Soluções ondas viajantes para a equação Korteweg-de Vries-Burgers

Eliza Souza da Silva

Soluções ondas viajantes para a equação Korteweg-de Vries-Burgers

Eliza Souza da Silva

Orientador: *Prof. Dr. Cezar Issao Kondo*

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática da Ufscar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências na área de Matemática .

São Carlos

Dezembro/2006

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

S586so

Silva, Eliza Souza da.
Soluções ondas viajantes da equação Korteweg-de Vries-Burgers / Eliza Souza da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
64 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Equação diferenciais parciais. 2. Burgers, equação de. 3. Equação de Korteweg-de Vries. 4. Ondas não lineares I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Aos meus Pais

Manoel e Raimunda

e à meu marido e Filho

Manoel Silvino e Guilherme.

Agradecimentos

Há muitos a quem agradecer, pois nenhum trabalho é solitário. Ao longo deste caminho, fui orientada e apoiada por todas as pessoas que em mim acreditaram e confiaram.

Agradeço, primeiramente, á Deus, por estar sempre presente em minha vida me acompahando e guiando nesta jornada.

Em particular, agradeço ao meu marido, Silvino, por seu amor, sua amizade e compreensão e á meu filho, Guilherme, pela imensa alegria que traz à minha vida.

Aos meus pais, Sr. Manoel e Sra. Raimunda, por terem apoiado meus passos na infância e ensinamentos para toda vida; e às minhas irmãs, Edilene e Eliane, por acreditarem em mim.

Aos amigos de sempre, Ricardo, Lizandra, Fernanda, Ricardo Eden, Cleide, Nazira, Everaldo, Sandra, Camila, Beto, Francisco, João, Fabiolo, Eduardo, Roberta, Angela, Alesandra, Claudete e Rodrigo pela grande amizade, pela dedicação e por todo apoio que me deram durante estes anos.

À meu orientador professor Dr. Cesar Kondo, que com perícia me ajudou a vencer as dificuldades, orientando-me com competência e dedicação.

Não tenho palavras para expressar também minha gratidão a:

Aos professores e funcionários da Ufscar, meu muito obrigado por tudo!

Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a existência e certas propriedades de soluções ondas viajantes da equação Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB). O comportamento assintótico destas ondas é analisado quando $\varepsilon \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$ ou quando ambos $\varepsilon, \delta \downarrow 0$, sujeito à determinadas condições.

Abstract

The aim in this work is to estudy the existence and certain qualitative properties of travelling-wave to the Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) equation. The asymptotic behaviour of these waves is analysed when $\varepsilon \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$ or when both $\varepsilon, \delta \downarrow 0$, subject to the determined conditions.

Sumário

Introdução

O objetivo, deste trabalho, é estudar a solução onda viajante da equação Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) dada por:

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} - \varepsilon u_{xx} = 0, \tag{1}$$

isto é, solução do tipo $u(x,t) = S(x - ct, \varepsilon, \delta)$, onde c é a velocidade de propagação da onda no trabalho de Bona e Schonbeck [1]. Estudo este feito, de modo a estabelecer sua existência, unicidade e algumas propriedades qualitativas. Para este fim, este trabalho se subdivide em 4 capítulos.

No primeiro capítulo, apresentaremos alguns teoremas e conceitos que serão utilizados neste trabalho.

No segundo capítulo,estabeleceremos a existência e unicidade das soluções para (1) que têm a forma $S(x - ct, \varepsilon, \delta)$ correspondendo a valores positivos de c, ε, δ dados.

No terceiro capítulo, determinaremos aspectos geométricos destas soluções através de observações estabelecidas no segundo capítulo. Neste capítulo serão distinguidos dois casos, o primeiro quando a difusão é predominante, isto é, $\varepsilon^2 \geq 4\gamma\delta$ e o segundo quando a dispersão é predominante, ou seja, $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$.

No quarto capítulo, estudaremos o comportamento da solução $S(\cdot, \varepsilon, \delta)$ no limite em $+\infty$ e $-\infty$. Onde observaremos que quando $\varepsilon \downarrow 0$, S converge uniformemente em conjuntos da forma $K = \{\xi; \xi \geq a\}$, para a solução solitária da equação Korteweg de Vries dada por

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

e quando $\delta \downarrow 0$, S converge uniformemente em $\mathbb{R}$ à solução onda viajante da equação de Burgers

$$u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \tag{3}$$

e ainda estudaremos a forma limitante de S quando simultaneamente $\varepsilon, \delta \downarrow 0$, de modo que a razão $\dfrac{\delta}{\varepsilon^2}$ permaneça limitada, e neste caso a mesma converge à onda de choque, isto é, solução fraca da lei de conservação $u_t + uu_x = 0$.

Notação Básica

Apresentamos aqui, algumas notações que aparecem ao longo deste trabalho.

- $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathscr{R}$ representa a órbita $(s(\xi), r(\xi))$;
- C^2 representa o conjunto das funções contínuas com derivadas contínuas até a segunda ordem;
- Re (z) representa a parte real do número complexo z;
- Im (z) representa a parte imaginária do número complexo z;
- $\varepsilon \downarrow 0,\ \delta \downarrow 0$ representam a convergência ε e δ a 0 por valores positivos; respectivamente
- $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ representa o produto interno usual entre x_1 e x_2;
- Q_2 e Q_4 representam o segundo e quarto quadrante, respectivamente;
- $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to -\infty$ significa que se $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ quando $x \to -\infty$.

Indicaremos o final de uma demonstração com o símbolo $\blacksquare$

Capítulo

1

Preliminares

Neste Capítulo, introduziremos alguns conceitos e teoremas básicos que serão usados no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.1 *(Ascoli-Arzelá). Seja* (X,d) *um espaço métrico compacto. Seja* F *uma família equicontínua de funções* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$*. Isto é, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $d(x,y) < \delta$*, então* $\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid < \varepsilon$ *para todo* $\varphi \in F$*. Se* F *é uniformemente limitada (isto é, existe* $M > 0$ *tal que* $\mid \varphi \mid < M$ *para todo* $\varphi \in F$*) então, toda seqüência* $\{\varphi_n\}$ *de elementos de* F *tem uma subseqüêcia* $\{\varphi_{n_k}\}$ *uniformemente convergente em* X*.*

Demonstração: ver referência [3].

Teorema 1.2 *(Desigualdade de Glaeser). Seja* $f \in C^2(\mathbb{R})$*,* $f(x) \geq 0$ *e* $f''(x) \leq M$ *em* $\mathbb{R}$*. Então,*

$$\mid f'(x) \mid \leq \sqrt{2M}\sqrt{f(x)}.$$

Demonstração: ver referência [5].

Lema 1.1 . *Seja* $U \subset \mathbb{R}^m$ *um aberto conexo e limitado. Se a seqüência de aplicações diferenciáveis* $f_k : U \to \mathbb{R}^n$ *converge num ponto* $c \in U$ *e a seqüência das derivadas* $f'_k : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ *converge uniformemente em* U *para uma aplicação* $g : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, *então* (f_k) *converge uniformemente em* U *à aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^n$, *a qual é diferenciável, com* $f' = g$.

Demonstração: ver referência [6].

Teorema 1.3 *(Teorema de Extensão). Seja* $f(x,y)$ *uma função contínua sobre um conjunto aberto E, e seja* $y = y(x)$ *uma solução de* $y'(x) = f(x,y)$ *sobre algum intervalo. Então,* $y(x)$ *pode ser estendida em um intervalo maximal de existência* (w_1, w_2). *Além disso, se* (w_1, w_2) *é um intervalo maximal de existência, então* $y(x)$ *tende para fronteira de E quando* $x \to w_1$ *e* $x \to w_2$.

Demonstração: ver referência [3].

1.1 Conjuntos Limites

Seja $f = (f_1, f_2)$ uma função vetorial contínua real definida em um conjunto aberto limitado C do plano real xy, e consideremos o sistema autônomo bidimencional,

$$x' = f_1(x,y) \qquad y' = f_2(x,y) \tag{1.1}$$

Seja $\mathscr{R}^+ (\mathscr{R}^-)$ uma órbita de (1.1) representando a solução ψ definida para todo $\xi \geq \xi_o$ (ou $\xi \leq \xi_o$) para algum ξ_o. Isto é, $\mathscr{R}^+ (\mathscr{R}^-)$ o conjunto de todos os pontos $P(\xi)$ de C com coordenadas

$$(\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)) \tag{1.2}$$

onde, $\xi_o \leq \xi < +\infty$ $(-\infty < \xi \leq \xi_o)$. Um ponto q no plano xy é dito um ponto limite de $\mathscr{R}^+$ $(\mathscr{R}^-)$ se existe uma seqüência de números reais $\{\xi_n \,|\, n = 1, 2, \ldots,$ onde, $\xi_n \to +\infty$ $(\xi_n \to -\infty)$ quando $n \to \infty$ tal que $P(\xi_n) \to q\}$. O conjunto de todos os pontos limites de uma semi órbita $\mathscr{R}^+ (\mathscr{R}^-)$ é denotada por ω-limite (ou α-limite), e estes conjuntos são chamados de conjuntos limites.

Capítulo

2

Existência e Unicidade

2.1 Equação da Onda Viajante

Aqui a questão fundamental é a da existência e unicidade da solução onda viajante da equação de Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB)

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} - \varepsilon u_{xx} = 0, \tag{2.1}$$

onde, buscamos soluções da forma

$$u(x,t) = S(x - ct, \varepsilon, \delta),$$

que correspondem a valores positivos c, ε, δ dados. E, também, para que os cálculos, que aqui se fazem necessários, não fiquem com um notação carregada é conveniente a omissão da dependência de uma onda viajante $S = S(\xi, \varepsilon, \delta) \in C^3$ com relação as variáveis ε e δ, escrevendo simplesmente $S(\xi)$, com $\xi = x - ct$ onde, $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda. Diferenciando $u(x,t)$ em relação a x e t obtemos,

$$u_t = -cS', \quad u_x = S', \quad u_{xx} = S'' \quad e \quad u_{xxx} = S''',$$

deste modo, S satisfaz a seguinte equação,

$$-cS' + SS' + \delta S''' - \varepsilon S'' = 0. \tag{2.2}$$

Buscaremos uma solução limitada não constante de (2.2), tal que, S satisfaz as condições assintóticas

$$\lim_{\xi \to +\infty} S(\xi) = S_R, \quad \lim_{\xi \to -\infty} S(\xi) = S_L \tag{2.3}$$

e também,

$$\lim_{|\xi| \to \infty} S^{(j)}(\xi) = 0 \quad \forall j \geq 1. \tag{2.4}$$

2.2 Existência e Unicidade de Solução

Será iniciada a procura de uma solução limitada não constante de (2.2) satisfazendo (2.3) e (2.4), isto é, S será determinada desde que (2.3) e (2.4) ocorram. Facilitando os cálculos introduziremos uma nova variável através da normalização,

$$s = S - S_R.$$

calculando suas derivadas temos,

$$S'(\xi) = s'(\xi), \quad S''(\xi) = s''(\xi), \quad S'''(\xi) = s'''(\xi).$$

substituindo em (2.2) obtemos a seguinte equação ordinária,

$$-(c - S_R)s' + ss' + \delta s''' - \varepsilon s'' = 0, \tag{2.5}$$

agora definindo $\gamma = c - S_R$, esta última equação tem a mesma forma que a equação (2.2) com γ em lugar de c, ou seja, a equação (2.2) é representada por

$$-\gamma s' + ss' + \delta s''' - \varepsilon s'' = 0. \tag{2.6}$$

Agora, a partir das condições dada em (2.3) obtemos para s as seguintes condições

$$\begin{aligned} \lim_{\xi\to+\infty} s(\xi) &= \lim_{\xi\to+\infty}(S(\xi)-S_R)=0 \\ \lim_{\xi\to-\infty} s(\xi) &= \lim_{\xi\to-\infty}(S(\xi)-S_R)=S_L-S_R=s_o, \end{aligned} \tag{2.7}$$

e ainda,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} s^{(j)}(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty} S^{(j)}(\xi)=0, \quad \forall j=1,2,\ldots \tag{2.8}$$

Integrando (2.6) sobre $[y,\infty)$, temos:

$$\int_y^{+\infty}\left(-\gamma\frac{d}{du}(s(u))+\frac{1}{2}\frac{d}{du}(s^2(u))+\delta\frac{d}{du}(s''(u))-\varepsilon\frac{d}{du}(s'(u))\right)du=0$$

como

$$\lim_{\xi\to+\infty} s^{(j)}(\xi)=0$$

então, obtemos a equação

$$-\gamma s(y)+\frac{1}{2}s^2(y)+\delta s''(y)-\varepsilon s'(y)=0. \tag{2.9}$$

Portanto, em decorrência das condições assintóticas (2.7) e (2.8) a equação (2.6) equivale a equação (2.9).

Lema 2.1 *Seja s uma solução não constante de (2.6) satisfazendo (2.7) e (2.8). Então, $\gamma>0$ e $s_o=2\gamma$.*

Demonstração: Fazendo $y\to-\infty$ em (2.9), e aplicando (2.7) e (2.8), obtemos

$$-\gamma s_o+\frac{1}{2}{s_o}^2=0$$

ou ainda,

$$s_o(-\gamma+\frac{1}{2}s_o)=0$$

conseqüentemente, obtemos $s_o = 0$ ou $s_o = 2\gamma$. Agora multiplicando (2.9) por s' e integrando em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dy}(s^2(y))+\frac{1}{6}\frac{d}{dy}(s^3(y))+\frac{\delta}{2}\frac{d}{dy}(s'(y))^2-\varepsilon(s'(y))^2\right)dy=0$$

ainda pelas condições (2.7) e (2.8) obtemos a equação

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(s'(y))^2\,dy=\frac{\gamma}{2}{s_o}^2-\frac{1}{6}{s_o}^3 \tag{2.10}$$

como o lado direito é limitado, concluímos que o lado esquerdo, também, é limitado. E ainda se $s_o = 0$, temos

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(s'(y))^2\,dy=0$$

portanto, $s'(y) = 0 \quad \forall y$, e deste modo s é uma função constante, o que viola nossa hipótese. Portanto, $s_o = 2\gamma$. Por isso, de (2.10)

$$0<\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(s'(y))^2\,dy=\frac{\gamma}{2}(2\gamma)^2-\frac{1}{6}(2\gamma)^3=\frac{2}{3}\gamma^3,$$

portanto, $\gamma > 0$ completando a demonstração do lema.

■

Corolário 2.1 *Seja $u(x,t) = S(x-ct)$, $c > 0$, uma solução onda viajante não constante de (2.1) que satisfaz as condições (2.3) e (2.4). Então,*

$$S_L - S_R = 2\gamma = 2(c - S_R) > 0 \tag{2.11}$$

ou equivalentemente,

$$c > S_R \quad e \quad S_L + S_R = 2c \tag{2.12}$$

Demonstração: Seja $u(x,t) = S(x-ct)$, uma solução não constante da equação (2.1) onde, são satisfeitas as condições (2.3) e (2.4). Fazendo $\xi = x - ct$, e pela normalização $s(\xi) = S(\xi) - S_R$ obtemos (2.6) com $\gamma = c - S_R$ satisfazendo (2.7) e (2.8). Deste modo, como conseqüência direta do Lema 2.1 temos

$$\gamma > 0 \quad \text{e} \quad s_0 = 2\gamma,$$

conseqüentemente,

$$S_L - S_R = 2\gamma = 2(c - S_R) > 0$$

então,

$$S_L + S_R = 2c.$$

Deste modo, está demonstrado o corolário. ■

Lema 2.2 *Seja* s *uma solução não constante de (2.6). Suponhamos que* $s'(\xi_o) = 0$ *para algum* $\xi_o \in \mathbb{R}$. *Então,* ξ_o *é um ponto extremo isolado de* s *de tal modo que:*

a) *Se* $s(\xi_o) \in (0, 2\gamma)$, *então* $s(\xi_o)$ *é um valor mínimo local de* s,

b) *Se* $s(\xi_o) \notin [0, 2\gamma]$, *então* $s(\xi_o)$ *é um valor máximo local de* s.

Além disso, se s *tem um máximo num ponto* ξ_1 *onde* $s(\xi_1) < 0$, *então* $s(\xi) < s(\xi_1)$ *para todo* $\xi \neq \xi_1$.

Demonstração: Suponhamos que $s'(\xi_o) = 0$ para algum ξ_o e substituindo em (2.9) com $y = \xi_o$, segue

$$-\gamma s(\xi_o) + \frac{1}{2}s^2(\xi_o) + \delta s''(\xi_o) = 0$$

ou ainda,

$$\delta s''(\xi_o) = \frac{1}{2}s(\xi_o)(2\gamma - s(\xi_o)),$$

de onde concluímos que se $s(\xi_o) = 0$, ou $s(\xi_o) = 2\gamma$ então $s''(\xi_o) = 0$. Daí, considerando $s''(\xi_o) = 0$ e como $s'(\xi_o) = 0$, podemos definir uma variável dependente $r = \delta s'$ obtendo, assim, os seguintes PVI(s)

$$\begin{cases} s' = \delta^{-1} r \\ r' = \gamma s + \varepsilon\delta^{-1} r - \frac{1}{2}s^2 \\ (s(\xi_o), r(\xi_o)) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s' = \delta^{-1} r \\ r' = \gamma s + \varepsilon\delta^{-1} r - \frac{1}{2}s^2 \\ (s(\xi_o), r(\xi_o)) = (2\gamma, 0) \end{cases}, \tag{2.13}$$

onde ambos nos resultam em uma solução $(s(\xi), r(\xi))$ do sistema (2.14) constante , conseqüentemente, temos $s(\xi)$ é constante o que contrária nossa hipótese. Portanto, $s''(\xi_o) \neq 0$, deste modo, ξ_o é um ponto crítico isolado de s. E ainda, observamos que ξ_o é ponto de mínimo local de s se $s(\xi_o) \in (0, 2\gamma)$, pois neste caso teremos $s''(\xi_o) > 0$ provando assim o item (a), e ξ_o é um ponto máximo de s se $s(\xi_o) \notin [0, 2\gamma]$, pois temos $s''(\xi_o) < 0$ o que prova o item (b).

Agora ao considerarmos que s tenha um ponto de máximo num ponto ξ_1 com $s(\xi_1) < 0$. Pelo que acabamos de provar ξ_1 é um ponto crítico isolado local. Suponhamos que a conclusão desejada é falsa, então existe um ponto ξ_2 próximo a ξ_1 em que $s(\xi_2) = s(\xi_1)$. Entretanto, no intervalo entre ξ_1 e ξ_2, s tem que tomar um valor mínimo local, o que contrária o item (a). Assim, completamos a prova do lema.

■

Como na prova do lema anterior definamos uma variável auxiliar dependente $r = \delta s'$. Então, (2.9) é equivalente ao sistema autônomo

$$\begin{cases} \mathbf{s}' = \delta^{-\mathbf{1}}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}' = \gamma\mathbf{s} + \varepsilon\delta^{-\mathbf{1}}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{s}^{\mathbf{2}}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Este sistema tem exatamente dois pontos críticos. Fazendo $(s', r') = (0, 0)$ segue,

$$r = 0 \quad e \quad s(\gamma - \frac{1}{2}s) = 0,$$

conseqüentemente, obtemos $(0, 0)$ e $(2\gamma, 0)$ como os únicos pontos críticos do sistema (2.14). Agora, será feita um análise das propriedades destes pontos críticos. O sistema (2.14) pode ser escrito matricialmente como

$$\begin{bmatrix} s' \\ r' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} + f(s, r) \tag{2.15}$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{-1} \\ \gamma & \varepsilon\delta^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad f(s, r) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}s^2 \end{bmatrix}.$$

Analisando o sistema (2.14) nas proximidades do ponto crítico $(0,0)$, podemos observar que $\|f(s,r)\|$ é pequeno em relação a $\|(s,r)\|$ na vizinhança do ponto crítico $(0,0)$, já que

$$\frac{\|f(s,r)\|}{\|(s,r)\|} = \frac{\sqrt{0^2+(-\frac{1}{2}s^2)^2}}{\sqrt{s^2+r^2}} = \frac{|\, s^2 \,|}{2\sqrt{s^2+r^2}} \to 0,$$

Deste modo, na origem o sistema (2.14) linearizado correspondente é dado por

$$\begin{bmatrix} s' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{-1} \\ \gamma & \varepsilon\delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix},$$

através do qual obtemos os autovalores como solução da equação

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \delta^{-1} \\ \gamma & \varepsilon\delta^{-1}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é,

$$\lambda^2 - \varepsilon\delta^{-1}\lambda - \lambda\delta^{-1} = 0, \tag{2.16}$$

portanto,

$$\lambda\pm = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2+4\gamma\delta}}{2\delta} \tag{2.17}$$

os quais são reais tais que $\lambda_- < 0 < \lambda_+$. Deste modo, o sistema de equações (2.14) tem um ponto de sela estável nas proximidades do ponto $(0,0)$.

Agora faremos a mesma análise para o ponto crítico $(2\gamma,0)$. Observemos que para fazer esta análise será necessário fazer uma translação para origem, assim, façamos as seguintes modificações $Z = s-2\gamma$ e $R = r$, que nos resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} Z' &= \delta^{-1}R \\ R' &= \gamma s + \varepsilon\delta - 1r\frac{1}{2}s^2 \\ &= \gamma Z + 2\gamma^2 + \varepsilon\delta^{-1}R - \frac{1}{2}(Z^2+4\gamma Z+4\gamma^2) \\ &= -\gamma Z + \varepsilon\delta^{-1}R - \frac{1}{2}Z^2 \end{cases}$$

Portanto, temos o seguinte sistema autônomo não linear,

$$\begin{bmatrix} Z' \\ R' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} Z \\ R \end{bmatrix} + g(Z,R) \tag{2.18}$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{-1} \\ -\gamma & \varepsilon\delta^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(Z,R) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}Z^2 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

equivalendo, assim, ao sistema (2.14) tendo como origem o ponto $(2\gamma, 0)$, onde fazendo $(Z,R) \to (0,0)$ obtemos $\frac{\|g(Z,R)\|}{\|(Z,R)\|} \to 0$. Conseqüentemente, o sistema (2.14) pode ser linearizado na vizinhança do ponto $(2\gamma, 0)$, deste modo, o sistema linear aproximado correspondente é dado por

$$\begin{bmatrix} s' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{-1} \\ -\gamma & \varepsilon\delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2\gamma \\ r \end{bmatrix},$$

em que os autovalores são obtidos pela equação

$$\begin{vmatrix} -\Lambda & \delta^{-1} \\ -\gamma & \varepsilon\delta^{-1} - \Lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou ainda,

$$\Lambda^2 - \varepsilon\delta^{-1}\Lambda + \gamma\delta^{-1} = 0, \tag{2.20}$$

deste modo, temos

$$\Lambda\pm = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma\delta}}{2\delta} \tag{2.21}$$

Observemos que $(2\gamma, 0)$ é um ponto nodal se $\varepsilon^2 \geq 4\gamma\delta$ pois, neste caso temos $\Lambda_+ > \Lambda_- > 0$ e $(2\gamma, 0)$ é um ponto espiral se $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$, já que, $\Lambda\pm$ é do tipo $\alpha \pm i\mu$. Como $Re(\Lambda\pm) > 0$, independentemente do tamanho relativo de ε e δ, assim, $(2\gamma,0)$ é sempre um ponto instável.

Lema 2.3 *O sistema (2.14) não admite solução periódica não constante.*

Demonstração: Seja (s_p,r_p) uma solução não constante periódica de (2.14), cujo período é $p>0$, deste modo s_p é uma solução de (2.9). Assim, multiplicando (2.9) por s_p' obtemos

$$-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dy}(s_p^2(y))+\frac{1}{6}\frac{d}{dy}(s_p^3(y))+\frac{\delta}{2}\frac{d}{dy}((s_p'(y))^2)-\varepsilon(s_p'(y))^2=0,$$

como s_p é periódica segue s_p' também é periódica de período p, assim, integrando esta última equação sobre $[0,p]$, obtém-se

$$\varepsilon\int_0^p(s_p'(y))^2\,dy=\int_0^p\frac{d}{dy}\left(\frac{\gamma}{2}s_p(y)^2-\frac{1}{6}s_p(y)^3+\delta s_p'(y)\right)dy=0,$$

como o integrando acima é positivo, concluímos que $s_p'(y)=0$ para todo $y\in[0,p]$. Como s_p' é periódica de período p, então $s_p'(y)=0$, para todo $y\in\mathbb{R}$ e conseqüentemente s_p é constante, contradizendo nossa hipótese. Assim, o lema está demonstrado.

■

Seja $\mathscr{R}$ qualquer órbita limitada do sistema (2.14). Agora é feita uma análise dos seus estados assintóticos em $+\infty$ e $-\infty$, isto é, de seus conjuntos ω-limite e α-limite respectivamente. Por não existir solução periódica não constante para o sistema, ambos conjuntos ω-limite e α-limite contém pontos críticos do sistema. Como estes conjuntos são conectados, cada um deles devem conter exatamente um ponto crítico. De (2.14) as condições assintóticas (2.3) são satisfeitas para esta órbita. Os limite quando $\xi\to\pm\infty$ não podem ser os mesmos pois, caso contrário teríamos uma solução S de (2.2) onde $S_R=S_L$ o que não é possível, já que isto nos conduz a uma solução S em que $S_L-S_R=0$ caso este que é inteiramente excluído pelo Corolário (2.1). Assim, qualquer órbita limitada do sistema (2.14) conecta os pontos críticos $(0,0)$ e $(2\gamma,0)$. Como $(0,0)$ é um ponto estável e $(2\gamma,0)$ é um ponto instável então, $\mathscr{R}$ tem que convergir a $(0,0)$ em $+\infty$ e a $(2\gamma,0)$ em $-\infty$. Além disso, $(0,0)$ é um ponto de sela, logo deve haver exatamente duas semi-órbitas de (2.14) que assintoticamente convergem a $(0,0)$ quando $\xi\to+\infty$. A solução do sistema (2.14) é topologicamente equivalente a solução do sistema $X' = BX$ onde $B = P^{-1}AP$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{-1} \\ \gamma & \varepsilon\delta^{-1} \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ \frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\gamma\delta}}{2}s_1 & \frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4\gamma\delta}}{2}s_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}$$

como $(0,0)$ é um ponto de sela temos

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{bmatrix},$$

deste modo $s' = \lambda_- s$, e conseqüentemente,

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{r(\xi)}{s(\xi)} = \delta \lim_{\xi\to+\infty} \frac{s'(\xi)}{s(\xi)} = \delta\lambda_-$$

portanto, ambas semi-órbitas aproximam-se de $(0,0)$ num ângulo cuja tangente é $\delta\lambda_-$. Isto quer dizer, que uma semi-órbita tende a $(0,0)$ pelo quarto quadrante $Q_4 = \{(s,r)|s>0, r<0\}$ no retrato de fase, enquanto, a outra aproxima-se de $(0,0)$ pelo segundo quadrante $Q_2 = \{(s,r)|s<0, r>0\}$. Pelas análises anteriores, a continuação de uma ou de outra semi-órbita para todo $\xi \in \mathbb{R}$ nos fornece a única possibilidade para uma órbita limitada, que será estabelecido pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1 *Sejam γ, δ e ε números positivos dados, então existe uma única órbita limitada $\mathscr{R}$ do sistema (2.14). Além disso, $\mathscr{R} \subseteq \{(s,r)|0 < s < 3\gamma\}$ onde $\mathscr{R}$ tende a $(2\gamma,0)$ em $-\infty$ e a $(0,0)$ em $+\infty$.*

Demonstração: Seja $(s(\xi), r(\xi))$ uma solução de (2.14) definida para um ξ suficientemente grande que correspondem a uma das duas semi-órbitas que aproximam-se da origem. Assim, ambas funções $s(\xi)$ e $r(\xi)$ tendem a 0 quando $\xi \to +\infty$. De $(2.14)_1$, segue

$$\lim_{\xi\to+\infty} s'(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} \delta^{-1} r(\xi) = 0,$$

agora por $(2.14)_2$ temos

$$\lim_{\xi\to+\infty} s''(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{1}{\delta}\left(\gamma s + \varepsilon\delta^{-1} r - \frac{1}{2}s^2\right) = 0.$$

Derivando $(2.14)_2$ obtemos que $s'''(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$. Continuando com este processo, temos

$$\lim_{\xi\to+\infty} s^{(j)}(\xi) = 0, \quad \forall j \geq 0. \tag{2.22}$$

Como $(s(\xi), r(\xi))$ satisfaz (2.14), segue que s satisfaz (2.9), multiplicando (2.9) por s' obtemos

$$-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{d\xi}(s^2(\xi)) + \frac{1}{6}\frac{d}{d\xi}(s^3(\xi)) + \frac{\delta}{2}\frac{d}{d\xi}((s'(\xi))^2) - \varepsilon(s'(\xi))^2 = 0,$$

integrando esta equação sobre o intervalo $[y,\infty)$, e pelas condições em (2.22), segue

$$\frac{\gamma}{2}s^2(y) - \frac{1}{6}s^3(y) = \frac{\delta}{2}(s'(y))^2 + \varepsilon\int_y^\infty (s'(\xi))^2 d\xi,$$

pelo Lema (2.2), sabe-se que os zeros de s' são isolados, logo existe uma vizinhança V de cada zero de s' tal que $V \subset [y,\infty)$, de modo que

$$\int_V (s'(\xi))^2 d\xi > 0,$$

conseqüentemente,

$$\frac{\gamma}{2}s^2(y) - \frac{1}{6}s^3(y) \geqslant \varepsilon\int_V (s'(\xi))^2 d\xi > 0,$$

assim, para todo y temos

$$s^2(y)(3\gamma - s(y)) > 0$$

concluindo que $s(y) < 3\gamma$ e que $s(y)$ nunca se anula.

Consideremos $\mathscr{R}_o$ a semi-órbita que se aproxima de $(0,0)$ por Q_2. Portanto, para um ξ suficientemente grande $s(\xi) < 0$. Como vimos s nunca se anula, logo esta órbita tem que ter $s(\xi) < 0$, para todo ξ, os quais a solução s é definida. Assim, esta órbita não pode convergir a $(2\gamma, 0)$ quando

$\xi \to -\infty$, em conseqüência desta observação esta órbita não poderá ser limitada.

Logo, a única possibilidade para uma órbita limitada encontra-se no caso em que a semi-órbita representada por $(s(\xi), r(\xi))$ aproxima-se de $(0,0)$ por Q_4. Como $s(\xi) > 0$ para ξ suficientemente grande, segue que $s(\xi) > 0$ para todo ξ cuja solução é definida, sabendo que s nunca se anula. Assim, $s(\xi) \in (0, 3\gamma)$ para todo ξ sobre o qual s estende-se.

Como a função $f(s,r) = (\delta^{-1}r, \gamma s + \varepsilon\delta^{-1}r - \frac{1}{2}s^2)$, determinada por (2.14), é localmente Lipschitiziana e pelo teorema de extensão, está garantido que $\mathscr{R}$ estende-se sobre todo $\xi \in \mathbb{R}$ ou a mesma não é limitada. Como $s(\xi)$ é limitada, se mostrarmos que r também é limitada o teorema estará demonstrado.

Primeiramente, afirmamos que $r(\xi) \geq -\dfrac{\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$ para todo ξ. Suponhamos que isto não ocorra, isto é, que exista $\xi_1 \in \mathbb{R}$ tal que $r(\xi_1) < -\dfrac{\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$, então existe β tal que $r(\xi_1) < \beta < -\dfrac{\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$, definamos $\mu > 0$ de tal modo que $\mu = -\beta$. Como que $r(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, existirá um maior elemento ξ_o tal que $r(\xi_o) = -\mu$, e ainda para todo $\xi > \xi_o$ temos $r(\xi) > r(\xi_o)$. Pois caso contrário, existirá $\xi_2 > \xi_o$ tal que $r(\xi_2) \leq r(\xi_o)$, se $r(\xi_2) = r(\xi_o)$ teremos uma contradição ao fato de ξ_o ser o maior elemento tal que $r(\xi_o) = -\mu$. Agora se $r(\xi_2) < r(\xi_o)$, como $r(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$ existirá um ponto $\xi_3 \in (\xi_2, +\infty)$ tal que $r(\xi_3) = -\mu$ contradizendo a maximalidade de ξ_o. Por esta razão, passando o limite a direita de ξ_o temos $r'(\xi_o) \geq 0$. Mas, de (2.14)

$$r'(\xi_o) = \varepsilon\delta^{-1}r(\xi_o) + \gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2}s^2(\xi_o) = -\mu\varepsilon\delta^{-1} + \gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2}s^2(\xi_o).$$

além disso,

$$\gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2}s^2(\xi_o) = -\frac{1}{2}[s^2(\xi_o) - 2\gamma s(\xi_o) + \gamma^2] + \frac{1}{2}\gamma^2 = -\frac{1}{2}(s(\xi_o) - \gamma)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2,$$

mas $0 < s(\xi) < 3\gamma$ (observemos que s pode assumir o valor γ), portanto

$$\gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2}s^2(\xi_o) = -\frac{1}{2}(s(\xi_o) - \gamma)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \leq \frac{1}{2}\gamma^2,$$

conseqüentemente,

$$r'(\xi_o) = -\mu\varepsilon\delta^{-1} + \gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2}s^2(\xi_o) = -\mu\varepsilon\delta^{-1} + \frac{1}{2}\gamma^2 \leq 0.$$

nos gerando uma contradição. Agora mostremos de modo similar que $r(\xi) < \dfrac{3\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$ para todo ξ. De fato, suponhamos por contradição que exista $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $r(\xi) \geq \dfrac{3\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$. Como $r(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$ vai existir um maior elemento $\overline{\xi}$ tal que $r(\overline{\xi}) = \dfrac{3\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$. É possível também observar, que para todo $\xi > \overline{\xi}$, $r(\xi) < r(\overline{\xi})$. De fato, suponhamos que exista $\xi_2 > \overline{\xi}$ tal que $r(\xi_2) \geq r(\overline{\xi})$ então, se concidérando $r(\xi_2) = r(\overline{\xi})$ temos imediatamente uma contradição a maximalidade de $\overline{\xi}$ e se $r(\xi_2) > r(\overline{\xi})$, como $r(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$ vai existir pelo menos um $\xi_3 > \xi_2$, tal que $r(\xi_3) = \dfrac{3\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$ o que contraria a maximalidade de $\overline{\xi}$. Portanto, existe um maior elemento $\overline{\xi}$ tal que $r(\overline{\xi}) = \dfrac{3\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$, onde $r(\xi) < r(\overline{\xi})$ sempre que $\xi > \overline{\xi}$. Assim, passando o limite a direita de $\overline{\xi}$ podemos concluir que $r'(\overline{\xi}) \leq 0$. Mas por outro lado, sabemos que $s < 3\gamma$ e por (2.14) temos

$$r'(\xi_1) = -\varepsilon\delta^{-1}r(\xi_1) + \gamma s(\xi_1) - \frac{1}{2}s^2(\xi_1) = \frac{-3\gamma^2}{2} + \gamma s(\xi_1) - \frac{1}{2}s^2(\xi_1) > 0$$

já que,

$$3\gamma^2 + \gamma s(\xi_1) \leq \frac{3\gamma^2}{2} + 3\gamma^2$$

deste modo,

$$\frac{-3\gamma^2}{2} + \gamma s(\xi_1) - \frac{1}{2}s^2(\xi_1) > \frac{-3\gamma^2}{2} + 3\gamma^2 - \frac{9\gamma^2}{2} = 0$$

o que nos gera um contradição. Assim, concluímos que $r(\xi)$ é limitada, conseqüentemente a órbita em questão é limitada e definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$, a qual por discussões anteriores converge a $(2\gamma, 0)$ quando $\xi \to -\infty$. E ainda, com relação a esta órbita temos que as funções $s(\xi)$ e $r(\xi)$ tendem a 2γ e a 0 respectivamente quando $\xi \to -\infty$, imediatamente, temos que $s'(\xi) = \delta^{-1}r(\xi)$ tende a 0 quando $\xi \to -\infty$, agora de $(2.14)_2$ temos

$$r'(\xi) = \gamma s(\xi) + \varepsilon\delta^{-1}r(\xi) - \frac{1}{2}s^2(\xi), \quad \forall\xi$$

assim, obtemos $s''(\xi) \to 0$ quando $\xi \to -\infty$. E derivando mais uma vez $(2.14)_2$ obtemos $s'''(\xi) \to 0$ quando $\xi \to -\infty$. Continuando com este processo temos $s^{(j)}(\xi) \to 0$ quando $\xi \to -\infty, \quad \forall j \geq 1$. Deste modo, está provado o teorema. ■

Corolário 2.2 *Sejam c, ε e δ constantes positivas e suponhamos que $c, S_R,$ e S_L satisfazem (2.12). Então, a menos de translações da variável independente ξ, existe uma única solução onda viajante $S(\xi)$ de (2.2) satisfazendo as condições em (2.3) e (2.4).*

Demonstração: Seja $\gamma = c - S_R$ como já definida anteriormente. Pelo teorema anterior, concluímos que existe uma única solução (a menos de translação) $(\bar{s}(\xi), \bar{r}(\xi))$ para o sistema (2.14), tal que, $\bar{s}(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$ e $\bar{s}(\xi) \to 2\gamma$ quando $\xi \to -\infty$. Além disso, $\bar{s}^{(j)}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$ para todo $j \geq 1$.

Fazendo $\overline{S}(\xi) = \bar{s}(\xi) + S_R$, por (2.9) temos,

$$\delta \overline{S}''(\xi) = \gamma(\overline{S}(\xi) - S_R) + \varepsilon \overline{S}'(\xi) - \frac{1}{2}(\overline{S}(\xi) - S_R)^2,$$

e derivando esta equação tem-se

$$\delta \overline{S}'''(\xi) = \gamma \overline{S}'(\xi) + \varepsilon \overline{S}''(\xi) - (\overline{S}(\xi) - S_R)\overline{S}'(\xi)$$

isto é,

$$-(\gamma + S_R)\overline{S}'(\xi) + \overline{S}(\xi)\overline{S}'(\xi) + \delta \overline{S}'''(\xi) - \varepsilon \overline{S}'' = 0,$$

portanto, $\overline{S}(\xi)$ é uma solução para (2.2) onde,

$$\lim_{\xi \to +\infty} \overline{S}(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} \bar{s}(\xi) + S_R = S_R \quad e \quad \lim_{\xi \to -\infty} \overline{S}(\xi) = \lim_{\xi \to -\infty} \bar{s}(\xi) + S_R = S_L,$$

e ainda,

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \overline{S}^{(j)}(\xi) = \lim_{|\xi| \to +\infty} \bar{s}^{(j)}(\xi) = 0 \quad \forall j \geq 1,$$

assim, (2.3) e (2.4) são satisfeitas. Seja S qualquer solução de (2.2) satisfazendo (2.3),com $s(\xi) = S(\xi) - S_R$ como antes. Então, s é solução de (2.6) satisfazendo (2.7)com $s_o = 2\gamma$. Agora, reescrevendo (2.6) da seguinte forma

$$\frac{d}{d\xi}\left(-\gamma s(\xi) + \frac{1}{2}s^2(\xi) + \delta s''(\xi) - \varepsilon s'(\xi)\right) = 0,$$

existirá uma constante μ, de tal modo que,

$$-\gamma s(\xi) + \frac{1}{2}s^2(\xi) + \delta s''(\xi) - \varepsilon s'(\xi) = \mu, \tag{2.23}$$

se μ é igual a zero então, s é um solução de (2.9), e portanto,

$$\{(s(\xi), \delta s'(\xi)) : -\infty < \xi < +\infty\},$$

é uma órbita limitada do sistema (2.14). Como pelo teorema anterior existe uma única órbita, a menos de translação da variável independente ξ, assim, $s \equiv \bar{s}$, e consequentemente, $S \equiv \overline{S}$. Por esta razão, o teorema estrará concluido se tivermos μ igual a zero.

Suponhamos por contradição que $\mu \neq 0$, deste modo temos dois casos a considerar $\mu > 0$ e $\mu < 0$. Como $s(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, (2.23) implicará em

$$\lim_{\xi \to +\infty}\left(-\gamma s(\xi) + \frac{1}{2}s^2(\xi) + \delta s''(\xi) - \varepsilon s'(\xi)\right) = \mu \iff \lim_{\xi \to +\infty}\big(\delta s''(\xi) + \varepsilon s'(\xi)\big) = \mu,$$

assim, no caso $\mu > 0$ para $\frac{\mu}{2}$ existirá ξ_o, tal que, para $\xi > \xi_o$ temos

$$\mu - \frac{\mu}{2} \leq \delta s'' - \varepsilon s' \iff \frac{\mu}{2} \leq \delta s'' - \varepsilon s',$$

integrando temos,

$$\frac{\mu}{2}\xi + C \leq \delta s' - \varepsilon s, \quad (\text{C} = \text{ const. de integração})$$

e no caso $\mu < 0,$ para $-\dfrac{\mu}{2}$ existirá $\xi_o,$ tal que, para $\xi > \xi_o$ temos

$$\delta s'' - \varepsilon s' \leq \mu + \left(-\frac{\mu}{2}\right) = \frac{\mu}{2},$$

integrando temos,

$$\delta s' - \varepsilon s \leq \frac{\mu}{2}\xi + C'. \quad \big(C' = \text{ const. de integração}\big)$$

Fazendo $\nu = \dfrac{\mu}{2}$ com $\mu > 0,$ temos no primeiro caso em que $\mu > 0,$

$$\nu\xi + C \leq \delta s' - \varepsilon s,$$

e no caso $\mu < 0,$ então

$$\delta s' - \varepsilon s \leq -\nu\xi + C'.$$

Como $s(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty,$ logo dado $\eta > 0$ existirá $\xi_1 > 0,$ tal que, para $\xi > \xi_1$ temos $\mid s(\xi) \mid < \eta.$ Assim, no caso em que $\mu > 0$ tomando $\dfrac{\alpha + C}{\varepsilon} > 0,$ existirá $\xi' = max\{\xi_o, \xi_1\},$ tal que, para $\xi > \xi'$ temos $\mid s(\xi) \mid < \dfrac{\alpha + C}{\varepsilon},$ e consequentemente,

$$\nu\xi + C + \varepsilon s(\xi) \leq \delta s'(\xi) \iff \frac{\nu}{\delta}\xi - \frac{\alpha}{\delta} \leq s'(\xi),$$

agora para $y > \xi',$ como

$$s(\xi) - s(y) = \int_y^{\xi} s'(t)dt, \tag{2.24}$$

fazendo $\xi \to +\infty,$

$$s(y) = \int_y^{\infty} -s'(t)dt \leq \int_y^{\infty} -\frac{\nu}{\delta}\xi + \frac{\alpha}{\delta} = \left[-\xi\left(\frac{\nu}{2\delta}\xi - \frac{\alpha}{\delta}\right)\right]_y^{\infty}$$

agora, no caso em que $\mu < 0$, para $\dfrac{\alpha - C'}{\varepsilon} > 0$, existirá $\xi' = max\{\xi_o, \xi_1\}$, tal que, para $\xi > \xi'$ temos $| \, s(\xi) \, | < \dfrac{\alpha - C'}{\varepsilon}$ e assim,

$$\delta s'(\xi) \leq -\nu\xi + C' + \varepsilon s(\xi) \leq \alpha - \nu\xi \iff s'(\xi) \leq -\frac{\nu}{\delta}\xi + \frac{\alpha}{\delta},$$

e de modo similar para $y > \xi'$, em (2.24) fazendo $\xi \to +\infty$,

$$s(y) = \int_y^{\infty} -s'(t)dt \geq \int_y^{\infty} \frac{\nu}{\delta}\xi - \frac{\alpha}{\delta} = \left[\xi\left(\frac{\nu}{2\delta}\xi - \frac{\alpha}{\delta}\right)\right]_y^{\infty}.$$

Portanto, em ambos os casos a integral é divergente. Assim, obtemos uma contradição, pois, s é limitada, assim, $\mu = 0$. Deste modo, o corolário esta concluído. ■

Capítulo

3

Geometria da Onda Viajante

Agora será dada uma descrição mais detalhada da solução onda viajante de (2.1). Será mostrado que se a difusão domina, isto é, $\varepsilon^2 \geq 4\gamma\delta$, então S decresce monotonicamente de S_L a S_R quando $\xi \to +\infty$. Enquanto, se a dispersão domina no sentido que $4\gamma\delta > \varepsilon^2$, então S é monótona decrescente e convexa quando $\xi \to +\infty$, mas oscilando infinitamente sempre quando $\xi \to -\infty$. Para obtermos estas informações usaremos uma analise global do campo vetorial associado ao sistema (2.14).

3.1 Difusão Domina ($\varepsilon^2 \geq 4\gamma\delta$)

Teorema 3.1 *Seja $s(\xi) = s(\xi, \varepsilon, \delta)$ a única solução de (2.6) satisfazendo (2.7) e (2.8). Então, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ temos $0 < s(\xi) < 2\gamma$ e $s'(\xi) < 0$. Além disso, existe um único ponto de inflexão ρ_o de s tal que $(\xi - \rho_o)s''(\xi) > 0$ para $\xi \neq \rho_o$.*

Demonstração: Seja $(s(\xi), r(\xi))$ uma solução do sistema (2.14), representando a órbita limitada $\mathscr{R}$ obtida no Teorema 2.1. Então, $(s(\xi), r(\xi)) \to (0,0)$ em Q_4 quando $\xi \to +\infty$. Conseqüentemente, como $(0,0)$ é localmente um ponto de sela do sistema (2.14), para valores grandes de ξ, $s(\xi) > 0$ e $r(\xi) < 0$.

Agora demonstraremos que $r(\xi) < 0,$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Primeiramente, notemos que a órbita $\mathscr{R}$ não intercepta o eixo-r, pois se existir um ξ_1 tal que a órbita $\mathscr{R}$ intercepta o eixo-r, teria necessariamente $s(\xi_1) = 0$, que não é possível, visto que $\mathscr{R} \subseteq \{(s,r) : 0 < s < 3\gamma\}$. Além disso, $\mathscr{R}$ não pode interceptar no Q_4 o segmento de reta

$$l_o = \{(s,r) : r = 0 \quad e \quad 0 \leq s \leq 2\gamma\}.$$

De fato, se o contrário ocorrer, significa que existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $(s(\xi), r(\xi)) \in l_o$, consideremos ξ_o o maior valor para que $(s(\xi), r(\xi)) \in l_o$. Assim, para $\xi > \xi_o$, por hipótese estaremos no caso em que $r(\xi) < 0$. Portanto, passando o limite quando $\xi \to \xi_o^+$ temos $r'(\xi_o) \leq 0$. Como $r(\xi_o) = 0$, e por $(2.14)_2$

$$r'(\xi_o) = \gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2} s(\xi_o)^2$$

e se $s(\xi_o) = 0$ ou $s(\xi_o) = 2\gamma$ temos o PVI em (2.14) com a condições inicial $(0,0)$ ou $(2\gamma, 0)$ e pelo teorema de existência e unicidade temos solução $(s(\xi), r(\xi))$ constante em ambos os casos, assim, $r'(\xi_o) > 0$ o que é uma contradição. Portanto, $\mathscr{R}$ não intercepta l_o.

Definamos,

$$l = \{(s,r) : r = m(s - 2\gamma), 0 \leq s \leq 2\gamma\} \tag{3.1}$$

onde

$$m = \frac{1}{2}[\varepsilon - (\varepsilon^2 - 4\gamma\delta)^{\frac{1}{2}}]$$

notemos que $m > 0$, já que $\varepsilon^2 \geq 4\gamma\delta$. Agora mostraremos que órbita $\mathscr{R}$ nunca ultrapasse o segmento de reta l. Suponhamos por contradição que isto ocorra, seja ξ_o o maior valor para o qual $(s(\xi), r(\xi)) \in l$. Segue que $0 \leq s(\xi_o) < 2\gamma$ (se $s(\xi_o) = 2\gamma$ como anteriormente teremos uma solução $(s(\xi), r(\xi))$ constante),

$$r(\xi_o) = m(s(\xi_o) - 2\gamma), \tag{3.2}$$

como $r(\xi) < m(s(\xi) - 2\gamma)$ para ξ suficientemente próximo de ξ_o com $\xi < \xi_o$,

$$\frac{r(\xi) - r(\xi_o)}{s(\xi) - s(\xi_o)} = \frac{r(\xi) - m(s(\xi_o) - 2\gamma)}{s(\xi) - s(\xi_o)} < \frac{m(s(\xi) - 2\gamma) - m(s(\xi_o) - 2\gamma)}{s(\xi) - s(\xi_o)} = m$$

assim,

$$\frac{r'(\xi_o)}{s'(\xi_o)} \leq m$$

mas por outro lado, de (2.14),

$$m \geq \frac{r'(\xi_o)}{s'(\xi_o)} = \frac{\gamma s(\xi_o) - \frac{1}{2}s(\xi_o)^2 + \varepsilon\delta^{-1}r(\xi_o)}{\delta^{-1}r(\xi_o)}$$

$$= \varepsilon - \frac{s(\xi_o)(s(\xi_o) - 2\gamma)}{2\delta^{-1}m(s(\xi_o) - 2\gamma)} = \varepsilon - \frac{\delta s(\xi_o)}{2m}$$

conseqüentemente,

$$m^2 - \varepsilon m + \frac{1}{2}\delta s(\xi_o) \geq 0$$

mas, pela definição de m e por (2.20) segue,

$$m^2 - \varepsilon m + \frac{1}{2}\delta s(\xi_o) = m^2 - \varepsilon m + \gamma\delta - \gamma\delta + \frac{1}{2}\delta s(\xi_o) = \frac{\delta(s(\xi_o) - 2\gamma)}{2}$$

como $s(\xi_o) < 2\gamma$, obtemos

$$m^2 - \varepsilon m + \frac{1}{2}\delta s(\xi_o) < 0$$

o que é uma contradição. Portanto, a órbita não ultrapassa o segmento de reta l.

Esta órbita $\mathscr{R}$ está no subconjunto do quarto quadrante limitado pelo eixo-r e os segmentos de reta l e l_o. Por esta razão, temos que $r(\xi) < 0, \forall\xi$, em particular temos $s'(\xi) < 0, \forall\xi$. Conseqüentemente, concluímos que s decresce monotonicamente de 2γ a 0 quando ξ cresce, onde 2γ e 0 são os limites de s quando tende a $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente. Além disso, pela definição de r temos que $s'(\xi) \to 0$ quando $\xi \to \infty$, deste modo existe ξ tal que $s''(\xi) = 0$, ou ainda, $r'(\xi) = 0$. Agora provaremos que para os pontos ξ em que $r'(\xi) = 0$, são validas as seguintes propriedades:

a) Se $0 < s(\xi) < \gamma$, então ξ é um máximo local estrito de r

b) Se $\gamma < s(\xi) < 2\gamma$, então ξ é um mínimo local estrito de r

c) Se $s(\xi) = \gamma$ então ξ é um ponto de inflexão de r

De fato, por (2.14) temos:

$$r''(\xi) = s'(\xi)(\gamma - s(\xi)) + \varepsilon\delta^{-1} r'(\xi) = s'(\xi)(\gamma - s(\xi))$$

como $s'(\xi) < 0$, para todo ξ e se $s(\xi) \in (0, \gamma)$ teremos $r''(\xi) < 0$, conseqüentemente, são pontos de máximo para r, agora se tomarmos $s(\xi) \in (\gamma, 2\gamma)$, teremos $r''(\xi) > 0$, isto é, estes pontos são pontos de mínimo de r, deste modo estão verificados os ítens (a) e (b). Considerado o caso em que $s(\xi) = \gamma$ teremos $r'(\xi) = 0$, $r''(\xi) = 0$, e ainda

$$r'''(\xi) = s''(\xi)(\gamma - s(\xi)) - (s'(\xi))^2 + \varepsilon\delta^{-1} r''(\xi) = -(s'(\xi))^2,$$

como $s'(\xi) < 0, \forall \xi$, segue que $r'''(\xi) < 0, \forall \xi$, portanto nesta situação ξ é um ponto de inflexão de r, o que verifica o item (c).

Agora como $r(\xi) < 0$ para todo ξ e $r(\xi) \to 0$ quando $\xi \to \pm\infty$, logo r tem pelo menos um ponto de mínimo o qual é tomado em um ponto ξ_o. Afirmamos que ξ_o é o único mínimo local que r possui e conseqüentemente ξ_o é o único mínimo global de r. De fato, seja ξ_1 um mínimo local de r, então pelo item (b) $s(\xi_1) > \gamma$. Suponhamos $\xi_1 \neq \xi_o$, sem perda de generalidade, consideremos $\xi_o < \xi_1$. Então, entre ξ_o e ξ_1 tem de existir ao menos um ponto ξ_2 máximo local de r, como s é decrescente segue que $\gamma < s(\xi_1) < s(\xi_2)$. Por (b) ξ_2 é um ponto de mínimo o que é um absurdo, assim, ξ_o é o único mínimo de r. Portanto, se $r'(\xi) = 0$ para $\xi \neq \xi_o$, tem que $s(\xi) \leq \gamma$, pois se supormos que $s(\xi) > \gamma$ teremos pelo item (b) que o mesmo é um ponto de mínimo local de r, e deste modo teremos $\xi = \xi_o$ o que é uma contradição. Por outro lado, se $r'(\xi) = 0$ para algum ξ_3 em que $s(\xi_3) < \gamma$, por (a), ξ_3 é um máximo local de r, como $r(\xi) < 0$ e $r(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, logo deve existir $\overline{\xi} > \xi_3$ tal que r, tem um mínimo local em $\overline{\xi}$. Como s é decrescente temos que $s(\overline{\xi}) < s(\xi) < \gamma$, por (a), $\overline{\xi}$ é um ponto de máximo o que é uma contradição. Agora, se $r'(\xi) = 0$ e $s(\xi) = \gamma$ então, por (c), ξ é um ponto de inflexão de r. Por $(2.14)_2$ temos

$$0 = \gamma^2 + \varepsilon\delta^{-1} r(\xi) - \frac{1}{2}\gamma^2$$

$$r(\xi) = -\frac{\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$$

como no Teorema 2.1 foi mostrado que $r(\xi) \geq -\dfrac{\delta\gamma^2}{2\varepsilon}$, para todo ξ. Conseqüentemente, ξ não pode ser ponto de inflexão de r. Então, ξ_o é o único ponto onde r' e conseqüentemente também s'' se anulam, e $s(\xi_o) > \gamma$. Como ξ_o é o único mínimo global de r segue que para $\xi > \xi_o$, $s''(\xi) = r'(\xi) > 0$ e parar $\xi < \xi_o$, $s''(\xi) = r'(\xi) < 0$. Temos $(\xi - \xi_o)s''(\xi) > 0$ para todo $\xi \neq \xi_o$. Temos na figura 3.1 o comportamento de s e na figura 3.2 o comportamento desta solução $(s(\xi), r(\xi))$ limitada do sistema (2.14)neste caso em que a difusão domina. Assim, a demonstração do teorema esta concluída. 3.2.

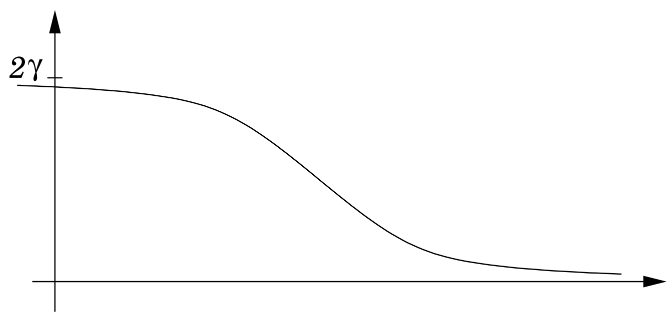

Figura 3.1:

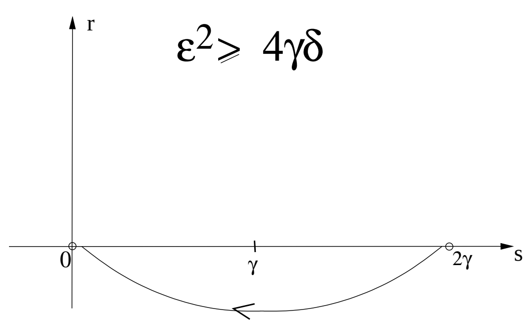

Figura 3.2: órbita limitada quando difusão é predominante

■

Corolário 3.1 *Sejam* ε, δ *e* c *constantes positivas dadas, e suponhamos que* c, S_R *e* S_L *satisfazem (2.12) tal que* $\gamma = c - S_R > 0$. *Seja* $S(\xi) = S(\xi, \varepsilon, \delta)$ *a única solução limitada de (2.2) (a menos de translação em* ξ*) satisfazendo as condições (2.3) e (2.4) . Se* $\varepsilon^2 \geq 4\gamma\delta$, *então* $S'(\xi) < 0$ *para todo* ξ *e* S *decresce monotonicamente de* S_L *a* S_R, *quando* ξ *cresce . Além disso, existe um ponto* ξ_o *tal que* $S''(\xi) > 0$ *para todo* $\xi > \xi_o$ *e* $S''(\xi) < 0$ *para todo* $\xi < \xi_o$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.1, consideremos $s(\xi) = s(\xi, \varepsilon, \delta)$ a única solução de (2.6) (a menos de translação) satisfazendo (2.7) e (2.8). Fazendo $S(\xi) = s(\xi) + S_R$. Pelo Teorema 3.1 podemos concluir que $S'(\xi) = s'(\xi) < 0$ para todo ξ, de onde $s(\xi)$ decresce monotonicamente de 2γ a 0, logo, segue das condições em (2.7)

$$\lim_{\xi \to +\infty} S(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} (s(\xi) + S_R) = S_R$$

e por (2.12),

$$\lim_{\xi \to -\infty} S(\xi) = \lim_{\xi \to -\infty} (s(\xi) + S_R) = 2\gamma + S_R = 2(c - S_R) + S_R = 2c - S_R = S_L$$

portanto, $S(\xi)$ decresce monotonicamente de S_L a S_R quando ξ cresce, como mostra a figura abaixo.

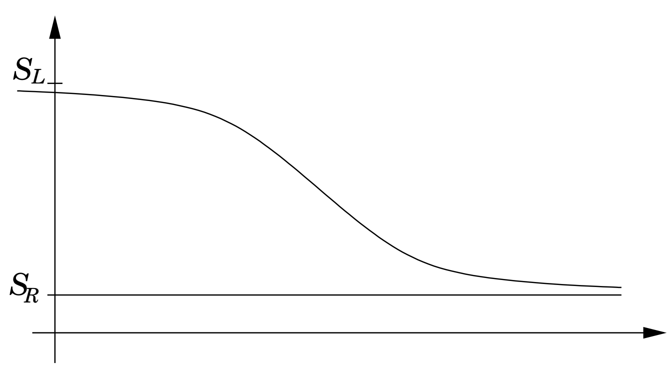

Figura 3.3:

Além disso, como vimos no Teorema 3.1, $s(\xi)$ possui um único ponto de inflexão ξ_o, logo ξ_o é um ponto de inflexão para S, de modo que, $S''(\xi) = s''(\xi) < 0$ para $\xi < \xi_o$ e $S''(\xi) = s''(\xi) > 0$

para $\xi > \xi_o$. Portanto, esta concluído o corolário.

■

3.2 Dispersão Domina ($\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$)

Teorema 3.2 *Seja $s(\xi) = s(\xi, \varepsilon, \delta)$ a única solução (a menos de translação) de (2.6) satisfazendo (2.7) e (2.8) . Então $s(\xi) > 0$ para todo ξ, e vale:*

i) *Se $M_o = \sup_{\xi} s(\xi)$, então M_o é atingido para um único valor $\xi = z_o$, e para $\xi > z_o$ temos $s'(\xi) < 0$.*

ii) *Existe um $\xi_o > z_o$, tal que $(\xi - \xi_o)s''(\xi) > 0$, para todo $\xi > z_o$, com $\xi \neq \xi_o$.*

iii) *A solução $s(\xi)$ tem um número infinito de máximos e mínimos locais. Estes são tomados em pontos $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ e $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ tais que $z_i > w_{i+1} > z_{i+1}$, para todo $i \geq 0$, e $\lim_{i\to\infty} z_i = \lim_{i\to\infty} w_i = -\infty$. Além disso, $2\gamma < s(z_{i+1}) < s(z_i)$ e $2\gamma > s(w_{i+1}) > s(w_i)$ para todo i.*

Demonstração: Como $\varepsilon^2 - 4\gamma\delta < 0$, consideramos a forma canônica do sistema autônomo não linear apresentado em (2.18), lembrando que o sistema linear correspondente tem um ponto espiral no ponto $(2\gamma, 0)$, a qual é dada por

$$X' = BX + F \quad \text{onde} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \neq 0).$$

Fazendo $s - 2\gamma = \sigma \cos\theta$ e $r = \sigma sen\theta$ obtemos

$$\begin{cases} \sigma' cos\theta - \sigma\theta' sen\theta = \alpha\sigma cos\theta - \beta\sigma sen\theta \\ \sigma' sen\theta + \sigma\theta' cos\theta = \beta\sigma cos\theta + \alpha\sigma sen\theta - \frac{\sigma^2}{2} cos^2\theta \end{cases}, \tag{3.3}$$

multiplicando $(3.3)_1$ por $-\sigma sen\theta$, $(3.3)_2$ por $\sigma cos\theta$ e em seguida somando seus resultados, obtemos

$$\sigma^2\theta' = \beta\sigma^2 - \sigma cos\theta\left(\frac{1}{2}\sigma^2 cos^2\theta\right), \tag{3.4}$$

agora, multiplicando $(3.3)_1$ por $\sigma cos\theta$, $(3.3)_2$ por $\sigma sen\theta$ e em seguida somando seus resultados, obtemos

$$\sigma\sigma' = \alpha\sigma^2 - \sigma sen\theta\left(\frac{1}{2}\sigma^2 cos^2\theta\right), \tag{3.5}$$

como

$$-\sigma sen\theta\left(\frac{1}{2}\sigma^2 cos^2\theta\right)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad -\sigma cos\theta\left(\frac{1}{2}\sigma^2 cos^2\theta\right)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \longrightarrow 0,$$

quando $\sigma \to 0$, assim,

$$\begin{cases} \sigma^2\theta' = \beta\sigma^2 + o(\sigma^2) \\ \sigma\sigma' = \alpha\sigma^2 + o(\sigma^2) \end{cases}, \tag{3.6}$$

mas por outro lado, $\sigma \to 0$ (quando $\xi \to -\infty$) pois $(s(\xi), r(\xi)) = (2\gamma, 0)$ é o ponto de origem. Portanto, quando $\xi \to -\infty$

$$\theta' = \beta + o(1) \quad e \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = \alpha + o(1),$$

assim, $\theta = \beta\xi + \theta_o + o(1)$ e $\sigma = e^{\alpha\xi + \alpha_o + o(1)}$, onde θ_o e α_o são constantes.

Tomando $C = e^{\alpha_o + o(1)}$, segue que qualquer solução $(s(\xi), r(\xi))$ de (2.14) que converge a $(2\gamma, 0)$, quando $\xi \to -\infty$, tem a forma

$$(s(\xi) - 2\gamma, r(\xi)) = Ce^{\alpha\xi}(cos(\beta\xi + \theta_0 + o(1)), sen(\beta\xi + \theta_0 + o(1))), \tag{3.7}$$

quando $\xi \to -\infty$, sendo $\alpha = Re(\Lambda_-) > 0$ e $\beta = Im(\Lambda_-) \neq 0$ onde Λ_- é definido em (2.21). Como a órbita limitada $\mathscr{R}$ de (2.14), tem a forma dada em (3.7) para um ξ suficientemente grande negativo, segue que existe um número infinito de pontos em que r anula-se. Como $s' = \delta^{-1}r$ e de acordo com o Lema 2.2, estes são todos pontos de máximos ou de mínimos locais estritos de

s. Além disso, entre quaisquer dois pontos máximos (ou mínimos) locais estritos existe um ponto de mínimo (ou máximo) local estrito. Então, s possui um número infinito de máximos e mínimos quando $\xi \to -\infty$ e estão todos interligados. Como $s(\xi) > 0$ para todo ξ , pelo Teorema 2.1, e pelo Lema 2.2 um máximo local corresponde a órbita cruzando o eixo-s em um ponto ξ se $s(\xi) > 2\gamma$, e um mínimo local corresponde a um ponto ξ se $0 < s(\xi) < 2\gamma$.

Como na prova do Teorema 3.1, $(s(\xi), r(\xi)) \in Q_4 = \{(s,r)|s \geq 0, r \leq 0\}$ para ξ suficientemente grande, assim, a órbita limitada $\mathscr{R}$ não pode interceptar em Q_4 no segmento de reta

$$l_o = \{(s,r) : r = 0 \quad e \quad 0 \leq s \leq 2\gamma\},$$

a demonstração deste fato é feita da mesma forma que no Teorema 3.1, e por esta razão, vai existir $M > 0$ tal que para todo $\xi \geq M$ temos $r(\xi) < 0$ e $s(\xi) > 0$.

Assim, consideremos os elementos $\xi < M$ tais que $\delta s'(\xi) = r(\xi) = 0$. Seja z_o o maior elemento onde $z_o < M$ tal que $r(z_o) = 0$, então $r(\xi) < 0$ para todo $\xi > z_o$, pois do contrário para algum $\xi \in (z_o, M)$ temos $r(\xi) \geq 0$, se $r(\xi) = 0$ temos uma contradição, a maximalidade de z_o, e se $r(\xi) > 0$, aplicando o teorema do valor intermediário, vai existir $\xi_1 \in (\xi, M)$ tal que $r(\xi_1) = 0$, o que contradiz a maximalidade de z_o. Portanto, $r(\xi) < 0$ para todo $\xi > z_o$, onde concluímos que ao passar o limite a direita de z_o, $r'(z_o) \leq 0$. Mas por lado, de $(2.14)_2$ temos

$$r'(z_o) = \gamma s(z_o) + \varepsilon\delta^{-1} r(z_o) - \frac{1}{2}s^2(z_o) = \frac{s(z_o)}{2}(2\gamma - s(z_o))$$

conseqüentemente, como $s(\xi)$ é positiva para todo ξ devemos ter $s(z_o) = 2\gamma$ ou $s(z_o) > 2\gamma$ o primeiro caso esta excluído pois voltando ao sistema (2.14) juntamente com a condição inicial $(s(\xi_o), r(\xi_o))$ montamos um PVI que nos resulta em uma solução constante, assim, temos $s(z_o) > 2\gamma$ e pelo Lema (2.2), z_o é um ponto de máximo local estrito de s. Portanto, $\mathscr{R}$ tem de sair de Q_4 no ponto z_o em que $s(z_o) > 2\gamma$ e $\delta s'(\xi_o) = r(z_o) = 0$, deste modo z_o é um máximo local estrito de s, portanto, concluímos que $s'(\xi) < 0$ para todo $\xi > z_o$.

Como acabamos de concluir $s'(\xi) < 0$ para $\xi > z_o$, isto é, para $\xi > z_o$ a função s é decrescente, e de modo inteiramente analogo à demonstração no Teorema 3.1, obtemos $\xi_o > z_o$, tal que

$s''(\xi)(\xi - \xi_o) > 0$ para todo $\xi > z_o$ e $\xi \neq \xi_o$.

Seja $z_1 < z_o$ o ponto de máximo local de s mais próximo de z_o, e seja w_1 o único ponto de mínimo local entre eles. Prosseguindo com este processo obtemos as seqüencias $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ e $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, definidas indutivamente como seqüencias decrescentes onde os pontos z_i são máximos locais de s e w_i são mínimos locais de s, e $z_i > w_{i+1} > z_{i+1}$ para todo $i \geq 0$. Em decorrência do Lema 2.2, $s(z_i) > 2\gamma$ e $s(w_i) < 2\gamma$, $\forall i$.

Afirmamos que $s(z_1) < s(z_o)$. De fato, como todos pontos de máximos e mínimos de s são estritos, a órbita $(s(\xi), r(\xi))$ sempre cruza o eixo-s transversalmente, e como $r(\xi) = \delta s'(\xi)$ então temos $r(\xi) > 0$ para $w_1 < \xi < z_o$, $r(\xi) < 0$ para $z_1 < \xi < w_1$ e $r(\xi) < 0$ para $\xi > z_o$. Se $s(z_1) \geq s(z_o)$, então e observando a órbita $(s(\xi), r(\xi))$ para $z_1 < \xi < +\infty$ temos que a curva $\{(s(\xi), r(\xi)) : w_1 > \xi \geq z_1\}$ deve interceptar a curva $\{(s(\xi), r(\xi)) : \xi \geq z_o\}$, isto é, a curva teria que interceptar a si própria o que é impossível. Indutivamente, usando este argumento em cada segmento do tipo $z_i > w_{i+1} > z_{i+1}$, é determinado que $s(z_{i+1}) < s(z_i), \forall i$, deste modo se $M_o = \sup_{\xi} s(\xi)$, então

$$s(z_o) = M_o$$

e, assim, (i) esta provado. De maneira similar, temos $s(w_1) < s(w_2)$. Como, $r(\xi) = \delta s'(\xi) < 0$, para todo $z_2 < \xi < w_2$ e $r(\xi) > 0$ para $w_2 < \xi < z_1$. Suponhamos que $s(w_2) \leq s(w_1)$, então a curva $\{(s(\xi), r(\xi)) : w_2 < \xi < z_1\}$, intercepta a curva $\{(s(\xi), r(\xi)) : w_1 < \xi < z_o\}$, ou seja a órbita $\mathscr{R}$ interceptara a si mesma o que é impossível. Usando este processo em cada segmento do tipo $w_{i+1} < z_i < w_i$, concluímos que $s(w_{i+1}) > s(w_i), \forall\, i \geq 1$. Deste modo, as seqüências $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$

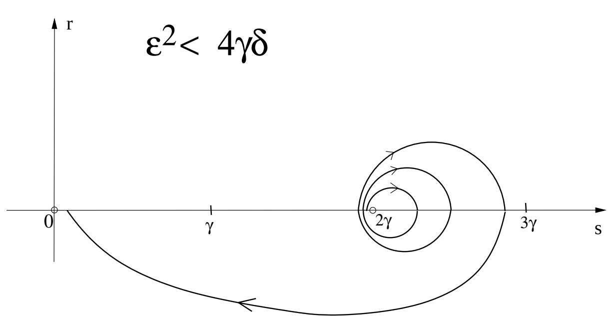

Figura 3.4: órbita limitada quando a dispersão é predominante

e $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ são construídas de tal modo que se acumulam em $-\infty$. Com efeito, pois de outro modo, a órbita $(s(\xi), r(\xi))$ seria levada a $(2\gamma, 0)$ em algum ξ finito, o que novamente não é possível.

A figura 3.4 nos mostra o comportamento da órbita limitada em questão. Deste modo, está concluído o Teorema. ■

Corolário 3.2 *Sejam* ε, δ *e* c *constantes positivas dadas, e suponhamos que* c, S_R *e* S_L *satisfazem (2.12) tal que* $\gamma = c - S_R > 0$. *Seja* $S(\xi) = S(\xi, \varepsilon, \delta)$ *a única solução limitada (a menos de translação em* ξ *) de (2.2) satisfazendo as condições (2.3) e (2.4). Se* $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$, *então S atinge seu valor máximo em um ponto* z_o, *e assim* $S(\xi)$ *decresce monotonicamente de* $S(z_o)$ *a* S_R *quando* $\xi > z_o$. *Existe um ponto* $\xi_o > z_o$ *tal que* $S''(\xi) > 0$ *para* $\xi > \xi_o$ *e* $S''(\xi) < 0$ *para* $z_o < \xi < \xi_o$. *Além disso, existem seqüências interligadas* $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ *e* $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ *com* $z_i > w_{i+1} > z_{i+1}$, $\forall i \geq 0$, *decrescendo a* $-\infty$ *e tais que S atinge um valor máximo local em* z_i *e um valor mínimo local em* w_i, *e* $S(w_{i+1}) < S_L < S(z_i)$, $\forall i \geq 0$.

Demonstração: Seja

$$s(\xi) = s(\xi, \varepsilon, \delta)$$

a única solução limitada (a menos de translação) de (2.6) satisfazendo a (2.7) e (2.8). Defina $S(\xi) = s(\xi) + S_R$, e pelo Teorema 3.2, temos que se existir $M_o = \sup_{\xi} s(\xi)$, o mesmo é atingido no ponto z_o, onde $s'(\xi) < 0$ para todo $\xi > z_o$. Deste modo, S atinge seu valor máximo em z_o, com $S'(\xi) = s'(\xi) < 0$ para todo $\xi > z_o$ como,

$$\lim_{\xi \to +\infty} S(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} (s(\xi) + S_R) = S_R$$

segue que S decresce monotonicamente de $S(z_o)$ a S_R quando $\xi > z_o$. E ainda, como vimos no Teorema 3.2, $s(\xi) = S(\xi) + S_R$ tem um único ponto de inflexão ξ_o, conseqüentemente ξ_o é um ponto de inflexão para S , pois $S''(\xi) = s''(\xi) < 0$ para $z_o < \xi < \xi_o$ e $S''(\xi) = s''(\xi) > 0$ para $\xi > \xi_o$. No caso que $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$ a solução $s(\xi)$ tem um número infinito de pontos de máximos e de mínimos locais que são tomados em pontos z_i e w_i formando as seqüências interligadas $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ e

$\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ em que $z_i > w_{i+1} > z_{i+1}$, para todo $i \geq 0$ e ainda

$$\lim_{i\to\infty} z_i = \lim_{i\to\infty} w_i = -\infty.$$

Além disso, como $S(\xi) = s(\xi) + S_R$ e pelo corolário 2.1 obtemos,

$$S(w_{i+1}) < 2\gamma = S_L - S_R < S_L,$$

$$S(z_i) = s(\xi) + S_R > 2\gamma + S_R = S_L.$$

Portanto, o corolário está concluído.

$\blacksquare$

Capítulo

4

Comportamento Limitante da Solução Onda Viajante

Neste capítulo , apresentamos o estudo com relação ao comportamento limitante da solução $S(\xi;\varepsilon,\delta)$ de (2.2) quando $\varepsilon\downarrow 0$ e $\delta\downarrow 0$. Onde, será observado que para valores positivos de ε, δ e c esta solução $S(\xi;\varepsilon,\delta)$ é única satisfazendo as condições (2.3) e (2.4) desde que, as condições em (2.12) sejam respeitadas. Será, também, mostrado que se $S(\xi;\varepsilon,\delta)$ é adequadamente definida por uma translação de ξ então, os limite

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} S(\xi;\varepsilon,\delta), \quad \lim_{\delta\downarrow 0} S(\xi;\varepsilon,\delta) \quad e \quad \lim_{\substack{\delta\downarrow 0,\varepsilon\downarrow 0\\ \frac{\delta}{\varepsilon^2}\leq M}} S(\xi;\varepsilon,\delta)$$

existem, e os mesmos são, uma solução onda solitária da equação Korteweg-de Vreis (KdV), uma solução onda viajante da solução da equação de Burgers, e uma solução onda viajante fraca da Lei de conservação $u_t+uu_x=0$, respectivamente .

4.1 Comportamento da solução quando ε tende a zero

Nesta primeira seção, será estudado o comportamento da solução de (2.2) quando $\varepsilon \downarrow 0$, enquanto, δ permanece fixado. Nestas condições, estudaremos o caso que $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$. Através dos estudos feitos no Teorema 3.2 obtemos um ponto ξ_o, que é o único onde $s(\cdot;\varepsilon,\delta)$ assume seu valor máximo. Deste modo, definimos para cada ε

$$s_\varepsilon(\xi) = s(\xi+\xi_o;\varepsilon,\delta),$$

com $s'_\varepsilon(\xi) < 0$, $\forall\xi > 0$. Assim, por esta translação de ξ, e trabalhando com a variável dependente $s_\varepsilon(\xi) = S_\varepsilon(\xi) - S_R$, que é a única solução limitada de (2.6) (a menos de translação em ξ) satisfazendo (2.7) e (2.8), demonstraremos que a solução onda viajante $S_\varepsilon(\xi;\varepsilon,\delta)$ convergirá, uniformemente sobre conjuntos da forma $\{\xi;\xi \geq a\}$ à solução onda-solitária da equação KdV, dada por

$$U_\gamma(\xi) = S_R + 3\gamma sech^2\left[\left(\frac{\gamma}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right],$$

quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Teorema 4.1 *Seja $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma família de soluções onda viajantes de (2.6) satisfazendo (2.7) e (2.8), definida como acima. Então, para algum $a \in \mathbb{R}$ e para qualquer inteiro $j \geq 0$*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{d^j}{d\xi^j}s_\varepsilon(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j}u_\gamma(\xi), \tag{4.1}$$

uniformemente em $\{\xi;\xi \geq a\}$, onde

$$u_\gamma(\xi) = 3\gamma sech^2\left[\left(\frac{\gamma}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right]. \tag{4.2}$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.1 temos que $0 < s_\varepsilon(\xi) < 3\gamma$, assim, s_ε é limitada, independentemente de $\varepsilon > 0$. Temos $0 < \varepsilon^2 < 4\gamma\delta$, por hipótese e $s_\varepsilon(0) > 2\gamma$, pois $s_\varepsilon(0) = s(\xi_o;\varepsilon,\delta)$ onde, ξ_o é o único ponto de $s(\cdot;\varepsilon,\delta)$ que atinge seu valor máximo. Agora nos restringiremos a mostrar que $\dfrac{d^j}{d\xi^j}s_\varepsilon(\xi)$, $\forall j > 0$, também, são limitadas, independente de ε. Visto que, $r_\varepsilon(\xi) = \delta s'_\varepsilon(\xi)$, para δ fixo, e ainda pela demonstração do Teorema 2.1, temos

$$-\frac{1}{2}\gamma^2\delta\varepsilon^{-1} \le r_\varepsilon(\xi) \le \frac{3}{2}\gamma^2\delta\varepsilon^{-1},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2}\gamma^2 \le \varepsilon s'_\varepsilon(\xi) \le \frac{3}{2}\gamma^2 \tag{4.3}$$

em particular, $|\, \varepsilon s'_\varepsilon \,| \le \dfrac{3}{2}\gamma^2$ e de $(2.14)_2$ escrevemos

$$\delta s''_\varepsilon = \gamma s_\varepsilon - \frac{1}{2}s_\varepsilon^2 + \varepsilon s', \tag{4.4}$$

$$|\, \delta s''_\varepsilon \,| \le |\, \gamma s_\varepsilon \,| + \frac{1}{2} |\, s_\varepsilon \,|^2 + |\, \varepsilon s'_\varepsilon \,|,$$

como $0 < s_\varepsilon(\xi) < 3\gamma$, temos de (4.3) que

$$|\, \delta s''_\varepsilon(\xi) \,| \le 9\gamma^2, \quad \forall\xi$$

consequentemente,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\, s''_\varepsilon(\xi) \,| \le \frac{9}{\delta}\gamma^2.$$

Portanto, s''_ε é limitada, independentemente de ε. Agora, como s_ε e s''_ε são limitadas onde, s_ε é uma função positiva, pelo Teorema 1.2 (Desigualdade de Glaeser) temos que s'_ε é limitada, independente de ε. Voltando em (4.4) e derivando mais uma vez em relação a ξ e como $0 < \varepsilon^2 < 4\gamma\delta$, podemos concluir que

$$|\, \delta s'''_\varepsilon(\xi) \,| \le |\, \gamma s'_\varepsilon(\xi) \,| + |\, s_\varepsilon s'_\varepsilon(\xi) \,| + \varepsilon \,|\, s''_\varepsilon(\xi) \,| \le |\, \gamma s'_\varepsilon(\xi) \,| + |\, s_\varepsilon s'_\varepsilon(\xi) \,| + \sqrt{4\gamma\delta}\,|\, s''_\varepsilon(\xi) \,|,$$

para todo ξ, deste modo, s'''_ε é limitada, independentemente de ε. Assim, por indução, concluímos que $\dfrac{d^j}{d\xi^j} s_\varepsilon(\xi),\ \forall j > 0$ são todas limitadas, independentemente de ε.

Seja $F = \{s_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ uma família de funções reais. Como $\{s'_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ é limitada, independentemente de ε, assim, existe M_1, tal que, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \xi$ temos $| s'_\varepsilon(\xi) | \leq M_1$, deste modo, para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ temos,

$$| s_\varepsilon(\xi_1) - s_\varepsilon(\xi_2) | = \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} s'_\varepsilon(\mu)\, d\mu \right| \leq M_1 \, | \xi_2 - \xi_1 |,$$

de onde concluímos que F é uma família equicontínua, e como $| s_\varepsilon(\xi) | < 3\gamma,\ \forall s_\varepsilon \in F$ segue que F é uniformemente limitada. Assim, aplicando o Teorema 1.1 (Teorema Ascoli-Arzelá), toda seqüência contável $\{s_{\varepsilon_1}\}$ de elementos de F tem uma subseqüência $\{s_{\varepsilon_{1,j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$, ou seja,

$$s_{\varepsilon_{1,1}},\ s_{\varepsilon_{1,2}},\ s_{\varepsilon_{1,3}},\ \cdots,\ s_{\varepsilon_{1,j}},\ \cdots,$$

que é uniformemente convergente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ a uma função U.

Agora, seja $F_1 = \left\{ s'_{\varepsilon_{1,j}} \right\}$ uma família de funções reais. Como existe M_2, tal que, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \xi$, temos $| s''_{\varepsilon_{1,j}}(\xi) | \leq M_2$, portanto, para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ temos,

$$| s'_{\varepsilon_{1,j}}(\xi_1) - s'_{\varepsilon_{1,j}}(\xi_2) | = \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} s''_{\varepsilon_{1,j}}(\mu)\, d\mu \right| \leq M_2 \, | \xi_2 - \xi_1 |,$$

assim, concluímos que F_1 é uma família equicontínua, e como existe M_1, tal que, $\forall s'_{\varepsilon_{1,j}} \in F_1$ temos $| s'_{\varepsilon_{1j}}(\xi) | < M_1$ segue que F_1 é uniformemente limitada, aplicando o Teorema Ascoli-Arzelá obtemos subseqüência $\{s'_{\varepsilon_{2,j}}\}$, isto é,

$$s'_{\varepsilon_{2,1}},\ s'_{\varepsilon_{2,2}},\ s'_{\varepsilon_{2,3}},\ \cdots,\ s'_{\varepsilon_{2,j}},\ \cdots$$

de $\left\{ s'_{\varepsilon_{1,j}} \right\}$ convergindo uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a uma função U_1, como a convergência é uniforme então $U_1 = U'$.

Indutivamente, seja $F_k = \left\{ s^{(k)}_{\varepsilon_{k,j}} \right\}$, $\dfrac{d^k}{d\xi^k} = s^k_{\varepsilon_{k,j}}$, uma família de funções reais. Como existe M_{k+1}, tal que $\mid s^{(k+1)}_{\varepsilon_{k,j}}(\xi) \mid \leq M_{k+1}$ $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \xi$, deste modo,$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ temos,

$$\mid s^{(k)}_{\varepsilon_{k,j}}(\xi_1) - s^{(k)}_{\varepsilon_{k,j}}(\xi_2) \mid = \mid \int_{\xi_1}^{\xi_2} s^{(k+1)}_{\varepsilon_{k,j}}(\mu)\, d\mu \mid \leq M_{k+1} \mid \xi_2 - \xi_1 \mid,$$

assim, concluímos que F_k é uma família equicontínua, e como existe M_k, tal que, $\mid s^{(k)}_{\varepsilon_{k,j}}(\xi) \mid < M_k$, $\forall\, s^{(k)}_{\varepsilon_{kj}} \in F_k$ segue que F_k é uniformemente limitada e aplicando o Teorema Ascoli-Arzelá obtemos subseqüência $\{ s^{(k)}_{\varepsilon_{(k+1),j}} \}$, isto é,

$$s^{(k)}_{\varepsilon_{(k+1),1}},\ s^{(k)}_{\varepsilon_{(k+1),2}},\ s^{(k)}_{\varepsilon_{(k+1),3}},\ \ldots,\ s^{(k)}_{\varepsilon_{(k+1),j}},\ \ldots$$

de $\left\{ s^{(k)}_{\varepsilon_{k,j}} \right\}$ convergindo uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$ a uma função U_k, como consequência da convergencia uniforme $U_k = U^{(k)}$. convergindo uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a uma função U_j, e como a convergência é uniforme $U_k = U^{(k)}$ $\forall k \geq 0$.

Através da Diagonalização de Cantor, tomamos $k_j = \varepsilon_{j,j}$ obtendo, assim, a subseqüência $\{ s^{(k)}_{\varepsilon_{k_j}} \}_{j=1}^{\infty}$, converge uniformemente em qualquer compacto na reta para uma função $U_k = U^{(k)}$. Assim, quando $j \to \infty$ temos $\varepsilon_{k_j} \to 0$, e se

$$s_j(\xi) = s(\xi + \xi_o; \varepsilon_{k_j}, \delta),$$

então, existe uma função infinitamente diferenciável U tal que $s^{(i)}_j \to U^{(i)}$ quando $j \to \infty$, uniformemente em qualquer conjunto compacto em $\mathbb{R}$, para todo $i \geq 0$.

Como,

$$s'_j(0) = s'(\xi_o; \varepsilon_{k_j}, \delta),$$

obtemos $s'_j(0) = 0$ pois, ξ_o é o único ponto em que $s(\cdot\,; \varepsilon, \delta)$ assume seu valor máximo e tomando o limite de $j \to \infty$ temos $U'(0) = 0$. Em (4.4), fazendo $j \to \infty$ temos $\varepsilon_{K_j} \to 0$, assim, obtemos a equação

$$\delta U'' = \gamma U - \frac{1}{2} U^2. \tag{4.5}$$

Agora queremos determinar as soluções limitadas de valor real de (4.5), tal que, a condição inicial $U'(0) = 0$ seja verificada, as possibilidades de soluções são ou $U \equiv 0,\ U \equiv 2\gamma,\ U$ é uma solução periódica, ou U é uma solução onda solitária. Se considerarmos (4.5) e ao montarmos o PVI com as condições iniciais $U'(0) = 0$ e $U(0) = 0$ ou 2γ obteremos uma solução constante.

Como $s_j(\xi)$ é decrescente para $\xi > 0$ $(\xi + \xi_o > \xi_o)$, deste modo concluímos que U é não crescente para $\xi > 0$ quando $j \to \infty$. Assim, U é não periódica a menos que seja constante. Então U tem que ser uma solução onda solitária para (4.5). Lembrando que $s_j(0) > 2\gamma$ e novamente passando o limite $j \to \infty$ obtemos $U(0) \geq 2\gamma$. Portanto, U é uma função não nula. Em (4.4), se multiplicarmos por s_j' temos

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{d\xi}\left(s_j'(\xi)\right)^2 = \frac{\gamma}{2}\frac{d}{d\xi}\left(s_j(\xi)\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{d}{d\xi}\left(s_j(\xi)\right)^3 + \varepsilon_{K_j}\left(s_j'(\xi)\right)^2.$$

Integrando esta última equação em $[0,\infty)$ como $s_j'(0) = 0$, e ainda $s_j(\xi), s_j'(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, obtemos

$$\varepsilon_{K_j}\int_0^\infty \left(s_j'(\xi)\right)^2 d\xi = \frac{1}{2}\gamma\left(s_j(0)\right)^2 - \frac{1}{6}\left(s_j(0)\right)^3. \tag{4.6}$$

Mas, como $s_j'(\xi) < 0,\ \forall\xi > 0$ $(\xi + \xi_o > \xi_o)$, onde s_j' é limitada, independente de ε_{k_j}. Então, aplicando a seguinte estimativa,

$$\varepsilon_{k_j}\int_0^\infty \mid \left(s_j'(\xi)\right) \mid^2 d\xi \leq -\varepsilon_{k_j}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \mid s_j'(\xi) \mid \int_0^\infty s_j'(\xi)d\xi = \varepsilon_{k_j}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \mid s_j'(\xi) \mid s_j(0), \tag{4.7}$$

e observamos que a esquerda da desigualdade converge a zero quando $\varepsilon_{k_j} \downarrow 0$. Assim, de (4.6) concluímos que quando $j \to \infty$ temos

$$\frac{1}{6}s_j^2(0)\left(3\gamma - s_j(0)\right) = \frac{1}{2}\gamma s_j^2(0) - \frac{1}{6}s_j^3(0) \to 0,$$

agora, como $s_j(0) > 2\gamma,\ \forall j$, então esta última equação nos conduz a conclusão que $s_j(0) \to 3\gamma$. Isto é, $U(0) \equiv 3\gamma$, em particular, $U(0) \not\equiv 2\gamma$ e assim, U é uma onda solitária para (4.5). Então, para obtermos U devemos resolver o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \delta U'' - \gamma U - \frac{1}{2}U^2 = 0 \\ U(0) = 3\gamma \\ U'(0) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

reescrevendo a equação em (4.8), segue

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\delta\left(U'(\xi)\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\left(U(\xi)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(U(\xi)\right)^3\right) = 0,$$

conseqüentemente,

$$\frac{1}{2}\delta\left(U'(\xi)\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\left(U(\xi)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(U(\xi)\right)^3 = B,$$

para alguma constante B. Fazendo $\xi = 0$, e pelas condições iniciais do problema concluímos que $B = 0$. Portanto, temos,

$$\frac{1}{2}\delta\left(U'(\xi)\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\left(U(\xi)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(U(\xi)\right)^3 = 0,$$

consideremos o problema acima para $0 < U(\xi) < 3\gamma$, deste modo, temos

$$\int \frac{U'(\xi)}{U(\xi)\left(\gamma - \frac{1}{3}U(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}} d\xi = \int \pm\delta^{-\frac{1}{2}} d\xi,$$

agora, fazendo a mudança variável, a saber $z^2 = \gamma - \frac{1}{3}U(\xi)$ obtemos,

$$\int \frac{-2dz}{\gamma - z^2} = \pm\int \delta^{-\frac{1}{2}} d\xi,$$

de onde, temos

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}-z} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}+z}\right)dz = \pm\delta^{-\frac{1}{2}}\xi + C,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\frac{|\sqrt{\gamma}+z|}{|\sqrt{\gamma}-z|} = \pm\delta^{-\frac{1}{2}}\xi + C,$$

como $z = \sqrt{\gamma - \frac{1}{3}U(\xi)}$ onde $0 < U(\xi) < 3\gamma$, então

$$\frac{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma-\frac{1}{3}U(\xi)}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\gamma-\frac{1}{3}U(\xi)}} = K\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\xi} \quad \text{(K=constante)}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma-\frac{1}{3}U(\xi)} = \left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\gamma-\frac{1}{3}U(\xi)}\right)K\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\xi}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{1-\frac{1}{3\gamma}U(\xi)} = \frac{K\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\xi}-1}{K\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\xi}+1}, \tag{4.9}$$

como $U(0) = 3\gamma$ obtemos, assim, $K = 1$ e voltando em (4.9)

$$\sqrt{1-\frac{1}{3\gamma}U(\xi)} = \frac{\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\xi}-1}{\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\xi}+1} = \mathrm{tgh}\left(\pm\sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}}\xi\right),$$

ou seja,

$$1-\frac{1}{3\gamma}U(\xi) = \mathrm{tgh}^2\left(\pm\sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}}\xi\right)$$

assim,

$$U(\xi) = u_\gamma(\xi) = 3\gamma\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4\delta}}\xi\right).$$

Na verdade, foi mostrado que qualquer seqüencia positiva $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ convergindo para zero possui uma subseqüência $\{\varepsilon_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que a solução onda viajante s_j associada converge para u_γ uniformemente sobre compactos. E ainda, quando $\varepsilon \downarrow 0$, $s_\varepsilon^{(j)} \to u_\gamma^{(j)}$, para todo j, uniformemente em compactos da reta. Agora vamos estender este resultado para conjuntos da forma $\{\xi;\xi \geq a\}$ onde $a \in \mathbb{R}$. Se o conjunto $K = \{\xi;\xi \geq a\}$ e $\nu > 0$ são dados, como podemos ver $u_\gamma(\xi) \to 0$ quando $\xi \to \infty$, então seja $\xi_1 > \max\{0,a\}$ tal que $u_\gamma(\xi_1) \leq \frac{\nu}{4}$. Seja $\varepsilon_o > 0$ tal que se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$

então,

$$| s_\varepsilon(\xi) - u_\gamma(\xi) | \leq \frac{\nu}{4},$$

para $a \leq \xi \leq \xi_1$. Em particular temos $s_\varepsilon(\xi_1) \leq \frac{\nu}{2}$. De fato,

$$| s_\varepsilon(\xi_1) | - | u_\gamma(\xi_1) | \leq | s_\varepsilon(\xi_1) - u_\gamma(\xi_1) | \leq \frac{\nu}{4}$$

$$| s_\varepsilon(\xi_1) | \leq \frac{\nu}{4} + | u_\gamma(\xi_1) | \leq \frac{\nu}{4} + \frac{\nu}{4} = \frac{\nu}{2},$$

então $s_\varepsilon(\xi_1) \leq \frac{\nu}{2}$, como s_ε é decrescente para todo $\xi > 0$, então $s_\varepsilon(\xi) \leq \frac{\nu}{2}$ para todo $\xi > \xi_1$, Assim, para todo $\xi > a$,

$$| s_\varepsilon(\xi) - u_\gamma(\xi) | \leq \nu.$$

De fato, para $\xi \in [a, \xi_1]$ por hipótese temos,

$$| s_\varepsilon(\xi) - u_\gamma(\xi) | \leq \frac{\nu}{4} < \nu,$$

e para $\xi > \xi_1$ temos,

$$| s_\varepsilon(\xi) - u_\gamma(\xi) | < | s_\varepsilon(\xi) + u_\gamma(\xi) | \leq | s_\varepsilon(\xi) | + | u_\gamma(\xi) | \leq \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{4} = \frac{3\nu}{4} < \nu.$$

E deste modo, concluímos que $s_\varepsilon \to u_\gamma$ uniformemente em $K = \{\xi ; \xi \geq a\}$.

Agora vendo $(2.14)_2$ temos

$$r'_\varepsilon(\xi) - \varepsilon\delta^{-1} r_\varepsilon(\xi) = \gamma s_\varepsilon(\xi) - \frac{1}{2} s_\varepsilon^2(\xi),$$

multiplicando-se esta equação por $e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi}$ obtemos

$$\left(r_\varepsilon(\xi) e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi} \right)' = \left(\gamma s_\varepsilon(\xi) - \frac{1}{2} s_\varepsilon^2(\xi) \right) e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi},$$

como $r_\varepsilon(\xi) \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, fazemos a integração em $[\xi, \infty)$ para $\xi \geq a$, tal que

$$r_\varepsilon(\xi) = -\int_\xi^\infty \left(\gamma s_\varepsilon(\eta) - \frac{1}{2}s_\varepsilon^2(\eta)\right) e^{\frac{\varepsilon}{\delta}(\xi-\eta)} d\eta, \quad \forall \xi \geq a$$

assim,

$$s_\varepsilon'(\xi) = -\int_\xi^\infty \left(\frac{\gamma}{\delta} s_\varepsilon(\eta) - \frac{1}{2\delta}s_\varepsilon^2(\eta)\right) e^{\frac{\varepsilon}{\delta}(\xi-\eta)} d\eta, \quad \forall \xi \geq a, \tag{4.10}$$

segue desta expressão e da convergência uniforme de s_ε em conjunto do tipo $K = \{\xi; \xi \geq a\}$, que $s_\varepsilon' \to u_\gamma'$ pontualmente. Deste modo , fixado o intervalo $[\xi_1, \xi_2]$ onde $\xi_1 \geq \xi_2 \geq 0$, obtemos que $s_\varepsilon' - u_\gamma'$ é uniformemente limitada em $[\xi_1, \xi_2]$, conseqüêntemente temos $\varepsilon(s_\varepsilon' - u_\gamma') \to 0$, uniformemente em $[\xi_1, \xi_2]$ quando $\varepsilon \to 0$, como ξ_1 e ξ_2 são arbitrários, $\varepsilon(s_\varepsilon' - u_\gamma') \to 0$ uniformemente em $K = \{\xi; \xi \geq a\}$. Assim, através de (4.4) temos $s_\varepsilon'' \to u_\gamma''$, quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente em $K = \{\xi; \xi \geq a\}$. Como s' converge pontualmente a u_γ em $[\xi, y]$ qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ então, pelo critério dado no Lema 1.1 e pela convergência uniforme de s'' temos $s_\varepsilon' \to u_\gamma'$, uniformemente em $K = \{\xi; \xi \geq a\}$, quando $\varepsilon \to 0$. Por sucessivas derivações de (4.4) e (4.5) concluímos que $s_\varepsilon^{(j)} \to u_\gamma^{(j)}$ uniformemente em $K = \{\xi; \xi \geq a\}$. Assim, está demonstrado o teorema. ■

Observação 4.1 *De acordo com os cálculos em (2.10) segue*

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} (s_\varepsilon'(\xi))^2 d\xi = \frac{2}{3}\gamma^3$$

conseqüentemente,

$$\|s_\varepsilon'\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (s_\varepsilon'(\xi))^2 d\xi = \frac{2}{3\varepsilon}\gamma^3 \to \infty \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Portanto, vemos explicitamente que a norma em L^2 de s' cresce infinitamente quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, sabemos que $s'_\varepsilon(\xi) < 0 \ \ \forall \xi > 0$ e como acima, para ε suficientemente pequeno, podemos fazer a seguinte estimativa,

$$\varepsilon \int_0^\infty (s'_\varepsilon(\xi))^2 \, d\xi \leq -\varepsilon \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |s'_\varepsilon| \int_0^\infty s'_\varepsilon(\xi) \, d\xi = \varepsilon \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |s'_\varepsilon| \, s_\varepsilon(0) \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Assim, observamos que a oscilação de s_ε próximo a $-\infty$, é suficiente para que o quadrado integrável de s'_ε não seja limitado quando $\varepsilon \to 0$. Na verdade, a forma assintótica de $r_\varepsilon(\xi)$ quando $\xi \to -\infty$, dada por

$$(s(\xi) - 2\gamma, r(\xi)) = C \left(\cos(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} + \theta_o + o(1)), \ sen(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} + \theta_o + o(1) \right), \quad (C = constante)$$

pois, $\Lambda\pm = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma\delta}}{2\delta}$ de onde temos $\alpha = Re(\Lambda_+) = \frac{\varepsilon}{2\delta}$ e $\beta = Im(\Lambda_+) = \frac{\left(4\gamma\delta - \varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\delta}$, assim, quando $\varepsilon \downarrow 0$ temos $\alpha \downarrow 0$, enquanto, β converge para $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$. Portanto, não se pode esperar que s_ε convirja a u_γ quando $\varepsilon \downarrow 0$, uniformemente sobre a reta toda.

Corolário 4.1 *Sejam c e δ constantes positivas dadas e suponha que S_L e S_R satisfazendo (2.12) tal que $\gamma = c - S_R > 0$. Seja $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$ e seja $S_\varepsilon(\xi) = S(\xi + \xi_o; \varepsilon, \delta)$ a solução da (2.2) satisfazendo as condições em (2.3) e (2.4) transladada por ξ_o tal que S_ε atinja seu valor máximo em $\xi = 0$. Então, para todo $j \geq 0$, $S_\varepsilon^{(j)}$ convirja para a j-ésima derivada da função*

$$U_\gamma(\xi) = S_R + 3\gamma sech^2 \left[\left(\frac{\gamma}{4\delta} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \right]. \tag{4.11}$$

uniformemente em $K = \{\xi; \xi \geq a\}$.

Demonstração: Seja $S_\varepsilon(\xi) = s_\varepsilon(\xi) + S_R$ onde $\varepsilon^2 < 4\gamma\delta$ e considerando $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ a família de soluções ondas viajantes de (2.6) que satisfaz (2.7) e (2.8) tais que,

$$s_\varepsilon(\xi) = s(\xi + \xi_o; \varepsilon, \delta)$$

onde ξ_o é o ponto de máximo para s. Assim, como resultado direto do teorema anterior para qualquer $a \in \mathbb{R}$, e para todo $j \geq 0$ temos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{d^j}{d\xi^j} s_\varepsilon(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} u_\gamma(\xi),$$

uniformemente em $K = \{\xi; \xi \geq a\}$, onde

$$u_\gamma(\xi) = 3\gamma sech^2\left[\left(\frac{\gamma}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right].$$

conseqüentemente, fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ pela normalização feita temos que S_ε converge a

$$U_\gamma(\xi) = S_R + 3\gamma sech^2\left[\left(\frac{\gamma}{4\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right]$$

uniformemente em K, e ainda como resultado do teorema anterior $\forall j \geq 0$, $S_\varepsilon^{(j)}$ converge para as derivadas da função $U_\gamma(\xi)$ uniformemente em K. Concluindo, assim, o corolário.

■

4.2 Comportamento Limitante quando δ tende a zero

Nesta seção é analisado o comportamento da solução $S(\xi; \varepsilon, \delta)$ de (2.2) quando $\delta \downarrow 0$, enquanto, ε permanece fixo. Assim, estudaremos o caso em que $\varepsilon^2 > 4\gamma\delta$. No Teorema 3.1 vimos que $s(\xi;\varepsilon,\delta)$ é estritamente decrescente na variável ξ, e onde temos

$$\lim_{\xi \to +\infty} s(\xi;\varepsilon,\delta) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \to -\infty} s(\xi;\varepsilon,\delta) = 2\gamma.$$

Por estas propriedades, existe um único valor ξ_o onde, $s(\xi_o;\varepsilon,\delta) = \gamma$, assim, definimos

$$s_\delta(\xi) = s(\xi + \xi_o;\varepsilon,\delta).$$

Então, s_δ é solução de (2.6) satisfazendo (2.7) e (2.8), tal que $\forall \xi$ e $s_\delta(0) = \gamma$ para todo $\delta > 0$.

Portanto, por esta translação de ξ e com $S_\delta(\xi) = s_\delta(\xi) + S_R$ mostraremos que a solução onda viajante $S_\delta(\xi;\varepsilon,\delta)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$, para a solução onda viajante da equação de Burgers a qual é dada por

$$V_\gamma(\xi) = S_R + \gamma\left[1 - \tanh\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\xi\right)\right],$$

quando $\delta \to 0$.

Teorema 4.2 *Seja $\{s_\delta\}_{\delta>0}$ uma família de soluções limitadas de (2.6) satisfazendo (2.7) e (2.8) definida por*

$$s_\delta(\xi) = s(\xi + \xi_o;\varepsilon,\delta).$$

Então, para qualquer inteiro $j \geq 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{d^j}{d\xi^j} s_\delta(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} \nu_\gamma(\xi), \tag{4.12}$$

uniformemente para $\xi \in \mathbb{R}$, onde

$$\nu_\gamma(\xi) = \gamma\left[1 - \tanh\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\xi\right)\right]. \tag{4.13}$$

Demonstração: Esta demonstração é similar a demonstração do Teorema 4.1. Agora vamos mostrar que s_δ e sua derivadas são limitadas, independentemente de δ. O fato de que s_δ é limitada, independente de δ, é obtido do Teorema 2.1, onde foi também mostrado que

$$-\frac{1}{2}\gamma^2\delta\varepsilon^{-1} \leq r_\delta(\xi) \leq \frac{2}{3}\gamma^2\delta\varepsilon^{-1},$$

como $r_\delta(\xi) = \delta s'(\xi)$, segue que $\forall\xi$

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\gamma^2 \leq s'_\delta(\xi) \leq \frac{3}{2\varepsilon}\gamma^2,$$

em particular,

$$|\, s'_\delta(\xi)\,| \leq \frac{3}{2\varepsilon}\gamma^2,$$

e assim s'_δ é limitada, independente de $\delta > 0$. Da equação (2.6) temos

$$s'''_\delta(\xi) - \frac{\varepsilon}{\delta}\, s''_\delta(\xi) = \frac{\gamma}{\delta}\, s'_\delta(\xi) - \frac{1}{\delta}\, s_\delta(\xi)s'_\delta(\xi),$$

multiplicando-se esta equação por $e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi}$

$$\left(s''_\delta(\xi)e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi}\right)' = \left(\frac{\gamma}{\delta}s'_\delta(\xi) - \frac{1}{\delta}\, s_\delta(\xi)s'_\delta(\xi)\right)e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi},$$

e integrando-se em $[\xi,\infty)$, e usando o fato que $s'' \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, segue

$$s''_\delta(\xi) = -\int_\xi^\infty \left(\frac{\gamma}{\delta}s'_\delta(\eta) - \frac{1}{\delta}\, s_\delta(\eta)s'_\delta(\eta)\right)e^{\frac{\varepsilon}{\delta}(\xi-\eta)}d\eta,$$

como s_δ e s'_δ são limitadas, independente de $\delta > 0$ obtém-se

$$|s''_\delta(\xi)| \leq \delta^{-1}\sup_{y\geq\xi}|s_\delta(y)s'_\delta(y) - \gamma s'_\delta(y)|\left(\int_\xi^\infty e^{\frac{\varepsilon}{\delta}(\xi-\eta)}d\eta\right) = \varepsilon^{-1}\sup_{y\geq\xi}|s_\delta(y)s'_\delta(y) - \gamma s'_\delta(y)|,$$

assim, s''_δ é também limitada, independentemente de $\delta > 0$. Agora derivando com relação a ξ

mais uma vez a equação (2.6) temos

$$s_\delta^{(4)}(\xi) - \frac{\varepsilon}{\delta} s_\delta'''(\xi) = \frac{\gamma}{\delta} s_\delta''(\xi) - \frac{1}{\delta}(s_\delta'(\xi))^2 - \frac{1}{\delta} s_\delta(\xi) s_\delta''(\xi), \tag{4.14}$$

mulitipliplicando-se esta equação por $e^{-\frac{\varepsilon}{\delta}\xi}$, e com um argumento similar ao usado anteriomente temos

$$s_\delta'''(\xi) = -\int_\xi^\infty \left(\frac{\gamma}{\delta} s_\delta''(\eta) - \frac{1}{\delta}(s_\delta'(\eta))^2 - \frac{1}{\delta} s_\delta(\eta) s_\delta''(\eta) \right) e^{\frac{\varepsilon}{\delta}(\xi-\eta)} d\eta,$$

assim, como s_δ, s_δ' e s_δ'' são limitadas, independentemente de δ segue

$$|s_\delta'''(\xi)| \leq \delta^{-1} \sup_{y \geq \xi} |(s_\delta'(y))^2 + s_\delta(y) s_\delta''(y) - \gamma\, s_\delta''(y)| \left(\int_\xi^\infty e^{\frac{\varepsilon}{\delta}(\xi-\eta)} d\eta \right)$$

$$= \varepsilon^{-1} \sup_{y \geq \xi} |(s_\delta'(y))^2 + s_\delta(y) s_\delta''(y) - \gamma\, s_\delta''(y)|,$$

conseqüentemente, s_δ''' é limitada, independentemente de $\delta > 0$. Por indução, concluímos que $s_\delta^{(j)}$ é limitada, independente de $\delta > 0$, $\forall j$. Agora, aplicando o Teorema de Ascoli-Arzelá repetidamente juntamente com um processo de diagonalizarão de modo similar ao feito no teorema anterior obtemos a subseqüência $\{s_{\delta_{k_j}}^{(k)}\}_{j=1}^\infty$, que converge uniformemente em qualquer compacto na reta para uma função $V_k = V^{(k)}$. Assim, quando $j \to \infty$ temos $\varepsilon_{k_j} \to 0$, e se

$$s_j(\xi) = s(\xi + \xi_o; \varepsilon, \delta_{k_j});$$

então, existe uma função infinitamente diferenciável V tal que $s_j^{(i)} \to V^{(i)}$ quando $j \to \infty$, uniformemente em qualquer conjunto compacto em $\mathbb{R}$, para todo $i \geq 0$.

Como resultado do Teorema 3.1, temos que para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $0 < s_j(\xi) < 2\gamma$ e $s_j'(\xi) < 0$ $\forall \xi$ e passando o limite $j \to \infty$ temos $0 \leq V(\xi) \leq 2\gamma$ e $V'(\xi) \leq 0$, $\forall \xi$ do domínio, e deste modo, V é monótona não crescente e limitada em $\mathbb{R}$. E ainda que V satisfaz a equação (2.9) com $j \to \infty$, ou seja, $\delta_{k_j} \to 0$, portanto, V satisfaz a equação

$$-\gamma V + \frac{1}{2} V^2 - \varepsilon V' = 0, \tag{4.15}$$

como poderemos observar esta é exatamente a equação da solução onda viajante da equação de Burgers.

Como $s_{\delta_j}(0) = \gamma$ então $V(0) = \gamma$. Do fato que V é monótona não crescente e limitada existem os limites em $\pm\infty$, e de (4.15) observamos que

$$\varepsilon V'(\xi) = V(\xi)\left(\frac{1}{2}V(\xi) - \gamma\right), \tag{4.16}$$

onde, concluímos que estes limites são 0 ou 2γ. Como $V(0) = \gamma$ então, estes limites não podem ser ambos iguais a 0 ou 2γ, pois caso contrário, V avançaria constantemente igual a um destes valores, isto é, teriamos $V \equiv 0$ ou $V \equiv 2\gamma$. Assim, para determinar V consideremos o seguinte PVI,

$$\begin{cases} -\gamma V + \frac{1}{2}V^2 - \varepsilon V' = 0 \\ V(0) = \gamma, \end{cases} \tag{4.17}$$

considerando o problema acima para $0 < V(\xi) < 2\gamma$, pois para $V(\xi) = 0$ ou $V(\xi) = 2\gamma$ não é solução do PVI, assim,

$$\int \frac{V'(\xi)}{V(\xi)\left(\frac{1}{2}V(\xi) - \gamma\right)} d\xi = \int \varepsilon^{-1} d\xi,$$

agora, fazendo a mudança variável $z = \dfrac{1}{2}V(\xi) - \gamma$ temos

$$\int \frac{1}{z(z+\gamma)} dz = \int \pm\varepsilon^{-1} d\xi,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\gamma}\int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\gamma + z}\right) dz = \varepsilon^{-1}\xi + C,$$

assim,

$$\frac{1}{\gamma}\ln\frac{|\,z\,|}{|\,z+\gamma\,|} = \varepsilon^{-1}\xi + C,$$

$$\Longrightarrow \frac{|\,z\,|}{|\,z+\gamma\,|} = K e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\xi} \quad \text{(K=constante)}$$

como $z = \dfrac{V-2\gamma}{2}$ para $0 < V(\xi) < 2\gamma$, então

$$-\frac{V-2\gamma}{V} = K e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\xi},$$

conseqüentemente,

$$V(\xi) = \frac{2\gamma}{1+Ke^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\xi}},$$

como $V(0) = \gamma$ temos

$$\gamma = \frac{2\gamma}{1+K} \Longrightarrow K = 1$$

portanto,

$$V(\xi) = \frac{2\gamma}{1+e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\xi}}$$

como $\tanh\left(\dfrac{\gamma}{2\varepsilon}\xi\right) = \dfrac{e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\xi}-1}{e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\xi}+1}$ então, obtemos

$$V(\xi) = \nu_\gamma(\xi) = \gamma\left[1-\tanh\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\xi\right)\right],$$

como em (4.13), onde temos

$$\lim_{\xi\to+\infty} V(\xi) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi\to-\infty} V(\xi) = 2\gamma,$$

Portanto, usando o teorema de Ascoli-Arzelá qualquer seqüencia $\delta_n \downarrow 0$ possui uma subseqüência $\{\delta_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que a solução onda viajante s_{δ_j} converge para ν_γ, uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$, o mesmo ocorrendo para suas derivadas. Agora vamos estender esta convergência para todo $\mathbb{R}$. De modo similar ao que foi feito na seção 4.1, se $B = \{\xi : \xi \leq a\}$ e $\varepsilon > 0$ são dados, seja $\xi_1 < \min\{0,a\}$ tal que $V(\xi_1) > 2\gamma - \dfrac{\varepsilon}{2}$, pois $V(\xi) \to 2\gamma$ quando $\xi \to -\infty$. Seja $\delta_o > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_o$, então pela convergência uniforme vista anteriormente,

$$|\, s_\delta(\xi) - V(\xi)\,| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para $\xi \in [\xi_1, a]$. Em particular, $s_\delta(\xi_1) \geq 2\gamma - \varepsilon$, de fato

$$|| s_\delta(\xi_1) | - | V(\xi_1) || \leq | s_\delta(\xi_1) - V(\xi_1) | \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$| s_\delta(\xi_1) | - | V(\xi_1) | \geq -\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow s_\delta(\xi_1) - \frac{\varepsilon}{2} + V(\xi_1) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + 2\gamma - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon + 2\gamma,$$

como $s_\delta(\xi)$ é decrescente para todo ξ, então $s_\delta(\xi) \geq 2\gamma - \varepsilon$ para todo $\xi < \xi_1$. Assim, para todo $\xi \leq a$

$$| s_\delta(\xi) - V(\xi) | \leq \varepsilon.$$

De fato, pois para $\xi_1 \in [\xi, a]$ é imediato, resta verificarmos para $\xi < \xi_1$. Como $\forall \xi < \xi_1$ $s_\delta(\xi) > 2\gamma - \varepsilon$, então

$$s_\delta(\xi) - V(\xi) > 2\gamma - \varepsilon - V(\xi) \geq -\varepsilon, \quad (2\gamma - V(\xi) \geq 0)$$

e como $V(\xi) > 2\gamma - \varepsilon$, para todo $\xi < \xi_1$, pois V é não crescente, temos

$$-V(\xi) > -2\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow s_\delta(\xi) - V(\xi) > 2\gamma - 2\gamma + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad (s_\delta(\xi) \leq 2\gamma)$$

portanto, para $\xi < \xi_1$

$$| s_\delta(\xi) - V(\xi) | < \varepsilon,$$

assim, conclui-se que $s_\delta \to V(\xi)$ uniformemente em B. Agora, se considerarmos o conjunto $D = \{\xi, \xi \geq a\}$ e $M > 0$ dados, como $V(\xi) \to 0$ quando $\xi \to \infty$, seja $\xi_2 > \max\{0, a\}$ tal que $V(\xi_2) \leq \frac{M}{4}$, agindo de modo inteiramente análogo como no do Teorema anterior, conclui-se que $s_\delta \to V(\xi)$ uniformemente em D. Portanto, s_{δ_j} converge a V uniformemente em $\mathbb{R}$ quando $j \to \infty$. De (2.9) temos

$$-\gamma s_{\delta_j}(y) + \frac{1}{2} s^2_{\delta_j}(y) + \delta_j s''_{\delta_j}(y) - \varepsilon s'_{\delta_j}(y) = 0$$

e passando o limite $j \to \infty$ temos $\delta_j \to 0$, e de (4.15) segue que $s'_{\delta_j}(\xi) - V'(\xi) \to 0$ uniformemente em toda reta quando $\delta_j \downarrow 0$, pois como vimos $s_{\delta_j}(\xi) \to V$ uniformemente na reta e $s''_{\delta_j}(\xi)$ é limitada. Através de repetidas derivações de (2.9) e (4.15) podemos concluímos de maneira análoga que $s_\delta^{(j)} \to V^{(j)}$ uniformemente em $\mathbb{R}$ para todo $j \geq 0$, completando a prova do teorema .

■

Corolário 4.2 *Sejam c e δ constantes positivas dadas e suponha que S_L e S_R satisfazendo (2.12) tal que $\gamma = c - S_R > 0$. Seja $\varepsilon^2 > 4\gamma\delta$ e seja $S_\delta(\xi) = S(\xi + \xi_o; \varepsilon, \delta)$ a solução para (2.2) satisfazendo as condições em (2.3) e (2.4), transladada por ξ_o tal que $S_\delta(0) = c$. Então, para todo $j \geq 0$, $S_\delta^{(j)}$ convirja para a j-ésima derivada da função*

$$V_\gamma(\xi) = S_R + \gamma \left[1 - \tanh\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\xi\right)\right]. \tag{4.18}$$

quando, $\delta \downarrow 0$, uniformemente para $\xi \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $s_\delta(\xi) = S_\delta(\xi) - S_R$ onde $\{s_\delta\}_{\delta > 0}$ é uma família de soluções onda viajantes para (2.6)-(2.8) definida como no Teorema anterior, a saber

$$s_\delta(\xi) = s(\xi + \xi_o; \varepsilon, \delta)$$

com $s_\delta(0) = \delta$ e $\varepsilon^2 > 4\gamma\delta$. Assim como resultado imediato do Teorema 4.2 desta seção segue que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{d^j}{d\xi^j} s_\delta(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} \nu_\gamma(\xi),$$

de maneira uniforme em $\mathbb{R}$, para todo $j \geq 0$, onde

$$\nu_\gamma(\xi) = \gamma \left[1 - \tanh\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\xi\right)\right]$$

conseqüentemente, como $S_\delta(\xi) = s_\delta(\xi) + S_R$, fazendo $\delta \downarrow 0$ podemos concluir que $S_\delta(\xi)$ converge a função $V_\gamma(\xi)$, definida em (4.18), uniformemente para $\xi \in \mathbb{R}$, além disso $S_\delta^{(j)} \to V_\gamma^{(j)}(\xi)$ uniformemente em $\mathbb{R}$. Assim, concluímos a prova do corolário.

■

4.3 Convergência para um perfil de uma onda de Choque

Aqui, analisaremos o comportamento da solução $S(\xi,\varepsilon,\delta)$ de (2.2) satisfazendo (2.3) e (2.4) no limite quando $\varepsilon,\delta \downarrow 0$, desde que a razão $\dfrac{\delta}{\varepsilon^2}$ permaneça limitada. Nesta condições, pela teoria desenvolvida nos capítulo anteriores, concluímos que $0 < s(\xi) < 2\gamma$ e é decrescente $\forall \xi$, deste modo existe ξ_o, tal que, definimos

$$s_{\varepsilon,\delta}(\xi) = s(\xi+\xi_o,\varepsilon,\delta), \tag{4.19}$$

onde, $s_{\varepsilon,\delta}(0) = \gamma$ e para $\xi > 0$ temos $s_{\varepsilon,\delta}(\xi) < \gamma$. Por esta translação de ξ e com $S = s + S_R$ mostraremos que a solução onda viajante $S(\xi,\varepsilon,\delta)$ converge uniformemente a um perfil de onda de choque (solução fraca para a Lei de Conservação $u_t + u\,u_x = 0$),

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi) + S_R, \tag{4.20}$$

onde

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 2\gamma, & \xi < 0, \\ \gamma, & \xi = 0, \\ 0, & \xi > 0, \end{cases} \tag{4.21}$$

Teorema 4.3 *Sejam $\alpha > 0$ e $M > 0$ dados. Então, para qualquer inteiro j,*

$$\lim_{\substack{\delta\downarrow 0,\varepsilon\downarrow 0 \\ \frac{\delta}{\varepsilon^2}\le M}} \frac{d^j}{d\xi^j}\, s_{\varepsilon,\delta}(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j}\,\varphi(\xi), \tag{4.22}$$

Demonstração: Definamos a variável dependente T, do seguinte modo

$$T(\xi) = s_{\varepsilon,\delta}(\varepsilon\xi),$$

onde é omitida a dependência de T, com relação a ε e δ. Substituindo em (2.9), obtemos

$$-\gamma T(\xi) + \frac{1}{2}T^2(\xi) + \frac{\delta}{\varepsilon^2}T''(\xi) - T'(\xi) = 0 \tag{4.23}$$

seja $\mu = \dfrac{\delta}{\varepsilon^2}$, então

$$-\gamma T(\xi) + \frac{1}{2}T^2(\xi) + \mu T''(\xi) - T'(\xi) = 0. \tag{4.24}$$

Pela unicidade obtida no Teorema 2.1 temos $T(\xi) = T_\mu(\xi) = s(\xi + \xi_o, 1, \mu)$, através da translação de ξ_o, temos

$$T_\mu(0) = \gamma \quad \text{e} \quad T_\mu(\xi) < \gamma, \quad \forall \xi > 0$$

e isto é obtido, pois

$$s_{1,\mu}(0) = \gamma \quad \text{e} \quad s_{1,\mu}(\xi) < \gamma \quad \forall \xi > 0.$$

A relação (4.22) será estabelecida por um argumento envolvendo seqüencias da mesma forma como nas seções anteriores. Considerando agora (4.24), e pelo Teorema 2.1 temos

$$-\frac{1}{2}\gamma^2\mu \leq \mu T'_\mu(\xi) \leq \frac{3}{2}\gamma^2\mu$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\gamma^2 \leq T'_\mu(\xi) \leq \frac{3}{2}\gamma^2,$$

em particular $\mid T'_\mu(\xi) \mid \leq \frac{3}{2}\gamma^2\mu$, conseqüentemente, T'_μ é limitada, independente de μ. Agora derivando (4.24) temos

$$T'''_\mu(\xi) - \frac{1}{\mu}T''_\mu(\xi) = \frac{\gamma}{\mu}T'_\mu(\xi) - \frac{1}{\mu}T_\mu T'_\mu(\xi),$$

multiplicando-se esta equação por $e^{-\frac{1}{\mu}\xi}$, temos

$$\left(T''_{\mu}(\xi)e^{-\frac{1}{\mu}\xi}\right)' = \left(\frac{\gamma}{\mu}T'_{\mu}(\xi) - \frac{1}{\mu}T_{\mu}T'_{\mu}(\xi)\right)e^{-\frac{1}{\mu}\xi},$$

agora como $T''_{\mu} \to 0$ quando $\xi \to +\infty$, segue

$$T''_{\mu}(\xi) = -\int_{\xi}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\mu}T'_{\mu}(\eta) - \frac{1}{\mu}T_{\mu}(\eta)T'_{\mu}(\eta)\right)e^{\mu^{-1}(\xi-\eta)}d\eta,$$

como T'_{μ} e T_{μ} são limitadas, independente de μ então,

$$|\, T''_{\mu}(\xi)\,| \leq \sup_{\eta\geq\xi} |\, T'_{\mu}(\eta) - T_{\mu}(\eta)T'_{\mu}(\eta)\,|,$$

portanto, T''_{μ} é limitada, independente de μ. Continuando com este processo, concluímos que $T_{\mu}^{(j)}$ é limitada, independente de μ, para todo $j \geq 0$.

Considerando $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ seqüencias de parâmetros positivos, tais que,

$$\varepsilon_n \to 0 \quad \text{e} \quad \delta_n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty \quad \text{e} \quad 0 < \mu_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon_n^2} \leq M \quad \forall n. \tag{4.25}$$

como $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada admite subseqüência então, existe subseqüência $\{\mu_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de inteiros positivos tal que $\mu_{n_k} = \nu_k$ convergem ao limite ν quando $k \to \infty$ onde, $0 \leq \nu \leq M$. Seja T_{ν_k} denotado por T_k e seja V_{γ} a função

$$\gamma\left[1 - \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\xi\right)\right].$$

Se $\nu = 0$, então como no Teorema 4.2 com $\varepsilon = 1$, concluímos que para $j \geq 0$,

$$\frac{d^j}{d\xi^j}\,T_k(\xi) \longrightarrow \frac{d^j}{d\xi^j}\,V_{\gamma}(\xi)$$

uniformemente em $\xi \in \mathbb{R}$. Agora seja $\nu > 0$. Então, consideramos o conjunto $F = \{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma família de funções eqüicontínua e uniformemente limitada, da mesma forma que na seção 4.1, através de um processo de diagonalização, obtemos a subseqüência $\{T_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\frac{d^j}{d\xi^j} T_k(\xi) \longrightarrow \frac{d^j}{d\xi^j} T_\nu(\xi) \quad \text{quando} \quad k \to \infty, \quad \forall j \geq 0 \tag{4.26}$$

uniformemente em qualquer subconjunto compactos de $\mathbb{R}$.

Para $r = 1, 2, \ldots$ ou $r = \nu$, as funções T_r satisfazem as condições (2.7) e (2.8). De fato, de (4.26) concluímos que $T_r \in C^\infty$ é não crescente, $0 \leq T_r \leq 2\gamma$, $T_r(0) = \gamma$, e que T_r satisfaz (2.9) quando $k \to 0$, e deste modo, T_r satifaz a equação

$$-\gamma T_r(\xi) + \frac{1}{2} T_r^2(\xi) = 0 \Rightarrow T_r(\xi) = 2\gamma \text{ ou } 0, \tag{4.27}$$

como é monótona e limitada temos que existem os limites em $\pm\infty$ e como é não crescente os mesmos são

$$\lim_{\xi \to +\infty} T_r(\xi) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \to -\infty} T_r(\xi) = 2\gamma,$$

assim, $T_r(\xi)$ é 0 para $\xi > 0$ e 2γ para $\xi < 0$, conseqüentemente, temos

$$\lim_{|\xi| \to \infty} T_r^{(j)}(\xi) = 0 \quad \forall j > 0.$$

Além disso, das propriedades geométricas apresentadas no Capítulo 3 temos que para ξ_1 pertencente a qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, se $T_k(\xi_1)$ estiver suficientemente próximo de 0 então, os valores permanecem próximos para $\xi > \xi_1$, do mesmo modo se $T_k(\xi_1)$ esta suficientemente próximo a 2γ então, os valores permanecem próximos para $\xi < \xi_1$, conseqüentemente, pela convergência uniforme se $T_r(\xi_1)$ estiver suficientemente próximo de 0 então, os valores permanecem próximos para $\xi > \xi_1$, e se $T_r(\xi_1)$ esta suficientemente próximo a 2γ então, os valores permanecem próximos para $\xi < \xi_1$. Por estas características, como nas seções anteriores, temos que a convergência em (4.26) é uniforme em $\mathbb{R}$, pelo menos para $j = 0$. Assim, a correspondente afirmação para $j > 0$ pode ser estabelecida como na prova do Teorema 4.1. De fato, de (4.24) segue

$$-\gamma T_k(\xi)+\frac{1}{2}T_k^2(\xi)+\mu_k T_k''(\xi)-T_k'(\xi)=0, \tag{4.28}$$

como no Teorema 4.1 para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$, temos

$$T_k'(\xi)=-\int_\xi^\infty\left(\frac{\gamma}{\mu_k}T_k(\eta)-\frac{1}{2\mu_k}T_k^2(\eta)\right)e^{\frac{1}{\mu_k}(\xi-\eta)}d\eta,$$

e demonstrando, do mesmo modo, como no Teorema 4.1 temos,

$$\frac{d^j}{d\xi^j}T_k(\xi)\longrightarrow\frac{d^j}{d\xi^j}T_r(\xi)\quad \text{para}\quad j>0.$$

uniformemente em $\mathbb{R}$. Assim, conclui-se que $\nu>0$, e para qualquer $j\geq 0$,

$$\frac{d^j}{d\xi^j}T_k(\xi)\longrightarrow\frac{d^j}{d\xi^j}T_\infty(\xi)$$

uniformemente em $\mathbb{R}$, onde T_∞ denota o limite de T_k quando $\nu\neq 0$ e satisfaz as condições em (2.7) e (2.8). Para provar (4.22), é suficiente mostrar que uma seqüência satisfazendo (4.25) têm subseqüência tal que (4.22) valha quando o limite em questão refere-se a esta subseqüência. Assim, dadas as seqüências $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ como em (4.25) escolhemos as subseqüência $\{\varepsilon_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ e $\{\delta_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, tais que, a seqüência $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ é convergente. Então, a seqüência associada de funções $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente para T_∞ em $\mathbb{R}$.

Portanto, se fixado $j\geq 0$ e dado $\lambda>0$. Seja L suficientemente grande, tal que,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^j}{d\xi^j}T_k(\xi)-\frac{d^j}{d\xi^j}T_\infty(\xi)\right|\leq\frac{\lambda}{2}, \tag{4.29}$$

para todo $k\geq L$. Seja $s_{k,\infty}(\xi)=T_\infty(\frac{\xi}{\varepsilon_k})$. Como T_∞ satisfaz (4.27), assim, para $\xi\neq 0$ temos retornando a (4.24),

$$\lim_{k\to\infty}s_{k,\infty}(\xi)=\lim_{k\to\infty}T_\infty(\frac{\xi}{\varepsilon_k})=0\quad\text{para}\quad\xi>0$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{k,\infty}(\xi) = \lim_{k\to\infty} T_\infty(\frac{\xi}{\varepsilon_k}) = 2\gamma \quad \text{para} \quad \xi < 0,$$

deste modo,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d^j}{d\xi^j}\, s_{k,\infty}(\xi) = \lim_{k\to\infty} \frac{d^j}{d\xi^j} T_\infty(\frac{\xi}{\varepsilon_k}) = 0 \quad \text{para} \quad |\, \xi \,| > 0,$$

então, para $\xi \neq 0$ temos

$$\frac{d^j}{d\xi^j}\, s_{k,\infty}(\xi) \longrightarrow \frac{d^j}{d\xi^j}\, \varphi(\xi), \tag{4.30}$$

quando $k \to \infty$, assim, existe $\alpha > 0$ tal que a convergência em (4.30) é uniforme para $|\, \xi \,| \geq \alpha$.

Agora de (4.29) e (4.30) temos

$$\sup_{|\xi|\geq\alpha} \left| \frac{d^j}{d\xi^j} s_{\varepsilon_k,\delta_k}(\xi) - \frac{d^j}{d\xi^j}\varphi(\xi) \right| \leq \sup_{|\xi|\geq\alpha} \left| \frac{d^j}{d\xi^j} s_{\varepsilon_k,\delta_k}(\xi) - \frac{d^j}{d\xi^j} s_{k,\infty}(\xi) \right|$$

$$+ \sup_{|\xi|\geq\alpha} \left| \frac{d^j}{d\xi^j} s_{k,\infty}(\xi) - \frac{d^j}{d\xi^j}\varphi(\xi) \right| \leq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

deste modo,

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{|\xi|\geq\alpha} \left| \frac{d^j}{d\xi^j}\, s_{\varepsilon_k,\delta_k}(\xi) - \frac{d^j}{d\xi^j}\, \varphi(\xi) \right| \leq \lambda,$$

como λ é arbitrário, segue o resultado (4.22).

$\blacksquare$

Corolário 4.3 *Seja $c > 0$ dado e suponhamos que S_L e S_R satisfação (2.12). Para $\varepsilon, \delta > 0$ seja $S_{\varepsilon,\delta}(\xi) = S(\xi + \xi_o; \varepsilon, \delta)$ a solução de (2.2) satisfazendo as condições em (2.3) e (2.4), transladada por ξ_o, tal que, $S_{\varepsilon,\delta}(0) = c$. Seja ψ dada por*

$$\psi(\xi) = \begin{cases} S_L, & \xi < 0 \\ c\ , & \xi = 0 \\ S_R\ , & \xi > 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

Então, para qualquer inteiro $j \geq 0$

$$\lim_{\substack{\delta,\varepsilon \downarrow 0 \\ \frac{\delta}{\varepsilon^2} \leq M}} \frac{d^j}{d\xi^j} S_{\varepsilon,\delta}(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} \psi(\xi), \tag{4.32}$$

para qualquer $\xi \neq 0$, *e uniformemente em conjuntos da forma* $\{\xi; \mid \xi \mid \geq \alpha\}$, *onde* $\alpha > 0$.

Demonstração: Seja $s_{\varepsilon,\delta}(\xi) = S_{\varepsilon,\delta}(\xi) - S_R$ (normalização de $S_{\varepsilon,\delta}$). Considerando $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergindo simultaneamente a zero, de modo que, a razão $\frac{\delta_n}{\varepsilon_n^2}$ permaneça limitado. Nestas condições aplicando o teorema anterior, obtemos que

$$\lim_{\substack{\delta,\varepsilon \downarrow 0 \\ \frac{\delta}{\varepsilon^2} \leq M}} \frac{d^j}{d\xi^j} s_{\varepsilon,\delta}(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} \varphi(\xi),$$

para qualquer $\xi \neq 0$, uniformemente em $\{\xi; \mid \xi \mid \geq \alpha\}$, $j \geq 0$. Como S_L e S_R satisfazem (2.12), assim, pela normalização de $S_{\varepsilon,\delta}$ temos que $S^{(j)}_{\varepsilon,\delta}(\xi)$ converge a j-ésima derivada da função $\psi(\xi)$ definida em (4.31), uniformemente em $\{\xi; \mid \xi \mid \geq \alpha\}$, $j \geq 0$ onde $\alpha > 0$. Portanto, concluímos o corolário. ■

Referências Bibliográficas

[1] Bona, J. L., Schonbeck, M. E.: Travelling-wave solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 101A, (1985), 207-286.

[2] Coddingtion, E. A., Levinson, N.: **Theory of ordinary differential equations** , McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] Hartman, P. **Ordinary differential equations**, John Wiley, New York, 1955.

[4] Jeffrey, A., Kakutani, T.: Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centred around the Korteweg-de Vries equation, SIAM Rev. 14 (1972), 582-643.

[5] Ebert, M. R.: **Problema de Cauchy para Sistema 2x2 Fracamente Hiperbólico do Plano**, Tese de Doutorado, Univercidade Federal de São Carlos, 2004.

[6] Lima, E. L., **Curso de análise**, vol.2, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.