

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**A Transformação de Darboux-Bianchi para  
Superfícies Isotérmicas em  $\mathbb{R}^3$**

Samuel da Cruz Canevari

São Carlos - SP

Abril - 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**A Transformação de Darboux-Bianchi para  
Superfícies Isotérmicas em  $\mathbb{R}^3$**

Samuel da Cruz Canevari

Dissertação apresentada ao  
PPG-M da UFSCar como  
parte dos requisitos para  
a obtenção do título de  
Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Abril - 2004

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C215td

Canevari, Samuel da Cruz.

A transformação de Darboux-Bianchi para superfícies isotérmicas em  $\mathbb{R}^3$  / Samuel da Cruz Canevari. -- São Carlos : UFSCar, 2004.

109 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Geometria diferencial. 2. Redes isotérmicas. 3. Superfícies isotérmicas. 4. Problema de Christoffel. 5. Transformação de Ribaucour. 6. Transformação de Darboux-Bianchi. I. Título.

CDD: 516.36 (20ª)

**Orientador**

---

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

*Dedico este trabalho aos  
meus pais*

***Francisco e Salete***

*e aos meus irmãos*

***Thiago e Glauco.***

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo.

Em primeiro lugar, agradeço de coração aos meus pais, Francisco e Salete, e aos meus irmãos Thiago e Glauco, pelo amor, compreensão, carinho e incentivo.

À minha namorada Raíssa, pelo amor, paciência, incentivo e pela pessoa fantástica que é.

Sou sinceramente grato ao amigo e orientador Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior, pelo profissionalismo e incentivo a mim dedicado, através de sua grande experiência e admirável conhecimento matemático.

Ao Paulão e ao Zé Paulo, pela companhia na republica.

Às secretárias Célia e Irma, pela dedicação.

Aos professores do Departamento de Matemática, em especial, Guilherme, Dirceu, Claudia, Ruidival, Cesar e Marcelo.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp de Presidente Prudente, em especial ao Gabriel, Marcelo Messias e ao Zé Roberto.

A todos meus amigos, onde quer que estejam, que me acompanha-

ram e muito ajudaram a tornar esse sonho realidade em minha vida; em especial ao Ion, Marcelo (Gaúcho), Fernando Manfio, Doni, Gustavinho, Lau, Kelly, Elisandra, Ana Claudia, Rafael, Gustavo, Mauricio, Renato e aos meus amigos da graduação Clécia, João Paulo, Cassio, Olivaine, Kemelli e Dayane.

Finalmente agradeço a FAPESP, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos a teoria de transformações entre superfícies isotérmicas no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  devida a Darboux e Bianchi. Descrevemos, como consequência, um método de obter novas soluções do sistema não linear de equações diferenciais parciais associado a uma superfície isotérmica em  $\mathbb{R}^3$ , a partir de uma dada.



# Abstract

In this work we develop the transformation theory for isothermic surfaces in Euclidean space  $\mathbb{R}^3$  due to Darboux and Bianchi. As a consequence, we describe a method for constructing new solutions of the nonlinear system of partial differential equations associated to an isothermic surface in  $\mathbb{R}^3$  starting from a given one.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria local de superfícies em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>5</b>
1.1 Superfícies regulares . . . . .	5
1.2 Derivação de campos de vetores . . . . .	9
1.3 A segunda forma fundamental . . . . .	19
1.4 As equações de Gauss e Codazzi-Mainardi . . . . .	22
1.5 Teorema Fundamental das Superfícies . . . . .	25
1.6 Gradiente, Hessiano e Laplaciano . . . . .	28
<b>2 Superfícies Isotérmicas em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>33</b>
2.1 Aplicações conformes . . . . .	33
2.2 Sistemas de coordenadas isotérmicos . . . . .	39
2.3 Redes Isotérmicas . . . . .	43
2.4 Tensores de Codazzi . . . . .	48
2.5 Superfícies Isotérmicas; exemplos . . . . .	53
2.6 Superfícies isotérmicas em coordenadas principais isotérmicas .	63

<b>3</b>	<b>Transformações de Superfícies</b>	<b>67</b>
3.1	O Problema de Christoffel . . . . .	68
3.2	A Transformação de Ribaucour . . . . .	83
3.3	A Transformação de Darboux-Bianchi . . . . .	99
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Introdução

Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é *isotérmica* se em uma vizinhança de qualquer ponto não umbílico existe um sistema de coordenadas conforme cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura.

A teoria de superfícies isotérmicas teve um grande ímpeto na segunda metade do século XIX e início do século XX, com importantes contribuições de eminentes geômetras como Christoffel [3], Darboux [5], [6] e Bianchi [9], dentre outros. Em seguida, após algumas décadas de pouca atividade, a teoria voltou a despertar interesse em virtude de sua conexão com a teoria moderna de sistemas integráveis (cf. [1], [2], [7], [8]). Uma característica de tal classe de sistemas é a existência de transformações de Bäcklund, ou seja, processos de gerar famílias de novas soluções de um sistema não linear de equações diferenciais parciais a partir de uma dada, em termos de soluções de um sistema linear cujas equações de compatibilidade são precisamente as equações do sistema original. Para os sistemas associados a superfícies isotérmicas, a existência de tais transformações é consequência da teoria geométrica de transformações entre tais superfícies, desenvolvida por Darboux

e Bianchi.

O principal objetivo deste trabalho é fazer uma apresentação desta teoria. Mais geralmente, fazemos uma apresentação da chamada *transformação de Ribaucour* entre superfícies regulares do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , da qual a transformação entre superfícies isotérmicas pode ser obtida. Como consequência, descrevemos o método geométrico de obtenção de novas soluções dos sistemas de equações diferenciais parciais associados a tais superfícies, a partir de uma dada.

Descrevemos a seguir o conteúdo de cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 1 encontram-se tópicos elementares da teoria local de superfícies regular em  $\mathbb{R}^3$  que serão necessários aos capítulos seguintes. Em particular, obtemos as equações fundamentais de Gauss e Codazzi-Mainardi de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ , e damos uma demonstração do Teorema Egregium de Gauss. Expressamos as equações fundamentais em coordenadas e enunciamos o teorema fundamental das superfícies.

Iniciamos o Capítulo 2 introduzindo alguns conceitos básicos sobre aplicações conformes entre subconjuntos abertos do espaço Euclidiano. Na seção seguinte esboçamos uma demonstração, segundo [9], da existência de sistemas de coordenadas isotérmicos em uma superfície regular arbitrária em  $\mathbb{R}^3$ . Em seguida, introduzimos a noção de redes isotérmicas em uma superfície regular e mostramos uma caracterização de quando as famílias de curvas coordenadas de um sistema ortogonal determinam uma rede isotérmica. Na seção seguinte estudamos tensores de Codazzi em uma superfície regular

e, em particular, apresentamos uma caracterização em termos de seus autovalores de quando a rede determinada por seus auto-espacos é isotérmica (cf. [15], [16]). Tais resultados são então utilizados na obtenção de importantes exemplos de superfícies isotérmicas: superfícies com curvatura média constante, quádricas, superfícies cujas linhas de curvatura têm curvatura geodésica constante, em particular as cíclides de Dupin. Finalmente, os sistemas de equações diferenciais parciais associados a superfícies isotérmicas são obtidos na última seção.

No Capítulo 3, apresentamos inicialmente a solução do problema proposto por Christoffel de determinar os pares de superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$  entre as quais existe um difeomorfismo conforme com a propriedade de que os planos tangentes em pontos correspondentes são paralelos. Mostramos que tal problema conduz naturalmente à noção de transformação de Combescure entre superfícies regulares, que corresponde ao caso em que o difeomorfismo no problema de Christoffel preserva linhas de curvatura. Descrevemos uma interessante relação entre tal transformação e tensores de Codazzi na superfície, observada em [12]. Em seguida, estudamos a transformação de Ribaucour para superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ . Classicamente, duas superfícies estão relacionadas por uma transformação de Ribaucour quando são as envoltórias de uma congruência de esferas a 2-parâmetros com a propriedade de que a correspondência natural entre ambas preserva as linhas de curvatura. Seguindo a abordagem de [11] e [12], descrevemos sistemas de coordenadas principais de todas as transformadas de Ribaucour de uma superfície regular

dada, em termos de soluções de um sistema linear de equações diferenciais parciais. Usamos então tal descrição para obter um resultado análogo para superfícies isotérmicas de  $\mathbb{R}^3$  (cf. [9]). Como consequência, deduzimos um método de obter novas soluções dos sistemas de equações diferenciais parciais não lineares associados a tais superfícies, a partir de uma dada. Finalmente, fazemos um exemplo explícito de aplicação da teoria desenvolvida.

# Capítulo 1

## Teoria local de superfícies em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos sobre superfícies regulares no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  que serão utilizados nos capítulos posteriores.

### 1.1 Superfícies regulares

Nesta seção introduzimos as definições e propriedades elementares de superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.1** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se, para cada  $p \in S$ , existem uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ , definida em um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , tais que:



- (a)  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo;
- (b)  $\mathbf{x}$  é uma imersão, ou seja,  $\mathbf{x}$  é uma aplicação diferenciável e, para cada  $q \in U$ , a transformação linear  $d\mathbf{x}(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora.

Dizemos que a aplicação  $\mathbf{x}$  define um *sistema de coordenadas* na superfície  $S$ .

**Exemplo 1.1** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida no subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . O conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in U, z = f(x, y)\},$$

gráfico da função  $f$ , é uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$ , imagem de um único sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \rightarrow G$  dado por  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ .

**Exemplo 1.2** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Se  $c \in \mathbb{R}$  é valor regular de  $f$ , ou seja,  $\nabla f(p) \neq 0$  para todo  $p \in f^{-1}(c)$ , então  $f^{-1}(c)$  é uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$ . De fato, decorre do Teorema da Função Implícita que, para cada ponto  $p \in f^{-1}(c)$ , existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^3$  contendo  $p$  tal que  $V \cap f^{-1}(c)$  é o gráfico de uma aplicação diferenciável definida num aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.2** Uma aplicação  $f : S_1 \rightarrow S_2$  entre as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  é diferenciável em  $p \in S_1$  se existem sistemas de coordenadas  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  e  $\mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  tais que  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ ,  $f(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$  e a aplicação  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$  é diferenciável em  $\mathbf{x}_1^{-1}(p)$ .

A definição acima não depende da escolha dos sistemas de coordenadas  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ . Isso decorre do seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [13].

**Lema 1.1** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e sejam  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  sistemas de coordenadas de  $S$  tais que  $p \in \mathbf{x}_1(U_1) \cap \mathbf{x}_2(U_2) = W$ . Então a aplicação  $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_2^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}_1^{-1}(W)$ , chamada de mudança de coordenadas, é um difeomorfismo.*

É possível mostrar que  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é diferenciável se, e somente se, para cada  $p \in S_1$  existem um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  contendo  $p$  e uma aplicação diferenciável  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $F|_{U \cap S_1} = f|_{U \cap S_1}$ .

Sejam  $S$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Um vetor tangente a  $S$  no ponto  $p$  é o vetor tangente  $\alpha'(0)$  de uma curva diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$ . A proposição seguinte mostra que, para todo  $p \in S$ , o conjunto dos vetores tangentes a  $S$  em  $p$  é um plano.

**Proposição 1.1** *Sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  um sistema de coordenadas em uma superfície regular  $S$  e  $q \in U$ . Então o conjunto dos vetores tangentes a  $S$  em  $\mathbf{x}(q)$  coincide com o subespaço vetorial  $d\mathbf{x}(q)\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .*

**Demonstração:** Dado  $p = \mathbf{x}(q) \in S$ , seja  $X_p$  um vetor tangente a  $S$  em  $p$ , isto é,  $X_p = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X(U) \subset S$  é uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$ . Então,  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow U$  é uma curva diferenciável e

$$d\mathbf{x}(q)\beta'(0) = d\mathbf{x}(q)(d\mathbf{x}^{-1}(\alpha(0))\alpha'(0)) = \alpha'(0) = X_p.$$

Assim,  $X_p \in d\mathbf{x}(q)\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, seja  $X_p = d\mathbf{x}(q)v$ , onde  $v \in \mathbb{R}^2$ . Observe que  $v$  é o vetor tangente, em  $t = 0$ , da curva diferenciável  $\lambda : I \rightarrow U$  dada por  $\lambda(t) = tv + q$ . Definindo  $\alpha = \mathbf{x} \circ \lambda$ , obtemos

$$X_p = d\mathbf{x}(q)\lambda'(0) = \alpha'(0),$$

logo  $X_p$  é um vetor tangente a  $S$  no ponto  $p$ . □

Segue da Proposição 1.1 que o subespaço  $d\mathbf{x}(q)\mathbb{R}^2$  não depende do sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$ . Tal subespaço é chamado de *plano tangente* a  $S$  em  $p$ , e é denotado por  $T_pS$ . O sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$  determina uma base  $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}(q), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}(q)\}$  de  $T_pS$ , a qual é também denotada por  $\{\frac{\partial}{\partial u_1}(p), \frac{\partial}{\partial u_2}(p)\}$ , onde  $u_1, u_2$  são as coordenadas locais em  $S$ .

Definiremos agora a diferencial  $df(p) : T_pS_1 \rightarrow T_{f(p)}S_2$  em um ponto  $p \in S_1$  de uma aplicação diferenciável  $f : S_1 \rightarrow S_2$  entre duas superfícies regulares, como segue: seja  $w \in T_pS_1$ , temos que  $w = \alpha'(0)$  para alguma curva diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1$  tal que  $\alpha(0) = p$ . Então  $\beta = f \circ \alpha$  é uma curva diferenciável em  $S_2$  tal que  $\beta(0) = f(p)$  e, portanto,  $\beta'(0) \in T_{f(p)}S_2$ . Como é fácil ver que  $\beta'(0)$  não depende da escolha de  $\alpha$ , temos que a diferencial de  $f$  em  $p$  é bem definida. Também pode-se verificar que  $df(p)$  definida por  $df(p)w = \beta'(0)$ , é linear.

## 1.2 Derivação de campos de vetores

Um campo de vetores diferenciável definido em um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . O conjunto de todos os campos diferenciáveis  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidos no aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  será denotado por  $\mathfrak{X}(U)$ .

**Definição 1.3** Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , definimos  $\tilde{\nabla}_X Y$  como o campo de vetores em  $U$  dado por

$$\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)(p) = \frac{d}{dt} Y(c(t))|_{t=0}, \quad (1.1)$$

onde  $p \in U$  e  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  é uma curva diferenciável tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ .

Decorre da expressão (1.1) que  $\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)(p)$  depende apenas de  $X_p$  e dos valores de  $Y$  ao longo de uma curva diferenciável  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Em particular, está bem definido  $\tilde{\nabla}_{X_p} Y$  para um vetor  $X_p$  em  $p \in U$ . Se  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_p} Y &= \left( \frac{d}{dt} Y_1(c(t))|_{t=0}, \frac{d}{dt} Y_2(c(t))|_{t=0}, \frac{d}{dt} Y_3(c(t))|_{t=0} \right) \\ &= (X_p(Y_1), X_p(Y_2), X_p(Y_3)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Aqui,  $X_p$  é “visto” como uma derivação em  $C^\infty(U)$ :

$$\begin{aligned} X_p &: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto X_p(\varphi) = \frac{d}{dt} \varphi(c(t))|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_p}(p) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) X_i(p), \end{aligned}$$

onde  $X_p = (X_1(p), X_2(p), X_3(p))$ . Dados  $X \in \mathfrak{X}(U)$  e  $\varphi \in C^\infty(U)$ , denotamos por  $X(\varphi) : U \rightarrow \mathbb{R}$ , ou simplesmente  $X\varphi$ , a função dada por  $X(\varphi)(p) = X_p(\varphi)$  para todo  $p \in U$ .

**Proposição 1.2** *Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , existe um único  $Z \in \mathfrak{X}(U)$  tal que, para toda função  $\varphi \in C^\infty(U)$ , tem-se*

$$Z\varphi = (XY - YX)\varphi. \quad (1.3)$$

**Demonstração:** Se  $X = (X_1, X_2, X_3)$  e  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ , então usando coordenadas locais, temos

$$XY\varphi = X \left( \sum_{j=1}^3 Y_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^3 X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^3 X_i Y_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

e

$$YX\varphi = Y \left( \sum_{i=1}^3 X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^3 Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 X_i Y_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Logo,

$$(XY - YX)\varphi = \sum_{i,j=1}^3 \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Portanto, o campo  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$  tal que  $Z_j = \sum_{i=1}^3 \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)$  é o único campo em  $\mathfrak{X}(U)$  que satisfaz (1.3).  $\square$

O campo  $Z$  é chamado de *colchete de Lie* dos campos  $X$  e  $Y$  e é denotado por  $[X, Y]$ .

**Observação 1.1** Seja  $\mathbf{x} : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow U$  um sistema de coordenadas definido no aberto  $W \subset \mathbb{R}^3$ , ou seja,  $\mathbf{x}$  é um difeomorfismo do aberto  $W$

no aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Sejam  $\frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , os campos coordenados em  $U$  associados a  $\mathbf{x}$ , isto é,  $\frac{\partial}{\partial u_i}(\mathbf{x}(p)) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}(p)$ . Logo dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , podemos escrever  $X = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $Y = \sum_{j=1}^3 b_j \frac{\partial}{\partial u_j}$ , onde  $a_i, b_j \in C^\infty(U)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ . Portanto, a demonstração da Proposição 1.2 mostra, mais geralmente, que

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^3 \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial u_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \right) \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (1.4)$$

**Proposição 1.3** *Para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$  e  $f \in C^\infty(U)$ , valem:*

- a)  $\tilde{\nabla}_{fX}Y = f\tilde{\nabla}_X Y$ ,
- b)  $\tilde{\nabla}_X fY = X(f)Y + f\tilde{\nabla}_X Y$ ,
- c)  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle$ ,
- d)  $\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X, Y]$ .

Além disso, se  $\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$  também satisfaz as propriedades acima, então  $\bar{\nabla} = \tilde{\nabla}$ .

**Demonstração:** Se  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ , então de (1.2), temos

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\nabla}_{fX} Y \right) (p) &= (f(p)X_p Y_1, f(p)X_p Y_2, f(p)X_p Y_3) \\ &= f(p)(X_p Y_1, X_p Y_2, X_p Y_3) \\ &= f(p) \left( \tilde{\nabla}_X Y \right) (p) \end{aligned}$$

para todo  $p \in U$ , e

$$\begin{aligned}
 \left( \tilde{\nabla}_X fY \right) (p) &= (X_p(fY_1), X_p(fY_2), X_p(fY_3)) \\
 &= (X_p(f)Y_1 + f(p)X_p(Y_1), \dots, X_p(f)Y_3 + f(p)X_p(Y_3)) \\
 &= X_p(f)(Y_1, Y_2, Y_3) + f(p)\tilde{\nabla}_{X_p} Y \\
 &= \left( X(f)Y + f\tilde{\nabla}_X Y \right) (p),
 \end{aligned}$$

o que mostra a) e b), respectivamente. A fórmula em c) decorre de

$$\begin{aligned}
 X\langle Y, Z \rangle(p) &= X_p \left( \sum_{i=1}^3 Y_i Z_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 (X_p(Y_i)Z_i(p) + Y_i(p)X_p(Z_i)) \\
 &= \langle \tilde{\nabla}_{X_p} Y, Z_p \rangle + \langle Y_p, \tilde{\nabla}_{X_p} Z \rangle.
 \end{aligned}$$

Escrevendo agora  $\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = (W_1, W_2, W_3)$ . Por (1.2), temos que

$$W_i(p) = X_p(Y_i) - Y_p(X_i) = \sum_{j=1}^3 \left( X_j(p) \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(p) - Y_j(p) \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right),$$

e daí a fórmula em d) decorre de (1.4).

Suponhamos agora que  $\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$  satisfaz as condições

a),...,d). Pela propriedade c), temos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle \tag{1.5}$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y Z, X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle \tag{1.6}$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_Z X, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_Z Y \rangle, \tag{1.7}$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ . Somando (1.5) com (1.6) e subtraindo (1.7), e usando a propriedade d), obtemos

$$\begin{aligned} & X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Analogamente, a formula de Koszul (1.8) vale para  $\tilde{\nabla}$ , isto é

$$\begin{aligned} 2\langle \tilde{\nabla}_Y X, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Portanto, de (1.8) e (1.9), temos que  $\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle = \langle \tilde{\nabla}_Y X, Z \rangle$  para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ , ou seja,  $\bar{\nabla} = \tilde{\nabla}$ .  $\square$

**Proposição 1.4** *Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Então*

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z = 0. \quad (1.10)$$

**Demonstração:** Como

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = \tilde{\nabla}_X (YZ_1, YZ_2, YZ_3) = (XYZ_1, XYZ_2, XYZ_3)$$

e, analogamente,  $\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = (YXZ_1, YXZ_2, YXZ_3)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z &= (XYZ_1 - YXZ_1, XYZ_2 - YXZ_2, XYZ_3 - YXZ_3) \\ &= ([X, Y]Z_1, [X, Y]Z_2, [X, Y]Z_3) = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$



□

Seja agora  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Um campo de vetores diferenciável ao longo de  $S$  é uma aplicação diferenciável  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Assim, para cada  $p \in S$ , existem um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  contendo  $p$  e um campo de vetores  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$  tais que  $\tilde{X}|_{S \cap U} = X|_{S \cap U}$ . Diz-se que  $X$  é um *campo tangente* a  $S$  se  $X_p \in T_p S$  para todo  $p \in S$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}(S)$  o conjunto dos campos diferenciáveis tangentes a  $S$ .

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ , defina

$$[X, Y](p) = [\tilde{X}, \tilde{Y}](p), \quad (1.11)$$

onde  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  são extensões diferenciáveis de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, a um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  contendo  $p$ . A proposição seguinte mostra, em particular, que  $[X, Y]$  está bem definido por (1.11), ou seja, que o lado direito da igualdade de (1.11) independe das extensões escolhidas.

**Proposição 1.5** *Sejam  $S$  uma superfície regular,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$  um sistema de coordenadas em  $S$  e  $X = \sum_{i=1}^2 a_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $Y = \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(V)$ , onde  $\frac{\partial}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial}{\partial u_2}$  são os campos coordenados associados a  $\mathbf{x}$ . Então*

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^2 \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial u_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (1.12)$$

*Em particular,  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(V)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{x}(u_1, u_2) + u_3 N(\mathbf{x}(u_1, u_2)),$$

onde  $N$  é um campo diferenciável unitário normal a  $S$  em  $V$ . Temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{u_1} &= \mathbf{x}_{u_1} + u_3 N_{u_1}, \\ \varphi_{u_2} &= \mathbf{x}_{u_2} + u_3 N_{u_2}, \\ \varphi_{u_3} &= N.\end{aligned}$$

onde  $\varphi_{u_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$ ,  $\mathbf{x}_{u_i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$  e  $N_{u_i} = \frac{\partial N}{\partial u_i}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Como  $\mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2}, N$  são linearmente independentes, segue que  $\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}, \varphi_{u_3}$  são linearmente independentes para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Assim, restringindo  $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  se necessário, podemos supor que  $\varphi$  é um difeomorfismo sobre  $\tilde{V} = \varphi(U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ . Denotemos por  $\frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_1}, \frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_2}$  e  $\frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_3}$  os campos coordenados associados a  $\varphi$ , isto é,  $\frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_i}(\varphi(q)) = \varphi_{u_i}(q)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Observe que  $\frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_i}|_V = \frac{\partial}{\partial u_i}$  para  $1 \leq i \leq 2$ .

Sejam  $\tilde{X} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_i}, \tilde{Y} = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_i}$  extensões de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial u_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \right) \right) \frac{\widetilde{\partial}}{\partial u_j}.$$

Portanto,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V = \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^2 \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial u_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

□

**Corolário 1.1** *Se  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$  é um sistema de coordenadas e  $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}$  são os campos coordenados associados a  $\mathbf{x}$ , então*

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \right] = 0.$$

**Demonstração:** Decorre imediatamente de (1.12).  $\square$

Seja  $\psi : S_1 \rightarrow S_2$  é um difeomorfismo entre as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$ . Dado  $X \in \mathfrak{X}(S_1)$  denotamos por  $\psi_*X$  o campo de vetores tangentes a  $S_2$  dado por  $\psi_*X(\psi(p)) = d\psi(p)X_p$ , para todo  $p \in S_1$ .

**Corolário 1.2** *Seja  $\psi : S_1 \rightarrow S_2$  um difeomorfismo entre as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$ . Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(S_1)$ , temos que*

$$[\psi_*X, \psi_*Y] = \psi_*[X, Y]. \quad (1.13)$$

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S_1$  um sistema de coordenadas em  $S_1$  e sejam  $X|_V = \sum_{i=1}^2 a_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $Y|_V = \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial}{\partial u_i}$  as expressões de  $X$  e  $Y$  em  $V$ , respectivamente, em termos dos campos coordenados associados a  $\mathbf{x}$ . Seja  $\mathbf{y} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \psi(V) \subset \psi(S_1) = S_2$  o sistema de coordenadas em  $S_2$  dado por  $\mathbf{y} = \psi \circ \mathbf{x}$ . Então, os campos coordenados  $\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}$  associados a  $\mathbf{y}$  são dados por

$$\frac{\partial}{\partial v_i} = \psi_* \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi_*X|_{\psi(V)} &= \sum_{i=1}^2 \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \\ \psi_*Y|_{\psi(V)} &= \sum_{i=1}^2 \tilde{b}_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{a}_i \circ \psi = a_i$  e  $\tilde{b}_i \circ \psi = b_i$ . Portanto, (1.13) segue de (1.12).  $\square$

Se  $X$  é um campo diferenciável tangente a  $S$  e  $Y$  é um campo diferenciável ao longo de  $S$ , a derivada  $\tilde{\nabla}_X Y$  dada por

$$\left( \tilde{\nabla}_X Y \right) (p) = \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right) (p),$$

onde  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são extensões diferenciáveis de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  contendo  $p$ , está bem definida, uma vez que tal expressão independe das extensões  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ . Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ , definimos  $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(S)$  por

$$(\nabla_X Y)(p) = \left( \tilde{\nabla}_X Y \right)^T(p),$$

onde  $\left( \tilde{\nabla}_X Y \right)^T$  denota a componente tangente de  $\left( \tilde{\nabla}_X Y \right)$ .

**Proposição 1.6** *As seguintes propriedades são satisfeitas para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S), f \in C^\infty(S)$ :*

- a)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$
- b)  $\nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y,$
- c)  $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$
- d)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$

Além disso, se  $\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$  também satisfaz as propriedades acima, então  $\bar{\nabla} = \nabla$ .

**Demonstração:** Para as propriedades a), b) e d) basta tomar as componentes tangentes das fórmulas a), b) e d), respectivamente, da Proposição 1.3. A fórmula c) segue imediatamente da fórmula c) da Proposição 1.3. Finalmente a última afirmação segue de forma análoga à Proposição 1.3.  $\square$

**Corolário 1.3** *Se  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria local entre as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  e  $\nabla^1, \nabla^2$  denotam as derivadas de campos de vetores em  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, então*

$$f_* \left( \nabla_X^1 Y \right) = \nabla_{f_* X}^2 f_* Y. \tag{1.14}$$

**Demonstração:** Como  $f$  é uma isometria local, podemos definir

$$\bar{\nabla}_X Y = f_*^{-1} (\nabla_{f_* X}^2 f_* Y). \quad (1.15)$$

para cada  $X, Y \in \mathfrak{X}(S_1)$ . Daí, um cálculo direto mostra que  $\bar{\nabla}$  satisfaz as condições a),...,d) da Proposição 1.6. Por exemplo, a propriedade d) decorre de

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X &= f_*^{-1} (\nabla_{f_* X}^2 f_* Y - \nabla_{f_* Y}^2 f_* X) \\ &= f_*^{-1} ([f_* X, f_* Y]) \\ &= f_*^{-1} (f_* [X, Y]) = [X, Y], \end{aligned}$$

usando o Corolário 1.2. Logo, pela unicidade,  $\bar{\nabla} = \nabla^1$ . □

Uma 1-forma  $\omega$  em  $S$  é uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \omega : S &\longrightarrow \cup_{p \in S} (T_p S)^* \\ p &\longmapsto \omega_p. \end{aligned}$$

A derivada covariante de  $\omega$  é definida por:

$$\nabla \omega(X, Y) = X \omega(Y) - \omega(\nabla_X Y) \quad (1.16)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ . O valor de  $\nabla \omega(X, Y)$  no ponto  $p \in S$ , onde  $\omega(Y)$  é definida por  $\omega(Y)(p) = \omega_p(Y_p) \in \mathbb{R}$ , depende apenas de  $X_p$  e  $Y_p$ , logo faz sentido escrever  $\nabla \omega(X_p, Y_p)$ , isto é,  $\nabla \omega$  define, para cada ponto  $p \in S$ , uma aplicação bilinear  $\nabla \omega(p) : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$ .

A derivada exterior da 1-forma  $\omega$  é a 2-forma definida por:

$$d\omega(X, Y) = \nabla \omega(X, Y) - \nabla \omega(Y, X) \quad (1.17)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ . Usando (1.16) em (1.17), obtemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y) - Y\omega(X) + \omega(\nabla_Y X) \\ &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Se  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  é uma 1-forma em  $S$  com valores em  $\mathbb{R}^3$ , definimos

$$d\omega(X, Y) = (d\omega_1(X, Y), d\omega_2(X, Y), d\omega_3(X, Y))$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ . Decorre de (1.18) que

$$d\omega(X, Y) = \tilde{\nabla}_X \omega(Y) - \tilde{\nabla}_Y \omega(X) - \omega([X, Y]) \quad (1.19)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ .

### 1.3 A segunda forma fundamental

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ , definimos

$$\alpha(X, Y) = \left( \tilde{\nabla}_X Y \right)^\perp, \quad (1.20)$$

onde  $\left( \tilde{\nabla}_X Y \right)^\perp$  denota a componente normal de  $\tilde{\nabla}_X Y$ . Tomando componentes normais na equação

$$\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X, Y]$$

e usando o fato que  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(S)$ , obtemos que  $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$ . Portanto, como  $\left( \tilde{\nabla}_X Y \right)^\perp(p)$  depende apenas de  $X_p$ , decorre da simetria de  $\alpha$  que

$\alpha(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X_p$  e  $Y_p$ . Assim, para cada  $p \in S$ , temos uma aplicação bilinear simétrica

$$\alpha_p : T_p S \times T_p S \rightarrow (T_p S)^\perp$$

dada por  $\alpha_p(X_p, Y_p) = \alpha(X, Y)(p)$ . Se  $N_p$  é um vetor normal unitário a  $S$  em  $p$ , podemos definir o operador  $A : T_p S \rightarrow T_p S$  auto-adjunto por

$$\langle AX_p, Y_p \rangle = \langle \alpha_p(X_p, Y_p), N_p \rangle$$

para quaisquer  $X_p, Y_p \in T_p S$ . O operador linear  $A$  é chamado de *segunda forma fundamental* da superfície regular  $S$ .

**Proposição 1.7**  $AX_p = -\tilde{\nabla}_{X_p} N$  para todo  $X_p \in T_p S$ , onde  $N$  é um campo unitário diferenciável normal a  $S$  em uma vizinhança de  $p$ .

**Demonstração:** Para quaisquer  $X_p, Y_p \in T_p S$  temos

$$\langle AX_p, Y_p \rangle = \langle \alpha_p(X_p, Y_p), N_p \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{X_p} Y, N_p \rangle = \langle -\tilde{\nabla}_{X_p} N, Y_p \rangle.$$

□

Se  $S$  é uma superfície regular *orientada*, ou seja, existe um campo diferenciável unitário  $N$  normal a  $S$ , então o campo  $N$  pode ser visto como uma aplicação

$$\begin{aligned} N : S &\rightarrow S^2(1) \\ p &\mapsto N_p, \end{aligned}$$

onde  $S^2(1)$  é a esfera de raio 1 com centro na origem. Tal aplicação é chamada de *aplicação normal de Gauss* da superfície  $S$ . Como o plano tangente a  $S^2(1)$

em  $N_p$  é ortogonal ao vetor posição  $N_p$ , a diferencial  $dN_p$  pode ser vista como um operador linear

$$dN_p : T_pS \rightarrow T_pS \approx T_{N_p}S^2(1).$$

Logo, temos que

$$dN(p)X_p = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))|_{t=0} = \tilde{\nabla}_{X_p}N = -AX_p.$$

onde  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  é uma curva tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Assim, o operador  $A : T_pS \rightarrow T_pS$  pode ser identificado com  $-dN(p)$ .

Dado  $X_p \in T_pS$  unitário, seja  $c : I \rightarrow S$  uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Derivando  $\langle c'(s), N(c(s)) \rangle = 0$ , para todo  $s \in I$ , em  $s = 0$ , obtemos

$$\langle c''(0), N_p \rangle = -\langle X_p, \tilde{\nabla}_{X_p}N \rangle = \langle AX_p, X_p \rangle.$$

Assim,  $\langle AX_p, X_p \rangle$  é a coordenada da componente normal do vetor curvatura em  $p$  de qualquer curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco  $c : I \rightarrow S$  com  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Por esta razão,  $\langle AX_p, X_p \rangle$  é chamada de *curvatura normal* de  $S$  em  $p$  segundo  $X_p$ , e é denotada por  $k_n(X_p)$ . Se  $Y_p \in T_pS$  é um vetor unitário tal que  $\{X_p, Y_p, N_p\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$ , o escalar  $k_g(p) = \langle c''(0), Y_p \rangle$  é a *curvatura geodésica* da curva  $c$  em  $p$  e é denotada por  $k_g$ . Assim,

$$c''(0) = \langle c''(0), Y_p \rangle Y_p + \langle c''(0), N_p \rangle N_p = k_g(p)Y_p + k_n(X_p)N_p.$$

Em particular, a curvatura  $k$  de  $c$  em  $\mathbb{R}^3$  satisfaz

$$k^2 := |c''(0)|^2 = k_g^2 + k_n^2.$$



Como  $A : T_p S \rightarrow T_p S$  é um operador linear auto-adjunto, decorre do *Teorema Espectral* que existem uma base ortonormal  $\{X_p, Y_p\}$  de  $T_p S$  e  $k_1 \leq k_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$AX_p = k_1 X_p \quad \text{e} \quad AY_p = k_2 Y_p.$$

Os números  $k_1$  e  $k_2$  são, respectivamente, os valores mínimo e máximo das curvaturas normais  $k_n(Z_p)$ ,  $Z_p \in T_p S$ , e são chamados de *curvaturas principais* de  $S$  em  $p$ . O produto  $k_1 \cdot k_2 = \det A$  é chamado de *curvatura Gaussiana* de  $S$  em  $p$  e é denotado por  $K(p)$ . A média  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  é chamada de *curvatura média* de  $S$  em  $p$  e é denotada por  $H(p)$ .

## 1.4 As equações de Gauss e Codazzi-Mainardi

Nesta seção obtemos as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi de uma superfície regular  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  e demonstramos o Teorema Egregium de Gauss.

Dados  $Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ , temos

$$\tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \alpha(Y, Z) = \nabla_Y Z + \langle AY, Z \rangle N.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \tilde{\nabla}_X \langle AY, Z \rangle N \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \langle AX, \nabla_Y Z \rangle N + X \langle AY, Z \rangle N + \langle AY, Z \rangle \tilde{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \langle A \nabla_Y Z, X \rangle N + \langle \nabla_X AY, Z \rangle N + \langle AY, \nabla_X Z \rangle N \\ &\quad - \langle AY, Z \rangle AX, \end{aligned} \tag{1.21}$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ . Analogamente,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + \langle A \nabla_X Z, Y \rangle N \\ + \langle \nabla_Y A X, Z \rangle N + \langle A X, \nabla_Y Z \rangle N - \langle A X, Z \rangle A Y. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Além disso,

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \langle A[X, Y], Z \rangle N \quad (1.23)$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ . Tomando as componentes tangente e normal na equação

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = 0$$

e usando as equações (1.21), (1.22) e (1.23), obtemos

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z - \langle A Y, Z \rangle A X + \langle A X, Z \rangle A Y = 0 \quad (1.24)$$

e

$$\begin{aligned} \langle A \nabla_Y Z, X \rangle + \langle \nabla_X A Y, Z \rangle &= -\langle A Y, \nabla_X Z \rangle + \langle A \nabla_X Z, Y \rangle \\ &+ \langle \nabla_Y A X, Z \rangle + \langle A X, \nabla_Y Z \rangle + \langle A[X, Y], Z \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Como  $A$  é auto adjunto decorre da expressão (1.25) que

$$\nabla_X A Y - \nabla_Y A X = A[X, Y],$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ , ou, equivalentemente,

$$\nabla_X A Y - \nabla_Y A X = A \nabla_X Y - A \nabla_Y X, \quad (1.26)$$

a qual é chamada de *equação de Codazzi-Mainardi*.

A expressão

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.27)$$

é chamada de *tensor de curvatura* relativo a  $\nabla$ . Obtemos de (1.24) que

$$R(X, Y)Z = \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY, \quad (1.28)$$

a qual é chamada de *equação de Gauss*. Em particular, se  $X_1, X_2$  formam uma base ortonormal de  $T_p S$ , então

$$\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle = \det A = K(p).$$

**Teorema 1.1** (*Egregium de Gauss*): *Seja  $f : S_1 \rightarrow S_2$  uma isometria local.*

*Então*

$$K^2(f(p)) = K^1(p)$$

para todo  $p \in S_1$ , onde  $K^i$  denota a curvatura gaussiana de  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Demonstração:** Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S_1)$ . Como  $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$ ,

temos

$$\begin{aligned} R^2(f_*X, f_*Y)f_*Z &= \nabla_{f_*X}^2 \nabla_{f_*Y}^2 f_*Z - \nabla_{f_*Y}^2 \nabla_{f_*X}^2 f_*Z - \nabla_{[f_*X, f_*Y]}^2 f_*Z \\ &= f_* \nabla_X^1 \nabla_Y^1 Z - f_* \nabla_Y^1 \nabla_X^1 Z - f_* \nabla_{[X, Y]}^1 Z \\ &= f_*(R^1(X, Y)Z), \end{aligned}$$

onde  $R^i$  denota o tensor de curvatura relativo a  $\nabla^i$ ,  $i = 1, 2$ . Assim, escolhendo uma base ortonormal  $\{X_p, Y_p\}$  de  $T_p S_1$ , temos que  $\{f_*X_p, f_*Y_p\}$  é uma

base ortonormal de  $T_{f(p)}S_2$  e, portanto,

$$\begin{aligned} K^2(f(p)) &= \langle R^2(f_*X_p, f_*Y_p)f_*Y_p, f_*X_p \rangle = \langle f_*R^1(X_p, Y_p)Y, f_*X_p \rangle \\ &= \langle R^1(X_p, Y_p)Y_p, X_p \rangle = K^1(p). \end{aligned}$$

□

## 1.5 Teorema Fundamental das Superfícies

Nesta seção definimos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais com respeito a um sistema de coordenadas e exprimimos as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi em termos de tais coeficientes. Em seguida enunciamos o Teorema Fundamental das Superfícies, segundo o qual uma superfície fica determinada, a menos de sua posição no espaço, por funções satisfazendo tais equações.

**Definição 1.4** Sejam  $S$  uma superfície regular e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$  um sistema de coordenadas. Os coeficientes da primeira forma fundamental, com respeito ao sistema  $\mathbf{x}$ , são as funções diferenciáveis  $E, F, G$  dadas por

$$E = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_1} \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_{u_2}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle.$$

Se  $N$  é um campo diferenciável unitário normal a  $S$ , os coeficientes da segunda forma fundamental com respeito a  $\mathbf{x}$  e  $N$  são dados por

$$e = \langle \mathbf{x}_{u_1 u_1}, N \rangle, \quad f = \langle \mathbf{x}_{u_1 u_2}, N \rangle, \quad g = \langle \mathbf{x}_{u_2 u_2}, N \rangle.$$

Aplicando as equações de Gauss (1.28) e Codazzi-Mainardi (1.26) aos campos coordenados  $\frac{\partial}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial}{\partial u_2}$  associados ao sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = (\Gamma_{12}^2)_{u_1} - (\Gamma_{11}^2)_{u_2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2, \\ e_{u_2} - f_{u_1} = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_{u_2} - g_{u_1} = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2, \end{cases} \quad (1.29)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel da superfície  $S$  dados por

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} \frac{\partial}{\partial u_1} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} \frac{\partial}{\partial u_2} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_2}} \frac{\partial}{\partial u_2} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, temos o seguinte resultado fundamental da teoria de superfícies (cf. [13]).

**Teorema 1.2 (Teorema Fundamental das Superfícies).** *Sejam  $E, F, G, e, f, g$  funções diferenciáveis definidas em um subconjunto aberto e simplesmente conexo  $V \subset \mathbb{R}^2$ , com  $E > 0$  e  $G > 0$ . Suponha que estas funções satisfaçam as equações de compatibilidade (1.29) e que  $EG - F^2 > 0$ . Então existe um difeomorfismo  $\mathbf{x} : U \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  tal que a superfície regular  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  possui  $E, F, G$  e  $e, f, g$  como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se  $V$  é conexo e se  $\bar{\mathbf{x}} : V \longrightarrow \bar{\mathbf{x}}(V) \subset \mathbb{R}^3$  é outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas*

condições, então existem uma translação  $T$  e uma transformação linear ortogonal  $\rho$  em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$ .

Em particular, seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas principal. Defina  $v_1, v_2, V_1, V_2, h_{12}$  e  $h_{21}$  por

$$E = v_1^2, \quad G = v_2^2, \quad e = v_1 V_1, \quad g = v_2 V_2, \quad h_{12} = \frac{1}{v_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \quad \text{e} \quad h_{21} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial v_1}{\partial u_2}. \quad (1.30)$$

Observe que as curvaturas principais de  $S$  em  $\mathbf{x}(U)$  são dadas por

$$k_1 = \frac{V_1}{v_1} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{V_2}{v_2}.$$

Sejam  $X_1, X_2$  campos unitários definidos por  $\frac{\partial}{\partial u_1} = v_1 X_1$  e  $\frac{\partial}{\partial u_2} = v_2 X_2$ .

Então

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} X_2 &= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} X_2, X_1 \rangle X_1 = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \rangle X_1 \\ &= \frac{1}{v_1 v_2} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial u_1} \rangle X_1 = \frac{1}{v_1 v_2} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_2}} \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_1} \rangle X_1 \\ &= \frac{1}{v_1 v_2} \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^2}{\partial u_2} X_1 = \frac{1}{v_2} \frac{\partial v_1}{\partial u_2} X_1 = h_{21} X_1, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} \frac{\partial}{\partial u_2} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} v_2 X_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1} X_2 + v_2 h_{21} X_1 \\ &= \frac{1}{v_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{v_2}{v_1} h_{21} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ &= \frac{v_1}{v_2} h_{12} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{v_2}{v_1} h_{21} \frac{\partial}{\partial u_1}, \end{aligned}$$

portanto  $\Gamma_{12}^1 = \frac{v_2}{v_1} h_{21}$  e  $\Gamma_{12}^2 = \frac{v_1}{v_2} h_{12}$ .

Os demais símbolos de Christoffel podem ser obtidos a partir destes.

As equações de Gauss e Codazzi-Mainardi (1.29) reduzem-se então a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial u_2} + V_1 V_2 = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_2} = h_{21} v_2 \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = h_{12} v_1 \\ \frac{\partial V_1}{\partial u_2} = h_{21} V_2 \\ \frac{\partial V_2}{\partial u_1} = h_{12} V_1 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Neste caso, o Teorema Fundamental das Superfícies fica:

**Teorema 1.3 (Teorema Fundamental das Superfícies).** *Seja  $(v_1, v_2, V_1, V_2, h_{12}, h_{21})$  uma solução do sistema (1.31) em um subconjunto aberto e simplesmente conexo  $V \subset \mathbb{R}^2$ , com  $v_1 > 0$  e  $v_2 > 0$ . Então existe um difeomorfismo  $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^3$ , o qual é um sistema de coordenadas principal na superfície regular  $\mathbf{x}(V)$  em relação ao qual os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dados por (1.30). Além disso, se  $V$  é conexo e se  $\bar{\mathbf{x}} : V \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(V) \subset \mathbb{R}^3$  é outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existem uma translação  $T$  e uma transformação linear ortogonal  $\rho$  em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$ .*

## 1.6 Gradiente, Hessiano e Laplaciano

Se  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável definida na superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , o gradiente  $\nabla\varphi(p)$  de  $\varphi$  no ponto  $p \in S$  é o vetor de  $T_p S$  definido

por:

$$d\varphi(p)X_p = \langle \nabla\varphi(p), X_p \rangle$$

para todo  $X_p \in T_pS$ .

É conveniente obtermos uma expressão para  $\nabla\varphi(p)$  em coordenadas.

**Proposição 1.8** *Sejam  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas e  $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Então o gradiente de  $\varphi$  é dado por:*

$$\nabla\varphi = \left( \frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{EG - F^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} - \left( \frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{EG - F^2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \quad (1.32)$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental com respeito a  $\mathbf{x}$ ,  $\varphi_u = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi \circ \mathbf{x}^{-1})$  e  $\varphi_v = \frac{\partial}{\partial v}(\varphi \circ \mathbf{x}^{-1})$ .

**Demonstração:** Escrevendo

$$\nabla\varphi(p) = a \frac{\partial}{\partial u}(p) + b \frac{\partial}{\partial v}(p),$$

temos

$$\varphi_u = \langle \nabla\varphi, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = aE + bF.$$

Analogamente,  $\varphi_v = aF + bG$ . Portanto,

$$\begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix}.$$



Logo, vale (1.32). □

É fácil ver de (1.32) que

$$\|\nabla\varphi\|^2 = \frac{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}{EG - F^2}, \quad (1.33)$$

e que, dadas duas funções diferenciáveis  $\varphi, \psi : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle = \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u}{EG - F^2}. \quad (1.34)$$

**Lema 1.2** *Um campo  $Z$  em uma superfície regular é (localmente) um campo gradiente se, e somente se,*

$$\langle \nabla_X Z, Y \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle \quad (1.35)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ .

**Demonstração:** Defina a 1-forma  $\omega$  por  $\omega(T) = \langle Z, T \rangle$ . Então

$$\begin{aligned} d\omega(T, W) &= T\omega(W) - W\omega(T) - \omega([T, W]) \\ &= T\langle Z, W \rangle - W\langle Z, T \rangle - \langle Z, [T, W] \rangle \\ &= \langle \nabla_T Z, W \rangle + \langle Z, \nabla_T W \rangle - \langle \nabla_W Z, T \rangle - \langle Z, \nabla_W T \rangle - \langle Z, [T, W] \rangle \\ &= \langle \nabla_T Z, W \rangle - \langle \nabla_W Z, T \rangle. \end{aligned}$$

Portanto as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Vale (1.35);
- (ii)  $\omega$  é fechada;
- (iii) existe localmente  $\varphi$  tal que  $\omega = d\varphi$ ;
- (iv) existe localmente  $\varphi$  tal que  $\nabla\varphi = Z$ . □

**Definição 1.5** O Hessiano  $Hess \varphi$  da função diferenciável  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$Hess \varphi(p)(X_p, Y_p) = \nabla(d\varphi)(p)(X_p, Y_p)$$

**Observação 1.2** (1) Se  $c : I \rightarrow S$  é uma geodésica com  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ , então  $Hess \varphi(p)(X_p, X_p) = c''(0)$ .

(2)  $Hess \varphi(X, Y) = Xd\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X Y) = XY(\varphi) - (\nabla_X Y)(\varphi) = X\langle \nabla\varphi, Y \rangle - \langle \nabla\varphi, \nabla_X Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla\varphi, Y \rangle$ . Assim, o operador linear  $\widehat{Hess} \varphi(p)$  induzido pela aplicação bilinear  $Hess \varphi(p)$  é dado por  $\widehat{Hess} \varphi(p)(X_p) = \nabla_{X_p} \nabla\varphi$  para todo  $X_p \in T_p S$ ;

(3)  $Hess \varphi$  é simétrico, pois

$$\begin{aligned} Hess \varphi(X, Y) - Hess \varphi(Y, X) &= XY(\varphi) - \nabla_X Y(\varphi) - YX(\varphi) + \nabla_Y X(\varphi) \\ &= XY(\varphi) - YX(\varphi) - \nabla_X Y(\varphi) + \nabla_Y X(\varphi) \\ &= ([X, Y] - (\nabla_X Y + \nabla_Y X))(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

**Definição 1.6** O Laplaciano  $\Delta\varphi$  da função diferenciável  $\varphi : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$\Delta\varphi(p) = tr(Hess \varphi(p)) = Hess \varphi(X_1, X_1) + Hess \varphi(X_2, X_2)$$

onde  $\{X_1, X_2\}$  é uma base ortonormal de  $T_p S$ .

**Observação 1.3** Sejam  $S$  uma superfície regular,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas em  $S$  e  $E, F$  e  $G$  os coeficientes da primeira forma

fundamental de  $S$  associados a  $\mathbf{x}$ . Então um cálculo longo mas direto mostra que o Laplaciano  $\Delta\varphi$  da função diferenciável  $\varphi : V = \mathbf{x}(U) \subset S \longrightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right). \quad (1.36)$$

Em particular o Laplaciano  $\Delta\varphi$  da função diferenciável  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  em relação ao sistema de coordenadas cartesianas em  $V$  é dado pela expressão usual

$$\Delta\varphi(p) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(p) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(p).$$

## Capítulo 2

# Superfícies Isotérmicas em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo introduzimos a classe de superfícies isotérmicas que estudaremos no restante deste trabalho. Mostramos que tal classe é invariante por inversões e inclui, por exemplo, as superfícies com curvatura média constante, as quádricas e as superfícies cujas linhas de curvatura têm curvatura geodésica constante, em particular, as cíclides de Dupin.

### 2.1 Aplicações conformes

O objetivo desta seção é introduzir alguns fatos básicos sobre aplicações conformes entre subconjuntos abertos do espaço Euclidiano. Iniciamos com um resultado elementar de álgebra linear. Lembramos que o ângulo (não-orientado) entre dois vetores  $v, w$  de um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o único número real  $\theta \in [0, \pi]$  tal que  $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|}$ .

Denotamos  $\theta = \angle(u, v)$ .

**Proposição 2.1** *Seja  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear entre os espaços vetoriais com produto interno  $V$  e  $W$ . São equivalentes:*

- (a)  *$T$  preserva ângulos, i.e.,  $\angle(Tv, Tw) = \angle(v, w)$  para quaisquer  $v, w \in V$ .*
- (b) *Existe  $\lambda > 0$  tal que  $|Tv| = \lambda|v|$  para todo  $v \in V$ .*
- (c) *Existe  $\lambda > 0$  tal que  $\langle Tv, Tw \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$  para quaisquer  $v, w \in V$ .*
- (d) *Existem  $\lambda > 0$  e uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  tais que  $\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \lambda^2 \langle v_i, v_j \rangle$  para quaisquer  $1 \leq i, j \leq n$ .*

**Demonstração:** A equivalência entre (c) e (d) e as implicações (c)  $\implies$  (b) e (c)  $\implies$  (a) são de verificação simples. Provemos as seguintes implicações: (b)  $\implies$  (c) Usando a identidade de polarização, temos para  $v, w \in V$  :

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \frac{1}{4}|Tv + Tw|^2 - \frac{1}{4}|Tv - Tw|^2 \\ &= \frac{1}{4}|T(v + w)|^2 - \frac{1}{4}|T(v - w)|^2 \\ &= \lambda^2 \left( \frac{1}{4}|v + w|^2 - \frac{1}{4}|v - w|^2 \right) \\ &= \lambda^2 \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

(a)  $\implies$  (c) Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ . Como  $T$  preserva ângulos, os vetores  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  são dois a dois ortogonais. Dados  $i \neq j$ , o ângulo  $\theta = \angle(e_i, e_i + e_j)$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle e_i, e_i + e_j \rangle}{|e_i||e_i + e_j|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ou seja,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Usando novamente que  $T$  preserva ângulos, temos

$$\frac{\langle T(e_i), T(e_i + e_j) \rangle}{|T(e_i)||T(e_i + e_j)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e daí

$$|T(e_i)| = \frac{\langle T(e_i), T(e_i) \rangle}{|T(e_i)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}|T(e_i + e_j)|.$$

Como os papéis de  $e_i$  e  $e_j$  são permutáveis, temos também

$$|T(e_j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|T(e_i + e_j)|$$

e assim deduzimos que  $|T(e_i)| = |T(e_j)|$  para quaisquer  $1 \leq i, j \leq n$ . Concluimos agora facilmente que (c) se verifica com  $\lambda = |L(e_i)|$ .  $\square$

Uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  que satisfaz uma das (e, portanto, todas as) condições da Proposição 2.1 é chamada de uma *semelhança de razão*  $\lambda$ . É fácil ver que uma semelhança  $T : V \rightarrow W$  de razão  $\lambda$  é a composta de uma transformação linear ortogonal  $R : V \rightarrow W$  e uma homotetia  $H$  de razão  $\lambda$  dada por  $H(w) = \lambda w$  para todo  $w \in W$ .

**Definição 2.1** Uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow V$  entre subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  é *conforme* se  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma semelhança para todo  $p \in U$ .

Se  $f : U \rightarrow V$  é uma aplicação conforme entre os abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , a função  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}_+$  que a cada  $p \in U$  associa a razão de semelhança  $\lambda(p)$  de  $df(p)$  é chamada de *fator conforme* da aplicação  $f$ . Observe que  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função diferenciável. De fato, se  $X$  é um campo

de vetores diferenciável unitário em  $U$  então  $\lambda(p) = |df(p)X(p)|$  para todo  $p \in U$ .

Se  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma aplicação diferenciável entre superfícies regulares de  $\mathbb{R}^3$ , diz-se que  $f$  é conforme se  $df(p) : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$  é uma semelhança para todo  $p \in S_1$ .

A proposição seguinte mostra que as aplicações conformes entre subconjuntos abertos do plano são precisamente as aplicações holomorfas e anti-holomorfas.

**Proposição 2.2** *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , uma aplicação diferenciável. Então  $F$  é conforme se, e somente se,  $F = u + iv : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa ou anti-holomorfa.*

**Demonstração:** Pela Proposição 2.1,  $F$  é conforme se, e somente se,

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial y}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\rangle = 0$$

para todo  $(x, y) \in U$ , ou equivalentemente,

$$\begin{cases} u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2, \\ u_x u_y + v_x v_y = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

A segunda equação é equivalente a  $(u_x, v_x) \perp (u_y, v_y)$ , ou seja, a

$$\begin{cases} u_x = -\alpha v_y, \\ v_x = \alpha u_y, \end{cases}$$

para alguma função diferenciável  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Usando a primeira equação em (2.1), obtemos que  $F$  é conforme se, e somente se,

$$\begin{cases} u_x = -v_y \\ v_x = u_y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases},$$

ou seja, se, e somente se,  $F = u + iv$  é holomorfa ou anti-holomorfa.  $\square$

Considere, em particular, a aplicação anti-holomorfa

$$\begin{aligned} I : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ Z &\rightarrow \frac{1}{\bar{Z}}. \end{aligned}$$

Vista como aplicação de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  em  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $I$  é dada por

$$I(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y),$$

ou seja,

$$I(p) = \frac{p}{|p|^2}.$$

Geometricamente,  $I(p)$  é o único ponto da semi-reta que liga 0 a  $p$  tal que

$$|I(p)||p| = 1.$$

A aplicação  $I$  é chamada de *inversão* em relação ao círculo com centro em  $0 \in \mathbb{R}^2$  e raio 1. Mais geralmente, a inversão em relação à esfera  $S(p_0; r)$  com centro em  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  e raio  $r$  é definida por

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^n - \{p_0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{p_0\} \\ p &\mapsto p_0 + \frac{r^2}{|p - p_0|^2}(p - p_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$



Analogamente ao caso do plano,  $I(p)$  é o único ponto da semi-reta que liga  $p_0$  a  $p$  tal que

$$|I(p) - p_0||p - p_0| = r^2.$$

Em particular,  $I(p) = p$  para todo  $p \in S(p_0; r)$  e  $I^2 = id$ .

**Proposição 2.3** *A inversão  $I : \mathbb{R}^n - \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{p_0\}$ , relativa à esfera  $S(p_0; r)$ , é um difeomorfismo conforme com fator conforme  $\lambda(p) = \frac{r^2}{|p - p_0|^2}$ .*

**Demonstração:** Seja  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{p_0\}$  uma curva diferenciável tal que  $c(0) = p$  e  $c'(0) = X_p$ . Então

$$\begin{aligned} dI(p) \cdot X_p &= (I \circ c)'(t)|_{t=0} \\ &= \frac{r^2}{|c(t) - p_0|^2} \left( c'(t) - \frac{2\langle c(t) - p_0, c'(t) \rangle}{|c(t) - p_0|^2} (c(t) - p_0) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{r^2}{|p - p_0|^2} \left( X_p - \frac{2\langle p - p_0, X_p \rangle}{|p - p_0|^2} (p - p_0) \right) \\ &= \frac{r^2}{|p - p_0|^2} \mathcal{P}_p X_p, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{P}_p X_p = X_p - \frac{2\langle p - p_0, X_p \rangle}{|p - p_0|^2} (p - p_0). \quad (2.3)$$

Um cálculo direto mostra que  $\mathcal{P}_p$  é uma isometria. Assim,

$$\begin{aligned} \langle dI(p) \cdot X_p, dI(p) \cdot Y_p \rangle &= \frac{r^4}{|p - p_0|^4} \langle \mathcal{P}_p(X_p), \mathcal{P}_p(Y_p) \rangle \\ &= \frac{r^4}{|p - p_0|^4} \langle X_p, Y_p \rangle. \end{aligned}$$

O fato de  $I$  ser um difeomorfismo decorre de  $I^2 = id$ . □

O seguinte teorema mostra que, em contraste com o caso do plano, a classe de aplicações conformes entre abertos de  $\mathbb{R}^n$  com  $n \geq 3$  é bastante restrita.

**Teorema 2.1** (*Liouville*). *Seja  $T : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) uma aplicação conforme, onde  $U$  é um subconjunto aberto conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Então existem uma inversão  $I$  e uma semelhança  $S$  tais que  $T = I \circ S|_U$ .*

**Demonstração:** Ver [13]. □

## 2.2 Sistemas de coordenadas isotérmicos

Nesta seção definimos sistemas de coordenadas isotérmicos em uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Mostramos que a existência de tais sistemas de coordenadas em uma superfície é equivalente à existência de soluções de um sistema de equações diferenciais parciais conhecido como *equações de Beltrami*.

**Definição 2.2** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Um sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é dito *isotérmico* se  $\mathbf{x}$  é uma aplicação conforme.

Usando a Proposição 2.1-d), obtemos a seguinte caracterização dos sistemas de coordenadas isotérmicos em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental.

**Proposição 2.4** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Um sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é isotérmico se, e somente se, os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem  $E = G$  e  $F = 0$ .*

**Corolário 2.1** *Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas isotérmico na superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Defina  $\varphi, \psi : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$\varphi(\mathbf{x}(u, v)) = u \quad e \quad \psi(\mathbf{x}(u, v)) = v. \quad (2.4)$$

Então

$$|\nabla \psi|^2 = |\nabla \varphi|^2 \neq 0, \quad (2.5a)$$

$$\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle = 0. \quad (2.5b)$$

Reciprocamente, se  $\varphi, \psi : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis no aberto  $V \subset S$  satisfazendo (2.5), então para cada ponto  $p \in V$  existem um subconjunto aberto  $\tilde{V} \subset V$  e um sistema de coordenadas isotérmico  $\mathbf{x} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{V}$  tais que  $\varphi, \psi$  são dadas por (2.4).

**Demonstração:** Usando as equações (1.33) e (1.34), obtemos que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \frac{|\nabla \psi|^2}{A}, \quad F = -\frac{\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle}{A}, \quad G = \frac{|\nabla \varphi|^2}{A},$$

onde  $A = |\nabla \varphi|^2 |\nabla \psi|^2 - \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle^2$ . As equações (2.5) decorrem então da Proposição 2.4.

Reciprocamente, defina  $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\mathbf{y}(q) = (\varphi(q), \psi(q))$ . Como

$$d\mathbf{y}(p)X_p = (\langle \nabla \varphi(p), X_p \rangle, \langle \nabla \psi(p), X_p \rangle)$$

temos que  $d\mathbf{y}(p)X_p = 0$  se, e somente se,  $X_p = 0$ , pois  $\{\nabla\varphi(p), \nabla\psi(p)\}$  é uma base ortogonal de  $T_pS$  por (2.5). Pelo teorema da função inversa, existe um aberto  $\tilde{V} \subset V$  contendo  $p$  tal que  $\mathbf{y}|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  é um difeomorfismo. Basta agora definir  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}|_{\tilde{V}})^{-1}$ .  $\square$

**Proposição 2.5** *Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas na superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Então  $\varphi, \psi : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem (2.5) se e, somente se,  $\varphi, \psi$  satisfazem as equações de Beltrami*

$$\begin{cases} E\varphi_v - F\varphi_u = \psi_u, \\ F\varphi_v - G\varphi_u = \psi_v. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Demonstração:** Pela equação (1.34) temos que

$$\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle = \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u}{EG - F^2}.$$

Logo, vale (2.5b) se, e somente se,

$$E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = 0,$$

ou seja,

$$\psi_v(E\varphi_v - F\varphi_u) - \psi_u(F\varphi_v - G\varphi_u) = 0,$$

ou ainda,

$$\langle (E\varphi_v - F\varphi_u, F\varphi_v - G\varphi_u), (\psi_v, -\psi_u) \rangle = 0.$$

Portanto, (2.5b) é equivalente à existência de uma função diferenciável  $\mu :$

$U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} \mu(E\varphi_v - F\varphi_u) = \psi_u \\ \mu(F\varphi_v - G\varphi_u) = \psi_v \end{cases}, \quad (2.7)$$

ou seja,

$$\mu \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_v \\ -\varphi_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix}.$$

A equação acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \varphi_v \\ -\varphi_u \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu\sqrt{EG-F^2}} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \varphi_u &= -\frac{1}{\mu} \frac{E\psi_v - F\psi_u}{\sqrt{EG-F^2}} \\ \varphi_v &= -\frac{1}{\mu} \frac{F\psi_v - G\psi_u}{\sqrt{EG-F^2}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora, usando (2.7) e (2.8) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u}{\sqrt{EG-F^2}} &= -\mu|\nabla\varphi|^2 \\ \frac{\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u}{\sqrt{EG-F^2}} &= -\frac{1}{\mu}|\nabla\psi|^2 \end{aligned}.$$

Usando (2.5a) obtemos que  $\mu^2 = 1$ . □

**Observação 2.1** 1) A condição de integrabilidade  $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$  de (2.8) implica:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E\psi_v - F\psi_u}{\sqrt{EG-F^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F\psi_v - G\psi_u}{\sqrt{EG-F^2}} \right),$$

ou seja,  $\Delta\varphi = 0$ ; em outras palavras  $\varphi$  deve ser uma função harmônica. Analogamente,  $\Delta\psi = 0$ . Assim, um sistema de coordenadas isotérmico  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  em uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  fica determinado por um par de funções harmônicas  $\varphi, \psi : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle = 0;$$

2) Se o sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$  já é isotérmico, ou seja,  $E = G = \lambda$  e  $F = 0$ , então o sistema (2.6) reduz-se a

$$\begin{cases} \varphi_v = \psi_u \\ \varphi_u = -\psi_v, \end{cases}$$

ou seja,  $\varphi + i\psi$  é uma função holomorfa.

Para a demonstração da existência de soluções das equações de Beltrami, veja [14]. Assim, do Corolário 2.1 e da Proposição 2.5 obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 2.2** *Toda superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  admite localmente sistemas de coordenadas isotérmicos.*

## 2.3 Redes Isotérmicas

Nesta seção introduzimos a noção de redes isotérmicas em uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Caracterizamos, em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, quando as famílias de curvas coordenadas de um sistema de coordenadas ortogonal determinam uma rede isotérmica. Caracterizamos ainda tais redes em termos das curvaturas geodésicas de suas curvas integrais.

Uma *distribuição*  $E$  de retas em uma superfície regular  $S$  é uma aplicação que a cada ponto  $p \in S$  associa um subespaço unidimensional  $E(p) \in T_p S$ . Dizemos que a distribuição  $E$  é diferenciável se, para cada

ponto  $p \in S$ , existem uma vizinhança  $U \subset S$  de  $p$  e um campo de vetores diferenciável  $X$  definido em  $U$  tais que  $X(q)$  gera  $E(q)$  para todo  $q \in U$ . Uma *rede ortogonal diferenciável de retas* em  $S$  é um par  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$  de distribuições diferenciáveis de retas tal que  $E_1(p)$  e  $E_2(p)$  são ortogonais para todo  $p \in S$ .

**Definição 2.3** Uma rede ortogonal diferenciável  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$  de retas em uma superfície regular  $S$  é *isotérmica* se, para todo ponto  $p \in S$ , existem uma vizinhança aberta  $U \subset S$  de  $p$  e um sistema de coordenadas isotérmico  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  cujas curvas coordenadas são as curvas integrais de  $E_1$  e  $E_2$ .

**Exemplo 2.1** Decorre da Proposição 2.2 que as redes isotérmicas em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  são precisamente aquelas cujas curvas integrais são as curvas de nível das partes real e imaginária das funções holomorfas ou anti-holomorfas definidas em  $U$ .

A proposição seguinte caracteriza, em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, quando as famílias de curvas coordenadas de um sistema ortogonal determinam uma rede isotérmica.

**Proposição 2.6** *As famílias de curvas coordenadas de um sistema de coordenadas ortogonal determinam uma rede isotérmica se, e somente se, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $S$  com respeito a tal sistema satisfazem*

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \log \frac{E}{G} \right) = 0. \quad (2.9)$$

**Demonstração:** Suponha que  $\mathbf{x} : I \times J \longrightarrow S$  seja um sistema de coordenadas ortogonal satisfazendo (2.9). Então existem funções  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\log \frac{E(u, v)}{G(u, v)} = \log f(u) - \log g(v), \text{ para quaisquer } u \in I, v \in J.$$

Logo, existe uma função diferenciável  $\lambda : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{E(u, v)}{f(u)} = \frac{G(u, v)}{g(v)} = \lambda(u, v), \text{ para todo } (u, v) \in I \times J.$$

Considere agora a mudança de coordenadas

$$\tilde{u} = \int \sqrt{f(u)} du, \quad \tilde{v} = \int \sqrt{g(v)} dv.$$

Então

$$\mathbf{x}_{\tilde{u}} = \mathbf{x}_u \frac{du}{d\tilde{u}} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{f(u)}}, \quad \mathbf{x}_{\tilde{v}} = \mathbf{x}_v \frac{dv}{d\tilde{v}} = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{g(v)}}.$$

Assim,

$$\tilde{E}(u, v) = \langle \mathbf{x}_{\tilde{u}}, \mathbf{x}_{\tilde{u}} \rangle = \frac{E(u, v)}{f(u)} = \lambda(u, v) = \frac{G(u, v)}{g(v)} = \langle \mathbf{x}_{\tilde{v}}, \mathbf{x}_{\tilde{v}} \rangle = \tilde{G}(u, v),$$

portanto  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  definem um sistema de coordenadas isotérmico pela Proposição

2.4. A recíproca é trivial. □

**Exemplo 2.2** Seja  $\mathbf{x}(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{ sen } v, \cos u)$  o sistema de coordenadas usual da esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  cujas curvas coordenadas são os paralelos e meridianos. Note que este sistema de coordenadas não é conforme, pois os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E(u, v) = 1$ ,  $F(u, v) = 0$  e  $G(u, v) = \text{sen}^2 u$ . No entanto, fazendo  $u_1 = - \int \frac{du}{\text{sen } u} = \log \coth \frac{u}{2}$  e  $v_1 = v$ ,



obtemos uma parametrização conforme da esfera cujas curvas coordenadas são ainda os paralelos e meridianos, conhecida como *projeção de Mercator*.

Na seguinte proposição caracterizamos redes isotérmicas em uma superfície regular em termos das curvaturas geodésicas das suas curvas integrais.

**Proposição 2.7** *Seja  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$  uma rede ortogonal em uma superfície regular orientada  $S$ . Então  $\mathcal{E}$  é isotérmica se, e somente se, as curvaturas geodésicas  $k_g^1$  e  $k_g^2$  das curvas integrais de  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente, satisfazem*

$$Y(k_g^1) + Z(k_g^2) = 0,$$

onde  $\{Y, Z\}$  é um referencial ortonormal local positivo de  $S$  tal que  $Y$  gera  $E_1$  e  $Z$  gera  $E_2$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  um sistema de coordenadas ortogonal positivo cujas curvas coordenadas são as curvas integrais de  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Então  $\frac{\partial}{\partial u} = AY$  e  $\frac{\partial}{\partial v} = BZ$ , onde  $A = \sqrt{E}$  e  $B = \sqrt{G}$ . A curvatura geodésica  $k_g^1$  de uma curva coordenada  $v = v_0$  é

$$\begin{aligned} k_g^1 &= \langle \nabla_Y Y, Z \rangle = \left\langle \nabla_{\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u}} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{A^2} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \\ &= \frac{1}{A^2 B} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

Mas

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} A^2 = -AA_v.$$

Logo,

$$k_g^1 = -\frac{1}{AB}A_v.$$

Analogamente,  $k_g^2 = \frac{1}{AB}B_u$ . Agora note que:

$$Y(k_g^1) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u}(k_g^1) = -\frac{1}{A} \left[ \left( \frac{1}{AB} \right)_u A_v + \frac{1}{AB} A_{uv} \right]$$

e

$$Z(k_g^2) = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial v}(k_g^2) = \frac{1}{B} \left[ \left( \frac{1}{AB} \right)_v B_u + \frac{1}{AB} B_{uv} \right].$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{A_u}{A} - \frac{B_u}{B} \right) = \frac{A_{uv}}{A} - \frac{A_u A_v}{A^2} - \frac{B_{uv}}{B} + \frac{B_u B_v}{B^2}.$$

Concluimos que

$$Y(k_g^1) + Z(k_g^2) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{E}{G}.$$

O resultado decorre então da Proposição 2.6. □

**Corolário 2.2** *Seja  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$  uma rede ortogonal em uma superfície regular orientada  $S$ . Se as curvas integrais de  $E_1$  e  $E_2$  têm curvatura geodésica constante, então  $\mathcal{E}$  é isotérmica.*

**Exemplo 2.3** Decorre do Corolário 2.2 que qualquer rede ortogonal em  $\mathbb{R}^2$  tal que as curvas integrais de ambas as distribuições são arcos de círculos ou segmentos de retas é uma rede isotérmica.

**Corolário 2.3** *Se  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$  é uma rede isotérmica tal que as curvas integrais de  $E_1$  têm curvatura geodésica constante, então o mesmo vale para as curvas integrais de  $E_2$ .*

## 2.4 Tensores de Codazzi

Definimos nesta seção tensores de Codazzi em uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Obtemos algumas propriedades básicas de tais tensores e caracterizamos, em termos de seus autovalores, quando a rede ortogonal formada por seus autoespaços (em um subconjunto aberto no qual tais autovalores são distintos) é isotérmica.

Um tensor  $\Phi$  em uma superfície regular é uma aplicação que a cada  $p \in S$  associa um operador linear  $\Phi(p) : T_p S \longrightarrow T_p S$ . Dizemos que  $\Phi$  é diferenciável se para cada  $p \in S$  existe um aberto  $U \subset S$  contendo  $p$  tal que, para cada campo de vetores diferenciável  $X$  em  $U$ , o campo  $p \mapsto \Phi(p)X(p)$  é também diferenciável.

**Definição 2.4** Um tensor diferenciável  $\Phi$  em uma superfície regular  $S$  é um tensor de Codazzi se

$$\nabla_X \Phi Y - \Phi \nabla_X Y = \nabla_Y \Phi X - \Phi \nabla_Y X \quad (2.10)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ .

**Lema 2.1** *Seja  $\Phi$  um tensor diferenciável com autovalores distintos  $\lambda, \mu$  em uma superfície regular orientada  $S$ . Sejam  $E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$  e  $E_\mu = \ker(\Phi - \mu I)$ , e seja  $\{X, Y\}$  um referencial ortonormal positivo em  $S$  tal que  $X$  gera  $E_\lambda$  e  $Y$  gera  $E_\mu$ . Então  $\Phi$  é um tensor de Codazzi se, e somente se,*

$$\begin{cases} X(\mu) = \beta(\lambda - \mu), \\ Y(\lambda) = \alpha(\lambda - \mu), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $\alpha, \beta : S \rightarrow \mathbb{R}$  são as curvaturas geodésicas das curvas integrais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{cases} \nabla_X X = \alpha Y \\ \nabla_Y Y = -\beta X \end{cases}, \quad (2.12)$$

logo,

$$\nabla_X Y = \langle \nabla_X Y, X \rangle X = -\langle \nabla_X X, Y \rangle X = -\langle \alpha Y, Y \rangle X = -\alpha X \quad (2.13)$$

e, analogamente,

$$\nabla_Y X = \beta Y. \quad (2.14)$$

Usando (2.12), (2.13) e (2.14), obtemos que (2.10) é equivalente a (2.11).  $\square$

**Proposição 2.8** *Seja  $\Phi$  um tensor de Codazzi com autovalores distintos  $\lambda, \mu$ , em uma superfície regular orientada  $S$ . Sejam  $E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$ ,  $E_\mu = \ker(\Phi - \mu I)$  e seja  $\{X, Y\}$  um referencial ortonormal positivo em  $S$  tal que  $X$  gera  $E_\lambda$  e  $Y$  gera  $E_\mu$ . Então  $\mathcal{E} = (E_\lambda, E_\mu)$  é uma rede isotérmica se, e somente se,*

$$2\rho X(\psi)Y(\psi) + \psi X(\psi)Y(\rho) + \psi Y(\psi)X(\rho) - \rho\psi \text{Hess } \psi(X, Y) = 0, \quad (2.15)$$

onde  $\lambda = \psi(1 - \rho)$  e  $\mu = \psi(1 + \rho)$  (ou seja,  $2\psi = \lambda + \mu$ ,  $\rho = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}$ ).

**Demonstração:** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  as curvaturas geodésicas das curvas integrais de  $E_\lambda$  e  $E_\mu$ , respectivamente. Pelo Lema 2.1,  $\Phi$  é um tensor de Codazzi se,

e somente se,

$$\alpha = (\lambda - \mu)^{-1}Y(\lambda), \quad \beta = (\lambda - \mu)^{-1}X(\mu).$$

Temos

$$\begin{aligned} Y(\beta) &= Y(\lambda - \mu)^{-1}X(\mu) + (\lambda - \mu)^{-1}YX(\mu) \\ &= (\lambda - \mu)^{-2}(X(\mu)Y(\mu) - X(\mu)Y(\lambda)) + (\lambda - \mu)^{-1}YX(\mu). \end{aligned}$$

Usando o ítem d) da Proposição 1.6 e (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} YX(\mu) &= XY(\mu) - \nabla_X Y(\mu) + \nabla_Y X(\mu) \\ &= Hess \mu(X, Y) + \beta Y(\mu). \end{aligned}$$

Daí,

$$Y(\beta) = (\lambda - \mu)^{-2}(X(\mu)Y(\mu) - X(\mu)Y(\lambda)) + (\lambda - \mu)^{-1}(Hess \mu(X, Y) + \beta Y(\mu)),$$

e analogamente

$$X(\alpha) = (\lambda - \mu)^{-2}(X(\mu)Y(\lambda) - X(\lambda)Y(\lambda)) + (\lambda - \mu)^{-1}(Hess \lambda(X, Y) - \alpha X(\lambda)).$$

Portanto

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\lambda - \mu)^2(X(\alpha) + Y(\beta)) \\ &= \frac{1}{2}X(\mu)Y(\mu) - \frac{1}{2}X(\lambda)Y(\lambda) - \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}\right) \left(\frac{\mu + \lambda}{2}\right) Hess \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)(X, Y). \end{aligned}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}X(\mu)Y(\mu) - \frac{1}{2}X(\lambda)Y(\lambda) \\
 = & \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \right) (X(\lambda) + X(\mu))(Y(\lambda) + Y(\mu)) \\
 + & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda + \mu} \right) (X(\lambda) + X(\mu))(\lambda Y(\mu) - \mu Y(\lambda)) \\
 + & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda + \mu} \right) (Y(\lambda) + Y(\mu))(\lambda X(\mu) - \mu X(\lambda)) \\
 = & 2 \left( \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \right) X \left( \frac{\lambda + \mu}{2} \right) Y \left( \frac{\lambda + \mu}{2} \right) \\
 + & \left( \frac{\lambda + \mu}{2} \right) X \left( \frac{\lambda + \mu}{2} \right) Y \left( \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \right) \\
 + & \left( \frac{\lambda + \mu}{2} \right) Y \left( \frac{\lambda + \mu}{2} \right) X \left( \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \right).
 \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.6,  $\mathcal{E} = (E_\lambda, E_\mu)$  é uma rede isotérmica se, e somente se,

$$X(\alpha) + Y(\beta) = 0,$$

ou seja,  $\mathcal{E} = (E_\lambda, E_\mu)$  é uma rede isotérmica se, e somente se, vale (2.15).  $\square$

**Corolário 2.4** *Seja  $\Phi$  um tensor de Codazzi com autovalores distintos  $\lambda, \mu$  em uma superfície regular orientada  $S$ . Sejam  $E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$ ,  $E_\mu = \ker(\Phi - \mu I)$ . Se o traço  $2\psi = \lambda + \mu$  de  $\Phi$  é uma função constante em  $S$ , então  $\mathcal{E} = (E_\lambda, E_\mu)$  é uma rede isotérmica.*

**Proposição 2.9** *Seja  $\Phi$  um tensor de Codazzi com autovalores distintos  $\lambda, \mu$ . Sejam  $E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$  e  $E_\mu = \ker(\Phi - \mu I)$ . Se  $\lambda$  é constante ao longo das curvas integrais de  $E_\lambda$  (isto é,  $X(\lambda) = 0$  para todo  $X \in E_\lambda$ ), então as curvas integrais de  $E_\lambda$  têm curvatura geodésica constante.*

**Demonstração:** Seja  $\{X, Y\}$  um referencial ortonormal local positivo tal que  $X \in E_\lambda$  e  $Y \in E_\mu$ . Sejam  $\alpha, \beta \in C^\infty(S)$  as curvaturas geodésicas das curvas integrais de  $E_\lambda$  e  $E_\mu$ , respectivamente, ou seja,

$$\nabla_X X = \alpha Y \quad e \quad \nabla_Y Y = -\beta X.$$

Pelo Lema 2.1, temos que

$$X(\mu) = \beta(\lambda - \mu), \tag{2.16}$$

$$Y(\lambda) = \alpha(\lambda - \mu). \tag{2.17}$$

Agora,

$$\begin{aligned} XY(\lambda) &= [X, Y](\lambda) + YX(\lambda) = [X, Y](\lambda) \\ &= \nabla_X Y(\lambda) - \nabla_Y X(\lambda) = -\alpha X(\lambda) - \beta Y(\lambda) \\ &= -\beta Y(\lambda) = -\beta\alpha(\lambda - \mu), \end{aligned} \tag{2.18}$$

e

$$\begin{aligned} X(\alpha(\lambda - \mu)) &= X(\alpha)(\lambda - \mu) + \alpha X(\lambda - \mu) \\ &= X(\alpha)(\lambda - \mu) - \alpha X(\mu) \\ &= X(\alpha)(\lambda - \mu) - \alpha\beta(\lambda - \mu). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Assim, de (2.17), (2.18) e (2.19) obtemos que

$$X(\alpha)(\lambda - \mu) = 0,$$

ou seja,  $X(\alpha) = 0$ . □

Como consequência da Proposição 2.9 e do Corolário 2.2, obtemos:

**Proposição 2.10** *Seja  $\Phi$  um tensor de Codazzi com autovalores distintos  $\lambda, \mu$  em uma superfície regular orientada  $S$ . Sejam  $E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$  e  $E_\mu = \ker(\Phi - \mu I)$ . Se  $\lambda$  é constante ao longo das curvas integrais de  $E_\lambda$  e  $\mu$  é constante ao longo das curvas integrais de  $E_\mu$ , então  $(E_\lambda, E_\mu)$  é uma rede isotérmica em  $S$ .*

## 2.5 Superfícies Isotérmicas; exemplos

Nesta seção introduzimos a classe de superfícies isotérmicas que estudaremos no restante deste trabalho, e damos vários exemplos de tais superfícies.

**Definição 2.5** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é isotérmica se, no subconjunto aberto de  $S$  formado pelos pontos não umbílicos, a rede ortogonal determinada por suas linhas de curvaturas é isotérmica. Equivalentemente,  $S$  é isotérmica se, em uma vizinhança de qualquer ponto não umbílico, existe um sistema de coordenadas isotérmico cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura.

Mostraremos em seguida que a classe das superfícies isotérmicas é invariante por inversões em  $\mathbb{R}^3$ . Para isso, precisamos de alguns fatos gerais sobre inversões.

Decorre da Proposição 2.3 que, se  $I : \mathbb{R}^3 - \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{p_0\}$  é a inversão relativa à esfera  $S(p_0; r)$  e  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular com  $p_0 \notin S$ , então  $\bar{S} = I(S)$  é também uma superfície regular. Dado um campo



de vetores diferenciável  $Y$  ao longo de  $S$ , denotemos por  $\mathcal{P}Y$  o campo de vetores ao longo de  $\bar{S}$  dado por

$$\mathcal{P}Y(I(p)) = \mathcal{P}_p Y_p,$$

para todo  $p \in S$ , onde  $\mathcal{P}_p$  é dado por (2.3). Em particular, como  $\mathcal{P}_p$  é uma isometria para todo  $p \in S$  temos que, se  $N$  é um campo unitário diferenciável normal a  $S$ , então  $\mathcal{P}N$  é um campo unitário diferenciável normal a  $\bar{S}$ .

Na Proposição seguinte relacionamos as segundas formas fundamentais de  $S$  e  $\bar{S}$  com respeito a  $N$  e  $\mathcal{P}N$ , respectivamente.

**Proposição 2.11** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular orientada por um campo diferenciável normal unitário  $N$  e  $I$  a inversão relativa à esfera  $S(p_0; r)$ . Então, as segundas formas fundamentais  $A$  e  $\bar{A}$  de  $S$  e  $\bar{S} = I(S)$ , com respeito a  $N$  e  $\mathcal{P}N$ , respectivamente, são relacionadas por*

$$\bar{A}\mathcal{P}_p X_p = -\frac{|p - p_0|^2}{r^2} \mathcal{P}_p \left[ \left( A + 2 \frac{\langle p - p_0, N_p \rangle}{|p - p_0|^2} I \right) X_p \right] \text{ para todo } X_p \in T_p S.$$

A Proposição 2.11 decorre imediatamente do seguinte fato mais geral aplicado ao campo  $Y = N$ .

**Lema 2.2** *Se  $Y$  é um campo diferenciável ao longo de  $S$ , então*

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{P}_p X_p} \mathcal{P}Y = \frac{|p - p_0|^2}{r^2} \left[ \mathcal{P}_p \left( \tilde{\nabla}_{X_p} Y - 2 \frac{\langle p - p_0, Y_p \rangle}{|p - p_0|^2} X_p \right) - 2 \frac{\langle X_p, Y_p \rangle}{|p - p_0|^2} (p - p_0) \right]$$

para todo  $X_p \in T_p S$ , onde  $\tilde{\nabla}$  é a derivação de campos de vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Demonstração:** Seja  $\alpha : J \rightarrow S$  uma curva diferenciável com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = X_p$ . Defina  $c : J \rightarrow I(S)$  por  $c(t) = (I \circ \alpha)(t)$ . Então,  $c(0) = I(p)$  e  $c'(0) = \frac{r^2}{|p - p_0|^2} \mathcal{P}_p X_p$ . Assim:

$$\begin{aligned}
 & \frac{r^2}{|p - p_0|^2} \tilde{\nabla}_{\mathcal{P}_p X_p} \mathcal{P}Y = \tilde{\nabla}_{c'(0)} \mathcal{P}Y = \frac{d}{dt} \mathcal{P}Y(c(t))|_{t=0} \\
 & = \frac{d}{dt} \mathcal{P}Y(I(\alpha(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \mathcal{P}_{\alpha(t)} Y_{\alpha(t)}|_{t=0} \\
 & = \frac{d}{dt} \left( Y_{\alpha(t)} - 2 \frac{\langle \alpha(t) - p_0, Y_{\alpha(t)} \rangle}{|\alpha(t) - p_0|^2} (\alpha(t) - p_0) \right) |_{t=0} \\
 & = \tilde{\nabla}_{X_p} Y - 2 \frac{\langle p - p_0, Y_p \rangle}{|p - p_0|^2} X_p - 2 \frac{\langle p - p_0, \nabla_{X_p} Y \rangle}{|p - p_0|^2} (p - p_0) + \\
 & + \frac{4 \langle p - p_0, Y_p \rangle \langle p - p_0, X_p \rangle}{|p - p_0|^4} (p - p_0) - 2 \frac{\langle X_p, Y_p \rangle}{|p - p_0|^2} (p - p_0) \\
 & = \mathcal{P}_p \left( \tilde{\nabla}_{X_p} Y - \frac{2 \langle p - p_0, Y_p \rangle}{|p - p_0|^2} X_p \right) - 2 \frac{\langle X_p, Y_p \rangle}{|p - p_0|^2} (p - p_0).
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.5** *Nas hipóteses da Proposição 2.11, temos:*

a) *Se  $X_p \in T_p S$  é uma direção principal associada ao autovalor  $\lambda$  de  $A_{N_p}$ , então  $\mathcal{P}X_p$  é uma direção principal associada ao autovalor*

$$-\frac{|p - p_0|^2}{r^2} \left( \lambda + \frac{2 \langle p - p_0, N_p \rangle}{|p - p_0|^2} \right)$$

*de  $\overline{A_{\mathcal{P}N_p}}$*

b)  *$I$  leva linhas de curvatura de  $S$  em linhas de curvatura de  $\overline{S}$ .*

c)  *$p$  é ponto umbílico de  $S$  se, e somente se,  $I(p)$  é ponto umbílico de  $\overline{S}$ .*

**Proposição 2.12** *Se  $S$  é isotérmica, então  $I(S)$  também é, onde  $I$  é uma inversão.*

**Demonstração:** Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é um sistema de coordenadas isotérmico cujas curvas coordenadas são linhas de curvaturas de  $S$ ,

decorre da Proposição 2.3 e do item b) do Corolário 2.5 que  $\tilde{\mathbf{x}} = I \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow I(\mathbf{x}(U)) \subset I(S)$  é também um sistema de coordenadas isotérmico cujas curvas coordenadas são linhas de curvaturas de  $I(S)$ .  $\square$

Aplicando os resultados da seção anterior à segunda forma fundamental de uma superfície regular obtemos importantes exemplos de superfícies isotérmicas. Por exemplo, o Corolário 2.4 implica imediatamente o seguinte resultado.

**Proposição 2.13** *Toda superfície regular com curvatura média constante é isotérmica.*

Como consequência do Corolário 2.2 obtemos uma outra classe de superfícies isotérmicas.

**Proposição 2.14** *Toda superfície cujas linhas de curvaturas têm curvatura geodésica constante é isotérmica.*

A classe de superfícies isotérmicas dada na proposição acima foi caracterizada por Bonnet-Ribaucour.

**Teorema 2.3** *(Bonnet-Ribaucour). Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular sem pontos umbílicos cujas linhas de curvatura têm curvatura geodésica constante. Então existe uma inversão  $I$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $I(S)$  é um cilindro sobre uma curva plana, um cone sobre uma curva em uma esfera ou uma superfície de rotação.*

**Demonstração:** Ver [4]. □

Mostraremos a seguir que a classe das superfícies regulares cujas linhas de curvatura têm curvatura geodésica constante inclui as superfícies chamadas de *cíclides de Dupin*, caracterizadas pela propriedade de que suas linhas de curvatura, correspondentes a ambas as curvaturas principais, são arcos de círculo ou segmentos de reta.

Isso decorre da Proposição 2.9 juntamente com o seguinte fato:

**Proposição 2.15** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Se uma linha de curvatura de  $S$  é um arco de círculo ou um segmento de reta, então a curvatura principal correspondente é constante ao longo de tal linha de curvatura.*

**Demonstração:** Seja  $c : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  uma parametrização pelo comprimento de arco de um círculo de raio  $r$ , o qual é uma linha de curvatura de  $S$  correspondente à curvatura principal  $k_1$ . É fácil ver que  $c'''(s) = -\frac{1}{r^2}c'(s)$ , para todo  $s \in I$ . Seja  $X$  um campo diferenciável em  $S$  em uma vizinhança de  $c(I)$  tal que  $X(c(s)) = c'(s)$  para todo  $s \in I$ . Então  $\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_X X = -\frac{1}{r^2}X$  ao longo de  $c$ , logo

$$\begin{aligned} X(k_1) &= X\langle AX, X \rangle = X\langle \tilde{\nabla}_X X, N \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_X X, N \rangle + \langle \tilde{\nabla}_X X, \tilde{\nabla}_X N \rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{r^2}X, N \right\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_X X, -k_1 X \right\rangle \\ &= -\frac{1}{r^2} \langle X, N \rangle - \frac{k_1}{2} X \langle X, X \rangle = 0. \end{aligned}$$

O caso em que as linhas de curvatura são segmentos de retas é análogo. □

Outra classe importante de superfícies isotérmicas em  $\mathbb{R}^3$  é formada pelas quádricas. Para provarmos esse fato, discutiremos inicialmente o conceito de sistemas triplos ortogonais de superfícies em  $R^3$ .

**Definição 2.6** Um sistema triplo ortogonal de superfícies em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  é uma terna  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$  de famílias a 1-parâmetro de superfícies tal que por cada ponto  $p \in U$  passa uma superfície de cada família e os planos tangentes em  $p$  às superfícies de duas quaisquer das famílias são ortogonais.

O seguinte resultado caracteriza as linhas de interseção de um sistema triplo ortogonal de superfícies.

**Teorema 2.4** (Dupin) As linhas de interseção das superfícies de um sistema triplo ortogonal são linhas de curvatura das superfícies.

**Demonstração:** Seja  $\Delta_i$  a distribuição formada pelos planos tangentes das superfícies da família  $\mathcal{F}_i$  de superfícies. Sejam  $X, Y, Z$  campos de vetores unitários com

$$X \in \Delta_1 \cap \Delta_3, Y \in \Delta_2 \cap \Delta_3, Z \in \Delta_1 \cap \Delta_2.$$

Como  $\Delta_3$  é involutiva, temos

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \in \Delta_3.$$

Pela ortogonalidade, temos

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_Y X, Z \rangle.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Z Y, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle, \\ \langle \nabla_X Z, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}0 &= X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ 0 &= Y(\langle X, Z \rangle) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle, \\ 0 &= Z(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.\end{aligned}$$

Das equações acima, obtemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= -\langle Y, \nabla_X Z \rangle = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle = \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle \\ &= -\langle \nabla_Y X, Z \rangle = -\langle \nabla_X Y, Z \rangle,\end{aligned}$$

ou seja,  $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$ . Ainda, como  $Y$  é unitário segue que

$$0 = X(\langle Y, Y \rangle) = 2\langle \nabla_X Y, Y \rangle.$$

Assim,

$$0 = \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Y \rangle.$$

Da equação acima segue que

$$\nabla_X Y = \lambda X. \tag{2.20}$$

Se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies das famílias  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ , respectivamente, então  $X|_{S_1}$  é um campo tangente unitário à curva de interseção de  $S_1$  e  $S_2$ , enquanto

que  $Y_{|_{S_1}}$  é um campo normal a  $S_1$ . Portanto, a equação (2.20) implica que tal curva é uma linha de curvatura de  $S_1$ . Analogamente para as demais linhas de interseção.  $\square$

Provaremos agora que toda quádrlica faz parte de um sistema triplo ortogonal cujas superfícies de todas as famílias são também quádrlicas. Inicialmente observamos que toda quádrlica é dada em certas coordenadas por uma equação da forma

$$g(\lambda) = \frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1, \quad 0 < a^2 < b^2 < c^2 \quad (2.21)$$

para algum  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Note que, para  $\lambda < a^2$  obtemos elipsóides, para  $a^2 < \lambda < b^2$  hiperbolóides de uma folha e para  $b^2 < \lambda < c^2$  hiperbolóides de duas folhas. Mostraremos a seguir que as três famílias correspondentes de quádrlicas formam um sistema triplo ortogonal. De fato, para qualquer  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  com  $x, y, z \neq 0$ , o gráfico da função  $\lambda \mapsto g(\lambda) - 1$  tem o aspecto mostrado na figura 1.

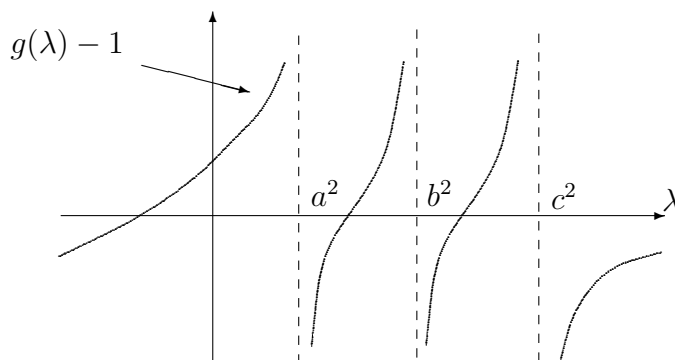


Figura 1

Conseqüentemente,  $g(\lambda) - 1$  se anula para certos vetores  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , com  $\lambda_1 < a^2$ ,  $a^2 < \lambda_2 < b^2$  e  $b^2 < \lambda_3 < c^2$ . Assim, exatamente uma superfície de cada família passa através de cada ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Resta provar que os planos tangentes em  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  às superfícies de duas quaisquer das famílias são ortogonais. Em um ponto  $(x, y, z)$  da superfície  $g(\lambda_i) = 1$ , um vetor normal é dado por

$$\frac{1}{2}(D_1g(\lambda_i), D_2g(\lambda_i), D_3g(\lambda_i)) = \left( \frac{x}{a^2 - \lambda_i}, \frac{y}{b^2 - \lambda_i}, \frac{z}{c^2 - \lambda_i} \right).$$

Assim, o produto interno dos vetores normais a duas superfícies  $g(\lambda_i) = 1$  e  $g(\lambda_j) = 1$  que passam por  $(x, y, z)$  é

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{(a^2 - \lambda_i)(a^2 - \lambda_j)} + \frac{y^2}{(b^2 - \lambda_i)(b^2 - \lambda_j)} + \frac{z^2}{(c^2 - \lambda_i)(c^2 - \lambda_j)} \\ &= \frac{g(\lambda_i) - g(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} = 0 \end{aligned}$$

Fixado  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  considere o polinômio de grau três

$$\phi(\lambda) = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)(g(\lambda) - 1), \quad (2.22)$$

com raízes

$$\lambda_1 < a^2, \quad a^2 < \lambda_2 < b^2, \quad b^2 < \lambda_3 < c^2,$$

e escreva

$$\phi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda).$$



Substituindo esta expressão para  $\phi(\lambda)$  em (2.22) e fazendo  $\lambda = a^2, b^2, c^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)(a^2 - \lambda_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 &= \frac{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_3)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \\ z^2 &= \frac{(c^2 - \lambda_1)(c^2 - \lambda_2)(c^2 - \lambda_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{aligned}$$

Para  $\lambda_i = \bar{\lambda}$ , estas equações dão uma parametrização para a quádrlica  $g(\bar{\lambda}) = 1$  em termos de  $\lambda_j, \lambda_k$ . Em particular, fazendo

$$\begin{aligned} a^2 - \bar{\lambda}^2 &= \alpha, & b^2 - \bar{\lambda}^2 &= \beta, & c^2 - \bar{\lambda}^2 &= \gamma \\ \lambda_j - \bar{\lambda} &= u, & \lambda_k - \bar{\lambda} &= v, \end{aligned}$$

obtemos uma parametrização para a quádrlica

$$g(\bar{\lambda}) = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1 \quad (2.23)$$

cujas funções coordenadas são

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \sqrt{\frac{\alpha(\alpha - u)(\alpha - v)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}} \\ y(u, v) &= \sqrt{\frac{\beta(\beta - u)(\beta - v)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}} \\ z(u, v) &= \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - u)(\gamma - v)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Um cálculo direto mostra que os coeficientes da primeira forma fundamental de tal parametrização são:

$$E = \frac{u(u - v)}{f(u)}, \quad F = 0, \quad G = \frac{v(v - u)}{f(v)}, \quad (2.25)$$

onde  $f(t) = 4(\alpha - t)(\beta - t)(\gamma - t)$ . Podemos agora mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 2.16** *Toda quádrlica é uma superfície isotérmica.*

**Demonstração:** Dada uma quádrlica com equação (2.23), considere o sistema de coordenadas definido por (2.24). Note que as curvas coordenadas são linhas de curvaturas, pelo Teorema 2.4. Observe ainda que os coeficientes  $E$  e  $G$  da primeira forma fundamental de  $S$  com respeito a tal sistema de coordenadas, dados por (2.25), satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{E}{G} \right) = 0$$

A proposição segue agora da Proposição 2.6. □

## 2.6 Superfícies isotérmicas em coordenadas principais isotérmicas

A existência de sistemas de coordenadas isotérmicos principais em uma superfície isotérmica e o Teorema 1.3 implicam imediatamente o seguinte resultado fundamental.

**Teorema 2.5** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície isotérmica, sem pontos umbílicos. Então existem localmente sistemas de coordenadas em relação aos quais os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dados por*

$$\begin{aligned} E = G = e^{2\vartheta}, \quad F = 0 \\ e = e^{\vartheta} V_1, \quad g = e^{\vartheta} V_2 \quad e \quad f = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

## Superfícies isotérmicas em coordenadas principais isotérmicas 64

onde  $\vartheta$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  satisfazem o sistema não-linear de equações diferenciais parciais (Equações de Gauss-Mainardi-Codazzi):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_2^2} + V_1 V_2 = 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2} V_2 \\ \frac{\partial V_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} V_1 \end{cases} . \quad (2.27)$$

Reciprocamente, se  $\vartheta$ ,  $V_1$  e  $V_2$  satisfazem o sistema (2.27) em um aberto simplesmente conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$ , então existe um difeomorfismo  $\mathbf{x} : U \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ , o qual é um sistema de coordenadas isotérmico principal na superfície isotérmica  $S = \mathbf{x}(U)$  em relação ao qual os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dados por (2.26).

**Exemplo 2.4** Seja  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$  um sistema de coordenadas cartesianas no plano  $z = 0$  em  $\mathbb{R}^3$ . Então os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são  $E(u, v) = 1$ ,  $F(u, v) = 0$ ,  $G(u, v) = 1$  e  $e(u, v) = f(u, v) = g(u, v) = 0$ . Portanto, a solução do sistema (2.27) associada a  $\mathbf{x}$  é a solução trivial ( $\vartheta = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0$ ).

**Exemplo 2.5** Seja  $\mathbf{x}(u, v) = (f_1(u), f_2(u), v)$  um sistema de coordenadas no cilindro em  $\mathbb{R}^3$  sobre a curva plana  $\alpha(t) = (f_1(t), f_2(t))$  parametrizada pelo comprimento de arco. Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais associados a  $\mathbf{x}$  são  $E = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2 = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$  e

$$e(u, v) = k(u), \quad f = 0 \text{ e } g = 0,$$

**Superfícies isotérmicas em coordenadas principais isotérmicas** 65

onde  $k(u)$  é a curvatura de  $\alpha$  em  $u$ . Portanto,  $(\vartheta = 0, V_1 = 0, V_2 = k(u))$  é a solução do sistema (2.27) associada a  $\mathbf{x}$ .

**Exemplo 2.6** Seja  $\mathbf{x}(u, v) = (f_1(u)\cos v, f_1(u)\sen v, f_2(u))$  um sistema de coordenadas na superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  obtida pela rotação da curva plana  $\alpha(t) = (f_1(t), 0, f_2(t))$ ,  $f_1(t) > 0$ , parametrizada pelo comprimento de arco, em torno do eixo  $Oz$ . Os coeficientes da primeira forma fundamental com respeito a tal sistema são  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = f_1^2(u)$ . Fazendo, como na demonstração da Proposição 2.6,  $\tilde{u} = \int \frac{1}{f_1(u)} du := g(u)$  e  $\tilde{v} = v$ , obtemos um sistema de coordenadas isotérmico principal em  $S$ , dado por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (f_1(\tilde{u})\cos \tilde{v}, f_1(\tilde{u})\sen \tilde{v}, f_2(\tilde{u}))$$

Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais associados a  $\tilde{\mathbf{x}}$  são

$$\tilde{E} = \tilde{G} = f_1^2(u), \quad \tilde{F} = 0,$$

$$\tilde{e} = f_1^2(u)(f_1'(u)f_2''(u) - f_2'(u)f_1''(u)), \quad \tilde{f} = 0, \quad \tilde{g} = f_2'(u)f_1(u).$$

Portanto,  $(\vartheta = \ln f_1(u), V_1 = f_1(u)(f_1'(u)f_2''(u) - f_2'(u)f_1''(u)), V_2 = f_2'(u))$ , onde  $u = g^{-1}(\tilde{u})$ , é a solução do sistema (2.27) associada a  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

**Exemplo 2.7** Um cálculo longo mas direto mostra que a aplicação

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{m(\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2m}}{m} \sinh \sqrt{2m} u_1 \\ -\sqrt{2m} \sen \sqrt{2m} u_2 \\ k \end{pmatrix}$$

## ***Superfícies isotérmicas em coordenadas principais isotérmicas*** 66

define um sistema de coordenadas isotérmico principal em uma superfície isotérmica  $S \subset \mathbb{R}^3$ , cuja solução associada  $(\vartheta, V_1, V_2)$  do sistema (2.27) é dada por

$$\begin{aligned} e^\vartheta &= \pm \frac{\cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1}{\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2}, \\ V_1 &= -\frac{k}{\cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1} - \frac{k}{\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2}, \\ V_2 &= -\frac{k}{\cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1} + \frac{k}{\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2}. \end{aligned}$$

Veremos no próximo capítulo que a superfície  $S$  construída no exemplo anterior é a imagem do plano  $z = 0$  por uma transformação de Darboux-Bianchi.

## Capítulo 3

# Transformações de Superfícies

A origem da noção de superfícies isotérmicas está ligada ao seguinte problema estudado por Christoffel ([3]):

**Problema de Christoffel:** *Quais são as superfícies regulares  $S \subset \mathbb{R}^3$  para as quais existe uma outra superfície regular  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$  e um difeomorfismo conforme  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$ , o qual não é a composição de uma homotetia e uma translação, tal que os planos tangentes a  $S$  e  $\tilde{S}$  em pontos correspondentes são paralelos ?*

Iniciamos este capítulo apresentando a solução do Problema de Christoffel, a qual conduz naturalmente à noção de transformação de Combescure entre superfícies regulares de  $\mathbb{R}^3$ .

Em seguida, com o intuito de desenvolver a transformação de Darboux-Bianchi entre superfícies isotérmicas em  $\mathbb{R}^3$ , estudamos mais geralmente a noção de transformação de Ribaucour entre superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ . Co-

mo consequência, descrevemos um método geométrico de obter novas soluções do sistema não linear de equações diferenciais parciais associado a uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$  a partir de uma dada, em termos de soluções de um sistema linear de equações diferenciais parciais. Finalmente, mostramos como tal método pode ser aplicado para produzir soluções do sistema não linear de equações diferenciais parciais associado a superfícies isotérmicas em  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.1 O Problema de Christoffel

Nesta seção apresentamos a solução do Problema de Christoffel e discutimos vários fatos relacionados. Inicialmente mostramos que difeomorfismos entre duas superfícies regulares  $S$  e  $\tilde{S}$  (não necessariamente conformes) com a propriedade de que os planos tangentes a  $S$  e  $\tilde{S}$  em pontos correspondentes são paralelos estão em correspondência com tensores de Codazzi em  $S$  satisfazendo uma propriedade adicional.

**Proposição 3.1** *Seja  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  um difeomorfismo entre as superfícies regulares orientadas  $S$  e  $\tilde{S}$  tal que os planos tangentes a  $S$  e  $\tilde{S}$  em pontos correspondentes são paralelos. Então  $\Phi = \psi_*$  define um tensor de Codazzi invertível em  $S$  satisfazendo*

$$\alpha(X, \Phi(Y)) = \alpha(\Phi(X), Y) \tag{3.1}$$

*ou, equivalentemente,  $\Phi^t A = A\Phi$ . Reciprocamente, se  $S$  é simplesmente conexa e  $\Phi$  é um tensor de Codazzi invertível em  $S$  satisfazendo (3.1), então*

existe localmente um difeomorfismo  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  tal que os planos tangentes a  $S$  e  $\tilde{S}$  em pontos correspondentes são paralelos e  $\Phi = \psi_*$ .

**Demonstração:** A diferencial  $\omega = \psi_*$  de  $\psi$  pode ser vista como uma 1-forma em  $S$  com valores em  $\mathbb{R}^3$ . Como  $T_p S$  e  $T_{\psi(p)} \tilde{S}$  coincidem (como subespaços de  $\mathbb{R}^3$ ), também podemos interpretar  $\psi_*$  como um tensor  $\Phi$  em  $S$ . Como  $\omega$  é exata, temos

$$0 = d\omega(X, Y) = \tilde{\nabla}_X \Phi(Y) - \tilde{\nabla}_Y \Phi(X) - \Phi([X, Y]) \quad (3.2)$$

pela equação (1.19). Tomando as componentes normal e tangente de (3.2) obtemos, respectivamente,

$$\nabla_X \Phi(Y) - \nabla_Y \Phi(X) - \Phi([X, Y]) = 0 \quad (3.3)$$

$$\alpha(X, \Phi(Y)) = \alpha(\Phi(X), Y). \quad (3.4)$$

A equação (3.3) pode ser escrita como

$$\nabla_X \Phi(Y) - \Phi(\nabla_X Y) = \nabla_Y \Phi(X) - \Phi(\nabla_Y X),$$

ou seja,  $\Phi$  é um tensor de Codazzi. Por outro lado, a equação (3.4) é equivalente a

$$\langle AX, \Phi(Y) \rangle = \langle A\Phi(X), Y \rangle, \quad (3.5)$$

ou seja,  $\Phi^t A = A\Phi$ .

Reciprocamente, se  $\Phi$  é um tensor de Codazzi satisfazendo (3.1) temos que  $\Phi$  define uma 1-forma fechada em  $S$  com valores em  $\mathbb{R}^3$ . Como  $S$  é simplesmente conexa, obtemos que  $\Phi$  é exata, ou seja, existe  $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal



que  $\Phi = \psi_*$ . Como  $\Phi$  é invertível,  $\psi$  é localmente um difeomorfismo. Finalmente, como  $\psi_*T_pS = \Phi T_pS = T_pS$ , os planos tangentes a  $S$  e  $\tilde{S}$  em pontos correspondentes são paralelos.  $\square$

**Proposição 3.2** *Nas hipóteses da Proposição 3.1, sejam  $N$  um campo normal unitário diferenciável em um aberto  $U \subset S$  e  $\tilde{N}$  o campo normal unitário em  $\psi(U) \subset \tilde{S}$  dado por  $\tilde{N}(\psi(p)) = N(p)$ , para todo  $p \in S$ . Então as segundas formas fundamentais de  $S$  e  $\tilde{S}$  com respeito a  $N$  e  $\tilde{N}$ , respectivamente, são relacionadas por:*

$$\tilde{A}\psi_*X_p = AX_p, \text{ para todo } p \in U. \quad (3.6)$$

*Em particular,  $\psi$  preserva linhas de curvaturas se, e somente se,  $\Phi = \psi_*$  é um tensor simétrico.*

**Demonstração:** Temos que

$$\tilde{A}\psi_*X_p = -\frac{d}{dt}\tilde{N}(\psi(\gamma(t)))|_{t=0} = -\frac{d}{dt}N(\gamma(t))|_{t=0} = AX_p,$$

onde  $\gamma$  é uma curva em  $S$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = X_p$ . Além disso, decorre de (3.5) que  $\Phi$  é um tensor simétrico ( $\Phi = \Phi^t$ ) se, e somente se, os autovetores de  $A$  também são autovetores de  $\Phi$ . Tendo em vista (3.6), isto ocorre se, e somente se, as imagens dos autovetores de  $A$  por  $\psi_*$  são também autovetores de  $\tilde{A}$ , ou seja, se, e somente se,  $\psi$  preserva linhas de curvatura.  $\square$

**Definição 3.1** *Uma transformação de Combescure entre duas superfícies regulares orientadas  $S$  e  $\tilde{S}$  é um difeomorfismo  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  que preserva*

linhas de curvatura tal que as normais a  $S$  e  $\tilde{S}$  em pontos correspondentes são paralelas. Dizemos então que  $\tilde{S}$  é uma transformada de Combescure de  $S$ .

Dada uma superfície regular  $S$  simplesmente conexa, obtemos na próxima proposição uma expressão explícita para as transformadas de Combescure de  $S$ , em termos de duas funções diferenciáveis em  $S$  satisfazendo uma determinada condição.

**Proposição 3.3** *Seja  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  uma transformação de Combescure. Se  $S$  é simplesmente conexa, então existem  $\varphi, \beta : S \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis satisfazendo*

$$\nabla\beta = -A \nabla\varphi \tag{3.7}$$

*tais que*

$$\psi = \nabla\varphi + \beta N. \tag{3.8}$$

*Além disso,  $\Phi = \psi_*$  é dado por*

$$\Phi = \text{Hess}\varphi - \beta A. \tag{3.9}$$

*Reciprocamente, se  $(\varphi, \beta)$  satisfaz (3.7), o tensor  $\Phi$  definido por (3.9) é invertível e  $\psi$  dada por (3.8) é injetora, então  $\psi : S \rightarrow \tilde{S} = \psi(U)$  é uma transformação de Combescure e  $\Phi = \psi_*$ .*

**Demonstração:** Seja  $\Phi = \psi_*$ . Escreva

$$\psi(p) = Z(p) + \beta(p)N_p,$$

onde  $Z(p) \in T_p S$ , para todo  $p \in S$ . Então, para todo  $X_p \in T_p S$ ,

$$\begin{aligned} \Phi X_p &= \psi_* X_p = \tilde{\nabla}_{X_p} Z + X_p(\beta)N_p + \beta(p)\tilde{\nabla}_{X_p} N \\ &= \nabla_{X_p} Z + \langle AZ_p, X_p \rangle N_p + X_p(\beta)N_p - \beta(p)AX_p. \end{aligned}$$

Separando a equação acima em suas componentes tangente e normal, obtemos:

$$\nabla_{X_p} Z - \beta(p)AX_p = \Phi X_p \quad e \quad \langle AZ_p, X_p \rangle + X_p(\beta) = 0. \quad (3.10)$$

Da primeira equação obtemos, para quaisquer  $X_p, Y_p \in T_p S$ ,  $p \in S$ :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_p} Z, Y_p \rangle &= \beta(p)\langle AX_p, Y_p \rangle + \langle \Phi X_p, Y_p \rangle \\ &= \beta(p)\langle AY_p, X_p \rangle + \langle \Phi Y_p, X_p \rangle = \langle \nabla_{Y_p} Z, X_p \rangle, \end{aligned}$$

pois  $A$  e  $\Phi$  são tensores simétricos. Logo, como  $S$  é simplesmente conexa, decorre do Lema 1.35 que existe  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $Z = \nabla \varphi$ .

Portanto,

$$\psi(p) = \nabla \varphi(p) + \beta(p)N_p.$$

Além disso, pela segunda equação em (3.10)

$$\langle \nabla \beta, X_p \rangle = X_p(\beta) = -\langle AZ_p, X_p \rangle = -\langle A \nabla \varphi(p), X_p \rangle,$$

logo  $\nabla \beta = -A \nabla \varphi$ . Finalmente, temos:

$$\begin{aligned} \Phi X_p &= \nabla_{X_p} Z - \beta(p)AX_p = \nabla_{X_p} \nabla \varphi(p) - \beta(p)AX_p \\ &= \text{Hess } \varphi(X_p) - \beta(p)AX_p. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $(\varphi, \beta)$  satisfaz (3.7) e  $\psi$  é dada por (3.8), então os cálculos acima mostram que  $\psi_* = \Phi = Hess \varphi - \beta A$ . Como  $\Phi = \psi_*$  é invertível e  $\psi$  é injetora, concluímos que  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S} = \psi(S)$  é um difeomorfismo. Além disso,  $\psi_* X_p = \Phi X_p \in T_p S$  para todo  $X_p \in T_p S$ , logo as normais a  $S$  e  $\tilde{S}$  em  $p$  e  $\psi(p)$ , respectivamente, são paralelas. Finalmente, como  $\Phi = Hess \varphi - \beta A$  é um tensor simétrico, decorre da Proposição 3.2 que  $\psi$  preserva linhas de curvaturas.  $\square$

É conveniente escrever a Proposição 3.3 em coordenadas. Para isso precisamos do seguinte lema:

**Lema 3.1** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas principal em  $S$ ,  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  a solução do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$ , e  $\varphi, \beta : \mathbf{x}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Defina  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{x}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$  por  $\nabla \varphi = \frac{\gamma_1}{v_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\gamma_2}{v_2} \frac{\partial}{\partial u_2}$ . Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

(a)  $\nabla \beta = -A \nabla \varphi$ .

(b)  $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$  satisfaz o sistema linear de equações diferenciais parciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v_i \gamma_i, \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_j} = h_{ij} \gamma_j, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u_i} = -V_i \gamma_i, \quad i = 1, 2, \end{array} \right.$$

**Demonstração:** Segue da definição das funções  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v_i \gamma_i, \quad i = 1, 2.$$

Logo  $\nabla\beta = -A \nabla\varphi$  se, e somente se,

$$\frac{\partial\beta}{\partial u_i} = \langle \nabla\beta, \frac{\partial}{\partial u_i} \rangle = -\langle \nabla\varphi, A \frac{\partial}{\partial u_i} \rangle = -\frac{V_i}{v_i} \langle \nabla\varphi, \frac{\partial}{\partial u_i} \rangle = -\frac{V_i}{v_i} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2$$

Por outro lado, decorre da demonstração da Proposição 3.3 que, se  $\nabla\beta = -A \nabla\varphi$ , então  $\Psi = \nabla\varphi + \beta N$  satisfaz  $\Psi_* = Hess \varphi - \beta A$ , logo a Proposição 3.1 implica que  $\Phi = Hess \varphi - \beta A$  e, portanto,  $Hess \varphi$ , comuta com  $A$ . Portanto, as direções principais  $X_1 = \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial u_1}$  e  $X_2 = \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial u_2}$  são também autovetores de  $Hess \varphi$ , ou seja,

$$\langle Hess \varphi(X_1), X_2 \rangle = 0 = \langle Hess \varphi(X_2), X_1 \rangle.$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle Hess \varphi(X_1), X_2 \rangle &= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} \nabla\varphi, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} (\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2), X_2 \rangle \\ &= \langle \gamma_1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} X_1 + \frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} X_2, X_2 \rangle = \gamma_1 \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_1}} X_1, X_2 \rangle + \frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = -h_{21}\gamma_1 + \frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1}, \end{aligned}$$

e, analogamente,  $\langle Hess \varphi(X_2), X_1 \rangle = -h_{12}\gamma_2 + \frac{\partial\gamma_1}{\partial u_2}$ , logo

$$\frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = h_{21}\gamma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\gamma_1}{\partial u_2} = h_{12}\gamma_2.$$

□

**Corolário 3.1** *Sejam  $S$  uma superfície regular,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S$  um sistema de coordenadas principal em um aberto simplesmente conexo  $V \subset S$  e  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  a solução do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$ . Se  $\psi : V \longrightarrow \tilde{S}$  é uma transformação de Combescure, então*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x} = \frac{\gamma_1}{v_1} \mathbf{x}_{u_1} + \frac{\gamma_2}{v_2} \mathbf{x}_{u_2} + \beta N \quad (3.11)$$

é um sistema de coordenadas principal em  $\psi(V) \subset \tilde{S}$ , onde  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta)$  é uma solução do sistema linear de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_j} = h_{ij} \gamma_j, & 1 \leq i \neq j \leq 2 \\ \frac{\partial \beta}{\partial u_i} = -V_i \gamma_i, & i = 1, 2, \end{cases} \quad (3.12)$$

Reciprocamente, se  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta)$  é uma solução de (3.12) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , as funções  $\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + h_{21} \gamma_2 - \beta V_1$  e  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + h_{12} \gamma_1 - \beta V_2$  não se anulam em  $U$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  dada por (3.11) é injetora em  $U$ , então  $\tilde{\mathbf{x}}|_U$  define um sistema de coordenadas principal em uma transformada de Combescure de  $V = \mathbf{x}(U)$ . Além disso, a solução  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{21}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$  do sistema (1.31) associada a  $\tilde{\mathbf{x}}$  é dada por

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \gamma_2 h_{21} - \beta V_1 \\ \tilde{v}_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \gamma_1 h_{12} - \beta V_2 \\ \tilde{h}_{12} = h_{12}, \quad \tilde{h}_{21} = h_{21} \\ \tilde{V}_i = V_i, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

**Demonstração:** Como  $\psi$  preserva linhas de curvatura,  $\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x}$  é um sistema de coordenadas principal em  $\tilde{S}$ . Pela Proposição 3.3, existem  $\varphi, \beta : V \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis satisfazendo  $\nabla \varphi = -A \nabla \beta$  tais que

$$\psi = \nabla \varphi + \beta N.$$

Definindo  $\gamma_i$  por:

$$\nabla \varphi = \frac{\gamma_1}{v_1} \mathbf{x}_{u_1} + \frac{\gamma_2}{v_2} \mathbf{x}_{u_2}, \quad (3.13)$$

temos que  $\tilde{\mathbf{x}}$  é dada por (3.11). Decorre do Lema 3.1 que  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta)$  satisfaz (3.12).

Reciprocamente, seja  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta)$  uma solução de (3.12) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Defina  $\varphi$ , a menos de uma constante, por (3.13). Pelo Lema 3.1,  $\varphi, \beta$  satisfazem (3.7). Além disso, o tensor  $\Phi = Hess \varphi - \beta A$  satisfaz:

$$\begin{aligned} \Phi X_1 &= (Hess \varphi - \beta A)X_1 = \nabla_{X_1} \nabla \varphi - \beta A X_1 \\ &= X_1(\gamma_1) + \gamma_2 \langle \nabla_{X_1} X_2, X_1 \rangle - \beta \frac{V_1}{v_1} X_1 \\ &= \frac{1}{v_1} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + h_{21} \gamma_2 - \beta V_1 \right) X_1 \end{aligned}$$

e, analogamente

$$\Phi X_2 = \frac{1}{v_2} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + h_{12} \gamma_1 - \beta V_2 \right) X_2,$$

onde  $X_i = v_i^{-1} \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , logo  $\Phi$  é invertível em  $U$  pela hipótese de que as funções  $\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + h_{21} \gamma_2 - \beta V_1$  e  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + h_{12} \gamma_1 - \beta V_2$  não se anulam em  $U$ . Pela Proposição 3.3, concluímos que (3.11) define um sistema de coordenadas principal em uma transformada de Combescure de  $V$ .

Mostraremos agora a última afirmação. Temos:

$$\tilde{v}_1^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \psi_* \frac{\partial}{\partial u_1}, \psi_* \frac{\partial}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \Phi \frac{\partial}{\partial u_1}, \Phi \frac{\partial}{\partial u_1} \right\rangle = v_1^2 \langle \Phi X_1, \Phi X_1 \rangle$$

logo

$$\tilde{v}_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + h_{21} \gamma_2 - \beta V_1.$$

Analogamente,

$$\tilde{v}_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + h_{12} \gamma_1 - \beta V_2.$$

Logo

$$\tilde{h}_{12} = \frac{1}{\tilde{v}_1} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_1} = \frac{1}{\tilde{v}_1} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} \gamma_1 + h_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \beta}{\partial u_1} V_2 - \beta \frac{\partial V_2}{\partial u_1} \right).$$

Usando que  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  é a solução do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$  e que  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta)$  satisfaz (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{12} &= \frac{1}{\tilde{v}_1} \left( \frac{\partial h_{21}}{\partial u_2} \gamma_1 + h_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} \gamma_1 + h_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + V_1 V_2 \gamma_1 - \beta h_{12} V_1 \right) \\ &= \frac{h_{12}}{\tilde{v}_1} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + h_{12} \gamma_2 - \beta V_1 \right) = h_{12}.\end{aligned}$$

Analogamente,  $\tilde{h}_{21} = h_{21}$ . Finalmente, temos

$$\tilde{A}\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\tilde{V}_i}{\tilde{v}_i} \psi_* \frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (3.14)$$

Usando a Proposição 3.2, obtemos

$$\tilde{A}\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = A \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{V_i}{v_i} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

e

$$\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = \Phi \frac{\partial}{\partial u_i} = v_i \Phi X_i = \frac{\tilde{v}_i}{v_i} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Substituindo em (3.14) obtemos que  $\tilde{V}_i = V_i$ ,  $i = 1, 2$ . □

**Proposição 3.4** *Seja  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  uma transformação de Combescure conforme entre as superfícies regulares  $S$  e  $\tilde{S}$ . Se  $S$  não tem pontos umbílicos, então uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- a)  $\psi$  é a composta de uma homotetia e uma translação;
- b)  $S$  e  $\tilde{S}$  formam um par de superfícies isotérmicas.

*Reciprocamente, se  $S$  é uma superfície isotérmica, então existe uma outra superfície isotérmica  $\tilde{S}$  e uma transformação de Combescure conforme  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$ . Além disso,  $\psi$  é única a menos de uma homotetia e uma translação.*



**Demonstração:** Pelas Proposições 3.1 e 3.2,  $\Phi = \psi_*$  é um tensor de Codazzi simétrico em  $S$ . Como  $\psi$  é conforme, existe uma função diferenciável  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\langle \Phi X_p, \Phi Y_p \rangle = \langle \psi_* X_p, \psi_* Y_p \rangle = \lambda^2 \langle X_p, Y_p \rangle,$$

para todo  $p \in S$  e para quaisquer  $X_p, Y_p \in T_p S$ . Portanto  $\Phi^2 = \lambda^2 I$ . Suponhamos inicialmente que  $\Phi = \lambda I$ . Usando a equação de Codazzi

$$\nabla_X \Phi(Y) - \Phi(\nabla_X Y) = \nabla_Y \Phi(X) - \Phi(\nabla_Y X)$$

para campos de vetores  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$  linearmente independentes, obtemos:

$$X(\lambda)Y + \lambda \nabla_X Y - \lambda \nabla_X Y = Y(\lambda)X + \lambda \nabla_Y X - \lambda \nabla_Y X$$

logo

$$X(\lambda)Y - Y(\lambda)X = 0$$

e, portanto

$$X(\lambda) = Y(\lambda) = 0.$$

Assim,  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  é constante em  $S$ , e conseqüentemente

$$\psi_*(p)X_p = \lambda X_p, \text{ para todo } p \in S \text{ e para todo } X_p \in T_p S.$$

Portanto,  $\psi$  é a composta de uma homotetia de razão  $\lambda$  e uma translação.

O caso  $\Phi = -\lambda I$  é análogo. A única possibilidade restante é que exista localmente um referencial ortonormal  $\{X, Y\}$  tal que

$$\Phi X = \lambda X \quad \text{e} \quad \Phi Y = -\lambda Y.$$

Como  $A\Phi = \Phi A$ , temos que  $X$  e  $Y$  são direções principais de  $S$  e, portanto, como  $S$  não tem pontos umbílicos, as curvas integrais das distribuições de retas  $E_1$  e  $E_2$  geradas por  $X$  e  $Y$ , respectivamente, são linhas de curvaturas de  $S$ . Como  $\Phi$  é um tensor de Codazzi com traço nulo, decorre do Corolário 2.4 que  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$  é uma rede isotérmica, ou seja,  $S$  é uma superfície isotérmica. Finalmente, como  $\psi$  preserva linhas de curvaturas e é conforme, a superfície  $\tilde{S}$  é também isotérmica.

Reciprocamente, dada  $S \subset \mathbb{R}^3$  isotérmica, vimos acima que a existência de uma outra superfície isotérmica  $\tilde{S}$  e uma transformação de Combescure conforme  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  é equivalente à existência de um tensor de Codazzi  $\Phi$  em  $S$  com autovalores  $\rho$  e  $-\rho$  tal que  $E_\rho = \ker(\Phi - \rho I)$  e  $E_{-\rho} = \ker(\Phi + \rho I)$  sejam os auto-espacos do operador  $A$ . Pelas equações (2.11) com  $\lambda = -\rho$  e  $\mu = \rho$ , a função  $\rho$  deve satisfazer:

$$\begin{cases} 2\alpha\rho = Y(\rho), \\ 2\beta\rho = -X(\rho), \end{cases}$$

onde  $\alpha, \beta$  são as curvaturas geodésicas das linhas de curvaturas de  $S$ . Equivalentemente,

$$\begin{cases} Y(\log \rho) = 2\alpha, \\ X(\log \rho) = -2\beta, \end{cases}$$

ou seja,

$$\nabla \log \rho = 2\alpha Y - 2\beta X := Z \tag{3.15}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle \nabla_X Z, Y \rangle &= \langle X(\alpha)Y + \alpha \nabla_X Y - X(\beta)X - \beta \alpha Y, Y \rangle \\ &= X(\alpha) - \beta \alpha \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\frac{1}{2}\langle \nabla_Y Z, X \rangle = -Y(\beta) - \beta \alpha.$$

Como  $S$  é uma superfície isotérmica, temos que  $X(\alpha) + Y(\beta) = 0$ , pela Proposição 2.7. Logo,  $Z$  é (localmente) um campo gradiente pelo Lema 1.2. Assim, existe localmente  $\rho$  satisfazendo (3.15), a qual é única a menos de uma constante multiplicativa.  $\square$

**Definição 3.2** Se  $S$  é uma superfície isotérmica, então a superfície  $\psi(S) = \tilde{S}$ , unicamente determinada na proposição acima a menos de uma homotetia e uma translação, é chamada de *transformada de Christoffel* ou *superfície dual* de  $S$ .

**Exemplo 3.1** A dual de uma superfície  $S$  com curvatura média constante é a superfície  $S^c = \{p + \frac{1}{H}N; p \in S\}$ , a qual é determinada pelo tensor de Codazzi com traço nulo  $\Phi = I - \frac{1}{H}A$ .

**Corolário 3.2** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície isotérmica e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U)$  um sistema de coordenadas isotérmico principal em relação ao qual os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dados por (2.26). Se  $\psi : S \rightarrow S'$  é uma transformação de Christoffel, então os coeficientes da*

primeira e segunda formas fundamentais de  $S'$  com respeito ao sistema de coordenadas  $\mathbf{x}' = \psi \circ \mathbf{x}$  são

$$E' = G' = e^{-2\vartheta}, \quad F' = 0, \quad e' = e^{-\vartheta}V_1, \quad g' = -e^{-\vartheta}V_2, \quad f' = 0 \quad (3.16)$$

Em particular, se  $(\vartheta, V_1, V_2)$  é uma solução de (2.27) então o mesmo vale para  $(-\vartheta, V_1, -V_2)$ .

**Demonstração:** Vimos na demonstração da Proposição 3.4 que  $\Phi = \psi_*$  é um tensor de Codazzi satisfazendo

$$\begin{aligned} \Phi X_1 &= \rho X_1, \\ \Phi X_2 &= -\rho X_2, \end{aligned}$$

onde  $\{X_1, X_2\}$  é um referencial ortonormal de direções principais de  $S$  e  $\rho$  é dada (a menos de uma constante multiplicativa) por

$$\nabla \log \rho = 2\alpha X_2 - 2\beta X_1, \quad (3.17)$$

sendo  $\alpha, \beta \in C^\infty(S)$  as curvaturas geodésicas das famílias de linhas de curvaturas de  $S$  correspondentes a  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Deste modo, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $S'$ , são dados por:

$$\begin{aligned} E' &= \left\langle \frac{\partial'}{\partial u}, \frac{\partial'}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \psi_* \frac{\partial}{\partial u}, \psi_* \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\ &= \rho^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \rho^2 E, \end{aligned}$$

analogamente,

$$G' = \rho^2 G,$$

onde  $E, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $S$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \alpha X_2 - \beta X_1 &= -e^{-\vartheta} \vartheta_v X_2 - e^{-\vartheta} \vartheta_u X_1 \\ &= -(X_2(\vartheta)X_2 + X_1(\vartheta)X_1) = -\nabla(\vartheta). \end{aligned}$$

Assim, temos que  $\log \rho = -2\vartheta$  a menos de uma constante, a qual podemos supor que seja nula. Daí obtemos:

$$E' = \rho E = e^{-4\vartheta} e^{2\vartheta} = e^{-2\vartheta} \text{ e } G' = \rho^2 G = e^{-2\vartheta}.$$

Finalmente, sabemos que as segundas formas fundamentais de  $S$  e  $S'$  estão relacionadas por  $A'\psi_*X = AX$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(S)$ , logo os coeficientes da segunda forma fundamental de  $S'$  são dados por:

$$e' = \left\langle A' \frac{\partial'}{\partial u}, \frac{\partial'}{\partial u} \right\rangle = \left\langle A' \psi_* \frac{\partial}{\partial u}, \psi_* \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \left\langle A \frac{\partial}{\partial u}, e^{-2\vartheta} \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = e^{-2\vartheta} e^\vartheta V_1 = e^{-\vartheta} V_1$$

e, analogamente,  $g' = -e^{-\vartheta} V_2$ . □

Apresentamos agora a solução do Problema de Christoffel.

**Teorema 3.1** *Seja  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  um difeomorfismo conforme tal que os planos tangentes em pontos correspondentes são paralelos. Se  $S$  não tem pontos umbílicos, então uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- a)  $\psi$  é a composta de uma homotetia e uma translação;
- b)  $S$  é uma superfície mínima;
- c)  $S$  e  $\tilde{S}$  são superfícies isotérmicas.

**Demonstração:** Seja  $\Phi = \psi_*$ . Então existe  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\langle \Phi X_p, \Phi Y_p \rangle = \langle \psi_* X_p, \psi_* Y_p \rangle = \lambda^2 \langle X_p, Y_p \rangle,$$

para todo  $p \in S$  e para quaisquer  $X_p, Y_p \in T_p S$ . Portanto, ou  $\Phi$  é um tensor simétrico ou existem localmente um referencial ortonormal  $X_1, X_2$  de direções principais de  $S$  e uma função diferenciável  $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\Phi X_1 = \lambda(\cos \theta X_1 + \operatorname{sen} \theta X_2)$$

$$\Phi X_2 = \lambda(-\operatorname{sen} \theta X_1 + \cos \theta X_2)$$

com  $\operatorname{sen} \theta(p) \neq 0$ , para todo  $p \in S$ . No primeiro caso,  $\psi$  é uma transformação de Combescure, logo vale a) ou c) pela Proposição 3.4. No segundo caso, sejam  $\lambda$  e  $\mu$  as curvaturas principais de  $S$  correspondentes a  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Como  $\Phi^t A = A \Phi$ , temos que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

logo  $\mu \operatorname{sen} \theta = -\lambda \operatorname{sen} \theta$  em todo ponto  $p \in S$ . Como  $\operatorname{sen} \theta \neq 0$ , obtemos que  $\lambda = -\mu$ , logo  $S$  é uma superfície mínima.  $\square$

## 3.2 A Transformação de Ribaucour

Nesta seção apresentamos a teoria clássica da transformação de Ribaucour para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Em particular, descreveremos sistemas de coordenadas principais para as transformações de Ribaucour de uma superfície reg-

ular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em termos de soluções de um sistema linear de equações diferenciais parciais. Como conseqüência, apresentamos um método geométrico de obter novas soluções do sistema não linear associado a uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.3** Uma congruência de esferas em  $\mathbb{R}^3$  é uma família a 2-parâmetros de esferas  $\mathcal{F} = \{S(p, R(p)); p \in M\}$  cujos centros descrevem uma superfície regular orientável  $M$  e cujos raios são dados por uma função diferenciável  $R : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definição 3.4** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma envoltória da congruência de esferas  $\mathcal{F} = \{S(p; R(p)); p \in M\}$  se existe um campo de vetores unitário  $\xi$  em  $M^2$  tal que  $S = \{F(p) = p + R(p)\xi(p); p \in M\}$  e  $S$  é tangente a  $S(p; R(p))$  em  $F(p)$ .

**Proposição 3.5** *Sejam  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $\mathcal{F} = \{S(p, R(p)); p \in M\}$  uma congruência de esferas. Se  $S = \{F(p) = p + R(p)\xi(p); p \in M\}$  é uma envoltória de  $\mathcal{F}$ , então  $\|\nabla R\| \leq 1$  e  $\xi(p) = -\nabla R(p) + \lambda(p)N(p)$  para todo  $p \in M^2$ , onde  $\lambda = \pm\sqrt{1 - \|\nabla R\|^2}$ . Reciprocamente, se  $\|\nabla R(p)\| < 1$  para todo  $p \in M$  então  $\mathcal{F}$  admite (localmente) duas envoltórias  $S_+$  e  $S_-$  dadas, respectivamente, por*

$$S_+ = \{F_+(p) = p + R(p)(-\nabla R + \sqrt{1 - \|\nabla R\|^2}N); p \in M\}$$

e

$$S_- = \{F_-(p) = p + R(p)(-\nabla R - \sqrt{1 - \|\nabla R\|^2}N); p \in M\}.$$

**Demonstração:** Observe inicialmente que, se  $\mathcal{F} = \{S(p, R(p)); p \in M\}$  é uma congruência de esferas a 2-parâmetros e  $\xi$  é um campo de vetores unitários ao longo de  $M$ , então as seguintes afirmações sobre

$$S = \{F(p) = p + R(p)\xi(p); p \in M\}$$

são equivalentes:

- (i)  $S$  é uma envoltória da congruência  $\mathcal{F}$ ;
- (ii)  $\xi(p) \perp T_{F(p)}S$  para todo  $p \in M$ ;
- (iii)  $\xi^T = -\nabla R$ .

De fato, a equivalência entre (i) e (ii) é consequência imediata da definição de envoltória. A equivalência entre (ii) e (iii) decorre de

$$F_*Z = Z + Z(R)\xi + R\xi_*Z$$

e do fato de que (ii) é equivalente a

$$\langle F_*(p) \cdot Z, \xi(p) \rangle = 0 \text{ para todo } Z \in T_pM^2. \quad (3.18)$$

Portanto, se  $S$  é envoltória de  $\mathcal{F}$ , segue de (iii) que

$$\|\nabla R\|^2 = \|\xi^T\|^2 = 1 - \|\xi^N\|^2$$

logo  $\|\nabla R\| \leq 1$  e

$$\xi = -\nabla R + \lambda N, \quad (3.19)$$

onde  $\lambda = \pm\sqrt{1 - \|\nabla R\|^2}$ .

Reciprocamente, se  $\|\nabla R\| < 1$  então decorre da equivalência entre (i) e (iii) que  $S_+$  e  $S_-$  são as duas envoltórias de  $\mathcal{F}$ . □



Considere a aplicação  $\psi : S_+ \longrightarrow S_-$  dada por  $\psi(F_+(p)) = F_-(p)$ . Observe que, para cada  $q = F_+(p) \in S_+$ , as retas normais a  $S_+$  e  $S_-$  em  $q$  e  $\psi(q)$ , respectivamente, se interceptam no ponto  $p \in M$ , o qual é equidistante de  $q$  e  $\psi(q)$  (a distância comum é  $R(p)$ ).

No que segue estamos interessados no importante caso particular em que  $\psi$  preserva linhas de curvaturas:

**Definição 3.5** Um difeomorfismo  $\psi : S_+ \longrightarrow S_-$  entre as superfícies regulares  $S$  e  $\tilde{S}$ , orientadas pelos campos normais unitários  $N$  e  $\tilde{N}$ , respectivamente, é uma transformação de Ribaucour se

(i) Existe uma função diferenciável  $r : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$p + r(p)N(p) = \psi(p) + r(p)\tilde{N}(\psi(p))$$

para todo  $p \in S$ ;

(ii)  $\psi$  preserva linhas de curvaturas;

(iii) Para todo  $p \in S$ ,  $r^{-1}(p)$  não é uma curvatura principal de  $S$  em  $p$ .

Observe que a condição (i) significa geometricamente que as retas normais a  $S$  e  $\tilde{S}$  em  $p$  e  $\psi(p)$ , respectivamente, se interceptam em um ponto cuja distância comum a  $p$  e  $\psi(p)$  é  $r(p)$ .

Fixada uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , queremos determinar agora todas as superfícies regulares  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$  que são transformadas de Ribaucour de  $S$ .

Antes disso, provaremos a seguinte proposição:

**Proposição 3.6** *Seja  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  uma transformação de Ribaucour . Então existe um tensor simétrico  $D$  em  $S$ , um campo de vetores  $\delta$  ao longo de  $S$  e isometrias  $\mathcal{P}_p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p \in S$ , tais que  $\psi_* = \mathcal{P} \circ D$  e*

$$\mathcal{P}_p(Z_p) - Z_p = \langle \delta_p, Z_p \rangle (p - \psi(p)) \text{ para todo } Z_p \in \mathbb{R}^3. \quad (3.20)$$

**Demonstração:** Como  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  é uma transformação de Ribaucour, existe  $r : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$p + r(p)N(p) = \psi(p) + r(p)\tilde{N}(\psi(p)) \text{ para todo } p \in S. \quad (3.21)$$

Derivando (3.21) obtemos:

$$X_p + X_p(r)N_p - r(p)AX_p = \psi_*X_p + X_p(r)\tilde{N}(\psi(p)) - r(p)\tilde{A}\psi_*X_p,$$

ou seja,

$$(I - r(p)\tilde{A})\psi_*X_p + X_p(r)\tilde{N}(\psi(p)) = (I - r(p)A)X_p + X_p(r)N_p.$$

Fazendo  $B = I - r(p)A$  e  $\tilde{B} = I - r(p)\tilde{A}$ , obtemos que  $\|\tilde{B}\psi_*X_p\| = \|BX_p\|$ .

Como  $r^{-1}(p)$  não é uma curvatura principal de  $S$  em  $p$ , o operador  $B$  é invertível para todo  $p \in S$ , logo  $\mathcal{P}_p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\mathcal{P}_pBX_p = \tilde{B}\psi_*X_p, \quad \mathcal{P}_p(N_p) = \tilde{N}(\psi(p))$$

é uma isometria. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_pBX_p - BX_p &= X_p(r)(N_p - \tilde{N}(\psi(p))) = -\frac{X_p(r)}{r(p)}(p - \psi(p)) \\ &= \langle \nabla \log r, X_p \rangle (p - \psi(p)) \text{ para todo } p \in S. \end{aligned}$$

Assim, vale (3.20) com

$$\delta = -\nabla \log r + r^{-1}(p)N_p.$$

Defina um tensor  $D$  em  $S$  por:

$$DX_p = \mathcal{P}_p^{-1}\psi_*X_p \text{ para todo } p \in S.$$

Então  $\psi_* = \mathcal{P}D$ . Note que  $\mathcal{P}X_i = \frac{\psi_*X_i}{\|\psi_*X_i\|}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , onde  $X_1, X_2$  são as direções principais de  $S$  em  $p$ . Logo  $X_1$  e  $X_2$  são autovetores de  $D$ , portanto  $D$  é simétrico.  $\square$

**Teorema 3.2** *Seja  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  uma transformação de Ribaucour, onde  $S \subset \mathbb{R}^3$  é simplesmente conexa. Então existem  $\varphi, \beta : S \longrightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis satisfazendo*

$$\nabla\beta = -A \nabla \varphi, \tag{3.22}$$

tais que

$$\psi(p) = p - 2\varphi\nu\bar{\psi}(p), \tag{3.23}$$

onde  $\bar{\psi}(p) = \nabla\varphi(p) + \beta(p)N_p$  e  $\nu = \langle \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle^{-1}$ . Além disso, valem as seguintes igualdades

$$\mathcal{P}Z = Z - 2\nu\langle \bar{\psi}, Z \rangle \bar{\psi}, \quad D = I - 2\nu\varphi\Phi \quad \text{e} \quad \delta = -\varphi^{-1}\bar{\psi}$$

onde  $\Phi = \text{Hess } \varphi - \beta A$ .

Reciprocamente, se  $\varphi, \beta : S \longrightarrow \mathbb{R}$  satisfazem (3.22) e  $U \subset S$  é um aberto onde o tensor  $D = I - 2\nu\varphi\Phi$  é invertível e  $\psi$  dado por (3.23) é injetora, então  $\psi|_U$  define uma transformação de Ribaucour de  $U$ .

**Demonstração:** Defina um campo unitário  $\zeta : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e uma função  $\mu : S \longrightarrow \mathbb{R}$  por:

$$p - \psi(p) = \mu(p)\zeta(p), \quad (3.24)$$

para todo  $p \in S$ . De

$$\mathcal{P}_p(Z_p) = Z_p + \langle \delta_p, Z_p \rangle (p - \psi(p))$$

e (3.24) obtemos

$$\mathcal{P}_p(Z_p) = Z_p + \mu(p)\langle \delta, Z_p \rangle \zeta(p), \quad (3.25)$$

para todo  $Z_p \in \mathbb{R}^3$ , logo

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_p(Z_p), \mathcal{P}_p(Z_p) \rangle &= \langle Z_p + \mu(p)\langle \delta, Z_p \rangle \zeta(p), Z_p + \mu(p)\langle \delta, Z_p \rangle \zeta(p) \rangle \\ &= \langle Z_p, Z_p \rangle + 2\mu(p)\langle Z_p, \zeta(p) \rangle \langle \delta, Z_p \rangle + \mu(p)^2 \langle \delta, Z_p \rangle^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$2\mu(p)\langle Z_p, \zeta(p) \rangle \langle \delta, Z_p \rangle + \mu(p)^2 \langle \delta, Z_p \rangle^2 = 0,$$

portanto

$$\mu(p)\langle \delta, Z_p \rangle = -2\langle \zeta(p), Z_p \rangle. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.25), obtemos

$$\mathcal{P}_p(Z_p) - Z_p = -2\langle \zeta(p), Z_p \rangle \zeta(p), \text{ para todo } p \in S. \quad (3.27)$$

Agora vamos procurar  $\rho : S \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\bar{\psi} = \rho^{-1}\zeta$  seja uma transformação de Combescure de  $S$ . Se tal  $\rho$  existe, temos:

$$\bar{\psi}_* X_p = X_p(\rho^{-1})\zeta(p) + \rho^{-1}\tilde{\nabla}_{X_p}\zeta,$$

para todo  $X_p \in T_p S$ , logo

$$\langle \bar{\psi}_* X_p, N_p \rangle = X_p(\rho^{-1}) \langle \zeta(p), N_p \rangle + \rho^{-1} \langle \tilde{\nabla}_{X_p} \zeta, N_p \rangle, \quad (3.28)$$

para todo  $p \in S$ . Mas pela proposição 3.6 e de (3.24), (3.27), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_* X_p, \mathcal{P}_p N_p \rangle = \langle X_p - X_p(\mu) \zeta(p) - \mu \tilde{\nabla}_{X_p} \zeta, N_p - 2 \langle \zeta(p), N_p \rangle \zeta(p) \rangle \\ &= -2 \langle \zeta(p), N_p \rangle \langle \zeta(p), X_p \rangle + X_p(\mu) \langle \zeta(p), N_p \rangle - \mu \langle \tilde{\nabla}_{X_p} \zeta, N_p \rangle, \end{aligned}$$

daí

$$\mu \langle \tilde{\nabla}_{X_p} \zeta, N_p \rangle = -2 \langle \zeta(p), N_p \rangle \langle \zeta(p), X_p \rangle + X_p(\mu) \langle \zeta(p), N_p \rangle \quad (3.29)$$

e portanto de (3.28) e (3.29), obtemos

$$\langle \bar{\psi}_* X_p, N_p \rangle = \rho^{-1} \langle \zeta(p), N_p \rangle (-X_p(\log \rho) - 2\mu^{-1} \langle \zeta(p), X_p \rangle + \mu^{-1} X_p(\mu)).$$

Assim, basta mostrar que existe  $\rho$  tal que

$$X_p(\log \rho) = -2\mu^{-1} \langle \zeta(p), X_p \rangle + \mu^{-1} X_p(\mu), \quad \text{para todo } X_p \in T_p S, \quad (3.30)$$

ou seja,

$$\nabla \log \rho = \mu^{-1} (-2\zeta^\top + \nabla \mu).$$

onde  $\zeta^\top$  denota a componente tangente de  $\zeta$ . Para isto, defina

$$Z = \mu^{-1} (-2\zeta^\top + \nabla \mu).$$

Temos

$$\begin{aligned} \nabla_X Z &= X(\mu^{-1}) (-2\zeta^\top + \nabla \mu) + \mu^{-1} (-2\nabla_X \zeta^\top + \nabla_X \nabla \mu) \\ &= X(\mu^{-1}) \nabla \mu + \mu^{-1} \nabla_X \nabla \mu - 2X(\mu^{-1}) \zeta^\top - 2\mu^{-1} \nabla_X \zeta^\top, \end{aligned}$$

mas

$$\nabla_X(\nabla \log \mu) = \nabla_X(\mu^{-1} \nabla \mu) = X(\mu^{-1}) \nabla \mu + \mu^{-1} \nabla_X \nabla \mu.$$

Então

$$\nabla_X Z = \nabla_X(\nabla \log \mu) - 2X(\mu^{-1})\zeta^\top - 2\mu^{-1}\nabla_X \zeta^\top.$$

Agora

$$\langle \nabla_X Z, Y \rangle = \text{Hess } \log \mu(X, Y) - \mu^{-2}X(\mu)\langle \zeta, Y \rangle - 2\mu^{-1}\langle \nabla_X \zeta^\top, Y \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X \zeta, Y \rangle &= X\langle \zeta^\top, Y \rangle - \langle \zeta, \tilde{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \zeta^\top, Y \rangle + \langle \zeta^\top, \nabla_X Y \rangle - \langle \zeta, \alpha(X, Y) \rangle - \langle \zeta^\top, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \zeta^\top, Y \rangle - \langle \zeta, \alpha(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Z, Y \rangle &= \text{Hess } \log \mu(X, Y) + 2\mu^{-1}\langle \alpha(X, Y), \zeta \rangle \\ &\quad + 2\mu^{-2}(X(\mu)\langle \zeta, Y \rangle - \mu\langle \tilde{\nabla}_X \zeta, Y \rangle). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Agora, por um lado

$$\langle \psi_* X, \mathcal{P}Y \rangle = \langle \mathcal{P}DX, \mathcal{P}Y \rangle = \langle DX, Y \rangle \quad (3.32)$$

e, por outro lado, usando (3.24),

$$\langle \psi_* X, \mathcal{P}Y \rangle = \langle X, Y \rangle - 2\langle \zeta, X \rangle \langle \zeta, Y \rangle + X(\mu)\langle \zeta, Y \rangle - \mu\langle \tilde{\nabla}_X \zeta, Y \rangle. \quad (3.33)$$

Decorre de (3.31), (3.32) e (3.33) que  $\langle \nabla_X Z, Y \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle$  para quaisquer  $X, Y \in TS$ . Como  $S$  é simplesmente conexa, existe  $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $\nabla \log \rho = Z$ . Daí temos que:

$$p - \psi(p) = \mu(p)\zeta(p) = \mu(p)\rho(p)\bar{\psi}(p)$$

e  $\nu = \langle \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle^{-1} = \rho^2$ , logo

$$p - \psi(p) = -2\varphi(p)\nu(p)\bar{\psi}(p), \text{ para todo } p \in S, \quad (3.34)$$

onde  $\varphi = -\frac{\mu}{2\rho}$ .

**Afirmção:**  $\nabla \varphi = \bar{\psi}^\top$ , ou seja,  $X_p(\varphi) = \langle \bar{\psi}(p), X_p \rangle$ , para todo  $X_p \in T_p S$ .

De fato, usando (3.30) na segunda igualdade, temos

$$\begin{aligned} -2\langle \bar{\psi}, X_p \rangle &= -2\langle \rho^{-1}(p)\zeta(p), X_p \rangle = -\rho^{-1}(p)[\mu(p)X_p(\log \rho) - X_p(\mu)] \\ &= -\rho^{-1}(p)\left[\mu(p)\frac{X_p(\rho)}{\rho(p)} - X_p(\mu)\right] = -\frac{\mu(p)X_p(\rho) - \rho(p)X_p(\mu)}{\rho^2(p)} \\ &= -2X_p(\varphi). \end{aligned}$$

Além disso, substituindo  $\zeta = \rho\bar{\psi}$  em (3.27) e usando que  $\rho^2 = \nu$ , obtemos

$$\mathcal{P}Z = Z - 2\nu\langle \bar{\psi}, Z \rangle \bar{\psi}. \quad (3.35)$$

Derivando (3.23) e usando que

$$X(\nu^{-1}) = X\langle \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle = 2\langle \bar{\psi}_* X, \bar{\psi} \rangle = 2\langle \bar{\psi}_* X, \nabla \varphi \rangle,$$

ou seja,

$$X(\nu) = -\nu^2 X(\nu^{-1}) = -2\nu^2 \langle \bar{\psi}_* X, \bar{\psi} \rangle, \quad (3.36)$$

temos

$$\begin{aligned}\psi_*X &= X - 2X(\varphi)\nu\bar{\psi} - 2\varphi X(\nu)\bar{\psi} - 2\varphi\nu X(\bar{\psi}) \\ &= X - 2\langle\bar{\psi}, X\rangle\nu\bar{\psi} + 4\varphi\nu^2\langle\bar{\psi}_*X, \nabla\varphi\rangle\bar{\psi} - 2\varphi\nu\bar{\psi}_*X, \text{ para todo } X \in TS.\end{aligned}$$

Mas  $\bar{\psi}$  é uma transformação de Combescure, logo pela Proposição 3.3 temos que

$$\bar{\psi}_* = \Phi = Hess \varphi - \beta A.$$

Daí

$$\psi_*X = X - 2\langle\bar{\psi}, X\rangle\nu\bar{\psi} + 4\varphi\nu^2\langle\Phi \nabla \varphi, X\rangle\bar{\psi} - 2\varphi\nu\Phi X.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(I - 2\nu\varphi\Phi)X &= X - 2\varphi\nu\Phi X - 2\nu\langle\bar{\psi}, X\rangle\bar{\psi} + 4\nu^2\varphi\langle\bar{\psi}, \Phi X\rangle\bar{\psi} \\ &= X - 2\varphi\nu\Phi X - 2\nu\langle\bar{\psi}, X\rangle\bar{\psi} + 4\nu^2\varphi\langle\Phi \nabla \varphi, X\rangle\bar{\psi}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_* = \mathcal{P}(I - 2\nu\varphi\Phi).$$

Como  $\psi_* = \mathcal{P} \circ D$ , pela proposição 3.6, obtemos que  $D = I - 2\nu\varphi\Phi$ . De (3.34) e (3.35) sabemos que

$$\mathcal{P}Z = Z - 2\nu\langle\bar{\psi}, Z\rangle\bar{\psi} \quad \text{e} \quad p - \psi(p) = -2\varphi\nu\bar{\psi}. \quad (3.37)$$

Mas

$$\mathcal{P}Z - Z = \langle\delta, Z\rangle(p - \psi).$$

Daí, usando (3.37), obtemos que  $\delta = -\varphi^{-1}\bar{\psi}$ .



Reciprocamente, definindo  $D = I - 2\nu\varphi\Phi$ , onde  $\Phi = Hess \varphi - \beta A$ , os cálculos acima mostram que a diferencial de  $\psi$  definida por (3.23) é dada por  $\psi_* = \mathcal{P} \circ D$ . Como  $D$  é invertível em  $U$ , o Teorema da Função Inversa implica que  $\psi$  é um difeomorfismo local em  $U$ . Por hipótese,  $\psi$  é injetora em  $U$ , logo  $\psi$  é um difeomorfismo de  $U$  em  $\psi(U)$ . Note que,

$$\mathcal{P}(N_p) - N(p) = \frac{\langle \bar{\psi}, N \rangle}{\varphi}(p - \psi(p))$$

para todo  $p \in S$ , onde  $N(p)$  é um vetor normal a  $S$  em  $p$ . Logo as retas normais a  $S$  e  $\tilde{S}$  em  $p$  e  $\psi(p)$ , respectivamente, se interceptam em um ponto cuja distância comum a  $p$  e  $\psi(p)$  é  $r(p) = \frac{\varphi}{\langle \bar{\psi}, N \rangle}(p)$ . Além disso, provamos, na próxima proposição, que  $\psi$  preserva linhas de curvaturas. Portanto,  $\psi|_U$  dada por (3.23) é uma transformação de Ribaucour de  $U$ .  $\square$

Na seguinte Proposição relacionamos as segundas formas fundamentais de  $S$  e de sua transformada de Ribaucour  $\tilde{S}$ .

**Proposição 3.7** *Nas hipóteses do Teorema 3.2, se  $N$  é um campo normal unitário a  $S$  e  $\tilde{N} = \mathcal{P}(N)$ , então as segundas formas fundamentais de  $S$  e  $\tilde{S}$  com respeito a  $N$  e  $\tilde{N}$ , respectivamente, são relacionadas por*

$$\tilde{A}\psi_*X_p = \mathcal{P}(A + 2\nu\beta\Phi)X_p, \text{ para todo } p \in S, X_p \in T_pS. \quad (3.38)$$

**Demonstração:** Sabemos que

$$\tilde{A}\psi_*X_p = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{P}N(\psi(\alpha(t))),$$

onde  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$  é uma curva tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = X_p$ . Mas

$$\mathcal{P}N(\psi(\alpha(t))) = \mathcal{P}_{\alpha(t)}N_{\alpha(t)} = N_{\alpha(t)} - 2\nu(\alpha(t))\langle \bar{\psi}(\alpha(t)), N_{\alpha(t)} \rangle \bar{\psi}(\alpha(t)).$$

Então, usando (3.36) e o fato que  $\bar{\psi}(p) = \nabla\varphi(p) + \beta(p)N_p$ , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{A}\psi_*X_p &= AX_p + 4\nu^2\langle \Phi \nabla\varphi, X_p \rangle \beta(p)\bar{\psi}(p) + 2\nu(p)\langle A \nabla\varphi, X_p \rangle \bar{\psi}(p) \\ &+ 2\nu(p)\beta(p)\Phi X_p = \mathcal{P}(A + 2\nu\beta\Phi)X_p. \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.3** *Sejam  $S$  uma superfície regular,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S$  um sistema de coordenadas principal em um aberto simplesmente conexo  $V \subset S$  e  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  a solução do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$ . Se  $\psi : V \longrightarrow \tilde{S}$  é uma transformação de Ribaucour, então*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\frac{\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2} \left( \frac{\gamma_1}{v_1} \mathbf{x}_{u_1} + \frac{\gamma_2}{v_2} \mathbf{x}_{u_2} + \beta N \right), \quad (3.39)$$

*é um sistema de coordenadas principal em  $\tilde{S}$ , onde  $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$  é uma solução do sistema linear de equações diferenciais parciais*

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = v_i\gamma_i, & i = 1, 2, \\ \frac{\partial\gamma_i}{\partial u_j} = h_{ij}\gamma_j, & 1 \leq i \neq j \leq 2 \\ \frac{\partial\beta}{\partial u_i} = -V_i\gamma_i, & i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.40)$$

*Reciprocamente, se  $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$  é uma solução de (3.40) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , as funções  $v_i - 2\varphi\nu B_i$ ,  $i = 1, 2$ , não se anulam em  $U$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  dada por (3.39) é injetora em  $U$ , então  $\tilde{\mathbf{x}}|_U$  define um sistema de coordenadas principal*

de uma transformada de Ribaucour de  $V = \mathbf{x}(U)$ , aqui  $B_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \gamma_2 h_{21} - \beta V_1$ ,  $B_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \gamma_1 h_{12} - \beta V_2$  e  $\nu = \langle \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle^{-1}$  onde  $\bar{\psi} = \nabla \varphi + \beta N$ , Além disso, a solução  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{21}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$  do sistema (1.31) associada a  $\tilde{\mathbf{x}}$  é dada por

$$\begin{cases} \tilde{v}_i = v_i - 2\varphi \nu B_i, & i = 1, 2 \\ \tilde{h}_{12} = h_{12} - 2\nu \gamma_1 B_2, \\ \tilde{h}_{21} = h_{21} - 2\nu \gamma_2 B_1, \\ \tilde{V}_i = V_i + 2\nu \beta B_i, & i = 1, 2 \end{cases}$$

**Demonstração:** Como  $\psi$  preserva linhas de curvatura,  $\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x}$  é um sistema de coordenadas principal de  $\tilde{S}$ . Pelo Teorema 3.2, existem  $\varphi, \beta : S \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis satisfazendo  $\nabla \varphi = -A \nabla \beta$  e tais que

$$\psi(p) = p - 2\varphi \nu \bar{\psi}(p),$$

onde  $\bar{\psi}(p) = \nabla \varphi(p) + \beta(p) N_p$  e  $\nu = \langle \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle^{-1}$ . Definindo  $\gamma_i$  por:

$$\nabla \varphi = \frac{\gamma_1}{v_1} \mathbf{x}_{u_1} + \frac{\gamma_2}{v_2} \mathbf{x}_{u_2}, \quad (3.41)$$

temos que  $\tilde{\mathbf{x}}$  é dada por (3.39). Decorre do Lema 3.1, que  $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$  satisfaz (3.12).

Reciprocamente, seja  $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$  uma solução de (3.40) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Defina  $\varphi$ , a menos de uma constante, por (3.41). Pelo Lema 3.1, as funções  $\varphi, \beta$  satisfazem (3.22). Além disso, o tensor  $D = I - 2\nu \varphi \Phi$  satisfaz:

$$D \frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} - 2\varphi \nu \Phi \frac{\partial}{\partial u_1},$$

onde

$$\begin{aligned}
 \Phi \frac{\partial}{\partial u_1} &= v_1 \Phi X_1 = v_1 (\nabla_{X_1} \nabla \varphi - \beta A X_1) \\
 &= v_1 (\nabla_{X_1} (\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2) - \beta A X_1) \\
 &= v_1 (X_1(\gamma_1) + \gamma_2 \langle \nabla_{X_1} X_2, X_1 \rangle - \beta \frac{V_1}{v_1}) \\
 &= \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + h_{21} \gamma_2 - \beta V_1 \right) X_1.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\Phi \frac{\partial}{\partial u_1} = B_1 X_1,$$

onde  $B_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \gamma_2 h_{21} - \beta V_1$  e daí

$$DX_1 = \left( \frac{v_1 - 2\varphi\nu B_1}{v_1} \right) X_1. \quad (3.42)$$

Analogamente

$$DX_2 = \left( \frac{v_2 - 2\varphi\nu B_2}{v_2} \right) X_2, \quad (3.43)$$

onde  $B_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \gamma_1 h_{12} - \beta V_2$ . Logo, as hipóteses de que as funções  $v_i - 2\varphi\nu B_i$ ,  $i = 1, 2$  não se anulam em  $U$  implicam que  $D$  é invertível em  $U$ . Além disso, temos que  $\tilde{\mathbf{x}}$  dada por (3.39) é injetora em  $U$ . Portanto, obtemos do Teorema 3.2 que  $\tilde{\mathbf{x}}|_U$  define um sistema de coordenadas principal em uma transformada de Ribaucour de  $V = \mathbf{x}(U)$ .

Finalmente mostraremos a última afirmação. Como  $\psi_* = \mathcal{P} \circ D$ , temos:

$$\tilde{v}_1^2 = \left\langle \psi_* \frac{\partial}{\partial u_1}, \psi_* \frac{\partial}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle D \frac{\partial}{\partial u_1}, D \frac{\partial}{\partial u_1} \right\rangle.$$

Levando em conta (3.42) obtemos

$$\tilde{v}_1 = v_1 - 2\varphi\nu B_1.$$

Analogamente,

$$\tilde{v}_2 = v_2 - 2\varphi\nu B_2.$$

Por sua vez,

$$\tilde{h}_{12} = \frac{1}{\tilde{v}_1} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_1} = h_{12} - 2\nu\gamma_1 B_2$$

e

$$\tilde{h}_{21} = h_{21} - 2\nu\gamma_2 B_1.$$

Temos

$$\tilde{A}\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\tilde{V}_i}{\tilde{v}_i} \psi_* \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Mas utilizando a relação (3.38), obtemos

$$\tilde{A}\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = \mathcal{P}(A + 2\nu\beta\Phi) \frac{\partial}{\partial u_i} = \mathcal{P}\left(\frac{V_i}{v_i} + 2\nu\beta\frac{B_i}{v_i}\right) \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Como  $\psi_* = \mathcal{P}D$ , temos que

$$\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = \mathcal{P}D \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{1}{v_i} (v_i - 2\varphi\nu B_i) \mathcal{P} \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\tilde{v}_i}{v_i} \mathcal{P} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Logo,

$$\tilde{A}\psi_* \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{V_i + 2\nu\beta B_i}{\tilde{v}_i} \psi_* \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Portanto,

$$\tilde{V}_i = V_i + 2\nu\beta B_i, \quad i = 1, 2.$$

□

### 3.3 A Transformação de Darboux-Bianchi

Nesta seção descrevemos a transformação de Darboux-Bianchi entre superfícies isotérmicas. Obtemos sistemas de coordenadas principais isotérmicos de todas as transformadas de Darboux-Bianchi de uma superfície isotérmica dada, em termos de soluções de um sistema linear de equações diferenciais parciais. Em particular, descrevemos um método geométrico de obter novas soluções do sistema não linear de equações diferenciais parciais associado a superfícies isotérmicas a partir de uma dada.

**Definição 3.6** Uma aplicação  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  entre as superfícies regulares orientadas  $S$  e  $\tilde{S}$  é uma *transformação de Darboux-Bianchi* se  $\psi$  é uma transformação de Ribaucour conforme que reverte a orientação.

**Teorema 3.3** *Seja  $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$  uma transformação de Darboux-Bianchi entre as superfícies regulares orientadas  $S$  e  $\tilde{S}$ . Então  $S$  e  $\tilde{S}$  são superfícies isotérmicas. Além disso, se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é um sistema de coordenadas isotérmico principal em  $S$  e  $(\vartheta, V_1, V_2)$  é a solução de (2.27) associada a  $\mathbf{x}$ , então*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{1}{m\rho}(\gamma_1 e^{-\vartheta} \mathbf{x}_{u_1} + \gamma_2 e^{-\vartheta} \mathbf{x}_{u_2} + \beta N) \quad (3.44)$$

*é um sistema de coordenadas isotérmico principal em  $\tilde{S}$ , onde  $m$  é uma cons-*

tante de integrabilidade e  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \varphi, \rho)$  é uma solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = e^\vartheta \gamma_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = e^\vartheta \gamma_2, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} \gamma_2, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2} \gamma_1, \\ \frac{\partial \rho}{\partial u_1} = e^{-\vartheta} \gamma_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u_2} = -e^{-\vartheta} \gamma_2, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u_1} = -V_1 \gamma_1, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u_2} = -V_2 \gamma_2, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = m(e^\vartheta \rho + e^{-\vartheta} \varphi) + \beta V_1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2} \gamma_2, \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} = m(e^\vartheta \rho - e^{-\vartheta} \varphi) + \beta V_2 - \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} \gamma_1. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Reciprocamente, seja  $S$  uma superfície isotérmica e  $(\vartheta, V_1, V_2)$  uma solução do sistema (2.27) associada a um sistema de coordenadas isotérmico principal  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ . Então o sistema linear (3.45) é integrável e possui a integral primeira

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 - 2m\varphi\rho = cte. \quad (3.46)$$

Se  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \varphi, \rho)$  é uma solução de (3.45) com condições iniciais escolhidas de modo que a constante no segundo membro de (3.46) se anule, então  $\tilde{\mathbf{x}}$  dada por (3.44) define um sistema de coordenadas isotérmico principal em  $\tilde{S}$ , a qual é uma transformada de Darboux-Bianchi de  $\mathbf{x}(U)$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas principal em  $S$  e  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  a solução do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$ . Como  $\psi$  é uma transformação de Ribaucour temos, pelo Corolário 3.3, que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2 \frac{\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2} \left( \frac{\gamma_1}{v_1} \mathbf{x}_{u_1} + \frac{\gamma_2}{v_2} \mathbf{x}_{u_2} + \beta N \right) \quad (3.47)$$

é um sistema de coordenadas principal em  $\tilde{S}$ , onde  $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$  é a solução do sistema linear de equações diferenciais parciais (3.40) associado a  $\psi$ . Seja  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{21}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$  a solução do sistema (1.31) associada a  $\tilde{\mathbf{x}}$  e denote  $X_i = \frac{1}{v_i} \mathbf{x}_{u_i}$  e  $\tilde{X}_i = \frac{1}{\tilde{v}_i} \tilde{\mathbf{x}}_{u_i}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Então  $\psi_* X_i = \frac{\tilde{v}_i}{v_i} \tilde{X}_i$ ,  $i = 1, 2$  e, como  $\psi$  é conforme e reverte a orientação, temos

$$\frac{\tilde{v}_2}{v_2} = -\frac{\tilde{v}_1}{v_1} = \frac{\varphi}{\tau}$$

para alguma função  $\tau$ . De

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = v_1 \gamma_1, & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = v_2 \gamma_2, \\ \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial u_2} = \tilde{h}_{21} \tilde{v}_2, & \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_1} = \tilde{h}_{12} \tilde{v}_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_2} = h_{21} v_2, & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = h_{12} v_1, \end{array} \right.$$

obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial u_1} = 2 \frac{h_{12} v_1}{v_2} \tau + v_1 \gamma_1, \\ \frac{\partial \tau}{\partial u_2} = 2 \frac{h_{21} v_2}{v_1} \tau - v_2 \gamma_2, \end{array} \right.$$

ou, equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial u_1} = 2 \frac{\partial}{\partial u_1} \log v_2 \tau + v_1 \gamma_1, \\ \frac{\partial \tau}{\partial u_2} = 2 \frac{\partial}{\partial u_2} \log v_1 \tau - v_2 \gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Como devemos ter  $\frac{\partial^2 \tau}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial u_2 \partial u_1}$ , obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \log \left( \frac{v_1}{v_2} \right) = 0. \quad (3.49)$$

Mas  $v_1^2 = E$  e  $v_2^2 = G$ , onde  $E, G$  são coeficientes da primeira forma fundamental. Logo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \log \left( \frac{E}{G} \right) = 0$$



que é precisamente a condição para que  $S$  seja isotérmica, pela Proposição 2.6. Note que  $\tilde{S}$  é também isotérmica, pois  $\psi$  é conforme e preserva linhas de curvatura.

Deste modo, de agora em diante podemos supor que  $\mathbf{x}$  seja um sistema de coordenadas isotérmico principal. Seja  $(\vartheta, V_1, V_2)$  a solução de (2.27) associada a  $\mathbf{x}$ , então a solução  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$  é dada por  $v_1 = v_2 = e^\vartheta$ ,  $h_{12} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1}$  e  $h_{21} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2}$ .

Defina agora  $\eta = (2\varphi\nu)^{-1}$ . Afirmamos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_1} = -\tilde{v}_1 \frac{\gamma_1}{\varphi} \eta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial u_2} = -\tilde{v}_2 \frac{\gamma_2}{\varphi} \eta. \quad (3.50)$$

De fato, observe inicialmente que  $\frac{\partial \nu^{-1}}{\partial u_i} = 2\gamma_i B_i$ , para  $i = 1, 2$ , onde  $B_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \gamma_2 h_{21} - \beta V_1$  e  $B_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \gamma_1 h_{12} - \beta V_2$ . Como  $\tilde{v}_i = v_i - 2\varphi\nu B_i$ ,  $i = 1, 2$ , obtemos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_i} = \frac{\gamma_i B_i}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\nu^{-1}}{\varphi^2} v_i \gamma_i = \frac{\gamma_i B_i}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\nu^{-1}}{\varphi^2} \gamma_i (\tilde{v}_i + 2\varphi\nu B_i) = -\tilde{v}_i \frac{\gamma_i}{\varphi} \eta, \quad i = 1, 2.$$

Usando as fórmulas (3.50), o sistema (3.48) fica:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_1} \log (e^{-2\vartheta} \tau) = \frac{\partial}{\partial u_1} \log \eta \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \log (e^{-2\vartheta} \tau) = \frac{\partial}{\partial u_2} \log \eta \end{cases}$$

o que implica

$$\log m + \log (e^{-2\vartheta} \tau) = \log \eta$$

ou seja,  $\eta = m e^{-2\vartheta} \tau$ . Agora, definindo  $\rho = e^{-2\vartheta} \tau = \frac{\eta}{m}$ , temos que

$$\tilde{v}_1 = -\frac{\varphi}{\rho} e^{-\vartheta} \quad \text{e} \quad \tilde{v}_2 = \frac{\varphi}{\rho} e^{-\vartheta}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_1} = \frac{1}{m} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} = -2 \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} e^{-2\vartheta} \tau + e^{-2\vartheta} \left( 2 \frac{h_{12} v_1}{v_2} \tau + e^\vartheta \gamma_1 \right) = e^{-\vartheta} \gamma_1.$$

Analogamente,  $\frac{\partial \rho}{\partial u_2} = -e^{-\vartheta} \gamma_2$ .

Agora, usando que

$$\tilde{v}_1 = v_1 - 2\varphi\nu B_1 = e^\vartheta - \frac{1}{\eta} B_1 = e^\vartheta - \frac{1}{m\rho} B_1$$

obtemos

$$-\frac{\varphi}{\rho} e^{-\vartheta} = e^\vartheta - \frac{1}{m\rho} B_1,$$

ou seja,

$$B_1 = m(\rho e^\vartheta + \varphi e^{-\vartheta}).$$

Mas por outro lado,  $B_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \gamma_2 h_{21} - \beta V_1$ , logo

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = m(\rho e^\vartheta + \varphi e^{-\vartheta}) - \gamma_2 h_{21} + \beta V_1.$$

Analogamente,  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} = m(\rho e^\vartheta - \varphi e^{-\vartheta}) - \gamma_1 h_{12} + \beta V_2$ . Portanto, vale (3.45).

Além disso,

$$2 \frac{\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2} = 2\varphi\nu = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{m\rho},$$

logo (3.44) segue de (3.47).

Reciprocamente, é fácil ver que as condições de integrabilidade de (3.45) são precisamente dadas pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_2^2} + V_1 V_2 &= 0, \\ \frac{\partial V_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} V_2, \\ \frac{\partial V_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2} V_1, \end{aligned}$$

que é exatamente o sistema (2.27). Como, por hipótese  $(\vartheta, V_1, V_2)$  é a solução de (2.27), obtemos que (3.45) é integrável. Além disso, se  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \varphi, \rho)$  é uma solução de (3.45), através de um simples cálculo mostra-se que vale a integral primeira (3.46). Agora, se

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 = 2m\varphi\rho,$$

ou seja,

$$(2\varphi\nu)^{-1} = m\rho,$$

temos que

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= e^\vartheta - 2\varphi\nu m(e^\vartheta\rho + e^{-\vartheta}\varphi) \\ &= e^\vartheta - \frac{1}{\rho}(e^\vartheta\rho + e^{-\vartheta}\varphi) \\ &= -\frac{\varphi}{\rho}e^{-\vartheta} = -\frac{\varphi}{\tau}v_1, \end{aligned}$$

onde  $\rho = e^{-2\vartheta}\tau$ . Analogamente,  $\tilde{v}_2 = \frac{\varphi}{\tau}v_2$ . Deste modo, obtemos

$$\frac{\tilde{v}_2}{v_2} = -\frac{\tilde{v}_1}{v_1} = \frac{\varphi}{\tau}.$$

Como visto na demonstração da outra implicação do Teorema, esta é precisamente a condição para que  $\psi$  seja conforme e reverta orientação. Logo  $\psi$  é uma transformação de Darboux-Bianchi e  $\tilde{\mathbf{x}} = \psi \circ \mathbf{x}$  dado por (3.44) é um sistema de coordenadas isotérmico principal em  $\tilde{S}$ .  $\square$

**Corolário 3.4** *Sejam  $S$  uma superfície isotérmica,  $(\vartheta, V_1, V_2)$  a solução do sistema (2.27) associada a  $S$  e  $\tilde{S}$  uma transformada de Darboux-Bianchi*

de  $S$  determinada pela solução  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \varphi, \rho)$  de (3.45). Então a solução  $(\tilde{\vartheta}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$  do sistema (2.27) associada a  $\tilde{S}$  é dada por

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\vartheta}} &= \pm \frac{\varphi}{\rho} e^{-\vartheta}, \\ \tilde{V}_1 &= V_1 - \frac{\beta}{\varphi} e^{\vartheta} - \frac{\beta}{\rho} e^{-\vartheta}, \\ \tilde{V}_2 &= V_2 - \frac{\beta}{\varphi} e^{\vartheta} + \frac{\beta}{\rho} e^{-\vartheta}. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  um sistema de coordenadas isotérmico principal em  $S$  e  $(\vartheta, V_1, V_2)$  a solução do sistema (2.27) associada a  $\mathbf{x}$ . Então a solução  $(v_1, v_2, h_{12}, h_{21}, V_1, V_2)$  do sistema (1.31) associada a  $\mathbf{x}$  é dada por  $v_1 = v_2 = e^{\vartheta}$ ,  $h_{12} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1}$  e  $h_{21} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2}$ . Além disso, como  $\tilde{S}$  é uma transformada de Darboux-Bianchi de  $S$ , em particular,  $\tilde{S}$  é uma transformada de Ribaucour de  $S$ . Assim, pelo Corolário 3.3, temos

$$e^{\tilde{\vartheta}} = e^{\vartheta} - 2\varphi\nu B_i, \quad \tilde{V}_i = V_i - 2\nu\beta B_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.51)$$

onde  $B_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \gamma_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial u_2} - \beta V_1$ ,  $B_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \gamma_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} - \beta V_2$ . Como  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \varphi, \rho)$  é uma solução de (3.45), obtemos

$$B_1 = m(e^{\vartheta} \rho + e^{-\vartheta} \varphi) \quad \text{e} \quad B_2 = m(e^{\vartheta} \rho - e^{-\vartheta} \varphi). \quad (3.52)$$

Além disso, pela demonstração do Teorema 3.3, temos que

$$2\nu = \frac{1}{m\rho\varphi}. \quad (3.53)$$

Substituindo (3.52) e (3.53) em (3.51) obtemos o resultado.  $\square$

**Exemplo 3.2** Seja  $\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$  o sistema de coordenadas cartesianas do plano  $z = 0$ . A solução do sistema (2.27) associada a  $\mathbf{x}$  é a solução trivial  $\vartheta = V_1 = V_2 = 0$ . Pelo Teorema 3.3, um sistema de coordenadas isotérmico principal em uma transformada de Darboux-Bianchi do plano  $z = 0$  é dado por:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{1}{m\rho}(\gamma_1 e^{-\vartheta} \mathbf{x}_{u_1} + \gamma_2 e^{-\vartheta} \mathbf{x}_{u_2} + \beta N),$$

onde  $(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \varphi, \rho)$  é a solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \gamma_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \gamma_2, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial u_1} = \gamma_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u_2} = -\gamma_2, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = m\rho + m\varphi, \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} = m\rho - m\varphi. \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema linear de equações diferenciais parciais acima, obtemos

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2m}}{m} \sinh \sqrt{2m} u_1,$$

$$\gamma_2 = -\sqrt{2m} \sin \sqrt{2m} u_2,$$

$$\beta = k, \quad k = \text{constante},$$

$$\varphi = \cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1,$$

$$\rho = \cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2.$$

Daí,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{m(\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2m}}{m} \sinh \sqrt{2m} u_1 \\ -\sqrt{2m} \sin \sqrt{2m} u_2 \\ k \end{pmatrix}.$$

Além disso, pelo Corolário 3.4, a solução do sistema (2.27) associada a  $\tilde{\mathbf{x}}$  é dada por

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\vartheta}} &= \pm \frac{\cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1}{\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2}, \\ \tilde{V}_1 &= -\frac{k}{\cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1} - \frac{k}{\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2}, \\ \tilde{V}_2 &= -\frac{k}{\cos \sqrt{2m} u_2 + \cosh \sqrt{2m} u_1} + \frac{k}{\cosh \sqrt{2m} u_1 - \cos \sqrt{2m} u_2}. \end{aligned}$$

As transformadas de Darboux-Bianchi em  $\mathbb{R}^3$  do plano  $z = 0$  têm o aspecto mostrado nas figuras abaixo, para os valores de  $k$  e  $m$  fixados:

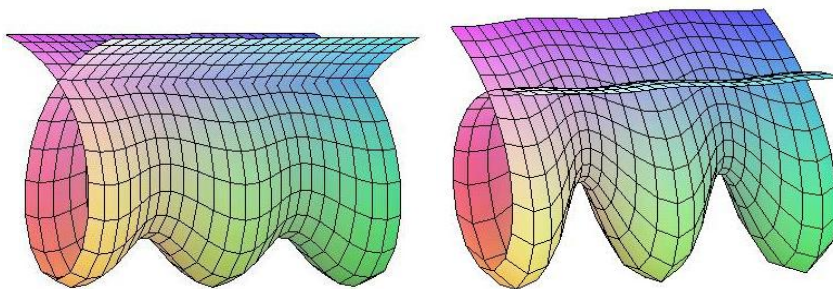


Figura 2:  $m = 3$  e  $m = 1$ , respectivamente.  $k = 1$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Sym, *Soliton Surfaces*, Lett. Nuovo Cim. 33 (1982) 394-400.
- [2] C. Rogers and W.K. Schief, “Bäcklund and Darboux transformations”, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] E. Christoffel, *Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen*, Crelle’s J. 67 (1867), 218-228.
- [4] F. Manfio, “As Cíclicas de Dupin”, Dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática, DM-UFSCar, São Carlos, 2002.
- [5] G. Darboux, *Sur les surfaces isothermiques*, C.R.Acad. Sci. Paris **128** (1899), 1483–1487.
- [6] G. Darboux, “Leçons sur la théorie des surfaces”. (Reprinted by Chelsea Pub. Co., 1972), Paris 1914.
- [7] J. Cieśliński, *The Darboux-Bianchi transformation for isothermic surfaces. Classical results the soliton approach*. Differential Geometry and its Applications 7 (North-Holland, 1997), 1–28.

- [8] J. Cieśliński, P. Goldstein and A. Sym, *Isothermic surfaces em  $E^3$  as soliton surfaces*. Phys. Lett. A 205 (1995)37–43.
- [9] L. Bianchi, “Lezioni di Geometria Differenziale”, Bologna, 1927.
- [10] L. Bianchi, *Sulle trasformazioni di Ribaucour di una classe di superficie*, Rend. Acc. Naz. Lincei **25** (1916), 435–445.
- [11] M. Dajczer e R. Tojeiro, *An extension of the classical Ribaucour transformation*, Proc. London Math. Soc. **85** (2002), 211–232.
- [12] M. Dajczer e R. Tojeiro, *Commuting Codazzi tensors and the Ribaucour transformation for submanifolds*. To appear in Result. Math.
- [13] M. P. Carmo, “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- [14] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 3. ed, v. 3. Houston: Publish or Perish, 1999.
- [15] R. Tojeiro, *Conformal de Rham decomposition of Riemannian manifolds*. Preprint.
- [16] R. Tojeiro, *Isothermic submanifolds of Euclidean space*. Preprint.