UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Extensões de Distribuições Quase-homogêneas

Elaine Bonfante

São Carlos - SP

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Extensões de Distribuições Quase-homogêneas

Elaine Bonfante

Orientador: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Co-Orientador: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

Defesa apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Matemática" .

São Carlos

Fevereiro de 2007

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

B713ed

Bonfante, Elaine.
Extensões de distribuições quase-homogêneas / Elaine Bonfante. -- São Carlos : UFSCar, 2007.
78 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Operadores diferenciais parciais. 3. Teoria das distribuições. 4. Espaço euclidiano. 5. Extensões de distribuições homogêneas. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Orientador

José Ruidival Soares dos Santos Filho

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
FFCLRP/USP

Agradecimentos

A Deus e a Nossa Senhora de Fátima pela vida e pela constante companhia.

Aos Professores Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho e ao Dr. Ivo Machado da Costa. O primeiro pela orientação dedicada a este trabalho, disponibilidade, paciência e compreensão durante nossas horas de estudos. O segundo pela amizade, apoio e por sua inesgotável atenção e disposição em me ajudar.

Aos meus pais José e Tereza, pelo amor e compreensão em todos os monentos de minha vida. Ao meu irmão Everton e minha cunhada Graciela pelo apoio e carinho. A minha sobrinha Giovana o meu maior tesouro. A minha vovó Carmela pelo carinho e amizade.

Aos meus familiares que tornaram esse sonho possível direta ou indiretamente.

Aos professores do Centro Universitário “Barão de Mauá”em especial aos Professores Dr. Afonso Celso Marino Guimarães, Dr. Marcelo Noronha Zini e a Professora Dra. Monica Magalhães Costa Zini.

Aos professores da UFSCAR pelos ensinamentos matemáticos e pela amizade.

Aos meus amigos em especial a Claudete e ao Jamil, pela amizade e pelas palavras de incentivo nas horas difíceis. Também só posso agradecer e retribuir com meu bem mais valioso: a emoção que sinto quando me lembro das pessoas que fizeram ou fazem parte de meus sonhos e também daqueles de cujos sonhos

eu também fiz ou faço parte de alguma forma. Nós nos tornamos cúmplices na arte de sonhar com os olhos abertos. Mas preciso poupar você, leitor de uma lista que poderia ser interminável e ainda assim cometeria injustiças por omissões inevitáveis. Essas pessoas sabem o que significam para mim e tenho certeza de que entendem as razões pelas quais só nomino algumas delas.

Finalizo pedindo desculpas aqueles a quem eu possa ter frustado por não contribuir com os seus sonhos enquanto tentava realizar os meus.

Resumo

Nesta dissertação a autora demonstra dois resultados de extensões para $\mathbb{R}^n$ de soluções distribucionais em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ do operador $L_{\lambda,a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$, com $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ e $a \in \mathbb{C}$.

Abstract

In this dissertation the author proves two results of extensions for $\mathbb{R}^n$ of distribution solutions in $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ of the operator $L_{\lambda,a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$, with $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$ and $a \in \mathbb{C}$.

Sumário

Introdução

Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$ e $a \in \mathbb{C}$, daí considere $L_{\lambda,a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$. O objetivo deste trabalho é apresentar resultados de extensões para $\mathbb{R}^n$ de soluções homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de $L_{\lambda,a}$. Para atingirmos este objetivo seguiremos de perto os resultados L.Hörmander, em [Hö], para o caso $\lambda = (1, \ldots, 1)$. Neste caso as soluções são denominadas distribuições homogêneas. Isto nos motivou a denominar as soluções de $L_{\lambda,a}$ de distribuições $\lambda-$ homogêneas de grau a. Para λ e a arbitrários o conjunto de todas essas distribuições serão chamadas de quase-homogêneas.

Está dissertação está assim organizada:

Iniciamos com uma lista de notações e conceitos.

No primeiro capítulo definiremos distribuições homogêneas de grau a em $\mathbb{R}$. Veremos que quando $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$ existem tais distribuições, no entanto quando $a \in \mathbb{Z}_-$ este não é o caso.

No segundo capítulo estenderemos a definição de distribuições homogêneas para $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $\mathbb{R}^n$. Veremos por meio de um lema três formas equivalentes de definir distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e demonstraremos alguns resultados necessários para o capítulo precedente.

No terceiro capítulo na seção 3.1, seguindo L.Hörmander em [Hö], enunciaremos e demonstraremos o resultado de extensão para $\mathbb{R}^n$ de distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de grau a com $a \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$ e veremos que, neste caso, uma tal extensão homogênea de mesmo grau pode ser obtida, já na seção 3.2 demonstraremos um teorema de extensão para $\mathbb{R}^n$ de distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ de grau inteiro a sendo $a = -n-k$ com $k \in \mathbb{N}$. Neste caso só excepcionalmente a distribuição obtida é homogênea.

No quarto capítulo demonstraremos um lema análogo ao do Capítulo 2, descrevendo, portanto, três formas equivalentes para definir distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

No quinto capítulo na seção 5.1 estenderemos para $\mathbb{R}^n$ distribuições quase-homogêneas (ou $\lambda-$homogêneas) em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ de grau a, quando $a \notin \{-|\lambda| - <\alpha, \lambda>; i = 1, \ldots, n\}$, já na seção 5.2 estenderemos para o $\mathbb{R}^n$ distribuições quase-homogêneas (ou $\lambda-$homogêneas) em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, quando $a = -|\lambda| - <\alpha, \lambda>$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Condições para que exista extensões homogêneas são também descritas.

As bibliografias utilizadas foram: [L] e [R] para os elementos de Análise Real. [Ho], [Hö], [O] e [F] para os fundamentos da teoria de distribuições. Finalmente [Hö] e [G] para o estudo de distribuições homogêneas e quase-homogêneas em $\mathbb{R}^n$.

Lista de Notações e Conceitos

$\mathbb{R}^n$ = o espaço euclidiano n-dimensional ($n \geq 1$).

$\mathbb{N}^n$ = o conjunto das n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ com $\alpha_j \in \mathbb{N}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ com $\partial_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial_{x_j}}$.

$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \ldots {x_n}^{\alpha_n}$ os monômios em x de expoente α.

Se α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, dizemos que $\beta \leq \alpha$ *se* $\beta_j \leq \alpha_j, \forall j = 1, 2, \ldots, n$.

$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$.

$\dbinom{\alpha}{\beta} := \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}, \qquad \forall \beta \leq \alpha.$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $[\lambda]$ = a parte inteira de λ.

Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Ω^c é o complementar de Ω em $\mathbb{R}^n$.

$K \subset\subset \Omega$, significa que K é subconjunto compacto de Ω.

$C^\infty(\Omega)$ = o espaço das funções complexas infinitamente diferenciáveis.

Se $K \subset\subset \Omega$ e $j \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,

$$p_{K,j}(\varphi) = \sup_{x \in K} \sum_{|\alpha| \leq j} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

é a família de seminormas que definem a topologia de $C^\infty(\Omega)$.

$C_c^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; f \in C^\infty(\Omega) \text{ } e \text{ } S(f) \subset\subset \Omega\}$.

Quando $K \subset\subset \Omega$, $C_c^\infty(K) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : S(\varphi) \subset\subset K\}$.

$\mathcal{D}' =$ o espaço das distribuições em Ω.

$u \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear e para cada compacto $K \subset \Omega$ existem constantes $C \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que:

$$| < u, \varphi > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|; \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad com \quad S(\varphi) \subset K. \quad (0.0.1)$$

Denotamos T_u a distribuição dada por $< T_u, \varphi >= \displaystyle\int u(x)\varphi(x)\, dx$, se $u \in L^1_{loc}$ e $\varphi \in C_c^\infty$.

A ordem da distribuição $u \in \mathcal{D}'$ é o menor valor inteiro não-negativo de k, se k em (0.0.1) puder ser tomado independente de K. Se não existir k finito que satisfaça a desigualdade citada para todo K, dizemos que u possui ordem infinita.

Suporte de $u = S(u) = \left(\bigcup_{\left\{V;\, u\big|_V = 0\right\}} V \right)^c.$

Capítulo 1

Distribuições Homogêneas em $\mathbb{R}$

1.1 Distribuições Homogêneas de grau a com $\mathrm{Re}(a) > -1$

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma função real f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é homogênea de grau λ se $f(tx) = t^{\lambda} f(x)$ para $t > 0$, ou analogamente, se

$$f(x) = \begin{cases} x^{\lambda} f(1), & \text{para } x > 0 \\ (-x)^{\lambda} f(-1), & \text{caso } x < 0. \end{cases}$$

Consideremos então as funções $f_+ = f(1)x_+^{\lambda}$ e $f_- = f(-1)x_-^{\lambda}$ com
$x_+^{\lambda} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x_+^{\lambda}(x) = \begin{cases} x^{\lambda}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } \ x < 0, \end{cases}$$

e $x_-^{\lambda} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x_-^{\lambda}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x > 0 \\ |x|^{\lambda}, & \text{para } \ x < 0. \end{cases}$$

Logo, $f(x) = f_+(x) + f_-(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observação 1.1.1 *Como $x_+^{\lambda}(-x) = x_-^{\lambda}(x)$, para qualquer $x \neq 0$, vamos estudar a função x_+^{λ}. Resultados análogos são obtidos por x_-^{λ}.*

Mas geralmente, para qualquer $a \in \mathbb{C}$, seja $x_+^a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$x_+^a(x) = \begin{cases} x^a, & \text{se } \; x > 0 \\ 0, & \text{se } \; x < 0. \end{cases}$$

Para $x > 0$

$$\begin{aligned} x^a &= e^{a \;\ln(x)} \\ &= x^{\mathrm{Re}(a)} e^{iIm(a) \ln x}. \end{aligned}$$

Para estender tais distribuições para $\mathbb{R}$ precisamos dar um sentido as distribuições homogêneas em $\mathbb{R}$. Observamos que quando $\mathrm{Re}(a) > -1$, então $x_+^a \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e daí, se estende para uma distribuição em $\mathbb{R}$. De fato, seja $x_+^a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$x_+^a(x) = \begin{cases} x^a, & \text{se } \; x > 0 \\ 0, & \text{se } \; x \leq 0. \end{cases}$$

Logo, para K compacto de $\mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \int_K |x_+^a| \, dx &= \int_{K \cap (0,+\infty)} \left| x^{\mathrm{Re}(a)} \right| \left| e^{iIm(a) \ln x} \right| \, dx \\ &= \int_{K \cap (0,+\infty)} \left| x^{\mathrm{Re}(a)} \right| \, dx \\ &= \int_{K \cap (0,+\infty)} x^{\mathrm{Re}(a)} \, dx < +\infty, \; se \; \mathrm{Re}(a) > -1. \end{aligned}$$

Daí x_+^a define uma distribuição.

Fazendo uma mudança de variável obtemos que a distribuição $u = T_{x_+^a}$ satisfaz $< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_t >$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\varphi_t(x) = t\varphi(tx)$ e $t > 0$ daí, consideremos:

Definição 1.1.1 *Dado $a \in \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é homogênea de grau a se:*

$$< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_t >, \tag{1.1.1}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\varphi_t(x) = t\varphi(tx)$ e $t > 0$.

É fácil mostrar as seguintes propriedades:

$$x.x_+^a = x_+^{a+1} \quad \text{se} \;\; \text{Re}\,(a) > -1, \; em \; \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}) \tag{1.1.2}$$

e

$$\frac{d}{dx}x_+^a = ax_+^{a-1} \quad \text{se} \;\; \text{Re}\,(a) > 0, \; em \; \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}). \tag{1.1.3}$$

Nosso próximo objetivo é estender a definição de x_+^a como distribuição para todo $a \in \mathbb{C}$, de forma que as propriedades (1.1.2) e (1.1.3) sejam preservadas. Veremos no entanto que a veracidade destas propriedades não valem para todo $a \in \mathbb{C}$. De fato, um exemplo simples é $a = 0$, pois neste caso temos que o lado esquerdo de (1.1.3) é $H' = \delta$ e o lado direito é nulo.

Assim para estendermos esta análise para todo $a \in \mathbb{C}$, consideremos para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ fixa a seguinte função:

$$\mathcal{I}_\varphi : \{a \in \mathbb{C};\; Re(a) > -1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por $\mathcal{I}_\varphi(a) =< x_+^a, \varphi >= \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \varphi(x)dx$. Afirmamos que esta função é analítica.

De fato, basta verificarmos que $\dfrac{\partial(\mathcal{I}_\varphi)}{\partial \overline{a}} = 0$. Assim temos que

$$\frac{\partial(\mathcal{I}_\varphi)}{\partial \overline{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1} + i\frac{\partial}{\partial a_2}\right)(\mathcal{I}_\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{I}_\varphi}{\partial a_1} + i\frac{\partial \mathcal{I}_\varphi}{\partial a_2}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{I}_\varphi)}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\int_0^{+\infty} x^a \varphi(x)\, dx\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a_1}\left(x^{a_1} x^{ia_2}\varphi(x)\right)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^a \ln(x)\varphi(x)\, dx, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do Teorema da Convergência Dominada. Analogamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{I}_\varphi)}{\partial a_2} &= \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\int_0^{+\infty} x^a \varphi(x)\, dx\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a_2}\left(x^{a_1} x^{ia_2}\varphi(x)\, dx\right) \\ &= i\int_0^{+\infty} x^a \ln(x)\varphi(x)\, dx, \end{aligned}$$

a convergência segue do Teorema da Convergência Dominada.

Logo, $\dfrac{\partial(\mathcal{I}_\varphi)}{\partial \overline{a}} = 0$ e portanto $\mathcal{I}_\varphi$ é analítica quando $\mathrm{Re}(a) > -1$.

Observação 1.1.2 *Se* $\mathrm{Re}(a) > -1$ *e* $k > 0$ *for um inteiro, podemos mostrar que:*

$$< x_+^a, \varphi >= (-1)^k \frac{< x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >}{(a+1)\dots(a+k)}. \tag{1.1.4}$$

De fato, por indução em k, mostraremos que vale a igualdade acima para $k = 1$. Observemos que $< x_+^{a+1}, \varphi' >= -(a+1) < x_+^a, \varphi >$ por (1.1.3). Daí,

$$\begin{aligned} \frac{(-1) < x_+^{a+1}, \varphi^{(1)} >}{(a+1)} &= \frac{(-1)^2}{(a+1)}(a+1) < x_+^a, \varphi > \\ &= < x_+^a, \varphi > . \end{aligned}$$

Suponhamos que valha para k, isto é,

$$< x_+^a, \varphi >= (-1)^k \frac{< x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >}{(a+1)\dots(a+k)}.$$

Provaremos que vale para $k+1$.

Observemos que

$$< x_+^{a+k+1}, \varphi^{(k+1)} >= -(a+k+1) < x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >$$

por (1.1.3). Daí,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k+1} < x_+^{a+k+1}, \varphi^{(k+1)} >}{(a+1)\dots(a+k)(a+k+1)} &= \frac{(-1)^{k+2}(a+k+1) < x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >}{(a+1)\dots(a+k)(a+k+1)} \\ &= \frac{(-1)^k}{(a+1)\dots(a+k)} < x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} > \\ &= < x_+^a, \varphi > . \end{aligned}$$

Assim para $Re(a) > -1$, com k inteiro positivo, temos (1.1.4) vale.

1.2 Distribuições Homogêneas de grau a com $a \notin \mathbb{Z}_-$

A aplicação $a \mapsto x_+^a$ e $a \mapsto x_-^a$ se estendem analiticamente para $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$, definindo distribuições homogêneas de grau a.

Observemos que lado direito da relação (1.1.4) da seção 1.1 é analítico para $\text{Re}(a) > -1-k$ exceto para os pólos simples $-1,-2,\ldots,-k$, pois x_+^{a+k} é analítica para $Re(a) > -1-k$ e $\dfrac{1}{(a+1)\ldots(a+k)}$ é analítica exceto nos pólos simples $-1,-2,\ldots,-k$.

Ainda, x_+^a define uma distribuição de ordem menor ou igual que k, pois para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, com $S(\varphi) \subset K \subset\subset \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|< x_+^a, \varphi >\right| &= \left|\frac{(-1)^k}{(a+1)\ldots(a+k)}\right| \left|< x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >\right| \\
&= c_{k,a} \left|< x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >\right| \\
&\leq c_{k,a}\ c\ \sup|\varphi^{(k)}| \\
&\leq C_{k,a} \sum_{j=0}^{k} \sup|\varphi^{(j)}|,
\end{aligned}$$

onde

$$k = ord(x_+^a) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ \text{Re}(a) > -1 \\ -[\text{Re}(a)], & \text{se } \ Re(a) \leq -1. \end{cases}$$

Proposição 1.2.1 $< x_+^a, \varphi >$ *se estende por continuação analítica com respeito à a para* $a \in \mathbb{C}\backslash \mathbb{Z}_-$.

Demonstração: Temos por (1.1.4) que além de analíticas para $Re(a) > -1$, são iguais. Mas o lado direito é analítico para $Re(a) > -1-k$ exceto para os pólos simples $-1,-2,\ldots,-k$, logo, pelo Princípio da Extensão Analítica segue que $< x_+^a, \varphi >= (-1)^k \dfrac{< x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >}{(a+1)\ldots(a+k)}$ em $\mathbb{C}\backslash \mathbb{Z}_-$. ∎

Pela Proposição 1.2.1 definiremos x_+^a por continuação analítica com respeito a a.

Usando (1.1.4) mostra-se que x_+^a com $a \notin \mathbb{Z}_-$, satisfaz (1.1.2) e (1.1.3) e são distribuições homogêneas de grau a.

Todos os resultados sobre x_+^a, com $a \in \mathbb{C}\backslash \mathbb{Z}_-$, são análogos para x_-^a.

1.3 Distribuições com $a \in \mathbb{Z}_-$

Estendemos a aplicação $a \mapsto x_+^a$ para $a \in \mathbb{Z}_-$, no entanto, ela não é homogênea.

A motivação para definirmos x_+^a quando $a \in \mathbb{Z}_-$ é o seguinte. Primeiramente observe que para $a = -k$ o resíduo da função $a \mapsto < x_+^a, \varphi >$ é

$$\lim_{a \to -k} (a+k) < x_+^a, \varphi > = \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!},$$

pois,

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to -k} (a+k) < x_+^a, \varphi > &= \lim_{a \to -k} (a+k)(-1)^k \frac{< x_+^{a+k}, \varphi^{(k)} >}{(a+1)\dots(a+k)} \\
&= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi^{(k)}(x)\, dx}{(k-1)!} \\
&= \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(a+k)x_+^a \to (-1)^{k-1} \frac{\delta_0^{(k-1)}}{(k-1)!}, \quad \text{quando} \quad a \to -k. \tag{1.3.1}$$

Subtraindo a parte singular, obtemos, quando $a + k = \varepsilon \to 0$, que

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \to -k} \left\{ < x_+^a, \varphi > - \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(a+k)} \right\} \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ (-1)^k \frac{< x_+^{\varepsilon}, \varphi^{(k)} >}{(\varepsilon+1-k)\dots(\varepsilon-1)\varepsilon} - \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\varepsilon} \right\} \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ (-1)^k \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\varepsilon} \varphi^{(k)}(x)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\dots(\varepsilon-1)\varepsilon} - \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\varepsilon} \right\} \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ (-1)^k \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^{\varepsilon}-1) \varphi^{(k)}(x)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\dots(\varepsilon-1)\varepsilon} + \frac{(-1)^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi^{(k)}(x)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\dots(\varepsilon-1)\varepsilon} \right. \\
- & \left. \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\varepsilon} \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{(-1)^k}{(\varepsilon + 1 - k) \ldots (\varepsilon - 1)} \int_0^{+\infty} \frac{(x^\varepsilon - 1)\varphi^{(k)}(x)\, dx}{\varepsilon} + \frac{(-1)^{k+1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(\varepsilon + 1 - k) \ldots (\varepsilon - 1)\varepsilon} \right. \\
&- \left. \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\varepsilon} \right\} \\
&= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k)}(x)\, dx}{(k-1)!} \\
&+ \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{\varepsilon} \left[\frac{(k-1)! - (k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)}{(k-1)!(k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)} \right] \right\} \\
&= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k)}(x)\, dx}{(k-1)!} \\
&+ \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\varphi^{k-1}(0)}{(k-1)!} \left[\frac{(k-1)(k-2-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon) + \ldots + (k-1-\varepsilon)\ldots(2-\varepsilon)}{\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon}[(k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)] + (k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)} \right] \right\} \\
&= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k)}(x)\, dx}{(k-1)!} + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{(k-1)!}{(k-1)} + \ldots + \frac{(k-1)!}{1} \right] \\
&= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k)}(x)\, dx}{(k-1)!} + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}.
\end{aligned}
$$

Deste modo definimos

$$
< x_+^{-k}, \varphi >= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k)}(x)\, dx}{(k-1)!} + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}. \qquad (1.3.2)
$$

Note que a homogeneidade é perdida quando $a = -k$. Desta forma, obtemos de (1.3.2) que:

$$
< x_+^{-k}, \varphi >= t^{-k} < x_+^{-k}, \varphi_t > + \ln(t) \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}. \qquad (1.3.3)
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
t^{-k} < x_+^{-k}, \varphi_t > &= t^{-k} \left[\frac{-1}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} \ln(x) \left(t\varphi(tx)\right)^{(k)}\, dx \right. \\
&+ \left. t^k \varphi^{(k-1)}(0) \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right] \\
&= t^{-k} \left[\frac{-1}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} \ln(x) t^k \varphi^{(k)}(tx)\, d(tx) \right. \\
&+ \left. t^k \varphi^{(k-1)}(0) \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} \ln(\frac{y}{t})\varphi^{(k)}(y)\,dy + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\\
&= -\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} \ln(y)\varphi^{(k)}(y)\,dy + \frac{1}{(k-1)!}\ln(t)\varphi^{(k-1)}(0)\\
&+ \varphi^{(k-1)}(0)\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\\
&= < x_+^{-k},\varphi > + \ln(t)\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.
\end{aligned}
$$

Se $a \in \mathbb{Z}_-$, afirmamos que vale a propriedade (1.1.2).

De fato,

$$
< x_+^{-k}, x\varphi >= -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\,dx}{(k-2)!} + \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j}. \qquad (1.3.4)
$$

pois,

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to -k}(a+k) < x_+^a, x\varphi > &= \lim_{a\to -k}(a+k)(-1)^k\frac{< x_+^{a+k}, (x\varphi)^{(k)} >}{(a+1)\ldots(a+k)}\\
&= \frac{(-1)\displaystyle\int_0^{+\infty}(x\varphi(x))^{(k)}\,dx}{(k-1)!}\\
&= \frac{(-1)}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} k\varphi^{(k-1)}(x)\,dx\\
&+ \frac{(-1)}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} x\varphi^{(k)}(x)\,dx\\
&= \frac{k}{(k-1)!}\varphi^{(k-2)}(0) + \frac{(-1)}{(k-1)!}\varphi^{(k-2)}(0)\\
&= \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, calculamos o resíduo da função $a \mapsto x_+^{a+1}(\varphi)$, o qual é

$$
\lim_{a\to -k}(a+k) < x_+^{a+1}, \varphi >= \frac{1}{(k-2)!}\varphi^{(k-2)}(0).
$$

Desta forma, subtraíremos um termo $\dfrac{c}{(a+k)}$ que é o mesmo em ambos os lados. Daí,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{a\to -k}\left\{< x_+^a, x\varphi > - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!(a+k)}\right\} \\
= \; & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(-1)^k \frac{< x_+^\varepsilon, (x\varphi)^{(k)} >}{(\varepsilon+1-k)\ldots(\varepsilon-1)\varepsilon} - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!\varepsilon}\right\} \\
= \; & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(-1)^k \frac{\int_0^{+\infty} x^\varepsilon \left((x\varphi)^{(k)}(x)\right)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\ldots(\varepsilon-1)\varepsilon} - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!\varepsilon}\right\} \\
= \; & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(-1)^k \frac{(k-\varepsilon-1)\int_0^{+\infty} x^\varepsilon \varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\ldots(\varepsilon-1)\varepsilon} - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!\varepsilon}\right\} \\
= \; & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(-1)^k \frac{(k-\varepsilon-1)\int_0^{+\infty} (x^\varepsilon - 1)\varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\ldots(\varepsilon-1)\varepsilon}\right. \\
+ \; & \left.\frac{(-1)^k(k-\varepsilon-1)\int_0^{+\infty} \varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(\varepsilon+1-k)\ldots(\varepsilon-1)\varepsilon} - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!\varepsilon}\right\} \\
= \; & (-1)^k \frac{(k-1)\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(-1)^{k-1}(k-1)!} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{(-1)^k(k-\varepsilon-1)\varphi^{(k-2)}(0)}{(\varepsilon+1-k)\ldots(\varepsilon-1)\varepsilon}\right. \\
- \; & \left.\frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!\varepsilon}\right\} \\
= \; & -\frac{\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(k-2)!} \\
+ \; & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{\varepsilon}\left[\frac{-(k-\varepsilon-1)(k-2)! - (k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)}{(k-2)!(k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)}\right]\right\} \\
= \; & -\frac{\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(k-2)!} \\
+ \; & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varphi^{k-2}(0)}{(k-2)!}\left[\frac{(k-1)(k-2)! + (k-1)\ldots(1-\varepsilon) + \ldots + (k-1-\varepsilon)\ldots(2-\varepsilon)}{\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}[(k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)] + (k-1-\varepsilon)\ldots(1-\varepsilon)}\right]\right\} \\
= \; & -\frac{\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(k-2)!} + \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!}\frac{1}{(k-2)!}\left[\frac{(k-2)!}{(k-2)} + \ldots + \frac{(k-2)!}{1}\right] \\
= \; & -\frac{\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\, dx}{(k-2)!} + \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j}.
\end{aligned}
$$

De maneira similar segue que

$$\lim_{a\to -k}\left\{< x_+^{a+1},\varphi > -\frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!(a+k)}\right\} = -\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(x)\varphi^{(k-1)}(x)\,dx}{(k-2)!} + \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{j}.$$

■

Observação 1.3.1

Se $a=-k\in\mathbb{Z}_+$ *mostremos que* $\dfrac{d}{dx}x_+^{-k}=-kx_+^{-k-1}+(-1)^k\dfrac{\delta_0^{(k)}}{k!}$. *Uma vez que de* (1.3.1) *temos:*

$$\begin{aligned}\lim_{a\to -k}\left\{\frac{d}{dx}x_+^a\ +kx_+^{a-1}\right\} &= \lim_{a\to -k}\left\{ax_+^{a-1}+kx_+^{a-1}\right\}\\ &= \lim_{a\to -k}(a+k)x_+^{a-1}\\ &= \lim_{a\to -k-1}(a+k+1)x_+^{a}\\ &= (-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{k!},\end{aligned}$$

e assim eliminando termos da forma $\dfrac{c\delta_0^{(k)}}{a+k}$, os quais devem cancelar-se, obtemos

$$\frac{d}{dx}x_+^{-k}=-kx_+^{-k-1}+(-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{k!}\ \ em\ \ \mathcal{D}'. \tag{1.3.5}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\frac{d}{dx}x_+^{-k}+kx_+^{-k-1}\right),\varphi\right\rangle &= -< x_+^{-k},\varphi' > +k < x_+^{-k-1},\varphi >\\ &= -\lim_{a\to -k}\left\{< x_+^{a},\varphi' > -\frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!(a+k)}\right\}\\ &+ k\lim_{a\to -k-1}\left\{< x_+^{a},\varphi > -\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(a+k+1)}\right\}\\ &= \lim_{a\to -k}\left\{-< x_+^{a},\varphi' > +\frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!(a+k)}\right\}\\ &+ k\lim_{a\to -k-1}\left\{\frac{(-1)}{(a+1)}< x_+^{a+1},\varphi' > -\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(a+k+1)}\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to -k}\left\{ - < x_+^a, \varphi' > + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!(a+k)} \right.\\
&+ \left. \frac{(-1)}{a} k < x_+^a, \varphi' > - \frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!(a+k)} \right\}\\
&= \lim_{a\to -k}\left\{ - < x_+^a, \varphi' > - \frac{k}{a} < x_+^a, \varphi' > \right\}\\
&= \lim_{a\to -k} - \frac{(a+k)}{a} < x_+^a, \varphi' >\\
&= \frac{(-1)^k}{k!}\delta_0^k(\varphi),
\end{aligned}
$$

a última igualdade segue de (1.3.1).

Outra maneira de obter esse resultado é usar diretamente (1.3.2). Com efeito;

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dx} x_+^{-k}, \varphi \right\rangle &= -\langle x_+^{-k}, \varphi' \rangle\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left[\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k+1)}(x)dx - \varphi^{(k)}(0)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} \right]\\
&= \frac{k}{k!}\left[\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi^{(k+1)}(x)dx - \varphi^{(k)}(0)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \frac{1}{k}\varphi^{(k)}(0) \right]\\
&= \left\langle -kx_+^{k-1} + (-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{k!}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}
$$

■

Todos os resultados sobre x_+^a, com $a \in \mathbb{Z}_-$, são análogos para x_-^a.

Capítulo 2

Distribuições Homogêneas de $\mathbb{R}^n$

Nosso objetivo neste capítulo é definir distribuições homogêneas de $\mathbb{R}^n$ e apresentarmos alguns resultados básicos que serão usados na extensão de distribuições homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ para $\mathbb{R}^n$.

2.1 Caracterização de Distribuições Homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

Definição 2.1.1 *Diz-se que* Γ *é um cone aberto em* $\mathbb{R}^n$ *se:* Γ *for um conjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$ *e* $tx \in \Gamma$ $\forall t > 0$, $\forall x \in \Gamma$.

Tal como em $\mathbb{R}$ definiremos:

Definição 2.1.2 *Dado* $a \in \mathbb{C}$ *e* Γ *um cone aberto diz-se que* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *é homogênea de grau a se,*

$$< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_t >, \ \forall \ \varphi \in C_c^\infty(\Gamma) \ \ com \ \ \varphi_t(x) = t^n \varphi(tx), \ t > 0.$$

Agora expressaremos a noção de homogeneidade de duas maneiras equivalentes. Antes de fazê-lo, recordaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 *Sejam Ω e Y subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, $\varphi \in C^\infty(\Omega \times Y)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $\varphi(x,y) = 0$ quando $x \notin K$, então a aplicação $y \mapsto < u, \varphi(\cdot, y) >$ pertence a $C^\infty(Y)$ e*

$$\partial_y^\alpha < u, \varphi(\cdot, y) > = < u, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) >,$$

para todo multi-índice α.

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [Hö], pg 34.
Considere $e = (1, \ldots, 1)$ assim temos que $L_{e,0} = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i}$.

Lema 2.1.1 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, então as seguintes afirmações são equivalentes :*

(a) $< u, \varphi > = t^a < u, \varphi_t >, \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}), t > 0.$

$$\tag{2.1.1}$$

(b) $(a+n) < u, \varphi > + < u, L_{e,0}\varphi > = 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$

$$\tag{2.1.2}$$

(c) $< u, \psi > = 0,$ *se* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *e* $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+n-1} \psi(rw)\, dr = 0, \ \forall\, w \in S^{n-1}$

$$\tag{2.1.3}$$

Demonstração: Mostremos que $(a) \Rightarrow (b)$. Diferenciando a igualdade em (a) em relação à t e usando o Teorema 2.1.1, seguirá que $(a+n) < u, \varphi > + < u, L_{e,0}\varphi > = 0$, onde $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.
De fato,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}(< u, \varphi >) &= \frac{d}{dt}(t^a < u(\cdot), t^n \varphi(tx) >) \\ &= \left\langle u(\cdot), \frac{d}{dt}(t^{a+n}\varphi(tx)) \right\rangle \\ &= \left\langle u, (a+n)t^{a+n-1}\varphi(tx) + t^{a+n}\frac{d}{dt}(\varphi(tx)) \right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a+n)t^{a-1} < u, t^n\varphi(tx) > +t^{a-1}\left\langle u, t^n\sum_{j=1}^{n} tx_j(\partial_{x_j}\varphi)(tx)\right\rangle \\
&= (a+n)t^{a-1} < u, \varphi_t(x) > +t^{a-1}\left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{n} x_j(\partial_{x_j}\varphi)\right)_t (x)\right\rangle \\
&= (a+n)t^{-1} < u, \varphi > +t^{-1}\left\langle u, \sum_{j=1}^{n} x_j(\partial_{x_j}\varphi)\right\rangle \forall\ t
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
0 &= (a+n) < u, \varphi > + < u, \sum_{j=1}^{n} x_j(\partial_{x_j}\varphi) > \\
&= (a+n) < u, \varphi > + < u, L_{e,0}\varphi >
\end{aligned}
$$

aqui a segunda igualdade segue do Teorema 2.1.1 e a sexta igualdade segue da homogeneidade de u.

Para demonstrarmos que $(b) \Rightarrow (c)$, primeiro observamos que a integral $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi(rx)\, dr$ é uma função homogênea de grau $-n-a$, pois

$$
\begin{aligned}
f(tx) &= \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi(rtx)\, dr \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^{a+n-1} \psi(sx)\frac{ds}{t} \\
&= t^{-a-n}\int_0^{+\infty} s^{a+n-1}\psi(sx)\, ds \\
&= t^{-a-n} f(x).
\end{aligned}
$$

Deste modo, basta verificar que a equação $(a+n)\varphi + L_{e,0}\varphi = \psi$, tem solução $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. Entretanto, em coordenadas polares tal equação diferencial pode ser escrita como:

$$
\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n}\varphi(rw)) = r^{a+n-1}\psi(rw), \quad \text{com } \ ||w|| = 1. \tag{2.1.4}
$$

Com efeito,

$$
\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n}\varphi(rw)) = (a+n)r^{a+n-1}\varphi(rw) + r^{a+n}\frac{\partial}{\partial r}(\varphi(rw))
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a+n)r^{a+n-1}\varphi(rw) + r^{a+n-1}\sum_{j=1}^{n} rw_j(\partial_j\varphi)(rw)\\
&= r^{a+n-1}[(a+n)\varphi(rw) + (L_{e,0}\varphi)(rw)]\\
&= r^{a+n-1}\psi(rw).
\end{aligned}
$$

Mostremos que dado $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ satisfazendo $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi(rw)dr = 0$, então existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, tal que $\partial_r(r^{a+n}\varphi(rw)) = r^{a+n-1}\psi(rw)$. Consideremos $g : (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $g(r,w) = \displaystyle\int_0^r s^{a+n-1}\psi(sw)\, ds$. Temos que $g \in C^\infty\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right)$. Tomemos $\varphi : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(x) = g(||x||, \frac{x}{||x||}) = ||x||^{-a-n}\displaystyle\int_0^{||x||} s^{a+n-1}\psi\left(s\frac{x}{||x||}\right)\, ds$. Assim vemos que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, pois é composta de funções de classe C^∞.

Agora mostremos que $S(\varphi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Como $S(\psi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, isto é, existe $R > 1$ tal que $S(\psi) \subset \mathcal{A}\left(0,\frac{1}{R},R\right)$, onde estamos considerando $\mathcal{A}\left(0,\frac{1}{R},R\right) = \{x;\ \frac{1}{R} \leq ||x|| \leq R\}$.

Se $||x|| \leq \frac{1}{R}$, então $\varphi(x) = ||x||^{-a-n}\displaystyle\int_0^{||x||} s^{a+n-1}\underbrace{\psi\left(s\frac{x}{||x||}\right)}_{=0}\, ds = 0.$

Quando $||x|| \geq R$, então

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= ||x||^{-a-n}\int_0^{||x||} s^{a+n-1}\psi\left(s\frac{x}{||x||}\right)\, ds\\
&= 0,\ \text{por hipótese}\ .
\end{aligned}
$$

Portanto $S(\varphi) \subset \mathcal{A}\left(0,\frac{1}{R},R\right)$, isto é, $S(\varphi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Vamos verificar que φ é solução da equação diferencial (2.1.4). Observemos que

$$
\begin{aligned}
r^{a+n}\varphi(rw) &= ||rw||^{-a-n}r^{a+n}\int_0^{||rw||} s^{a+n-1}\psi\left(s\frac{rw}{||rw||}\right)\, ds\\
&= r^{-a-n}r^{a+n}\int_0^r s^{a+n-1}\psi(sw)\, ds\\
&= \int_0^r s^{a+n-1}\psi(sw)\, ds.
\end{aligned}
$$

Assim $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{a+n}\varphi(rw)\right) = r^{a+n-1}\psi(rw)$.

Logo,

$$\begin{aligned} < u, \psi > &= < u, (a+n)\varphi + L_{e,0}\varphi > \\ &= (a+n) < u, \varphi > + < u, L_{e,0}\varphi > \\ &= 0, \end{aligned}$$

aqui a última igualdade segue da hipótese.

Mostremos agora que $(c) \Rightarrow (a)$. Dado $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e fixado $t > 0$, tome $\psi^t(y) = \varphi(y) - t^{a+n}\varphi(ty)$, logo $\psi^t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. Veremos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi^t(rx)dr = 0$ para $x \neq 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi^t(rx)\, dr &= \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\left[\varphi(rx) - t^{a+n}\varphi(rtx)\right] dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\varphi(rx)\, dr - \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}t^{a+n}\varphi(trx)\, dr \\ &= < r_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) > - t^{a+n-1}\int_0^{+\infty} r^{a+n-1} t\varphi(t\cdot x)\, dr \\ &= < r_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) > - t^{a+n-1} < r_+^{a+n-1}, (\varphi_0)_t(\cdot x) > \\ &= < r_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) > - < r_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) > \\ &= 0, \end{aligned}$$

aqui a quinta igualdade segue da definição da homogeneidade de r_+^{a+n-1} em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e na quarta estamos considerando $\varphi_0(s) = \varphi(srt)$.

Logo, $< u, \psi^t >= 0$, ou seja, vale (a). ■

Observação 2.1.1

(i) *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e homogênea de grau a. Então*

$$L_{e,0}u = au, \quad em \;\; \mathcal{D}'. \tag{2.1.5}$$

Tal igualdade é conhecida como Identidade de Euler.

Primeiramente observemos que

$$< u, L_{e,0}\varphi >= - < L_{e,0}u, \varphi > -n < u, \varphi >, \;\; \forall \;\; \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}).$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
< u, L_{e,0}\varphi > &= < u, \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_j \varphi > \\
&= -\sum_{j=1}^{n} < \partial_j(x_j u), \varphi > \\
&= -\sum_{j=1}^{n} < u\partial_j x_j, \varphi > - \sum_{j=1}^{n} < x_j \partial_j u, \varphi > \\
&= -n < u, \varphi > - < L_{e,0}u, \varphi > .
\end{aligned}
$$

Logo, pelo item (b) do Lema 2.1.1 *temos que* $L_{e,0}u = au$.

(ii) *Se* ψ *for uma função* $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *homogênea de grau* b*, isto é,* $\psi(tx) = t^b \psi(x)$ *e* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *homogênea de grau* a*, então* ψu *é homogênea de grau* $a + b$ *em* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$*. De fato:*

$$
\begin{aligned}
< \psi u, \varphi > &= < u, \ \psi\varphi > \\
&= t^a < u, (\psi\varphi)_t > \\
&= t^{a+n} < u, t^b \psi(x)\varphi(tx) > \\
&= t^{a+b} < \psi u, \varphi_t > .
\end{aligned}
$$

(iii) *Notemos que* $L_{e,0}\partial_j u = \partial_j(L_{e,0}u) - \partial_j u = (a-1)\partial_j u$*, onde a última igualdade segue de* (2.1.5)*. Concluímos então que a diferenciação diminui uma unidade o grau de homogeneidade.*

(iv) *Usando* (2.1.5) *e o Corolário* 3.1.5 *de [Hö], mostra-se que quando* $n = 1$ *as distribuições homogêneas são multiplos de* $|x|^a$ *em cada semi-eixo.*

2.2 Alguns Lemas Úteis

Os próximos três lemas serão usados no próximo capítulo.

Seja u uma função $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ homogênea de grau a e $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Então, em coordenadas esféricas, podemos escrever

$$\begin{aligned} < u, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} u(x)\varphi(x)\, dx \\ &= \int_{|w|=1} \int_0^{\infty} u(w) r^{a+n-1} \varphi(rw)\, dr dw \\ &= \int_{|w|=1} u(w) \left\langle r_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot w) \right\rangle\, dw. \end{aligned}$$

Desta forma, para $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária e $x \neq 0$, é natural considerarmos o operador $R_a : C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definido por $(R_a\varphi)(x) =< t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) >$. Primeiramente mostremos o

Lema 2.2.1 *O operador $R_a : C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definido por*

$$(R_a\varphi)(x) =< t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) >, \tag{2.2.1}$$

é contínuo.

Demonstração: Inicialmente provaremos que R_a está bem definido, ou seja, para $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ temos que $R_a\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Como o conceito de diferenciabilidade é local, basta mostrarmos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe uma vizinhança V_x, de x, tal que $R_a\varphi \in C^{\infty}(V_x)$. Seja $R > 0$ tal que $S(\varphi) \subset B_R(0)$. Seja $x_0 \neq 0$ e tomaremos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|t_0| > \frac{R}{||x_0||}$. Definiremos $m_{t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $m_{t_0}(x) = t_0 x$. Pela linearidade de m_{t_0}, temos que $m_{t_0} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Assim podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $||t_0 x|| > R$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$. Desta forma, basta tomar $0 < \delta < ||x_0|| - \frac{R}{|t_0|}$ assim, para $x \in B_\delta(x_0)$ e $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| > |t_0|$, temos que $\varphi(tx) = 0$, pois $||tx|| > R$. Tomando $u = t_+^{a+n-1} \in \mathcal{D}'(X)$, $X = \mathbb{R}$, $\psi(t, x) = \varphi(tx) \in C^{\infty}(X \times Y)$, $Y = B_\delta(x_0)$ e $K \subset (-\infty, -|t_0|) \cup (|t_0|, \infty)$, pelo Teorema 2.1.1 temos que a função é de classe $C^{\infty}(B_\delta(x_0))$.

Para mostrarmos que R_a é um operador contínuo, tendo em vista o Lema 3 de [F] (pg 125), é suficiente demonstrar que $R_a : C_c^{\infty}(K) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ é contínuo. Desta forma consideremos a família de seminormas $q_{j'}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq j'} \| \partial^{\alpha}\varphi \|_{\infty, K_{j'}}$ em $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ com

$K_{j'} = \{x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{j'} \leq \|x\| \leq j'\}$ e seja $p_j(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$ uma família de normas em $C_c^\infty(K)$. Assim basta verificarmos que dado $j' \in Z_+$ existem $C > 0$ e $j \in Z_+$ tal que $q_{j'}(R_a\varphi) \leq C p_j(\varphi)$. Tomemos

$$\begin{aligned} q_{j'}(R_a\varphi) &= q_{j'}(\langle t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x)\rangle) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq j'} \|\partial^\alpha(\langle t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x)\rangle)\|_{\infty,K_{j'}} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq j'} \| \langle t_+^{a+n-1}, \partial^\alpha(\varphi(\cdot x))\rangle \|_{\infty,K_{j'}}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Para cada α fixo, temos:

$$\begin{aligned} \| \langle t_+^{a+n-1}, \partial^\alpha(\varphi(\cdot x))\rangle \|_{\infty,K_{j'}} &= \sup_{K_{j'}} | \langle t_+^{a+n-1}, \partial^\alpha(\varphi(\cdot x))\rangle | \\ &= \sup_{K_{j'}} | \langle t_+^{a+n-1}, t^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(\cdot x)\rangle | \\ &\leq \sup_{K_{j'}} C_{k,j'j_0} \sum_{l=0}^{k} \sup_{|t|\leq j'j_0} \left| \frac{d^l}{dt^l}(\partial^\alpha\varphi(\cdot x)) \right| \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

com $k = ord(t_+^{a+n-1+|\alpha|})$ e $K \subset \overline{B_{j_0}(0)}$. Observemos que $S(\varphi(\cdot x)) \subset \{t; |t| \leq j_0 j'\}$ se $\frac{1}{j'} \leq ||x|| \leq j'$. De (2.2.3) temos que:

$$\sup_{K_{j'}} C_{k,j'j_0} \sum_{l=0}^{k} \sup_{|t|\leq j'j_0} \left| \frac{d^l}{dt^l}(\partial^\alpha\varphi(\cdot x)) \right| = \sup_{K_{j'}} \sum_{l=0}^{k} C_{k,j'j_0} \sup_{|t|\leq j'j_0} \left| \sum_{|\beta|=l} x^\beta \partial^{\alpha+\beta}\varphi(\cdot x) \right|$$

Tomando $tx = y$ e do fato que $|x^\beta| \leq ||x||^{|\beta|} \leq j'^{|\beta|}$, temos:

$$\begin{aligned} q_{j'}(R_a\varphi) &\leq \sum_{|\alpha|\leq j'} \sup_{K_{j'}} \sum_{l=0}^{k} C_{k,j'j_0} \sup_{|t|\leq j'j_0} \sum_{|\beta|=l} j'^{|\beta|} \left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(\cdot x)\right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq j'} C_{k,j'j_0} \sum_{l=0}^{k} \sup_{\overline{B_{j_0 j^2}(0)}} \sum_{|\beta|=l} j'^{|\beta|} \left|(\partial^{\alpha+\beta}\varphi)(y)\right| \\ &\leq C_{k,j'j_0}(k+1) \sum_{|\alpha|\leq j'} \sum_{|\beta|\leq k} j'^{|\beta|} \| (\partial^{\alpha+\beta}\varphi)(y) \|_{\infty,K} \\ &\leq C_{k,j'j_0}(k+1) j'^k \sum_{|\gamma|\leq j'+k} ||\partial^\gamma\varphi| |_{\infty,K} \\ &= C_{k,j'j_0}(k+1) j'^k p_j(\varphi) \end{aligned}$$

sendo $j = j' + k$. ■

Lema 2.2.2 *Existe uma função* $\psi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *tal que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_1(tx)}{t}\, dt = 1, \ se\ x \neq 0 \tag{2.2.4}$$

Demonstração: Provemos inicialmente para o caso $n = 1$. Seja $\psi_0 \in C_c^\infty(0, +\infty)$ tal que $\int_0^{+\infty} \psi_0(x)\, dx > 0$. Assim, temos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_0(tx)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\psi_0(s)}{s} ds = \lambda$$

Tomemos $\psi_1(x) = \dfrac{1}{\lambda}\psi_0(|x|)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\psi_1(tx)}{t}\, dt &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \frac{\psi_0(|tx|)}{t}\, dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \frac{\psi_0(t|x|)}{t}\, dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Provemos agora o caso geral ($n > 1$). Seja $\psi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ definida por $\psi_1(x) = \frac{1}{\lambda}\psi_0(||x||)$. Portanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_1(tx)}{t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \frac{\psi_0(||tx||)}{t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \frac{\psi_0(t||x||)}{t}\, dt = 1.$$

■

Sejam $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e $K = S(\psi)$, daí segue:

Lema 2.2.3 *O operador* $M_\psi : C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \to C_c^\infty(K)$, *definido por*

$$M_\psi(\varphi) = \psi\varphi,$$

é contínuo.

Demonstração: Para mostrarmos que M_ψ é um operador contínuo, consideremos a família de seminormas $q_{j'}(\varphi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq j'} \parallel \partial^\alpha\varphi \parallel_{\infty, K_{j'}}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ com $K_{j'} = \{x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{j'} \leq \|x\| \leq j'\}$ e $p_j(\varphi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty$ uma família de normas em $C_c^\infty(K)$. Assim basta verificarmos que dado $j \in Z_+$, existem $C > 0$ e $j' \in Z_+$ tal que $p_j(M_\psi(\varphi)) \leq C q_{j'}(\varphi)$ em $C_c^\infty(K)$. Tomemos,

$$\begin{aligned}
p_j\left(M_\psi(\varphi)\right) &= p_j\left(\psi\varphi\right) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq j} ||\partial^\alpha\left(\psi\varphi\right)||_{\infty,K} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq j}\sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} ||\partial^{\alpha-\beta}\psi||_{\infty,K}||\partial^\alpha\varphi||_{\infty,K} \\
&\leq C\sum_{|\alpha|\leq j} ||\partial^\alpha\varphi||_{\infty,K} \\
&\leq Cq_{j'}(\varphi),
\end{aligned}$$

com $K_{j'} \supset K$. ■

Observação 2.2.1

(i) *Temos que* $\sum_{|\alpha|=j} b_\alpha\partial^\alpha\delta_0 = 0$, *com* $b_\alpha \in \mathbb{C}$ *se, e somente se,* $b_\alpha = 0$, $\forall\alpha$.

De fato, fixado α_0 *com* $|\alpha_0| = j$, *consideremos* $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com* $\varphi_0 \equiv 1$ *numa vizinhança de zero. Daí, tomemos* $\varphi(x) = x^{\alpha_0}\varphi_0(x)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha\partial^\alpha\delta_0, \varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \partial^\alpha\delta_0, \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha\varphi\right\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(x)\Big|_{x=0} \\
&= \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\left(x^{\alpha_0}\varphi_0(x)\right)\Big|_{x=0} \\
&= \sum_{|\alpha|=j}\sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} b_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha-\beta}(x^{\alpha_0})\Big|_{x=0}\partial^\beta\varphi_0(x)\Big|_{x=0} \\
&= (-1)^{|\alpha_0|}b_{\alpha_0}\alpha_0!\varphi_0(0) \\
&= (-1)^{|\alpha_0|}b_{\alpha_0}\alpha_0!
\end{aligned}$$

o que implica $b_{\alpha_0} = 0$.

Portanto, $b_\alpha = 0$, $\forall \alpha$.

(ii) *Temos que* $\partial^\alpha \delta_0$ *é homogênea de grau* $-n - |\alpha|$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi_t \rangle &= t^n \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi(tx) \rangle \\
&= t^n (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha (\varphi(tx)) \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} t^{n+|\alpha|} \langle \delta_0, (\partial^\alpha \varphi)(tx) \rangle \\
&= t^{n+|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= t^{n+|\alpha|} \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Extensões de Distribuições Homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

Nosso objetivo neste capítulo é estender para $\mathbb{R}^n$ os resultados obtidos no Capítulo 1. Na primeira seção mostraremos que no caso em que $a \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$ as distribuições homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de grau a podem ser estendidas para $\mathbb{R}^n$. Na segunda seção consideremos o caso em que $a \in \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$.

3.1 Extensões de Distribuições Homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte I

Por extensão entendemos:

Definição 3.1.1 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $X \subset Y$. Dizemos que $v \in \mathcal{D}'(Y)$é uma extensão de u se $< v, \varphi >=< u, \varphi >$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(X)$.*

Nesta discussão o próximo exemplo se impõe:

Exemplo 3.1.1 $u = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ *se* $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$, *porém se os* $a_n' s$ *forem escolhidos suficientemente grandes então* u *não admite extensão em* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Construiremos este exemplo em 4 etapas.*

(1) Tome $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ *com* $\varphi_0 \geq 0$ *tal que* $S(\varphi_0) \subset [1,3]$ *e* $\varphi_0(2) = 1$

(2) Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. *Consideremos o difeomorfismo* $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\psi_n(\frac{1}{n+1}) = 1$, $\psi_n(\frac{1}{n}) = 2$ *e* $\psi_n(s) = s$ *se* $s \geq 3$.

(3) Defina $\varphi_n = \varphi_0 \circ \psi_n$. *Afirmamos que* $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$*, pois é composta de funções de classe* C^∞ *e temos que* $S(\varphi_n) \subset (0,3]$ *e ainda* $\varphi_n \geq 0$. *Tome* $p_{n,K}(\varphi) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} ||\varphi^{(j)}||_{\infty,K}$ *e defina* $a_n > np_n(\varphi_n)$.

(4) Afirmamos agora que u não admite extensão para $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *De fato, suponhamos que u admita extensão para* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *e seja* $K = [0,3]$. *Logo, existe* $C > 0$ *e* $j_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $| < u, \varphi_n > | \leq Cp_{j_0}(\varphi_n)$. *Porém, como* $\varphi_n \geq 0$*, temos que* $| < u, \varphi_n > | \geq a_n$*, o que implica que* $a_n \leq Cp_{j_0}(\varphi_n)$. *Mas como* j_0 *é fixo, então para* $n \geq j_0$ *temos que* $a_n \leq Cp_n(\varphi_n) \Rightarrow C > n$*, para* $n >> 1$*, o que consiste numa contradição. Portanto nestas condições u não admite extensão.*

No que se segue usaremos:

Teorema 3.1.1 *Se u é uma distribuição de ordem k com suporte igual a* $\{y\}$*, então u tem a forma*

$$< u, \varphi >= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(y), \quad \varphi \in C^k.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [Hö], pg 46.

Consideremos agora $a \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$ e tomemos o seguinte conjunto $\mathcal{H}_a(\Gamma) = \{u \in \mathcal{D}'(\Gamma);\ \textit{homogenea de grau } a\}$.

Teorema 3.1.2 *Para toda* $u \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *existe uma única extensão* $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$. *Além disso, se P é uma função polinomial homogênea, então* $\mathcal{E}(Pu) = P\mathcal{E}(u)$. *Se* $a \neq 1 - n$*, então* $\mathcal{E}(\partial_j u) = \partial_j \mathcal{E}(u)$. *Além do mais, o operador definido por* $u \mapsto \mathcal{E}(u)$*, é contínuo na topologia das distribuições.*

Demonstração: **(Unicidade)** Sejam $U_1, U_2 \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$ extensões de $u \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Como $U_1|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} = u$ e $U_2|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} = u$, então temos que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ que:

$$< U_1 - U_2, \varphi >=< U_1, \varphi > - < U_2, \varphi >=< u, \varphi > - < u, \varphi >= 0.$$

Suponhamos que $S\,(U_1 - U_2) \subset \{0\}$. Logo, pelo Teorema 3.1.1, $U_1 - U_2$ é uma combinação linear de derivadas de δ_0, ou seja, existem $c_\alpha \in \mathbb{C}$ e $k > 0$ tais que $U_1 = U_2 + \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.

Notemos que

$$v = U_1 - U_2 = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right).$$

Como v é homogênea de grau a, temos:

$$t^a < v, \varphi_t >= \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) \right) t^{a+n+j},$$

pela Observação 2.2.1-(ii).

Por outro lado,

$$< v, \varphi >= \left\langle \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right), \varphi \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) \right).$$

Daí, segue que:

$$\sum_{j=0}^{k} \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) \right)}_{b_j} t^{a+n+j} = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) \right)}_{b_j}.(*)$$

Mostremos que os $b_j = 0$, $\forall j$. Seja, por absurdo, j_1 o menor elemento de $\mathbb{N} \cap [0, k]$ tal que $b_{j_1} \neq 0$. Sabemos que $a + n + j_1 \neq 0$, pois caso contrário teríamos $a = -n - j_1$, contradizendo a hipótese sobre a. Assim temos que $Re(a+n+j_1) \neq 0$ ou $Im(a+n+j_1) \neq 0$. Suponhamos que $Re(a+n+j_1) \neq 0$. Desta forma, dividindo ambos os lados de $(*)$ por t^{a+n+j_1} temos:

$$\sum_{j=j_1}^{k} b_j t^{a+n+j} t^{-(a+n+j_1)} = \sum_{j=j_1}^{k} b_j t^{-(a+n+j_1)}.$$

Tomando-se o limite quando $t \to 0$ ou $t \to +\infty$ e considerando tanto Re$(a+n+j_1) > 0$ ou $Re(a+n+j_1) < 0$ temos que: $b_{j_1} = +\infty$ ou $b_{j_1} = 0$ se $\sum_{j=j_1}^{k} b_j \neq 0$ o que é um absurdo, agora se $\sum_{j=j_1}^{k} b_j = 0$ temos que $b_{j_1} = 0$ ou $b_{j_1} = \infty$ que também é um absurdo. Assim, se considerarmos $Im(a+n+j_1) \neq 0$ segue analogo ao argumento anterior.

Portanto, $b_j = 0$, $\forall j$.

Pela Observação 2.2.1 item (i) $\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0) = 0$, $\forall j = 0, 1, \ldots, k$.

Então $c_\alpha = 0$, $\forall \alpha$.

Portanto, $U_1 = U_2$.

(Existência) Uma extensão de u é obtida a partir das quatro etapas abaixo.

Etapa 1: Seja R_a do Lema 2.2.1. Mostremos que $R_a\varphi$ é uma função homogênea de grau $-n-a$ e $R_a(\psi R_a\varphi) = R_a\varphi$ com $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ satisfazendo a condição do Lema 2.2.2. De fato,

$$\begin{aligned}
(R_a\varphi)(lx) &= < t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot lx) > \\
&= l^{-1} < t_+^{a+n-1}, l\varphi(\cdot lx) > \\
&= l^{-1}l^{-a-n+1} < t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) > \\
&= l^{-a-n}(R_a\varphi)(x),
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da homogeneidade de t_+^{a+n-1}. Portanto, $R_a\varphi$ é homogênea de grau $-a-n$, isto é, $R_a\varphi(lx) = l^{-a-n}R_a\varphi(x)$.

Afirmação: $R_a(\psi R_a\varphi) = (R_a\varphi)$. De fato,

$$\begin{aligned}
R_a(\psi R_a\varphi)(x) &= < t_+^{a+n-1}, (\psi R_a\varphi)(\cdot x) > \\
&= \int_0^{+\infty} t^{a+n-1}\psi(tx)R_a\varphi(tx)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{a+n-1}\psi(tx)t^{-a-n}R_a\varphi(x)\, dt \\
&= (R_a\varphi)(x)\int_0^{+\infty} \frac{\psi(xt)}{t}\, dt \\
&= (R_a\varphi)(x),
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da hipótese de $R_a\varphi$ ser homogênea de grau $-a-n$.

Etapa 2: $< u, \psi R_a\varphi >$ independe da escolha de ψ com $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ satisfazendo a condição do Lema 2.2.2 e $u \in \mathcal{H}_a$.

De fato, sejam $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ satisfazendo a condição do Lema 2.2.2. Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{a+n-1}(\psi_1 - \psi_2)(rx)R_a\varphi(rx)\, dr &= \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi_1(rx)R_a\varphi(rx)\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi_2(rx)R_a\varphi(rx)\, dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi_1(rx)r^{-a-n}R_a\varphi(x)\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi_2(rx)r^{-a-n}R_a\varphi(x)\, dr \\
&= R_a\varphi(x)\int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_1(rx)\, dr \\
&- R_a\varphi(x)\int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_2)(rx)\, dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

aqui a segunda igualdade segue da homogeneidade de $R_a\varphi$.

Portanto, temos por (2.1.3) do Lema 2.1.1 que $\langle u, \psi_1 R_a\varphi - \psi_2 R_a\varphi\rangle = 0$ o que implica que $< u, \psi_1 R_a\varphi >=< u, \psi_2 R_a\varphi >$.

Etapa 3: $< u, \psi R_a\varphi >=< u, \varphi >$ se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{a+n-1}(\psi R_a\varphi - \varphi)(rx)\, dr &= \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\psi(rx)R_a\varphi(rx)\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{a+n-1}\varphi(rx)\, dr \\
&= R_a\varphi(x) - R_a\varphi(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo por (2.1.3) do Lema 2.1.1 temos $\langle u, \psi R_a\varphi - \varphi\rangle = 0$ o que implica que $< u, \psi R_a\varphi >=< u, \varphi >$.

Etapa 4: Definimos $\mathcal{E}(u)$ por:

$$< \mathcal{E}(u), \varphi >=< u, \psi R_a\varphi > \tag{3.1.1}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e é uma extensão de u homogênea de grau a. Para demonstrar isto consideremos os seguintes passos.

Passo 1: $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e é uma extensão de u.

De fato, claramente $\mathcal{E}(u)$ é um funcional linear.

Temos que $\mathcal{E}(u)$ é um funcional contínuo, pois é composto de funcionais contínuos, a saber $\mathcal{E}(u) = u \circ L_\psi \circ R_a$ onde temos que u é um funcional contínuo por hipótese, $L_\psi : C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é contínuo, pois $L_\psi = M_\psi \circ I$ onde inclusão $I : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é contínua e M_ψ é contínuo pelo Lema 2.2.3 e ainda $R_a : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é contínuo pelo Lema 2.2.1.

Notemos que $< \mathcal{E}(u), \varphi >=< u, \psi R_a \varphi >=< u, \varphi >$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, pela Etapa 3. Logo, $\mathcal{E}(u)$ é uma extensão de u.

Passo 2: $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea de grau $-a$. Para isso, observemos primeiramente que:

$$\begin{aligned}
(R_a \varphi_r)(x) &= r^n < t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot rx) > \\
&= r^n r^{-1} < t_+^{a+n-1}, r\varphi(\cdot rx) > \\
&= r^{n-1} r^{-a-n+1} < t_+^{a+n-1}, \varphi(\cdot x) > \\
&= r^{-a} R_a \varphi(x).
\end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$< \mathcal{E}(u), \varphi_t >=< u, \psi R_a \varphi_t >= t^{-a} < u, \psi R_a \varphi >= t^{-a} < \mathcal{E}(u), \varphi >$$

ou seja, $< \mathcal{E}(u), \varphi >= t^a < \mathcal{E}(u), \varphi_t >$. Logo $\mathcal{E}(u)$ é homogênea de grau a.

Demonstração de $(\mathcal{E}(\mathbf{Pu}) = \mathbf{P}\mathcal{E}(\mathbf{u}))$

Se P é uma função polinomial homogênea, então mostremos que $\mathcal{E}(Pu) = P\mathcal{E}(u)$.

Suponhamos que o grau de P seja m, observemos que Pu é homogênea de grau $a + m$. De fato,

$$\begin{aligned}
< Pu, \varphi > &= < u, P\varphi > \\
&= t^a < u, (P\varphi)_t > \\
&= t^{a+n} < u, P(tx)\varphi(tx) > \\
&= t^{a+m} < Pu, \varphi_t > .
\end{aligned}$$

Portanto, Pu é homogênea de grau $a+m$.

Notemos que $a+m \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$, pois se $a+m \in \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$, isto é, $a+m=k$ então $a=-m+k \leq k \leq -n$ contradizendo a hipótese sobre $a \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$. Assim, pelo Teorema 3.1.2 temos que $\mathcal{E}(Pu)$ é uma extensão de Pu e homogênea de grau $a+m$.

Observemos que $P\mathcal{E}(u)$ é uma outra extensão de Pu. De fato, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, temos que:

$$< P\mathcal{E}(u), \varphi > = < \mathcal{E}(u), P\varphi > = < u, P\varphi > = < Pu, \varphi > .$$

Como o grau de $\mathcal{E}(u)$ coincide com o grau de u, então segue que $P\mathcal{E}(u)$ é homogênea de grau $a+m$. Como o Teorema 3.1.2 garante a existência de uma única extensão, logo temos que $\mathcal{E}(Pu) = P\mathcal{E}(u)$.

Demonstração de $(\mathcal{E}(\partial_\mathbf{j}\mathbf{u}) = \partial_\mathbf{j}\mathcal{E}(\mathbf{u}))$

Primeiramente observemos que $\partial_j u$ é homogênea de grau $a-1$. De fato, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ temos que:

$$\begin{aligned}
< \partial_j u, \varphi > &= (-1) < u, \partial_j \varphi > \\
&= (-1) t^a < u, (\partial_j \varphi)_t > \\
&= (-1) t^{a+n} < u, (\partial_j \varphi)(tx) > \\
&= (-1) t^{a+n-1} < u, t(\partial_j \varphi)(tx) > \\
&= (-1) t^{a-1+n} < u, \partial_j(\varphi(tx)) > \\
&= (-1) t^{a-1} < u, \partial_j(\varphi_t) > \\
&= t^{a-1} < \partial_j u, \varphi_t > .
\end{aligned}$$

donde concluímos que o grau de $\partial_j u$ é $a-1$.

Notemos que $a-1 \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$, pois se $a-1=-n$ então $a=1-n$ contradizendo a hipótese. Desta forma, pelo Teorema 3.1.2 temos que $\mathcal{E}(\partial_j u)$ é uma extensão homogênea de grau $a-1$ de $(\partial_j u)$.

Observemos que $\partial_j \mathcal{E}(u)$ é uma outra extensão de $\partial_j u$. De fato, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ temos que:

$$\begin{aligned} < \partial_j \mathcal{E}(u), \varphi > &= (-1) < \mathcal{E}(u), \partial_j \varphi > \\ &= (-1) < u, \partial_j \varphi > \\ &= < \partial_j u, \varphi > . \end{aligned}$$

Como o grau $\mathcal{E}(u)$ coincide com o grau de u, segue que $\partial_j \mathcal{E}(u)$ é homogênea de grau $a-1$. Como o Teorema 3.1.2 garante a existência de uma única extensão, logo segue que $\mathcal{E}(\partial_j u) = \partial_j \mathcal{E}(u)$.

Demonstração de (O operador $\mathcal{H}_a \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínuo)

Mostremos que o operador

$$\mathcal{H}_a \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

definido por $u \mapsto \mathcal{E}(u)$ é contínuo. De fato, dado $u \in \mathcal{H}_a$ seja u_n uma seqüência em $\mathcal{H}_a$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{H}_a$. Mostremos que $\mathcal{E}(u_n) \to \mathcal{E}(u)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, isto é, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que $< \mathcal{E}(u_n), \varphi > \to < \mathcal{E}(u), \varphi >$.
De fato,

$$\lim_{n \to +\infty} < (\mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u)), \varphi > \; = \lim_{n \to +\infty} < (u_n - u), \psi R_a \varphi >= 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

o que prova a continuidade do operador acima. ■

Exemplo 3.1.2 *Seja* $f \in C^1(S^{n-1})$ *e* $a \in \mathbb{C}$ *definimos* $u_{a,f}(x) = ||x||^a f\left(\dfrac{x}{||x||}\right)$ *em* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Temos que* $u \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *é homogênea de grau* a. *Logo, pelo Teorema* 3.1.2 u *admite uma única extensão* $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *homogênea de grau* a, *se* $a \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$.

3.2 Extensões de Distribuições Homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte II

Nesta seção, estendemos para $\mathbb{R}^n$ o resultado obtido na seção 1.3 do Capítulo 1.

Aqui consideremos o caso $a = -n - k$ com $k \in \mathbb{N}$.

Definição 3.2.1 *Dado $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ tem paridade oposta a k se $< u, \varphi >= (-1)^{k+1} < u, \varphi(-\cdot) > \forall \varphi \in C_c^\infty(\Gamma)$.*

Teorema 3.2.1 *Se $u \in \mathcal{H}_{-n-k}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ com $k \in \mathbb{N}$, então:*

(1) u tem uma extensão $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$< \mathcal{E}(u), \varphi >= t^{-k-n} < \mathcal{E}(u), \varphi_t > + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} < u, x^\alpha \psi > \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}. \tag{3.2.1}$$

onde $t > 0$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ como no Lema 2.2.2.

(2) Se U é uma extensão de u então

$$\begin{aligned} \langle U, \varphi \rangle &= t^{-n-k} \langle U, \varphi_t \rangle + \left\langle \sum_{|\alpha| \leq l} (1 - t^{|\alpha|-k}) a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \varphi \right\rangle \\ &+ \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^\alpha \psi \rangle \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}. \end{aligned}$$

(3) Seja U uma extensão de u na forma do item (2). Ela é homogênea de grau a se, e somente se, $a_\alpha = 0$ para $|\alpha| \leq l$, $|\alpha| \neq k$ e

$$< u, x^\alpha \psi >= 0 \tag{3.2.2}$$

para $|\alpha| = k$. Além disso (3.2.2) independe da escolha de ψ.

(4) Uma escolha consistente de extensão pode ser feita de forma tal que $\mathcal{E}(Pu) = P\mathcal{E}(u)$ para toda função polinomial P homogênea.

(5) u tem paridade oposta a k se, e somente se,

$$< u, \varphi >= (\mathrm{sgn} t) t^a < u, \varphi_t >, \ t \neq 0 \tag{3.2.3}$$

com $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$*. Neste caso vale* (3.2.2).

(6) Suponha que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *satisfaz* (3.2.3) *então existe uma única extensão* $\mathcal{E}_1(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *com paridade oposta a k. Além disso ela é dada por*

$$\langle \mathcal{E}_1(u), \varphi \rangle = \mathcal{S}\left(\frac{< \underline{t}^{-k-1}, \varphi(t\cdot) >}{2} u \right), \tag{3.2.4}$$

sendo $\underline{t}^{-k} = \frac{(t+i0)^{-k} + (t-i0)^{-k}}{2} = t_+^{-k} + (-1)^k \ t_-^{-k}$ *e* $\mathcal{S}(v) =< v, \psi >$.

Demostração:

(1) Motivada pela relação (3.1.1) do Teorema 3.1.2 definimos uma extensão $\mathcal{E}(u)$ de u como sendo $< \mathcal{E}(u), \varphi >=< u, \psi R_a \varphi >$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Já mostramos que $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e é uma extensão de u na demonstração do Teorema 3.1.2.

Vejamos que,

$$R_{-n-k}\varphi(x) \ = \ t^{-n-k} R_{-n-k}\varphi_t(x) + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
R_{-n-k}\varphi_t(x) &= t^n < r_+^{-k-1}, \varphi(\cdot tx) > \\
&= t^{n-1} < r_+^{-k-1}, t\varphi(\cdot tx) > \\
&= t^{n-1} \left(t^{k+1} < r_+^{-k-1}, \varphi(\cdot x) > - t^{k+1} \ln(t) \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dr^k} (\varphi(rx)) \Big|_{r=0} \right) \\
&= t^{n+k} R_{-n-k}\varphi(x) - t^{n+k} \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!},
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue de (1.3.3).

Portanto, $R_{-n-k}\varphi(x) = t^{-n-k} R_{-n-k}\varphi_t(x) + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}$.

Daí, temos

$$
\begin{aligned}
< \mathcal{E}(u), \varphi > &= \left\langle u, \psi \left[t^{-n-k} R_{-n-k}\varphi_t + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} x^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!} \right] \right\rangle \\
&= t^{-k-n} < u, \psi R_{-n-k}\varphi_t > + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^{\alpha}\psi \rangle \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!} \\
&= t^{-k-n} < \mathcal{E}(u), \varphi_t > + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^{\alpha}\psi \rangle \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!}.
\end{aligned}
$$

(2) Seja $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $u \in \mathcal{H}_{-n-k}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Usando o Teorema 3.1.1, temos que $U - \mathcal{E}(u) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha} \partial^{\alpha}\delta_0$ onde $a_{\alpha} \in \mathbb{C}$ e $l \in \mathbb{N}$. Substituindo $\mathcal{E}(u)$ por $U - \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0$ em (3.2.1) o termo do logaritmo não muda, mas aparece um outro termo, a saber:

$$
\sum_{|\alpha| \leq l} (1 - t^{|\alpha|-k}) a_{\alpha} \partial^{\alpha}\delta_0. \tag{3.2.5}
$$

De fato, temos:

$$
\left\langle U - \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0, \varphi \right\rangle = t^{-k-n} \left\langle U - \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0, \varphi_t \right\rangle + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^{\alpha}\psi \rangle \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!}.
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
-\left\langle \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0, \varphi_t \right\rangle &= -\left\langle \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0, t^n\varphi(t\cdot) \right\rangle \\
&= -\sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha}(-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0, t^{n+|\alpha|}(\partial^{\alpha}\varphi)(t\cdot) \right\rangle \\
&= -\sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha} t^{n+|\alpha|} \left\langle \partial^{\alpha}\delta_0, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Daí:

$$
\langle U, \varphi \rangle = t^{-n-k} \langle U, \varphi_t \rangle + \left\langle \sum_{|\alpha| \leq l} (1 - t^{|\alpha|-k}) a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0, \varphi \right\rangle + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^{\alpha}\psi \rangle \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!}.
$$

(3) De (2), U é homogênea se, e somente se,

$$
\left\langle \sum_{|\alpha| \leq l} (1 - t^{|\alpha|-k}) a_{\alpha}\partial^{\alpha}\delta_0, \varphi \right\rangle + \ln(t) \sum_{|\alpha|=k} < u, x^{\alpha}\psi > \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!} = 0,
$$

$\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Como as funções $\left\{(1-t^{|\alpha|-k}), |\alpha| \leq l, |\alpha| \neq k\right\} \bigcup \{\ln(t)\}$ são linearmente independentes, basta verificarmos que $a_\alpha = 0$ para $|\alpha| \leq l$, $|\alpha| \neq k$ e que $< u, x^\alpha \psi >= 0$ para $|\alpha| = k$.

Para todo α com $|\alpha| = k$ temos que $(1-t^{|\alpha|-k}) = 0$, logo resta verificar que $< u, x^\alpha\psi >= 0$ $\forall\alpha$, $|\alpha| = k$ se $\displaystyle\sum_{|\alpha|=k} < u, x^\alpha\psi > \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} = 0$ $\forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Mas isto segue da Observação 2.2.1-(i).

Agora se $|\alpha| \leq l$ e $|\alpha| = j \neq k$, assim basta verificarmos que $\displaystyle\sum_{|\alpha|=j}(1-t^{|\alpha|-k})a_\alpha\partial^\alpha\delta_0 = 0$ se, e somente se, $a_\alpha = 0$ $\forall|\alpha| \leq l$, que segue da Observação 2.2.1-(i).

A recíproca é imediata.

Mostremos agora que se $< u, x^\alpha\psi >= 0$ $\forall\alpha$ com $|\alpha| = k$ independe da escolha de ψ. De fato, seja $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ homogênea de grau $-n$ então $< v, \psi >$ independe da escolha de ψ.

Com efeito, sejam $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ satisfazendo a condição do Lema 2.2.2. Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{a+n-1}(\psi_1-\psi_2)(rx)\,dr &= \int_0^{+\infty} r^{-1}(\psi_1-\psi_2)(rx)\,dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_1(rx)\,dr - \int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_2(rx)\,dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

assim pelo Lema 2.1.1 item (c) temos que $< v, (\psi_1-\psi_2) >= 0$ o que implica que $< v, \psi_1 >=< v, \psi_2 >$,.

Tomemos $v = x^\alpha u$ e observemos que $x^\alpha u$ é homogênea de grau $-n$. De fato,

$$\begin{aligned}
< x^\alpha u, \psi > &= < u, x^\alpha\psi > \\
&= t^a < u, (x^\alpha\psi)_t > \\
&= t^{a+n+|\alpha|} < u, x^\alpha\psi(t\cdot) > \\
&= t^{-n} < x^\alpha u, \psi_t > .
\end{aligned}$$

Portanto, $x^\alpha u$ é homogênea de grau $-n$. Logo, $< u, x^\alpha\psi >$ independe da escolha de ψ.

Antes de prosseguir na demonstração faremos uma observação que motiva e dá importância ao papel de $\mathcal{S}$.

Observação:

(i) Se v for uma função contínua e homogênea de grau $-n$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ introduzindo coordenadas polares temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(v) &= <v,\psi> \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} v(x)\psi(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_{|w|=1} r^{-n}v(w)\psi(wr)r^n\,dw\frac{dr}{r} \\
&= \int_{|w|=1}\underbrace{\int_0^{+\infty}\psi(wr)\frac{dr}{r}}_{=1}v(w)\,dw \\
&= \int_{|w|=1} v(w)\,dw,
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da homogeneidade de v. Observemos que $\mathcal{S}(v)$ é a integral de v sobre a esfera unitária.

(ii) Notemos que se u é homogênea de grau a e $a \notin \{k \in \mathbb{Z}; k \leq -n\}$, então (3.1.1) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}
<\mathcal{E}(u),\varphi> &= <u,\psi R_a\varphi> \\
&= <(R_a\varphi)u,\psi> \\
&= \mathcal{S}((R_a\varphi)u) \\
&= \mathcal{S}(<t_+^{a+n-1},\varphi(t\cdot)>u)
\end{aligned}$$

pois, $(R_a\varphi)u$ é homogênea de grau $-a-n+a=-n$, em vista da Observação 2.1.1-(ii).

Quando $a=-n-k$ com $k \in \mathbb{N}$ então (3.1.1) pode depender da escolha de ψ.

(iii) (3.2.1) pode ser reescrita como:

$$<\mathcal{E}(u),\varphi>=t^{-k-n}<\mathcal{E}(u),\varphi_t>+\ln(t)\sum_{|\alpha|=k}\mathcal{S}(x^\alpha u)\frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}. \qquad (3.2.6)$$

(4) Se P é uma função polinomial homogênea de grau m, com uma função

ψ fixada garantimos que $\mathcal{E}(Pu) = P\mathcal{E}(u)$. De fato,

$$< P\mathcal{E}(u), \varphi >=< \mathcal{E}(u), P\varphi >=< u, \psi R_{-n-k} P\varphi >$$

Mas,

$$\begin{aligned} R_{-n-k}(P\varphi)(x) &= < t_+^{-k-1}, P(\cdot x)\varphi(\cdot x) > \\ &= < t_+^{-k-1+m} P(x), \varphi(\cdot x) > \\ &= P(x) < t_+^{m-k-1}, \varphi(\cdot x) > \\ &= P(x) R_{m-n-k}(\varphi)(x). \end{aligned}$$

Daí,

$$< P\mathcal{E}(u), \varphi >=< u, \psi P R_{-n-k+m}(\varphi) >=< Pu, \psi R_{-n-k+m}(\varphi) >=< \mathcal{E}(Pu), \varphi > .$$

(5) Suponhamos que u tenha paridade oposta. Se $t > 0$, (3.2.3) é válida, pois $< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_t >$ por hipótese. Agora se $t < 0$, também concluímos que (3.2.3) é válida, pois:

$$\begin{aligned} < u, \varphi > &= (-t)^a < u, \varphi_{-t} > \\ &= (-t)^{a+n} < u, \varphi(-t\cdot) > \\ &= t^{a+n}(-1)^{a+n}(-1)^{k+1} < u, \varphi(t\cdot) > \\ &= t^a(-1) < u, t^n\varphi(t\cdot) > \\ &= (\mathrm{sgn} t) t^a < u, \varphi_t >, \end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da hipótese de u ter paridade oposta.

Reciprocamente, suponha que (3.2.3) é válida. Tomando $t = -1$,

$$\begin{aligned} < u, \varphi > &= (\mathrm{sgn} t) t^a < u, \varphi_t > \\ &= (-1)(-1)^a < u, \varphi_{-1} > \\ &= (-1)(-1)^{a+n} < u, \varphi(-x) > \\ &= (-1)^{k+1} < u, \varphi(-x) > . \end{aligned}$$

Agora se u satisfaz (3.2.3) então (3.2.2) é válida. De fato, se ψ é par, ou seja, $\psi(x) = \psi(-x)$ e tomemos $\phi(x) = x^\alpha \psi(x)$, com $|\alpha| = k$ e ψ satisfazendo a condição do Lema 2.2.2, então para $t = -1$, temos,

$$\begin{aligned} < u, \phi > &= (-1)(-1)^a < u, \phi_{-1} > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^n \phi(-x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^n (-x)^\alpha \psi(-x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{n+|\alpha|} x^\alpha \psi(x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{n+k} \phi(x) > \\ &= (-1) < u, \phi >, \end{aligned}$$

aqui a quarta igualdade segue da hipótese de ψ ser par.

Portanto, $< u, \phi >= 0$ quando $|\alpha| = k$. Logo por (1) u possui uma extensão homogênea.

(6) Inicialmente mostraremos a unicidade da extensão $\mathcal{E}_1(u)$. Sejam $\mathcal{E}_1(u)$, $\mathcal{E}_2(u)$ extensões de u. Logo $\mathcal{E}_1(u) - \mathcal{E}_2(u) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$. Daí

$$\langle \mathcal{E}_1(u) - \mathcal{E}_2(u), \varphi \rangle = (sng(t)) t^{-n-k} \langle \mathcal{E}_1(u) - \mathcal{E}_2(u), \varphi_t \rangle, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

pois $\mathcal{E}_1(u)$ e $\mathcal{E}_2(u)$ tem paridade oposta a k.

Logo, $\sum_{|\alpha| \leq l} \left(1 - t^{|\alpha|-k}(sgnt)\right) a_\alpha (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(0) = 0$ o que implica que para cada α, com $|\alpha| \leq l$, temos que $a_\alpha \left(1 - t^{|\alpha|-k}(sgnt)\right) = 0$. Logo, $a_\alpha = 0 \ \forall \alpha$, pois $(1 - t^{|\alpha|-k}(sgnt)) = 0 \ \forall t \neq 0$ uma vez que a função $h(t) = t^{|\alpha|-k}(sgnt)$, se $t \neq 0$, não é constante.

Portanto, $\mathcal{E}_1(u) = \mathcal{E}_2(u)$.

Agora mostremos a existência da extensão de u.

Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned} < \underline{t}^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > &= \left\langle t_+^{-k-1} + (-1)^{k+1} t_-^{-k-1}, \varphi(t\cdot) \right\rangle \\ &= < t_+^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > + (-1)^{k-1} < t_-^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > \\ &= < t_+^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > + (-1)^{k-1} < t_+^{-k-1}, \varphi(-t\cdot) > . \end{aligned}$$

Tomemos U uma extensão de u dada por (3.1.1) então (3.2.4) significa que

$$2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi >=< U, \varphi > +(-1)^{k+n-1} < U, \varphi_{-1} >,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{S}\left(\frac{< \underline{t}^{-k-1}, \varphi(t\cdot) >}{2} u\right) &= \mathcal{S}\left(< \underline{t}^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > u\right) \\
&= \mathcal{S}\left(\left[< t_+^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > +(-1)^{k-1} < t_-^{-k-1}, \varphi(t\cdot) >\right] u\right) \\
&= \mathcal{S}\left(\left[< t_+^{-k-1}, \varphi(t\cdot) > +(-1)^{k-1} < t_+^{-k-1}, \varphi(-t\cdot) >\right] u\right) \\
&= \left\langle \left(R_a\varphi + (-1)^{k+n-1} R_a\varphi_{-1}\right) u, \psi \right\rangle \\
&= < U, \varphi > +(-1)^{k+n-1} < U, \varphi_{-1} >,
\end{aligned}$$

aqui quarta igualdade segue da definição de $\mathcal{S}$, pois $\left(R_a\varphi + (-1)^{k+n-1} R_a\varphi_{-1}\right)$ é homogênea de grau k e u é homogênea de grau $-n-k$, logo pela Observação 2.1.1 item (ii) temos $\left(R_a\varphi + (-1)^{k+n-1} R_a\varphi_{-1}\right) u$ é homogênea de grau $-n$.

Afirmação: (3.2.4) define uma distribuição $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, é uma extensão de u e tem paridade oposta a k. Para demonstrar este fato dividiremos em passos:

Passo 1: Afirmamos que $\mathcal{E}_1(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De fato, claramente $\mathcal{E}_1(u)$ é um funcional linear.

Temos que $\mathcal{E}_1(u)$ é um funcional contínuo, pois U é um funcional contínuo e soma de contínuos é contínuo.

Portanto, $\mathcal{E}_1(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Passo 2: $\mathcal{E}_1(u)$ é uma extensão de u.

De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então $2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi >= 2 < U, \varphi >$ por (3.2.3) tomando $t = -1$. Assim temos que:

$$\begin{aligned}
2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi > &= < U, \varphi > +(-1)^{k+n-1} < U, \varphi_{-1} > \\
&= < U, \varphi > + < U, \varphi > \\
&= 2 < U, \varphi > .
\end{aligned}$$

Portanto, $< \mathcal{E}_1(u), \varphi >=< U, \varphi >$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Logo, $\mathcal{E}_1(u)$

é uma extensão de u, isto é, $< \mathcal{E}_1(u), \varphi > = < U, \varphi > = < u, \varphi >$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Passo 3: $\mathcal{E}_1(u)$ tem paridade oposta a k em $\mathbb{R}^n$.

De fato, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tomando $t = -1$ temos:

$$\begin{aligned} 2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi_{-1} > &= < U, \varphi_{-1} > + (-1)^{k+n-1} < U, \varphi > \\ &= 2(-1)^{k+n-1} < \mathcal{E}_1(u), \varphi > - (-1)^{k+n-1} < U, \varphi > \\ &+ (-1)^{k+n-1} < U, \varphi > \\ &= 2(-1)^{k+n-1} < \mathcal{E}_1(u), \varphi > . \end{aligned}$$

Portanto, $< \mathcal{E}_1(u), \varphi > = (-1)^{k+1} < \mathcal{E}_1(u), \varphi(-\cdot) > .$ ■

Exemplo 3.2.1 *Seja* $f \in C^1(S^{n-1})$ *e definimos* $u(x) = ||x||^{-n} f\left(\frac{x}{||x||}\right)$ *em* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Temos que* $u \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *é homogênea de grau* $-n$. *Logo, pelo Teorema* 3.2.1 *u admite uma extensão* $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo*

$$< \mathcal{E}(u), \varphi > = t^{-n} < \mathcal{E}(u), \varphi_t > + \ln(t) \int_{S^{n-1}} u(\omega)\, d\omega\, \varphi(0).$$

Capítulo 4

Distribuições Quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n$

Nosso objetivo neste capítulo é definir distribuições quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n$ e apresentarmos alguns resultados básicos que serão usados na extensão de distribuições quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ para $\mathbb{R}^n$.

4.1 Caracterização de Distribuições Quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

Consideremos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$, as quase-homotetias $H^t_\lambda(x) = (t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)$ com $t > 0$ e $\mathcal{H}^t_\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\mathcal{H}^t_\gamma(z) = t^\gamma z$, com $\gamma \in \mathbb{C}$. Definimos

$$\varphi_{t,\lambda}(x) = \mathcal{H}^t_{|\lambda|}\left(\varphi(H^t_\lambda(x))\right) = t^{|\lambda|}\varphi(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Denotamos $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ e $< a, \lambda >= \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i$, com $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Analogamente ao caso homogêneo considere:

Definição 4.1.1 *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é dita λ - homogênea de grau $m \in \mathbb{C}$ se $f(H^t_\lambda(x)) = t^m f(x)$, $t > 0$.*

Definição 4.1.2 *Diz-se* Γ *é cone* $\lambda-$*homogêneo se* Γ *é aberto e* $(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n) \in \Gamma \quad \forall t > 0, \forall x \in \Gamma.$

Definição 4.1.3 *Dado* $a \in \mathbb{C}$ *e* Γ *um cone* $\lambda-$*homogêneo, diz-se que* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *é* λ*-homogênea de grau* a *se*

$$< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_{t,\lambda} >, \ \forall \ \varphi \in C_c^\infty(\Gamma) \ \ e \ \ t > 0.$$

Exemplo 4.1.1 *Temos que* $\partial^\beta \delta_0$ *é* λ*-homogênea de grau* $-|\lambda|- < \beta, \lambda >$*. De fato,*

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial^\beta \delta_0, \varphi_{t,\lambda} \right\rangle &= t^{|\lambda|} \left\langle \partial^\beta \delta_0, \varphi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= t^{|\lambda|}(-1)^{|\beta|} \left\langle \delta_0, \partial^\beta \left(\varphi(H_\lambda^t(x)) \right) \right\rangle \\
&= t^{|\lambda|} \left\langle \delta_0, (-1)^{|\beta|} t^{<\beta,\lambda>} (\partial^\beta \varphi)(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= t^{|\lambda|+<\beta,\lambda>}(-1)^{|\beta|} \partial^\beta \varphi(0) \\
&= t^{|\lambda|+<\beta,\lambda>} \left\langle \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$< \partial^\beta \delta_0, \varphi >= t^{-|\lambda|-<\beta,\lambda>} < \partial^\beta \delta_0, \varphi_{t,\lambda} >, \ \forall \ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ \ e \ \ t > 0. \quad (4.1.1)$$

Agora expressamos a noção de $\lambda-$homogeneidade de duas maneiras equivalentes. Considere o operador $L_{\lambda,0}$ definido anteriormente e denotamos $\varphi_\lambda^x(s) = \varphi(H_\lambda^s(x)) = \varphi(s^{\lambda_1}x_1, \ldots, s^{\lambda_n}x_n)$ se $\varphi \in C_c^\infty(\Gamma)$.

Lema 4.1.1 *Se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_{t,\lambda} >, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$

(b) $(a + |\lambda|) < u, \varphi > + < u, L_{\lambda,0}\varphi >= 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$

(c) $< u, \psi >= 0,$ *se* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *e* $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1} \psi(H_\lambda^r(x))\, dr = 0.$

Demonstração: Mostremos que $(a) \Rightarrow (b)$. Diferenciando (a) em relação a t e usando o Teorema 2.1.1 seguirá (b). De fato,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(< u, \varphi >) \\
&= < u, \frac{d}{dt}\left(t^{a+|\lambda|}\varphi(H^t_\lambda(x))\right) > \\
&= \left\langle u, (a+|\lambda|)t^{a+|\lambda|-1}\varphi(H^t_\lambda(x)) + t^{a+|\lambda|}\sum_{i=1}^n \lambda_i t^{\lambda_i - 1} x_i (\partial_{x_i}\varphi)(H^t_\lambda(x)) \right\rangle \\
&= (a+|\lambda|)t^{a-1}\left\langle u, t^{|\lambda|}\varphi(H^t_\lambda(x))\right\rangle + t^{a-1}\left\langle u, t^{|\lambda|}\sum_{i=1}^n \lambda_i t^{\lambda_i} x_i (\partial_{x_i}\varphi)(H^t_\lambda(x)) \right\rangle \\
&= (a+|\lambda|)t^{a-1}\left\langle u, \varphi_{t,\lambda}(x)\right\rangle + t^{a-1}\left\langle u, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i (\partial_{x_i}\varphi)\right)_{t,\lambda}(x) \right\rangle \\
&= (a+|\lambda|)t^{-1}\langle u, \varphi\rangle + t^{-1}\langle u, L_{\lambda,0}\varphi\rangle,
\end{aligned}$$

aqui a segunda igualdade segue do Teorema 2.1.1 e a sexta igualdade segue da quase-homogeneidade de u.

Portanto, $(a+|\lambda|) < u, \varphi > + < u, L_{\lambda,0}\varphi >= 0$

Mostremos que $(b) \Rightarrow (c)$. Para provar esta implicação, basta verificar que a equação $(a+|\lambda|)\,\varphi + L_{\lambda,0}\varphi = \psi$ tem solução $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Tal equação diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dr}\left(r^{a+|\lambda|}\varphi(H^r_\lambda(x))\right) = r^{a+|\lambda|-1}\psi(H^r_\lambda(x)). \tag{4.1.2}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r^{a+|\lambda|}\varphi(H^r_\lambda(x))\right) &= (a+|\lambda|)r^{a+|\lambda|-1}\varphi(H^r_\lambda(x)) \\
&+ r^{a+|\lambda|}\frac{d}{dr}\left(\varphi(H^r_\lambda(x))\right) \\
&= (a+|\lambda|)r^{a+|\lambda|-1}\varphi(H^r_\lambda(x)) \\
&+ r^{a+|\lambda|}\sum_{i=1}^n \lambda_i r^{\lambda_i - 1} x_i (\partial_{x_i}\varphi)(H^r_\lambda(x)) \\
&= (a+|\lambda|)r^{a+|\lambda|-1}\varphi(H^r_\lambda(x)) \\
&+ r^{a+|\lambda|-1}\sum_{i=1}^n \lambda_i r^{\lambda_i} x_i (\partial_{x_i}\varphi)(H^r_\lambda(x))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r^{a+|\lambda|-1}\left\{(a+|\lambda|)\varphi(H_\lambda^r(x))\right.\\
&+ \left.L_{\lambda,0}\varphi(H_\lambda^r(x))\right\}\\
&= r^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^r(x)).
\end{aligned}
$$

Mostremos assim que dado $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^r(x))\, dr = 0$, então existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, com $\dfrac{d}{dr}\left(r^{a+|\lambda|}\varphi(H_\lambda^r(x))\right) = r^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^r(x))$. Tomemos $\psi_\lambda : (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_\lambda(r,x) = r^{-(a+|\lambda|)}\displaystyle\int_0^r s^{a+|\lambda|-1}\psi\left(H_\lambda^s(x)\right)\, ds$, temos que $\psi_\lambda \in C^\infty\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right)$.

Agora mostremos que $S(\psi_\lambda(1,\cdot) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Como $S(\psi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, isto é, existe $R > 1$ tal que $S(\psi) \subset \mathcal{A}\left(0,\frac{1}{R},R\right)$, com $\mathcal{A}\left(0,\frac{1}{R},R\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\, \frac{1}{R} \leq ||x|| \leq R\right\}$.

Se $||x|| \leq \frac{1}{R}$ então $\psi_\lambda(1,x) = \displaystyle\int_0^1 s^{a+|\lambda|-1}\underbrace{\psi(H_\lambda^s(x))}_{=0}\, ds = 0.$

Se $||x|| \geq R$ então $\psi_\lambda(1,x) = \displaystyle\int_0^1 s^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^s(x))\, ds = \int_0^{+\infty} s^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^s(x))\, ds,$ pois $\displaystyle\int_1^{+\infty} s^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^s(x))\, ds = 0$. Daí pela hipótese de (c) $\psi_\lambda(1,x) = 0$.

Portanto $S(\psi_\lambda(1,\cdot)) \subset \mathcal{A}\left(0,\frac{1}{R},R\right)$, logo $S(\psi_\lambda(1,\cdot)) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Vamos verificar que $\psi_\lambda(1,\cdot)$ é solução da equação diferencial (4.1.2). Observemos que

$$
\begin{aligned}
r^{a+|\lambda|}\psi_\lambda(1,\cdot)(H_\lambda^r(x)) &= r^{a+|\lambda|}\psi_\lambda(r,x)\\
&= r^{a+|\lambda|}r^{-a-|\lambda|}\int_0^r s^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^s(x))\, ds\\
&= \int_0^r s^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^s(x))\, ds,
\end{aligned}
$$

assim $\dfrac{d}{dr}\left(r^{a+|\lambda|}\psi_\lambda(1,\cdot)(H_\lambda^r(x))\right) = r^{a+|\lambda|-1}\psi(H_\lambda^r(x))$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
< u,\psi > &= < u,(a+|\lambda|)\psi_\lambda(1,\cdot) + L_{\lambda,0}\psi_\lambda(1,\cdot) >\\
&= (a+|\lambda|) < u,\psi_\lambda(1,\cdot) > + < u, L_{\lambda,0}\psi_\lambda(1,\cdot) >\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por (b). Daí segue (c).

Demonstremos agora $(c) \Rightarrow (a)$. Dado $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e fixado $t > 0$ tomemos $\psi^t(y) = \varphi(y) - t^{a+|\lambda|}\varphi(H_\lambda^t(y))$, logo $\psi^t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Verifiquemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1}\psi^t(H_\lambda^r(x))\, dr = 0$ para $x \neq 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1}\psi^t(H_\lambda^r(x))\, dr &= \int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1}\varphi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1}t^{a+|\lambda|}\varphi(H_\lambda^{tr}(x))\, dr \\
&= < r_+^{a+|\lambda|-1}, \varphi(H_\lambda^r(x)) > \\
&- t^{a+|\lambda|-1} < r_+^{a+|\lambda|-1}, t\varphi(H_\lambda^{tr}(x)) > \\
&= < r_+^{a+|\lambda|-1}, \varphi(H_\lambda^r(x)) > \\
&- t^{a+|\lambda|-1} < r_+^{a+|\lambda|-1}, t\varphi_\lambda^x(tr) > \\
&= < r_+^{a+|\lambda|-1}, \varphi(H_\lambda^r(x)) > \\
&- < r_+^{a+|\lambda|-1}, \varphi(H_\lambda^r(x)) > \\
&= 0,
\end{aligned}$$

aqui a quarta igualdade segue da homogeneidade de $r_+^{a+|\lambda|-1}$.

Logo, $< u, \psi^t >= 0$. Daí $< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_{t,\lambda} >$ e vale (a). ■

Observação 4.1.1

(i): *Na demonstração do Lema* 4.1.1, *para mostrarmos que* $(b) \Rightarrow (c)$, *devemos ter* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, *pois caso contrário* $\psi_\lambda(1, \cdot) \notin C_c(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

(ii): *Tal como no caso homogêneo temos:* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *é quase-homogênea de grau* a *se, e somente se,* $L_{\lambda,0}u = au$.

4.2 Alguns Lemas Úteis

Fixado $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, logo:

Lema 4.2.1 *Existe uma* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *tal que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi(H_\lambda^t(x))}{t}\, dt = 1, \quad se \ \ x \neq 0. \tag{4.2.1}$$

Demonstração: Tomemos $\psi(x) = \psi_1(p_\lambda(x))$, sendo

$$p_\lambda(x) = \sqrt{(x_1)^{\frac{2}{\lambda_1}} + (x_2)^{\frac{2}{\lambda_2}} + ... + (x_n)^{\frac{2}{\lambda_n}}}$$

com ψ_1 como no Lema 2.2.2. Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\psi(H_\lambda^t(x))}{t}\, dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\psi_1\left(p_\lambda(H_\lambda^t(x))\right)}{t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\psi_1(tp_\lambda(x))}{t}\, dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Como no caso homogêneo, definimos o operador $R_b : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ com $b = a + |\lambda|$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$. A definição será dada em dois casos:

(i) Se $\text{Re}(b) > 0$ ou $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ definimos

$$R_b\varphi(x) := < r_+^{b-1}, \varphi(H_\lambda^r(x)) > . \tag{4.2.2}$$

(ii) Se $\text{Re}(b) \leq 0$ e $\lambda \notin \mathbb{Z}_+^n$ o operador R_b será expresso em (4.2.3) seguindo a construção abaixo.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tomemos a expansão de Taylor de ordem k em torno do ponto $x = 0$, isto é, $\varphi(x) = \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta + (E_k\varphi)(x)$ com $E_k\varphi = o(||x||^k)$.

Seja $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\theta \equiv 1$ vizinhança do zero, assim escrevemos $\varphi = \theta\varphi + (1-\theta)\varphi$ e tomemos $\theta\varphi = \varphi_1$ e $(1-\theta)\varphi = \varphi_2$. Assim temos :

Afirmação 1: $< r_+^{b-1}, \varphi_1\left(H_\lambda^r(x)\right) >$ está bem definido.

De fato, observemos primeiramente que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (\theta\varphi)(x) \\ &= \theta(x)\left(\sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta + (E_k\varphi)(x)\right) \\ &= \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta\theta + \theta(x)(E_k\varphi)(x). \end{aligned}$$

Assim tomemos $\varphi_{1,1} = \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{\beta!} x^\beta \theta$, $\varphi_{1,2} = \theta(E_k\varphi)$. A Afirmação 1 seguirá de $(1.i)$ e $(1.ii)$ abaixo.

(1.i):

$$\left\langle r_+^{b-1}, \varphi_{1,1}\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle = \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle$$

está bem definido.

De fato, observemos que $\varphi_{1,1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e olhando-a como função de r, isto é, $r \mapsto \varphi_{1,1}\left(H_\lambda^r(x)\right)$ notemos que $\varphi_{1,1} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, pois $\theta \equiv 1$ vizinhança do zero.

(1.ii): Tomemos k sendo o menor inteiro positivo maior que $\frac{-\mathrm{Re}(b)}{\lambda_{min}}$, logo $r_+^{b-1+k\lambda_{min}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Desta forma, observamos que

$$||H_{\hat\lambda}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k} \in C_c^0(\mathbb{R}).$$

Logo com $\hat\lambda = (\lambda_1 - min\{\lambda_i; i = 1, \ldots, n\}, \ldots, \lambda_n - min\{\lambda_i; i = 1, \ldots, n\})$ temos que

$$\left\langle r_+^{b-1}, \varphi_{1,2}\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle = \left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat\lambda}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\right\rangle$$

com $min\{\lambda_i; i = 1, \ldots, n\} = \lambda_{min}$ está bem definido.

Afirmação 2: $< r_+^{b-1}, \varphi_2\left(H_\lambda^r(x)\right) >= \left\langle r_+^{b-1}, ((1-\theta)\varphi)\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle$ está bem definido.

De fato, observemos que $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e olhando-a como função de r, isto é, $r \mapsto \varphi_2\left(H_\lambda^r(x)\right)$ temos que $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, pois $\theta \equiv 1$ vizinhança do zero, logo $(1-\theta) = 0$ numa vizinhança do zero e daí segue a Afirmação 2.

Finalmente, definimos o operador R_b como sendo:

$$\begin{aligned} R_b\varphi(x) : &= \left\langle r_+^{b-1}, ((1-\theta)\varphi)\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle \\ &+ \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle \\ &+ \left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat\lambda}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\right\rangle. \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

Mostremos que o operador R_b independe de θ com θ como no caso (ii) acima.

Lema 4.2.2 *O operador R_b independe de θ.*

Demonstração: Sejam $\theta_1, \theta_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\theta_1 \equiv 1$ vizinhança do zero e $\theta_2 \equiv 1$ vizinhança do zero. Observemos que $\theta_2 - \theta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
R_b^{\theta_1}\varphi(x) - R_b^{\theta_2}\varphi(x) &= \left\langle r_+^{b-1}, ((\theta_2-\theta_1)\varphi)\,(H_\lambda^r(x))\right\rangle \\
&+ \sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, (\theta_1-\theta_2)\,(H_\lambda^r(x))\right\rangle \\
&+ \left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, (\theta_1-\theta_2)(H_\lambda^r(x))||H_{\hat{\lambda}}^r(x)||^k \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\right\rangle \\
&= \int_0^{+\infty} r^{b-1}(\theta_2-\theta_1)(H_\lambda^r(x))\Bigg[\varphi((H_\lambda^r(x)) \\
&- \sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}(H_\lambda^r(x))^\beta \\
&- ||H_\lambda^r(x)||^k \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\Bigg]\, dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{b-1}\Bigg[(\theta_2-\theta_1)\Bigg(\varphi - \sum_{|\beta|\le k}\frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}(x)^\beta \\
&- (E_k\varphi)\Bigg)(H_\lambda^r(x))\Bigg]\, dr \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.2.3 *O operador $R_b : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ definido por*

$$\begin{aligned}
R_b\varphi(x) : &= \left\langle r_+^{b-1}, ((1-\theta)\varphi)\,(H_\lambda^r(x))\right\rangle \\
&+ \sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\,(H_\lambda^r(x))\right\rangle \\
&+ \left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat{\lambda}}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\right\rangle,
\end{aligned}$$

é contínuo.

Demonstração: Para mostrarmos que R_b é um operador contínuo, tendo em vista o Lema 3 de [F] (pg 125), é suficiente demonstrar que

$R_b : C_c^\infty(K) \to C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ é contínuo. Basta verificarmos que $R_b\varphi_m \to R_b\varphi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ se $\varphi_m \to \varphi$ em $C_c^\infty(K)$. Recordemos que $\varphi_m \to \varphi$ em $C_c^\infty(K)$ significa que $\varphi_m \in C_c^\infty(K)$ e que $\partial^\beta\varphi_m \to \partial^\beta\varphi$ uniformemente em K quando $m \to +\infty$ e para $\beta \in \mathbb{N}^n$. Analisemos cada termo do operador R_b.

1º termo: Para mostrarmos que

$$\left\langle r_+^{b-1}, ((1-\theta)\varphi_m)\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle \to \left\langle r_+^{b-1}, ((1-\theta)\varphi)\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle,$$

tendo em vista o Teorema 2.1.1 não há perda de generalidade em tomarmos $\beta = 0$. Mas $|(1-\theta)\varphi_m - (1-\theta)\varphi| = |(1-\theta)(\varphi_m - \varphi)| \to 0$ uniformemente quando $m \to +\infty$.

2º termo: Mostremos que

$$\sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi_m(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle \textit{converge para}$$

$$\sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle.$$

De fato, como $\partial^\beta\varphi_m(0) \to \partial^\beta\varphi(0)$ quando $m \to +\infty$, logo
$\displaystyle\sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi_m(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle$ *converge para*

$$\sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H_\lambda^r(x)\right)\right\rangle.$$

3º termo: Mostremos que

$$\left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat\lambda}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi_m)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\right\rangle \textit{converge para}$$

$$\left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat\lambda}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k}\right\rangle.$$

Recordemos que

$$(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x)) = k\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k)}(H_\lambda^r(0+tx))\,dt$$

onde $\varphi^{(k)}(H_\lambda^r(0+tx)) = \displaystyle\sum_{|\beta|\le k} \frac{\partial^\beta\varphi(H_\lambda^r(0+tx))}{\beta!}(H_\lambda^r(x))^\beta$, ou seja, escrevemos o resto da Fórmula de Taylor sob forma integral. Temos por hipótese que

$\partial^\beta \varphi_m(H_\lambda^r(tx)) \to \partial^\beta \varphi(H_\lambda^r(tx))$ uniformemente quando $m \to +\infty$. E assim, $(E_k\varphi_m) \to (E_k\varphi)$ uniformemente quando $m \to +\infty$.

Logo,

$$\left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat{\lambda}}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi_m)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k} \right\rangle = \left\langle r_+^{b-1}, \theta(H_\lambda^r(x))(E_k\varphi_m)(H_\lambda^r(x)) \right\rangle$$

converge para

$$\left\langle r_+^{b-1}, \theta(H_\lambda^r(x))(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x)) \right\rangle = \left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat{\lambda}}^r(x)||^k \theta(H_\lambda^r(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^r(x))}{||H_\lambda^r(x)||^k} \right\rangle.$$

Portanto, temos que $R_b\varphi_m \to R_b\varphi$, ou seja, R_b é contínuo. ■

Capítulo 5

Extensões de Distribuições Quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

Na primeira seção mostraremos que no caso em que $a \notin \{-|\lambda| - <\alpha, \lambda>; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ as distribuições quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ podem ser estendidas para $\mathbb{R}^n$. Na segunda seção consideremos o caso em que $a = -|\lambda| - <\alpha, \lambda>$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

5.1 Extensões de Distribuições Quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte I

Tomando como ponto de partida a definição de R_b, com $b = a + |\lambda|$, proposto no capítulo 4 na seção 4.2, mostraremos:

Lema 5.1.1 *Suponha que* $a \notin \{-|\lambda| - <\alpha, \lambda>; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, *então* $R_b\varphi$ *é* $\lambda-$*homogênea de grau* $-b$.

Demonstração:

A demonstração será feita em dois casos.

Caso 1: $\text{Re}(b) > 0$ ou $\lambda \in \mathbb{Z}^n_+$.

De fato,

$$\begin{aligned}
R_b\varphi(H^l_\lambda(x)) &= < r_+^{b-1}, \varphi\left(H^r_\lambda(H^l_\lambda(x))\right) > \\
&= l^{-1} < r_+^{b-1}, l\varphi(H^{lr}_\lambda(x)) > \\
&= l^{-1} < r_+^{b-1}, l\varphi^x_\lambda(lr) > \\
&= l^{-1}l^{-b+1} < r_+^{b-1}, \varphi^x_\lambda(r) > \\
&= l^{-b} < r_+^{b-1}, \varphi(H^r_\lambda(x)) > \\
&= l^{-b}R_b\varphi(x),
\end{aligned}$$

aqui a quarta igualdade segue da homogeneidade r_+^{b-1} .

Caso 2: Quando $\mathrm{Re}(b) \leq 0$ e $\lambda \notin \mathbb{Z}^n_+$.

Conforme a seção 4.2 do capítulo 4, temos:

$$\begin{aligned}
R_b\varphi(H^l_\lambda(x)) &= \left\langle r_+^{b-1}, \left((1-\theta)\varphi\right)\left(H^{lr}_\lambda(x)\right)\right\rangle \\
&+ \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} l^{<\beta,\lambda>} x^\beta \left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H^{lr}_\lambda(x)\right)\right\rangle \\
&+ l^{k\lambda_{min}} \left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H^{lr}_{\hat{\lambda}}(x)||^k \theta(H^{lr}_\lambda(x)) \frac{(E_k\varphi)(H^{lr}_\lambda(x))}{||H^{lr}_\lambda(x)||^k}\right\rangle \\
&= (I) + (II) + (III),\ respectivamente.
\end{aligned}$$

Estudamos cada parcela (I), (II) e (III) individualmente. Consideremos os seguintes subcasos:

Subcaso 2.1: Análise do termo (I)

$$\begin{aligned}
(I) &= l^{-1}\left\langle r_+^{b-1}, l\left((1-\theta)\varphi\right)\left(H^{lr}_\lambda(x)\right)\right\rangle \\
&= l^{-b}\left\langle r_+^{b-1}, \left((1-\theta)\varphi\right)\left(H^r_\lambda(x)\right)\right\rangle,
\end{aligned}$$

com a última igualdade seguindo da homogeneidade de r_+^{b-1} em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Logo, (I) é $\lambda-$homogênea de grau $-b$.

Subcaso 2.2: Análise do termo (II).

Dado $\beta \in \mathbb{N}^n$ com $|\beta| \leq k$ temos: Se $b-1+<\beta,\lambda>\notin \mathbb{Z}_-$ o resultado segue da homogeneidade de $r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}$.

Se $b-1+<\beta,\lambda>=-j_\beta\in\mathbb{Z}_-$ temos que $j_\beta\geq 2$, pois se $j_\beta=1$ teríamos que $a=-|\lambda|-<\beta,\lambda>$ contradizendo a hipótese sobre a. Analisemos o termo $(II)_\beta$, onde $(II)_\beta$ a parcela de (II) correspondente a β

$$\begin{aligned}(II)_\beta &= l^{<\beta,\lambda>-1}\frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}x^\beta\left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>}, l\theta\left(H_\lambda^{lr}(x)\right)\right\rangle\\ &= l^{-b}\frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}x^\beta\left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>},\theta\left(H_\lambda^{r}(x)\right)\right\rangle\\ &- l^{-b}\frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}x^\beta\ln(l)\frac{1}{(j_\beta-1)!}\int_0^{+\infty}\left[\theta(H_\lambda^r(x))\right]^{(j_\beta)}dr\\ &= l^{-b}\frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}x^\beta\left\langle r_+^{b-1+<\beta,\lambda>},\theta\left(H_\lambda^{r}(x)\right)\right\rangle,\end{aligned}$$

aqui a segunda igualdade segue de (1.3.3). Logo, temos que termo (II) é $\lambda-$homogêneo para $\beta\in\mathbb{N}^n$ com $|\beta|\leq k$.

Subcaso 2.3: Análise do termo (III).

$$\begin{aligned}(III) &= l^{-1+k\lambda_{min}}\left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, l||H_{\hat{\lambda}}^{lr}(x)||^k\theta(H_\lambda^{lr}(x))\frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^{lr}(x))}{||H_\lambda^{lr}(x)||^k}\right\rangle\\ &= l^{-b}\left\langle r_+^{b-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat{\lambda}}^{r}(x)||^k\theta(H_\lambda^{r}(x))\frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^{r}(x))}{||H_\lambda^{r}(x)||^k}\right\rangle\end{aligned}$$

com a última igualdade seguindo da homogeneidade de $r_+^{b-1+k\lambda_{min}}$. ■

Observação 5.1.1 *Seja $\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\theta\equiv 1$ vizinhança do zero, como o operador R_b independe de θ fixado $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ podemos tomar o $S(\theta)$ tão pequeno tal que $S(\theta)\cap S(\varphi)=\varnothing$. Daí temos : $R_b\varphi(x)=<r_+^{b-1},\varphi(H_\lambda^r(x))>$.*

Análogo o que foi visto na demonstração do Teorema 3.1.2 temos:

Lema 5.1.2 $R_b\left(\psi R_b\varphi\right)=R_b\varphi \quad \forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *se* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\psi(H_\lambda^t(x))}{t}\,dt=1,\ \forall x\neq 0.$

Demonstração: Observemos primeiramente que $\psi R_b\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, daí pela Observação 5.1.1 temos:

$$R_b\left(\psi R_b\varphi\right)(x) = <r_+^{b-1},\left(\psi R_b\varphi\right)\left(H_\lambda^r(x)\right)>$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} r^{b-1}\psi(H_\lambda^r(x))R_b\varphi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&= R_b\varphi(x)\int_0^{+\infty} r^{b-1}r^{-b}\psi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&= R_b\varphi(x),
\end{aligned}
$$

aqui a terceira igualdade segue do fato de R_b ser $\lambda-$homogênea de grau $-b$ e a quarta igualdade segue da hipótese adicional da ψ. ■

Consideremos o conjunto $\mathcal{H}_{a,\lambda}(\Gamma) = \{u \in \mathcal{D}'(\Gamma);\ \lambda - homogenea\ de\ grau\ a\}$.

Teorema 5.1.1 *Se* $u \in \mathcal{H}_{a,\lambda}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *com* $a \notin \{-|\lambda| - <\alpha, \lambda>; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ *então* u *tem uma única extensão* $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{H}_{a,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: **(Unicidade)** Suponha que U_1, $U_2 \in \mathcal{H}_{a,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ extensões de $u \in \mathcal{H}_{a,\lambda}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. Assim usando o Teorema 3.1.1 temos que, existem $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $k > 0$ tais que $U_1 - U_2 = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \delta_0^\alpha$.

Mostremos que $a_\alpha = 0\ \forall\alpha$. Consideremos $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_0 \equiv 1$ vizinhança do zero e suponha que $U_1 - U_2 \neq 0$, logo existe α_0 fixado com $|\alpha_0| \le k$ tal que $a_{\alpha_0} \neq 0$, tomemos $\varphi(x) = x^{\alpha_0}\varphi_0(x)$. Daí temos que

$$
\begin{aligned}
<U_1 - U_2, \varphi> &= \left\langle \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \varphi \right\rangle \\
&= a_{\alpha_0}(-1)^{|\alpha_0|}\alpha_0!
\end{aligned}
$$

observemos que $U_1 - U_2$ é λ-homogênea de grau a, logo

$$
\begin{aligned}
t^a <U_1 - U_2, \varphi_{t,\lambda}> &= t^a \left\langle \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, t^{|\lambda|}\varphi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= a_{\alpha_0}(-1)^{|\alpha_0|}\alpha_0!\, t^{a+|\lambda|+<\alpha_0,\lambda>}.
\end{aligned}
$$

Daí, temos que $a_{\alpha_0}(-1)^{|\alpha_0|}\alpha_0! = a_{\alpha_0}(-1)^{|\alpha_0|}\alpha_0!\, t^{a+|\lambda|+<\alpha_0,\lambda>}$, logo $a + |\lambda| + <\alpha_0, \lambda> = 0$ o que implica $a = -|\lambda| - <\alpha_0, \lambda>$ contradizendo a hipótese sobre a. Portanto, $a_\alpha = 0\ \forall\alpha$.

(Existência) Uma extensão de u é obtida a partir das três etapas abaixo.

Etapa 1: $<u, \psi R_b\varphi>$ independe da escolha de ψ, com ψ nas condições do Lema 4.2.1.

De fato, sejam $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ satisfazendo a condição do Lema 4.2.1, assim temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{b-1}(\psi_1 R_b\varphi - \psi_2 R_b\varphi)(H_\lambda^r(x))\, dr &= \int_0^{+\infty} r^{b-1}\psi_1(H_\lambda^r(x))R_b\varphi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{b-1}\psi_2(H_\lambda^r(x))R_b\varphi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{b-1}\psi_1(H_\lambda^r(x))r^{-b}R_b\varphi(x)\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{b-1}\psi_2(H_\lambda^r(x))r^{-b}R_b\varphi(x)\, dr \\
&= R_b\varphi(x)\underbrace{\int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_1(H_\lambda^r(x))}_{=1}\, dr \\
&- R_b\varphi(x)\underbrace{\int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_2)(H_\lambda^r(x))}_{=1}\, dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

aqui a segunda igualdade segue da λ-homogeneidade de $R_b\varphi$.

Portanto, pelo item (c) do Lema 4.1.1 segue que $\langle u, \psi_1 R_b\varphi - \psi_2 R_b\varphi\rangle = 0$ o que implica que $< u, \psi_1 R_b\varphi >=< u, \psi_2 R_b\varphi >$.

Etapa 2: $< u, \psi R_b\varphi >=< u, \varphi >$ se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

De fato, como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ temos pela Observação 5.1.1 que

$R_b\varphi(x) =< r_+^{b-1}, \varphi(H_\lambda^r(x)) >$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{b-1}\left(\psi R_b\varphi - \varphi\right)\left(H_\lambda^r(x)\right) dr &= \int_0^{+\infty} r^{b-1}\psi(H_\lambda^r(x))R_b\varphi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&- \int_0^{+\infty} r^{b-1}\varphi(H_\lambda^r(x))\, dr \\
&= R_b\varphi(x)\int_0^{+\infty} r^{-b+b-1}\psi(H_\lambda^r(x))\, dr - R_b\varphi(x) \\
&= R_b\varphi(x)\int_0^{+\infty} r^{-1}\psi(H_\lambda^r(x))\, dr - R_b\varphi(x) \\
&= R_b\varphi(x) - R_b\varphi(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

aqui a segunda igualdade segue da hipótese de R_b ser λ-homogênea de grau $-b$ e a quarta igualdade segue da hipótese da ψ.

Etapa 3: Definimos $\mathcal{E}(u)$ por:

$$< \mathcal{E}(u), \varphi > = < u, \psi R_b \varphi > \tag{5.1.1}$$

para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e é uma extensão de u quasi-homogênea de grau a. Para demonstrar isto consideremos os seguintes passos.

Passo 1: $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e é uma extensão de u.

De fato, claramente $\mathcal{E}(u)$ é um funcional linear.

Temos que $\mathcal{E}(u)$ é um funcional contínuo, pois é composto de funcionais contínuos, isto é , $\mathcal{E}(u) = u \circ L_\psi \circ R_b$ onde temos que u é um funcional contínuo por hipótese, $L_\psi : C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é contínuo, pois $L_\psi = M_\psi \circ I$ onde inclusão $I : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é contínua e M_ψ é contínuo pelo Lema 2.2.3 e ainda $R_b : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é contínuo pelo Lema 4.2.3.

Como $< \mathcal{E}(u), \varphi > = < u, \psi R_b \varphi > = < u, \varphi >$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Logo, $\mathcal{E}(u)$ é uma extensão de u.

Passo 2: $\mathcal{E}(u)$ é λ-homogênea de grau a.

Repetindo o mesmo argumento do Lema 5.1.1 temos que $R_b \varphi_{t,\lambda}(x) = t^{-a} R_b \varphi(x)$, ou seja, $R_b \varphi$ é $\lambda-$homogênea de grau $-a$.

Notemos que $< \mathcal{E}(u), \varphi_{t,\lambda} > = < u, \psi R_b \varphi_{t,\lambda} > = t^{-a} < u, \psi R_b \varphi > = < \mathcal{E}(u), \varphi >$

Portanto, $< \mathcal{E}(u), \varphi > = t^a < \mathcal{E}(u), \varphi_{t,\lambda} >$, isto é, $\mathcal{E}(u)$ é λ-homogênea de grau a. ∎

5.2 Extensões de Distribuições Quase-homogêneas de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte II

Antes de enunciar o teorema, faremos algumas considerações.

Definição 5.2.1 *Se* $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ *e* Γ *um cone aberto dizemos que* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *tem paridade oposta a* $< \alpha, \lambda >$ *se* $< u, \varphi > = (-1)^{<\alpha,\lambda>+1} < u, \varphi(H_\lambda^{(-1)}(x)) >$, $\varphi \in C_c^\infty(\Gamma)$.

Tomando como ponto de partida a definição do operador R_b definido por (4.2.3) proposto na seção 4.2 do Capítulo 4 temos:

Lema 5.2.1 *Suponha que* $a = -|\lambda| - <\alpha, \lambda>$ *para algum* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, *então*

$$R_b\varphi(x) = t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} R_b\varphi_{t,\lambda}(x) + \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta, \lambda>!} x^\beta$$

com $b = -<\alpha, \lambda> \leq 0$, k o menor inteiro positivo maior que $\dfrac{<\alpha, \lambda>}{\lambda_{min}}$ como em (4.2.3) e $b_\beta \in \mathbb{C}$ independentes de φ.

Demonstração: Pela definição de R_b apresentado na seção 4.2 do Capítulo 4 e usando a notação lá apresentada, observando que $\mathrm{Re}(b) = b = -<\alpha, \lambda> \leq 0$, temos dois casos:

Caso 1: $\lambda \in \mathbb{Z}^n_+$

De fato, neste caso temos

$$\begin{aligned}
R_{-<\alpha,\lambda>}\varphi_{t,\lambda}(x) &= <r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, t^{|\lambda|}\varphi(H^{rt}_\lambda(x))> \\
&= t^{|\lambda|-1} <r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, t\varphi(H^{rt}_\lambda(x))> \\
&= t^{|\lambda|-1} <r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, t\varphi^x_\lambda(\cdot t)> \\
&= t^{|\lambda|-1} \Big(t^{<\alpha,\lambda>+1} <r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi^x_\lambda(\cdot)> \\
&- t^{<\alpha,\lambda>+1} \ln(t) \frac{1}{<\alpha, \lambda>!} \frac{d^{<\alpha,\lambda>}}{dr^{<\alpha,\lambda>}} (\varphi^x_\lambda(r))\Big|_{r=0} \Big) \\
&= t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} R_{-<\alpha,\lambda>}\varphi(x) \\
&- t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta x^\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta, \lambda>!},
\end{aligned}$$

aqui a quarta igualdade segue de (1.3.3).

Caso 2: $\lambda \notin \mathbb{Z}^n_+$

De fato, neste caso temos

$$\begin{aligned}
R_b\varphi_{t,\lambda}(x) &= t^{|\lambda|} \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, ((1-\theta)\varphi)(H^{tr}_\lambda(x)) \right\rangle \\
&+ \sum_{|\beta|\leq k} \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{\beta!} t^{<\beta,\lambda>+|\lambda|} x^\beta \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+<\beta,\lambda>}, \theta\left(H^{tr}_\lambda(x)\right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \quad t^{|\lambda|+k\lambda_{min}} \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat{\lambda}}^{tr}(x)||^k \theta(H_\lambda^{tr}(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^{tr}(x))}{||H_\lambda^{tr}(x)||^k} \right\rangle \\ &= \quad (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Estudamos cada termo (I), (II) e (III) individualmente. Consideremos os seguintes casos:

Caso 1: Análise do termo (I).

$$\begin{aligned} (I) &= t^{|\lambda|-1} \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, t\left((1-\theta)\varphi\right)(H_\lambda^{tr}(x)) \right\rangle \\ &= t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \left((1-\theta)\varphi\right)(H_\lambda^{r}(x)) \right\rangle. \end{aligned}$$

com a última igualdade seguindo da homogeneidade $r_+^{-<\alpha,\lambda>-1}$ em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Caso 2: Análise do termo (II). Denominaremos $(II)_\beta$ a parcela de (II) correspondente a β. Consideremos os seguintes subcasos:

Subcaso 2.1: Se β for tal que $-<\alpha,\lambda>+<\beta,\lambda>-1=-j_\beta \in \mathbb{Z}_-$ com $j_\beta \geq 2$ a mesma afirmação do Caso 1 segue por integração por partes para $(II)_\beta$.

Subcaso 2.2: Se β for tal que $-<\alpha,\lambda>+<\beta,\lambda>-1=-1$ temos:

$$\begin{aligned} (II)_\beta &= t^{|\lambda|+<\beta,\lambda>-1} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+<\beta,\lambda>}, t\theta(H_\lambda^{tr}(x)) \right\rangle \\ &= t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>+<\beta,\lambda>-1}, \theta(H_\lambda^{r}(x)) \right\rangle \\ &- t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \ln(t) \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \theta(0) \\ &= t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+<\beta,\lambda>}, \theta(H_\lambda^{r}(x)) \right\rangle \\ &- t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \ln(t) \frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!} x^\beta, \end{aligned}$$

aqui a segunda igualdade segue de (1.3.3).

Subcaso 2.3: Se $-<\alpha,\lambda>+<\beta,\lambda>-1 \notin \mathbb{Z}_-$ a mesma afirmação do Caso 1 para $(II)_\beta$ segue, pela homogeneidade $r_+^{-<\alpha,\lambda>+<\beta,\lambda>-1}$.

Caso 3: Análise do termo (III).

$$\begin{aligned} (III) &= t^{|\lambda|+k\lambda_{min}-1} \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+k\lambda_{min}}, t||H_{\hat{\lambda}}^{tr}(x)||^k \theta(H_\lambda^{tr}(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^{tr}(x))}{||H_\lambda^{tr}(x)||^k} \right\rangle \\ &= t^{|\lambda|+<\alpha,\lambda>} \left\langle r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+k\lambda_{min}}, ||H_{\hat{\lambda}}^{r}(x)||^k \theta(H_\lambda^{r}(x)) \frac{(E_k\varphi)(H_\lambda^{r}(x))}{||H_\lambda^{r}(x)||^k} \right\rangle \end{aligned}$$

com a última igualdade seguindo da homogeneidade de $r_+^{-<\alpha,\lambda>-1+k\lambda_{min}}$. ∎

Finalmente podemos enunciar o nosso resultado principal desta seção:

Teorema 5.2.1 *Seja* $u \in \mathcal{H}_{a,\lambda}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *com* $a = -|\lambda| - <\alpha, \lambda>$ *para algum* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *então:*

(1) u admite uma extensão $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo*

$$\begin{aligned} <\mathcal{E}(u), \varphi> &= t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} <\mathcal{E}(u), \varphi_{t,\lambda}> \\ &+ \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta,\lambda>!} <u, x^\beta \psi>. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

com $t > 0$, $b_\beta \in \mathbb{C}$ *independe de* φ *e* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *como no Lema* 4.2.1.

(2) Se U é uma extensão de u então

$$\begin{aligned} \langle U, \varphi \rangle &= t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} \langle U, \varphi_{t,\lambda} \rangle + \left\langle \sum_{|\beta|\le l} (1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}) a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle \\ &+ \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta,\lambda>!} \left\langle u, x^\beta \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

para algum $l \in \mathbb{N}$.

(3) Seja U uma extensão de u na forma do item (2). $U \in \mathcal{H}_{a,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *se, e somente se,* $a_\beta = 0$ *se* $<\beta, \lambda> \neq <\alpha, \lambda>$ *e*

$$<u, x^\beta \psi> = 0 \tag{5.2.2}$$

para $<\beta, \lambda> = <\alpha, \lambda>$. *Observamos também que* (5.2.2) *independe da escolha de* ψ.

(4) Suponha que $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$. *u tem paridade oposta a* $<\alpha, \lambda>$ *se, e somente se,*

$$<u, \varphi> = (\mathrm{sgnt}) t^a <u, \varphi_{t,\lambda}>, \; t \neq 0 \tag{5.2.3}$$

com $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. *Observamos também que neste caso vale* (5.2.2)

(5) Suponha que $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$*. Se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *satisfaz* (5.2.3) *então existe uma única extensão* $\mathcal{E}_1(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *com paridade oposta a* $< \alpha, \lambda >$*. Além disso ela é dada por*

$$\langle \mathcal{E}_1(u), \varphi \rangle = \mathcal{S}\left(\frac{< \underline{t}^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) >}{2} u \right), \tag{5.2.4}$$

sendo $\underline{t}^{-<\alpha,\lambda>} = \frac{(t+i0)^{-<\alpha,\lambda>} + (t-i0)^{-<\alpha,\lambda>}}{2} = t_+^{-<\alpha,\lambda>} + (-1)^{<\alpha,\lambda>}\, t_-^{-<\alpha,\lambda>}$ *e* $\mathcal{S}(v) =< v, \psi >$*.*

Demostração:

(1) Tal como em (5.1.1) do Teorema 5.1.1 definimos $< \mathcal{E}(u), \varphi >=< u, \psi R_b \varphi >$ para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Já mostramos que $\mathcal{E}(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e é uma extensão de u. Assim pelo Lema 5.2.1 temos:

$$\begin{aligned} R_{-<\alpha,\lambda>}\varphi(x) &= t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} R_{-<\alpha,\lambda>}\varphi_{t,\lambda}(x) \\ &+ \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta x^\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{< \beta, \lambda >!}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} < \mathcal{E}(u), \varphi > &= \left\langle u, \psi \left[t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} R_b \varphi_{t,\lambda} + \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta x^\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{< \beta, \lambda >!} \right] \right\rangle \\ &= t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} \langle u, \psi R_b \varphi_{t,\lambda} \rangle + \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \left\langle u, x^\beta \psi \right\rangle \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{< \beta, \lambda >!} \\ &= t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} < \mathcal{E}(u), \varphi_{t,\lambda} > + \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \left\langle u, x^\beta \psi \right\rangle \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{< \beta, \lambda >!}. \end{aligned}$$

(2) Seja $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de u. Usando o Teorema 3.1.1, temos que $U - \mathcal{E}(u) = \sum_{|\beta| \leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0$ com $a_\beta \in \mathbb{C}$ e $l \in \mathbb{N}$.

Substituindo $\mathcal{E}(u)$ por $U - \sum_{|\beta| \leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0$ em (5.2.1) o termo do logaritmo não muda, mas aparece um outro termo, a saber:

$$\sum_{|\beta| \leq l} (1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}) a_\beta \partial^\beta \delta_0. \tag{5.2.5}$$

De fato, temos:

$$\left\langle U - \sum_{|\beta|\leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle = t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} \left\langle U - \sum_{|\beta|\leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi_{t,\lambda} \right\rangle$$
$$+ \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta,\lambda>!} \left\langle u, x^\beta \psi \right\rangle .$$

Mas,

$$-\left\langle \sum_{|\beta|\leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi_{t,\lambda} \right\rangle = -\left\langle \sum_{|\beta|\leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0, t^{|\lambda|} \varphi(H^t_\lambda(x)) \right\rangle$$
$$= -\sum_{|\beta|\leq l} a_\beta (-1)^{|\beta|} \left\langle \delta_0, t^{|\lambda|+<\beta,\lambda>} (\partial^\beta \varphi)(H^t_\lambda(x)) \right\rangle$$
$$= -\sum_{|\beta|\leq l} a_\beta t^{|\lambda|+<\beta,\lambda>} \left\langle \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle .$$

Daí:

$$\langle U, \varphi \rangle = t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} \langle U, \varphi_{t,\lambda} \rangle + \left\langle \sum_{|\beta|\leq l} (1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}) a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle$$
$$+ \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta,\lambda>!} \left\langle u, x^\beta \psi \right\rangle .$$

(3) De (2), U é quase-homogênea se , e somente se,

$$\left\langle \sum_{|\beta|\leq l} (1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}) a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle + \ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta,\lambda>!} < u, x^\beta \psi >= 0,$$

$\forall \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

Como as funções $\left\{(1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}), |\beta| \leq l \ e \ <\beta,\lambda> \neq <\alpha,\lambda> \right\} \bigcup \{\ln(t)\}$ são linearmente independentes, basta verificarmos que $a_\beta = 0$ para $|\beta| \leq l$ se $<\beta,\lambda> \neq <\alpha,\lambda>$ e que $< u, x^\beta \psi >= 0$ quando $<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>$.

Se $|\beta| \leq l$ e $<\beta,\lambda> \neq <\alpha,\lambda>$, assim basta verificarmos

$$\left\langle \sum_{|\beta|\leq l} (1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}) a_\beta \partial^\beta \delta_0, \varphi \right\rangle = 0$$

se, e somente se, $a_\beta = 0 \ \forall |\beta| \leq l$. Mas isto segue da Observação 2.2.1-(i).

Agora para todo β com $<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>$ temos que $(1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}) = 0$, logo resta verificar que $< u, x^\beta \psi >= 0 \ \forall \beta, <\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>$ se

$$\ln(t) \sum_{<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>} b_\beta \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{<\beta,\lambda>!} < u, x^\beta \psi >= 0$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mas isto segue da Observação 2.2.1 $-$ (i).

A recíproca também é válida.

Agora mostraremos que $< u, x^\beta \psi >= 0$ com $< \beta, \lambda >=< \alpha, \lambda >$ independe da escolha de ψ. Primeiramente verifiquemos a afirmação para $\alpha = 0$.

Com efeito, sejam $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ satisfazendo a condição do Lema 4.2.1 então:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^{a+|\lambda|-1}(\psi_1 - \psi_2)(H_\lambda^r(x))\, dr &= \int_0^{+\infty} r^{-1}(\psi_1 - \psi_2)(H_\lambda^r(x))\, dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_1(H_\lambda^r(x))\, dr \\ &- \int_0^{+\infty} r^{-1}\psi_2(H_\lambda^r(x))\, dr \\ &= 0, \end{aligned}$$

assim pelo item (c) do Lema 4.1.1 temos que $< u, (\psi_1 - \psi_2) >= 0$ o que implica que $< u, \psi_1 >=< u, \psi_2 >$,.

Para α arbitrário tomemos $x^\alpha u$ e observemos que $x^\alpha u$ é $\lambda-$homogênea de grau $-|\lambda|$.

De fato,

$$\begin{aligned} < x^\alpha u, \psi > &= < u, x^\alpha \psi > \\ &= t^a < u, (x^\alpha \psi)_{t,\lambda} > \\ &= t^{a+|\lambda|} < u, (H_\lambda^t(x))^\alpha \psi(H_\lambda^t(x)) > \\ &= t^{a+|\lambda|+<\alpha,\lambda>} < u, x^\alpha \psi(H_\lambda^t(x)) > \\ &= t^{-|\lambda|} < x^\alpha u, \psi_{t,\lambda} > . \end{aligned}$$

Portanto, $x^\alpha u$ é quase-homogênea de grau $-|\lambda|$. Logo, $< x^\alpha u, \psi >=< u, x^\alpha \psi >$ independe da escolha de ψ.

(4) Suponhamos que u tenha paridade oposta a $< \alpha, \lambda >$. Se $t > 0$, (5.2.3) é válida, pois $< u, \varphi >= t^a < u, \varphi_{t,\lambda} >$ por hipótese. Agora se $t < 0$, também concluímos que (5.2.3) é válida, pois:

$$\begin{aligned}
<u,\varphi> &= (-t)^a <u,\varphi_{-t,\lambda}> \\
&= (-t)^{a+|\lambda|} <u,\varphi(H_\lambda^{-t}(x))> \\
&= (-t)^{a+|\lambda|}(-1)^{<\alpha,\lambda>+1} <u,\varphi(H_\lambda^{t}(x))> \\
&= t^{a+|\lambda|}(-1)^{a+|\lambda|}(-1)^{<\alpha,\lambda>+1} <u,\varphi(H_\lambda^{t}(x))> \\
&= (-1)t^a <u,\varphi_{t,\lambda}> \\
&= (\mathrm{sgn}t)t^a <u,\varphi_{t,\lambda}>,
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da hipótese de u ter paridade oposta.

Reciprocamente, suponha que (5.2.3) é válida. Tomando $t=-1$,

$$\begin{aligned}
<u,\varphi> &= (\mathrm{sgn}t)t^a <u,\varphi_{t,\lambda}> \\
&= (-1)(-1)^a <u,\varphi_{-1,\lambda}> \\
&= (-1)(-1)^{a+|\lambda|} <u,\varphi(H_\lambda^{-1}(x))> \\
&= (-1)^{<\alpha,\lambda>+1} <u,\varphi(H_\lambda^{-1}(x))> .
\end{aligned}$$

Se u satisfaz (5.2.3) então (5.2.2) é válida. De fato, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tal que $\psi(H_\lambda^1(x)) = \psi(H_\lambda^{-1}(x))$ com ψ satisfazendo a condição do Lema 4.2.1 e tomemos $\phi(x) = x^\beta\psi(x)$, então para $t=-1$, temos,

$$\begin{aligned}
<u,\phi> &= (-1)(-1)^a <u,\phi_{-1,\lambda}> \\
&= (-1)(-1)^a <u,(-1)^{|\lambda|}\phi(H_\lambda^{-1}(x))> \\
&= (-1)(-1)^a <u,(-1)^{|\lambda|}(H_\lambda^{-1}(x))^\beta\psi(H_\lambda^{-1}(x))> \\
&= (-1)(-1)^a <u,(-1)^{|\lambda|+<\beta,\lambda>}x^\beta\psi(H_\lambda^{1}(x))> \\
&= (-1)(-1)^a <u,(-1)^{|\lambda|+<\beta,\lambda>}\phi(x)> \\
&= (-1) <u,\phi>,
\end{aligned}$$

aqui a quarta igualdade segue da hipótese da ψ.

Portanto, $<u,\phi>=0$ quando $<\beta,\lambda>=<\alpha,\lambda>$. Logo por (1) u possui uma extensão quase-homogênea.

Antes de prosseguir na demonstração faremos uma observação que motiva e dá importância ao papel de $\mathcal{S}$.

Observação:

(i) Se v for uma função contínua e $\lambda-$homogênea de grau $-|\lambda|$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ introduzindo coordenadas polares temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(v) &= < v, \psi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} v(x)\psi(x)\, dx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_{|w|=1} r^{-|\lambda|}v(w)\psi(H_\lambda^r(x))r^{|\lambda|}\, dw\frac{dr}{r} \\
&= \int_{|w|=1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \psi(H_\lambda^r(x))\frac{dr}{r}}_{=1} v(w)\, dw \\
&= \int_{|w|=1} v(w)\, dw,
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da $\lambda-$homogeneidade de v. Observemos que $\mathcal{S}(v)$ é a integral de v sobre a esfera unitária.

(ii) Notemos que se u é quase-homogênea de grau a e $a \notin \{-|\lambda|- < \alpha, \lambda >; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, então (5.1.1) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}
< \mathcal{E}(u), \varphi > &= < u, \psi R_b\varphi > \\
&= < (R_b\varphi)u, \psi > \\
&= \mathcal{S}((R_b\varphi)u).
\end{aligned}$$

pois, $(R_b\varphi)u$ é $\lambda-$homogênea de grau $-a - |\lambda| + a = -|\lambda|$.

Quando $a = -|\lambda|- < \alpha, \lambda >$ então (5.1.1) depende da escolha de ψ.

(5) Inicialmente mostremos a unicidade da extensão $\mathcal{E}_1(u)$. Sejam $\mathcal{E}_1(u)$, $\mathcal{E}_2(u)$ extensões de u. Logo $\mathcal{E}_1(u) - \mathcal{E}_2(u) = \sum_{|\beta|\leq l} a_\beta \partial^\beta \delta_0$. Daí

$$\langle \mathcal{E}_1(u) - \mathcal{E}_2(u), \varphi\rangle = (sng(t))t^{-|\lambda|-<\alpha,\lambda>} \langle \mathcal{E}_1(u) - \mathcal{E}_2(u), \varphi_{t,\lambda}\rangle\,,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

pois $\mathcal{E}_1(u)$ e $\mathcal{E}_2(u)$ tem paridade oposta a $< \alpha, \lambda >$.

Logo $\sum_{|\beta|\leq l} \left(1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}(sgnt)\right)(-1)^{|\beta|}a_\beta(\partial^\beta\varphi)(0) = 0$ o que implica que para cada β, com $|\beta| \leq l$, temos que $\left(1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}(sgnt)\right)a_\beta = 0$. Logo,

$a_\beta = 0\ \forall \beta$, pois $\big(1 - t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}(sgnt)\big) = 0\ \forall t \neq 0$ uma vez que a função $h(t) = t^{<\beta,\lambda>-<\alpha,\lambda>}(sgnt)$, $t \neq 0$, não é constante.

Portanto, $\mathcal{E}_1(u) = \mathcal{E}_2(u)$.

Agora mostremos a existência de uma tal extensão de u.

Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned}
< \underline{t}^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > &= \Big\langle t_+^{-<\alpha,\lambda>-1} \\
&+ (-1)^{<\alpha,\lambda>+1} t_-^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot))\Big\rangle \\
&= < t_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > \\
&+ (-1)^{<\alpha,\lambda>+1} < t_-^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > \\
&= < t_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > \\
&+ (-1)^{<\alpha,\lambda>-1} < t_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^{-t}(\cdot)) > .
\end{aligned}$$

Seja U uma extensão de u logo ela é escrita como (5.1.1) então (5.2.4) significa que

$$2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi > = < U, \varphi > + (-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < U, \varphi_{-1,\lambda} >,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{S}\left(< \frac{\underline{t}^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) >}{2} u \right) &= \mathcal{S}\Big(\Big[< t_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > \\
&+ (-1)^{<\alpha,\lambda>-1} < t_-^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > \Big] u\Big) \\
&= \mathcal{S}\Big(\Big[< t_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^t(\cdot)) > \\
&+ (-1)^{<\alpha,\lambda>-1} < t_+^{-<\alpha,\lambda>-1}, \varphi(H_\lambda^{-t}(\cdot)) > \Big] u\Big) \\
&= \big\langle \big(R_b\varphi + (-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} R_b\varphi_{-1,\lambda}\big) u, \psi \big\rangle \\
&= < U, \varphi > + (-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < U, \varphi_{-1,\lambda} >,
\end{aligned}$$

aqui a terceira igualdade segue da definição de $\mathcal{S}$, pois $\big(R_b\varphi + (-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} R_b\varphi_{-1,\lambda}\big)$ é $\lambda-$homogênea de grau $<\alpha, \lambda>$ e u é λ-homogênea de grau $- < \alpha, \lambda > -|\lambda|$, logo pela Observação 2.1.1 item (ii) temos $\big(R_b\varphi + (-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} R_b\varphi_{-1,\lambda}\big) u$ é $\lambda-$homogênea de grau $-|\lambda|$.

Afirmação: (5.2.4) define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, é uma extensão de u e tem paridade oposta a $<\alpha,\lambda>$. Para demonstrar este fato, dividiremos em passos:

Passo 1: Afirmamos que $\mathcal{E}_1(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De fato, claramente $\mathcal{E}_1(u)$ é um funcional linear.

Temos que $\mathcal{E}_1(u)$ é um funcional contínuo, pois U é um funcional contínuo e soma de contínuos é contínuo.

Portanto, $\mathcal{E}_1(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Passo 2: $\mathcal{E}_1(u)$ é uma extensão de u.

De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então $2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi >= 2 < U, \varphi >$ por (5.2.3) tomando $t = -1$. Assim temos que:

$$\begin{aligned} 2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi > &= < U, \varphi > +(-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < U, \varphi_{-1,\lambda} > \\ &= < U, \varphi > + < U, \varphi > \\ &= 2 < U, \varphi > . \end{aligned}$$

Portanto, $< \mathcal{E}_1(u), \varphi >=< U, \varphi >$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Logo, $\mathcal{E}_1(u)$ é uma extensão de u, isto é, $< \mathcal{E}_1(u), \varphi >=< U, \varphi >=< u, \varphi >$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Passo 3: $\mathcal{E}_1(u)$ tem paridade oposta $<\alpha,\lambda>$.

De fato, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tomando $t = -1$ temos:

$$\begin{aligned} 2 < \mathcal{E}_1(u), \varphi_{-1,\lambda} > &= < U, \varphi_{-1,\lambda} > +(-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < U, \varphi > \\ &= 2(-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < \mathcal{E}_1(u), \varphi > -(-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < U, \varphi > \\ &+ (-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < U, \varphi > \\ &= 2(-1)^{<\alpha,\lambda>+|\lambda|-1} < \mathcal{E}_1(u), \varphi > . \end{aligned}$$

Portanto, $< \mathcal{E}_1(u), \varphi >= (-1)^{<\alpha,\lambda>+1} < \mathcal{E}_1(u), \varphi(H_\lambda^{-1}(x)) > .$ ■

Referências Bibliográficas

[F] Figueiredo, D.G e Treves, J.F., **Espaços Vetoriais Topológicos E Distribuições**, IMPA, Rio de Janeiro, 1968.

[G] Gabriel, C.P.C., **Extensões de Soluções Homogêneas de Uma Classe de Operadores Diferencias Parciais Reais de Ordem UM**, Dissertação de Mestrado, Gráfica UFSCAR, São Carlos, 2005.

[Ho] Hounie, J., **Teoria Elementar das Distribuições**, 12° Col. Bras. Mat.,IMPA , Rio de Janeiro, 1979.

[Hö] Hörmander, L., **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[L] Lima, E.L., **Curso de Análise**, Vol.1, 2, IMPA , Rio de Janeiro, 2005.

[O] Onofre, J., **Resolubilidade para Operadores Diferenciais: Condições Necessárias**, Dissertação de Mestrado, Gráfica UFSCAR, São Carlos, 2002.

[R] Rudin, W. , **Real and Complex Analysis**, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 1979.