa o grupo das isometrias de M. Se $f \in C^\infty(M)$, $\mathrm{grad} f = \nabla f$ representa o *gradiente* de f. De modo geral, ∇ denota a *conexão de Levi-Civita* (ou *conexão Riemanniana*) de M e R o seu *tensor curvatura Riemanniana*,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

A *curvatura seccional* é denotada por K.

Se M^n tem curvatura seccional constante c, escreve-se M^n_c. Na situação particular em que $c = 0$, M^n_c é chamada uma *variedade plana.* Uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante que seja completa e simplesmente conexa é denotada por $\mathbb{Q}^n_c$, são as conhecidas *formas espaciais.*

O tensor curvatura de uma variedade Riemanniana M^n_c com curvatura seccional constante c tem uma expressão simples dada por

$$R(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z,$$

onde $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$, quaisquer que sejam $X, Y, Z \in TM_c$.

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço $U \subset T_pM$, $(\ )_U$ denota o operador projeção ortogonal de T_pM sobre U.

Seja $f\colon M^n \to \bar{M}^{n+p}$ uma *imersão isométrica*, isto é, f é uma imersão, $(M, \langle,\rangle_M)$ e $(\bar{M}, \langle,\rangle_{\bar{M}})$ são variedades Riemannianas, e $\langle,\rangle_M = f^*\langle,\rangle_{\bar{M}}$. A igualdade entre as métricas significa que

$$\langle f_*X, f_*Y\rangle_{\bar{M}} = \langle X, Y\rangle_M,\ \forall X, Y \in TM.$$

Neste caso, em todo ponto x de M o espaço tangente da variedade ambiente $\bar{M}$ possui uma decomposição ortogonal de acordo com T_xM dada por

$$T_x\bar{M} = T_xM \oplus^{\perp} T_x^{\perp}M.$$

O subfibrado $T_f^{\perp}M = T^{\perp}M = \bigcup_{x\in M} T_x^{\perp}M$ de $T\bar{M}$ ao longo de M é chamado o *fibrado normal de f*.

Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de M e $\bar{M}$, respectivamente. A conexão $\overline{\nabla}$ induz de modo natural uma conexão no fibrado normal, a *conexão normal de* f, $\nabla^{\perp}$, definida por

$$\nabla_X^{\perp}\xi = (\overline{\nabla}_x\xi)_{T^{\perp}M},\ \forall X \in TM, \forall\xi \in \Gamma(T^{\perp}M),$$

a qual é compatível com a métrica do fibrado normal induzida pela métrica de $\bar{M}$. O *tensor curvatura normal* de f, $R^{\perp}$, é o tensor curvatura definido através da conexão normal. Quando $R^{\perp} = 0$ diz-se que f tem *fibrado normal plano.*

Quando $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, a componente tangente a M de $\overline{\nabla}_XY$ coincide com a conexão de M, com as identificações naturais. Já a componente normal dá origem à aplicação $\alpha = \alpha_f\colon TM \times TM \to T^{\perp}M$ definida por

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_XY - \nabla_XY,\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Tem-se que α é uma aplicação bilinear sobre o anel $C^{\infty}(M)$ e simétrica, chamada de *a segunda forma fundamental* da imersão, e, assim, o *operador forma* $A_\xi = A_\xi^f$ de f na direção $\xi \in T^{\perp}M$ dado por $\langle A_\xi., .\rangle = \langle\alpha(., .), \xi\rangle$ é linear sobre o anel $C^{\infty}(M)$ e simétrico. Os autovalores de A_ξ são chamados *as curvaturas principais com respeito a* ξ.

Devido à relevância das formas espaciais neste trabalho, é conveniente descrever e fixar também notações para seus modelos usuais.

O modelo padrão para uma forma espacial Q_c^n com $c = 0$, o *espaço Euclidiano*, é o $\mathbb{R}^n$ munido da estrutura diferenciável usual e da métrica Riemanniana usual obtida a partir do produto interno canônico definido em $T_0\mathbb{R}^n$, identificado com $\mathbb{R}^n$. Neste modelo, $\mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^n) = \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) = O(n) \bowtie \mathbb{R}^n$, onde $(A, a)(x) = A(x) + a$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $(A, a) \in O(n) \bowtie \mathbb{R}^n$, e $O(n)$ é o grupo dos operadores ortogonais de $\mathbb{R}^n$.

O modelo padrão para uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^n$ com $c > 0$, o *espaço esférico*, é dado pela subvariedade

$$\mathbb{S}_c^n = \mathbb{S}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x\rangle = r^2\},$$

onde $r = 1/\sqrt{c}$, com a métrica induzida pela aplicação inclusão. Quando $n = 1$, $\mathbb{Q}_c^1$ denota a variedade $\mathbb{S}_c^1$. Neste modelo, $\mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^n) = \mathrm{Iso}(\mathbb{S}_c^n) = O(n + 1)$.

O modelo padrão para uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^n$ com $c < 0$, o *espaço hiperbólico*, é dado pela subvariedade do espaço de Lorentz,

$$\mathbb{H}_c^n = \mathbb{H}^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle p, p\rangle = -r^2, p_{n+1} > 0\},$$

onde $\langle , \rangle$ é a métrica pseudo-Riemanniana definida por

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1} w_{n+1},$$

$\mathbb{R}^{n,1}$ denota o espaço de Lorentz, isto é, o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ munido desta métrica, e $c = -1/r^2$. A métrica em $\mathbb{H}_c$ é a induzida pela inclusão. Neste modelo, $\mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^n) = \mathrm{Iso}(\mathbb{H}_c) = O(n, 1)$, onde $O(n, 1)$ é o grupo das aplicações lineares de $\mathbb{R}^{n,1}$ que deixam a métrica de Lorentz e o espaço $\mathbb{H}_c$ invariantes.

1.2 Teoria básica de subvariedades

Seja $f \colon M^n \to \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$, R e $\overline{R}$ e K e $\overline{K}$ as conexões de Levi-Civita, os tensores curvatura e as curvaturas seccionais de M e $\bar{M}$, respectivamente.

As equações fundamentais de primeira ordem relacionadas à imersão f são

(fórmula de Gauss)

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \ \forall X, Y \in TM$$

e

(fórmula de Weingerten)

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi,\ \forall X \in TM, \forall\xi \in \Gamma(T^\perp M),$$

das quais decorrrem as seguintes equações fundamentais de segunda ordem

(Equação de Gauss)

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle,$$

(Equação de Codazzi)

$$(\overline{R}(X,Y)Z)_{T^\perp M} = (\nabla^\perp_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y\alpha)(X,Z)$$

e

(Equação de Ricci)

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)_{T^\perp M} = R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X,Y) - \alpha(X,A_\xi Y),$$

sendo que, por definição, $(\nabla^\perp_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)$. Segue da equação de Gauss que

$$K(\sigma) = \overline{K}(\sigma) + \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2,$$

onde $\{X,Y\}$ é uma base ortonormal do plano σ tangente a M.

O *campo vetorial curvatura média* H da imersão isométrica $f\colon M^n \to \bar{M}^{n+p}$ é definido por

$$H = \frac{1}{n}\text{traço } \alpha = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}(\text{traço } A_{\xi_j})\xi_j,$$

onde $\{\xi_1,...,\xi_p\} \in \Gamma(T^\perp M)$ é um referencial ortonormal.

Uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \bar{M}^{n+p}$ tem *campo vetorial curvatura média paralelo* quando $\nabla^\perp H = 0$. Neste caso, $\|H\|$ é constante ao longo de M.

Uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \bar{M}^{n+p}$ é (*totalmente*) *umbílica* se, para todo $\xi \in T^\perp M$, existe $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ tal que $A_\xi = \lambda_\xi \text{id}$. Se $A_\xi = 0, \forall\xi \in T^\perp M$, ou, equivalentemente, se $\alpha = 0$, então f é dita uma imersão *totalmente geodésica*.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- f é umbílica,
- $A_\xi = \langle H, \xi \rangle \mathrm{id}, \forall \xi \in T^\perp M$,
- $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H, \forall X, Y \in TM$.

A *nulidade relativa* $\triangle(x) \subset T_x M$ de f em $x \in M$ é o subespaço

$$\triangle(x) = \ker \alpha(x) = \{Y \in T_x M : \alpha(Y, Z) = 0, \forall Z \in T_x M\},$$

e sua dimensão $\nu(x)$ é chamada *índice de nulidade relativa de f em x*. A *nulidade relativa mínima de f* é definida como o menor dos índices de nulidade relativa de f em M.

Proposição 8 *Para uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \bar{M}^{n+p}$, vale que:*

- *A distribuição de nulidade relativa $x \mapsto \triangle(x)$ é diferenciável em todo subconjunto aberto onde ν é constante.*
- *O conjunto dos pontos com nulidade relativa mínima é aberto.*

Teorema 9 *Seja $f\colon M^n \to \bar{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica. Então, em abertos onde ν é constante:*

- *A distribuição de nulidade relativa $\triangle$ é integrável e as folhas são totalmente geodésicas em M^n e $\bar{M}_c^{n+p}$.*
- *Se $\gamma\colon [0, b] \to M$ é uma geodésica tal que $\gamma([0, b))$ está contido numa folha de $\triangle$, então $\nu(\gamma(b)) = \nu(\gamma(0))$.*
- *As folhas da distribuição de nulidade relativa mínima são completas quando M é completa.*

Proposição 10 *Seja $f\colon M_{\tilde{c}}^n \to \bar{M}_c^{n+1}, n \geq 3$, uma imersão isométrica. Então, uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- *$\tilde{c} = c$ e $\nu \geq n - 1$;*
- *$\tilde{c} > c$ e f é umbílica (não totalmente geodésica).*

Proposição 11 *Se* $f\colon M_c^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ *é uma imersão isométrica e* M_c^n *é compacta então* $c > 0$ *e* f *é totalmente geodésica.*

Observação: Se M_c^n é apenas completa, mas supõe-se que $c > 0$, então ainda vale que f é totalmente geodésica.

Uma imersão $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+p}$ admite uma *redução de codimensão* para q se existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_c^{n+q}$ em $\mathbb{Q}_c^{n+p}$, com $q < p$, tal que $f(M) \subset \mathbb{Q}_c^{n+q}$. A imersão é *substancial* se a codimensão não pode ser reduzida.

Proposição 12 *Seja* $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+p}, n \geq 2$, *uma imersão isométrica umbílica, mas não totalmente geodésica. Então* f *tem codimensão substancial 1.*

Uma situação bastante comum no estudo das subvariedades é a de ter que lidar com compostas de duas imersões isométricas $g\colon M \to N$ e $f\colon N \to P$. Para isto, é muito útil ter em mente a seguinte fórmula que relaciona as segundas formas fundamentais:

$$\alpha_{f \circ g}(X, Y) = f_* \alpha_g(X, Y) + \alpha_f(g_* X, g_* Y), \forall X, Y \in TM. \tag{1.1}$$

O próximo enunciado é parte do conhecido Teorema fundamental das subvariedades, no caso das hipersuperfícies. Antes de apresentá-lo é preciso entender uma relação existente entre fibrados normais de hipersuperfícies. Dadas hipersuperfícies $f, \tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, considere $\phi\colon T^\perp M_f^n \to T^\perp M_{\tilde{f}}^n$ como a isometria de fibrado vetorial entre os fibrados normais de f e $\tilde{f}$ definida como segue. Dado um vetor unitário $\xi_x \in T_x^\perp M_f^n$ em $x \in M$, seja $\phi(\xi_x)$ o único vetor unitário em $T_x^\perp M_{\tilde{f}}^n$ tal que $\{f_* X_1, \ldots, f_* X_n, \xi_x\}$ e $\{\tilde{f}_* X_1, \ldots, \tilde{f}_* X_n, \phi(\xi_x)\}$ determinam a mesma orientação em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, onde $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma base ordenada qualquer de $T_x M^n$.

Teorema 13 *Sejam* $f, \tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ *hipersuperfícies conexas e seja* $\phi\colon T^\perp M_f \to T^\perp M_{\tilde{f}}$ *a isometria de fibrados vetoriais definida acima. Se* $\alpha_{\tilde{f}}(x) = \phi(x) \circ \alpha_f(x), \forall x \in M$, *ou* $\alpha_{\tilde{f}}(x) = -\phi(x) \circ \alpha_f(x), \forall x \in M$, *então existe* $\tau \in Iso(\mathbb{Q}_c^{n+1})$ *tal que* $\tilde{f} = \tau \circ f$.

Por fim, o seguinte resultado não aparece nos textos básicos, mas pode ser encontrado em [Ta1] e [Ta2].

Teorema 14 *Seja* $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}, n \geq 3$, *uma imersão isométrica de uma variedade homogênea. Então:*

- *se* $c = 0$, *vale que* $M^n = \mathbb{S}^k_{\tilde{c}} \times \mathbb{R}^{n-k}$, *com* $0 \leq k \leq n$, *além disso, se* $k \geq 2$, *vale também que* $f = i \times id$, *onde* $i \colon \mathbb{S}^k_{\tilde{c}} \to \mathbb{R}^{k+1}$ *é a aplicação inclusão e* $id \colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ *é a aplicação identidade;*

- *se* $c < 0$, *vale uma das possibilidades:*
  - $M = \mathbb{H}^n_c$,
  - M^n *é isométrica a* $\mathbb{S}_{\tilde{c}}$, $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n_{\tilde{c}}$, *com* $\tilde{c} > c$, *e* f *é umbílica.*
  - M *é isométrica a* $\mathbb{S}^k_{c_1} \times \mathbb{H}^{n-k}_{c_2}$, *com* $0 < k < n$ *e* $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c}$, *e* $f = i_1 \times i_2 \colon \mathbb{S}^k_{c_1} \times \mathbb{H}^{n-k}_{c_2} \to \mathbb{H}^{n+1}_c \subset \mathbb{R}^{n+1,1} \approx \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n-k,1}$, *onde* i_1 *e* i_2 *representam as inclusões pertinentes.*

Capítulo 2

Produtos *warped* de variedades Riemannianas e subvariedades

É usual em Matemática tentar estudar um objeto complicado fatorando-o em um produto de objetos mais simples. Em geometria Riemanniana, o resultado mais conhecido neste sentido é o Teorema de de Rham sobre a fatoração de uma variedade Riemanniana em um produto Riemanniano. Nesse contexto, as formas espaciais não planares são variedades Riemannianas irredutíveis. Mas existem outras noções de decomposições de variedades Riemannianas que estendem a noção de produto Riemanniano. Uma extensão que atende aos objetivos deste trabalho surge com o conceito de produto *warped*. Com relação a uma decomposição como produto *warped*, as formas espaciais não planares podem ser decompostas, ou seja, deixam de ser irredutíveis.

O objetivo deste capítulo é apresentar, para o caso de dois fatores, propriedades básicas sobre produtos *warped*, um critério para que uma métrica Riemanniana em uma variedade produto seja um produto *warped* de métricas Riemannianas nos fatores, além de alguns resultados relacionados com a noção de produto *warped* de imersões isométricas.

O material apresentado aqui é baseado nos textos de [MRS], [No] e [On]. Mas [DT] também é uma boa referência.

2.1 Produtos *warped* de variedades Riemannianas

Para os objetivos desta tese, é suficiente considerar variedades produto com apenas dois fatores. Entretanto, todos os conceitos e resultados apresentados neste capítulo, exceto (talvez!) a Proposição 27 e seu corolário, podem ser estendidos para variedades produto com vários fatores.

Para lidar com variedades produto de dois fatores é conveniente usar uma terminologia específica. Também convém relembrar alguns termos sobre subfibrados vetoriais do fibrado tangente de uma variedade Riemanniana para lidar com questões de decomposição.

Assim, se $L\times N$ é uma variedade diferenciável produto, considere as projeções canônicas $\pi_L\colon L\times N \to L$ e $\pi_N\colon L\times N \to N$ e considere também as subvariedades $L\times\{y\}$ e $\{x\}\times N$, com y e x variando em N e L, respectivamente, as quais determinam folheações em $L\times N$, chamadas *folheações canônicas induzidas por* L *e* N, respectivamente. O subfibrado vetorial de $T(L\times N)$ formado pelos espaços tangentes das subvariedades integrais da folheação canônica induzida por L é chamado *subfibrado horizontal* e denotado por $\mathcal{H}$. De maneira análoga se define o *subfibrado vertical* $\mathcal{V}$. Deste modo, as fibras $L \times \{y\}$ e $\{x\} \times N$ das folheações canônicas podem ser chamadas *fibras horizontais* e *verticais*, respectivamente. O *levantamento horizontal* de um vetor $\tilde{X} \in T_xL$ a $(x, y) \in L \times N$ é o único vetor $X \in \mathcal{H}(x, y)$ tal que $\pi_{L*}X = \tilde{X}$. De maneira análoga se define *levantamento vertical* de um vetor de TN. Define-se também, do jeito óbvio, a noção de *levantamento de campos de vetores e de planos tangentes.*

Com relação a subfibrados, existem algumas classes importantes associadas às variedades Riemannianas. A saber, se M é uma variedade Riemanniana e E é um subfibrado vetorial de TM, diz-se que E é *paralelo* se $\nabla_X Y \in E$, para todo $X \in TM$ e todo $Y \in \Gamma(E)$, e que E é *totalmente geodésico* (ou *auto-paralelo*) se $\nabla_X Y \in \Gamma(E)$, para todos $X, Y \in \Gamma(E)$. Mais geralmente, se existe $\eta \in \Gamma(E^\perp)$, chamado o *campo vetorial curvatura média* de E, tal que $(\nabla_X Y)_{E^\perp} = \langle X, Y\rangle\eta$, quaisquer que sejam $X, Y \in \Gamma(E)$, diz-se que E é *totalmente umbílico.* Se, além disso, $(\nabla_X\eta)_{E^\perp} = 0$, para todo $X \in E$, E é dito um subfibrado *esférico.*

Se E é um subfibrado vetorial totalmente umbílico (totalmente geodésico, ou paralelo) então E é automaticamente integrável. Além disso, as folhas σ de E são subvariedades umbílicas (totalmente geodésicas se E é paralelo ou totalmente geodésico) de M com campo vetorial curvatura média $\eta|_\sigma$. O subfibrado E ser esférico significa que cada folha σ de E é uma *subvariedade esférica* de M^n, isto é, σ é uma subvariedade umbílica de M^n cujo campo vetorial curvatura média $\eta|_\sigma$ é paralelo com relação à sua conexão normal: $\nabla^\perp_X\eta = (\nabla_X\eta)_{E^\perp} = 0$, para todo $X \in E$.

A seguinte extensão do produto Riemanniano de variedades Riemannianas será bastante útil neste trabalho.

Definição: Sejam $(L, \langle , \rangle_L)$ e $(N, \langle , \rangle_N)$ variedades Riemannianas. Uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ na variedade produto $L \times N$ é chamada uma *métrica produto warped* de $\langle , \rangle_L$ e $\langle , \rangle_N$ se existe uma função positiva $\rho \in C^\infty(L)$ tal que

$$\langle , \rangle = \pi_L^* \langle , \rangle_L + (\rho \circ \pi_L)^2 \pi_N^* \langle , \rangle_N.$$

Nesta situação, $(L \times N, \langle , \rangle)$ é chamada uma *variedade produto warped* e ρ a *função warping*. Utiliza-se a notação $L \times_\rho N$.

Uma variedade produto Riemanniano é um caso particular de variedade produto *warped* no qual a função *warping*, ρ, é constante igual a 1. Se ρ é uma função constante, não necessariamente igual a 1, a variedade produto *warped* é essencialmente um produto Riemanniano, basta corrigir a métrica do segundo fator.

Em uma variedade produto *warped* $L \times_\rho N$, as fibras horizontais são todas isométricas à variedade L, pois, dado y em N, a aplicação $x \in L \mapsto (x, y) \in L \times \{y\}$ é uma isometria, enquanto que as fibras verticais são homotéticas à variedade N, uma vez que, dado x em L, a aplicação $y \in N \mapsto (x, y) \in \{x\} \times N$ define uma homotetia com fator de escala $\rho(x)^2$. Em particular, as curvaturas seccionais de uma fibra vertical $\{x\} \times N$ satisfazem à seguinte relação: $K_{\{x\}\times N} = \frac{1}{\rho^2(x)} K_N$.

Observação: Uma homotetia é um difeomorfismo $\phi \colon M^n \to \bar{M}^n$ entre variedade Riemannianas tal que

$$\langle \phi_* X, \phi_* Y \rangle_{\bar{M}} = k \langle X, Y \rangle_M, \forall X, Y \in T_p M, \forall p \in M,$$

para algum $k \neq 0$.

Exemplo: (coordenadas esféricas) Para $\rho \colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ definida por $\rho(t) = t$, $(0, \infty) \times_\rho \mathbb{S}^2$ é uma variedade produto *warped* tal que a aplicação

$$(t, x) \in (0, \infty) \times_\rho \mathbb{S}^2 \mapsto tx \in \mathbb{R}^3$$

é uma isometria sobre o aberto denso $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Exemplo: (coordenadas cilíndricas) Se ρ é agora definida por $\rho(t_1, t_2) = t_2$, para $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+$, onde $\mathbb{R}^2_+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \colon t_2 > 0\}$ é o semi-plano superior de $\mathbb{R}^2$, então outro exemplo importante é a variedade produto *warped* $\mathbb{R}^2_+ \times_\rho \mathbb{S}^1$. Neste caso, a aplicação

$$(t_1, t_2, x) \in \mathbb{R}^2_+ \times_\rho \mathbb{S}^1 \mapsto (t_1, t_2 x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^3$$

é uma isometria sobre um aberto denso do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Diz-se que a métrica produto *warped* de $(L \times_\rho N, \langle , \rangle)$ está *normalizada com relação a* $x \in L$ se $\rho(x) = 1$. Se $\langle , \rangle = \langle , \rangle_L + \rho^2 \langle , \rangle_N$ não está normalizada com relação a um $x_0 \in L$, defina $\tilde{\rho}$: $L \to (0, \infty)$ por $\tilde{\rho}(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(x_0)}$ e defina uma nova métrica $\langle , \rangle'_N$ em N por $\langle , \rangle'_N = \rho(x_0)^2 \langle , \rangle_N$. Então, $\langle , \rangle = \langle , \rangle_L + \tilde{\rho}^2 \langle , \rangle'_N$ e $\langle , \rangle$ está normalizada com relação a x_0 para esta nova métrica produto *warped*.

Vale observar que, quando a métrica produto *warped* de $L \times_\rho N$ está normalizada com relação a $x \in L$, a fibra $\{x\} \times N$ é isométrica à variedade N.

A proposição a seguir relaciona a conexão Riemanniana e o tensor curvatura de um produto *warped* com os respectivos elementos de seus fatores e pode ser encontrada, assim como a Proposição 16, em [No] (Lema 2 e Corolário 3, respectivamente).

Proposição 15 *Seja* $(L \times_\rho N, \langle , \rangle)$ *uma variedade produto warped. Sejam* ∇ *e* $\tilde{\nabla}$ *as conexões Riemannianas e* R *e* $\tilde{R}$ *os tensores curvatura do produto warped* $L \times_\rho N$ *e do produto Riemanniano* $L \times N$*, respectivamente. Então, quaisquer que sejam* $X, Y \in \mathcal{X}(L \times N)$,

$$\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y = \langle X_\mathcal{V}, Y_\mathcal{V} \rangle \eta - \langle \eta, X \rangle Y_\mathcal{V} - \langle \eta, Y \rangle X_\mathcal{V} \tag{2.1}$$

e

$$R(X,Y) - \tilde{R}(X,Y) = (\nabla_{X_\mathcal{H}} \eta - \langle \eta, X \rangle \eta) \wedge Y_\mathcal{V} + X_\mathcal{V} \wedge (\nabla_{Y_\mathcal{H}} \eta - \langle \eta, Y \rangle \eta) - \langle \eta, \eta \rangle X_\mathcal{V} \wedge Y_\mathcal{V}, \tag{2.2}$$

sendo que $\eta = -grad(\log \rho \circ \pi_L)$, $(\ )_\mathcal{H} = \pi_{L*}$ *e* $(\ )_\mathcal{V} = \pi_{N*}$.

Observação: Com a fórmula (2.2), obtém-se imediatamente que

$$\langle R(X,V)W, Y \rangle = \langle V, W \rangle \langle \nabla_X \eta - \langle X, \eta \rangle \eta, Y \rangle, \ \forall X, Y \in \mathcal{H} \text{ e } \forall V, W \in \mathcal{V} \tag{2.3}$$

ou, equivalentemente,

$$R(V,X)Y = -(\operatorname{Hess} \rho(X,Y)/\rho) V, \ \forall X, Y \in \mathcal{H} \text{ e } \forall V \in \mathcal{V} \tag{2.4}$$

Lembre-se que o *hessiano* de $\rho \in C^\infty(L)$ é dado por

$$\operatorname{Hess}_\rho(X,Y) = XY(\rho) - (\nabla_X Y)(\rho) = \langle \nabla_X (\operatorname{grad} \rho), Y \rangle_L, \forall X, Y \in TL.$$

Proposição 16 *Seja $L \times_\rho N$ uma variedade produto warped. Então as fibras horizontais $L \times_\rho \{y\}$ são subvariedades totalmente geodésicas e as fibras verticais $\{x\} \times_\rho N$ são subvariedades umbílicas com campo vetorial curvatura média dado por $\eta = -grad(\log \rho \circ \pi_L)$. Além disso, η é paralelo ao longo das fibras verticais.*

Corolário 17 *Seja $L \times_\rho N$ uma variedade produto warped. Então vale a relação*

$$K(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{\rho^2} K_N(\sigma) - \|\eta\|^2, \tag{2.5}$$

onde K e K_N representam as curvaturas seccionais de $L \times_\rho N$ e N, respectivamente, e $\tilde{\sigma}$ é o levantamento vertical de um plano σ de TN.

Em particular, se $L \times_\rho N$ tem curvatura seccional constante ao longo de alguma fibra vertical então N tem curvatura seccional constante e $L \times_\rho N$ tem curvatura seccional constante ao longo de qualquer fibra vertical. Se a métrica produto warped está normalizada com relação a um $x \in L$ e a curvatura seccional de $L \times_\rho N$ ao longo da fibra $\{x\} \times_\rho N$ vale c então a curvatura seccional de N é uma constante $\tilde{c} \geq c$.

Prova: Como cada fibra vertical $\{x\} \times N$ é uma subvariedade umbílica com campo vetorial curvatura média η, a equação de Gauss fica expressa como

$$K(\tilde{\sigma}) = K_{\{x\} \times N} - \|\eta\|^2.$$

Assim, basta completar com a relação obtida por homotetia, $K_{\{x\} \times N} = \frac{1}{\rho^2(x)} K_N$.

O resto do enunciado segue imediatamente da fórmula (2.5) mais o fato de que η é constante ao longo de uma fibra vertical, pois este é paralelo ao longo da fibra. ∎

Assim, se $L \times_\rho N$ tem curvatura seccional constante, N tem curvatura seccional constante. Contudo, neste caso, ainda se pode dizer mais. É o que garante a seguinte proposição ([Ej], Lema 4).

Proposição 18 *Seja $L \times_\rho N$ uma variedade produto warped conexa. Então $L \times_\rho N$ tem curvatura seccional constante igual a c se, e somente se, as seguintes condições são simultaneamente satisfeitas:*

(*i*) *a curvatura seccional de L é constante igual a c e a de N é constante igual a $c\rho^2 + \|\nabla\rho\|^2$;*

(*ii*) $Hess_\rho(\ ,\ ) + c\rho\langle\ ,\ \rangle = 0.$

Observação: A condição (*ii*) implica que $c\rho^2 + \|\nabla\rho\|^2$ é constante.

Corolário 19 *Suponha que a variedade produto warped conexa $L \times_\rho N$ tenha curvatura seccional constante c.*

(*i*) *Se $c = 0$ então ou N tem curvatura seccional identicamente nula e ρ é constante, ou seja, $L \times_\rho N$ é um produto Riemanniano de variedades planas, ou N tem curvatura seccional constante positiva e $\nabla\rho$ nunca se anula.*

(*ii*) *Se $c \neq 0$ então $\nabla\rho$ apenas pode se anular se $c > 0$ ou se $c < 0$ e N tem curvatura seccional constante $\tilde{c} < 0$ e isto acontece no conjunto $\{x \in L : \rho^2(x) = \frac{\tilde{c}}{c}\}$, o qual tem interior vazio.*

Além disso, se γ é uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva integral de $\nabla\rho$ então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

- $\rho(\gamma(t)) = \sqrt{\tilde{c}}(t + t_0)$, *se* $c = 0$ *e* $\tilde{c} > 0$,
- $\rho(\gamma(t)) = \sqrt{\frac{\tilde{c}}{c}} sen(\sqrt{c}(t + t_0))$, *se* $c > 0$,
- $\rho(\gamma(t)) = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{c}} senh(\sqrt{-c}(t + t_0))$, *se* $c < 0$ *e* $\tilde{c} > 0$,
- $\rho(\gamma(t)) = \sqrt{\frac{\tilde{c}}{c}} cosh(\sqrt{-c}(t + t_0))$, *se* $c < 0$ *e* $\tilde{c} < 0$,
- $\rho(\gamma(t)) = e^{\sqrt{-c}(t+t_0)}$, *se* $c < 0$ *e* $\tilde{c} = 0$.

Prova: As afirmações em (*i*) e (*ii*) decorrem imediatamente do ítem (*i*) da Proposição 18. Quanto à última afirmação, suponha que γ seja uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva integral do campo $\nabla\rho$. Neste caso, vale a relação

$$\|\nabla\rho\| = (\rho \circ \gamma)',$$

pois

$$\|\nabla\rho\|^2 = \langle\nabla\rho, \nabla\rho\rangle = \|\nabla\rho\|\langle\nabla\rho, \frac{\nabla\rho}{\|\nabla\rho\|}\rangle = \|\nabla\rho\| d\rho(\gamma') = \|\nabla\rho\|(\rho \circ \gamma)'.$$

Assim, como $L \times_\rho N$ tem curvatura seccional constante c, a fórmula (2.5) diz que

$$\tilde{c} = c(\rho \circ \gamma)^2 + (\rho \circ \gamma)'^2.$$

Como $\rho \circ \gamma$ expressa como no enunciado é solução desta equação diferencial, basta fixar t_0 de modo que a expressão coincida com $\rho(\gamma(0))$ para determinar $\rho \circ \gamma$. ∎

Proposição 20 *Seja $L \times_\rho N$ uma variedade produto warped com curvatura seccional constante. Se $\gamma \colon (\alpha, \beta) \to L$ é uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva integral do campo $\nabla\rho$ então γ é uma geodésica e $im(\gamma) \times_\rho N$ é uma subvariedade totalmente geodésica.*

Prova: Se dim $L = 1$, é claro que γ é uma geodésica. Suponha então que dim $L > 1$. Tem-se $\gamma' = \frac{\nabla\rho}{\|\nabla\rho\|}$. Como $\eta = -\frac{\nabla\rho}{\rho}$, então $\gamma' = -\frac{\eta}{\|\eta\|}$. Assim, γ é uma geodésica se $\nabla_\eta \frac{\eta}{\|\eta\|} = 0$. Mas,

$$\nabla_\eta \frac{\eta}{\|\eta\|} = \frac{1}{\|\eta\|}\nabla_\eta \eta + \eta(\frac{1}{\|\eta\|})\eta.$$

Usando que $L \times_\rho N$ tem curvatura seccional igual a uma constante c, a fórmula (2.3) fica

$$c\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X \eta, Y\rangle - \langle X, \eta\rangle\langle Y, \eta\rangle, \forall X, Y \in \mathcal{H}.$$

Assim, se $X = \eta$ e $Y \perp \eta$ então $0 = \langle \nabla_\eta \eta, Y\rangle$, donde $\nabla_\eta \eta$ é paralelo a η. Ou seja, γ é uma pré-geodésica. Como está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que γ é uma geodésica.

Resta agora mostrar que $im(\gamma) \times_\rho N$ é uma subvariedade totalmente geodésica. Para isto, basta verificar que a distribuição $E = \text{ger}\{\gamma'\} \oplus \mathcal{V} = \text{ger}\{\eta\} \oplus \mathcal{V}$ é um subfibrado totalmente geodésico. Pela fórmula (2.1), dado $X, Y \in \mathcal{V}$, tem-se

$$\nabla_{\gamma'} X = \nabla_X \gamma' = -\langle \eta, \gamma'\rangle X \in E$$

e

$$\nabla_X Y = {}^N\nabla_X Y + \langle X, Y\rangle \eta \in E,$$

(${}^N\nabla$ é a conexão de N.) além de $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Assim, $\nabla_X Y \in E$, quaisquer que sejam $X, Y \in E$. ∎

A seguir, será abordada a questão de saber, dada uma métrica Riemanniana em uma variedade produto, quando tal métrica é um produto *warped* de métricas nos fatores.

Para lidar com questões sobre fatoração de variedades Riemannianas de modo geral, Reckziegel e Schaaf introduziram uma nomenclatura especial (ver [RS] e [MRS]) a qual será apresentada agora, ainda para o caso particular de dois fatores.

Definição: Seja M uma variedade diferenciável e seja $TM = E_1 \oplus E_2$ uma decomposição em dois subfibrados vetoriais de TM, denotada por $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$. A família $\mathcal{E}$ é chamada uma 2-*rede* se os subfibrados de $\mathcal{E}$ são integráveis.

Se M é uma variedade Riemanniana e E_1 e E_2 são ortogonais, então $\mathcal{E}$ é dita uma 2-*rede ortogonal*.

Exemplo: Seja $M = L \times N$ uma variedade diferenciável produto. Neste caso, $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}, \mathcal{V}\}$, formada pelos subfibrados horizontal e vertical, é uma 2-rede, chamada a *rede produto*.

Definição: Sejam M e N variedades diferenciáveis munidas de 2-redes $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$ e $\mathcal{F} = (F_1, F_2)$, respectivamente. Seja $\phi\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável. Diz-se que ϕ é um *morfismo de redes* se, para todo $p \in M$ e todo $i = 1, 2$, vale que $\phi_* E_i(p) \subset F_i(\phi(p))$.

Dizer que ϕ é um morfismo de redes é equivalente a dizer que $\phi(L_i^{\mathcal{E}}(p)) \subset L_i^{\mathcal{F}}(\phi(p))$, para todo $p \in M$ e todo $i = 1, 2$, onde $L_i^{\mathcal{E}}(p)$ e $L_i^{\mathcal{F}}(\phi(p))$ são as folhas de E_i e F_i que passam por p e $\phi(p)$, respectivamente.

Diz-se que ϕ é um *isomorfismo local de redes* se $\phi_* E_i(p) = F_i(\phi(p))$, para todo $p \in M$ e todo $i = 1, 2$ (equivalentemente, $\phi(L_i^{\mathcal{E}}(p)) = L_i^{\mathcal{F}}(\phi(p))$, para todo $p \in M$ e todo $i = 1, 2$).

Observação: Se ϕ é um isomorfismo local de redes então ϕ é um difeomorfismo local.

Definição: Sejam M uma variedade Riemanniana e $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$ uma rede ortogonal em M. Diz-se que $\mathcal{E}$ é uma *rede WP* (*warped product*) se E_2 é um subfibrado vetorial esférico e E_1 é um subfibrado vetorial totalmente geodésico.

Se $M = L \times_\rho N$ é uma variedade produto *warped*, decorre da Proposição 16 que a rede produto $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}, \mathcal{V}\}$ é uma rede WP. Na verdade, esta também é uma condição necessária para que uma métrica de uma variedade produto seja uma métrica produto *warped*. Assim, vale a seguinte proposição (cf. [MRS], Proposição 4).

Proposição 21 *Seja $M = L \times N$ uma variedade produto conexa e $\langle , \rangle$ uma métrica Riemanniana em M. A rede produto é uma rede WP se, e somente se, $\langle , \rangle$ é uma métrica produto warped.*

É interessante saber a seguinte versão desta proposição.

Corolário 22 *Sejam M uma variedade Riemanniana munida de uma rede WP, $\mathcal{F} = (F_1, F_2)$, e $\phi\colon L \times N \to M$ um isomorfismo local de redes com respeito a rede produto*

$\mathcal{E} = (\mathcal{H}, \mathcal{V})$ *de* $L \times N$ *e a rede* $\mathcal{F}$. *Então* $L \times N$ *possui uma métrica produto warped que torna* ϕ *uma isometria local.*

Prova: Como ϕ é um isomorfismo local de redes, então $\phi_* \mathcal{H} = F_1$ e $\phi_* \mathcal{V} = F_2$. Como $\mathcal{F}$ é uma rede WP, F_1 é um subfibrado totalmente geodésico e F_2 é um subfibrado esférico.

Considere a métrica $\phi^* \langle , \rangle_M$ em $L \times N$ induzida por ϕ. Assim, ϕ é uma isometria local. Portanto, dados $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$,

$$\psi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{\psi_* X} \psi_* Y \in \Gamma(F_1),$$

pois $\psi_* X, \psi_* Y \in \Gamma(F_1)$ e F_1 é um subfibrado totalmente geodésico, donde

$$\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{H}).$$

Logo, $\mathcal{H}$ é um subfibrado totalmente geodésico.

Seja $\eta \in \Gamma(\mathcal{H})$ tal que $\psi_* \eta$ é o campo vetorial curvatura média do subfibrado totalmente umbílico F_2. Então, dados $X, Y \in \Gamma(\mathcal{V})$,

$$\psi_*((\nabla_X Y)_{\mathcal{H}}) = (\nabla_{\psi_* X} \psi_* Y)_{F_1} = \langle \psi_* X, \psi_* Y \rangle \psi_* \eta = \langle X, Y \rangle \psi_* \eta = \psi_*(\langle X, Y \rangle \eta),$$

donde

$$(\nabla_X Y)_{\mathcal{H}} = \langle X, Y \rangle \eta.$$

Logo, $\mathcal{V}$ é um subfibrado totalmente umbílico. Além disso,

$$\psi_*(\nabla_X \eta)_{\mathcal{H}} = (\nabla_{\psi_* X} \psi_* \eta)_{F_1} = 0,$$

donde

$$(\nabla_X \eta)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Assim, $\mathcal{V}$ é esférico e, portanto, $\mathcal{E}$ é uma rede WP. Pela Proposição 21, $\phi^* \langle , \rangle_M$ é uma métrica produto *warped*. ∎

Embora não seja utilizado neste trabalho, vale ressaltar que existe uma extensão do conhecido Teorema de de Rham devida a Hiepko que afirma que toda variedade Riemanniana munida de uma rede WP é localmente uma variedade produto *warped*. Além disso, vale uma versão global de tal resultado se a variedade é completa e simplesmente conexa (cf. Teorema 2 em [MRS]).

2.2 Produtos *warped* de imersões isométricas

Para o estudo de decomposições de subvariedades Riemannianas, um resultado extremamente útil é o seguinte teorema devido a Moore.

Teorema 23 *Seja* $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ *uma imersão isométrica de um produto Riemanniano* $M = \prod_{i=1}^{k} M_i$ *conexo cuja segunda forma fundamental* $\alpha\colon TM \times TM \to T^{\perp}M$*, satisfaz*

$$\alpha(X_i, X_j) = 0, \quad \forall X_i \in TL_i, \forall X_j \in TL_j,$$

onde $L_1, ..., L_k$ *são as folheações canônicas induzidas por* $M_1, ..., M_k$*. Então existe uma isometria* $\phi\colon N_1 \times \ldots \times N_k \to \mathbb{R}^n$ *de um produto Riemanniano de espaços euclidianos sobre* $\mathbb{R}^n$ *e existem imersões isométricas* $f_i\colon M_i \to N_i, 1 = 1, ..., k$*, tais que*

$$f = \phi \circ (f_1 \times \ldots \times f_k). \tag{2.6}$$

Uma imersão isométrica dada por (2.6) é chamada de *produto Riemanniano de* $f_1, ..., f_k$. Um caso particular importante é dado pelos *m-cilindros*, ou seja, imersões isométricas expressas por $g \times \mathrm{id}\colon N^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m+p} = \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^m$, onde g é uma imersão isométrica $g\colon N^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ e $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é aplicação identidade. Assim, se uma hipersuperfície do espaço Euclidiano pode ser fatorada como um produto Riemanniano de imersões então esta tem de ser um cilindro.

A decomposição do espaço Euclidiano apresentada no enunciado do teorema acima, dada através da isometria ϕ, pode ser estendida para as formas espaciais de modo geral através de decomposições como produto *warped*. Mais precisamente, uma decomposição como produto *warped* de uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^n$, no caso de dois fatores, é uma isometria sobre um aberto denso de $\mathbb{Q}_c^n$ da forma $\phi\colon V^{n-m}(\subset \mathbb{Q}_c^{n-m}) \times_\sigma \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^m \to \mathbb{Q}_c^n$. Uma isometria assim é chamada uma *representação como produto warped da forma espacial* $\mathbb{Q}_c^n$ e uma descrição completa destas isometrias se encontra em [No]. Para os objetivos deste trabalho, é conveniente apresentar o seguinte resultado, que é a versão simplificada do Teorema 7 de [No] que garante a existência da representação como produto *warped* de $\mathbb{Q}_c^N$ determinada por uma subvariedade umbílica $N \subset \mathbb{Q}_c^n$ e um ponto $p \in N$.

Teorema 24 *Dada uma subvariedade umbílica* $N^{n-k} \subset \mathbb{Q}_c^n$ *e um ponto* $p \in N$*, existe uma isometria* $\phi\colon V^k \times_\sigma N^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^n$ *sobre um aberto denso de* $\mathbb{Q}_c^n$*, onde* $V^k \subset \mathbb{Q}_c^n$ *é uma subvariedade totalmente geodésica ortogonal a* N^{n-k} *que contém* p.

A seguir é apresentada a noção de produto *warped* de imersões isométricas em uma forma espacial.

Definição: Sejam ϕ: $V^{l-m}(\subset \mathbb{Q}_c^{l-m}) \times_\sigma \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^m \to \mathbb{Q}_c^l$ uma representação de Q_c^l como produto *warped*, f_1: $L \to V$ e f_2: $N \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^m$ imersões isométricas e $\rho = \sigma \circ f_1$. Então a imersão isométrica $f = \phi \circ (f_1 \times f_2)$: $L \times_\rho N \to \mathbb{Q}_c^l$ é chamada *o produto warped das imersões isométricas* f_1 *e* f_2 *determinado por* ϕ.

Exemplo: Seja $f = \phi \circ (f_1 \times f_2)$: $L \times_\rho N \to \mathbb{Q}_c^n$ o produto *warped* de imersões isométricas f_1 e f_2 determinado por ϕ: $V^k(\subset \mathbb{Q}_c^k) \times_\sigma \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^n$. Suponha que f_2 seja uma isometria sobrejetora.

Se $L \times_\rho N$ não é um produto Riemanniano então f é uma subvariedade conhecida como subvariedade rotacional. A seção 4.2 aborda com detalhes este tipo de imersão para o caso de codimensão 1.

Se $L \times_\rho N$ é um produto Riemanniano, donde $\mathbb{Q}_c^n = \mathbb{R}^n$, então f é um n-cilindro.

Exemplo: (cone generalizado) Fixada as coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^{n+1}$, ϕ: $\mathbb{R}_+ \times_\sigma \mathbb{S}_1^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, considere uma imersão isométrica f: $M^{n-1} \to \mathbb{S}_1^n$. Então, o produto *warped* $\phi \circ (\mathrm{id}_{R_+} \times f)$: $\mathbb{R}_+ \times_\sigma M^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}, (t,p) \mapsto tf(p)$, é uma parametrização isométrica global da hipersuperfície que generaliza a noção de cone do $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, uma hipersuperfície assim é chamada de *cone sobre* f.

Com a generalização das coordenadas esféricas para as formas espaciais $\mathbb{S}_c^{n+1}$ e $\mathbb{H}_c^{n+1}$ a noção de cone se estende naturalmente para estes ambientes. Assim, se ϕ: $V^1(\subset \mathbb{Q}_c^1) \times_\sigma \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é uma representação como produto *warped* de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ e f: $M^{n-1} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^n$ é uma imersão isométrica, tem-se que o cone sobre f é parametrizado por $(t,p) \in V^1 \times_\sigma M^{n-1} \mapsto \phi(t, f(p)) \in \mathbb{Q}_c^{n+1}$. Estas hipersuperfícies são discutidas em [Ej]. Vale notar que $\mathbb{H}_c^{n+1}$ admite cones completos. Isto acontece quando a imersão f que gera o cone é completa e $\tilde{c} \leq 0$, pois neste caso ϕ é um difeomorfismo sobre $\mathbb{H}_c^{n+1}$.

Uma propriedade geométrica que caracteriza os cones de $\mathbb{R}^3$ é que estes são formados por semiretas a partir da origem que passam por uma curva da esfera. De modo mais geral, dada uma representação como produto *warped* ϕ: $V^k \times_\sigma \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{n-k+1} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ da forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ e dada uma imersão f: $N^{n-k} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{n-k+1}$, considere a subvariedade esférica $\Omega^{n-k+1} = \phi(\{\overline{x}\} \times \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{n-k+1})$, para algum $\overline{x} \in V^k$. Então a imagem da parametrização $\phi \circ (\mathrm{id}_V \times f)$: $V^k \times_\sigma N^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é a união de subvariedades geodésicas k-dimensionais ortogonais a Ω e que passam por uma hipersuperfície de Ω^{n-k+1}. Desta forma, uma hipersuperfície como $\phi \circ (\mathrm{id}_V \times f)$ será chamada nesta tese de *o cone sobre f segundo a representação ϕ*, ou mais simplesmente de *cone sobre f*, ou até de *cone*.

Assim, dado o produto *warped* $f = \phi \circ (f_1 \times f_2)\colon L^k \times_\rho N^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ determinado por $\phi\colon V^k \times_\sigma \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{n-k+1} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, se f_1 é uma isometria sobre a imagem então f é parte do cone sobre f_2 segundo ϕ.

Observação: Se um produto *warped* de imersões isométricas tem codimensão 1 então este só pode ser um aberto de uma das hipersuperfícies descritas nos dois exemplos acima.

A seguinte proposição relaciona a segunda forma fundamental do produto warped de duas imersões com as dos fatores (cf. [No] ou [DT]).

Proposição 25 *Sejam $N = L \times_\rho M$ e $\bar{N} = \bar{L} \times_{\bar{\rho}} \bar{M}$ variedades produto warped e sejam $F\colon L \to \bar{L}$ e $G\colon M \to \bar{M}$ imersões isométricas tais que $\rho = \bar{\rho} \circ F$. Então $f = F \times G\colon N \to \bar{N}$ é uma imersão isométrica e vale em $z = (x, y)$ que:*

- $\pi_{\bar{L}*} f_* T_z N = F_* T_x L$, $\pi_{\bar{L}*} T_z^\perp N = T_x^\perp L$, $\pi_{\bar{M}*} f_* T_z N = G_* T_y M$ *e* $\pi_{\bar{M}*} T_z^\perp N = T_y^\perp M$.
- $(\nabla \bar{\rho}(F(x)))_{T_x^\perp L} = \nabla \bar{\rho}(F(x)) - F_* \nabla \rho(x)$.
- *As segunda formas fundamentais de F, G e f estão relacionadas por*

$$\pi_{\bar{M}*} \alpha^f(X, Y) = \alpha^G(\pi_{M*} X, \pi_{M*} Y),$$

$$\pi_{\bar{L}*} \alpha^f(X, Y) = \alpha^F(\pi_{L*} X, \pi_{L*} Y) - \rho(x) \langle \pi_{M*} X, \pi_{M*} Y \rangle (\nabla \bar{\rho}(F(x)))_{T_x^\perp L},$$

para todos $X, Y \in TN$.

Definição: Seja $f\colon N^{p+n} = L^p \times_\rho M^n \to \mathbb{Q}_c^l$ uma imersão isométrica de um produto *warped* de variedades Riemannianas e seja $\mathcal{E} = (\mathcal{H}, \mathcal{V})$ a rede produto. A segunda forma fundamental de f, $\alpha\colon TN \times TN \to T^\perp N$, *é adaptada à rede produto $\mathcal{E}$* se satisfaz

$$\alpha(X, V) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{H}, \forall V \in \mathcal{V}.$$

Quando uma imersão é um produto warped de imersões determinado por alguma representação, a segunda forma fundamental da imersão é adaptada à rede produto do domínio, consequência direta da Proposição 25. O próximo teorema, devido a Nölker, declara que vale a recíproca.

Lembre-se que o *fecho esférico* de uma imersão numa forma espacial é a subvariedade esférica completa de menor dimensão que contém a imagem da imersão.

Teorema 26 *([No]) Seja $f\colon L \times_\rho N \to \mathbb{Q}_c^l$ uma imersão isométrica de um produto warped conexo cuja segunda forma fundamental é adaptada a rede produto de $L \times_\rho N$. Fixado um ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in L \times_\rho N$ com $\rho(\overline{x}) = 1$, sejam $f_1\colon L \to \mathbb{Q}_c^l$ e $f_2\colon N \to \mathbb{Q}_c^l$ imersões isométricas dadas por $f_1(x) = f(x, \overline{y})$ e $f_2(y) = f(\overline{x}, y)$. Então f é o produto warped de f_1 e f_2 determinado pela representação como produto warped de $\mathbb{Q}_c^l$ a partir do fecho esférico de f_2 e do ponto $f(\overline{x}, \overline{y})$.*

Observação: Na conclusão do enunciado, se $\tilde{N}$ é o fecho esférico de f_2 então f_2 passa a ser considerada como uma aplicação em $\tilde{N}$ e f_1 como uma aplicação na subvariedade totalmente geodésica ortogonal a $\tilde{N}$ por $f(\overline{x}, \overline{y})$.

A condição de que deve existir um ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in L \times_\rho N$ com $\rho(\overline{x}) = 1$ não deve ser uma restrição para o uso do Teorema de Nölker, pois, dado um ponto qualquer $(x, y) \in L \times_\rho N$, é sempre possível normalizar a métrica produto *warped* com relação ao ponto x.

Uma imersão isométrica com a segunda forma fundamental adaptada à rede produto é, de acordo com o teorema acima, um produto *warped* de imersões isométricas determinado por uma representação específica. Contudo, a decomposição de uma imersão assim não é única; por exemplo, um cone do $\mathbb{R}^3$ que é também uma superfície de rotação possui uma decomposição determinada pelas coordenadas esféricas e outra determinada pelas coordenadas cilíndricas. Para evitar tal ambiguidade, ficará convencionado, daqui por diante, ao dizer que uma imersão isométrica é um *produto warped de imersões isométricas*, que a representação que determina a decomposição é dada como no enunciado do Teorema de Nölker.

Para o caso de hipersuperfícies, vale notar que uma imersão isométrica com a segunda forma fundamental adaptada à rede produto possui a seguinte restrição bastante útil. Dada uma imersão isométrica $f\colon L^k \times_\rho N^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, seja $\tilde{N}$ o fecho esférico da imersão $y \mapsto f(\overline{x}, y)$. Quando f é um produto *warped* de imersões, então $\tilde{N}$ tem dimensão $n - k$ ou $n - k + 1$.

Dajczer e Tojeiro mostraram em [DT] que, no caso de uma hipersuperfície $f\colon L^{n-k} \times_\rho N^k \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, a segunda forma fundamental é sempre adaptada à rede produto de $L^{n-k} \times_\rho N^k$ em qualquer ponto onde a curvatura seccional não seja constante igual a c. Esta propriedade tem papel fundamental em alguns resultados deste trabalho.

Proposição 27 *Suponha que o produto warped $L^p \times_\rho M^n, n \geq 2$, não tenha pontos com curvatura seccional constante c. Então toda imersão isométrica $f\colon L^p \times_\rho M^n \to \mathbb{Q}_c^{p+n+1}$ tem a segunda forma fundamental adaptada à rede produto de $L^{n-k} \times_\rho M^k$.*

Decorre da proposição acima e do Teorema 26 o seguinte resultado.

Corolário 28 *Suponha que o produto warped conexo $L^p \times_\rho M^n, n \geq 2$, não tenha pontos com curvatura seccional constante c. Então toda imersão isométrica $f\colon L^p \times_\rho M^n \to \mathbb{Q}_c^{p+n+1}$ é um produto warped de imersões.*

Capítulo 3

Geometria Riemanniana e ações de grupos de Lie

3.1 G-variedades

A maior parte do material desta seção e da seguinte tem como referências os textos [BCO] e [PT1] (ou [PT2]). Os resultados apresentados sem demonstração ou indicação podem ser facilmente encontrados numa dessas referências.

Definição: Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma *ação (diferenciável) de G sobre M* é uma aplicação diferenciável $\rho\colon G \times M \to M$ tal que:

(*i*) $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$, $\forall g, h \in G$ e $\forall x \in M$.

(*ii*) $\rho(e, x) = x$, $\forall x \in M$, onde e é a identidade de G.

Diz-se também que G *age sobre M* ou que M *é uma G-variedade*. Note que ρ induz um homomorfismo de grupos $\phi\colon G \to \mathrm{Dif}(M)$ dado por

$$g \in G \mapsto \phi(g) \in \mathrm{Dif}(M),$$

onde $\phi(g)\colon M \to M$ é definido por $\phi(g)(x) = \rho(g, x), \forall x \in M$. Assim, uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M pode ser vista como uma representação $\phi\colon G \to \mathrm{Dif}(M)$ de G como um subgrupo de $\mathrm{Dif}(M)$, e escreve-se $g(x)$ em vez de $\rho(g, x)$. Se M é um espaço vetorial (respectivamente, espaço de Hilbert) então ϕ é dita uma *representação linear* (respectivamente, *representação ortogonal*).

Exemplo: (representação de isotropia)

Seja M uma G-variedade e $x \in M$. O *subgrupo de isotropia* (ou *estabilizador*) de G em x é definido por

$$G_x = \{g \in G \,:\, g(x) = x\}.$$

O subgrupo G_x age de modo natural sobre o espaço tangente de x através da representação linear

$$\begin{array}{rcl} G_x & \to & GL(T_xM) \\ g & \mapsto & g_{*x}, \end{array}$$

chamada *representação de isotropia de G em x.*

Um bom exemplo de ação de grupo, e que coloca este assunto no contexto do estudo de geometria Riemanniana, é dado pelo seguinte resultado.

Teorema 29 *Seja M uma variedade Riemanniana e seja Iso(M) o grupo de isometrias de M. Então existe uma única estrutura de variedade diferenciável em Iso(M) tal que:*

- *Iso(M) é um grupo de Lie.*
- $\begin{array}{l} Iso(M) \times M \to M \\ (g,p) \mapsto g(p) \end{array}$ *é diferenciável*
- *Um homomorfismo β: $\mathbb{R} \to$ Iso(M) é diferenciável se, e somente se,*

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \times M \to M \\ (t,p) \mapsto \beta(t)(p) \end{array}$$

  é diferenciável.

Se M é uma variedade Riemanniana, todo homomorfismo de grupos de Lie ϕ: $G \to$ Iso(M) determina uma ação sobre M. Neste caso, diz-se que M é uma *G-variedade Riemanniana* (ou *isométrica*).

Observação: Se M é uma G-variedade Riemanniana, então a representação de isotropia da ação de G sobre M é uma representação ortogonal.

Inicialmente, o desenvolvimento do estudo de ações se deu principalmente para o caso de grupos compactos. O próximo conceito generaliza este tipo de ação e, mais importante ainda, é exatamente o tipo de ação para ser estudado no contexto da geometria Riemanniana (ver Proposição 30 e Teorema 31 a seguir). Esta extensão é tal que as principais propriedades da teoria de ações de grupos compactos continuam válidas.

Definição: Seja M uma variedade diferenciável. Uma ação $G \times M \to M$ é *própria* se, para toda sequência (g_k) em G e toda sequência (x_k) em M, o fato das sequências $(g_k(x_k))$ e (x_k) serem convergentes implica em (g_k) possuir uma subsequência convergente.

Observação: Segue imediatamente da definição que a ação de um grupo compacto é própria.

Os próximos dois resultados garantem que o conceito de ação própria de um grupo pode ser colocado como parte dos estudos da geometria Riemanniana.

Proposição 30 *Seja M uma variedade Riemanniana. Se G é um subgrupo fechado de $Iso(M)$ então G é um grupo de Lie cuja ação natural sobre M é própria.*

Teorema 31 *Se o grupo de Lie G age propriamente sobre uma variedade diferenciável M então existe uma métrica Riemanniana para M que torna G um subgrupo fechado de $Iso(M)$.*

Definição: Seja M uma G-variedade e $x \in M$. A *órbita* de x por G é definida como

$$G(x) = \{g(x) \in M \; : \; g \in G\}.$$

Definição: Seja M uma G-variedade. Se $G(x) = M$ para algum (e portanto para todo) $x \in M$ então M é dita uma *G-variedade homogênea.*

O próximo teorema é a reunião de alguns resultados fundamentais para o desenvolvimento da teoria das G-variedades Riemannianas.

Teorema 32 *Seja M uma variedade Riemanniana e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo fechado. Então a ação de G sobre M satisfaz*

(*i*) *$G(x)$ é uma subvariedade fechada e mergulhada em M, para todo $x \in M$.*

(ii) G_x *é compacto, para todo* $x \in M$.

(iii) *Para todo* $x \in M$ *existe* $r > 0$ *tal que*

$$U = \{\exp_y(v) \, : \, y \in G(x) \text{ e } v \in T_y^{\perp}G(x) \cap B(0;r)\}$$

é uma vizinhanca tubular G*-invariante de* $G(x)$.

Definição: Sejam M uma variedade Riemanniana e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo fechado. Dada uma componente conexa de M, M^i, e vendo os subgrupos de isotropia também como subvariedades, seja $m = min\{dim(G_x) : x \in M^i\}$ e k o menor número de componentes conexas de um subgrupo de isotropia dentre todos os subgrupos de isotropia de dimensão m. Dado $x \in M^i$, a órbita $G(x)$ é chamada uma *órbita principal de* M se a subvariedade G_x tem dimensão m e o número de componentes conexas é k. Em particular, uma órbita principal de M^i tem dimensão maximal dentre todas as órbitas de M^i (lembre que $G(x) \approx G/G_x$).

Se $G(x)$, com $x \in M^i$, tem dimensão maximal entre todas as órbitas de M^i, mas não é principal, então $G(x)$ é chamada uma *órbita excepcional*. Se $G(x)$ não tem dimensão maximal, é chamada *órbita singular*. A codimensão de uma órbita principal de dimensão maximal, dentre todas as órbitas de M, como subvariedade de M, é chamada *cohomogeneidade*.

Se $G(x)$ é uma órbita principal, x é dito um elemento *regular* de G sobre M. O conjunto dos elementos regulares é denotado por M_r.

Observação: M tem cohomogeneidade 0 se é homogênea.

Teorema 33 *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $G \subset Iso(M)$ *um subgrupo fechado e* $x \in M$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $x \in M_r$.

(ii) *Existe uma vizinhança* U *de* x *tal que* $\forall y \in U, \exists g \in G$ *tal que* $G_x \subset G_{g(y)} = gG_yg^{-1}$.

(iii) $g_*\xi = \xi$, *para todo* $g \in G_x, \forall \xi \in T^{\perp}G(x)$.

Corolário 34 *Dados* $x \in M_r$ *e* $y \in \exp_x(T_x^{\perp}G(x))$, *tem-se* $G_x \subset G_y$. *Em particular, tal* y *é regular se, e somente se,* $G_x = G_y$.

Proposição 35 *Seja M uma variedade Riemanniana e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo fechado. Então M_r é um aberto denso de M.*

Teorema 36 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo fechado. Então M_r/G, munido da topologia induzida pela aplicação orbital $\pi\colon M_r \to M_r/G$, é um espaço conexo. Mais ainda, existe uma estrutura de variedade Riemanniana em M_r/G que torna π uma submersão Riemanniana.*

As órbitas principais de uma G-variedade Riemanniana possuem algumas particularidades geométricas. Na verdade, para o caso especial de uma ação localmente polar, assunto da próxima seção, as propriedades são notáveis.

Sejam M uma variedade Riemanniana e $G \subset \mathrm{Iso}(M)$ um subgrupo fechado. Então uma órbita $G(x)$ é uma subvariedade de M invariante pela ação de G. Assim, com a métrica induzida, $G(x)$ é uma variedade Riemanniana sob a ação isométrica de G; mais ainda, $G(x)$ é G-homogênea.

O espaço tangente a $G(x)$ em um ponto $y \in G(x)$ é formado por derivadas de curvas sobre $G(x)$ da forma $t \mapsto g_t(x)$, onde $g_t \in G$. Usando que $G = \bigcup_{g \in G} G^0 g$, onde G^0 é a componente conexa da identidade, é imediato verificar que

$$T_yG(x) = \{\frac{d}{dt}|_{t=0} g_t(y) : t \mapsto g_t \in G \text{ é um subgrupo a 1-parâmetro}\}.$$

(Lembrando que um subgrupo a 1-parâmetro em G é um homomorfismo de grupo de Lie de $\mathbb{R}$ em G.) Agora, se $t \mapsto g_t \in G$ é um subgrupo a 1-parâmetro, é sabido que a relação

$$X(z) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g_t(z), \forall z \in M,$$

define um campo de vetores. Como o subgrupo $\{g_t\}$ é formado por isometrias, X é um *campo de Killing* (induzido por G).

Resumindo, dado $x \in M$,

$$T_xG(x) = \{X(x) : X \text{ é campo de Killing induzido por } G\}.$$

Se $G(x)$ é uma órbita principal, dado um vetor normal $\xi \in T_x^{\perp}G(x)$, o Teorema 33, item (iii), garante que está bem definido um campo de vetores, chamado *campo vetorial normal equivariante determinado por* ξ, através da expressão

$$\tilde{\xi}(g(p)) = g_*\xi, \forall g \in G.$$

Se A denota o operador forma de $G(x)$ como subvariedade de M, então, quaisquer que sejam $g \in G$, $y \in G(x)$, $X \in T_yG(x)$ e $\xi \in T_y^{\perp}G(x)$, tem-se

$$A_{g_*\xi}g_*X = g_*A_\xi X.$$

De fato, para todo $Y \in T_yG(x)$ vale que

$$\begin{aligned}-\langle A_\xi X, Y\rangle &= \langle \nabla_X Y, \xi\rangle = \langle g_*\nabla_X Y, g_*\xi\rangle = \langle \nabla_{g_*X} g_*Y, g_*\xi\rangle \\ &= -\langle A_{g_*\xi}g_*X, g_*Y\rangle = -\langle g_*^{-1}A_{g_*\xi}g_*X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Segue daí, que

$$A_{\tilde{\xi}(g(x))} = g_*A_\xi g_*^{-1}, \forall g \in G, \tag{3.1}$$

onde $\tilde{\xi}$ é o campo vetorial normal equivariante determinado por ξ. Logo, vale a

Proposição 37 *As curvaturas principais de uma órbita principal com respeito a um campo vetorial normal equivariante são constantes.*

3.2 Ações localmente polares

Existe um tipo especial de ação que desperta bastante interesse, não só pelas suas importantes propriedades mas também pelos vários exemplos que surgem naturalmente em geometria. Este é o tema desta seção.

Definição: Seja M uma variedade Riemanniana e G um subgrupo fechado de $Iso(M)$. Diz-se que G age de modo *localmente polar* se a distribuição

$$p \in M_r \mapsto T_p^{\perp}(G(p)) \tag{3.2}$$

é integrável. Neste caso, diz-se também que M é uma *G-variedade localmente polar.*

Toda ação com cohomogeneidade 1 é uma ação localmente polar. Em particular, o subgrupo $O(n)$ dos operadores ortogonais de $\mathbb{R}^n$ age de modo localmente polar sobre $\mathbb{R}^n$.

Proposição 38 *Seja M uma G-variedade localmente polar. Então toda variedade integral da distribuição* (3.2) *é totalmente geodésica. Equivalentemente, a distribuição* (3.2) *é totalmente geodésica.*

Definição: Seja M uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo fechado de $Iso(M)$. Uma subvariedade imersa completa $\Sigma \subset M$ é uma *seção* se intercepta toda órbita de G e sempre ortogonalmente. Utiliza-se a seguinte notação: $\Sigma_r = \Sigma \cap M_r$.

Se Σ é uma seção e $x \in \Sigma_r$ então Σ pode ser descrita como $\Sigma = \exp_x(T_x^{\perp}G(x))$.

Teorema 39 *(cf. [HLO]) Seja M uma G-variedade localmente polar completa. Então M admite seção. Se Σ é uma seção, então Σ_r é uma variedade integral da distribuição* (3.2)*. Em particular, uma seção é uma subvariedade totalmente geodésica.*

Se uma seção é uma subvariedade mergulhada e fechada, então a ação de G sobre uma variedade Riemanniana completa é chamada uma *ação polar*. Assim, uma ação localmente polar sobre uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^n$ é polar, pois toda seção, sendo uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{Q}_c^n$, é automaticamente mergulhada e fechada.

Exemplo: Se E é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, seja G o grupo das translações por vetores pertencentes a E. Então G age polarmente sobre $\mathbb{R}^n$. As órbitas são os espaços afins paralelos a E e as seções são os espaços afins paralelos a $E^{\perp}$.

Exemplo: Seja S um espaço simétrico Riemanniano simplesmente conexo. Suponha que S seja semisimples, isto é, S, como um produto Riemanniano, não tem fator plano. Seja G a componente conexa da identidade do grupo grupo $\mathrm{Iso}(S)$. Então a s-representação de S, isto é, a representação de isotropia determinada por G, é uma ação polar.

Exemplo: Seja $M = L \times_{\rho} N$ uma variedade produto *warped* completa. Se $G \subset \mathrm{Iso}(N)$ é um subgrupo fechado, então $\{id\} \times G$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{Iso}(M)$, onde

$$(id, g)(x, y) = (x, g(y)), \forall (x, y) \in M, \forall g \in G.$$

Logo, se G age transitivamente sobre N, $\{id\} \times G$ age de modo localmente polar sobre M. Neste exemplo particular todas as órbitas são principais.

Proposição 40 *Se M é uma G-variedade localmente polar completa e G não é conexo, então M também é uma G^0-variedade localmente polar, onde G^0 é a componente conexa de G contendo a identidade.*

Em [PT1], encontra-se um resultado (Teorema 3.2, item (iii)) com relação a seções de ações polares que diz que, dada uma seção Σ de uma ação polar de G sobre M, se L é uma componente conexa de Σ_r então a restrição $\pi|_L$ da aplicação orbital $\pi\colon\ M_r \to M_r/G$ é uma isometria local sobre M_r/G.

A seguir é apresentada uma versão que é uma particularização deste resultado, mas para seções de ações localmente polares. Pela importância nesta tese desta pequena generalização, a próxima proposição será demonstrada.

Proposição 41 *Seja M^n uma G-variedade localmente polar completa e seja Σ uma seção. Se L é uma componente conexa de Σ_r então $G(L) = M_r$.*

Prova: Considere M_r/G como a variedade Riemanniana conexa dada pela Proposição 36, segundo a qual a aplicação orbital $\pi\colon\ M_r \to M_r/G$ é uma submersão Riemanniana.

Seja L uma componente conexa de Σ_r. Como π é uma aplicação aberta e $G(L)$ é um aberto de M_r, tem-se que $\pi(L) = \pi(G(L))$ é um aberto de M_r/G.

Por outro lado, se $\pi(L) \neq M_r/G$, como Σ intercepta toda órbita de G, existe $x \in \Sigma_r$ tal que $\pi(x)$ não pertence a $\pi(L)$. Como a restrição $\pi|_{\Sigma_r}$ da aplicação orbital $\pi\colon\ M_r \to M_r/G$ é uma isometria local, existe um aberto V de Σ_r contendo x e conexo por caminhos tal que $\pi|_V$ é uma isometria sobre a imagem. Então $\pi(V)$ é um aberto de M_r/G que não intercepta $\pi(L)$. De fato, $\pi(V)$ é aberto pois π é uma aplicação aberta. Suponha que exista $y \in L$ tal que $\pi(y) \in \pi(L) \cap \pi(V)$. Seja então $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to \pi(V)$ um caminho diferenciável ligando $\pi(x)$ a $\pi(y)$. Como $\pi|_V$ é uma isometria sobre $\pi(V)$, existe um caminho diferenciável, $\gamma\colon [0,1] \to V$, tal que $\gamma(0) = x$ e $\pi \circ \gamma = \tilde{\gamma}$, donde $\pi(\gamma(1)) = \tilde{\gamma}(1) = \pi(y)$. Então, como estão na mesma órbita, existe $g \in G$ tal que $y = g(\gamma(1))$. Considere o caminho $g \circ \gamma\colon [0,1] \to \Sigma_r$ (Σ_r é o contradomínio de $g \circ \gamma$ pois $g(\Sigma)$ é uma seção e $y \in \Sigma_r \cap g(\Sigma_r)$, donde $g(\Sigma_r) = \Sigma_r$). Como $g \circ \gamma$ é um caminho em Σ_r, partindo de $g(x)$ e chegando em $y \in L$, então $g(x) \in L$, donde $\pi(x) \in \pi(L)$, o que é um absurdo. Logo, o complementar de $\pi(L)$ em M_r/G também é um aberto de M_r/G.

Como M_r/G é conexo, resta que $\pi(L) = M_r/G$, ou seja, $G(L) = M_r$. ∎

Proposição 42 *Seja M uma G-variedade localmente polar. Então todo campo vetorial normal G-equivariante em uma órbita principal é $\nabla^{\perp}$-paralelo.*

Corolário 43 *Se $G(x)$ é uma órbita principal de uma G-variedade localmente polar então o campo vetorial curvatura média da inclusão $i\colon G(x) \to M$ é $\nabla^{\perp}$-paralelo.*

Considere a seguinte importante classe de subvariedades.

Definição: Uma imersão isométrica $f\colon N \to M$ é *isoparamétrica* se tem fibrado normal plano e as curvaturas principais com respeito a todo campo vetorial normal paralelo ao longo de uma curva de M qualquer são constantes.

Assim, segue das Proposições 42 e 37 o seguinte resultado.

Proposição 44 *As órbitas principais de uma ação localmente polar são subvariedades isoparamétricas.*

No caso de ações sobre um espaço Euclidiano, esta propriedade caracteriza as ações localmente polares. É o que garante o seguinte resultado devido a Palais e Terng ([PT1]).

Teorema 45 *Seja G um subgrupo fechado de $SO(N)$. Se alguma órbita $G(p)$ é uma subvariedade isoparamétrica substancial de $\mathbb{R}^N$ então G age polarmente sobre $\mathbb{R}^N$ e $G(p)$ é uma órbita principal.*

Observação: Para o caso de $G(p)$ ser uma órbita isoparamétrica que não é substancial, seja H o subespaço de $\mathbb{R}^N$ tal que $p + H$ é o *fecho afim* de $G(p)$ (o menor subespaço afim que contém $G(p)$). Então, sabe-se que G age polarmente sobre $\mathbb{R}^N$ (e $G(p)$ é uma órbita principal) se, e somente se, G age trivialmente sobre $H^{\perp}$, ou seja, se, e somente se, G deixa todo elemento de $H^{\perp}$ fixo (cf. [Ol], página 38).

O Teorema 45 permite deduzir uma propriedade interessante para as ações polares sobre um espaço Euclidiano (cf. [BCO], Corolário 5.4.3).

Corolário 46 *Seja $G \subset O(N)$ um subgrupo agindo polarmente sobre $\mathbb{R}^N$. Então toda órbita maximal é principal.*

3.3 Aplicações equivariantes

Definição: Sejam $M, \overline{M}$ variedades diferenciáveis e $G, \overline{G}$ grupos de Lie agindo sobre $M, \overline{M}$, respectivamente. Sejam $\tau\colon G \to \overline{G}$ um homomorfismo de grupo de Lie e $f\colon M \to \overline{M}$ uma aplicação diferenciável. Diz-se que f é *τ-equivariante* se

$$f(g(x)) = \tau(g)(f(x)),\ \forall (g, x) \in G \times M.$$

Quando τ coincide com a aplicação identidade de G, diz-se mais simplesmente que f é *G-equivariante.*

Se $f\colon M \to \overline{M}$ é τ-equivariante então:

- $f(G(x)) = \tau(G)(f(x))$;
- $\tau(G_x) \subset \tau(G)_{f(x)}$;
- $\tau(G_x) = \tau(G)_{f(x)}$ e τ ser injetiva implica em $f|_{G(x)}$ ser injetiva;
- $f|_{G(x)}$ ser injetiva implica que $\tau(G_x) = \tau(G)_{f(x)}$.

Além disso, quando se tem uma ação própria sobre uma variedade completa, também vale o fato de que $f|_{G(x)}$ ser injetiva implica em τ ser injetiva, quando $G(x)$ é uma órbita principal. Isto é consequência da

Proposição 47 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo fechado de $Iso(M)$. Se $g \in G$ fixa pontualmente uma órbita principal então $g = id$.*

Prova: Seja $G(p)$ uma órbita principal e suponha que $g \in G$ é tal que $g(h(p)) = h(p)$, para todo $h \in G$. Seja $q \in M$. Como a subvariedade $\exp_p(T_p^{\perp}G(p))$ intercepta todas as órbitas de G (Proposição 2.5 de [PT1]), existe $h \in G$ tal que $q \in h(\exp_p(T_p^{\perp}G(p))) = \exp_{h(p)}(T_{h(p)}^{\perp}G(p))$. Pelo Corolário 34, $G_{h(p)} \subset G_q$. Como, por hipótese, $g \in G_{h(p)}$, tem-se $g(q) = q$. ∎

Corolário 48 *Sejam M uma variedade Riemanniana completa, $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana, $G \subset Iso(M)$ e $\overline{G} \subset Iso(\overline{M})$ subgrupos fechados e $\tau\colon G \to \overline{G}$ um homomorfismo de grupo de Lie. Se existe uma aplicação $f\colon M \to \overline{M}$ τ-equivariante cuja restrição a alguma órbita principal é injetiva então τ é um monomorfismo.*

Prova: Seja $g \in G$ tal que $\tau(g) = \mathrm{id}_{\overline{M}}$. Seja $N \subset M$ uma órbita principal na qual a restrição de f é injetiva. Como,

$$f(g(p)) = \tau(g)f(p) = f(p), \forall p \in N,$$

segue que g fixa N pontualmente. Pela proposição acima, $g = \mathrm{id}_M$. ∎

Voltando às representações como produto *warped* das formas espaciais, seja N^{n-k} uma subvariedade esférica de uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^n$. Seja ϕ: $V^k \times_\sigma N^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^n$ uma representação como produto *warped* determinada a partir de N (Teorema 24).

Dado $g \in \mathrm{Iso}(N)$, a correspondência

$$\phi(x, y) \mapsto \phi(x, g(y)), \forall (x, y) \in V \times_\sigma N,$$

determina uma isometria $\tau(g) \in \mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^n)$ (lembre que $\mathrm{im}(\phi)$ é um conjunto denso em $\mathbb{Q}_c^n$). É imediato verificar que a aplicação τ: $\mathrm{Iso}(N) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^n)$ é um monomorfismo de grupo de Lie. Seja $G_N = \mathrm{im}(\tau)$. Como $N \subset \mathbb{Q}_c^n$ e G_N deixa N invariante, pode-se identificar $\mathrm{Iso}(N)$ com G_N. Além disso, G_N age polarmente sobre $\mathbb{Q}_c^n$, pois os espaços normais às órbitas principais de G_N são as imagens por ϕ das fibras horizontais de $V^k \times_\sigma N^{n-k}$. Logo, definem uma distribuição integrável sobre toda parte regular de $\mathbb{Q}_c^n$, que coincide com a imagem de ϕ.

Vale observar que ϕ é τ-equivariante e, portanto, leva as fibras verticais de $V^k \times_\sigma N^{n-k}$ sobre as G_N-órbitas.

Quando a forma espacial $\mathbb{Q}_c^n$ é representada por um modelo padrão, [No] apresenta uma descrição explícita para o subgrupo G_N. A saber, se $\overline{p}$ é um elemento de N fixado, $V = T_{\overline{p}}N$ e W é o fecho afim de N (ambos subespaços de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^{n+1}$, dependendo de c ser zero ou não) vale que,

no caso $\mathbb{Q}_c^n = \mathbb{R}^n$:
se N é totalmente geodésica,

$$G_N = t_{\overline{p}} \circ \{(A, q) \in O(n) \bowtie \mathbb{R}^n : Ap = p, \forall p \in V^\perp, q \in V\} \circ t_{-\overline{p}},$$

e, se N não é totalmente geodésica,

$$G_N = t_{\overline{p}-a/\tilde{c}} \circ \{A \in O(n) : Ap = p, \forall p \in W^\perp\} \circ t_{-\overline{p}+a/\tilde{c}},$$

onde $t_{\overline{p}}$ denota a translação $p \in \mathbb{R}^n \mapsto p + \overline{p} \in \mathbb{R}^n$ e $a = c\overline{p} - H$, sendo H o campo vetorial curvatura média;

no caso $\mathbb{Q}_c^n = \mathbb{S}_c^n$:

$$G_N = \{A \in O(n+1) : Ap = p, \forall p \in W^\perp\};$$

no caso $\mathbb{Q}_c^n = \mathbb{H}_c^n$:

$$G_N = \{A \in O^+(n, 1) : Ap = p, \forall p \in W^\perp\}.$$

3.4 G-variedades que são produtos *warped*

Esta seção relaciona as Seções 2.2, 3.1 e 3.2, apresentando uma decomposição para as G-variedades localmente polares e mostrando que a condição de que as órbitas principais sejam umbílicas é necessária e suficiente para que uma G-variedade localmente polar possa ser decomposta como um produto *warped*.

Em [PS], os autores já haviam feito algo semelhante ao caracterizar localmente uma G-variedade compacta com cohomogeneidade 1 e órbitas principais umbílicas como um produto *warped* de um intervalo aberto por uma órbita. Porém, aqui é feita uma observação a este respeito um pouco mais precisa e geral (ver Proposição 50).

Agora, o primeiro passo é introduzir uma rede canônica para as G-variedades localmente polares. Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo fechado das isometrias de M^n com cohomogeneidade k, sendo $1 \leq k < n$. Considere a decomposição sobre M_r, $TM_r = F_1 \oplus F_2$, com $F_2(p) = T_pG(p), \forall p \in M_r$, (ou seja, F_2 é o subfibrado tangente às órbitas principais de M) e $F_1 = F_2^{\perp}$.

Por definição, F_1 é integrável se, e somente se, G age de modo localmente polar. Então $\mathcal{F} = (F_1, F_2)$ define uma rede 2-rede em M_r se, e somente se, G age de modo localmente polar.

Proposição 49 *Seja M^n uma G-variedade localmente polar completa com cohomogeneidade k, com $1 \leq k < n$, e seja $\mathcal{F}$ a 2-rede definida logo acima. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi\colon \Sigma_r^k \times G(x)^{n-k} &\rightarrow M_r^n \\ (y, g(x)) &\mapsto g(y), \end{aligned}$$

onde Σ é uma seção e $x \in \Sigma_r$, é sobrejetora e um isomorfismo local de redes, com respeito a rede produto de $\Sigma_r^k \times G(x)^{n-k}$, $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}, \mathcal{V}\}$, e a rede $\mathcal{F}$.

Prova: Note que ψ está bem definida:

$$\begin{aligned} (y, g(x)) = (y, h(x)) &\Rightarrow g^{-1}h \in G_x = G_y \ \ (\text{pois } x, y \in \Sigma_r, \text{Corolário 34}) \\ &\Rightarrow \psi(y, g(x)) = g(y) = h(y) = \psi(y, h(x)). \end{aligned}$$

Para mostrar que ψ é diferenciável, considere $f\colon G \times \Sigma_r \rightarrow \Sigma_r \times G(x)$ definida por $f(g, y) = (y, g(x))$. Sabe-se da teoria das variedades que ψ é diferenciável se, e somente se, $\psi \circ f$ é diferenciável, desde que f seja uma submersão sobrejetora.

E de fato, f é uma submersão sobrejetora: f é diferenciável, pois as aplicações coordenadas são claramente diferenciáveis. Também claramente f é sobrejetora. Verificando que $im(\partial_1 f(g,y)) = T_{(y,g(x))}(\{y\} \times G(x))$ e $im(\partial_2 f(g,y)) = T_{(y,g(x))}(\Sigma_r \times \{g(x)\})$, vale que $f_*(g,y)$ é sobrejetora, para todo (g,y).

Como $\psi \circ f$: $(g,y) \mapsto g(y)$ é diferenciável, pois é a restrição da ação à subvariedade $G \times \Sigma_r$, então ψ é diferenciável.

Tem-se que ψ é sobrejetora, pois $im(\psi) = G(\Sigma_r) = M_r$, uma vez que Σ intercepta todas as órbitas.

Mostrar que ψ é um isomorfismo local de redes significa mostrar que $\psi(L_i^{\mathcal{E}}(p)) = L_i^{\mathcal{F}}(\phi(p))$, para todo $p \in \Sigma_r \times G(x)$ e todo $i = 1,2$, onde $L_1^{\mathcal{E}}(p)$ e $L_2^{\mathcal{E}}(p)$ são as folhas de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{V}$, respectivamente, que passam por (p) e $L_i^{\mathcal{F}}(\psi(p))$, com $i = 1,2$, são as folhas de F_i que passam por $\psi(p)$.

Veja que, para todo $p = (y, g(x))$, $L_1^{\mathcal{E}}(p) = \Sigma_r \times \{g(x)\}$, $L_2^{\mathcal{E}}(p) = \{y\} \times G(x)$ e, para todo $z \in M_r$, $L_1^{\mathcal{F}}(z) = \widetilde{\Sigma}$, onde $\widetilde{\Sigma}$ é a seção que contém z, e $L_2^{\mathcal{F}}(z) = G(z)$. Lembre também que, se $\tilde{\Sigma}$ é a seção que passa por z, então $g(\tilde{\Sigma})$ é a seção que passa por $g(z)$. Então, dado $p = (y, g(x))$,

$$\psi(L_1^{\mathcal{E}}(p)) = \psi(\Sigma_r \times \{g(x)\}) = g(\Sigma_r) = L_1^{\mathcal{F}}(g(y)) = L_1^{\mathcal{F}}(\psi(p)),$$

e

$$\psi(L_2^{\mathcal{E}}(p)) = \psi(\{y\} \times G(x)) = G(y) = L_2^{\mathcal{F}}(g(y)) = L_2^{\mathcal{F}}(\psi(p)).$$

∎

Dados $y, z \in \Sigma_r$, a relação $G_y = G_z$ (Corolário 34) garante que a aplicação entre órbitas principais ϕ: $G(y) \to G(z)$, definida por $\phi(g(y)) = g(z)$, é uma bijeção e garante também que a restrição $\psi|_{\{y\}\times G(x)}$ é uma bijeção sobre a órbita $G(y)$, donde um difeomorfismo. Por outro lado, a aplicação $\tilde{\phi}$: $\{y\} \times G(x) \to \{z\} \times G(x)$, definida por $\tilde{\phi}(y, g(x)) = (z, g(x))$, é um difeomorfismo entre fibras verticais. Logo, como $\phi = \psi \circ \tilde{\phi} \circ \psi^{-1}|_{G(y)}$, tem-se que ϕ é um difeomorfismo. Resumindo, numa G-variedade localmente polar, duas órbitas principais são sempre difeomorfas. Mais ainda, decorre imediatamente da definição que a aplicação ϕ: $G(y) \to G(z)$ é G-equivariante.

Observação: Sabe-se mais geralmente que, em uma variedade conexa sob a ação própria de um grupo de Lie, duas órbitas principais são sempre difeomorfas.

Proposição 50 *Seja M^n uma G-variedade localmente polar completa, sendo G conexo, com órbitas principais umbílicas e cohomogeneidade k, onde $1 \leq k < n$. Seja*

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon L^k \times G(x)^{n-k} & \to & M_r^n \\ (y, g(x)) & \mapsto & g(y), \end{array}$$

onde L é uma componente conexa da parte regular de uma seção e $x \in L$. Se $\langle , \rangle_L$ e $\langle , \rangle_{G(x)}$ são, respectivamente, as métricas em L e $G(x)$ induzidas pela inclusão em M^n, existe uma métrica produto warped de $\langle , \rangle_L$ e $\langle , \rangle_{G(x)}$ que torna ψ uma isometria local sobre M_r^n e esta é normalizada com relação a x. Em particular, as órbitas principais de M são homotéticas entre si.

Prova: Pela proposição acima, tem-se que ψ é um isomorfismo local de redes com respeito à rede produto $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}, \mathcal{V}\}$ de $L^k \times G(x)^{n-k}$ e à rede canônica de M_r, $\mathcal{F} = (F_1, F_2)$. Pela Proposição 41, vale que ψ é sobrejetiva.

Pelo Corolário 22, basta mostrar que a rede produto $\mathcal{F}$ é WP para obter que $\psi^*\langle , \rangle$ é uma métrica produto *warped*. Como a ação é localmente polar, F_1 é uma distribuição totalmente geodésica (Proposição 38). Por hipótese, F_2 é uma distribuição umbílica. Pelo Corolário 43, segue que F_2 é de fato esférica.

Seja $\langle , \rangle = \langle , \rangle_1 + \rho^2 \langle , \rangle_2$ a métrica produto *warped* em $L^k \times G(x)^{n-k}$ dada pelo Corolário 22. Como $(L, \langle , \rangle_1)$ é isométrica à fibra horizontal $L \times \{x\}$ e esta é isométrica, via ψ, a $(L, \langle , \rangle_L)$, vale que $\langle , \rangle_1 = \langle , \rangle_L$. Agora, se a métrica produto *warped* está normalizada com relação a x então $(G(x), \langle , \rangle_2)$ é isométrica à fibra vertical $\{x\} \times G(x)$, que por sua vez é isométrica, via ψ, a $(G(x), \langle , \rangle_{G(x)})$, donde $\langle , \rangle_2 = \langle , \rangle_{G(x)}$. Resumindo, a métrica induzida por ψ é um produto *warped* das métricas $\langle , \rangle_L$ e $\langle , \rangle_{G(x)}$ quando normalizada com relação a x.

Dados $y, z \in L$, como $L \times G(x)$ é um produto *warped* conexo, a aplicação $\tilde{\phi}\colon \{y\} \times G(x) \to \{z\} \times G(x)$, definida por $\tilde{\phi}(y, g(x)) = (z, g(x))$, é uma homotetia entre fibras verticais. Pelo comentário após a prova da Proposição 49, a restrição de ψ a uma fibra vertical é um difeomorfismo, donde uma isometria, sobre a imagem. Assim, a aplicação $\phi\colon G(y) \to G(z)$, dada por $\phi = \psi \circ \tilde{\phi} \circ \psi^{-1}|_{G(y)}$, é uma homotetia. Logo, as órbitas principais são homotéticas entre si. ∎

Observação: Como consequência de ψ ser uma isometria local, segue que $\{\mathrm{id}\} \times G$ é um subgrupo de $\mathrm{Iso}(L^k \times_\rho G(x)^{n-k})$ com as órbitas dadas pelas fibras verticais $\{y\} \times_\rho$

$G(x), \forall y \in L$. Além disso, ψ é τ-equivariante se $\tau\colon \{\mathrm{id}\} \times G \to G$ é o isomorfismo de grupo de Lie definido por $\tau((\mathrm{id}, g)) = g, \forall g \in G$.

Existem algumas situações bem conhecidas que garantem que uma G-variedades tem órbitas principais umbílicas, a saber, se a representação de isotropia de G em um elemento regular é irredutível.

Mais precisamente, sejam M^n uma variedade Riemanniana e $G \subset \mathrm{Iso}(M)$ um subgrupo fechado. Dado $x \in M$, um subespaço $V \subset T_xG(x)$ é dito *invariante pela representação de isotropia de G em x* se $g_*(V) \subset V, \forall g \in G_x$. Um subespaço $V \subset T_xG(x)$ é *irredutível pela representação de isotropia de G em x* se V é invariante e não admite subespaço próprio invariante. Diz-se que *a representação de isotropia de G em x é irredutível* se $T_xG(x)$ é irredutível pela representação de isotropia.

Lema 51 *Sejam $x \in M_r$, $\xi \in T_x^\perp G(x)$ e $E \subset T_xG(x)$ o autoespaço associado a um autovalor λ de A_ξ, o operador forma da inclusão $i\colon G(x) \to M$. Então E é invariante pela representação de isotropia de G em x.*

Prova: Como x é regular, ξ determina um campo normal equivariante, $\tilde{\xi}$, e vale, portanto, a relação dada pela fórmula 3.1:

$$A_{\tilde{\xi}(g(x))} = g_* A_\xi g_*^{-1}, \forall g \in G_x.$$

Sejam $v \in E$ e $g \in G_x$. Então,

$$A_\xi g_* v = g_* A_\xi v = \lambda g_* v,$$

donde $g_*(E) \subset E, \forall g \in G_x$. ∎

Lema 52 *Seja $\phi\colon G(x) \to G(y)$ um difeomorfismo G-equivariante com $\phi(x) = y$. Se V é irredutível pela representação de isotropia de G em x então $\phi_* V$ é irredutível pela representação de isotropia de G em y.*

Prova: Observe primeiro que sendo ϕ um difeomorfismo equivariante com $\phi(x) = y$ vale que $G_x = G_y$.

Sejam $v \in V$ e $g \in G_y = G_x$. Então, $g_* v \in V$, pois V é invariante, donde

$$g_*(\phi_* v) = (g \circ \phi)_* v = (\phi \circ g)_* v = \phi_*(g_* v) \in \phi_*(V).$$

Logo, $\phi * (V)$ é invariante pela representação de isotropia em y.

Se $W \subset \phi_*(V)$ é um subespaço invariante então, repetindo o argumento acima com ϕ^{-1}, tem-se que $\phi_*^{-1}(W)$ é um subespaço de V invariante, donde $\phi_*^{-1}(W) = \{0\}$ ou $\phi_*^{-1}(W) = V$, donde W é um subespaço trivial de $\phi_*(V)$. Assim, $\phi_*(V)$ é irredutível. ∎

Proposição 53 *Seja M uma G-variedade localmente polar completa. Se a representação de isotropia de G em um elemento regular é irredutível então toda órbita principal é uma subvariedade umbílica de M.*

Prova: Se a representação de isotropia de G em algum elemento de M_r é irredutível, o Lema 52 garante que a representação de isotropia de G em todo elemento de M_r é irredutível, uma vez que duas órbitas principais de uma G-variedade localmente polar completa são sempre G-equivariantes (ver comentário após prova da Proposição 49).

Seja agora $x \in M_r$ qualquer. Pelo Lema 51, todo autoespaço do operador forma da inclusão i: $G(x) \to M$ em qualquer direção é um subespaço invariante. Como a representação de isotropia de G em x é irredutível, segue que todo autoespaço coincide com $T_xG(x)$. Ou seja, $G(x)$ é uma subvariedade umbílica, qualquer que seja $x \in M_r$. ∎

Assim, se existe $x \in M_r$ tal que $G(x)$, com a métrica induzida, é uma *variedade Riemanniana com representação isotrópica irredutível*, ou seja, se a representação de isotropia de $Iso(G(x))$ em todo ponto de $G(x)$ é irredutível, então toda órbita principal de M é uma subvariedade umbílica.

Como M é completa, a Proposição 47 garante que, dado $x \in M_r$, a ação de G sobre a variedade homogênea $G(x) \approx G/G_x$ é *efetiva*, isto é, se $g \in G$ age sobre $G(x)$ como a aplicação identidade de G então g é a identidade de G. Em particular, se a restrição da representação adjunta de G, Ad_{G_x}, age de modo irredutível sobre o espaço quociente da álgebra de Lie de G pela álgebra de Lie de G_x, $G(x)$ é um tipo especial de variedade homogênea conhecido como *variedade homogênea com representação isotrópica irredutível.* Neste caso, é possível provar que $G(x)$ é uma variedade Riemanniana com representação isotrópica irredutível. Logo, se a variedade Riemanniana completa M possui uma órbita principal sendo uma variedade homogênea com representação isotrópica irredutível então toda órbita princial de M é uma subvariedade umbílica.

Para mais detalhes sobre G-variedades com representação isotrópica irredutível, veja [WZ].

Capítulo 4

G-hipersuperfícies compactas de formas espaciais

Este capítulo e o próximo contêm as provas para os resultados apresentados na introdução.

4.1 A equivariância de hipersuperfícies

Segue agora o primeiro dos principais resultados desta tese, o qual generaliza, em particular, o Teorema de Kobayashi ([Ko]) mencionado na introdução. O resultado é de fato bem mais geral, o suficiente para fornecer outras aplicações, assunto das próximas seções.

Teorema 54 *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta (respectivamente completa) com $n \geq 3$ e $c \leq 0$ (respectivamente $n \geq 4$ e $c > 0$). Então existe um homomorfismo de grupos de Lie $\Phi\colon Iso^0(M) \to Iso^0(\mathbb{Q}_c^{n+1})$, onde $Iso^0(M)$ é a componente conexa da identidade do grupo de isometrias de M, tal que $f \circ g = \Phi(g) \circ f$, $\forall g \in Iso^0(M)$.*

A demonstração é baseada no seguinte Teorema de Sacksteder.

Teorema 55 *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta (respectivamente completa) com $n \geq 3$ e $c \leq 0$ (respectivamente $n \geq 4$ e $c > 0$). Se o conjunto B dos pontos totalmente geodésicos não desconecta M então f é rígida.*

Lembre-se que $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é *rígida* se, para toda imersão isométrica $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, existe $\tau \in \mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^{n+1})$ tal que $\tilde{f} = \tau \circ f$.

A demonstração do Teorema 54 utiliza, mais precisamente, o seguinte fato mais geral contido na prova do Teorema 55. Para enunciá-lo, sejam $f, \tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ imersões isométricas em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ da variedade Riemanniana compacta M^n e seja $\phi\colon T^\perp M_f^n \to T^\perp M_{\tilde{f}}^n$ a isometria de fibrado vetorial entre os fibrados normais de f e $\tilde{f}$ definida antes do Teorema 13. Então

$$\alpha_{\tilde{f}}(x) = \pm\phi(x) \circ \alpha_f(x), \ \forall x \in M^n, \tag{4.1}$$

onde α_f e $\alpha_{\tilde{f}}$ denotam a segunda forma fundamental de f e $\tilde{f}$, respectivamente. A rigidez de f sob a hipótese de que B não desconecta M^n segue então imediatamente do Teorema 13.

Prova do Teorema 54. Dado $g \in Iso^0(M^n)$, a segunda forma fundamental de $f \circ g$, denotada por $\alpha_{f\circ g}$, satisfaz a seguinte relação:

$$\alpha_{f\circ g}(x) = \phi_g(x) \circ \alpha_f(x), \tag{4.2}$$

para todo $x \in M^n$, onde ϕ_g denota a isometria de fibrado vetorial entre $T^\perp M_f^n$ e $T^\perp M_{f\circ g}^n$ definida a partir de f e $f \circ g$. De fato, por um lado tem-se, como consequência da fórmula (1.1),

$$\alpha_{f\circ g}(x)(X, Y) = \alpha_f(g(x))(g_*X, g_*Y), \tag{4.3}$$

quaisquer que sejam $g \in Iso^0(M^n)$, $x \in M^n$ e $X, Y \in T_xM^n$. Em particular, vale que, para todo $x \in M^n$ fixado, a aplicação $\Psi_x\colon Iso^0(M^n) \to \mathrm{Sim}(T_xM^n \times T_xM^n \to T_x^\perp M_f^n)$ no espaço vetorial das aplicações bilineares simétricas de $T_xM^n \times T_xM^n$ em $T_x^\perp M_f^n$ definida por

$$\Psi_x(g)(X, Y) = \phi_g(x)^{-1}(\alpha_{f\circ g}(x)(X, Y)) = \phi_g(x)^{-1}(\alpha_f(gx)(g_*X, g_*Y))$$

para todos $X, Y \in T_xM^n$ e todo $g \in Iso^0(M^n)$, é contínua. Por outro lado, por (4.1), ou $\alpha_{f\circ g}(x) = \phi_g(x) \circ \alpha_f(x)$ ou $\alpha_{f\circ g}(x) = -\phi_g(x) \circ \alpha_f(x)$.

Logo, Ψ_x é uma aplicação contínua definida num conjunto conexo e tomando valores em $\{\alpha_f(x), -\alpha_f(x)\}$, donde é constante. Uma vez que $\Psi_x(\mathrm{id}) = \alpha_f(x)$, a relação (4.2) fica verificada.

Conclui-se daí, junto com o Teorema 13, que para todo $g \in \mathrm{Iso}^0(M^n)$ existe $\tilde{g} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^{n+1})$ tal que $f \circ g = \tilde{g} \circ f$. Segue de argumentos usuais que $g \mapsto \tilde{g}$ define um homomorfismo de grupo de Lie, $\Phi\colon Iso^0(M^n) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^{n+1})$, cuja imagem está em $\mathrm{Iso}^0(\mathbb{Q}_c^{n+1})$, pois é conexa. ∎

Observação: Como $Iso^0(M)$ no Teorema 54 é compacto, a imagem de Φ é um subgrupo compacto de $Iso(\mathbb{Q}_c^{n+1})$. Assim, a imagem de Φ é formada por isometrias lineares (a menos de uma translação da origem) também no caso $\mathbb{Q}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$.

4.2 Hipersuperfícies de rotação

Os exemplos mais simples de hipersuperfícies invariantes por uma ação polar de um subgrupo compacto sobre uma forma espacial são dados pelas hipersuperfícies de rotação.

Lembre que, dada uma subvariedade esférica $N \subset \mathbb{Q}_c^n$, o grupo G_N, isomorfo a $\mathrm{Iso}(N)$, é o subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^n)$ cujos elementos são descritos por

$$g(\phi(x, y)) = \phi(x, g(y)), \forall (x, y) \in V \times_\sigma N,$$

onde ϕ: $V \times_\sigma N \to \mathbb{Q}_c^n$ é a representação de $\mathbb{Q}_c^n$ como produto *warped* determinada por N.

Como foi observado na Seção 3.3, G_N age polarmente sobre $\mathbb{Q}_c^n$, as seções sendo as subvariedades totalmente geodésicas que estendem as imagens por ϕ das fibras horizontais.

Definição: Uma hipersuperfície f: $M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é dita uma *hipersuperfície de rotação* se existe uma subvariedade esférica N de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ (não totalmente geodésica se $c = 0$) tal que $f(M)$ é invariante por G_N. As órbitas de G_N sobre $f(M)$ são chamadas *paralelos* da hipersuperfície. A interseção de uma componente conexa da parte regular de uma seção da ação de G_N com a hipersuperfície é chamada um *meridiano* da hipersuperfície.

No caso hiperbólico, a classe das hipersuperfícies de rotação é mais rica e pode ser dividida em três, de acordo com um dos três tipos de paralelos possíveis. Se os paralelos forem esferas geodésicas, a hipersuperfície de rotação é chamada do tipo *elíptico*; se os paralelos forem espaços hiperbólicos, é chamada do tipo *hiperbólico*; se os paralelos forem horosferas, é chamada do tipo *parabólico*.

Observação: Se a hipersuperfície f: $M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é tal que $f(M)$ é invariante por G_N com N sendo totamente geodésica então f é um cilindro.

Num modelo padrão, a definição acima diz que uma hipersuperfície de rotação é caracterizada por ser invariante pelo subgrupo das isometrias lineares de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ ($O(n+1)$, $O(n+2)$, ou $O^+(n+1, 1)$, dependendo se $c = 0$, $c > 0$, ou $c < 0$) que deixam fixo pontualmente o subespaço W ortogonal ao fecho afim de N (ver seção 3.3). Se C é um meridiano da hipersuperfície, então $f(M) = \overline{G_N(C)}$ e C está contida num subespaço afim que contém W, é ortogonal aos paralelos e tem uma dimensão a mais que W. Assim, a definição de hipersuperfície de rotação apresentada, admitindo meridianos com dimensão maior do que ou igual a 1, coincide com a definição introduzida em [dCD] quando os meridianos tem dimensão 1 e naturalmente a generaliza.

Uma hipersuperfície de rotação $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ pode ser vista como um produto *warped* de imersões. Para isto, seja N o paralelo de f que contém um ponto $f(p)$ e seja $\phi\colon V \times_\sigma N \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ a representação de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ como produto *warped* determinada por N e $f(p)$. Seja $g\colon L \to V$ uma hipersuperfície tal que $g(L)$ coincide com um meridiano de f. Então $\phi \circ (g \times \mathrm{id})\colon L \times_\sigma N \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é uma parametrização de um aberto denso de $f(M)$ como um produto *warped* de imersões. Recíprocamente, vale a seguinte consequência do Teorema de Nölker.

Proposição 56 *Seja $L^k \times_\rho N^{n-k}$ um produto warped conexo com N completa e suponha que a segunda forma fundamental da imersão isométrica $f\colon L^k \times_\rho N^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ seja adaptada à rede produto de $L \times N$. Se, para algum $x_0 \in L^k$, a subvariedade $f(\{x_0\} \times_\rho N)$ é uma subvariedade esférica de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ então f é uma hipersuperfície de rotação ou um cilindro.*

Prova: Sem perda de generalidade, suponha que a métrica produto *warped* de $L^k \times_\rho N^{n-k}$ esteja normalizada com relação a x_0. Por hipótese, o fecho esférico da imersão isométrica $f_2\colon y \in N \mapsto f(x_0, y) \in \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é uma subvariedade $(n-k)$-dimensional $\tilde{N}$. Mais ainda, a imagem de f_2 coincide com $\tilde{N}$, pois é completa. Assim, f_2 pode ser vista como a isometria local sobrejetora, $f_2\colon N^{n-k} \to \tilde{N}^{n-k}$.

Seja $\phi\colon V^{k+1} \times_\sigma \tilde{N}^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ uma representação como produto *warped* determinada por $\tilde{N}$ e considere a decomposição como o produto *warped* de imersões $f = \phi \circ (f_1 \times f_2)$ dado pelo Teorema 26. Dado $g \in G_{\tilde{N}}$, tem-se

$$g(f(x,y)) = g(\phi(f_1(x), f_2(y))) = \phi(f_1(x), g(f_2(y))) = \phi(f_1(x), f_2(\tilde{y})) = f(x, \tilde{y}),$$

pois, $g(f_2(y)) \in \tilde{N}$ e, sendo f_2 sobrejetora, existe $\tilde{y} \in N$ tal que $f_2(\tilde{y}) = g(f_2(y))$.

Logo $f(L^k \times_\rho N^{n-k})$ é invariante por $G_{\tilde{N}}$. ∎

4.3 Ações localmente polares sobre hipersuperfícies Euclidianas

A primeira consequência do Teorema 54 afirma que toda ação isométrica localmente polar de um grupo de Lie compacto sobre uma hipersuperfície compacta de dimensão $n \geq 3$ do espaço Euclidiano é induzida por uma ação polar de um subgrupo de $SO(n+1)$ que deixa a hipersuperfície invariante.

Teorema 57 *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície compacta e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo fechado e conexo que age de modo localmente polar sobre M^n com cohomogeneidade k. Então existe uma representação ortogonal $\Psi\colon G \to SO(n+1)$ tal que f é Ψ-equivariante e $\Psi(G)$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ com cohomogeneidade $k+1$.*

Prova: Sabe-se do Teorema 54 que existe uma representação ortogonal $\Phi\colon \mathrm{Iso}^0(M^n) \to SO(n+1)$ tal que f é Φ-equivariante. Como G é conexo, tem-se que $G \subset \mathrm{Iso}^o(M^n)$. Considere $\Psi = \Phi|_G$ e $\tilde{G} = \Psi(G)$. A estratégia para provar que $\tilde{G}$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ com cohomogeneidade $k+1$ é usar o Teorema 45.

Primeiro, é preciso notar que existe uma órbita principal $G(p)$ tal que o vetor posição f não é tangente a $f(M)$ em nenhum ponto ao longo de $G(p)$, ou seja, $f(g(p)) \notin f_* T_{g(p)} M$, para todo $g \in G$. A fim de provar tal afirmação, a seguinte observação torna-se necessária.

Lema 58 *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Suponha que o vetor posição seja tangente a $f(M^n)$ em um aberto $U \subset M^n$. Então o índice de nulidade relativa de f é positivo em todo ponto de U.*

Prova: Seja Z campo vetorial em U tal que $f_*(p)Z(p) = f(p)$, para todo $p \in U$, e seja η um campo vetorial unitário local, normal a f. A diferenciação de $\langle \eta, f \rangle = 0$ fornece $\langle AX, Z \rangle = 0$, para todo campo vetorial tangente X em U, onde A é o operador forma de f com respeito a η. Daí, $AZ = 0$. ∎

De volta à prova da afirmação, como M^n é uma variedade Riemanniana compacta imersa isometricamente no espaço Euclidiano como uma hipersuperfície, existe um aberto $V \subset M^n$ onde as curvaturas seccionais de M^n são estritamente positivas. Em particular, o índice de nulidade relativa é nulo em todo V. Se o vetor posição fosse tangente a $f(M^n)$ em todo ponto regular de V, também o seria em todo V, uma vez que o conjunto dos pontos regulares é denso em M. Mas isto entra em contradição com o lema acima, o que mostra que existe um ponto regular p tal que $f(p) \notin f_* T_p M$. Como f é Ψ-equivariante, tem-se de fato que $f(g(p)) \notin f_* T_{g(p)} M$, para todo $g \in G$, e a afirmação está provada.

Seja então $G(p)$ uma órbita principal tal que o vetor posição f não é tangente a $f(M)$ em nenhum ponto de $G(p)$. Será provado que $f|_{G(p)}$ é uma subvariedade isoparamétrica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A razão para se escolher uma órbita como $G(p)$ é que o espaço normal de $f|_{G(p)}$ pode ser decomposto como

$$T^\perp f|_{G(p)} = T^\perp_{f|_{G(p)}} G(p) = \text{ger}\{f\} \oplus f_* T^\perp G(p).$$

(esta decomposição pode não ser ortogonal.)

A primeira conseqûencia que segue daí é que o campo vetor posição e os campos vetoriais $f_*\xi$, com $\xi \in \Gamma(T^\perp G(p))$ sendo G-equivariante, são paralelos com relação à conexão normal de $f|_{G(p)}$. Que o vetor posição forma um campo vetorial normal paralelo é imediato, pois

$$(\tilde{\nabla}_X f)_{T^\perp f|_{G(p)}} = (f_* X)_{T^\perp f|_{G(p)}} = 0, \ \forall X \in TG(p).$$

Dado um campo G-equivariante, $\xi \in \Gamma(T^\perp G(p))$, seja $\eta = f_*\xi$. Então, identificando $\Psi(g)$ com sua derivada em qualquer ponto, pois é linear, vale que

$$\eta(g(p)) = f_*(g(p))\xi(g(p)) = f_*(g(p)) g_*(p)\xi(p) = (f \circ g)_*(p)\xi(p) = \Psi(g)\eta(p),$$

para todo $g \in G$. Em particular,

$$\langle \eta(g(p)), f(g(p)) \rangle = \langle \Psi(g)\eta(p), \Psi(g) f(p) \rangle = \langle \eta(p), f(p) \rangle,$$

para todo $g \in G$. Ou seja, $\langle \eta, f \rangle$ é constante ao longo de $G(p)$. Assim,

$$X\langle \eta, f \rangle = 0, \forall X \in TG(p),$$

e, daí,

$$\langle \tilde{\nabla}_X \eta, f \rangle = X\langle \eta, f \rangle - \langle \xi, X \rangle = 0, \tag{4.4}$$

onde $\tilde{\nabla}$ denota a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Por outro lado, como G age de modo localmente polar sobre M^n, tem-se que ξ é paralelo na conexão normal de $G(p)$ em M^n. Portanto,

$$(\tilde{\nabla}_X \eta)_{f_* T^\perp G(p)} = f_*((\nabla_X \xi)_{T^\perp G(p)}) = 0, \tag{4.5}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M^n. Segue de (4.4) e (4.5) e da decomposição de $T^\perp f|_{G(p)}$ que η é paralelo com relação à conexão normal de $f|_{G(p)}$.

Segue imediatamente do paralelismo obtido que $f|_{G(p)}$ tem fibrado normal plano. Agora, seja $\tilde{\xi} \in \Gamma(T^\perp f|_{G(p)})$ um campo vetorial paralelo ao longo de uma curva $c(t)$ de $G(p)$. Se $q = c(t_0)$, para algum t_0, sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\xi_q \in T_q^\perp G(p)$ tais que $\tilde{\xi}(q) = af(q) + f_*\xi_q$. Se $\xi \in \Gamma(T^\perp G(p))$ é o campo vetorial normal G-equivariante determinado por ξ_q, então, como foi visto, $af + f_*\xi$ é um campo vetorial paralelo do fibrado normal de $f|_{G(p)}$ e, portanto, deve coincidir com $\tilde{\xi}$. Em particular,

$$A_{\tilde{\xi}}^{f|_{G(p)}} = -a\mathrm{id} + A_{f_*\xi}^{f|_{G(p)}}$$

ao longo de $c(t)$. Mas, $A_{f_*\xi}^{f|_{G(p)}}$ coincide com o operador forma A_ξ, referente à inclusão de $G(p)$ como subvariedade de M (consequência direta da fórmula (1.1)). Como ξ é equivariante ao longo da órbita principal $G(p)$, A_ξ tem autovalores constantes. Logo, as curvaturas principais de $A_{\tilde{\xi}}$ ao longo de $c(t)$ são constantes.

Demonstrou-se, então, que $f|_{G(p)}$ é uma imersão isoparamétrica, ou seja, $\tilde{G}$ tem $\tilde{G}(f(p)) = f(G(p))$ como uma órbita isoparamétrica.

Pelo Teorema 45 e a observação que o segue, a fim de concluir que $\tilde{G}$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ e que $\tilde{G}(f(p))$ é uma órbita principal, donde $\tilde{G}$ age com cohomogeneidade $k+1$, basta provar que se $\tilde{G}(f(p))$ não é substancial então $\tilde{G}$ age trivialmente sobre o subespaço vetorial $H^\perp$, complemento ortogonal do subespaço linear H de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $H + f(p)$ é o fecho afim de $\tilde{G}(f(p))$.

Dado $v \in H^\perp \subset T_p^\perp f|_{G(p)}$, pode-se escrever $v = af(p) + f_*\xi_p$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\xi_p \in T_p^\perp Gp$. Seja $\xi \in \Gamma(T^\perp G(p))$ o campo vetorial normal G-equivariante determinado por ξ_p e defina $\eta \in \Gamma(T^\perp f|_{G(p)})$ por $\eta = af + f_*\xi$. Como já foi visto, η é um campo paralelo com relação a conexão normal de $f|_{G(p)}$ e $A_\eta^{f|_{G(p)}}$ tem autovalores constantes. Além disso, como $\tilde{G}(f(p)) \subset H$, tem-se $A_v^{f|_{G(p)}} = 0$. Ou seja, $A_\eta^{f|_{G(p)}} = 0$. Logo,

$$\tilde{\nabla}_X \eta = -A_\eta^{f|_{G(p)}} X + \nabla_X^\perp \eta = 0, \forall X \in TG(p).$$

Assim, η é constante ao longo de $G(p)$, igual a v, donde,

$$\Psi(g)(v) = \Psi(g)(\eta(p)) = \eta(g(p)) = v.$$

Ou seja, $\Phi(G)$ deixa v fixo, qualquer que seja $v \in H^\perp$. ∎

Um corolário do Teorema 57 é a generalização de um teorema devido a Podestà e Spiro ([PS]) ao eliminar a restrição da ação ter cohomogeneidade 1.

Corolário 59 *Sob as hipóteses do Teorema 57, se as G-órbitas principais são umbílicas em M então f é uma hipersuperfície de rotação. Mais ainda, G é isomorfo a um dos subgrupos fechados de $SO(n-k+1)$ que agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^{n-k}$.*

Prova: Seja $\Psi\colon G \to SO(n+1)$ a representação ortogonal dada pelo Teorema 57, donde $\tilde{G} = \Psi(G)$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ com cohomogeneidade $k+1$ e f é Ψ-equivariante. Seja $G(p)$ uma órbita principal de G tal que o vetor posição de f não é tangente a $f(M^n)$ ao longo de $G(p)$ (do mesmo modo que na demonstração do Teorema 57). Então, dado $\eta \in T^\perp f|_{G(p)}$, existem $a \in \mathbb{R}$ e $\xi \in T^\perp G(p)$ tais que $\eta = af + f_*\xi$. Como $A_f^{f|_{G(p)}} = -\mathrm{id}$ e $A_{f_*\xi}^{f|_{G(p)}} = A_\xi$ é múltiplo da identidade, por hipótese, segue que $A_\eta^{f|_{G(p)}}$ é múltiplo da identidade, qualquer que seja $\eta \in T^\perp f|_{G(p)}$. Logo, $f|_{G(p)}$ é uma imersão umbílica, donde $\tilde{G}(f(p)) = f(G(p))$ é uma esfera redonda, pois é compacta.

Além disso, como é uma ação polar, vale que $\tilde{G}$ deixa fixo pontualmente o subespaço $H^\perp$, ortogonal ao subespaço linear H tal que $H + f(p)$ é o fecho afim de $\tilde{G}(f(p))$. De fato, dado $v \in H^\perp \subset T^\perp\tilde{G}(f(p))$, seja $\tilde{v}$ o campo vetorial normal $\tilde{G}$-equivariante determinado por v. Com relação à inclusão de $\tilde{G}(f(p))$ como subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$, pela equivariância de $\tilde{v}$, tem-se

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{v} = -A_{\tilde{v}}X + \nabla_X^\perp\tilde{v} = 0,$$

para todo $X \in T\tilde{G}(f(p))$ ($\tilde{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{R}^{n+1}$). Para a segunda igualdade, o primeiro termo é nulo pois $A_v = 0$ e $A_{\tilde{v}}$ tem autovalores constantes ao longo de uma órbita principal, enquanto o segundo se anula em função da ação ser polar. Assim, $\tilde{v}$ é constante ao longo de $\tilde{G}(f(p))$ igual a v, para $v \in H^\perp$ arbitrário. Ou seja, $\tilde{G}$ deixa $H^\perp$ fixo pontualmente.

Logo, f é uma hipersuperfície de rotação.

Se $k > n-1$ então $f|_{G(x)}\colon G(x)^{n-k} \to \tilde{G}(f(x))^{n-k}$ é um mergulho. Pelo Corolário 48, Ψ é injetiva. ∎

O próximo corolário pode ser visto também como uma generalização do Corolário 46.

Corolário 60 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ e G um subgrupo conexo e fechado de $Iso(M^n)$ agindo de modo localmente polar sobre M^n. Se G possui uma órbita excepcional, então M^n não pode ser isometricamente imersa num espaço Euclidiano como uma hipersuperfície.*

Prova: Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta sob a ação localmente polar de um subgrupo fechado e conexo G de $\mathrm{Iso}(M)$. Seja $\Psi\colon G \to SO(n{+}1)$ a representação ortogonal dada pelo Teorema 57, donde $\tilde{G} = \Psi(G)$ age polarmente sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ com cohomogeneidade $k+1$ e f é Ψ-equivariante. Seja $G(p)$ uma órbita não singular. Então, $G(p)$ tem dimensão maximal dentre todas as G-órbitas, donde $\tilde{G}(f(p))$ tem dimensão maximal dentre todas as $\tilde{G}$-órbitas. Pelo Corolário 46, $\tilde{G}(f(p))$ é uma órbita principal.

Sejam $g \in G_p$ e $\xi \in T_p^{\perp}Gp$. Se $\tilde{g} = \Psi(g)$, então $\tilde{g} \in \tilde{G}_{f(p)}$ e $f_*(p)\xi \in T_{f(p)}^{\perp}\tilde{G}(f(p))$, donde

$$f_*(p)\xi = \tilde{g}_* f_*(p)\xi = (\tilde{g} \circ f)_*(p)\xi = (f \circ g)_*(p)\xi = f_*(gp)g_*\xi = f_*(p)g_*\xi.$$

A primeira igualdade é garantida pelo fato de $\tilde{G}(f(p))$ ser uma órbita principal. Como $f_*(p)$ é injetiva, segue que $g_*\xi = \xi$. Logo, $G(p)$ é regular (Teorema 33). ∎

Observação: Nesta linha de trabalho, foi possível obter outras condições que garantem quando uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana compacta M^n sob a ação localmente polar de um subgrupo fechado conexo de $Iso(M^n)$ é uma hipersuperfície de rotação (ver [MT]).

4.4 Hipersuperfícies de rotação de espaços hiperbólicos e esféricos

Apesar de não valer uma versão do Teorema 57 para ambientes não planares, o Teorema 54 pode ainda ser usado para se obter uma extensão do Corolário 59.

Teorema 61 *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, com $n \geq 3$ se $c < 0$ e $n \geq 4$ se $c > 0$, uma hipersuperfície compacta. Suponha que exista um subgrupo fechado e conexo $G \subset Iso(M^n)$ agindo de modo localmente polar sobre M com cohomogeneidade k satisfazendo $1 \leq k \leq n-2$ e com órbitas principais umbílicas em M. Então f é uma hipersuperfície de rotação (do tipo elíptico se $c < 0$) e G é isomorfo a um dos subgrupos fechados de $SO(n-k+1)$ que agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^{n-k}$.*

Prova: Seja $\tilde{G} = \Phi(G)$, onde $\Phi\colon \mathrm{Iso}^0(M^n) \to \mathrm{Iso}^0(\mathbb{Q}_c^{n+1})$ é a representação dada pelo Teorema 54 tal que f é Φ-equivariante.

Se M^n tem curvatura seccional constante igual a c, como f é uma hipersuperfície compacta então $c > 0$ e f é totalmente geodésica (Proposição 11). Em particular, f é uma hipersuperfície de rotação. Assim, pode-se supor que a curvatura seccional de M^n não seja constante.

Como M^n é uma G-variedade localmente polar completa com G conexo e órbitas principais umbílicas, seja então $\psi\colon L^k \times_\rho G(x)^{n-k} \to M_r^n$ a isometria local sobre M_r^n dada pela Proposição 50. Defina

$$\overline{f} = f \circ \psi\colon\ L^k \times_\rho G(x)^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}.$$

Seja $U = U_1^k \times_\rho G(x)^{n-k} \subset L^k \times_\rho G(x)^{n-k}$ um aberto sem pontos onde a curvatura seccional é constante igual a c. Sem perda de generalidade, suponha $x \in U$. Pela Proposição 27, $\overline{f}|_U$ tem a segunda forma fundamental adaptada à rede produto de U. Seja $f_2\colon G(x)^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ definida por $f_2(g(x)) = \overline{f}(x, g(x)) = f(g(x)), \forall g(x) \in G(x)$, e seja $N^{n-k'+1} \subset \mathbb{Q}_c^{n+1}$ seu fecho esférico; f_2 pode ser vista como uma aplicação em $N^{n-k'+1}$. Se $\phi\colon V^{k'} \times_\sigma N^{n-k'+1} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é a representação como produto *warped* determinada por N e $f(x)$, então, lembrando que $\rho(x) = 1$ (consequência da Proposição 50), o Teorema 26 garante que

$$\rho = \sigma \circ f_1 \quad \text{e} \quad \overline{f}|_U = \phi \circ (f_1 \times f_2)|_U,$$

onde $f_1\colon L^k \to V^{k'}$ é definida por $f_1(y) = \overline{f}(y, x) = f(y)$. Em particular, vale que $k' = k$ ou $k' = k+1$. Seja G_N o subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{Q}_c^{n+1})$ que é isomorfo a $\mathrm{Iso}(N)$ e cujos elementos são descritos por

$$g(\phi(a, b)) = \phi(a, g(b)),\ \forall (a, b) \in V^{k'} \times_\sigma N^{n-k'+1},\ \forall g \in G_N.$$

Segue da fatoração de $\overline{f}|_U$ que, para todo $\tilde{g} = \Phi(g)$,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\phi(f_1(y), f_2(x))) &= \tilde{g}(\overline{f}(y, x)) = \tilde{g}(f(y)) = f(g(y)) = \overline{f}(y, g(x)) \\
&= \phi(f_1(y), f_2(g(x))) = \phi(f_1(y), \tilde{g}(f_2(x))),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{g}(\phi(a, b)) = \phi(a, \tilde{g}(b)),\ \forall (a, b) \in f_1(U_1) \times_\sigma f_2(G(x)), \forall \tilde{g} \in \tilde{G}. \tag{4.6}$$

A prova segue em função das duas únicas possibilidades: $k' = k$ ou $k' = k+1$. Suponha $k' = k + 1$. Então $\tilde{G}(f(x)) = f_2(G(x)) = N$, pois $\tilde{G}(f(x))$ é completa. Portanto, dado $\tilde{g} \in \tilde{G}$, tem-se $\tilde{g}(N) \subset N$, isto é, existe $h \in G_N$ tal que $\tilde{g}|_{G_N} = h|_{G_N}$. Pela igualdade (4.6), vale que $\tilde{g}|_{f(G(U_1))} = h|_{f(G(U_1))}$. Como $f(G(U_1)) = \overline{f}(U)$ é uma hipersuperfície substancial de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, pois sua curvatura seccional é diferente da constante c, então vale a igualdade entre isometrias, donde $\tilde{g} \in G_N$. Logo, $\tilde{G} \subset G_N$.

Para concluir que $f(M)$ é invariante por G_N basta verificar que as órbitas de G_N e de $\tilde{G}$ em $f(M_r)$ coincidem, o que é imediato pois uma está contida na outra e são variedades de mesma dimensão, $n-k$. Assim, no caso $k' = k+1$, f é uma hipersuperfície de rotação.

Suponha agora $k' = k$. Neste caso, ainda vale $\tilde{G} \subset G_N$. De fato, seja $\tilde{g} = \Phi(g) \in \tilde{G}$. Fixado $p = f(x)$, tem-se $p \in N$ e $\tilde{g}(p) = f_2(g(x)) \in N$. Como f_1 é uma isometria sobre a imagem $f_1(U_1^k) \subset V^k$, a igualdade (4.6) garante que $\tilde{g}_*(p)T_p^\perp N = T_{\tilde{g}(p)}^\perp N$. Em particular, $\tilde{g}_*(p)|_{T_pN}$ é uma isometria linear de T_pN sobre $T_{\tilde{g}(p)}N$.

Seja $h \in G_N$ tal que $h(p) = \tilde{g}(p)$ e $h_*(p)|_{T_pN} = \tilde{g}_*(p)|_{T_pN}$ (tal isometria existe pois G_N é isomorfo a $\mathrm{Iso}(N)$ e N é uma forma espacial). Pela descrição de G_N e por (4.6), fica claro que $h_*(p)|_{T_p^\perp N} = \tilde{g}_*(p)|_{T_p^\perp N}$. Assim, $h(p) = \tilde{g}(p)$ e $h_*(p) = \tilde{g}_*(p)$, isto é, $\tilde{g} = h \in G_N$.

Logo, $\tilde{G} \subset G_N$. Lembre-se agora que uma órbita principal de G_N tem dimensão $n-k+1$. Se existe $q \in \mathbb{Q}_c^{n+1}$ tal que $\tilde{G}(q)$ tem dimensão $n-k+1$, como $\tilde{G}(q) \subset G_N(q)$, então vale mais geralmente que $\tilde{G}(q) = G_N(q)$, para todo $q \in \mathbb{Q}_c^{n+1}$, o que contraria o fato de $\tilde{G}(q)$ ter dimensão $n-k$ quando $q \in \mathrm{im}(\overline{f})$. Assim, uma $\tilde{G}$-órbita principal tem dimensão $n-k$ e, portanto, toda $\tilde{G}$-órbita principal é uma hipersuperfície de uma G_N-órbita. Em particular, dado um elemento regular de $\tilde{G}$, q, tem-se $T_q^\perp \tilde{G}(q) = T_q g(V) \oplus \mathrm{ger}\{\zeta\}$, onde $g \in \tilde{G}$ é tal que $q \in g(V)$ e ζ é um vetor tangente a $G_N(q)$. Como $g(V)$ é totalmente geodésica, segue que a distribuição ortogonal às $\tilde{G}$-órbitas principais é integrável, pois se $X, Y \in T_q g(V)$, então $[X, Y] \in T_q g(V)$, $[\zeta, \zeta] = 0$ e

$$[X, \zeta] = -\langle \eta, X\rangle \zeta + \langle \eta, X\rangle \zeta = 0 \quad \text{(ver fórmula (2.1))}.$$

Então, $\tilde{G}$ age polarmente. A partir daí é fácil verificar que a segunda forma de $\overline{f}$ é adaptada à rede produto de $L^k \times_\rho G(x)^{n-k}$. De fato, sejam $X, \xi \in T_q(L^k \times_\rho G(x)_{\tilde{c}}^{n-k})$ tangentes a fibra vertical e horizontal, respectivamente, em um ponto q. Se $\tilde{\xi}$ é o campo vetorial normal $\tilde{G}$-equivariante determinado por $\overline{f}_*\xi$, como $\tilde{G}$ age polarmente, tem-se

$$(\tilde{\nabla}_{\overline{f}*X}\tilde{\xi})_{T^\perp \tilde{G}(\overline{f}(q))} = 0.$$

($\tilde{\nabla}$ é a conexão em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$.) Pela equivariância de f, $\tilde{\xi}$ é um campo tangente a $\overline{f}$ e, portanto, a equação acima fornece $\alpha_{\overline{f}}(X, \xi) = 0$.

Logo, $\overline{f}$ é um produto *warped* de imersões. Como neste caso ($k' = k$), a imagem de $f_2 : g(x) \mapsto f(g(x))$ não coincide com seu fecho esférico, N, então $\overline{f}$ é um cone, o que é uma contradição com o fato de $\text{im}(\overline{f})$ ser um aberto denso de uma hipersuperfície f compacta.

Assim o único caso possível é $k' = k + 1$, donde f é uma hipersuperfície de rotação.

Como $f|_{G(x)}\colon G(x)^{n-k} \to \tilde{G}(f(x))^{n-k}$ deve ser um mergulho, o Corolário 48 garante que $\Phi|_G$ é injetiva. ∎

4.5 Hipersuperfícies produto *warped*

O Corolário 59 será agora utilizado para obter uma versão global do Corolário 28.

Teorema 62 *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, com $n \geq 3$, uma hipersuperfície compacta. Se existe uma isometria $\psi\colon L^k \times_\rho N^{n-k} \to U^n$ de um produto warped sobre um aberto denso $U \subset M^n$ (em particular, se M^n é isométrica a um produto warped $L^k \times_\rho N^{n-k}$), sendo N^{n-k} completa e L^k conexa, então f é uma hipersuperfície de rotação.*

Prova: Como $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta, existe um aberto W de M^n no qual as curvaturas seccionais de M^n são estritamente positivas. Uma vez que a imagem U da isometria ψ é aberta e densa em M^n, $W \cap U$ é um aberto não vazio. Seja $L_1 \times N_1$ um produto de abertos conexos de L e N, respectivamente, cuja imagem por ψ está contida em $W \cap U$. Então $L_1 \times_\rho N_1$ tem curvatura seccional estritamente positiva.

Para um $x \in L_1$ fixado, escolha um vetor unitário $X_x \in T_xL_1$. Para cada $y \in N$, seja $X_{(x,y)}$ o levantamento horizontal em $T_{(x,y)}(L \times N)$ de X_x. Então a curvatura seccional de $L \times_\rho N$ na direção de um plano σ gerado por $X_{(x,y)}$ e qualquer vetor vertical unitário $Z_{(x,y)} \in \mathcal{V}(x,y)$ é dada por (ver fórmula (2.4))

$$K(\sigma) = -\operatorname{Hess}\rho(x)(X_x, X_x)/\rho(x). \tag{4.7}$$

Observe que $K(\sigma)$ independe de y ou do vetor $Z_{(x,y)}$. Um vez que $K > 0$ se $y \in N_1$, então o mesmo vale para qualquer $y \in N$. Em particular, $L_1 \times_\rho N$ não tem pontos planos.

Se $n - k \geq 2$, segue do Corolário 28 que $f \circ \psi$ restrita a $L_1 \times_\rho N$ é uma hipersuperfície de rotação ou um cone. Como a curvatura seccional em $L_1 \times N_1$ é estritamente positiva, então $f(\psi(L_1 \times N_1))$ é um aberto estritamente convexo. Assim, a restrição tem de ser uma hipersuperfície de rotação. Em particular, $f \circ \psi$ imerge uma folha $\{x\} \times N$, $x \in L_1$, isometricamente sobre uma esfera redonda $(n-k)$-dimensional, donde N é isométrica a uma esfera.

Portanto (se $n-k=1$ a afirmação é imediata), $\mathrm{Iso}^0(N)$ age transitivamente sobre N e cada $g \in \mathrm{Iso}^0(N)$ induz uma isometria $\overline{g}$ de $L \times_\rho N$ definida por

$$\overline{g}(x,y) = (x, g(y)), \forall (x,y) \in L \times_\rho N.$$

Como a aplicação $g \in \mathrm{Iso}^0(N) \mapsto \overline{g} \in \mathrm{Iso}(L \times_\rho N)$ é claramente contínua, sua imagem $\overline{G}$ é um subgrupo fechado conexo de $\mathrm{Iso}(L \times_\rho N)$. Para cada $\overline{g} \in \overline{G}$, a isometria induzida $\psi \circ \overline{g} \circ \psi^{-1}$ sobre U se estende de modo único a uma isometria de M^n. As órbitas da ação induzida de $\overline{G}$ sobre U são as imagens por ψ das folhas $\{x\} \times N$, $x \in L$, e, portanto, são umbílicas em M^n. Mais ainda, os espaços normais às órbitas principais de $\overline{G}$ sobre U são as imagens por ψ das fibras horizontais de $L \times_\rho N$. Logo, definem uma distribuição integrável sobre U, donde em toda parte regular de M^n. Assim, a ação de $\overline{G}$ sobre M^n é localmente polar e com órbitas principais umbílicas. Pelo Corolário 59, segue que f é uma hipersuperfície de rotação. ∎

Capítulo 5

G-hipersuperfícies completas de formas espaciais

Neste capítulo serão apresentadas extensões do Corolário 59 e do Teorema 61 para hipersuperfícies completas não compactas. Serão considerados separadamente os casos em que o grupo G é compacto e fechado não-compacto.

5.1 O caso G compacto

Teorema 63 *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, com $n \geq 4$, uma hipersuperfície completa e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo compacto e conexo agindo de modo localmente polar sobre M com órbitas principais umbílicas e cohomogeneidade k satisfazendo $1 \leq k \leq n-3$ ($\leq n-2$ se $c > 0$). Se $c \leq 0$, suponha que as componentes conexas do conjunto dos pontos nos quais M^n tem curvatura seccional constante c sejam limitadas. Então f é uma hipersuperfície de rotação (do tipo elíptico se $c < 0$) e G é isomorfo a um dos subgrupos fechados de $SO(n-k+1)$ que agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^{n-k}$.*

Antes de começar a prova deste resultado é conveniente introduzir a seguinte nomenclatura. Uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante e isométrica a um produto *warped* da forma $(\alpha, \beta) \times_\rho \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^n$, com ρ não constante, será chamada um *anel*. Um anel é sempre isométrico a um aberto de uma forma espacial. Se $A = (\alpha, \beta) \times_\rho \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^n \subset \mathbb{Q}_c^{n+1}$ é um anel em uma forma espacial com curvatura não positiva e N^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ tangente à subvariedade umbílica externa de A, correspondente à fibra $\{\beta\} \times \mathbb{Q}_c^n$, então é fácil verificar que N^n não intercepta a região interna do anel.

Prova do Teorema 63. Se $c > 0$, a prova é exatamente a mesma que a do Teorema 61, uma vez que, neste caso, o Teorema 54 ainda pode ser utilizado se M é completa. Suponha agora que $c \leq 0$ e considere a imersão

$$\overline{f} = f \circ \psi\colon\ L^k \times_\rho G(x)^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1},$$

onde $\psi\colon L^k \times_\rho G(x)^{n-k} \to M_r^n$ é a isometria local sobre M_r^n dada pela Proposição 50, definida por $\psi(y, g(x)) = g(y)$. Como M_r é um aberto denso de M^n, para mostrar que f é uma hipersuperfície de rotação (do tipo elíptico, se $c < 0$), basta mostrar o mesmo para $\overline{f}$. O conjunto A dos pontos nos quais $L \times_\rho G(x)$ não tem curvatura seccional constante igual a c pode ser expresso como $A = A_1 \times_\rho G(x)$, onde

$$A_1 = \{y \in L : M \text{ não tem curvatura seccional constante c em } y\}.$$

Suponha inicialmente que o subconjunto $B = (L \times_\rho G(x)) \backslash A$ tenha interior vazio. Pela Proposição 27, a segunda forma fundamental de $\overline{f}$ é adaptada à rede produto de $L^k \times G(x)^{n-k}$, donde $\overline{f}$ é uma hipersuperfície de rotação, a menos que a imersão $f_2\colon G(x)^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ definida por $f_2(g(x)) = \overline{f}(x, g(x))$, para todo $g \in G$, não seja umbílica (Proposição 56). Se este for o caso, o fecho esférico de f_2, N, é uma subvariedade esférica $(n - k + 1)$-dimensional e f_2 pode ser vista como uma hipersuperfície $f_2\colon G(x)^{n-k} \to N^{n-k+1}$. Em particular, $\overline{f}$ e, portanto, f, é um cone. Como não existem cones completos sobre hipersuperfícies de esferas em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, a curvatura seccional de N deve ser uma constante $\tilde{c} \leq 0$. Então, como $G(x)$ é compacta, o Teorema 14 garante que f_2 é umbílica, o que é absurdo. Logo, quando o interior de B é vazio, f é uma hipersuperfície de rotação.

Suponha agora que o interior de B seja diferente de vazio, donde $G(x)$ é uma variedade com curvatura seccional constante (Corolário 17) e escreva-o como $B = B_1 \times_\rho G(x)$, onde

$$B_1 = \{y \in L : M \text{ tem curvatura seccional constante c em } y\}.$$

Como consequência, para todo aberto conexo $U = U_1 \times G(x) \subset A$, vale que $\overline{f}|_U$ é uma hipersuperfície de rotação. De fato, suponha o contrário. Pela liberdade de escolha de x na Proposição 50, pode-se supor que x pertença a U_1. Como $\overline{f}|_U$ tem a segunda forma fundamental adaptada à rede produto de U (Proposição 27) e $\rho(x) = 1$ (Proposição 50), seja $\overline{f}|_U = \phi \circ (f_1 \times f_2)$ a decomposição dada pelo Teorema 26. Pela Proposição 56, f_2 pode ser vista como uma hipersuperfície da forma f_2: $G(x)^{n-k} \to N^{n-k+1}$ que não é umbílica. Assim, pela Proposição 10, f_2 tem nulidade maior do que ou igual a $n - k - 1$. Com isso, como f_1 é uma isometria local, a Proposição 25 garante que $\nu_{\overline{f}} \geq n - 1$ e, portanto, U tem curvatura seccional igual à do ambiente, o que é um absurdo. Logo, $\overline{f}|_U$ é uma hipersuperfície de rotação. Em particular, $G(x)^{n-k}$, que é homotética a um paralelo, é isométrica a $\mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{n-k}$ com $\tilde{c} > 0$, pois $G(x)$ é compacta e, portanto, ρ não pode ser constante em nenhum aberto de B_1 (Corolário 19).

O objetivo agora é mostrar que $\alpha_{\overline{f}}$ é adaptada à rede produto também em B (já se sabe que isto vale em A) para então aplicar o Teorema de Nolker, ou seja, para obter que $\overline{f}$ é um produto *warped* de imersões, também no caso em que B tem interior não vazio.

Seja $B^i = B_1^i \times_\rho G(x)^{n-k}$ uma componente conexa de $\mathrm{int}(B)$. Note que a hipótese do teorema diz que B^i, ou ainda B_1^i, é limitada. Para verificar que $\alpha_{\bar{f}}$ é adaptada à rede produto em B^i é suficiente mostrar que $\mathcal{V}(q) \subset KerA_{\overline{f}}$, $\forall q \in B^i$. Suponha que não seja este o caso, isto é, seja $p \in B^i$ tal que $\mathcal{V}(p) \not\subset KerA_{\bar{f}}$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $p = (x, g(x))$. Como $\overline{f}$ não é totalmente geodésica em p, a nulidade relativa mínima de $\overline{f}|_{B^i}$ é $\nu = n-1$, ou seja, existe um aberto contendo p onde $\overline{f}$ tem índice de nulidade relativa constante, igual a $n - 1$. Logo, a distribuição de nulidade relativa é integrável e a folha de nulidade relativa que passa por p, N^{n-1}, é uma hipersuperfície totalmente geodésica transversal à fibra $\{x\} \times G(x)^{n-k}$.

Como ρ não é constante em B_1^i e a condição $\mathcal{V} \not\subset KerA_{\bar{f}}$ é uma condição aberta, pode-se supor, ainda sem perda de generalidade, que $\nabla\rho(x) \neq 0$. Seja γ: $(\alpha, \beta) \to B_1^i$ a reparametrização pelo comprimento de arco da curva integral maximal de $\nabla\rho$ em B_1^i tal que $\gamma(0) = x$.

A hipótese de que B_1^i é limitada garante que $\beta < \infty$. De fato, suponha que $\beta = \infty$. Então, como $B_1^i \times_\rho G(x)$ tem curvatura seccional constante $c \leq 0$, a expressão de $\rho \circ \gamma$ dada na Proposição 19 garante que $\lim_{t\to\beta} \rho(\gamma(t)) = \infty$. Agora, considere a sequência (x_r) em B_1^i dada por $x_r = \gamma(r)$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Como B_1^i é um subconjunto limitado da variedade completa M, passando a uma subsequência se necessário, existe $y = \lim_{r\to\infty} x_r$. Como a aplicação entre órbitas principais $g(x) \in G(x) \mapsto g(x_r) \in G(x_r)$ é uma homotetia com fator de escala $\rho(x_r)$ (devido à estrutura de produto warped $L^k \times_\rho G(x)^{n-k}$), então $|\frac{d}{dt} g_t(x_r)| = \rho(x_r) |\frac{d}{dt} g_t(x)|$, para todo $r \in \mathbb{N}$ e toda curva $t \mapsto g_t \in G$. Assim, se X é um campo de Killing em M induzido por G, vale que $|X(x_r)| = \rho(x_r)|X(x)|$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Como dim $G(x) \geq 1$, o campo de Killing X pode ser escolhido de modo que $|X(x)| \neq 0$. Daí,

$$\frac{|X(x_r)|}{|X(x)|} = \rho(x_r)$$

e, passando ao limite, tem-se

$$\lim_{r\to\infty} \rho(x_r) = \frac{|X(y)|}{|X(x)|} \in \mathbb{R},$$

o que é um absurdo, pois já se tem $\lim_{t\to\beta} \rho(\gamma(t)) = \infty$.

Logo, $\beta < \infty$. Então, como Σ é completa e γ é uma geodésica de M (Proposição 20), ou de Σ, existe $y = \lim_{t\to\beta} \gamma(t) \in \Sigma$. Por continuidade $y \in B$. Além disso, vale que a dimensão de $G(y)$ é $n-k$. De fato, como $T_xG(x)^{n-k}$ é composto por imagens de campos de Killing induzidos por G no ponto x, sejam X_i, com $i = 1, \ldots, n-k$, campos de Killing induzidos por G tais que $\{X_1(x), \ldots, X_{n-k}(x)\}$ forma uma base ortogonal de $T_xG(x)$. Pela relação de homotetia entre as órbitas $G(x)$ e $G(\gamma(t))$, vale que $\{X_1(\gamma(t)), \ldots, X_{n-k}(\gamma(t))\}$ é uma base ortogonal de $T_{\gamma(t)}G(\gamma(t))$. Passando ao limite, quando t tende a β, tem-se que $\{X_1(y), \ldots, X_{n-k}(y)\}$ é uma base ortogonal de $T_yG(y)$ (lembre-se que $|X_i(y)| = |X_i(x)|. \lim_{r\to\infty} \rho(x_r) \neq 0$ e a dimensão de $G(y)$ é menor do que ou igual a $n-k$).

A situação agora possui uma interpretação geométrica bastante particular. Como N^{n-1} e $im(\gamma) \times_\rho G(x)$ são totalmente geodésicas em B^i (Proposição 20), então a transversalidade entre as subvariedades no ponto p, dada pela hipótese de que $\mathcal{V}(p) \not\subset \ker A_{\overline{f}}$, é preservada ao longo da interseção (basta ver que localmente são subvariedades totalmente geodésicas de uma forma espacial) e $N \cap (im(\gamma) \times_\rho G(x))$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $im(\gamma) \times_\rho G(x)$. Mais ainda, como $im(\gamma) \times_\rho G(x)(\approx \mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n-k})$ é isométrica a um anel de $\mathbb{Q}_c^{n-k+1}$, então $N \cap (im(\gamma) \times_\rho G(x))$ é isométrica a um aberto de um hiperespaço de $\mathbb{Q}_c^{n-k+1}$ transversal à fibra $\{x\} \times_\rho G(x)$ do anel $im(\gamma) \times_\rho G(x)$ e, portanto, transversal a toda fibra vertical $\{\gamma(t)\} \times G(\gamma(t))$ com $t > 0$.

O elemento y determinado acima será fundamental para gerar um absurdo a partir da hipótese de que $\mathcal{V}(p) \not\subset KerA_{\bar{f}}$. Contudo, não se pode afirmar a princípio que y é um elemento regular, isto é, que $y \in L$. Assim, torna-se-á necessário trabalhar paralelamente com elementos de M e com a aplicação f. Seja λ uma geodésica de M tangente a $\psi(N) \cap G(\mathrm{im}(\gamma))$ tal que $\lambda(0) = x$ e $\langle \lambda'(0), \gamma'(0) \rangle > 0$. Ou seja, λ é uma geodésica sobre o anel $G(\mathrm{im}(\gamma))$, está contida na subvariedade $\psi(N)$ e varia de dentro para fora do anel. Seja $b > 0$ tal que $\lambda(b) \in G(y)$, assim $\lambda(t) \in G(\mathrm{im}(\gamma))$, para todo $t \in [0, b)$. Pela transversalidade apontada no parágrafo acima, em todo $\lambda(t) \in \psi(N) \cap G(\mathrm{im}(\gamma))$ existe um vetor de $T_{\lambda(t)}G(\lambda(t))$ que não está em $\ker A_f$, ou seja, f tem nulidade $n-1$ em todo $\lambda(t) \in \psi(B^i)$. Como este valor é a nulidade relativa mínima de $f|_{B^i}$, segue da Proposição 9 que N se estende ao longo de $\lambda(t)$ com $t \in [0, b)$. Logo, por continuidade, segue das relações de transversalidade destacadas no parágrafo anterior que $T_{\lambda(b)}G(y) \not\subset \ker A_f$.

Por outro lado, tem-se que y é ponto de acumulação do conjunto $\psi(A)$. De fato, se existe um aberto $W \subset M^n$ contendo y e com curvatura seccional constante c, tomando W simplesmente conexo, então existe imersão isométrica ϕ: $W^n \to \mathbb{Q}_c^n$. Neste caso pode-se provar que $y \in M_r$. Seja $g \in G$ tal que $g(y) = y$. Seja $z \in \Sigma_r \cap W$ tal que $g(z) \in W$ e considere $\overline{N}^{n-k} \subset \mathbb{Q}_c^n$ a subvariedade esférica completa que estende $\phi(G(z) \cap W)$. Se $\tilde{g}$ é a isometria de $\mathbb{Q}_c^n$ tal que $\phi \circ g = \tilde{g} \circ \phi$ (em pontos onde a composta fizer sentido - pelo menos num aberto em torno de y) então, como g deixa $G(z)$ invariante e leva seções em seções, $\tilde{g}$ é uma isometria de $G_{\overline{N}}$. Além disso, como $\phi(G(y) \cap W)$ é ortogonal às seções de $G_{\overline{N}}$, que contém as imagens por ϕ das seções de G, e tem dimensão $n-k$, tem-se que $\phi(G(y) \cap W)$ é um aberto de $G_{\overline{N}}(\phi(y))$, donde $G_{\overline{N}}(\phi(y))$ tem a mesma dimensão de $\overline{N}$ e, portanto, $\phi(y)$ é regular com relação a $G_{\overline{N}}$. Assim, $(G_{\overline{N}})_{\phi(y)} = (G_{\overline{N}})_{\phi(z)}$ e, como $\tilde{g}(\phi(y)) = \phi(y)$, então $\tilde{g}(\phi(z)) = \phi(z)$, donde $g(z) = z$. Logo, y é regular. Neste caso, vale que $y = \gamma(\beta) \in B^i$ e, portanto, γ: $[0, \beta) \to B^i$ poderia ser estendida, o que é um absurdo, pois β é máximo.

Como $\lambda(b) \in G(y)$ é limite de uma sequência (y_r) de $\psi(A)$ e $f|_{\psi(U)}$ é localmente uma hipersuperfície de rotação, $T_{y_r}G(y_r)$ é subespaço de um autoespaço de A_f. Por continuidade vale que $T_{\lambda(b)}G(y)$ é subespaço de um autoespaço de A_f em $\lambda(b)$ de dimensão maior do que ou igual a $n-k > 1$. Como, em $\lambda(b)$, M tem curvatura seccional constante igual a c, $\ker A_f$ é um autoespaço de A_f em $\lambda(b)$ de dimensão pelo menos $n-1$. Assim, necessariamente, $T_{\lambda(b)}G(y)$ é um subespaço de $\ker A_f$, o que contradiz a afirmação obtida de que $T_{\lambda(b)}G(y) \not\subset \ker A_f$.

Portanto, a suposição de que $\alpha_{\overline{f}}$ não é adaptada à rede produto de B gera um absurdo. Logo, fica provado que $\alpha_{\overline{f}}$ é adaptada à rede produto de $L \times_\rho G(x)$. Como já se tem que $\overline{f}(\{y\} \times_\rho G(x))$ é uma subvariedade esférica, para algum y, a Proposição 56 garante que f é uma hipersuperfície de rotação. ∎

5.2 O caso G não compacto

As hipersuperfícies de rotação foram apresentadas como um caso de um produto *warped* de imersões. No próximo teorema, quando G deixa de ser compacto, outros casos de produtos *warped* de imersões aparecerão. Como será visto, os próximos exemplos servem para descrever esses casos.

Exemplos:

1) Sejam $M = \Sigma^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e $f = h \times \mathrm{id}_1$, onde $h\colon \Sigma^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ é uma imersão isométrica e id_1 é a identidade em $\mathbb{R}^{n-k}$. Seja $G = \{id_2\} \times G_1$ um subgrupo de $\mathrm{Iso}(M)$, onde id_2 é a identidade em Σ^k, tal que G_1 age transitivamente sobre $\mathbb{R}^{n-k}$. Se id_3 é a identidade em $\mathbb{R}^{k+1}$, então $\tilde{G} = \{\mathrm{id}_3\} \times G_1$ age isometricamente sobre $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ e f é equivariante com respeito a $\tau\colon G \to \tilde{G}$ definida por $\tau(\mathrm{id}_2, g) = (\mathrm{id}_3, g)$.

2) Sejam $M = \mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{l\geq 2} \times \mathbb{R}^{n-k-l}$ e $f = \mathrm{id}_1 \times i \times \mathrm{id}_2$, onde i é a inclusão de $\mathbb{S}^l$ em $\mathbb{R}^{l+1}$ e id_1 e id_2 são as aplicações identidade em $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k-l}$, respectivamente. Seja G_1 um subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n-k+1})$ que age transitivamente sobre $\mathbb{S}^l \times \mathbb{R}^{n-k-l} \subset \mathbb{R}^{n-k+1}$. Então $G = \{id_1\} \times G_1 \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ pode também ser visto como um subgrupo de $\mathrm{Iso}(M)$ e f é G-equivariante.

3) Sejam $\phi\colon \mathbb{H}^k_c \times_\sigma \mathbb{R}^{n-k+1} \to \mathbb{H}^{n+1}_c$ uma representação como produto *warped* de $\mathbb{H}^{n+1}_c$, $M = \mathbb{H}^k_c \times_\sigma (\mathbb{S}^{l\geq 2} \times \mathbb{R}^{n-k-l})$ e $f = \phi \circ (\mathrm{id}_1 \times (i \times \mathrm{id}_2))$, onde i é a inclusão de $\mathbb{S}^l$ em $\mathbb{R}^{l+1}$ e id_1 e id_2 são a identidade em $\mathbb{H}^k_c$ e $\mathbb{R}^{n-k-l}$, respectivamente. Seja G_1 um subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n-k+1})$ que age transitivamente sobre $\mathbb{S}^l \times \mathbb{R}^{n-k-l}$. Então $G = \{\mathrm{id}_1\} \times G_1$ pode ser visto como o subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^{n+1}_c)$ definido por $(\mathrm{id}_1 \times g_1)(\phi(x,y)) = \phi(x, g_1(y)), \forall g_1 \in G_1$, e f é G-equivariante.

4) Sejam $\phi\colon \mathbb{H}^k_c \times_\sigma \mathbb{H}^{n-k+1}_{\tilde{c}} \to \mathbb{H}^{n+1}_c$ uma representação como produto *warped* de $\mathbb{H}^{n+1}_c$, $M = \mathbb{H}^k_c \times_\rho (\mathbb{S}^{l\geq 1}_{c_1} \times \mathbb{H}^{n-k-l}_{c_2})$, com $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{\tilde{c}}$, e $f = \mathrm{id}_1 \times (i_1 \times i_2)$, onde id_1 é a identidade em $\mathbb{H}^k_c$ e $i_1 \times i_2$ é a aplicação $i_1 \times i_2\colon \mathbb{S}^l_{c_1} \times \mathbb{H}^{n-k-l}_{c_2} \to \mathbb{H}^{n-k+1}_{\tilde{c}} \subset \mathbb{R}^{n-k+1,1} \approx \mathbb{R}^{l+1} \times \mathbb{R}^{n-k-l,1}$. Seja G_1 um subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^{n-k+1}_{\tilde{c}})$ que age transitivamente sobre $\mathbb{S}^{l\geq 1}_{c_1} \times \mathbb{H}^{n-k-l}_{c_2} \subset \mathbb{H}^{n-k+1}_{\tilde{c}}$. Então, $G = \{\mathrm{id}_1\} \times G_1$ pode ser visto como o subgrupo de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^{n+1}_c)$ definido por $(\mathrm{id}_1 \times g_1)(\phi(x,y)) = \phi(x, g_1(y)), \forall g_1 \in G_1$, e f é G-equivariante.

Teorema 64 *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$, com $n \geq 4$ e $c \leq 0$, uma hipersuperfície completa. Seja $G \subset Iso(M)$ um subgrupo conexo, fechado, não compacto, agindo de modo localmente polar sobre M com órbitas principais umbílicas e cohomogeneidade k satisfazendo $1 \leq k \leq n-3$. Suponha ainda que, para uma seção Σ de G, as componentes conexas do conjunto*

$$\{y \in \Sigma : M \text{ tem curvatura seccional constante } c \text{ em } y\}$$

sejam limitadas. Então, se $c = 0$,

- *existe uma isometria local $\psi\colon \Sigma^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to M$ tal que $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi = \{\psi^{-1} \circ g \circ \psi : g \in G\}$ são como no exemplo 1); ou*
- *existe uma isometria local $\psi\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{l \geq 2} \times \mathbb{R}^{n-k-l} \to M$ tal que $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no exemplo 2);*

e, se $c < 0$,

- *f imerge M^n equivariantemente como uma hipersuperfície de rotação do tipo hiperbólico ou parabólico; ou*
- *existe uma isometria local $\psi\colon \mathbb{H}_c^k \times_\rho (\mathbb{S}^{l \geq 2} \times \mathbb{R}^{n-k-l}) \to M$ tal que $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no exemplo 3); ou*
- *existe uma isometria local $\psi\colon \mathbb{H}_c^k \times_\rho (\mathbb{S}_{c_1}^{l \geq 1} \times \mathbb{Q}_{c_2}^{n-k-l}) \to M$ tal que $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no exemplo 4).*

Prova: Considere a imersão

$$\overline{f} = f \circ \psi\colon\ L^k \times_\rho G(x)^{n-k} \to \mathbb{Q}_c^{n+1},$$

onde $\psi\colon L^k \times_\rho G(x)^{n-k} \to M_r^n$ é a isometria local dada pela Proposição 50. Seja $A = A_1 \times_\rho G(x)$, onde

$$A_1 = \{y \in L : M \text{ não tem curvatura seccional constante c em } y\}.$$

No caso em que o subconjunto $B = (L \times_\rho G(x)) \backslash A$ tem interior vazio, o Corolário 28 garante que $\overline{f}$ é um produto *warped* de imersões. Considere primeiro o caso $c = 0$. Como M é completa, $\overline{f}$ não pode ser um cone e, como G não é compacto, $\overline{f}$ não pode ser uma hipersuperfície de rotação. Assim, existe uma decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{k'} \oplus \mathbb{R}^{n+1-k'}$, com

$k' = k$ ou $k' = k+1$, segundo a qual $\overline{f}$ se decompõe como um produto Riemanniano de imersões. Se $k' = k+1$, é claro que $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no Exemplo 1). Se $k' = k$, então o segundo fator de $\overline{f}$ é uma hipersuperfície f_2: $G(x)^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k+1}$. Pelo Teorema 14, $G(x) = \mathbb{S}^l \times \mathbb{R}^{n-k-l}$ e, como o interior de B é vazio, então $l \geq 2$, donde $f_2 = i \times \mathrm{id}$, onde i: $\mathbb{S}^l \to \mathbb{R}^{l+1}$ é a inclusão e id é a identidade em $\mathbb{R}^{n-k-l}$. Logo, $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no Exemplo 2).

Se $c < 0$ e $\overline{f}$ não é uma hipersuperfície de rotação então, pela Proposição 56, a aplicação

$$f_2 : g(x) \mapsto \overline{f}(x, g(x)) \in \mathbb{Q}_c^{n+1}$$

pode ser vista como uma hipersuperfície f_2: $G(x)^{n-k} \to N^{n-k+1}$, onde N é o fecho esférico de $f(G(x))$. Se $N^{n-k+1} = \mathbb{R}^{n-k+1}$ então, pelo Teorema 14, $G(x) = \mathbb{S}^l \times \mathbb{R}^{n-k-l}$. Se $l = 1$ então $G(x)$ tem curvatura seccional constante, donde, pela Proposição 10, f_2 tem nulidade maior do que ou igual a $n-k-1$. Com isso, como o primeiro fator da decomposição de $\overline{f}$ é uma isometria local, a Proposição 25 garante que $\nu_{\overline{f}} \geq n-1$ e, portanto, $L^k \times_\rho G(x)^{n-k}$ tem curvatura seccional igual a do ambiente, o que contraria as hipóteses do teorema. Logo, tem-se que $l \geq 2$, donde $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no exemplo 3). Se $N^{n-k+1} = \mathbb{H}_{\tilde{c}}^{n-k+1}$, pelo Teorema 14, $G(x) = \mathbb{S}_{c_1}^l \times \mathbb{H}_{c_2}^{n-l}$, com $l \geq 1$ ($G(x)$ não pode ter curvatura seccional constante), donde $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no Exemplo 4).

Suponha agora que o interior de B seja diferente de vazio, donde $G(x)$ é uma variedade com curvatura seccional constante (Corolário 17). Como consequência, $\overline{f}|_A$ é localmente um produto *warped* de imersões com o segundo fator sendo uma isometria. A justificativa já foi vista na prova do Teorema 63, que claramente é válida também quando $G(x)$ não é compacto.

Seja $B^i = B_1^i \times_\rho G(x)$ uma componente conexa de $\mathrm{int}(B)$ e suponha que exista $p = (y, g(x)) \in B^i$ tal que $\mathcal{V}(p) \not\subset KerA_{\overline{f}}$. Então, pode-se considerar a folha de nulidade relativa que passa por p, N^{n-1}, que é uma hipersuperfície totalmente geodésica transversal à fibra $\{y\} \times_\rho G(x)$.

Se ρ não é constante em B_1^i, a situação é inteiramente análoga à da demonstração do Teorema 63 e os mesmos argumentos podem ser usados para gerar um absurdo.

Suponha que ρ seja constante em B_1^i, ou seja, que $L \times_\rho G(x)$ reduz a um produto Riemanniano. Seja γ: $[0, b) \to N$ uma geodésica partindo de p e transversal a $\{y\} \times G(x)$. Sendo um produto Riemanniano, γ é sempre transversal às fibras verticais. Como N é uma folha de nulidade relativa de uma imersão num espaço Euclidiano, então γ é minimizante.

Portanto, se $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, vale que $\gamma_1 \colon (0,b) \to B_1^i$ é uma geodésica minimizante. Como B_1^i é limitado, por hipótese, vale que $b < \infty$. Suponha então que b é tal que $\gamma_1(b)$ esteja na fronteira de B_1^i. Neste caso, $q = \lambda(b) \in A' \cap B$. Tomando uma sequência $q_r \in A$ convergindo para q, como $\mathcal{V}(q_r)$ está contido num autoespaço de $A_{\overline{f}}$, vale, por continuidade, que $\mathcal{V}(q) \subset \ker A_{\overline{f}}$ (ver argumento semelhante utilizado na demonstração do Teorema 63), o que é um absurdo, pois γ atinge q transversalmente sua fibra vertical e é tangente a N ($TN = \ker A_{\overline{f}}$).

Em ambos os casos, a hipótese de que exista $p = (y, g(x)) \in B^i$ tal que $\mathcal{V}(p) \not\subset KerA_{\overline{f}}$ gera um absurdo. Logo, vale que $\mathcal{V}(q) \subset KerA_{\overline{f}}$, $\forall q \in B$, ou seja, fica provado que $\alpha_{\overline{f}}$ é adaptada à rede produto de $L \times_\rho G(x)$. Como, neste caso, as órbitas de G têm curvatura seccional constante, tem-se que f é uma hipersuperfície de rotação, se $c < 0$, ou $f \circ \psi$ e $\psi^{-1} \circ G \circ \psi$ são como no Exemplo 1), se $c = 0$, uma vez que as outras possibilidades de fatoração levam ao absurdo de $L^k \times_\rho G(x)^{n-k}$ ter curvatura seccional constante c. ∎

Bibliografia

[AC] Asperti, A.C., Caputi, A., Cohomogeneity one hypersurfaces of the hyperbolic space. *Ann. Global Anal. Geom.* **24** (2003), 351-373.

[AMN] Asperti, A.C., Mercuri, F., Noronha, M.H., Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of revolution. *Bolletino U.M.I.* 11-B (1997), 199-215.

[Be] Bredon, G.E., Introduction to compact transformation groups. Academic Press, 1972.

[BCO] Berndt, J., Console, S., Olmos, C., Submanifolds and holonomy. CRC/Chapman and Hall Research Notes Series in Mathematics **434** (2003), Boca Ratton.

[dC] Carmo, M. do, Geometria Riemanniana. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[dCD] Carmo, M. do, Dajczer, M., Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 (2) (1983), 685-709.

[Da] Dajczer, M. et al., Submanifolds and isometric immersions. Mathematics Lecture Series **13**, Publish or Perish Inc., Houston-Texas, 1990.

[DT] Dajczer, M., Tojeiro, R., Isometric immersions in codimension two of warped products into space forms. *Illinois J. Math.* 48 (3) (2004), 711-746.

[Ej] Ejiri, N., A generalization of minimal cones. *Trans. Am. Math. Soc.* 276 (1983), 347-360.

[EH] Eschenburg, J.-H., Heintze, E., On the classification of polar representations. *Math. Z.* 232 (1999), 391-398.

[HLO] Heintze, E., Liu, X., Olmos, C., Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem. Preprint (disponível em arXiv: math.DG 000.4028).

[Ko] Kobayashi, S., Compact homogeneous hypersurfaces. *Trans. Amer.Math. Soc.* **88** (1958), 137-143.

[Li] Lima, J. C. A., Hipersuperfícies de cohomogeneidade 1 na esfera Euclidiana. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, 2002.

[Mo] Moore, J. D., Equivariant embeddings of Riemannian homogeneous spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), 271-279.

[MPST] Mercuri, F., Podestà, F., Seixas, J.A., Tojeiro, R., Cohomogeneity one hypersurfaces of Euclidean spaces. *Comment. Math. Helv.* **81** (2) (2006), 471-479.

[MRS] Meumertzheim, M., Reckziegel, H., Schaaf, M., Decomposition of twisted and warped products nets. *Result. Math.* **36** (1999), 297-312.

[MS] Mercuri, F., Seixas, J.A., Hypersurfaces of cohomogeneity one and hypersurfaces of revolution. *Diff. Geom. Appl.* **20** (2004) 225-239.

[MT] Moutinho, I., Tojeiro, R., Compact Riemannian G-manifolds as Euclidean hypersurfaces. Preprint.

[No] Nölker, S., Isometric immersions of warped products. *Diff. Geom. App.* 6 (1996), 1-30.

[Ol] Olmos, C., Riemannian and submanifold geometry. 23 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[On] O'Neill B. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, volume **103** de Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York - London, 1983.

[PT1] Palais, R., Terng, C.-L., A general theory of canonical forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **300** (1987), 771-789.

[PT2] Palais, R., Terng, C.-L., Critical point theory and submanifold geometry. Springer, 1988.

[PS] Podestà, F., Spiro, A., Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of Euclidean space. *Ann. Global Anal. Geom.* 13 (1995), 169-184.

[RS] Reckziegel, H., Schaaf, M., de Rham decomposition of netted manifolds. *Result. Math.* **35** (1999), 175-191.

[Sa] Sakai, T., Riemannian geometry. American Mathematical Society, 1996.

[St] Strübing, W., Isoparametric submanifolds. *Geom. Dedicata* **20** (1986), 367-387.

[Ta1] Takahashi, T., Homogeneous hypersurfaces in spaces of constant curvature. *J. Math. Soc. Japan*, **22** (1970), 395-410.

[Ta2] Takahashi, T., An isometric immersion of a homogeneous Riemannian manifold of dimension 3 in the hyperbolic space. *J. Math. Soc. Japan*, **23** (1971), 649-661.

[WZ] Wang, M., Ziller, W., On isotropy irreducible Riemannian manifolds. *Acta Math.*, **166** (1991), no. 3-4, 223-261.