

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## **A Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves**

Paulo Antonio Liboni Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**A Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves**

Paulo Antonio Liboni Filho

Dissertação apresentada ao  
PPG-M da UFSCar como parte  
dos requisitos para a obtenção  
do título de Mestre em Mate-  
mática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

São Carlos - SP  
2009

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

L696fa

Liboni Filho, Paulo Antonio.

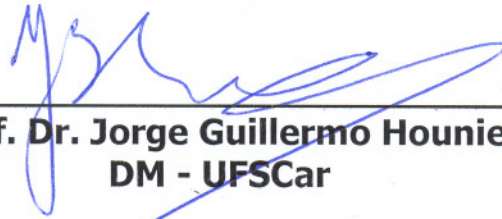
A fórmula de aproximação de Baouendi -Treves / Paulo Antonio Liboni Filho. -- São Carlos : UFSCar, 2009.  
98 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Variedades diferenciáveis. 3. Teoria das distribuições. 4. Radon, Medidas de. 5. Teorema de aproximação de Baouendi - Treves. I. Título.

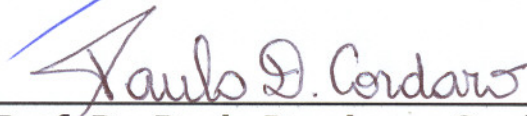
CDD: 515.353 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



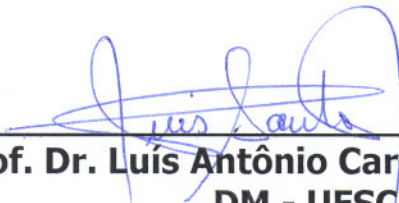
---

**Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie  
DM - UFSCar**



---

**Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro  
IME - USP**



---

**Prof. Dr. Luis Antônio Carvalho dos Santos  
DM - UFSCar**

*Dedico este trabalho a meus pais  
Paulo (in memoriam) & Altiva Helena*

*“(...) how awkward it is not to be able to be allowed to differentiate.”*

Lars Hörmander, motivando o estudo das distribuições.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço inicialmente a Deus que, mesmo na minha condição de pecador, me ama e protege.

Sou grato a meus pais pelo dom maior da vida, assim como pelas palavras de encorajamento, carinho e correção — que eventualmente se tornam necessárias ao longo do caminho.

Não posso deixar de agradecer aos meus irmãos e suas famílias. Primeiramente, pela compreensão nos momentos em que não estive presente, e claro, pelo amor que nutrimos uns pelos outros.

Não foram poucas as vezes em que me perdi na aridez das sutilezas matemáticas. Agradeço ao professor Jorge que, mesclando bom-humor, paciência e competência orientou este estudo e soube me apontar a direção a ser seguida.

Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática, tanto desta universidade quanto da Unesp, que, certamente, contribuíram para a minha formação pessoal e acadêmica. Sou grato, especialmente, às professoras Alice e Suzi, que tanto me ajudaram quando me encontrei em dificuldade.

Estarei sempre em débito junto aos amigos: pelas caronas e baladas, pelo Bozó, pelas vezes que sofremos juntos, pela bagunça, pelas ligações diárias e, claro, pelas vezes que surtamos de saudades uns dos outros. Amo vocês.

Impossível não lembrar dos servidores técnico-administrativos deste departamento. Agradeço, em especial, nossa querida secretária Irma: pelo zelo, presteza e carinho com que conduz suas atividades.

Finalmente, agradeço à FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo financiamento deste projeto.

Seja  $\Omega$  uma variedade diferenciável de dimensão  $N$ . Consideremos uma estrutura localmente integrável  $\mathcal{L}$  de  $CT\Omega$  com fibra de dimensão  $1 \leq n < N$  e escrevamos  $m = N - n$ . Dizemos que  $\mathcal{L}$  é localmente integrável se, para todo ponto  $p \in \Omega$ , existe uma vizinhança  $U_p$  no qual estão definidas  $m$  funções suaves  $Z_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $1 \leq j \leq m$  que satisfazem

1.  $Z_j$  é anulado por toda seção suave de  $\mathcal{L}$ ;
2.  $dZ_1(p) \wedge \dots \wedge dZ_m(p) \neq 0$ .

O principal resultado deste texto é o Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves, que estabelece que qualquer distribuição  $u$  que seja solução das seções de  $\mathcal{L}$  pode expressar-se localmente como limite de uma sequência de soluções suaves da forma  $P_k \circ Z$ , onde  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  e  $P_k$  é um polinômio em  $m$ -variáveis.



---

## Abstract

---

Let  $\Omega$  be a  $N$ -dimensional smooth manifold. Consider a locally integrable structure  $\mathcal{L}$  of  $CT\Omega$  with fiber dimension  $1 \leq n < N$  and set  $m = N - n$ . We say that  $\mathcal{L}$  is locally integrable if, for every  $p \in \Omega$ , there is a neighborhood  $U_p$  and  $m$  smooth functions  $Z_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $1 \leq j \leq m$  such that

1.  $Z_j$  is annihilated by every local section of  $\mathcal{L}$ ;
2.  $dZ_1(p) \wedge \dots \wedge dZ_m(p) \neq 0$ .

The main result in this text is the Baouendi-Treves Approximation Theorem, that states that every distribution solution  $u$  of the sections of  $\mathcal{L}$  is locally the limit of a sequence of smooth solutions of the form  $P_k \circ Z$ , where  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  and  $P_k$  is a  $m$ -variable polynomial.

---

## Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>V</b>
<b>Introdução</b>	<b>IX</b>
<b>I A Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Tópicos de Teoria das Distribuições . . . . .	2
1.2 Conjunto Frente de Ondas . . . . .	9
1.3 Estruturas Localmente Integráveis . . . . .	13
1.4 Formas Diferenciais . . . . .	19
<b>2 O Teorema de Baouendi-Treves</b>	<b>26</b>
2.1 O Teorema de Aproximação . . . . .	26
2.2 Demonstração para $u \in C^\infty(W)$ . . . . .	32

## SUMÁRIO

---

2.3	Demonstração para $u \in \mathcal{D}'(W)$ . . . . .	43
2.4	Convergência em Outros Espaços Funcionais . . . . .	52
<b>II</b>	<b>Regularidade e Unicidade para Medidas de Radon</b>	<b>54</b>
<b>3</b>	<b>Preparativos</b>	<b>55</b>
3.1	Medidas de Radon . . . . .	55
3.2	Funções de Variação Limitada . . . . .	63
3.3	Espaços de Distribuições $\mathcal{D}'_k$ . . . . .	70
3.4	Campos Vetoriais Contínuos . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Regularidade e Unicidade de Soluções em <math>\mathcal{D}'_0(\Omega)</math></b>	<b>82</b>
4.1	Regra de Leibnitz para Soluções . . . . .	82
4.2	Regularidade e Unicidade para Medidas . . . . .	90
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>96</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>97</b>

---

## Introdução

---

Considere, em  $\mathbb{R}^2$ , a Equação da Onda

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Dizer que uma aplicação  $u \in C^2$  é solução clássica de  $\square u = 0$  é equivalente a encontrar duas aplicações  $f, g$  tais que  $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ .

Ora, se tomarmos uma sequência  $(u_n)$  de soluções clássicas da Equação da Onda que convergem uniformemente para uma aplicação  $u$ , é fácil de demonstrar que  $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$  para certas  $f, g$  contínuas. Consequentemente, as soluções clássicas de  $\square u = 0$  não são invariantes com respeito a limites uniformes.

A Teoria das Distribuições, que surgiu justamente para contornar este tipo de situação desagradável, é apresentada com certo detalhe no Capítulo 1. Também apresentaremos alguns tópicos sobre o Conjunto Frente de Ondas de uma distribuição  $u$ , conceito que refina a informação apresentada pelo suporte singular e que, finalmente, nos fornecerá uma condição suficiente para definir a restrição de uma distribuição de duas variáveis à sua primeira componente.

Ainda nos preparativos para o estudo do Teorema de Aproximação, apresentaremos o conceito de variedade diferenciável, que fornece um espaço de trabalho adequado e, ao mesmo tempo, suficientemente geral para os estudos dos fenômenos diferenciais clássicos, comumente vistos nos abertos euclidianos. Para concluir o primeiro capítulo desta disser-

tação, finalizaremos com tópicos sobre formas diferenciais e suas operações.

Já no Capítulo 2, demonstraremos o Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves, que estabelece que qualquer distribuição  $u$  que seja solução das seções de  $\mathcal{L}$  pode expressar-se localmente como limite de uma sequência de soluções suaves da forma  $P_k \circ Z$ . Primeiramente, demonstraremos o teorema para  $u \in C^\infty$ . A demonstração, neste caso, é relativamente simples e depende da construção de um operador especial.

O restante do capítulo é devotado, quase que exclusivamente, à convergência no espaço das distribuições e, nos casos mais regulares, à convergência na topologia de  $C^k$ . Para a primeira tarefa, estenderemos as etapas da demonstração anterior para as funções generalizadas. Também neste capítulo, apresentaremos a definição dos Espaços de Sobolev  $L^{p,s}(\mathbb{R}^m)$  e  $L_{loc}^{p,s}(\mathbb{R}^m)$

O Teorema de Aproximação, provado em 1981 por Baouendi e Treves, é uma das principais ferramentas disponíveis na teoria das estruturas localmente integráveis. Com este resultado, é possível estudar propagação de zeros de soluções homogêneas. A discussão do Teorema de Aproximação se encerra quando enunciaremos versões para outros espaços funcionais.

Na Parte II deste texto, alteraremos a regularidade dos objetos com os quais estávamos trabalhando. Nosso principal objetivo é estudar um resultado de regularidade e unicidade para medidas, que serão identificadas com o dual do espaço das funções contínuas e de suporte compacto.

Para estudarmos esta identificação, que será demonstrada com cuidado no Capítulo 3, introduziremos as noções de medida de Radon, espaços de distribuições  $\mathcal{D}'_k$  e funções de variação limitada. Utilizando uma das versões do Teorema da Representação de Riesz, que também demonstraremos, estabeleceremos como estes três objetos se comportam. Enquanto isso, adaptaremos o conceito de variedade diferenciável, formas e campos para um caso menos regular.

No quarto capítulo deste texto, demonstraremos um teorema para regularidade e unicidade para medidas de Radon. O estudo será dividido em duas etapas: primeiramente estudaremos a Regra de Leibnitz para  $t \mapsto \langle f(t), \phi(\cdot, t) \rangle$ , onde  $f$  é uma aplicação com imagem em  $\mathcal{D}'_1(Q_R)$ . Em um segundo momento, utilizaremos os operadores introduzidos na demonstração do Teorema de Aproximação para concluir o nosso principal resultado desta segunda parte.

Finalmente, encerraremos o texto enunciando uma versão do Teorema de Aproximação para medidas, cuja demonstração é obtida através da noção de traço que estabeleceremos.

# Parte I

## A Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

O propósito deste capítulo é apresentar, de forma sucinta, resultados cruciais para o entendimento do texto que se inicia no próximo capítulo. Apesar destes tópicos serem clássicos da Análise Matemática, eles serão enunciados com o objetivo de estabelecer uma notação e uma linguagem que se seguirá em todo o texto.

### 1.1 Tópicos de Teoria das Distribuições

Em Matemática, distribuições são objetos que estendem funções e suas operações. É possível, por exemplo, estender a noção de derivada a funções integráveis e portanto são usadas como soluções mais gerais para equações diferenciais.

A idéia básica é identificar funções localmente integráveis com operadores lineares abstratos em um espaço de funções não problemáticas e em seguida mover as operações no espaço das distribuições para este espaço de funções regulares.

As distribuições foram introduzidas no final dos anos 40 por Laurent Schwartz, que desenvolveu uma extensa teoria para as funções generalizadas.

Como referência para a apresentação das demonstrações dos principais fatos desta seção recomendamos a leitura de [Hou79].

Nesta seção considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto.

**Definição 1.1.1.** Denotaremos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  o espaço das funções-testes em  $\Omega$ , isto é, o conjunto das funções complexas indefinidamente diferenciáveis e de suporte compacto em  $\Omega$ .

É possível dotar  $\mathcal{D}(\Omega)$  de uma estrutura vetorial-topológica, não metrizável, onde a noção de convergência é a seguinte:

**Teorema 1.1.2.** *Uma sequência  $(\phi_j)$  de funções testes converge a zero se, e somente se,*

- (i) *existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $\text{supp}(\phi_j) \subset K$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;*
- (ii) *para todo inteiro positivo  $m$ , as derivadas de ordem  $m$  das funções  $\phi_j$  convergem uniformemente a zero.*

**Definição 1.1.3.** Uma *distribuição* em  $\Omega$  é um funcional linear contínuo de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . O espaço vetorial das distribuições é denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Convencionaremos escrever  $\langle u, \phi \rangle$  ao invés de  $u(\phi)$ .

É claro que se  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  então  $f$  não é uma distribuição – haja visto que são funções com domínios diferentes. Entretanto o próximo teorema lança luz sobre este problema e fará esta situação ser entendida de outro modo.

**Teorema 1.1.4.** *Se  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  então a função  $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\phi \mapsto \int \phi f \, dx$  é uma distribuição em  $\Omega$  e ainda se  $T_f = T_g$  então  $f = g$  em  $L^1_{loc}$ , ou seja,  $f(x) = g(x)$  quase toda parte.*

Munidos do resultado acima convencionaremos que  $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  como espaço topológico, isto é, existe uma aplicação  $J : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  contínua e injetora. Neste sentido que as distribuições são chamadas de *funções generalizadas*.

É possível dotar  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de uma estrutura vetorial-topológica onde a noção de convergência é a seguinte:

**Teorema 1.1.5.** *Uma sequência  $(u_j)$  de distribuições converge a  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  se, e somente se,  $\langle u_j, \phi \rangle$  converge para  $\langle u, \phi \rangle$  em  $\mathbb{C}$  para toda  $\phi \in \mathcal{D}$ .*

Agora que já criamos objetos mais gerais que funções existe uma pergunta natural: é possível estender algumas operações que fazemos com funções-testes para as distribuições? A resposta é sim e o procedimento geral é dado abaixo.



**Definição 1.1.6.** Sejam  $L$  e  $L'$  operadores lineares e contínuos de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Dizemos que  $L'$  é o *transposto formal* de  $L$  se  $\int (L\phi)\psi \, dx = \int \phi(L'\psi) \, dx$  para quaisquer  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Analisemos um exemplo prático. Seja  $L$  o operador contínuo dado por

$$\begin{aligned} L : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \phi &\longmapsto \phi' \end{aligned}$$

Se  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  então  $(\psi\phi)' = \psi'\phi + \phi'\psi$  e portanto  $\int (\psi\phi)' \, dx = \int \psi'\phi + \phi'\psi \, dx$ . Como  $\int_K (\psi\phi)' \, dx = 0$  para um compacto  $K$  suficiente grande temos que  $\int \psi'\phi \, dx = -\int \phi'\psi \, dx$ . Consequentemente  $L'$  dado por

$$\begin{aligned} L' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \phi &\longmapsto -\phi' \end{aligned}$$

é o transposto formal de  $L$ .

O operador construído acima será utilizado em outras partes do texto e, deste ponto em diante, será denotado por  $\frac{d}{dx}$ . Observe que deste modo seu transposto formal é dado por  $-\frac{d}{dx}$ .

Mediante este exemplo fica claro da razão de considerar operações apenas com funções-testes ao invés de funções  $C^\infty$  em geral: o suporte compacto garante que os termos de fronteira que surgem na integração por partes sejam nulos e consequentemente a expressão do transposto formal surja de maneira natural.

É importante notar que nem todo operador contínuo admite um transposto formal. Para a construção deste exemplo fixe  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  e considere

$$\begin{aligned} L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \\ \phi &\longmapsto \phi(0)f \end{aligned}$$

Suponha que  $L$  admita um transposto formal  $L'$ . Neste caso para  $\phi, \psi \in \mathcal{D}$  segue que

$$\int \phi(0)f\psi \, dx = \int \phi(L'\psi) \, dx.$$

Consequentemente para toda  $\phi, \psi \in \mathcal{D}$  tal que  $\phi(0) = 0$  temos que

$$\int \phi(L'\psi) \, dx = 0$$

o que significa que  $L'\psi = 0$  quase toda parte e finalmente teríamos que  $L = 0$ .

Apesar do fato de que nem todos os operadores admitem um transposto formal é interessante observar que aqueles que o admitem possuem uma propriedade fundamental.

**Teorema 1.1.7.** *Seja  $L$  um operador contínuo em  $\mathcal{D}(\Omega)$  que admite um transposto formal  $L'$ . Para cada  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  a aplicação  $Lu : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $Lu(\phi) = \langle u, L'\phi \rangle$  é uma distribuição e se ainda  $u = T_f$  para alguma  $f \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  então  $Lu = T_{L'f}$ . Em outras palavras, se você conhece o transposto formal de um operador em  $\mathcal{D}(\Omega)$  é possível estendê-lo para um operador  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

Deste ponto em diante todas as derivadas tomadas neste texto serão no sentido das distribuições, isto é, se  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  então a derivada de  $f$  é a distribuição

$$\frac{d}{dx}T_f,$$

onde  $\frac{d}{dx}$  é operador construído anteriormente. Observe que o mesmo vale para as derivadas parciais. Naturalmente se  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$  então o teorema nos garante que as duas noções são equivalentes. Observe que isto ainda é verdadeiro no caso em que  $f$  é continuamente diferenciável.

Nesta próxima etapa vamos introduzir a noção de suporte e suporte singular de uma distribuição, que serão extremamente úteis no futuro.

**Definição 1.1.8.** *Seja  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $A$  um aberto de  $\Omega$ . Dizemos que  $u$  se anula em  $A$  se  $\langle u, \phi \rangle = 0$  para qualquer  $\phi \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ . Definimos o *suporte* de  $u$ , denotado por  $\text{supp } u$ , como a intersecção de todos os fechados de  $\Omega$  fora dos quais  $u$  é nula. O subconjunto de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  das distribuições de suporte compacto é denotado por  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .*

**Definição 1.1.9.** *Seja  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $A$  um aberto de  $\Omega$ . Dizemos que  $u$  é  $C^\infty$  em  $A$  se existe  $f \in C^\infty(A)$  tal que  $\langle u, \phi \rangle = \int f\phi dx$  para qualquer  $\phi \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ . Definimos o *suporte singular* de  $u$ , denotado por  $\text{SS } u$ , como a intersecção de todos os fechados de  $\Omega$  fora dos quais  $u$  é  $C^\infty$ .*

Algumas distribuições possuem propriedades mais especiais que as outras. Os conceitos definidos acima são úteis para identificar dois tipos destas distribuições. Se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  é tal que  $\text{SS } u = \emptyset$  então a própria  $u$  é uma função  $C^\infty(\Omega)$ . Já se  $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$  então ela pode ser estendida, de maneira única, a um funcional contínuo  $\tilde{u}$  de  $C^\infty(\Omega)$ . Para que a notação seja consistente com este fato também escreveremos  $\mathcal{E}(\Omega)$  para representar  $C^\infty(\Omega)$ .

O próximo objetivo é definir e enunciar algumas propriedades da Transformada de Fourier para distribuições.

A Transformada de Fourier para uma aplicação  $f$  surgiu da necessidade de se representar a função na forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

que surge naturalmente quando se aplica o método de separação de variáveis para resolver equações diferenciais parciais. Isto inspira a

**Definição 1.1.10.** Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  a *Transformada de Fourier* de  $f$  se define por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

onde  $i$  é a unidade imaginária e  $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i$ .

Introduziremos agora uma notação prática para o estudo da Transformada de Fourier. Se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  é um multi-índice, isto é,  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  então a soma  $\sum_{i=1}^N \alpha_i$  é denotada por  $|\alpha|$  e o produto  $\alpha_1! \cdots \alpha_N!$  por  $\alpha!$ .

Se ainda  $x \in \mathbb{R}^N$  então  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$ . Além disto escreveremos  $D_j$  para representar o operador

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j}$$

assim como  $D^\alpha$  para o operador  $D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$ .

O passo natural seria estender, por dualidade, a noção da Transformada de Fourier para distribuições através da técnica vista anteriormente para operações em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ . Neste caso especial este procedimento não funciona já que se  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  e ainda  $\widehat{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  então  $\phi \equiv 0$ .

O problema se reside em construir um conjunto que contenha  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  e que seja invariante pela Transformada de Fourier, e então, estender aos funcionais deste espaço a noção desta transformada.

**Definição 1.1.11.** Indicaremos por  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  o subespaço de  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$  das funções  $\phi$  de *decrecimento rápido*, isto é, funções  $\phi$  tais que

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \phi| < \infty$$

com  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{N}^N$ .

Dizer que uma função está em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  é o mesmo que dizer que tanto a função quanto suas derivadas decrescem mais rapidamente que qualquer potência negativa de  $|x|$ .

Note que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  é invariante por derivação e multiplicação por polinômios e além disso  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . Um exemplo de função em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) - \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  é  $f(x) = e^{-|x|^2}$ .

Dotaremos  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  com uma estrutura vetorial-topológica onde a noção de convergência é dada pelo

**Teorema 1.1.12.** *Uma sequência  $(\phi_j)$  de funções em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  converge a zero se, e somente se,  $x^\alpha D^\beta \phi$  convergem a zero uniformemente quaisquer que sejam os multi-índices  $\alpha$  e  $\beta$ .*

Vejamos um teorema que justifica o estudo do espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  como o domínio adequado para a Transformada de Fourier.

**Teorema 1.1.13.** *A Transformada de Fourier é um homeomorfismo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  e ainda*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi.$$

E se ainda  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  valem as fórmulas:

$$(i) \widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi);$$

$$(ii) \mathcal{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\phi}(\xi).$$

Para uma aplicação deste último resultado vamos usar um método indireto para calcular a transformada de  $f(x) = e^{-|x|^2}$  em  $\mathbb{R}^N$ . Primeiramente observe que  $\widehat{f}(\xi)$  é um produto de integrais unidimensionais e portanto resta calcular  $\widehat{\phi}$  onde  $\phi(x) = e^{-x^2}$ .

Para o cálculo de  $\widehat{\phi}$  note que  $\phi$  satisfaz

$$\begin{cases} \phi'(x) + x\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases}$$

Como  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  podemos aplicar as regras do teorema anterior e concluir que

$$0 = i\xi \widehat{\phi}(\xi) = \frac{1}{i} \frac{d\widehat{\phi}}{d\xi}(\xi) = i \left( \frac{d\widehat{\phi}}{d\xi} + \xi \widehat{\phi}(\xi) \right).$$

Consequentemente  $\widehat{\phi}$  satisfaz a mesma equação diferencial de  $\phi$  munida da condição

$$\widehat{\phi}(0) = \int \phi dx$$

o que finalmente implica

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \exp\left(\frac{-|\xi|^2}{2}\right).$$

Estamos, finalmente, em condições de estudar a Transformada de Fourier para distribuições.

**Definição 1.1.14.** Um funcional linear e contínuo em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  é dito uma *distribuição temperada*. O espaço das distribuições temperadas se denota por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ .

**Teorema 1.1.15** (Relações entre os espaços de distribuições). *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i)  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ ;
- (ii)  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ ;
- (iii)  $\mathcal{D}(\Omega)$  é denso em  $\mathcal{E}(\Omega)$ ;
- (iv)  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  é denso em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ .

Naturalmente a afirmação  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  do teorema anterior é dada considerando a restrição dos funcionais aos subespaços adequados e note que a inclusão é bem definida dada a densidade de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ .

**Definição 1.1.16.** Se  $u \in \mathcal{S}'$  então a sua Transformada de Fourier  $\widehat{u}$  de  $u$  se define pela dualidade

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle$$

para toda  $\phi \in \mathcal{S}$ .

**Teorema 1.1.17.** *Se  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  então  $\widehat{u}$  é uma distribuição temperada em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  e ainda valem as afirmações:*

- (i) *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  a transformada  $\widehat{f}$  de  $f$  como distribuição temperada coincide, mediante identificação, com a transformada de  $f$  no sentido clássico;*
- (ii) *Se  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$  então  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$  e ainda  $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-N} \|\widehat{f}\|_2^2$ ;*
- (iii) *Se  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$  então  $\widehat{u}$  é uma função  $C^\infty$  e é dada por  $\widehat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ ;*
- (iv)  $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}$ ;

$$(v) \mathcal{F}(x^\alpha u) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}.$$

Naturalmente, a transformada inversa para uma distribuição temperada também se define por dualidade.

Para finalizar esta seção vamos introduzir uma notação. Se  $\phi \in X(\Omega)$ , onde  $X$  é um espaço funcional e se  $u \in X'(\Omega)$  então definiremos  $\int \phi u \, dx$  como sendo  $\langle u, \phi \rangle$ .

## 1.2 Conjunto Frente de Ondas

Se  $u$  for uma distribuição pouco regular, isto é, se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega) - C^0(\Omega)$ , então não é sempre possível avaliar  $u$  em um ponto  $p \in \Omega$ . Desta forma, se  $u$  é pouco regular então não será possível, em geral, determinar a distribuição  $u|A$  onde  $A \subset \Omega$ .

O objetivo desta seção é construir uma distribuição  $u|A$ . Observe que esta definição deverá ser consistente, ou seja, é necessário verificar que se  $u \in C^0(\Omega)$  então a restrição de  $u$  vista como função e como distribuição são equivalentes.

A tentativa natural para definir a restrição seria através de regularização. Diremos que uma sequência  $(f_n)$  de funções em  $C^0(\Omega)$  constitui uma regularização de  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  se  $f_n \rightarrow u$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Suponha, por um instante, que a sequência  $(f_n|A)$  seja uma regularização de uma certa distribuição  $v$  e que ainda  $v$  independa da escolha da regularização para  $u$ . Neste caso especial é simples verificar que a definição  $u|A = v$  é adequada.

A suposição de que  $v$  independe da escolha da regularização para  $u$ , infelizmente, é falsa. Um exemplo simples de distribuição que sofre desta patologia é o Delta de Dirac – indicado por  $\delta$  e dada por  $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ . Para investigar este problema comecemos com um resultado simples.

**Lema 1.2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  uma vizinhança da origem e  $I : C_c^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação linear satisfazendo as seguintes condições:*

$$(i) \text{ Se } \phi \in C_c^0 \text{ então } I(|\phi|) \in \mathbb{R} \text{ e ainda } |I(\phi)| \leq I(|\phi|);$$

$$(ii) \text{ Se } \phi, \psi \in C_c^0 \text{ são tais que } |\phi| \leq |\psi| \text{ então } I(|\phi|) \leq I(|\psi|).$$

*E se ainda  $(\xi_n)$  é uma sequência de funções positivas em  $C_c^0$  satisfazendo:*

$$(i) I(\xi_n) = 1;$$

$$(ii) \text{ supp } \xi_n \subset B(0, r_n), \text{ com } r_n \rightarrow 0.$$

Então para toda  $\phi \in C^0$  têm-se que  $I(\xi_n \phi) \longrightarrow \phi(0)$ .

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tais que se  $|x| < \delta$  então  $|\phi(x) - \phi(0)| < \varepsilon$ . Como  $r_n \longrightarrow 0$  então existe um  $k(\varepsilon)$  tal que se  $n > k$  então  $r_n < \delta$ .

Conseqüentemente  $|I(\xi_n \phi) - \phi(0)| = |I(\xi_n \phi) - \phi(0)I(\xi_n)| = |I(\xi_n \phi - \xi_n \phi(0))| \leq I(\xi_n |\phi - \phi(0)|)$ .

Como  $\xi_n |\phi - \phi(0)| \leq \varepsilon \xi_n$  se  $n > k$  então  $|I(\xi_n \phi) - \phi(0)| < \varepsilon$ . □

É possível verificar que tal funcional  $I$  é necessariamente representado por uma integral contra uma medida de Radon positiva. Para ilustrar esta situação considere  $I(\phi) = \phi(0)$ . Neste caso temos que  $I(\phi) = \int \phi dx$ , onde  $x$  é a medida concentrada na origem.

Se tomarmos  $I$  como sendo a integral de Lebesgue em  $\mathbb{R}^N$  então temos uma ferramenta para gerar aproximações do Delta de Dirac. Para ilustrar o lema considere a sequência

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -4n^2(x - \frac{1}{n}), & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cujos representações se encontra na figura abaixo.

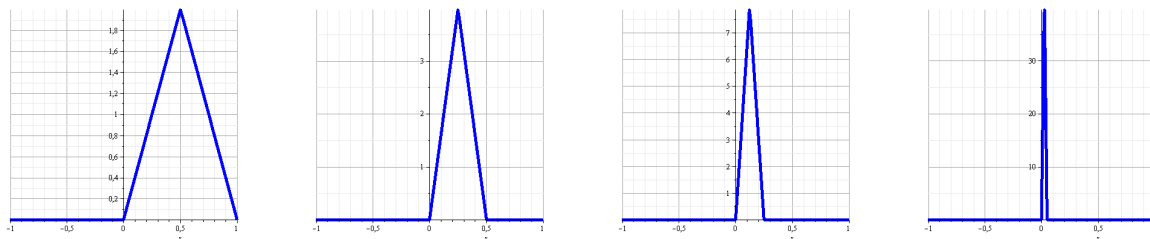


Figura 1.1: Gráficos da Aproximação

O lema anterior nos garante que, no sentido das distribuições,  $\xi_n \longrightarrow \delta$ .

Um fato interessante é observar que o último lema não esgota todas as possibilidades para aproximar o Delta de Dirac. Um caso interessante é o da sequência de Gaussianas

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}.$$

É simples verificar que, no sentido das distribuições,  $\delta_{1/n}(x) \longrightarrow \delta$ . Fato que, geometricamente, pode ser representado pela Figura (1.2).

## 1.2. CONJUNTO FRENTE DE ONDAS

---

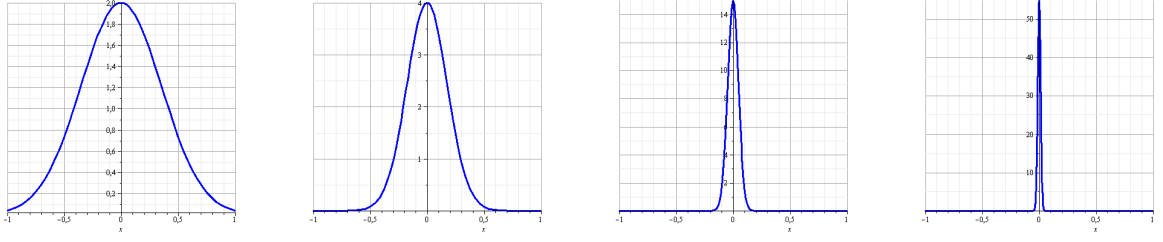


Figura 1.2: Gráficos da Aproximação

Após estes dois exemplos é possível concluir que a primeira tentativa para restringir distribuições não funciona. Observe que ambos os casos constituem regularizações para  $\delta$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e, ainda assim, para a primeira sequência temos que  $\xi_n|\{0\} \rightarrow 0$  e já para a segunda concluímos que  $\delta_{1/n}|\{0\} \rightarrow \infty$ . Neste caso não é possível construir a distribuição  $\delta|\{0\}$ .

Vamos olhar, finalmente, a noção precisa de restrição para alguns elementos de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  para certos subconjuntos  $A$ , com  $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Inicialmente vamos estabelecer uma equivalência que será útil para o entendimento das definições que seguem.

**Teorema 1.2.2.**  $x_0 \notin \text{SS}u$  se, e somente se, existe  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  com  $\phi(x_0) \neq 0$  e ainda  $\mathcal{F}(\phi u)(\xi) = O(|\xi|^{-k})$  para  $k \in \mathbb{N}$  e  $|\xi| \geq 1$ , ou equivalentemente, para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe uma constante  $C_k > 0$  tal que  $|\mathcal{F}(\phi u)(\xi)| \leq C_k(1 + |\xi|)^{-k}$  qualquer que seja  $\xi \neq 0$ .

**Definição 1.2.3.** Uma *vizinhança cônica* de  $p \in \Omega$  na direção  $\xi^0 \in \mathbb{R}^N - \{0\}$  é um aberto de  $\Omega \times \mathbb{R}^N - \{0\}$  da forma  $U \times \Gamma$  satisfazendo:

- (i)  $U \subset \Omega$  é uma vizinhança de  $x_0$ ;
- (ii)  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N - \{0\}$  é uma vizinhança de  $\xi^0$ ;
- (iii) Se  $\xi \in \Gamma$  então  $t\xi \in \Gamma$  qualquer que seja  $t > 0$ .

O conjunto  $\Gamma$  é denominado *cone contendo*  $\xi^0$ .

**Definição 1.2.4.** Dado  $(x_0, \xi^0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N - \{0\}$  e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  diremos que  $(x_0, \xi^0) \notin \text{WF}u$  se existe uma  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e um cone aberto  $\Gamma$  contendo  $\xi^0$  satisfazendo:

- (i)  $\phi(x_0) = 0$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}(\phi u)(\xi) = O(|\xi|^{-k})$ , para quaisquer  $k \in \mathbb{N}$  e  $\xi \in \Gamma$  com  $|\xi| \geq 1$ .

O conjunto  $\text{WF}u$  é chamado de *Conjunto Frente de Ondas*.



É interessante imaginarmos que o conjunto  $\text{WF } u$  não apenas nos revela onde a função generalizada  $u$  não é suave (informação já revelada pelo suporte singular) mas assim como a direção onde ela deixa de ser regular. O termo “Frente de Ondas” foi cunhado por Lars Hörmander por volta de 1970.

**Teorema 1.2.5.** *Se  $x_0 \notin \text{SS } u$  então  $(x_0, \xi^0) \notin \text{WF } u$  qualquer que seja  $\xi^0$ . Reciprocamente, suponha que  $(x_0, \xi^0) \notin \text{WF } u$  qualquer que seja  $\xi^0 \in S^{N-1}$  então  $x_0 \notin \text{SS } u$ . Este fato é expresso pela fórmula  $\Pi_\Omega(\text{WF } u) = \text{SS } u = \Pi_\Omega(\text{WF } u \cap \Omega \times S^{N-1})$ .*

Para prosseguirmos nosso estudo considere  $\mathbb{R}^N$  decomposto como  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Indique  $v \in \mathbb{R}^N$  por  $v = (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$  onde  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  e  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  está definida em  $\mathbb{R}^N$  denote por  $f(x, t)$  a imagem de  $f$  do vetor  $v$ .

O próximo passo é restringir, sob certas condições,  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$  ao conjunto  $t = 0$ , isto é,  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ .

**Teorema 1.2.6.** *Se  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$  e ainda o  $\text{WF } u$  não contém pontos da forma  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N - \{0\}$  com  $\xi = (0, \tau) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  então a aplicação*

$$\tau \longmapsto \mathcal{F}u(\xi, \tau)$$

*é integrável e ainda*

$$W_u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathcal{F}u(\xi, \tau) \, d\tau$$

*é uma distribuição temperada em  $\mathbb{R}^m$ .*

**Definição 1.2.7.** Se  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$  satisfaz as hipóteses do teorema anterior então definiremos  $u|_{\{t=0\}} = u(\cdot, 0) = \mathcal{F}^{-1}W_u$ .

Vale observar que a restrição  $u(\cdot, t_0)$  é obtida através de translações adequadas a partir do nível  $t = 0$  visto na definição anterior. Note que  $u$  é suave no seguinte sentido: se  $\psi \in \mathcal{D}(\{|x| < R\})$  então a aplicação  $t_0 \longmapsto \langle u(\cdot, t_0), \psi \rangle$  é uma aplicação infinitamente diferenciável.

Conclui-se que se  $\text{WF } u \cap N = \emptyset$ , onde

$$N = \{((x, t), (0, \tau)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : |x|, |t| < R, \tau \neq 0\}$$

então  $u \in C^\infty(\{|t| \leq R\}, \mathcal{D}'(\{|x| < R\}))$ , isto é, estamos interpretando  $u$  como uma função

suave (no sentido anteriormente mencionado) dada por

$$\begin{aligned} u : \{|t| \leq R\} &\longrightarrow \mathcal{D}'(\{|x| < R\}) \\ t_0 &\longmapsto u(\cdot, t_0). \end{aligned}$$

A condição suficiente para a restrição é que o WF  $u$  não pode interceptar, ponto-a-ponto, o vetor normal da subvariedade definida por  $t = 0$ . No livro [Hör83, pag. 266] pode-se verificar que este fenômeno é verdadeiro também em situações mais gerais.

## 1.3 Estruturas Localmente Integráveis

Carl Friedrich Gauss foi, provavelmente, o primeiro a usar espaços abstratos na Matemática como objeto de estudo. Evidência deste fato é seu conhecido Teorema Egregium – que nos fornece uma técnica para conhecermos a curvatura de uma superfície levando em conta apenas suas propriedades intrínsecas.

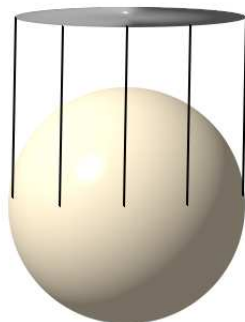
A noção de variedade diferenciável, elaborada por Hermann Weyl em 1912, é a definição que traduz com precisão a noção intuitiva de um espaço que é localmente euclidiano e que ainda permite a extensão de conceitos conhecidos, como de vetor tangente, de tal forma que, localmente, ela possa ser entendido como o conceito euclidiano usual.

Para uma discussão mais detalhada e apresentação das demonstrações dos principais fatos desta seção recomendamos a leitura de [Hou08].

**Definição 1.3.1.** Seja  $\Omega$  um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e  $\mathcal{F} = \{(U, x) : \text{onde } U \text{ é um aberto de } \Omega \text{ e } x : U \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ é um homeomorfismo sobre o aberto } x(U)\}$  satisfazendo:

- (i)  $\bigcup_{(U,x) \in \mathcal{F}} U = \Omega$ . O par  $(U, x)$  é eventualmente chamado de *cartal local* ou *sistema local de coordenadas*;
- (ii) A aplicação definida em  $x(U \cap U') \longrightarrow x'(U \cap U')$  dada por  $x' \circ x^{-1}$  é  $C^\infty$  para todos os pares  $(U, x)$  e  $(U', x')$  em  $\mathcal{F}$  tais que  $U \cap U' \neq \emptyset$ ;
- (iii) A família  $\mathcal{F}$  é maximal com respeito aos itens anteriores, isto é, sejam  $U$  um aberto e  $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  um homeomorfismo sobre sua imagem; se a aplicação definida em  $x(U \cap U') \longrightarrow x'(U \cap U')$  é  $C^\infty$  para todo par  $(U', x')$  em  $\mathcal{F}$  satisfazendo  $U \cap U' \neq \emptyset$  então  $(U, x) \in \mathcal{F}$ .

Nestas condições o par  $(\Omega, \mathcal{F})$  é dito ser uma *variedade diferenciável* de dimensão  $N$ .

Figura 1.3:  $S^2$ : Coordenadas Locais

O terceiro axioma de variedade diferenciável, apesar de parecer pouco natural à primeira vista, é de extrema importância. Um exemplo simples: se certo par  $(U, x) \in \mathcal{F}$  e se  $V \subset U$  é um aberto então graças à maximalidade da família temos que  $(V, x|_V) \in \mathcal{F}$ , ainda mais: graças a este axioma também é possível garantir que dado um ponto  $p \in \Omega$  existe um sistema de coordenadas tal que  $x(p) = 0$ .

Se uma família  $\mathcal{F}^* = \{(U, x) : \text{onde } U \text{ é um aberto de } \Omega \text{ e } x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é um homeomorfismo sobre o aberto } x(U)\}$  satisfaz os dois primeiros axiomas é fácil verificar que existe uma única família  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$  e ainda  $(\Omega, \mathcal{F})$  é uma variedade diferenciável.

Apesar de uma estrutura diferenciável ser um par  $(\Omega, \mathcal{F})$  faremos menção à família  $\mathcal{F}$  apenas quando houver risco de confusão e deste ponto em diante, salvo menção contrária, estaremos considerando  $\Omega$  como sendo uma variedade diferenciável de dimensão  $N$ .

O estudo de fenômenos locais é um dos cerne da Análise e por isso gostaríamos de munir abertos arbitrariamente pequenos com uma estrutura diferenciável. Nesta direção convencionaremos que se  $W \subset \Omega$  é um aberto então tomaremos a família  $\mathcal{F}_W$  dada por  $\mathcal{F}_W = \{(W \cap U, x|_{W \cap U}) : (U, x) \in \mathcal{F} \text{ e } W \cap U \neq \emptyset\}$  que torna  $W$  uma estrutura diferenciável, de mesma dimensão de  $\Omega$ .

**Definição 1.3.2.** Uma aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é dita *suave* se para todo par  $(U, x) \in \mathcal{F}$  têm-se que a composição  $f \circ x^{-1}$  é  $C^\infty$  em  $x(U)$ . Denotaremos por  $C^\infty(\Omega)$  o conjunto destas aplicações.

Exemplos triviais de funções suaves são as projeções das funções coordenadas, isto é, fixada um carta  $(U, x)$  a aplicação dada por  $\Pi_i \circ x : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(U)$  onde  $i = 1, \dots, N$ .

Existem operações naturais definidas em  $C^\infty(\Omega)$  que são, nada mais, aplicações induzidas das operações definidas em  $\mathbb{C}$ , a saber: multiplicação, soma, conjugação, etc.

Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  então podemos tornar  $\Omega$  uma estrutura diferenciável de dimensão  $N$  tomando  $\mathcal{F}^* = \{(\Omega, \text{aplicação identidade})\}$ . Nestas condições vale que

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ é } C^\infty\}.$$

Ou seja, o conceito de aplicação suave para variedades diferenciáveis nada mais é do que uma extensão do conceito usual.

**Definição 1.3.3.** Um *campo vetorial complexo* sobre  $\Omega$  é uma aplicação  $\mathbb{C}$ -linear  $L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$  satisfazendo a *Regra de Leibniz*, isto é,  $L(fg) = L(f)g + L(g)f$ . Denotaremos por  $\mathcal{X}(\Omega)$  o conjunto destas aplicações.

A definição acima encontrar uma maneira de caracterizar uma classe de operadores diferenciais independentemente do sistema de coordenadas escolhido. Nesta direção o próximo resultado é bastante esclarecedor, já que ele indica que localmente é possível representar os campos vetoriais de uma maneira bastante natural.

Antes da discussão da representação local, vamos construir um exemplo e estabelecer uma notação. Fixada uma carta  $(U, x)$  e dada uma aplicação  $f \in C^\infty(U)$  sabemos por definição que a aplicação  $\tilde{f} = f \circ x^{-1}$  é  $C^\infty$  em  $x(U) \subset \mathbb{R}^N$  e, conseqüentemente, a  $i$ -ésima derivada parcial  $\partial_i \tilde{f} : x(U) \longrightarrow \mathbb{C}$  está bem definida e ainda é uma aplicação  $C^\infty$ . Desta forma a composição  $\partial_i \tilde{f} \circ x : U \longrightarrow \mathbb{C}$  é uma aplicação suave, isto é, pertence à  $C^\infty(U)$ .

Em suma, fixada uma carta  $(U, x)$  a aplicação  $\partial_i$  dada por  $\partial_i(f) = \partial \tilde{f}_i \circ x$  define um campo suave em  $U$  que corresponde à noção usual de derivada parcial se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

**Teorema 1.3.4.** *Valem as seguintes afirmações a respeito de um campo vetorial complexo  $L$  em  $\Omega$ :*

- (i) Se  $f \in C^\infty(\Omega)$  e  $f$  é constante então  $Lf = 0$ ;
- (ii)  $\text{supp } Lf \subset \text{supp } f$ ;
- (iii) Se  $(U, x)$  é uma carta local então

$$L(f) = \sum_{j=1}^N (Lx_j) \partial_j f$$

para toda  $f \in C^\infty(U)$ .

**Definição 1.3.5** (Estrutura Algébrica dos Campos). Podemos munir  $\mathcal{X}(\Omega)$  de uma estrutura de  $C^\infty$ -módulo procedendo da seguinte forma: dados  $g \in C^\infty(\Omega)$  e  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$  defina  $gL \in \mathcal{X}(\Omega)$  por  $(gL)(f) = g \cdot L(f)$  para toda  $f \in C^\infty(\Omega)$ .

Observe que, a partir dos resultados anteriores, temos como corolário que  $\mathcal{X}(U)$  é um  $C^\infty(U)$ -módulo munido de uma base livre  $\{\partial_1, \dots, \partial_N\}$ .

Dado dois campos  $L, M \in \mathcal{X}(\Omega)$  definiremos seu *comutador* como um novo campo dado por

$$[L, M](f) = L(M(f)) - M(L(f))$$

para toda  $f \in C^\infty(\Omega)$ .

É simples verificar que as operações acima definem novos elementos em  $\mathcal{X}(\Omega)$ .

Para finalizarmos a álgebra relativa aos campos considere  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$  e defina seu *conjugado*  $\bar{L}$  pela associação  $f \mapsto \overline{L(f)}$ . A verificação de que  $\bar{L}$  ainda é um elemento de  $\mathcal{X}(\Omega)$  é trivial e dada esta noção convencionaremos que um campo  $L$  é real se  $\bar{L} = L$ .

**Definição 1.3.6.** Se  $p \in \Omega$  denotaremos por  $\mathcal{B}_p(\Omega)$  o conjunto de todos os pares  $(V, f)$  onde  $V$  é uma vizinhança de  $p$  em  $\Omega$  e  $f \in C^\infty(\Omega)$ .

Em  $\mathcal{B}_p(\Omega)$  diremos que  $(V, f)$  está relacionado com  $(W, g)$  se

- (i)  $V \cap W \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $f|_{V \cap W} = g|_{V \cap W}$ .

É trivial checar que esta relação é de equivalência.

**Definição 1.3.7.** Um *germe* de uma função  $f \in C^\infty(\Omega)$  no ponto  $p$  é a classe de equivalência  $[f]$  em  $\mathcal{B}_p(\Omega)$ . O conjunto dos germes será denotado por  $C^\infty(p)$ .

Note que a aplicação *avaliação*  $[f] \mapsto f(p)$  está bem definida e ainda é um  $\mathbb{C}$ -homomorfismo.

**Definição 1.3.8.** Um *vetor tangente* à  $\Omega$  em  $p$  é uma aplicação  $\mathbb{C}$ -linear  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazendo  $v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f])$  para toda  $f, g \in C^\infty(\Omega)$ . O conjunto dos vetores tangentes, denotado por  $\mathbb{C}T_p\Omega$ , possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ .

Se  $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$  denotaremos seu *conjugado*  $[f] \mapsto \overline{v([f])}$  por  $\bar{v}$ . Convencionamos que

$$T_p\Omega = \{v \in \mathbb{C}T_p\Omega : \bar{v} = v\}.$$

Se  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$  então o exemplo natural de vetor tangente à  $\Omega$  em  $p$  é dado por

$$L_p([f]) = L(f)p$$

para toda  $[f] \in C^\infty(p)$ . Também denotaremos, quando não houver risco de confusão,  $L_p$  por  $L|_p$ . O próximo teorema nos garante que, na verdade, este exemplo é essencialmente único.

**Teorema 1.3.9.** *Dado  $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$  existe um campo  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$  tal que  $L_p = v$ .*

*Demonstração.* Seja  $(U, x)$  uma carta contendo o ponto  $p$  e  $\{\partial_1, \dots, \partial_N\}$  uma base para  $\mathcal{X}(U)$ . Defina  $L \in \mathcal{X}(U)$  por

$$L = v([x_i]) \sum_{i=1}^N \partial_i$$

Dada  $f \in C^\infty(U)$  e escrevendo  $f^* = f \circ x^{-1}$  podemos, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, representar  $f^*$  em uma vizinhança  $V$  de  $p$  por

$$f^*(x_1, \dots, x_N) = f^*(a_1, \dots, a_N) + \sum_{j=1}^N h_j(x_1, \dots, x_N)(x_j - a_j)$$

onde  $h_j \in C^\infty(x(V))$ ,  $a = x(p)$  e  $h_j(a) = \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a)$ . Aplicando a identidade acima em  $L_p$  e  $v$  temos que  $L_p = v$  em  $V$ . Podemos, em seguida, estender  $L$  para  $\Omega$  usando uma função corte.  $\square$

Não é possível garantir a unicidade no resultado anterior, visto que para definir o campo foi necessário apenas decidir seu comportamento em uma carta de  $p$ .

Conclui-se portanto que o espaço  $\mathbb{C}T_pU$  é gerado, no sentido de espaço vetorial, pelos campos  $\{\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_N}|_p\}$ .

**Definição 1.3.10.** O *fibrado tangente complexificado* de  $\Omega$  é definido como:

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p\Omega.$$

Analogamente, o *fibrado tangente* de  $\Omega$  é definido como:

$$T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} T_p\Omega.$$

Denotaremos, de maneira natural, o dual de  $\mathbb{C}T_p\Omega$  por  $\mathbb{C}T_p^*\Omega$  e o dual de  $T_p\Omega$  por  $T_p^*\Omega$ .

O próximo objetivo é definir um conceito de subestrutura para o fibrado tangente complexificado. Este conceito é de suma importância e será utilizado em quase todo o momento.

**Definição 1.3.11.** Considere, para cada  $p \in \Omega$ , um subespaço vetorial  $V_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$  satisfazendo:

- (i)  $\dim V_p = n$  para todo  $p \in \Omega$ ;
- (ii) Dado  $p_0 \in \Omega$  existem abertos  $U_0$  contendo  $p_0$  e campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{X}(U_0)$  tais que  $\{L_1|_p, \dots, L_n|_p\}$  geram  $V_p$  para todo  $p \in U_0$ .

Nestas condições, diremos que

$$V = \bigcup_{p \in \Omega} V_p$$

é um *subfibrado do fibrado tangente complexificado*, ou simplesmente, *subfibrado tangente*. Definiremos  $n$  como o *posto* ou *dimensão* de  $V$  e escreveremos  $\dim V = n$ . O conjunto  $V_p$  será referido como a *fibra* de  $V$  em  $p$ .

A segunda exigência é uma condição de suavidade, isto é, para cada ponto  $p \in \Omega$  é possível escolher fibras  $V_p$  de mesma dimensão — mas esta escolha não pode ser aleatória. Para ilustrar este conceito considere  $\Omega = \mathbb{R}^2$  e considere, para cada ponto  $p$ , a seguinte escolha de fibras unidimensionais:

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}, & y \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Naturalmente, não existe nenhuma vizinhança em torno de qualquer ponto do eixo real satisfazendo a segunda condição. Observe que o crucial é a ausência de continuidade nas escolhas das fibra em torno da reta  $y = 0$ .

A próxima etapa é introduzir alguns dos principais objetos de nosso estudo.

**Definição 1.3.12.** Dado um subfibrado tangente  $V$  de  $\mathbb{C}T_p\Omega$  uma *seção local* é um elemento  $L$  de  $\mathcal{X}(W)$ , com  $W$  aberto de  $\Omega$ , tal que  $L_p \in V_p$  para todo  $p \in W$ .

É conveniente imaginar que uma seção de um subfibrado tangente nada mais é do que uma das equações do sistema que se procura resolver.

**Definição 1.3.13.** Uma *estrutura formalmente integrável* sobre  $\Omega$  é um subfibrado tangente satisfazendo a condição involutiva, isto é, se  $L, M \in \mathcal{X}(W)$  são seções locais então  $[L, M]$  também será uma seção local em  $W$ .

## 1.4 Formas Diferenciais

Em Matemática, Formas Diferenciais é uma abordagem do Cálculo à Várias Variáveis que permite um estudo dos fenômenos diferenciais que não se comprometa com o sistema de coordenadas escolhido.

A noção moderna de Formas Diferenciais foi introduzida pelo matemático francês Élie Cartan e possui inúmeras aplicações não só na Matemática.

**Definição 1.4.1.** Denotaremos por  $\mathcal{R}(\Omega)$  o dual do  $C^\infty(\Omega)$ -módulo  $\mathcal{X}(\Omega)$  e nos referiremos aos seus elementos como *formas diferenciais de grau um* ou simplesmente *formas diferenciais*. Ou seja, uma forma diferencial em  $\Omega$  é uma aplicação  $C^\infty(\Omega)$ -linear  $\omega : \mathcal{X}(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ .

**Teorema 1.4.2.** *Seja  $\omega \in \mathcal{R}(\Omega)$ ,  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$  e suponha que  $L_p = 0$ . Nestas condições  $\omega(L)(p) = 0$ .*

Dado  $\omega \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $p \in \Omega$  associaremos a estes objetos uma aplicação  $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$  dada pela fórmula

$$\omega_p(\xi) = \omega(L)(p),$$

onde  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$  é tal que  $L_p = \xi$ . Também denotaremos, quando não houver risco de confusão,  $\omega_p$  por  $\omega(p)$  ou  $\omega|_p$ .

Analogamente ao resultado da seção anterior vale a igualdade:

**Teorema 1.4.3.**  $\mathbb{C}T_p^*\Omega = \{\omega_p, \omega \in \mathcal{R}(\Omega)\}$ .

**Definição 1.4.4.** Dada  $f \in C^\infty(\Omega)$  definiremos  $df \in \mathcal{R}(\Omega)$  pela fórmula

$$df(L) = L(f), L \in \mathcal{X}(\Omega).$$

A aplicação  $df$  é chamada de *diferencial* de  $f$ .

Utilizando a representação local para um campo podemos deduzir a representação local para diferenciais, isto é, em uma certa vizinhança  $U$  do ponto  $p$  valem as igualdades:



$$df = \sum_{j=1}^N df \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Ou seja: temos que  $\{dx_j\}$  é uma base para  $\mathcal{R}(U)$ .

Observe que, na fórmula acima, as aplicações  $x_j$  são as funções coordenadas do atlas  $(U, x)$  que contêm a vizinhança de  $p$ . Pela definição de variedade diferenciável, estas projeções também são aplicações  $C^\infty$  desta vizinhança.

Vamos agora estabelecer a teoria das Formas Diferenciais de maior grau e suas operações. Para nossos propósitos é suficiente considerar uma carta local  $(U, x)$ .

Começemos com um conjunto  $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, N = \dim \Omega\}$ . Se  $L_1, \dots, L_r$  são  $r$  campos definidos em  $U$  então, pela representação local, temos:

$$L_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Denote por  $A$  a matriz  $N \times r$  dada pelas funções  $(a_{ij})$ . Naturalmente, para cada escolha de campos, temos uma nova matriz  $A$ .

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} dx_I : \quad \mathcal{X}(U)^r &\longrightarrow C^\infty(U) \\ (L_1, \dots, L_r) &\longmapsto \det A_I, \end{aligned}$$

onde  $A_I$  é a matriz  $r \times r$  obtida de  $A$  selecionando-se as linhas cujos índices pertencem ao conjunto  $I$ . É claro que  $\det A_I$  ainda é uma aplicação  $C^\infty(U)$ .

**Definição 1.4.5.** Uma Forma Diferencial  $\omega$  de grau  $r = \deg \omega$  nada mais é do que uma combinação linear, com respeito às funções suaves, das aplicações  $dx_I$  com  $I$  nas condições acima. É comum denotar  $dx_I$  por  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ . Escreveremos  $\mathcal{A}_r$  quando quisermos denotar o conjunto das  $r$ -formas diferenciais de grau  $r$ . Convencionaremos que as funções definidas em  $U$  são formas de grau 0.

A álgebra de  $C^\infty(U)$  induz em  $\mathcal{A}_r$  uma estrutura de espaço vetorial de dimensão  $C_{N,r}$ . Vamos estudar algumas operações algébricas com formas.

O símbolo usado na definição anterior ( $\wedge$ ) não tem significado próprio. Vamos agora definir uma aplicação  $r$ -linear  $\tilde{\wedge} : \mathcal{R}(U)^r \longrightarrow \mathcal{A}_r$  que é dada na base pela regra:

$$\tilde{\wedge}(dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i_p = i_q, \text{ para algum } p \text{ e } q \\ \sigma(i_1, \dots, i_r) dx_{I(i_1, \dots, i_r)}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $\sigma(i_1, \dots, i_r)$  é o sinal da permutação  $1 \mapsto i_1, \dots, r \mapsto i_r$  e  $I(i_1, \dots, i_r)$  é uma  $r$ -lista ordenando  $(i_1, \dots, i_r)$ .

Com esta definição, fica evidente que a aplicação  $\tilde{\wedge}$ , chamada de *produto exterior*, é um extensão do símbolo  $\wedge$  e portanto utilizaremos a convenção  $\tilde{\wedge}(dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}) = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ .

Façamos uma pequena pausa para uma discussão importante. Quando escrevemos o símbolo  $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) \wedge dx_{i_3}$  ou  $dx_{i_1} \wedge (dx_{i_2} \wedge dx_{i_3})$  você deve olhar a fórmula como  $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3}$ . Desta forma fica definido o produto exterior de uma 2-forma por uma 1-forma, e assim por diante.

Antes de finalizarmos a noção de produto exterior, considere a

**Definição 1.4.6.** Dados  $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathbb{C}T_p^*U$  e defina

$$\begin{aligned} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_r : \quad (\mathbb{C}T_p U)^r &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v_1, \dots, v_r) &\longmapsto (w_1 \wedge \dots \wedge w_r)(L_1, \dots, L_r)(p). \end{aligned}$$

onde  $w_j \in \mathcal{R}(U)$  e  $L_j \in \mathcal{X}(U)$  são tais que  $w_j|_p = \xi_j$  e  $L_j|_p = v_j$ . É importante verificar que esta função fica bem definida dado o primeiro teorema desta seção.

Passemos à outra operação importante.

**Definição 1.4.7.** Seja  $\omega = \sum a_I dx_I$  uma forma diferenciável de grau  $r$  em  $(U, x)$ . A diferencial exterior  $d\omega$  é a  $(r+1)$ -forma

$$d\omega = \sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Por motivos de consistência, é necessário observar que se  $\omega \in C^\infty(U)$  então  $d\omega$  vista como diferencial exterior de uma 0-forma e como a diferencial de uma função (vista na seção anterior) coincidem.

**Definição 1.4.8.** Uma aplicação  $f : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$  é também dita *suave* se para todo par  $(U, x) \in \mathcal{F}$  têm-se que a composição  $x \circ f$  é  $C^\infty$  em  $f^{-1}(U)$ . Denotaremos por  $C^\infty(J, \Omega)$  o conjunto destas aplicações. No caso de aplicações definidas em  $\mathbb{R}^N$  o conceito aplica-se coordenada a coordenada.

Sejam  $(U, x)$  uma carta local de  $\Omega$ ,  $V$  um aberto,  $f \in C^\infty(V, U)$  e  $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, \dim \Omega\}$ . Naturalmente,  $x_{i_k} \circ f : V \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação  $C^\infty$  e portanto  $d(x_{i_k} \circ f)$

é uma 1-forma. Mediante este fato denotaremos por  $d(x_I \circ f)$  a  $r$ -forma  $d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ f)$ .

**Definição 1.4.9.** Sejam  $V$  aberto,  $(U, x)$  um sistema de coordenadas e  $f \in C^\infty(V, U)$ . Se  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  é uma forma diferenciável defina seu *pullback* pela  $f$ , denotado por  $f^*\omega$ , pela fórmula

$$f^*\omega = \sum_I (a_I \circ f) d(x_I \circ f).$$

O objetivo do pullback é, literalmente, “transportar” uma forma diferencial definida em um carta local de uma variedade para defini-la em um aberto do espaço euclidiano. Este processo é fundamental para que a integral sobre formas esteja bem definida. Na verdade, a tentativa natural de definir o pullback pela fórmula  $f^*\omega = \sum_I (a_I \circ f) dx_I$  não é bem sucedida porque neste caso a forma estaria fortemente ligada a cada escolha de coordenadas – problema que não ocorre com a definição anterior.

Depois desta discussão sobre as principais ferramentas algébricas para formas, nos resta enunciar um conhecido resultado que relaciona estas operações.

**Teorema 1.4.10.** *Sejam  $V$  aberto,  $(U, x)$  um sistema de coordenadas,  $f \in C^\infty(V, U)$  e  $\omega, \bar{\omega}$  formas em  $U$ . Nestas condições são válidas as seguintes fórmulas:*

$$(i) \quad f^*(\omega + \bar{\omega}) = f^*\omega + f^*\bar{\omega};$$

$$(ii) \quad d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega};$$

$$(iii) \quad f^*(c\omega) = cf^*\omega, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$(iv) \quad d(c\omega) = cd\omega, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$(v) \quad f^*(\omega \wedge \bar{\omega}) = f^*\omega \wedge f^*\bar{\omega};$$

$$(vi) \quad d(\omega \wedge \bar{\omega}) = d\omega \wedge \bar{\omega} + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\bar{\omega}.$$

**Definição 1.4.11.** O *fibrado cotangente complexificado* de  $\Omega$  é definido como:

$$\mathbb{C}T^*\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega.$$

Analogamente, o *fibrado cotangente* de  $\Omega$  é definido como:

$$T^*\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} T_p^*\Omega.$$

Como foi feito anteriormente, o próximo passo é definir um conceito de subestrutura para o fibrado cotangente complexificado.

**Definição 1.4.12.** Considere, para cada  $p \in \Omega$ , um subespaço vetorial  $W_p \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$  satisfazendo:

- (i)  $\dim W_p = m$  para todo  $p \in \Omega$ ;
- (ii) Dado  $p_0 \in \Omega$  existem abertos  $U_0$  contendo  $p_0$  e formas diferenciais  $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathcal{R}(U_0)$  tais que  $\{\omega_1|_p, \dots, \omega_m|_p\}$  geram  $W_p$  para todo  $p \in U_0$ .

Nestas condições, diremos que

$$W = \bigcup_{p \in \Omega} W_p$$

é um *subfibrado do fibrado cotangente complexificado*, ou simplesmente, *subfibrado cotangente*. Definiremos  $m$  como o *posto* ou *dimensão* de  $W$  e escreveremos  $\dim W = m$ . O conjunto  $W_p$  será referido como a *fibra* de  $W$  em  $p$ .

Depois desta discussão, existe uma pergunta natural a ser feita. Dado um subfibrado tangente, é possível construir um subfibrado cotangente e, que ainda se relacione, de certa forma, com a estrutura original? A resposta é sim e é dada pelo teorema abaixo.

**Teorema 1.4.13.** *Seja  $V = \bigcup_{p \in \Omega} V_p$  um subfibrado tangente de  $\mathbb{C}T_p\Omega$  e construa, para cada  $p \in \Omega$ , o conjunto*

$$V_p^\perp = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \lambda = 0 \text{ em } V_p\}.$$

*Nestas condições,*

$$V^\perp = \bigcup_{p \in \Omega} V_p^\perp$$

*é um subfibrado cotangente e ainda*

$$\dim V + \dim W = \dim \Omega.$$

A construção acima pode ser revertida de maneira natural e, com isto, dado um subfibrado cotangente  $W$ , é possível encontrar um subfibrado tangente  $V$  tal que  $V^\perp = W$ .

Estamos, finalmente, em condições de definir o principal objeto de estudo deste texto.

**Definição 1.4.14.** Um subfibrado tangente  $V$  de  $\mathbb{C}T\Omega$  é uma *estrutura localmente integrável* se, para todo ponto  $p_0 \in \Omega$ , existe uma vizinhança  $U_0$  de  $p_0$  e funções  $Z_1, \dots, Z_m \in$

$C^\infty(U_0)$ , onde  $\dim V + m = \dim \Omega = N$ , tais que  $V_p^\perp$  é gerado pelos diferenciais

$$dZ_1|_p, \dots, dZ_m|_p,$$

para todo  $p \in U_0$ . O conjunto  $\{Z_j\}$  é chamado de *conjunto completo de integrais primeiras*.

Ou, equivalentemente,

**Definição 1.4.15.** Um subfibrado tangente  $V$  é uma estrutura localmente integrável se, para todo  $p_0 \in \Omega$  e campos  $L_1, \dots, L_n$  que geram  $V$  em uma vizinhança  $U_0$  de  $p_0$ , existem uma vizinhança  $V_0 \subset U_0$  de  $p_0$  e funções suaves  $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(V_0)$  tais que:

- (i)  $dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \neq 0$  em  $V_0$ ;
- (ii)  $L_j Z_k = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ .

Em outras palavras: verificar se um subfibrado é localmente integrável é o mesmo que procurar por um conjunto maximal de soluções não-triviais e independentes que satisfaçam o sistema de equações homogêneas determinadas pelas seções de  $V$ .

Suponha  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{L}$  um subfibrado tangente localmente integrável de  $\Omega$  e  $L$  uma seção local de  $\mathcal{L}$ . Seja  $p$  um ponto de  $\Omega$  e  $U_0$  uma vizinhança de  $p$  em que  $L$  esteja representado em coordenadas locais. Pelo resultado (1.3.4), podemos restringir  $L$  a uma aplicação contínua  $L : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ .

Desta forma, fica claro que  $L|_{U_0}$  admite um transposto formal, já que o campo é a combinação linear de derivadas parciais. Consequentemente, se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  então fica definida a distribuição  $Lu \in \mathcal{D}'(U_0)$ .

Para finalizar esta capítulo, vamos introduzir um último conceito.

**Definição 1.4.16.** Seja  $V \subset \mathbb{C}T\Omega$  uma estrutura formalmente integrável sobre  $\Omega$ . O *conjunto característico* de  $V$  é o subconjunto de  $T^*\Omega$  definido por

$$V^0 = V^\perp \cap T^*\Omega.$$

Também escreveremos

$$V_p^0 = V_p^\perp \cap T_p^*\Omega.$$

Dado  $L \in \mathcal{X}(\Omega)$ , o símbolo do campo, denotado por  $\sigma(L)$ , é o operador

$$\begin{aligned} \sigma(L) : T^*\Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \xi(L_p) \text{ se } \xi \in T_p^*\Omega. \end{aligned}$$

#### 1.4. FORMAS DIFERENCIAIS

---

Seja  $(U, x)$  uma carta local de  $\Omega$ ,  $p \in U$ ,  $\xi \in T_p^*\Omega$  e  $L$  um campo. Utilizando a representação local, segue que

$$\xi = \sum_{j=1}^N \xi_j dx_{jp}$$

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

com  $\xi_j$  reais. Utilizando estas fórmulas, temos que o símbolo do campo pode ser localmente representado por

$$\sigma(L)(\xi) = \sum_{j=1}^N a_j(p) \xi_j.$$

---

### O Teorema de Baouendi-Treves

---

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema que é, provavelmente, o mais importante da teoria das estruturas localmente integráveis. Intuitivamente, o resultado garante que em uma vizinhança definida em uma variedade diferenciável é possível aproximar uma solução da equação  $\mathcal{L}u = 0$  por uma sequência de polinômios.

### 2.1 O Teorema de Aproximação

A Fórmula de Aproximação é de natureza local e por isto iremos nos restringir à estruturas localmente integráveis definidas em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  no qual  $\mathcal{L}^\perp$  é gerado pelos diferenciais  $dZ_1, \dots, dZ_m$  de  $m$  funções suaves  $Z_j \in C^\infty(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, m$  em cada ponto  $p \in \Omega$ . Nesta seção iremos apresentar o Teorema de Aproximação e abordar alguns aspectos preparatórios para sua demonstração.

Dada uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  dizemos que  $u$  é uma *solução homogênea* de  $\mathcal{L}$  e escrevemos  $\mathcal{L}u = 0$  se  $Lu = 0$  para cada seção local  $L$  de  $\mathcal{L}$ .

Os exemplos mais simples de soluções homogêneas de qualquer operador são as funções constantes e o próprio conjunto de integrais primeiras  $Z_i$ . Utilizando a Regra de Leibniz segue que qualquer polinômio nas variáveis  $Z_1, \dots, Z_m$  são também soluções do problema homogêneo.

**Teorema 2.1.1** (Bouendi-Treves). *Seja  $\mathcal{L}$  uma estrutura localmente integrável sobre  $\Omega$  e*

## 2.1. O TEOREMA DE APROXIMAÇÃO

---

assuma que  $dZ_1, \dots, dZ_m$  gerem  $\mathcal{L}^\perp$  em todos os pontos de  $\Omega$ . Então, para qualquer ponto  $p \in \Omega$ , existem abertos  $U$  e  $W$ , tais que  $p \in U \subset \bar{U} \subset W \subset \Omega$  satisfazendo

(i) toda  $u \in \mathcal{D}'(W)$  satisfazendo  $\mathcal{L}u = 0$  em  $W$  é o limite em  $\mathcal{D}'(U)$  de uma sequência de soluções polinomiais nas variáveis  $Z_1, \dots, Z_m$ ;

(ii) se  $u \in C^k(W)$  então a convergência ocorre na topologia de  $C^1(U)$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ .

Alguns resultados bem conhecidos de aproximação são, na verdade, casos particulares do teorema anterior. Para ilustrar esta situação considere  $\Omega = \mathbb{C}$  e  $L$  o operador de Cauchy-Riemann

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Nestas condições, uma distribuição que é solução de  $Lu = 0$  nada mais é do que uma função holomorfa e que, pelo resultado anterior, pode ser localmente aproximada por polinômios na variável  $z = x + iy$ .

Apresentaremos agora uma consequência interessante. Sejam  $\Omega$  um aberto,  $u \in C^0(\Omega)$  uma solução homogênea de  $\mathcal{L}$  e  $Z(x, t) = (Z_1(x, t), \dots, Z_m(x, t))$ . Se dois pontos  $p, q \in U$  são tais que  $Z(p) = Z(q)$  e  $P$  é um polinômio em  $m$  variáveis então  $(P \circ Z)(p) = (P \circ Z)(q)$  e, pelo Teorema de Aproximação, segue que  $u(p) = u(q)$ .

As *fibras* de  $Z$  são, por definição, as classes de equivalência dadas pela relação

$$p \equiv q \iff Z(p) = Z(q).$$

Segue, pela discussão anterior, que  $u$  é constante nas fibras de  $Z$ . Este fato é equivalente a dizer que existe uma aplicação  $\hat{u} \in C^0(Z(U))$  tal que  $u = \hat{u} \circ Z$ .

Se considerarmos um outro conjunto  $\{Z_1^\circ, \dots, Z_m^\circ\}$  de integrais primeiras então a aplicação  $Z^\circ = (Z_i^\circ)$  é constante nas fibras de  $Z$  em  $U$ . Aplicando o teorema para  $Z^\circ$ , ao invés de  $Z$ , obtemos uma outra vizinhança  $U^\circ \subset U$  de  $p$  tal que  $Z$  é constante nas fibras de  $Z^\circ$  em  $U^\circ$ . Nestas condições, segue que as fibras de  $Z$  e  $Z^\circ$  são idênticas em  $U^\circ$ . Esta invariância das fibras, com relação a escolha das integrais primeiras, permite estabelecer o conceito de *germes em p das fibras de  $\mathcal{L}$* .

Antes da demonstração, que será dividida em duas seções, vamos primeiro obter um sistema local de coordenadas que será útil deste ponto em diante. Para isto comecemos com um lema elementar cuja demonstração será omitida.

**Lema 2.1.2.** *Seja  $V$  um subespaço complexo de  $\mathbb{C}^N$  de dimensão  $m$ . Seja  $V_0 = V \cap \mathbb{R}^N$ ,*



## 2.1. O TEOREMA DE APROXIMAÇÃO

---

$d = \dim_{\mathbb{R}} V_0$ ,  $v = m - d$ . Seja também  $V_1 \subset \mathbb{C}^N$  um subespaço complexo tal que

$$(V_0 \oplus iV_0) \oplus V_1 = V$$

e tome  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_v\}$  uma base para  $V_1$  e  $\{\xi_{v+1}, \dots, \xi_m\}$  uma base real para  $V_0$ . Se escrevermos  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ , para  $j = 1, \dots, v$  então

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_v, \xi_{v+1}, \dots, \xi_m\} \text{ é uma base para } V;$$

$$\{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_v\} \text{ é linearmente independente sobre } \mathbb{R};$$

$$v + m \leq N.$$

É claro que o lema continua verdadeiro se substituirmos os espaços em questão por espaços isomorfos.

Seja  $p \in \Omega$  e  $G_1, \dots, G_m$  funções suaves definidas em uma vizinhança de  $p$  tal que  $dG_1, \dots, dG_m$  gerem  $\mathcal{L}^\perp$ . Fazendo a escolha  $V = \mathcal{L}_p^\perp$  no lema anterior e assumindo que  $V_0 = \mathcal{L}_p^\perp \cap T_p^* \Omega$  temos que se  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_v, \xi_{v+1}, \dots, \xi_m\}$  é a base fornecida por aquele resultado então existem  $(c_{jk})$  satisfazendo

$$\sum_{k=1}^m c_{jk} dG_k(p) = \zeta_j, \quad j = 1, \dots, v,$$

$$\sum_{k=1}^m c_{jk} dG_k(p) = \xi_j, \quad j = v + 1, \dots, m.$$

Se definirmos

$$Z_j = \sum_{k=1}^m c_{jk} \{C_k - C_k(p)\}, \quad j = 1, \dots, v,$$

$$W_l = \sum_{k=1}^m c_{v+l,k} \{C_k - C_k(p)\}, \quad l = 1, \dots, d$$

fica claro que  $dZ_1, \dots, dZ_v, dW_1, \dots, dW_d$  também geram  $\mathcal{L}^\perp$  em uma vizinhança de  $p$ . Se ainda escrevermos

$$x_j = \operatorname{Re} Z_j, y_j = \Im Z_j, s_l = \operatorname{Re} W_l$$

então a segunda conclusão do lema anterior nos garante que

$$dx_1, \dots, dx_v, dy_1, \dots, dy_v, ds_1, \dots, ds_d$$

são linearmente independentes em  $p$ .

Estamos em condições de estabelecer o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.3.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma estrutura localmente integrável definida sobre  $\Omega$ . Seja  $p \in \Omega$  e  $d$  a dimensão real de  $\mathcal{L}_p^\perp \cap T_p^*\Omega$ . Nestas condições existe um sistema de coordenadas locais que se anula em  $p$*

$$\{x_1, \dots, x_v, y_1, \dots, y_v, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}\}$$

e aplicações reais, suaves,  $\phi_1, \dots, \phi_d$  definidas em uma vizinhança da origem satisfazendo

$$\phi_k(0) = 0, d\phi_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, d$$

tais que os diferenciais da aplicações

$$Z_j(x, t) = z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, \dots, v$$

$$W_k(x, y, s, t) = s_k + i\phi_k(z, s, t), \quad k = 1, \dots, d$$

geram  $\mathcal{L}^\perp$  em uma vizinhança da origem. Em particular, temos que  $v + d = m$ ,  $v + n' = n$  e também que

$$\mathcal{L}_p^\perp \cap T_p^*\Omega = \text{span} \{ds_1|_0, \dots, ds_d|_0\}.$$

*Demonstração.* A prova segue quase que imediatamente da discussão anterior. Para concluirmos é suficiente encontrar aplicações reais e suaves  $t_1, \dots, t_{n'}$  definidas em uma vizinhança de  $p$ , se anulando neste ponto, de tal forma que

$$dx_1, \dots, dx_v, dy_1, \dots, dy_v, ds_1, \dots, ds_d, dt_1, \dots, dt_{n'}$$

são linearmente independentes. Note que como  $dW_k(p) = \xi_{v+k}$  é real então  $d\phi_k = 0$  na origem.  $\square$

Neste texto não usaremos toda a precisão das informações levantadas pelo teorema anterior, mas uma versão mais simples que se mostrará adequada.

**Lema 2.1.4.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma estrutura localmente integrável definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Nestas condições existe um sistema local de coordenadas anulando-se em  $p$*

$$\{x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n\}$$

## 2.1. O TEOREMA DE APROXIMAÇÃO

---

e aplicações reais, suaves  $\phi_1, \dots, \phi_m$  definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo  $\phi_k(0, 0) = 0$  e  $d_x \phi_k(0, 0) = 0$  para  $k = 1, \dots, m$  tais que os diferenciais das funções

$$Z_k(x, t) = x_k + i\phi_k(x, t), \quad k = 1, \dots, m$$

geram  $\mathcal{L}^\perp$  em uma vizinhança da origem.

Para prosseguir a demonstração do Teorema de Aproximação considere  $R > 0$  tal que a conclusão do lema anterior ainda seja verdadeira em uma vizinhança de  $\bar{V}$  onde

$$V = \{q : |x(q)| < R, |t(q)| < R\}.$$

Assuma também que em  $\bar{V}$

$$\left\| \left( \frac{\partial \phi_j(x, t)}{\partial x_k} \right) \right\| < \frac{1}{2}, \quad (x, t) \in \bar{V}.$$

onde  $\| \cdot \|$  é a norma da matriz  $(\partial \phi_j(x, t) / \partial x_k)$  vista como um operador linear em  $\mathbb{R}^m$ . Esta construção é possível dada a continuidade das funções  $\phi_j$  aliada ao fato de que  $\phi_j(0, 0) = 0$ .

Multiplicando as funções  $\phi_j$  por funções de corte convenientes é possível, sem perda de generalidade, assumir que estas aplicações estão definidas em todo  $\mathbb{R}^N$  e ainda que a estimativa anterior seja válida para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N$ .

A partir desta modificação das aplicações  $\phi_j$  temos que as funções  $Z_j$  estão definidas em todo  $\mathbb{R}^N$ . Considerando as diferenciais destas aplicações temos um novo subfibrado cotangente definido em todo  $\mathbb{R}^N$  e, finalmente, um novo subfibrado tangente global. Naturalmente, esta nova estrutura e a antiga não tem razão para serem as mesmas, entretanto, em  $V$ , elas coincidem e com certeza se provarmos resultados sobre essa nova estrutura em  $V$  eles serão verdadeiros para a estrutura original.

Se denotarmos por  $Z_x$  a matriz  $(\partial Z_j / \partial x_k)$  então  $Z_x(0, 0)$  é exatamente a matriz identidade  $m \times m$ . Da continuidade do determinante conclui-se que  $Z_x$  é invertível em uma vizinhança da origem. Neste caso, se tomarmos por  $\mu_{kl}$  as entradas da matriz inversa então podemos introduzir os campos

$$M_k = \sum_{l=1}^m \mu_{kl}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad k = 1, \dots, m$$

que são caracterizados pela relação

$$M_k Z_l = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, m$$

onde  $\delta$  é o delta de Kronecker.

Conseqüentemente, os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(x, t) M_k, \quad j = 1, \dots, n$$

são linearmente independentes e satisfazem a relação  $L_j Z_k = 0$  para  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ . Desta forma, os campos  $L_1, \dots, L_n$  geram  $\mathcal{L}$  em todo ponto enquanto os  $N$  vetores

$$L_1, \dots, L_n, M_1, \dots, M_m$$

comutam dois a dois e geram  $\mathbb{C}T_P \mathbb{R}^N$ . Como

$$dL_1, \dots, dL_n, dM_1, \dots, dM_m$$

geram o subfibrado cotangente e portanto a diferencial  $dw$  de uma função  $w(x, t) \in C^1$  pode ser expressa nesta base. Mais precisamente

$$dw = \sum_{j=1}^n L_j w dt_j + \sum_{k=1}^m M_k w dZ_k \quad (2.1)$$

Se desejar uma discussão mais cuidadosa da comutatividade dos campos e da representação da aplicação  $dw$  na base acima consulte [Hou08, Cap. 1].

Para finalizar esta seção discutiremos algumas notações que serão utilizadas durante a demonstração do teorema. Para  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m$  defina  $[\xi]^2$  por  $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2$ . É claro que se  $A = (a_i)$  e  $B = (b_i) \in \mathbb{R}^m$  então

$$\begin{aligned} [A + iB]^2 &= [(a_1 + ib_1, \dots, a_m + ib_m)]^2 \\ &= a_1^2 + 2ia_1b_1 - b_1^2 + \dots + a_m^2 + 2ia_mb_m - b_m^2 \\ &= a_1^2 + \dots + a_m^2 + 2i(a_1b_1 + \dots + a_mb_m) - (b_1^2 + \dots + b_m^2) \\ &= |A|^2 + 2i \langle A, B \rangle - |B|^2. \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que, para  $\tau > 0$

$$|e^{-\tau[A+iB]^2}| = |e^{-\tau|A|^2 - 2\tau i\langle A, B \rangle + \tau|B|^2}| = e^{\tau(-|A|^2 + |B|^2)}.$$

Denote por  $h$  uma função-teste satisfazendo

$$h(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq R \\ 1, & \text{em uma vizinhança de } |x| \leq \frac{R}{2} \\ 0 \leq h(x) \leq 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma se  $u$  está definida em  $\bar{V}$  então o produto  $uh$  está definido em todo  $\mathbb{R}^m$ , tem a mesma regularidade de  $u$  e possui suporte compacto.

Depois desta preparação das ferramentas prossigamos para a demonstração do caso clássico.

## 2.2 Demonstração para $u \in C^\infty(W)$

Seja  $W$  uma vizinhança fixada de  $\bar{V}$  de  $\Omega$  e  $u$  uma solução suave de  $\mathcal{L}u = 0$  em  $W$ . Nestas condições defina, para  $0 < \tau < \infty$ , a função

$$E_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} u(x', 0) h(x') \det Z_x(x', 0) dx'.$$

Inicialmente observe que, como  $Z_1, \dots, Z_m$  são soluções do sistema homogêneo determinado pelas seções de  $\mathcal{L}$  então  $[(Z_1, \dots, Z_m)]^2$  também é uma solução e finalmente, pela regra da cadeia, ocorre o mesmo com  $e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2}$ . Utilizando a regra de derivação sob o sinal da integral segue que  $E_\tau u$  também o é.

A estratégia da demonstração está em verificar que em uma vizinhança adequada temos que  $E_\tau u \rightarrow u$  na topologia adequada e, portanto, é possível aproximar a solução  $u$  por polinômios nas componentes de  $Z(x, t)$ . Note que isto é possível devido a natureza analítica da exponencial.

Para estudarmos a convergência  $E_\tau u \rightarrow u$  temos que, inicialmente, considerar uma pequena modificação deste operador, a saber

$$G_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

O que faremos agora é estabelecer a convergência  $G_\tau u \rightarrow u$ . Esta demonstração

independe do fato de que  $u$  é uma solução do problema. Esta hipótese, entretanto, será crucial para verificarmos que a função diferença  $R_\tau u = G_\tau u - E_\tau u$  converge para zero e conseqüentemente é necessária para concluirmos que  $E_\tau u \rightarrow u$ .

Esta modificação foi introduzida já que a etapa surpreendente da demonstração ocorre na verificação de  $E_\tau u \rightarrow u$ . Ora, o operador  $G_\tau u$  admite essa convergência de maneira natural, já que ele é próximo a uma aproximação da identidade e espera-se que  $G_\tau u \rightarrow u$  ocorra em muitos espaços funcionais.

Antes de prosseguirmos vamos enunciar um lema técnico cuja demonstração pode ser obtida em [Hou08, pág. 57].

**Lema 2.2.1.** *Seja  $B$  uma matriz  $m \times m$  de coeficientes reais e norma  $\|B\| < 1$  se  $A = I + iB$  onde  $I$  é a matriz identidade então*

$$\det A \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \pi^{m/2}.$$

O lema anterior deve ser visto como uma extensão multidimensional da identidade  $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx = \pi^{1/2}$ , já que esta pode ser obtida a partir do lema através dos parâmetros  $B = 0$  e  $m = 1$ .

Para simplificar a notação escreva  $v(x, t) = u(x, t)h(x) \det Z_x(x, t)$ . Para cada par  $(x, t)$  a matriz  $Z_x(x, t) = I + i\phi_x(x, t)$  satisfaz as hipóteses do lema e, como consequência, segue

$$h(x)u(x, t) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} v(x, t) dx'.$$

Aplicando a mudança de variáveis  $x' \mapsto x + \tau^{-1/2}x'$  na integral  $G_\tau u$  temos

$$G_\tau u(x, t) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-1/2}x',t)]^2} v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx'.$$

Mediante as duas últimas identidades podemos representar a diferença  $G_\tau u - hu$  através da decomposição

$$G_\tau u(x, t) - h(x)u(x, t) = I_\tau + J_\tau,$$

onde

$$I_\tau(x, t) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} (v(x + \tau^{-1/2}x', t) - v(x, t)) dx'$$

e

$$J_\tau(x, t) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \left( e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right) v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx'.$$

Para concluirmos nosso primeiro objetivo temos que majorar cada parcela da decomposição. Para estimar  $I_\tau$  note primeiramente que

$$\begin{aligned} |e^{-[Z_x(x,t)x']^2}| &= e^{-[(I + i\phi_x(x,t))x']^2} \\ &= e^{-[x' + i\phi_x(x,t)x']^2} \\ &= e^{-|x'|^2 + |\phi_x(x,t)x'|^2} \\ &\leq e^{-3|x'|^2/4}. \end{aligned}$$

Como  $v$  se anula para  $x$  suficientemente afastado da origem segue que  $|\text{grad}_x v(x, t)|$  é limitado em  $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$ . Neste caso o Teorema do Valor Médio nos garante que

$$|I_\tau(x, t)| \leq C\tau^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-3|x'|^2/4} |x'| dx' \leq C'\tau^{-1/2},$$

o que, por sua vez, implica que  $|I_\tau(x, t)| \rightarrow 0$  a medida que  $\tau \rightarrow \infty$  uniformemente em  $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$ .

Para estimar  $J_\tau$  primeiramente note que se aplicarmos o Teorema do Valor Médio em  $-Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)$  e utilizarmos a majoração que já verificamos para  $e^{-[Z_x(x,t)x']^2}$  segue que

$$|e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2}| \leq 2e^{-3|x'|^2/4},$$

o que finalmente implica

$$|J_\tau(x, t)| \leq C \int_{|x'| < K} |e^{\tau[Z(x,t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2}| dx' + Ce^{-K^2/2}.$$

Desta forma para verificar que  $|J_\tau(x, t)| \rightarrow 0$  uniformemente precisamos apenas estimar a integral para  $|x'| < K$  com  $K$  suficientemente grande. Quando  $|x'| \leq K$  e  $|t| \leq R$ , o quociente de Leibniz  $\zeta_1 = (Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t))/\tau^{-1/2}$  converge uniformemente em  $x$  quando  $\tau \rightarrow \infty$  para  $\zeta_2 = -Z_x(x, t)x'$ , o que implica que  $\text{Re}[\zeta_i]^2 \geq 0$ . Como  $e^{-\zeta}$  é uma função Lipschitziana para  $\text{Re} \zeta \geq 0$  e já que  $|\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 \leq C\tau^{-1/2}$  segue

$$|J_\tau(x, t)| \leq CK^m\tau^{-1/2} + C \exp(-K^2/2),$$

o que implica que  $J_\tau(x, t) \rightarrow 0$  uniformemente para  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $|t| \leq R$  a medida que  $\tau \rightarrow \infty$ . Consequentemente,  $G_\tau u(x, t) \rightarrow h(x)u(x, t)$  uniformemente e para  $|x| < R/2$  ainda temos que  $h(x)u(x, t) = u(x, t)$ .

Nosso próximo objetivo é estimar o resto  $R_\tau = G_\tau - E_\tau$  em termos do Teorema de Stokes. Observe que o fato de que  $u$  é solução do subfibrado tangente não foi utilizado até agora. Esta hipótese, entretanto, é crucial deste ponto em diante. Para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N$  considere a  $m$ -forma em  $\mathbb{R}^N$  dada por

$$\begin{aligned}\omega(x', t') &= (\tau/\pi)^{m/2} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x', t') h(x') dZ(x', t') \\ &= v(x', t') dZ(x', t'),\end{aligned}$$

onde  $dZ = dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m$ . Desta forma podemos escrever, utilizando o Teorema de Stokes, as seguintes equações

$$G_\tau u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} \omega \quad \text{e} \quad E_\tau u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} \omega.$$

Observando que o pullback de  $dZ$  para  $t = c$  é dado por  $\det Z_x(x', c) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  e notando que  $\omega$  se anula para  $|x'| > R$  temos

$$G_\tau u(x, t) - E_\tau u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} d\omega,$$

onde  $[0, t]$  denota o segmento em  $\mathbb{R}^n$  conectando a origem ao ponto  $t$ .

Para calcular  $d\omega$  vamos utilizar a representação através da base  $\{dt_j, dZ_k\}$ . Como  $d\omega = dv \wedge dZ$  segue que os termos da expansão que não se anulam são aqueles que não contém  $dZ_j$  para  $j = 1, \dots, m$ . Em outras palavras

$$d\omega = \sum_{j=1}^n L_j v dt_j \wedge dZ.$$

Assim como  $u, v$  satisfaz o sistema homogêneo dado pelas seções de  $\mathcal{L}$  e desta forma obtemos a representação para o resto

$$R_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x', t') L_j h(x') dt_j \wedge dZ(x', t').$$

Assuma, por hora, que  $|x| \leq R/4$  e  $|t| \leq T$ , onde  $T$  será escolhido em breve. Para



concluir que o resto converge uniformemente a zero, em uma vizinhança adequada, vamos iniciar estimando o fator

$$\begin{aligned}
 |e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}| &= |e^{-\tau[(x_1-x'_1+i(\phi_1(x,t)-\phi_1(x',t'))), \dots, (x_m-x'_m+i(\phi_m(x,t)-\phi_m(x',t')))]^2}| \\
 &= |e^{-\tau[A+iB]^2}|, \text{ onde } A = (x_i - x'_i) \text{ e } B = (\phi_i(x, t) - \phi_i(x', t')) \\
 &= e^{\tau(-|A|^2+|B|^2)} \\
 &= e^{\tau(|\phi(x,t)-\phi(x',t')|^2-|x-x'|^2)},
 \end{aligned}$$

onde  $\phi(x, t) = (\phi_i(x, t))$ ,  $x = (x_i)$  e  $x' = (x'_i)$ . Como  $t' \in [0, t]$  e  $|t| \leq T$  então existe um  $\alpha \in [0, 1]$  tal que  $t' = \alpha t$ . Neste caso temos  $|t - t'| = |t - \alpha t| = |t| |1 - \alpha| \leq |t| \leq T$ . Observando que as aplicações  $x \longrightarrow \phi(x, t)$  e  $t \longrightarrow \phi(x, t)$  satisfazem as hipóteses da Desigualdade do Valor Médio segue que

$$\begin{aligned}
 |\phi(x, t) - \phi(x', t')| &\leq |\phi(x, t) - \phi(x', t)| + |\phi(x', t) - \phi(x', t')| \\
 &\leq \frac{1}{2}|x - x'| + C|t - t'| \\
 &\leq \frac{1}{2}|x - x'| + CT
 \end{aligned}$$

Concluí-se então

$$\begin{aligned}
 |\phi(x, t) - \phi(x', t')|^2 - |x - x'|^2 &\leq \frac{1}{4}|x - x'|^2 + |x - x'|CT + C^2T^2 - |x - x'|^2 \\
 &= -\frac{3}{4}|x - x'|^2 + |x - x'|CT + C^2T^2 \\
 &= -\frac{3}{4}|x - x'|^2 + \frac{3}{2}|x - x'|CT - \frac{1}{2}|x - x'|CT + C^2T^2 \\
 &= -\frac{1}{4}(3|x - x'| + 2CT)(|x - x'| - 2CT)
 \end{aligned}$$

Na identidade que representa o resto estamos apenas interessados em  $x'$  satisfazendo  $|x - x'| \geq R/4$ , já que os campo  $L_j h$  se anulam para  $|x'| \leq R/2$ . Desta forma se escolhermos

$T$  de modo que  $T < R/(8C)$  então

$$|x - x'| - 2CT \leq |x - x'| - 2C \frac{R}{8C} = |x - x'| - \frac{R}{4} \geq 0.$$

O que implica que, para  $|x - x'| \geq R/4$ ,

$$|\phi(x, t) - \phi(x', t')|^2 - |x - x'|^2 < 0.$$

Fica demonstrando então que quando  $\tau \rightarrow \infty$  têm-se que

$$|R_\tau u(x, t)| \rightarrow 0$$

uniformemente em  $\{|x| \leq R/4\} \times \{|t| \leq T\}$ .

Desta forma verificamos que existe uma vizinhança  $U$  da origem tal que se  $u \in C^\infty$  e ainda  $\mathcal{L}u = 0$  em  $W$  então  $E_\tau u \rightarrow u$  em  $U$ . Com isto, concluímos a primeira parte do teorema para distribuições bastante regulares. Quanto à segunda parte faremos uma pausa para estabelecer identidades para os comutadores  $[M_k, G_\tau]$  e  $[L_j, G_\tau]$ .

**Lema 2.2.2.** *Para  $u \in C^1(W)$  e  $k = 1, \dots, m$  as seguintes identidades seguem*

$$[M_k, G_\tau]u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',t)]^2} u(x', t) M_k h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

*Demonstração.* Se denotarmos por  $M_k(x', t, D_{x'})$  o campo  $M_k$  agindo e diferenciando com respeito às variáveis  $x'_m$  e, analogamente, escrevermos  $M_k(x, t, D_x)$  para representar o campo  $M_k$  atuando nas variáveis originais segue que

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= M_k(x', t, D_{x'}) Z_j(x', t) \\ &= -M_k(x', t, D_{x'}) (-Z_j(x', t)) \\ &= -M_k(x', t, D_x) (Z_j(x, t) - Z_j(x', t)) \end{aligned}$$

O que nos permite concluir que

$$M_k(x', t, D_{x'}) (Z_j(x, t) - Z_j(x', t)) = -M_k(x, t, D_x) (Z_j(x, t) - Z_j(x', t)).$$

Sejam  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$  e  $G : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Utilizando o sistema de coordenadas  $\{x_1, \dots, x_m, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$  para  $\mathbb{R}^{2m}$  temos, pela Regra da Cadeia,

que

$$\frac{\partial F \circ G}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G_i}{\partial x_l}.$$

Verifiquemos que se  $f(x, x', t) = F(Z(x, t) - Z(x', t))$  então

$$M_k(x, t, D_x)f(x, x', t) = -M_k(x', t, D_{x'})f(x, x', t'). \quad (2.2)$$

De fato, se  $M_k = \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l}$  então

$$\begin{aligned} M_k(x, t, D_x)f(x, x', t) &= \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} F(Z(x, t) - Z(x', t)) \\ &= \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial (Z_i(x, t) - Z_i(x', t))}{\partial x_l} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \left( \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \frac{\partial (Z_i(x, t) - Z_i(x', t))}{\partial x_l} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} M_k(x', t, D_{x'}) (Z_i(x, t) - Z_i(x', t)) \\ &= -M_k(x', t, D_{x'})f(x, x', t'). \end{aligned}$$

Aplicando (2.2) no caso  $F(\zeta) = e^{-\tau|\zeta|^2}$  e derivando sob o sinal da integração obtemos

$$M_k G_\tau u(x, t) = - \left( \frac{\tau}{\pi} \right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} M_k(x', t, D_{x'}) (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}) u(x', t) h(x') dZ(x', t). \quad (2.3)$$

Para prosseguirmos, suponha que  $u, w$  são continuamente diferenciáveis com pelo menos uma delas de suporte compacto. Considere a seguinte  $m$ -forma exata definida por

$$\begin{aligned} \omega_k &= d(uv dZ_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dZ_k} \wedge \dots \wedge dZ_m) \\ &= d(uv) \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dZ_k} \wedge \dots \wedge dZ_m, \end{aligned}$$

onde o chapéu indica que o termo em destaque foi omitido. Como o pullback de  $\omega_k$  com respeito ao conjunto  $\{t\} \times \mathbb{R}^m$  é exato, segue que

$$\int_{\{t\} \times \mathbb{R}^m} w_k = 0.$$

Para representarmos  $d(uv)$  na base  $\{dt_j, dZ_k\}$  é preciso notar que os termos contendo os diferenciais de  $t_j$  desaparecem, já que  $t$  permanece fixado. Neste caso, nós obtemos

$$\omega_k|_{\{t\} \times \mathbb{R}^m} = (-1)^{k+1}(vM_k u + uM_k v) dZ|_{\{t\} \times \mathbb{R}^m},$$

Como  $\int_{\{t\} \times \mathbb{R}^m} w_k = 0$  fica estabelecida a fórmula de “integração por partes”

$$\int_{\mathbb{R}^m} (M_k v) w dZ = - \int_{\mathbb{R}^m} v M_k w dZ$$

que, quando aplicada em (2.3) para as aplicações  $v = e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}$  e  $w = u(x',t)h(x')$  obtêm-se que

$$M_k G_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} (M_k u(x', t)h(x') + u(x', t)M_k h(x')) dZ(x', t),$$

que conclui a demonstração do lema. □

Conforme descrito anteriormente, a próxima etapa é estabelecer uma identidade para o comutador  $[L_j, G_\tau]$ .

Para  $j = 1, \dots, n$  e  $l = 1, \dots, m$  fixados, considere

$$\lambda_{jl} = -i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \mu_{kl}.$$

Munidos desta aplicação, a representação dos campos  $L_j$  pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} L_j &= \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} M_k \\ &= \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \left( \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{l=1}^m \lambda_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Um cálculo trivial verifica que os campos  $L_j$  admitem transposto formais  $L_j^t$  dados por

$$-L_j^t = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{l=1}^m \left( \lambda_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial \lambda_{jl}}{\partial x_l} \right).$$

Para prosseguirmos, vamos verificar que os campos  $(\det Z_x)L_j$  são não-divergentes, isto é,  $\operatorname{div}((\det Z_x)L_j) = 0$ . Equivalentemente, demonstraremos que  $\det Z_x$  é uma solução dos operadores  $L_j^t$ .

**Lema 2.2.3.** *Para  $j = 1, \dots, n$  segue que*

$$\begin{aligned} 0 &= -L_j^t \det Z_x \\ &= \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{l=1}^m \left( \lambda_{jl} \frac{\partial \det Z_x}{\partial x_l} + \frac{\partial \lambda_{jl}}{\partial x_l} \det Z_x \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_j} \det Z_x + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} (\lambda_{jk} \det Z_x) = 0. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja  $v$  um função-teste e considere a forma associada

$$\begin{aligned} \omega_j &= d(v dZ \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \dots \wedge dt_n) \\ &= dv \wedge dZ \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \dots \wedge dt_n \\ &= (-1)^{m+j-1} L_j v dZ \wedge dt \\ &= (-1)^{m+j-1} L_j v (\det Z_x) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

É claro que  $\omega_j$  é uma forma exata de suporte compacto e, conseqüentemente, admite integral nula em  $\mathbb{R}^N$ , isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} L_j v (\det Z_x) dx dt = 0.$$

Como  $v$  é arbitrária e ainda

$$\int_{\mathbb{R}^N} L_j v (\det Z_x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^N} v L_j^t (\det Z_x) dx dt$$

segue o resultado. □

Seja  $(\zeta, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$  e suponha que  $\tilde{g} : \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é uma aplicação suave que seja holomorfa com respeito a  $\zeta$ . Se denotarmos

$$g(x, t) = \tilde{g}(Z(x, t), t)$$

então para as coordenadas  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_m, t_1, \dots, t_n\}$  em  $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$  obtemos, com  $j = 1, \dots, n$ , a identidade

$$\begin{aligned} L_j g(x, t) &= \frac{\partial g}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial g}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_i} \frac{\partial Z_i}{\partial t_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_l} \delta_{lj} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_i} \frac{\partial Z_i}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j} + \sum_{i=1}^m L_j Z_i \\ &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x, t), t). \end{aligned}$$

Iremos tirar vantagem deste fato na demonstração deste último lema desta seção, que versa sobre a identidade para os comutadores  $[L_j, G_\tau]$ .

**Lema 2.2.4.** *Para  $u \in C^1$  e  $j = 1, \dots, m$  a seguinte identidade segue*

$$[L_j, G_\tau]u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} u(x', t) L_j h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

*Demonstração.* Considere

$$G_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} (\tilde{G}_\tau u)(Z(x, t), t),$$

onde

$$\tilde{G}_\tau u(\zeta, t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[\zeta - Z(x', t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

Desta forma

$$L_j G_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t).$$

Para que a notação não comprometa a legibilidade do texto, denotemos  $e^{-\tau[\zeta - Z(x', t)]^2}$  por

$e_\tau(\zeta, x', t)$ . Desta forma, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_\tau uh \det Z_x)}{\partial t_j} &= \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial t_j} \det Z_x + e_\tau uh \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} \\ &= \det Z_x L_j(e_\tau uh) - \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} (e_\tau uh) + e_\tau uh \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j}. \end{aligned}$$

Derivando sob o sinal da integral e utilizando a integração por partes

$$\int -\det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial x_k} dx = \int e_\tau uh \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} dx$$

concluimos que

$$\frac{\partial \tilde{G}_\tau}{\partial t_j} = \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x L_j(e_\tau uh) dx + \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau uh \left( \frac{\partial \det Z_x}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \lambda_{jk} \det Z_x}{\partial x_k} \right) dx.$$

Como, pelo lema anterior,  $\operatorname{div}((\det Z_x) L_j) = 0$ , segue que

$$\frac{\partial \tilde{G}_\tau}{\partial t_j} = \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x L_j(e_\tau uh) dx.$$

Já que  $L_j(e_\tau) = 0$  então vale

$$\begin{aligned} \det Z_x L_j(e_\tau uh) &= \det Z_x L_j(e_\tau(uh)) \\ &= \det Z_x e_\tau L_j(uh) \\ &= \det Z_x e_\tau h L_j u + \det Z_x e_\tau u L_j h, \end{aligned}$$

e portanto, para concluir a demonstração,

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \tilde{G}_\tau u(\zeta, t) = \tilde{G}_\tau L_j u(\zeta, t) + \int e_\tau(\zeta, x', t) (u(L_j h) \det Z_x)(x', t) dx'.$$

□

Para concluirmos a demonstração da segunda conclusão do Teorema de Aproximação, no caso suave, suponha que  $u \in C^\infty(W)$  satisfaça  $\mathcal{L}u = 0$ . O objetivo é estabelecer que  $E_\tau u \rightarrow u$  em  $C^\infty(U)$ .

Ora, já verificamos que  $G_\tau u \rightarrow hu$  uniformemente em  $\{|t| \leq T\} \times \mathbb{R}^m$ . Dada a

### 2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA $u \in \mathcal{D}'(W)$

---

comutatividade entre os campos  $L_j$  e  $M_k$  obtemos que  $M_k u$  também é uma solução suave do sistema — o que implica, particularmente, que

$$G_\tau M_k u \longrightarrow h M_k u$$

uniformemente em  $\{|t| \leq T\} \times \mathbb{R}^m$ .

Observe que a expressão de  $[M_k, G_\tau]u$  é semelhante à de  $G_\tau$ , sendo que, a única diferença consiste no fato de que  $h$  é substituída por  $M_k h$  e conseqüentemente

$$[M_k, G_\tau]u \longrightarrow (M_k h)u.$$

Restringindo nossa atenção ao conjunto  $U$  onde  $h \equiv 1$  e  $M_k h = 0$  concluímos que

$$M_k G_\tau u = G_\tau M_k u + [M_k, G_\tau]u \longrightarrow M_k u$$

uniformemente em  $U$  a medida que  $\tau \longrightarrow \infty$ .

Utilizando uma variação do argumento acima, é possível obter uma conclusão similar para  $L_j G_\tau u$ , isto é,  $L_j G_\tau u \longrightarrow L_j u$  uniformemente em  $U$  a medida que  $\tau \longrightarrow \infty$ .

Ora, como qualquer derivada de primeira ordem  $D$  pode ser obtida como combinação linear dos  $M_k$ 's e  $L_j$ 's vemos que,

$$D G_\tau u \longrightarrow D u$$

uniformemente em  $U$ . Isto nos garante que  $G_\tau u \longrightarrow u$  em  $C^1$ . Iterando este argumento, concluímos que a convergência  $G_\tau u \longrightarrow u$  se dá em  $C^\infty$ . Com isto, concluímos a demonstração do Teorema de Aproximação para distribuições extremamente regulares.

## 2.3 Demonstração para $u \in \mathcal{D}'(W)$

Antes de prosseguirmos o estudo da demonstração, façamos uma pequena digressão sobre os Espaços de Sobolev, que serão empregados na solução de alguns dos problemas anteriores.

Existem muitos critérios para se discutir regularidade de uma distribuição: alguns mais fracos, como o conceito de continuidade; outros mais sofisticados, como as funções de classe  $C^k$ ,  $C^\infty$  e analíticas. No século XX constatou-se que o melhor espaço funcional para julgar regularidade das distribuições eram os espaços de Sobolev, que são aprimoramentos



modernos das classes de diferenciabilidade.

**Definição 2.3.1.** Dados  $1 \leq p \leq \infty$  e  $s \in \mathbb{R}$  denotemos por  $L^{p,s}(\mathbb{R}^m)$  o conjunto

$$\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) : \|f\|_{p,s} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{p,s} = \mathcal{F}^{-1} \left( (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\mathcal{F}f)(\xi) \right).$$

É possível verificar que a aplicação  $f \mapsto \|f\|_{p,s}$  torna  $L^{p,s}(\mathbb{R}^m)$  um espaço vetorial normado.

O caso especial  $s = 2$  é eventualmente denotado por  $H^s(\mathbb{R}^m)$ . Se ainda  $s \in \mathbb{Z}_+$  e  $1 < p < \infty$  obtêm-se que

$$L^{p,s}(\mathbb{R}^m) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^m) : D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^m), |\alpha| \leq k\},$$

que pode ser equivalentemente normado com

$$\|f\|_{p,s} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p.$$

Assim como ocorre com os espaços de Lebesgue, é interessante formular uma definição local para os Espaços de Sobolev. Este é o assunto da

**Definição 2.3.2.** Dados  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$  e  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^m$  denotemos por  $L_{loc}^{p,s}(\Omega)$  o conjunto

$$\{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \psi f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^N), \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

O espaço  $L_{loc}^{p,s}(\Omega)$  é considerado equipado com a topologia dada pelas semi-normas  $f \mapsto \|\psi f\|_{p,s}$ .

Neste caso estamos em condições de enunciar o

**Teorema 2.3.3.** *Valem as seguintes afirmações:*

- (i) Se  $\varepsilon > 0$  e  $k \in \mathbb{Z}^+$  então  $H^{\frac{m}{2}+k+\varepsilon} \subset C^k$  ;
- (ii)  $\mathcal{E}' \subset \cup_s H^s$  ;
- (iii)  $C^\infty = \cap_s H^s$  ;

(iv) Se  $s, s'$  são números reais tais que  $s' < s$  então  $H^s \subset H^{s'}$ .

Depois desta pequena pausa, estamos em condições de prosseguir o nosso estudo sobre o Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves.

A próxima etapa da demonstração consiste em verificar sua conclusão no caso mais geral, isto é, considerar  $u \in \mathcal{D}'(W)$  tal que  $\mathcal{L}u = 0$ . Para isto, podemos nos inspirar na técnica empregada na seção anterior e verificar que ela pode ser aplicada neste caso, ou seja, devemos demonstrar que

- (i)  $E_\tau u$  está bem definido para  $u \in \mathcal{D}'(W)$ ;
- (ii)  $G_\tau u$  está bem definido para  $u \in \mathcal{D}'(W)$ ;
- (iii)  $G_\tau u \rightarrow u$  em  $\mathcal{D}'(U)$  a medida que  $\tau \rightarrow \infty$  para  $u \in \mathcal{D}'(W)$ ;
- (iv)  $R_\tau u = G_\tau u - E_\tau u \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}'(U)$  a medida que  $\tau \rightarrow \infty$  para  $u \in \mathcal{D}'(W)$ .

Para lidarmos com os dois primeiros problemas, uma ferramenta essencial é o

**Teorema 2.3.4.** *Se  $W$  é um aberto de  $\mathbb{R}^N$  e  $u \in \mathcal{D}'(W)$  é tal que  $\mathcal{L}u = 0$  então*

$$\text{WF } u \subset \mathcal{L}^0.$$

Este resultado segue imediatamente de [Hör83, teo. 8.3.1] e, conseqüentemente,  $\text{WF } u$  não intercepta o conjunto

$$N = \{((x, t), (0, \tau)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : |x|, |t| < R', \tau \neq 0\}$$

para algum  $R' > R$ . Desta forma,  $\text{WF } hu$  está contido no mesmo conjunto e, em particular,

$$u \in C^\infty(\{|t| \leq R\}, \mathcal{D}'(\{|x| < R\})).$$

Ora, como  $\{|x| < R\} \times \{|t| < R\}$  é relativamente compacto então, para algum  $s \in \mathbb{R}$ , segue que

$$u \in C^0(\{|t| \leq R\}, L_{loc}^{2,s}(B_R)),$$

onde  $B_R$  é bola, em  $\mathbb{R}^m$ , de raio  $R$  e centro na origem.

Finalmente, interpretando os operadores por dualidade, como já foi discutido anteriormente, segue que os dois primeiros obstáculos já foram ultrapassados.

### 2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA $u \in \mathcal{D}'(W)$

---

Vamos alterar a ordem natural e verificar o último item. Neste caso é conveniente expressar  $R_\tau u$  através de uma interpretação da fórmula para  $u$  suave. Verificaremos que

$$R_\tau u(x, t) = \int_{[0, t]} \sum_{j=1}^n r_j(x, t, t', \tau) dt'_j,$$

onde

$$r_j(x, t, t', \tau) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t')]^2} u(x', t') L_j h(x') \det Z_x(x', t') dx'$$

e  $[0, t]$  indica o segmento que conecta  $t$  a origem.

Para a verificação desta afirmação escreva, para  $\zeta$  e  $\tau$  fixados,

$$g(t') = \tilde{G}_\tau u(\zeta, t') = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[\zeta - Z(x', t')]^2} u(x', t') h(x') \det Z_x(x', t') dx'.$$

Desta forma,

$$g(t) - g(0) = \int_{[0, t]} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial t'_j}(t') dt'_j.$$

Para calcular as derivadas de  $g$ , escreva  $e_\tau(\zeta, x', t) = e^{-\tau[\zeta - Z(x', t)]^2}$ , diferencie sob o sinal de integração e lembre-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_\tau u h \det Z_x)}{\partial t'_j} &= \frac{\partial(e_\tau u h)}{\partial t'_j} \det Z_x + e_\tau u h \frac{\partial \det Z_x}{\partial t'_j} \\ &= \det Z_x L_j(e_\tau u h) - \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau u h)}{\partial x_k} + e_\tau u h \frac{\partial \det Z_x}{\partial t'_j}. \end{aligned}$$

Utilizando a integração por partes

$$\int -\det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} (e_\tau u h) dx = \int e_\tau u h \sum_{k=1}^m \frac{\partial \lambda_{jk} \det Z_x}{\partial x_k} dx$$

e lembrando que  $\operatorname{div}((\det Z_x) L_j) = 0$  e  $L_j(e_\tau u) = 0$  segue finalmente que

$$\frac{\partial g}{\partial t'_j}(t') = \tilde{r}_j(\zeta, t', \tau)$$

onde

$$\tilde{r}_j(\zeta, t', \tau) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[\zeta - Z(x', t')]^2} u(x', t') L_j h(x') \det Z_x(x', t') dx'.$$

A vantagem desta formulação é que ela continua válida para distribuições. Desta forma vamos verificar a

**Proposição 2.3.5.** *Seja  $u \in \mathcal{D}'(W)$  solução de  $\mathcal{L}$ . Então*

$$R_\tau u(x, t) \longrightarrow 0 \text{ em } C^\infty(U).$$

*Demonstração.* Já verificamos que a exponencial na expressão de  $r_j$  pode ser majorada por  $e^{-c\tau}$  para alguma constante positiva  $c > 0$  para  $|x| < R/4$ ,  $|x'| \geq R/2$ ,  $|t| < T$  e  $t' \in [0, T]$ . Seja  $\Delta_x$  o Laplaciano em  $\mathbb{R}^m$ . Para  $k \in \mathbb{Z}_+$  escreva

$$L_j h(x') u(x', t') \det Z_x(x', t') = \chi(x') (1 - \Delta_{x'})^k (1 - \Delta_{x'})^{-k} [L_j h(x') u(x', t') \det Z_x(x', t')],$$

onde  $\chi$  é uma função corte suportada em  $|x'| \leq R/4$  tal que  $\chi(x') L_j h(x') = L_j h(x')$ .

Se denotarmos  $v_j(x', t') = (1 - \Delta_{x'})^{-k} [L_j h(x') u(x', t') \det Z_x(x', t')]$  então segue que  $v_j \in C^0(V)$  para alguma escolha apropriada de  $k$ . De fato, o operador  $(1 - \Delta_{x'})^{-k}$  definido em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  e dado por

$$(1 - \Delta_{x'})^{-k} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int e^{ix \cdot \xi} (1 + |\xi|^2)^{-k} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

mapeia  $L^{2,s}(\mathbb{R}^m)$  continuamente em  $L^{2,s+2k}(\mathbb{R}^m)$ . Utilizando o Teorema de Imersão de Sobolev segue que para  $s + 2k > m/2$  vale que  $L^{2,s+2k}(\mathbb{R}^m) \subset L^\infty(\mathbb{R}^m) \cap C^0(\mathbb{R}^m)$ .

Desta forma  $r_j(x, t, t', \tau)$  é contínuo com respeito a  $t'$  e converge a 0 uniformemente para  $|x| \leq R/2$ ,  $|t'| \leq |t| \leq T$ , a medida que  $\tau \longrightarrow \infty$ . Como as derivadas de  $(1 - \Delta_{x'})^{-k}$  produzem potências de  $\tau$  que são igualmente dominadas por  $e^{-c\tau}$  então  $R_\tau u(x, t) \longrightarrow 0$  uniformemente e finalmente derivando sob o sinal da integração segue o resultado.  $\square$

Quanto à (3) a estratégia é a seguinte: para provar esta convergência no espaço de distribuições é suficiente verificar que a convergência se dá para as distribuições que, para algum inteiro  $k$ ,

$$u \in C^0\left(\{|t| \leq R\}, L_{loc}^{2,k}(B_R)\right).$$

Para demonstrar a convergência para as demais distribuições, é suficiente tomar um inteiro  $k$  cuja topologia seja mais restritiva que a topologia que queremos verificar.

Iniciando com  $k = 0$  e assumindo

$$u \in C^0\left(\{|t| \leq R\}, L_{loc}^{2,k}(B_{R'})\right),$$

com  $R' > R$ , gostaríamos de provar que

$$\int_{|x| \leq R/4} |G_\tau u(x, t) - u(x, t)|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ uniformemente em } |t| \leq T,$$

o que, para esta classe de distribuições, implica em (3)

Redefinindo  $u$  por zero no complementar de  $B_R \times \mathbb{R}^n$ , assumamos que  $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  para cada  $t$  fixado, com  $|t| \leq T$ . Relembrando que a exponencial que define  $G_\tau u$  admite a cota

$$|e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',t)]^2}| \leq e^{-3\tau|x-x'|^2/4}$$

e escrevendo

$$F_\tau(x) = \tau^{m/2} e^{-3\tau|x|^2/4}$$

nós concluímos que, para  $t$  fixado satisfazendo  $|t| \leq R$ , obtemos

$$|G_\tau u(x, t)| \leq C(F_\tau * |u|)(x, t)$$

onde a convolução é realizada na variável  $x$ .

Como  $\|F_\tau\|_{L^1} = C$  segue, da Desigualdade de Young para Convoluções, que

$$\sup_{|t| \leq T} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C \sup_{|t| \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \quad (2.4)$$

Para que possamos tirar vantagem da desigualdade anterior, demonstraremos o

**Lema 2.3.6.** *Seja  $(X, \|\cdot\|_X)$  um espaço vetorial normado e  $Y \subset X$  um subespaço denso. Suponha uma família de aplicações lineares  $\{f_\lambda : X \rightarrow X; \lambda \in \mathbb{R}_+\}$  tal que*

$$(i) \ \|f_\lambda(v)\|_X \leq C\|v\|_X, \text{ para todo } v \text{ em } X;$$

$$(ii) \ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(v) \longrightarrow v, \text{ uniformemente em } v, \text{ para todo } v \text{ em } Y.$$

*Nestas condições,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(v) \longrightarrow v$ , uniformemente em  $v$ , para todo  $v$  em  $X$ .*

*Demonstração.* Seja  $v \in X$ ,  $v_n \longrightarrow v$  uma sequência em  $Y$  e  $\varepsilon > 0$ . Nestas condições, existem

---

2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA  $u \in \mathcal{D}'(W)$

---

(i)  $n_0$  tal que, se  $n \geq n_0$  então  $\|v - v_n\|_X < \min\{\frac{\varepsilon}{3C}, \frac{\varepsilon}{3}\}$ ;

(ii)  $\lambda_0$  tal que, se  $\lambda \geq \lambda_0$  então  $\|f_\lambda(v_n) - v_n\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Para  $n \geq n_0$  e  $\lambda \geq \lambda_0$  segue que

$$\begin{aligned}
 \|f_\lambda(v) - v\|_X &= \|f_\lambda(v) - v + f_\lambda(v_n) - f_\lambda(v_n)\|_X \\
 &\leq \|f_\lambda(v - v_n)\|_X + \|f_\lambda(v_n) - v\|_X \\
 &\leq C\|v - v_n\|_X + \|f_\lambda(v_n) - v_n\|_X + \|-v + v_n\|_X \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Na seção anterior, estabelecemos que se  $u \in \mathcal{D}(V)$  então  $G_\tau u \rightarrow u$  uniformemente em  $U = B_{R/4} \times \{|t| < T\}$ , o que implica convergência no espaço  $C^0(\{|t| \leq T\}, L^2(B_{R/4}))$ . Desta forma, o operador  $G_\tau|U$  converge para operador  $u|U$  em um conjunto denso de  $C^0(\{|t| \leq T\}, L^2(B_R))$ .

Como a família de operadores  $\{G_\tau u|U\}$  satisfaz (2.4) conclui-se, pelo lema

$$G_\tau u|U \rightarrow u|U \text{ em todo o espaço } C^0(\{|t| \leq T\}, L^2(B_{R/4})).$$

Prossigamos para o próximo inteiro  $k$ . Assuma que

$$u \in C^0(\{|t| \leq T\}, L^{2,1}(B_{R'}))$$

para  $R' > R$ . Utilizando um função corte propriamente escolhida, assuma que  $u \in C^0(\{|t| \leq R\}, L^{2,1}(\mathbb{R}^m))$  e que  $u$  permanece inalterada para  $|x| < R$ . Desta forma, para  $|t| \leq T$  fixado, nós observamos que, tanto  $u$  como suas derivadas com respeito à  $x_k$  e  $t_j$  estão em  $L^2(\mathbb{R}^m)$  para  $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n$ .

Como  $\phi$  admite suporte compacto, os coeficientes de  $L_j$  e  $M_k$  são limitados, com derivadas limitadas. Em particular  $L_j u$  e  $M_k u$  estão em  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformemente para  $|t| \leq T$ .

### 2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA $u \in \mathcal{D}'(W)$

---

Para obter o resultado desejado para  $k = 1$  é necessário, para que possamos proceder conforme o caso  $k = 0$ , provar a estimativa análoga à (2.4), isto é,

$$\sup_{|t| \leq T} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^m)} \leq C \sup_{|t| \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^m)}. \quad (2.5)$$

Já sabemos que qualquer derivada de primeira ordem, com respeito a  $x$ , é uma combinação linear (com coeficientes limitados) dos  $M_k$ 's. Desta forma, é suficiente verificar que: para  $|t| \leq T$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$

$$\sup_{|t| \leq T} \|M_k G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C \sup_{|t| \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^m)}. \quad (2.6)$$

Para demonstrarmos esta desigualdade, observe que, como  $M_k G_\tau = [M_k, G_\tau] + G_\tau M_k$  nos resta estimar  $\|G_\tau M_k u\|_{L^2}$  e  $\|[M_k, G_\tau]u\|_{L^2}$ . Utilizando (2.4), obtemos que,

$$\|G_\tau M_k u\|_{L^2} \leq C \|M_k u\|_{L^2} \leq C' \|u\|_{L^{2,1}}.$$

Como já sabemos que as aplicações  $G_\tau$  e  $[M_k, G_\tau]$  são muito similares, então, vale uma estimativa análoga à (2.4) utilizando  $[M_k, G_\tau]$ . Desta forma

$$\|[M_k, G_\tau]u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^{2,1}},$$

o que verifica (2.5) e conseqüentemente demonstra a desigualdade (2.6).

Esta construção ainda nos fornece um algoritmo para os casos  $k = 2, 3, \dots$  e, conseqüentemente, validamos a família de desigualdades

$$\sup_{|t| \leq T} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^{2,k}(\mathbb{R}^m)} \leq C_k \sup_{|t| \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2,k}(\mathbb{R}^m)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

Nos resta verificar o caso em que  $k'$  é um inteiro negativo, isto é,  $k' = -k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Inicialmente, vamos introduzir uma pequena modificação do operador  $G_\tau$ : considere  $G'_\tau = hG_\tau$ . É claro que  $G'_\tau = G_\tau$  em  $U$ , já que  $h|_U = 1$ . Conseqüentemente, qualquer conclusão válida para  $|x| \leq R/4$  com respeito ao operador  $G'_\tau$  também será verdadeira para  $G_\tau$ .

A vantagem de considerarmos este novo operador é que ele se torna simétrico na variável

2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA  $u \in \mathcal{D}'(W)$

---

$x$  com respeito à medida  $dZ$ , isto é, se  $v, w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  então, para  $t$  fixado,

$$\int G'_\tau v(x, t) w(x) \det Z_x(x, t) dx = \int G'_\tau w(x, t) v(x) \det Z_x(x, t) dx.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \|G'_\tau u(\cdot, t)\|_{L^{2,k'}(\mathbb{R}^m)} &\leq C \sup_{\substack{w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \\ \|w\|_{L^{2,k}} \leq 1}} |\langle G'_\tau u(\cdot, t), w \rangle| \\ &= C \sup_{\substack{w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \\ \|w\|_{L^{2,k}} \leq 1}} |\langle u(\cdot, t), G'_\tau w \rangle| \\ &\leq C \sup_{\substack{w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \\ \|w\|_{L^{2,k}} \leq 1}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2,k'}} \|G'_\tau w\|_{L^{2,k}} \\ &\leq C \|u(\cdot, t)\|_{L^{2,k'}}. \end{aligned}$$

Observe que, nesta sequência de desigualdades, utilizamos a majoração já verificada para  $k \in \mathbb{N}$ . Com isto fica provada a equicontinuidade de  $G'_\tau$  nos espaços

$$C^0(\{|t| \leq T\}, L^{2,k}(B_{R'})), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Juntamente com a convergência  $G_\tau u|U \rightarrow u|U$ , que ocorre para  $u \in \mathcal{D}(\overline{B_{R'}} \times \{|t| \leq T\})$  — que é denso em  $C^0(\{|t| \leq T\}, L^{2,k}(B_{R'}))$ , fica demonstrado que  $G_\tau u \rightarrow u$  em  $C^0(\{|t| \leq T\}, L^{2,k}(B_{R/4}))$  para qualquer  $u \in C^0(\{|t| \leq T\}, L^{2,k}(B_{R'}))$ . Com isto, fica concluída a primeira parte do Teorema de Aproximação.

Já quanto a segunda parte do teorema — que versa sobre a convergência nos espaços  $C^j$ , é suficiente demonstrar a equicontinuidade de  $G_\tau$  em

$$C^j(\{|t| \leq T\}, C_b^k(\mathbb{R}^m)),$$

onde  $C_b^k(\mathbb{R}^m)$  é o espaço das funções definidas em  $\mathbb{R}^m$ , que admitem derivadas limitadas de ordem  $\leq k$ . O caso  $j, k = 0$  é facilmente demonstrado observando que

$$|G_\tau u(x, t)| \leq C(F_\tau * |u|)(x, t) \leq C' \|u\|_{C^0(\{|t| \leq T\}, C_b^0(\mathbb{R}^m))}.$$

De maneira análoga ao que já foi feito, é possível, através da inserção dos comutadores,



reduzir o caso  $j, k \leq 1$  à análise da equicontinuidade com respeito à  $C^0(\{|t| \leq T\}, C_b^0(\mathbb{R}^m))$ . Iterando este argumento, concluímos a demonstração do Teorema de Aproximação.

## 2.4 Convergência em Outros Espaços Funcionais

O Teorema de Baouendi-Treves pode ser verificado para vários espaços funcionais. A estratégia, nesses casos, é utilizar o resultado provado na seção anterior:  $R_\tau u = G_\tau u - E_\tau u \rightarrow 0$  em  $C^\infty(U)$ , para qualquer distribuição  $u$  satisfazendo  $\mathcal{L}u = 0$  em um aberto  $V$ , contendo  $U$ .

Mediante este resultado, o problema da convergência de  $E_\tau u \rightarrow u$  em qualquer espaço funcional, com topologia mais fina que a de  $C^\infty$ , fica reduzido a convergência de  $G_\tau u \rightarrow u$  ao mesmo espaço. Como já foi discutido, o operador  $G_\tau$  é muito próximo, entendendo  $t$  como um parâmetro, a uma convolução, na variável  $x$ , com a Gaussiana. Deste modo, é esperado que a convergência  $G_\tau u \rightarrow u$  em  $U$  ocorra em muitos espaços funcionais.

A abordagem das demonstrações da convergência  $G_\tau u \rightarrow u$  será sempre a mesma. Se quisermos verificar que o teorema é verdadeiro para um certo espaço de distribuições  $X(U)$ , temos que, primeiramente, tentar provar a equicontinuidade da família  $\{G_\tau\}$  em  $X(\mathbb{R}^N)$  e, em seguida, mostrar que a convergência ocorre em um subespaço denso de  $X(V)$ . Em geral, o subconjunto denso será o das funções-testes, para o qual já sabemos, da segunda seção deste capítulo, que  $G_\tau u \rightarrow u$ .

Em geral, esta abordagem funciona se

- (i)  $X(V)$  é um espaço normal de distribuições, isto é,  $\mathcal{D}(V)$  é denso em  $X(V)$ ;
- (ii) existe uma aplicação  $J : C^\infty(\bar{U}) \rightarrow X(U)$  contínua e injetora.

Este princípio foi aplicado, na seção anterior, com  $X(V) = C^0(\{|t| \leq R\}, L^{2,k}(B_R))$ .

Para concluir, vamos enunciar dois resultados que verificam o Teorema de Aproximação para outros espaços funcionais. Primeiramente para convergência em  $L^p$  e, em seguida, para os Espaços de Sobolev.

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma estrutura localmente integrável sobre  $\Omega$  e assumamos que*

$$dZ_1, \dots, dZ_m$$

*gerem  $\mathcal{L}^\perp$  em todo ponto de  $\Omega$ . Então, para qualquer  $z \in \Omega$ , existem dois abertos  $U$  e  $W$ ,*

com  $z \in U \subset \bar{U} \subset W \subset \Omega$ , tal que para  $u \in L_{\text{loc}}^p(W)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , satisfazendo  $\mathcal{L}u = 0$ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau u(x, t) = u(x, t) \quad \text{q.t.p. em } U.$$

Caso  $p$  seja finito, i.e.,  $1 \leq p < \infty$ , também temos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau u = u \quad \text{em } L^p(U).$$

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma estrutura localmente integrável sobre  $\Omega$  com integrais primeiras  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  definidas em uma vizinhança do fecho de  $W = B_x \times B_t$ . Então existe uma vizinhança  $U \subset W$  da origem tal que para toda  $u \in L_{\text{loc}}^{p,s}(W)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , satisfazendo  $\mathcal{L}u = 0$ ,*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau u = u \quad \text{em } L_{\text{loc}}^{p,s}(U).$$

É claro que, em ambos os casos, é possível substituir o operador  $E_\tau$  por uma sequência apropriada de polinômios nas componentes de  $Z$ . Para as demonstrações omitidas, consulte [Hou08, cap. II].

## Parte II

# Regularidade e Unicidade para Medidas de Radon

### 3.1 Medidas de Radon

Um problema interessante em Matemática é o de encontrar uma noção de medida que seja, de certa forma, compatível com a topologia dada em um certo conjunto. A tentativa mais natural seria a de considerar medidas definidas sobre os borelianos do espaço. Entretanto, isto não é suficiente para que tais medidas tenham boas propriedades com respeito a convergência uniforme de funções contínuas. O objetivo desta seção é justamente definir e estudar estas medidas.

**Definição 3.1.1.** Se  $X$  é um espaço topológico tal que todo ponto  $p \in X$  é ponto interior de algum conjunto compacto  $K_p$  então diremos que  $X$  é *localmente compacto*.

Os exemplos cruciais, para este texto, de espaços de Hausdorff localmente compactos são os espaços  $\mathbb{R}^N$ , seus subconjuntos abertos e as variedades topológicas.

**Definição 3.1.2.** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff,  $\mathcal{B}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  e  $m$  uma medida definida em  $\mathcal{B}$  satisfazendo

- (i)  $m(B) = \sup\{m(K) : K \subset B \text{ e } K \text{ é compacto}\}$ ;
- (ii)  $m(K) < \infty$ , para todo  $K$  compacto.

Nestas condições, diremos que  $m$  é uma medida de Radon em  $X$  e denotaremos por  $\mathcal{M}(X)$  o conjunto formado por todas estas medidas.

As medida de Lebesgue e de Dirac em  $\mathbb{R}^N$  são exemplos de medidas de Radon. Entretanto, a medida da contagem em um espaço euclidiano não satisfaz o segundo axioma da definição anterior.

Suponha que  $X$  seja um espaço topológico de Hausdorff. O conjunto formado por todas as aplicações  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas e de suporte compacto pode ser dotado de duas noções de convergência que o tornam um espaço vetorial topológico. A primeira, e mais natural, é a dada pela norma do supremo. Já para a segunda topologia, a noção de convergência é dada pelo

**Teorema 3.1.3.** *Uma sequência  $f_j : X \rightarrow \mathbb{C}$ , de funções contínuas e de suporte compacto, converge a zero se, e somente se,*

(i) *existe um compacto  $K \subset X$  tal que  $\text{supp}(f_j) \subset K$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;*

(ii)  *$f_j$  converge uniformemente a zero.*

Deste ponto em diante, escreveremos  $C_c(X)$  para indicar este espaço munido da norma do supremo e denotaremos por  $\mathcal{D}_0(X)$  o mesmo conjunto, mas munido da segunda topologia.

Eventualmente, poderemos denotar por  $\mathcal{D}(X, A)$  as funções de  $\mathcal{D}(X)$  satisfazendo a condição adicional  $f(X) \subset A$ . O mesmo se aplica para  $C_c(X)$  e  $C_c(X, A)$ .

Note que a identidade não é um homeomorfismo entre  $C_c(X)$  e  $\mathcal{D}_0(X)$ . O contra-exemplo é dado pela sequência de aplicações abaixo  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x-j}{j}, & x \in [j, j+1] \\ \frac{2+j-x}{j}, & x \in [j+1, j+2] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

que convergem para a função nula em  $C_c(\mathbb{R})$ . Como estas aplicações não admitem suporte fixo, esta sequência não converge em  $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ .

Apesar deste pormenor, vale que  $\mathcal{D}_0(X) \subset C_c(X)$  topologicamente. A igualdade é válida se  $X$  for um espaço compacto.

Se  $f$  é uma aplicação contínua então  $f$  é mensurável com respeito a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Se fixarmos  $m$  for uma medida de Radon em  $X$  e admitir que  $f$  está suportada em um compacto  $K$  então  $f \in L^1(X)$ . De fato,

$$\int_X |f| dm = \int_K |f| dm \leq \sup_X |f| m(K) < \infty.$$

Nestas condições, se  $m$  for uma medida de Radon em  $X$  então a aplicação

$$\begin{aligned} I : C_c(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_X f dm. \end{aligned}$$

fica bem definida

Observe que  $I$  é um funcional linear contínuo. De fato, para cada compacto  $K$  de  $X$  existe uma constante  $M_K$  tal que, se  $f \in \mathcal{D}_0(X)$  é uma aplicação suportada em  $K$  então

$$I(f) \leq M_K \sup |f(x)|.$$

Além de contínuo,  $I$  é positivo no seguinte sentido

**Definição 3.1.4.** Um funcional linear  $\lambda : \mathcal{D}_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$  é *positivo* se  $\lambda(\mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}_+)) \subset \mathbb{R}_+$ .

Para prosseguirmos nossa análise, vamos enunciar o conhecido Teorema de Representação de Riesz.

**Teorema 3.1.5.** *Sejam  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e  $I$  um funcional positivo em  $\mathcal{D}_0(X)$ . Nestas condições, existem uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}'$ , contendo os borelianos de  $X$ , e uma única medida positiva  $m$  tal que*

$$\begin{aligned} I : \mathcal{D}_0(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_X f dm. \end{aligned}$$

que ainda satisfaz

(i)  $m(K) < \infty$  para todo compacto  $K$ ;

(ii) Para todo  $E \in \mathcal{B}'$  temos que

$$m(E) = \inf \{m(V) : V \text{ é aberto e } E \subset V\};$$

(iii) A relação

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ é compacto e } K \subset E\}$$

é válida para todo conjunto aberto  $E$  e para todo conjunto  $E \in \mathcal{B}'$  de medida  $m$  finita;

(iv) Se  $E \in \mathcal{B}'$ ,  $A \subset E$  e  $m(E) = 0$  então  $A \in \mathcal{B}'$ .

Para que possamos estabelecer uma equivalência entre os elementos de  $\mathcal{D}'_0$  e as medidas de Radon, vamos enunciar e demonstrar uma outra versão do Teorema de Representação.

**Definição 3.1.6.** Uma função  $f : X \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ , definida em um espaço localmente compacto de Hausdorff, é dita se *anular no infinito* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um conjunto compacto  $K \subset X$  tal que  $|f(x)| < \varepsilon$  se  $x \in X - K$ . A classe das funções contínuas definidas em  $X$  que se anulam no infinito é denotado por  $C_0(X, V)$ . Como de costume, se  $V = \mathbb{C}$  apenas escreveremos  $C_0(X)$ .

É claro que  $C_c(X) \subset C_0(X)$ . A inclusão contrária é verdadeira se  $X$  for compacto. Além disto, a estrutura topológica de  $C_0(X)$  é dada de forma que este espaço seja o completamento, no sentido de espaços métricos, de  $C_c(X)$ .

**Definição 3.1.7.** Um funcional  $\lambda : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  é dito *limitado* se existe uma constante  $C \geq 0$  tal que

$$|\lambda f| \leq C \sup |f(x)|.$$

**Teorema 3.1.8.** Se  $X$  é um espaço de Hausdorff localmente compacto então todo funcional limitado  $\phi$  em  $C_0(X)$  é representado por uma única medida regular, complexa e de Borel  $\mu$ , de maneira que

$$\phi(f) = \int_X f \, d\mu$$

para toda  $f \in C_0(X)$ . Segue, ainda, que a norma de  $\phi$  é a variação total de  $\mu$ , isto é,

$$\|\phi\| = |\mu|(X).$$

*Demonstração.* Vamos estabelecer, inicialmente, a unicidade da medida. Suponha que  $\mu$  é uma medida regular de Borel satisfazendo

$$\int_X f \, d\mu = 0$$

para toda  $f \in C_0(X)$ . Pelo Teorema de Decomposição Polar, existe uma função Borel-mensurável  $h$  com  $|h| = 1$  tal que  $d\mu = h d|\mu|$ . Desta forma, para qualquer sequência  $(f_n)$  em  $C_0(X)$  segue

$$|\mu|(X) = \int_X 1 d|\mu| - 0 = \int_X |h| d|\mu| - \int_X f_n d\mu = \int_X (\bar{h} - f_n)h d|\mu| \leq \int_X |\bar{h} - f_n| d|\mu|.$$

Pela densidade de  $\mathcal{D}_0$ ,  $\{f_n\}$  pode ser tomada de forma que

$$\int_X |\bar{h} - f_n| d|\mu| \longrightarrow 0.$$

Isto implica que  $|\mu| = 0$  e, conseqüentemente,  $\mu = 0$ . Dado que a diferença de medidas regulares de Borel ainda é uma medida do mesmo tipo, segue a unicidade da medida.

Considere um funcional linear limitado  $\phi$  em  $C_0(X)$ . Vamos assumir, sem perda de generalidade, que  $\|\phi\| = 1$ . Caso contrário, considere  $\phi_1 = \frac{\phi}{\|\phi\|}$  e, evidentemente, o resultado que provaremos para  $\phi_1$  será igualmente válido para  $\phi$ . Note que se  $\phi$  for o funcional nulo, o resultado é trivial.

Dada  $\phi$  nas condições anteriores, defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup\{|\phi(h)| : h \in \mathcal{D}_0(X), |h| \leq f\}. \end{aligned}$$

Naturalmente,  $\Lambda(f) \geq 0$  e ainda satisfaz, para  $f \in \mathcal{D}_0(X)$ , a relação

$$|\phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|.$$

Das propriedades elementares do supremo, temos que se tomarmos  $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$  satisfazendo  $0 \leq f_1 \leq f_2$  segue que  $\Lambda(f_1) \leq \Lambda(f_2)$ . Da mesma forma, se  $c \in \mathbb{R}^+$  e  $f \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$  então  $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ .

Vejamos agora que se  $f, g \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$  então

$$\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Para  $\varepsilon > 0$  e  $f, g \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$  fixadas, existem  $h_1$  e  $h_2$  tal que  $|h_1| \leq f$ ,  $|h_2| \leq g$  e ainda

$$\Lambda(f) \leq |\phi(h_1)| + \varepsilon,$$

$$\Lambda(g) \leq |\phi(h_2)| + \varepsilon.$$



Considere números complexos  $\alpha_i$ , com  $|\alpha_i| = 1$ , satisfazendo  $\alpha_i\phi(h_i) = |\phi(h_i)|$  para  $i = 1, 2$ . Desta forma,

$$\begin{aligned}\Lambda(f) + \Lambda(g) &\leq |\phi(h_1)| + |\phi(h_2)| + 2\varepsilon \\ &= \phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leq |\phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)| + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda(|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2|) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda(f + g) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

o que conclui uma das desigualdades necessárias.

Considere uma função  $h \in \mathcal{D}_0(X)$  sujeita à condição  $|h| \leq f + g$ . Seja

$$V = \{x : f(x) + g(x) > 0\}.$$

Observe que o conjunto formado pelas aplicações nesta condição é não vazio, dado que a própria  $f$  e  $g$  satisfazem estas imposições. Neste contexto, defina

$$\begin{aligned}h_1 : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{f(x)h(x)}{f(x) + g(x)} & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \notin V, \end{cases} \\ \\ h_2 : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{g(x)h(x)}{f(x) + g(x)} & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \notin V, \end{cases}\end{aligned}$$

É claro que  $h_1$  é contínua em  $V$ . Se  $x_0 \notin V$  então  $h_1(x_0) = 0$  e  $h(x) = 0$ . Como  $h$  é contínua e ainda  $|h_1(x)| \leq |h(x)|$  para todo  $x \in X$ , segue que  $x_0$  também é um ponto de continuidade de  $h_1$ , isto é,  $h_1 \in \mathcal{D}_0(X)$ . A mesma discussão se aplica a  $h_2$ .

Como  $h_1 + h_2 = h$ ,  $|h_1| \leq f$  e ainda  $|h_2| \leq g$  segue

$$|\phi(h)| = |\phi(h_1) + \phi(h_2)| \leq |\phi(h_1)| + |\phi(h_2)| \leq \Lambda(|h_1|) + \Lambda(|h_2|) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Tomando o supremo na desigualdade acima sobre todas as funções  $h \in \mathcal{D}_0(X)$  sujeitas

à condição  $|h| \leq f + g$ , segue a igualdade desejada, isto é, se  $f, g \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$  então

$$\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

A próxima etapa é estender a aplicação  $\Lambda$  a  $\mathcal{D}_0(X, \mathbb{R})$ .

Se  $f \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R})$ , considere a decomposição de  $f$  dada por

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2},$$

$$f^- = f^+ - f.$$

Naturalmente, tanto  $f^+$  quanto  $f^-$  são aplicações reais, contínuas, de suporte compacto e não negativas, isto é,  $f^-, f^+ \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$ . Desta forma, é natural definir

$$\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-).$$

É claro que se  $f \in \mathcal{D}_0(X, \mathbb{R}^+)$  então  $f = f^+$  e  $f^- = 0$ , o que nos garante se tratar de uma extensão.

Analogamente, a aplicação  $\Lambda$  admite uma extensão a  $\mathcal{D}_0(X)$  através da relação

$$\Lambda(u + iv) = \Lambda(u) + i\Lambda(v).$$

Operações algébricas elementares, que serão omitidas neste texto, nos garantem que a aplicação estendida  $\Lambda$  é, na verdade, um funcional linear positivo definido em  $\mathcal{D}_0(X)$  que, lembrando, para toda  $f \in \mathcal{D}_0(X)$  satisfaz

$$|\phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|. \quad (3.1)$$

Aplicando o teorema anterior à  $\Lambda$ , existe uma medida positiva  $m$  de Borel tal que  $m$  é regular se  $m(X) < \infty$ . Como

$$m(X) = \sup\{\Lambda(f) : 0 \leq f \leq 1, f \in \mathcal{D}_0(X)\}$$

e dado que  $\Lambda(f) \leq 1$  se  $\|f\| \leq 1$  segue que  $m(X) \leq 1$ .

Deduzindo de (3.1), e utilizando a representação do teorema anterior temos que

$$|\phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f| dm = \|f\|_{L^1(m)}$$

para toda  $f \in \mathcal{D}_0(X)$ . Desta forma, fica estabelecido que  $\phi$  é um funcional linear limitado em  $\mathcal{D}_0(X)$  de norma no máximo 1.

Estendendo este funcional para  $L^1(m)$ , existe uma função boreliana  $g$ , com  $|g| \leq 1$ , satisfazendo

$$\phi(f) = \int_X fg \, dm, \quad (3.2)$$

para toda  $f \in \mathcal{D}_0(X)$ .

Como sabemos que  $m(X) \leq 1$  então a fórmula acima é contínua em  $C_c(X)$  e, conseqüentemente, a equação (3.2) é verificada para todas as aplicações  $f \in C_0(X)$ . Com isto, obtemos a representação desejada se definirmos  $\mu$  como

$$d\mu = g \, dm.$$

Dado que  $\|\phi\| = 1$ , a relação (3.2) implica que

$$\int_X |g| \, dm \geq \sup\{|\phi(f)| : f \in C_0(X), \|f\| \leq 1\} = 1.$$

Como  $|g| \leq 1$  então segue que  $m(X) = 1$  e ainda  $|g| = 1$  q.t.p.( $m$ ). Desta forma,  $d|\mu| = |g| \, dm = dm$  e, conseqüentemente,

$$|\mu|(X) = m(X) = 1 = \|\phi\|.$$

□

Note que a medida  $\mu$  produzida pelo teorema anterior é de Radon, já que  $\mu$  é regular, está definida nos borelianos e se  $K$  é um compacto então  $|\mu|(K) \leq |\mu|(X) = 1$ . Desta forma, fica provado um importante resultado que nos permite identificar duas classes de objetos distintos.

**Corolário 3.1.9.** *Se  $X$  é um espaço topológico compacto de Hausdorff então*

$$(\mathcal{D}_0)'(X) = \mathcal{M}(X).$$

*Demonstração.* O resultado segue do teorema anterior aliado ao fato de que se  $X$  é compacto então  $C_c(X) = C_0(X) = \mathcal{D}_0(X)$ . □

**Corolário 3.1.10.** *Seja  $X$  é um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Se existir uma cadeia de compactos*

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \dots$$

*satisfazendo*

$$X = \cup_i K_i$$

*então*

$$(\mathcal{D}_0)'(X) = \mathcal{M}(X).$$

Note que neste segundo caso,  $\mu$  ainda é uma medida de Radon. Entretanto, o espaço  $X$  pode não gozar da propriedade  $\mu(X) < \infty$ .

Quando estamos no caso unidimensional, podemos acrescentar um objeto a mais nesta discussão: as funções de variação limitada. Primeiramente, vamos estabelecer alguns fatos e propriedades desta classe de funções.

## 3.2 Funções de Variação Limitada

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua. A noção de variação, neste caso especial, é precisamente medir o percurso que o ponto  $(0, f(t))$  realiza em  $\mathbb{R}^2$ , a medida que o parâmetro  $t$  varia em  $\mathbb{R}$ . A hipótese de continuidade, entretanto, não é suficiente para garantir que a variação seja finita.

Nesta seção iremos estabelecer algumas propriedades elementares das funções de variação limitada e ainda estudar algumas equivalências úteis entre definições conhecidas.

**Definição 3.2.1.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto e  $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Defina a *variação* de  $f$  como sendo

$$|Df|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ e } |g(x)| \leq 1 \forall x \in \Omega \right\},$$

onde  $\operatorname{div} g = \sum_i \partial g_i / \partial x_i$  e  $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Uma função  $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$  é dita possuir *variação limitada* em  $\Omega$  se  $|Df|(\Omega) < \infty$ . Denotaremos por  $BV(\Omega)$  o subconjunto de  $L^1(\Omega, \mathbb{R})$  formado pelas funções de variação limitada.

Existem várias definições de variação de uma função, especialmente quando se olha o caso unidimensional. O primeiro objetivo desta seção é estabelecer um paralelo entre a definição anterior e a próxima, que é clássica em cursos de Análise da Reta.

**Definição 3.2.2.** Suponha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a < b$  números reais. Defina a variação de  $f$  em  $[a, b]$  como

$$V_a^b f = \sup_{t_i} \left\{ \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| : m \in \mathbb{N} \text{ e } a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}.$$

Nestas condições, a variação de  $f$  é definida como

$$V(f) = \sup_{a < b} V_a^b(f).$$

Finalmente, a função  $f$  é dita ter variação limitada se  $V(f) < \infty$ .

Evidentemente, as duas noções de variação não são equivalentes, haja visto que a segunda é sensível a mudanças pontuais nos valores da função e, a primeira, não. Um contra-exemplo ilustrativo é dado pela função  $f = \mathcal{X}_{\{0\}}$ , isto é,  $f$  é a função característica da origem. Aplicando cada definição em um intervalo contendo a origem temos que

$$|Df|(\Omega) = 0 \text{ e } V_a^b(f) = 2.$$

A questão neste contra-exemplo, como veremos adiante, é a ausência de continuidade pela direita. Para prosseguirmos com o estudo, vamos introduzir uma noção mais fraca de continuidade.

**Definição 3.2.3.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto mensurável. Defina a *densidade* de  $A$  em  $x_0$ , indicada por  $\text{den}_{x_0} A$ , pelo limite

$$\text{den}_{x_0} A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|A \cap B(x_0, t)|}{|B(x_0, t)|},$$

quando este existir.

Segue imediatamente da definição que  $\text{den}_{x_0}$  é uma aplicação não-decrescente, isto é, se  $A \subset B$  são dois conjuntos mensuráveis então  $\text{den}_{x_0} A \leq \text{den}_{x_0} B$ .

**Definição 3.2.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável. Dizemos que  $f$  é *aproximadamente contínua* em  $x_0$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{den}_{x_0} A = \text{den}_{x_0} \mathbb{R} - f^{-1}B(f(x_0), \varepsilon) = 0.$$

Observe que se  $f$  é mensurável então os pontos de continuidade de  $f$  são pontos aproximadamente contínuos da função. De fato, seja  $x_0$  um ponto de continuidade e  $\varepsilon > 0$ . Nestas condições, existe um  $\delta > 0$  satisfazendo a inclusão

$$\mathbb{R} - f^{-1}B(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathbb{R} - B(x_0, \delta).$$

Para concluirmos, resta verificar que  $\text{den}_{x_0} \mathbb{R} - B(x_0, \delta) = 0$ . Este fato segue diretamente de que, para  $t > 0$  suficientemente pequeno, vale

$$(\mathbb{R} - B(x_0, \delta)) \cap B(x_0, t) = \emptyset,$$

o que conclui a demonstração.

O conceito clássico de continuidade requer que, dado  $\varepsilon > 0$ , o conjunto  $A$  fique a uma distância positiva de  $x_0$ . No caso de continuidade aproximada, esta é uma exigência relaxada para “alguns pontos de  $A$  podem estar próximos de  $x_0$ , mas não muitos.”

Apesar do conceito de continuidade em  $x_0$ , mediante mensurabilidade, ser suficiente para garantir continuidade aproximada em  $x_0$ , não é verdade que continuidade pela direita, por exemplo, também seja suficiente. Para ilustrar este fenômeno, considere,  $h = 2\mathcal{X}_{[0, \infty)}$ . É claro que  $h$  é contínua pela direita na origem e, entretanto, para  $\varepsilon = 1$  obtemos  $A = \mathbb{R} - f^{-1}B(f(x_0), \varepsilon) = (-\infty, 0)$ , cujo densidade na origem é  $1/2$ .

Mediante esta discussão, vamos introduzir uma nova noção de variação.

**Definição 3.2.5.** Suponha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $a < b$  números reais. Defina a *variação essencial* de  $f$  em  $[a, b]$  como

$$\text{ess } V_a^b f = \sup_{t_i \in I} \left\{ \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| : m \in \mathbb{N} \text{ e } a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \text{ com } t_i \in I \right\},$$

onde  $I$  é o conjunto de pontos nos quais  $f$  é aproximadamente contínua. Nestas condições, a *variação essencial* de  $f$  é definida como

$$\text{ess } V(f) = \sup_{a < b} \text{ess } V_a^b(f).$$

Finalmente, a função  $f$  é dita ter variação essencial limitada se  $\text{ess } V(f) < \infty$ .

É possível demonstrar que, para funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis vale a fórmula

$$|Df|(\mathbb{R}) = \text{ess } V(f)$$

isto é, foi estabelecida a equivalência entre duas das três definições disponíveis. Para prosseguirmos o estudo destas equivalências, admita que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja integrável e contínua pela direita.

Nestas condições, fixado  $a < b$  números reais, segue, da propriedade do supremo, que

$$V_b^a f \geq \text{ess } V_b^a f,$$

já que o conjunto das partições de  $[a, b]$  contém aquelas formadas apenas por pontos aproximadamente contínuos. Mediante este fato, segue que, se  $V_b^a f = \infty$  então  $\text{ess } V_b^a f = \infty$  e a todas as equivalências ficam provadas neste caso particular.

Suponha agora  $V_b^a f < \infty$ . Neste caso, a aplicação  $f|_{[a, b]}$  é de variação limitada no sentido usual e, conseqüentemente, é descontínua apenas num conjunto enumerável de pontos. Seja  $\varepsilon > 0$  e  $P$  uma partição de  $[a, b]$  tal que todos os pontos de  $P$ , com possível exceção de um  $t_j$ , sejam aproximadamente contínuos.

Considere  $\tilde{t}_j > t_j$  tal que  $f$  seja contínua em  $\tilde{t}_j$ . Note que este ponto pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $t_j$ . Considerando uma nova partição  $\tilde{P}$ , onde  $\tilde{P} = P - \{t_j\} \cup \{\tilde{t}_j\}$ , segue que

$$\sum_P |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_P |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{\tilde{P}} |f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum_{\tilde{P}} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

e, finalmente, tomando  $\tilde{t}_j$  suficientemente próximo de  $t_j$ , para usar a continuidade à direita nas soma

$$|f(t_j) - f(t_{j+1})| + |f(t_j) - f(t_{j-1})| - |f(\tilde{t}_j) - f(t_{j-1})| - |f(\tilde{t}_j) - f(t_{j+1})|$$

temos que

$$V_b^a f \leq \text{ess } V_b^a f + \varepsilon.$$

Fica então provado o

**Lema 3.2.6.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e contínua pela direita. Se  $a < b$  são números reais então*

$$V_b^a f = \text{ess } V_b^a f.$$

Desta forma fica estabelecida a equivalência, sobre condições especiais, das três definições de variação.

Suponha, por um instante, que  $f \in C^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  e  $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Nestas condições

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega} f \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \, dx = \sum_{i=1}^N \left( - \int_{\Omega} g \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx \right) = - \int_{\Omega} g \operatorname{div} f \, dx.$$

Se tomarmos o supremo, com relação à fórmula acima, sobre todas as aplicações  $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  satisfazendo  $|g(x)| \leq 1$  então, fica demonstrado que,

$$|Df|(\Omega) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} f| \, dx,$$

onde  $\operatorname{grad} f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_N)$ . Observe que, com este grau de regularidade, a equivalência entre as definições se torna bem mais simples de ser verificada, já que para  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vale

$$V_a^b(f) = \int_{[a,b]} |f'(t)| \, dt.$$

Façamos uma pequena discussão das propriedades fundamentais das funções reais de variação limitada definidas em um intervalo  $[a, b]$ . Vamos enunciar, e demonstrar, uma caracterização central para estas funções.

**Teorema 3.2.7.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . São equivalentes:*

(i)  $V_a^b(f) < \infty$ ;

(ii) *Existem funções reais  $V^-$  e  $V^+$ , definidas em  $[a, b]$ , não decrescentes, satisfazendo  $f = V^+ - V^-$ .*

*Demonstração.* Para cada  $P$ , partição de  $[a, b]$ , considere  $P^+ = \{t_i \in P : f(t_{i-1}) \leq f(t_i)\}$  e  $P^- = \{t_i \in P : f(t_{i-1}) > f(t_i)\}$ . Observe que, nestas condições, os pontos extremos não estão incluídos em nenhum destes subconjuntos e, ainda, vale a relação  $P = P^+ \cup P^- \cup \{a\} \cup \{b\}$ .

Defina

$$V^+(f, P) = \sum_{P^+} f(t_i) - f(t_{i-1}),$$

$$V^-(f, P) = \sum_{P^-} -f(t_i) + f(t_{i-1}).$$

Finalmente, denote  $V_a^b(f)^+ = \sup V^+(f, P)$  e  $V_a^b(f)^- = \sup V^-(f, P)$ . Observe que os supremos são tomados sobre todas as partições de  $[a, b]$ .



Munidos desta notação, vamos inicialmente verificar que

$$f(x) - f(a) = V_a^x(f)^+ - V_a^x(f)^-.$$

De fato, se  $P$  é uma partição de  $[a, x]$  então  $V^+(f, P) = V^-(f, P) + f(x) - f(a)$ . Aplicando o supremo na equação acima, segue que

$$V_a^x(f)^+ = V_a^x(f)^- + f(x) - f(a).$$

Dado que  $f$  tem variação limitada, todos os termos acima são finitos e, conseqüentemente, segue a identidade desejada.

Suponha  $x < y$  números reais e  $P$  seja uma partição de  $[a, x]$ . Se denotarmos por  $P_y$  o conjunto  $P \cup \{y\}$ , fica claro que  $P^+ \subset (P_y)^+$  e  $P^- \subset (P_y)^-$ . Conseqüentemente, valem as relações  $V^+(f, P) \leq V^+(f, P_y)$  e  $V^-(f, P) \leq V^-(f, P_y)$ . Em outras palavras: as aplicações

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow V_a^x(f)^+, \\ x &\longrightarrow V_a^x(f)^- \end{aligned}$$

são não-decrescentes.

A demonstração da recíproca será omitida. □

**Corolário 3.2.8.** *Se  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $V_a^b(f) < \infty$  então*

- (i)  *$f$  é contínua a menos de um conjunto enumerável;*
- (ii)  *$f$  admite limites laterais: pela esquerda em  $(a, b]$  e, pela direita, em  $[a, b)$ ;*
- (iii)  *$f$  é diferenciável a menos de um conjunto de medida nula.*

*Demonstração.* O corolário segue do fato de que estas propriedades valem para aplicações monótonas. □

A variação de uma função, aplicação definida em  $BV(\Omega)$ , goza de uma espécie de semi-continuidade. Isto é dado pelo

**Lema 3.2.9.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto e  $\{f_i\}$  uma seqüência de funções em  $BV(\Omega)$  que convergem para uma função  $f$  em  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . Nestas condições,*

$$|Df|(\Omega) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} |Df_j|(\Omega).$$

*Demonstração.* Seja  $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  tal que  $|g(x)| \leq 1$ . Nestas condições,

$$\int f \operatorname{div} g \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j \operatorname{div} g \, dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} |Df_j|(\Omega).$$

Se tomarmos o supremos sobre todas as aplicações  $g$  nas condições acima, segue o resultado.  $\square$

Para finalizarmos esta primeira seção, vamos caracterizar os aspectos algébrico-topológicos do espaço das funções de variação limitada.

**Teorema 3.2.10.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto. A aplicação definida por*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{BV} : BV(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^1} + |Df|(\Omega). \end{aligned}$$

*torna  $BV(\Omega)$  um espaço de Banach.*

*Demonstração.* A verificação de que  $\|\cdot\|_{BV}$  é uma norma é simples e será omitida neste texto. Desta forma, nos resta verificar a completude do espaço.

Seja  $\{f_i\}$  uma sequência de Cauchy em  $BV(\Omega)$ . Pela definição da norma, segue que  $\{f_i\}$  também é de Cauchy em  $L^1(\Omega)$  e conseqüentemente, pela completude de  $L^1$ , segue que existe uma aplicação  $f \in L^1(\Omega)$  tal que  $f_i \rightarrow f$  em  $L^1(\Omega)$ .

Como  $\{f_i\}$  é uma sequência de Cauchy em  $BV(\Omega)$  então a sequência  $\|f_i\|_{BV}$  é limitada. Utilizando o lema anterior, segue que  $f \in BV(\Omega)$ . Desta forma, produzimos um excelente candidato a ser limite da sequência  $\{f_i\}$  no espaço das funções de variação limitada. Como já temos a convergência em  $L^1(\Omega)$ , nos resta demonstrar que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |D(f_i - f)|(\Omega) = 0.$$

Suponha  $\varepsilon > 0$  e um inteiro  $n$  tal que

$$j, k \geq n \implies |D(f_j - f_k)|(\Omega) < \varepsilon.$$

Como  $f_k \rightarrow f$  em  $L^1(\Omega)$  então  $f_j - f_k \rightarrow f_j - f$  em  $L^1(\Omega)$  para todo índice  $j$ . Finalmente, pelo lema anterior,

$$|D(f_j - f)|(\Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |D(f_j - f_k)|(\Omega) \leq \varepsilon.$$

□

### 3.3 Espaços de Distribuições $\mathcal{D}'_k$

Como o objetivo deste capítulo é estudar regularidade e unicidade para medidas, supondo que os campos são apenas contínuos, então se faz necessário analisar algumas distribuições com propriedades específicas. Particularmente, consideraremos aquelas obtidas através de dualidade com espaços de funções-testes menos regulares. Por exemplo, aquelas definidas através de medidas de Radon.

Nesta seção considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto.

**Definição 3.3.1.** Denotaremos por  $\mathcal{D}_k(\Omega)$  o subconjunto das funções  $C^k(\Omega, \mathbb{C})$  e de suporte compacto.

É possível dotar  $\mathcal{D}_k(\Omega)$  de uma estrutura vetorial-topológica, não metrizável, onde a noção de convergência é a seguinte:

**Teorema 3.3.2.** *Uma sequência  $(\phi_j)$  de funções em  $\mathcal{D}_k$  converge a zero se, e somente se,*

(i) *existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $\text{supp}(\phi_j) \subset K$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;*

(ii) *para todo inteiro positivo  $m \leq k$ , as derivadas de ordem  $m$  das funções  $\phi_j$  convergem uniformemente a zero.*

**Definição 3.3.3.** Espaços  $\mathcal{D}'_k$  Um elemento do dual de  $\mathcal{D}_k(\Omega)$  é um funcional linear contínuo de  $\mathcal{D}_k(\Omega)$ . O espaço vetorial destas aplicações é denotado por  $\mathcal{D}'_k(\Omega)$ . Convencionaremos escrever  $\langle u, \phi \rangle$  ao invés de  $u(\phi)$ . Denotaremos, eventualmente,  $\mathcal{D}(\Omega)$  por  $\mathcal{D}_\infty(\Omega)$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  por  $\mathcal{D}'_\infty(\Omega)$ .

Ora, mediante o conceito de “ordem de uma distribuição” é possível verificar também que se  $u \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$  então  $u$  é exatamente uma distribuição de ordem no máximo  $k$ .

Assim como ocorre em  $\mathcal{D}_k(\Omega)$  é possível dotar  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de uma estrutura vetorial-topológica onde a noção de convergência é dada pelo

**Teorema 3.3.4.** *Uma sequência  $(u_j)$  de distribuições em  $\mathcal{D}'_k$  converge a  $u \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$  se, e somente se,  $\langle u_j, \phi \rangle$  converge para  $\langle u, \phi \rangle$  em  $\mathbb{C}$  para toda  $\phi \in \mathcal{D}_k$ .*

Demonstremos que todo elemento de  $\mathcal{D}'_k(\Omega)$  é uma distribuição. Em outras palavras:

$$\mathcal{D}'_k(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Para esta verificação, suponha que  $u \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$ . Como  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_k$ ,  $u$  é um funcional linear definido em  $\mathcal{D}$ . Para demonstrarmos a continuidade, é suficiente notar que se  $\phi_j \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$  então  $\phi_j \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}_k(\Omega)$ .

Note que não é verdade que  $\mathcal{D}'(\Omega) = \cup_k \mathcal{D}'_k(\Omega)$ . O contra-exemplo é dado pela distribuição  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , onde

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d^i \phi}{dx^i}(i).$$

É claro que esta distribuição não pode pertencer a  $\mathcal{D}'_k(\mathbb{R})$ , já que  $u$  depende de todas as derivadas da função-teste.

Depois de verificarmos que  $\mathcal{D}'_k(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ , conclui-se que todas as operações e construções que foram introduzidas no primeiro capítulo deste texto se tornam válidas para os funcionais definidos em  $\mathcal{D}_k(\Omega)$ . Existe, apenas, um ponto a ser esclarecido: as operações deixam de ser fechadas e o principal exemplo é dado pelo operador derivação.

**Proposição 3.3.5.** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e  $u \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$  então  $u' \in \mathcal{D}'_{k+1}(\Omega)$ .*

*Demonstração.* Essencialmente, devemos verificar que, se  $\phi_j \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}_{k+1}(\Omega)$  então  $\frac{d}{dx} \phi_j \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}_k(\Omega)$ . Ora, o compacto que engloba os suportes permanece fixado. Já quanto à convergência, se  $\phi^{(i)} \rightarrow 0$  uniformemente para  $i \leq k+1$  então

$$\left( \frac{d}{dx} \phi \right)^{(i)} = \phi^{(i+1)} \rightarrow 0$$

uniformemente para  $i \leq k$ . □

O exemplo dado pelo operador derivação é resultado de um fenômeno mais geral, conforme veremos abaixo.

**Definição 3.3.6.** Sejam  $0 \leq m \leq \infty$  e  $L : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_m(\Omega)$  uma aplicação linear e contínua. Dizemos que a aplicação  $L' : \mathcal{D}_j(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_k(\Omega)$ , linear e contínua, é o *transposto formal* de  $L$  se  $\int (L\phi)\psi \, dx = \int \phi(L'\psi) \, dx$  para quaisquer  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

**Proposição 3.3.7.** *Sejam  $0 \leq m \leq \infty$  e  $L : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_m(\Omega)$  um operador contínuo que admite um transposto formal  $L' : \mathcal{D}_j(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_k(\Omega)$ . Se  $u \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$  então a aplicação  $Lu : \mathcal{D}_j(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $Lu(\phi) = \langle u, L'\phi \rangle$  é uma distribuição em  $\mathcal{D}'_j(\Omega)$ .*

A proposição (3.3.5) pode ser redemonstrada utilizando o resultando anterior. Para isto, considere as seguintes escolhas de operadores

$$\begin{aligned} L : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}(\Omega) \\ f &\longmapsto f', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' : \mathcal{D}_{k+1}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}_k(\Omega) \\ f &\longmapsto -f'. \end{aligned}$$

Façamos uma pausa para identificarmos em qual espaço  $\mathcal{D}'_k(\Omega)$  algumas distribuições se encontram.

No primeiro capítulo, já observamos que  $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  mas, de maneira mais precisa, nota-se que  $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_0(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ , isto é, para cada  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , é possível associar, de modo contínuo e injetivo, uma distribuição  $T_f \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$  pela fórmula

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f\phi \, dx.$$

Com uma variação da demonstração do fato anterior, porém mais técnica, é possível constatar que se  $m \in \mathcal{M}(\Omega)$  então é possível associar, de modo contínuo e injetivo, uma distribuição  $T_m \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$ , onde

$$\langle T_m, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi \, dm.$$

Assim como foi mencionado no Capítulo 1, abandonaremos a notação provisório  $T_f$  e  $T_m$  e as identificações serão feitas sem maiores comentários.

De posse do estudo sobre Medidas de Radon e Funções de Variação Limitada, a próxima etapa desta seção é estabelecer mais algumas identificações que serão úteis.

Seja  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função não-decrescente. Defina  $\mu_f$  nos intervalos da reta pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} \mu_f([a, b)) &= f(b-) - f(a-), \\ \mu_f([a, b]) &= f(b+) - f(a-), \\ \mu_f((a, b)) &= f(b+) - f(a+), \\ \mu_f((a, b]) &= f(b-) - f(a+), \end{aligned}$$

onde  $+$  e  $-$  representam, respectivamente, os limites laterais pela direita e pela esquerda.

É interessante observar que estes casos precisam ser diferenciados dado as possíveis descontinuidades de  $f$ .

Se  $A$  é um conjunto elementar da reta, isto é,  $A$  é uma reunião finita e disjunta de intervalos, então é possível estender  $\mu_f$  para este conjunto pela fórmula

$$\mu_f(A) = \sum_{l=1}^j \mu_f(I_l),$$

onde  $A = \cup_{i=1}^j I_i$  sendo que,  $I_i$  são intervalos da reta tal que se  $p \neq q$  então  $I_p \cap I_q = \emptyset$ .

É conhecido o fato de que a aplicação  $A \mapsto \mu_f(A)$  é aditiva, regular, não-negativa e finita sobre todos os elementares da reta. Desta forma, sabe-se que é possível estender  $\mu_f$  para uma medida regular, não-negativa e definida nos borelianos.

Como toda aplicação monótona admite limites laterais finitos, é evidente que  $\mu_f$  é uma medida de Radon. De fato, se  $K$  é um compacto então existem números reais  $a, b$  satisfazendo  $K \subset [a, b]$  e, conseqüentemente,

$$\mu_f(K) \leq f(b+) - f(a-) < \infty.$$

Com este procedimento fica definida a aplicação  $f \mapsto \mu_f$ , com imagem contida em  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  e definida nas funções não-decrescentes. É interessante observar que esta aplicação não é injetiva, já que as funções  $2\mathcal{X}_{\mathbb{R}^+}$  e  $2\mathcal{X}_{(0,\infty)} + \mathcal{X}_{\{0\}}$  dão origem à mesma medida de Radon:  $2\delta$ .

**Lema 3.3.8.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não-decrescente então existe uma única função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua pela direita, não-decrescente e um conjunto enumerável  $I$ , satisfazendo*

$$f(x) = g(x), \text{ se } x \notin I.$$

*Demonstração.* Para a construção da aplicação  $g$  é suficiente considerar

$$g(x) = \lim_{a \rightarrow x^+} f(a) \tag{3.3}$$

e tomar  $I$  como sendo o conjunto de descontinuidades de  $f$ , que já sabemos que é enumerável. A unicidade segue do fato de que, se  $x \notin I$  então existe uma sequência  $x_n$  convergindo para  $x$  com  $x_n > x$ .  $\square$

Da fórmula (3.3), segue que  $\mu_f = \mu_g$  e, desta forma, a nova aplicação  $f \mapsto \mu_f$  definida

nas funções não-decrescentes e contínuas pela direita é uma restrição da aplicação anterior e, desta vez, se trata de uma bijeção satisfazendo

$$\int \phi \, d\mu_f = - \int f \phi' \, dx, \text{ para toda função-teste } \phi. \quad (3.4)$$

Em outras palavras,

$$\mu_f = \frac{d}{dx} f \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (3.5)$$

Para verificarmos a igualdade (3.4), é suficiente recordar que, se  $\phi$  é uma aplicação  $C^1$  de suporte compacto então

$$\int \phi \, df = - \int f \phi', \, dx$$

onde a primeira integral é de Riemann-Stieltjes e a integral do lado direito é uma integral de Riemann.

Para exemplificarmos o que acabamos de estabelecer durante estas seções, considere a distribuição  $\delta \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ . A esta distribuição, podemos identificar uma medida de Radon (também denotada por  $\delta$ ) definida por

$$\delta(A) = \#(A \cap \{0\}),$$

onde  $\#$  indica cardinalidade. Assim como podemos associar a  $\delta$  uma função contínua pela direita e de variação limitada, denotada por  $H$ , definida por

$$H = \mathcal{X}_{\mathbb{R}^+}.$$

Estes objetos estão unicamente dados pelas relações

$$\left\langle \frac{d}{dx} H, \phi \right\rangle = \langle \delta, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\mu_H = \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\delta.$$

Outro exemplo concreto do que acabamos de estabelecer é o da medida de Lebesgue. Considere a distribuição  $1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ . Podemos identificar, a esta distribuição, a medida de Lebesgue. Ainda mais, podemos associar a 1 uma função contínua pela direita e de variação limitada (em compactos), denotada por  $I$  e definida por

$$I(x) = x.$$

De forma análoga ao caso anterior, estes objetos estão vinculados pelas relações

$$\left\langle \frac{d}{dx}I, \phi \right\rangle = \langle 1, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu_I = \int_{\mathbb{R}} \phi dx.$$

Nestes exemplos, tanto a função quanto a medida de Radon são fáceis de serem encontradas mas, em geral, dada uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$  apenas garantiremos a existência destes objetos.

Repare que, neste aspecto, a notação devida a Leibniz é de muita utilidade. Se  $u \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$  então existem, e são únicas, uma medida de Radon  $m$  e uma função  $F$  contínua pela direita e não-decrescente tal que

$$\left\langle \frac{d}{dx}F, \phi \right\rangle = \langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} \phi dm.$$

Observe que, se denotarmos a medida  $\mu_F$  por  $F$ , notação usual na integral de Riemann-Stieltjes, temos

$$\left\langle \frac{d}{dx}F, \phi \right\rangle = \langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi dF = \int_{\mathbb{R}} \phi dm.$$

Que pode ser reescrita utilizando a notação formal

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi u dx = \int_{\mathbb{R}} \phi \frac{d}{dx}F dx = \int_{\mathbb{R}} \phi dF.$$

Dada esta vantagem operacional, iremos abandonar a notação  $\mu_f$  e utilizaremos, quando não houver risco de confusão, apenas  $f$ .

É claro que podemos estender esta discussão se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua pela direita e de variação limitada. Já que existem funções  $V^+$  e  $V^-$ , não-decrescentes, satisfazendo

$$f = V^+ - V^-.$$

podemos, analogamente ao caso anterior, associar uma medida com sinal  $\mu_f$  pela fórmula

$$\mu_f = \mu_{V^+} - \mu_{V^-}.$$

Para finalizar, considere  $\Omega = Q \times I$  onde  $Q \subset \mathbb{R}^m$  e  $I \subset \mathbb{R}$  são bolas abertas. Dada  $\psi \in \mathcal{D}(Q)$  e  $\phi \in \mathcal{D}(I)$  podemos associar a elas uma aplicação  $\psi \otimes \phi$  definida em  $\Omega$  dada



pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \psi \otimes \phi : Q \times I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto \psi(x)\phi(t). \end{aligned}$$

É importante observar que, para cada  $\psi$  fixada, a aplicação  $\phi \longrightarrow \psi \otimes \phi$  é linear. De fato, se  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(I)$  e  $\lambda$  é um escalar então  $\psi \otimes (\phi_1 + \lambda\phi_2)(x, t) = \psi(x)(\phi_1 + \lambda\phi_2)(t) = \psi(x)\phi_1(t) + \lambda\psi(x)\phi_2(t) = \psi \otimes \phi_1(x, t) + \lambda\psi \otimes \phi_2(x, t)$ .

Além desta propriedade de linearidade, segue que a aplicação  $\psi \otimes \phi$  é uma função-teste em  $\Omega$ . De fato, é simples verificar que

$$\{(x, t) \in Q \times I : (\psi \otimes \phi)(x, t) \neq 0\} = \{x \in Q : \psi(x) \neq 0\} \times \{t \in I : \phi(t) \neq 0\}$$

e conseqüentemente,

$$\text{supp } \psi \otimes \phi = \text{supp } \psi \times \text{supp } \phi.$$

Fixados  $\psi \in \mathcal{D}(Q)$  e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  considere a função  $u_\psi$  dada por

$$\begin{aligned} u_\psi : \mathcal{D}(I) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto \langle u, \psi \otimes \phi \rangle. \end{aligned}$$

Primeiramente, vamos estabelecer que nestas condições a aplicação  $u_\psi \in \mathcal{D}'_0(I)$ . Se  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(I)$  e  $\lambda$  é um escalar então

$$u_\psi(\phi_1 + \lambda\phi) = \langle u, \psi \otimes (\phi_1 + \lambda\phi) \rangle = \langle u, \psi \otimes \phi_1 + \lambda\psi \otimes \phi \rangle = u_\psi(\phi_1) + \lambda u_\psi(\phi_2).$$

Já quanto à continuidade de  $u_\psi$ , é suficiente dizer que

$$|\langle u_\psi, \phi \rangle| = |\langle u, \psi \otimes \phi \rangle| \leq C(u) \|\psi \otimes \phi\|_{C^0} \leq C'(u, \psi) \|\phi\|_{C^0}.$$

## 3.4 Campos Vetoriais Contínuos

Estamos interessados, nesta seção, em analisar campos vetoriais menos regulares do que o exigido pelo Teorema de Aproximação. Suponha que  $\Omega := (\Omega, \mathcal{F})$  seja uma variedade diferenciável de dimensão  $N$ .

**Definição 3.4.1.** Se  $k \in \mathbb{N}$  então dizemos que uma aplicação  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$  é *k-vezes continuamente diferenciável* se, para todo par  $(U, x) \in \mathcal{F}$ , têm-se que a composição  $f \circ x^{-1}$  é  $C^k$  em  $x(U)$ . Denotaremos por  $C^k(\Omega)$  o conjunto destas aplicações.

De maneira análoga ao caso das aplicações suaves, podemos induzir operações algébricas em  $C^k(\Omega)$  através das operações usuais de  $\mathbb{C}$ .

É possível verificar que se  $\Omega$  for um aberto de  $\mathbb{R}^N$  então as aplicações  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis definidas em  $\Omega$  são exatamente as aplicações de classe  $C^k$  no sentido usual. Segue, deste fato, que

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega).$$

**Definição 3.4.2.** Um *campo vetorial complexo contínuo* (ou simplesmente *campo vetorial contínuo*) é uma aplicação  $\mathbb{C}$ -linear  $L : C^1(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  satisfazendo a Regra de Leibniz, isto é,  $L(fg) = L(f)g + L(g)f$ . Denotaremos por  $\mathcal{X}_0(\Omega)$  o conjunto destas aplicações.

Fixada uma carta  $(U, x)$ , a aplicação  $\partial_i$  define um campo suave em  $U$  e que corresponde à noção usual de derivada parcial se  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Ora, lembrando do Capítulo 1 que a definição de  $\partial_i$  é a seguinte:

$$\begin{aligned} \partial_i : C^\infty(U) &\longrightarrow C^\infty(U) \\ f &\longmapsto \partial_i(f \circ x^{-1}) \circ x, \end{aligned}$$

onde o  $\partial_i$  no lado direito representa a  $i$ -ésima derivada parcial em  $\mathbb{R}^N$ .

Observando a definição do campo  $\partial_i$ , nota-se que ele também pode ser entendido como um campo vetorial contínuo, já que se  $f \in C^1(U)$  então  $f \circ x^{-1}$  é uma aplicação  $C^1$  definida em  $x(U)$  e, conseqüentemente,  $\partial_i(f \circ x^{-1})$  é uma aplicação contínua.

É possível obter uma representação local para os campos vetoriais contínuos de maneira análoga ao caso suave. Se  $(U, x)$  é uma carta local e  $L$  é um campo contínuo então vale

$$L(f) = \sum_{j=1}^N (Lx_j) \partial_j f$$

para toda  $f \in C^1(U)$ .

Se  $L \in \mathcal{X}_0(\Omega)$  então é possível associar a ele um vetor tangente à  $\Omega$  em  $p$  dado por  $L_p([f]) = L(f)p$  para toda  $[f] \in C^\infty(p)$ . Também denotaremos, quando não houver risco de confusão,  $L_p$  por  $L|_p$ . Assim como no caso suave, visto no capítulo 1, é possível associar a cada vetor tangente  $v$  um campo contínuo  $L$  tal que  $L|_p = v$ .

**Definição 3.4.3.** Considere, para cada  $p \in \Omega$ , um subespaço vetorial  $V_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$  satisfazendo:

- (i)  $\dim V_p = n$  para todo  $p \in \Omega$ ;

- (ii) Dado  $p_0 \in \Omega$  existem abertos  $U_0$  contendo  $p_0$  e campos vetoriais contínuos  $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{X}(U_0)$  tais que  $\{L_1|_p, \dots, L_n|_p\}$  geram  $V_p$  para todo  $p \in U_0$ .

Nestas condições, diremos que

$$V = \bigcup_{p \in \Omega} V_p$$

é um *subfibrado contínuo do fibrado tangente complexificado*, ou simplesmente, *subfibrado tangente contínuo*. Definiremos  $n$  como o *posto* ou *dimensão* de  $V$  e escreveremos  $\dim V = n$ . O conjunto  $V_p$  será referido como a *fibra* de  $V$  em  $p$ .

A segunda condição é menos exigente que a exigida pela definição de subfibrado tangente dado no Capítulo 1. No próximo exemplo, construiremos um subfibrado tangente contínuo que não satisfaz a condição (1.3.10).

Para esta construção, considere  $\mathbb{R}^2$  como uma variedade diferenciável bidimensional e alguma  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua e que não se anula em nenhum ponto.

Em cada ponto  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , podemos definir um vetor tangente à  $\mathbb{R}^2$  em  $p$  pela relação

$$\frac{\partial}{\partial f(p)}[g] = \langle \text{grad } g, f(p) \rangle,$$

para toda  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Evidentemente, é preciso demonstrar que o número  $\langle \text{grad } g, f(p) \rangle$  independe do representante do germe assim como é necessário verificar os axiomas de vetor tangente. Estes cálculos são simples e serão omitidos aqui.

Para cada ponto  $p \in \mathbb{R}^2$ , considere o seguinte subespaço vetorial de  $\mathbb{C}T_p\mathbb{R}^2$

$$V_p = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial f(p)} \right\}.$$

Se denotarmos por  $V$  o conjunto  $\cup_p V_p$ , segue que  $V$  é um subfibrado tangente contínuo unidimensional, já que

$$L|_p = \frac{\partial}{\partial f(p)},$$

onde  $L$  é um campo contínuo tal que se  $g \in C^1(\Omega)$  então

$$\begin{aligned} L(g) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ p &\longmapsto \langle \text{grad } g, f(p) \rangle. \end{aligned}$$

Observe que, essencialmente, nossa estrutura escolhe, em cada ponto  $p$ , a derivada direcional com relação ao vetor  $f(p)$ . É claro que, se  $f \in C^\infty$  então além de contínuo,

nosso subfibrado seria suave — no sentido da definição (1.3.10). É simples de constatar que, se  $f \in C^0 - C^\infty$  então a estrutura associada satisfaz a definição anterior mas não é regular de acordo com (1.3.10).

**Definição 3.4.4.** Denotaremos por  $\mathcal{R}_0(\Omega)$  o dual do  $C^0$ -módulo  $\mathcal{X}(\Omega)$  e nos referiremos aos seus elementos como *formas diferenciais contínuas de grau um* ou simplesmente *formas diferenciais contínuas*. Ou seja, uma forma diferencial contínua em  $\Omega$  é uma aplicação  $C^0(\Omega)$ -linear  $\omega : \mathcal{X}_0(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$ .

Com esta definição tanto a representação local, quanto o diferencial de uma aplicação de classe  $C^1$ , ficam bem definidas. Nestas condições, todas as operações vistas no capítulo 1 se estendem de maneira natural a este caso menos regular.

Para cada elemento  $\omega \in \mathcal{R}_0(\Omega)$  construiremos um elemento  $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$  pela fórmula  $\omega_p(\xi) = \omega(L)(p)$ , onde  $L \in \mathcal{X}_0(\Omega)$  é tal que  $L_p = \xi$ . Também denotaremos, quando não houver risco de confusão,  $\omega_p$  por  $\omega(p)$  ou  $\omega|_p$ .

Foi também visto que, a uma estrutura tangente podíamos associar uma estrutura cotangente. O procedimento é análogo ao caso menos regular e é enunciado logo abaixo.

**Definição 3.4.5.** Considere, para cada  $p \in \Omega$ , um subespaço vetorial  $W_p \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$  satisfazendo:

- (i)  $\dim W_p = m$  para todo  $p \in \Omega$ ;
- (ii) Dado  $p_0 \in \Omega$  existem abertos  $U_0$  contendo  $p_0$  e formas diferenciais contínuas  $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathcal{R}(U_0)$  tais que  $\{\omega_1|_p, \dots, \omega_m|_p\}$  geram  $W_p$  para todo  $p \in U_0$ .

Nestas condições, diremos que

$$W = \bigcup_{p \in \Omega} W_p$$

é um *subfibrado contínuo do fibrado cotangente complexificado*, ou simplesmente, *subfibrado cotangente contínuo*. Definiremos  $m$  como o *posto* ou *dimensão* de  $W$  e escreveremos  $\dim W = m$ . O conjunto  $W_p$  será referido como a *fibra* de  $W$  em  $p$ .

**Teorema 3.4.6.** *Seja  $V = \bigcup_{p \in \Omega} V_p$  um subfibrado tangente de  $\mathbb{C}T_p\Omega$  e construa, para cada  $p \in \Omega$ , o conjunto*

$$V_p^\perp = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \lambda = 0 \text{ em } V_p\}.$$

*Nestas condições,*

$$V^\perp = \bigcup_{p \in \Omega} V_p^\perp$$

é um subfibrado cotangente e ainda

$$\dim V + \dim W = \dim \Omega.$$

**Definição 3.4.7.** Um subfibrado tangente contínuo  $V$  de  $\mathbb{C}T\Omega$  é uma *estrutura localmente integrável* se, para todo ponto  $p_0 \in \Omega$ , existe uma vizinhança  $U_0$  de  $p_0$  e funções  $Z_1, \dots, Z_m \in C^1(U_0)$ , onde  $\dim V + m = \dim \Omega = N$ , tais que  $V_p^\perp$  é gerado pelos diferenciais  $dZ_1|_p, \dots, dZ_m|_p$ , para todo  $p \in U_0$ . O conjunto  $\{Z_j\}$  é chamado de *conjunto completo de integrais primeiras*.

Ou, equivalentemente,

**Definição 3.4.8.** Um subfibrado tangente contínuo  $V$  é uma estrutura localmente integrável se, para todo  $p_0 \in \Omega$  e campos contínuos  $L_1, \dots, L_n$  que geram  $V$  em uma vizinhança  $U_0$  de  $p_0$ , existem uma vizinhança  $V_0 \subset U_0$  de  $p_0$  e funções continuamente diferenciáveis  $Z_1, \dots, Z_m$  tais que:

- (i)  $dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \neq 0$  em  $V_0$ ;
- (ii)  $L_j Z_k = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ .

Da mesma forma que ocorre com o caso suave, verificar se uma estrutura tangente contínua é localmente integrável é o mesmo que procurar por um conjunto maximal de soluções continuamente diferenciáveis, não-triviais e independentes que satisfaçam o sistema de equações homogêneas determinadas pelas seções de  $V$ .

Para finalizar esta seção, vamos assumir que  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathcal{L}$  é um subfibrado tangente contínuo  $n$ -dimensional localmente integrável. Seja  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  um conjunto completo de integrais primeiras de classe  $C^1$ .

Por simplicidade, suponha também que  $L_1, \dots, L_n$  são campos contínuos que geram  $\mathcal{L}$  globalmente. Da representação local, segue que os campos contínuos  $L_j : C^1(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  são aplicações contínuas. Ora, pelo resultado visto no teorema (1.3.4), que admite um análogo para campos contínuos, segue que  $L_j(\mathcal{D}(\Omega)) \subset \mathcal{D}_0(\Omega)$ .

Desta forma, a função  $L_j$  pode ser vista mediante uma restrição como uma aplicação contínua  $L_j : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_0(\Omega)$ . Em uma vizinhança  $U_0$ , em torno de um ponto  $p$  arbitrário, sabemos que  $L_j$  admite um transposto formal, já que nesta vizinhança o campo  $L_j$  é a combinação linear de derivadas parciais. Por simplicidade, assumamos que  $L_j$  admita um transposto formal em todo o aberto  $\Omega$ .

Observe que o transposto de um campo não é necessariamente um campo. O exemplo mais simples é dado por

$$x \frac{d}{dx}$$

que tem transposto

$$-x \frac{d}{dx} - 1.$$

Para contornarmos esta situação, considere um campo  $L$  definido em  $\Omega$  representado em sua forma local e  $L^t$  seu transposto formal. Utilizando integração por partes, verifica-se que existe uma aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , cuja regularidade é no mínimo um grau menor que o de  $L$ , satisfazendo

$$L^t = -L + f.$$

Desta forma, se existe uma aplicação  $\Delta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  suficientemente regular, que não se anula em nenhum ponto e que satisfaz  $L^t \Delta = L \Delta = 0$  então  $L^t = -L$ . Mediante este fato, se existir uma aplicação  $\Delta$  tal que  $L^t \Delta = 0$  então verifica-se que tanto  $(\Delta L)$  quanto  $(\gamma L)^t$  são campos satisfazendo

$$(\gamma L)^t = -\gamma L.$$

---

Regularidade e Unicidade de Soluções em  $\mathcal{D}'_0(\Omega)$

---

### 4.1 Regra de Leibnitz para Soluções

Como a natureza dos problemas que vamos estudar é local, é suficiente considerar  $\Lambda$  é um aberto de  $\mathbb{R}^N$  e considerar  $\mathcal{L}$  uma subfibrado tangente contínuo localmente integrável em  $\Lambda$  de dimensão  $n < N$ , munido de um conjunto completo  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  de integrais primeiras de classe  $C^1$ .

Como no caso suave, vamos considerar um sistema local de coordenadas com propriedades especiais. Se  $p \in \Lambda$  então existem coordenadas definidas em uma vizinhança  $\Omega$  de  $p$ , denotadas por  $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n$ , de classe  $C^1$ , se anulando em  $p$  e onde o conjunto completo de integrais primeiras é expresso por

$$Z_j(x, t) = x_j + i\phi_j(x, t) \quad j = 1, \dots, m$$

com  $\phi_j$  reais se anulando na origem. Pela continuidade, vamos assumir que as aplicações  $\phi_j$  permanecem pequenas nesta vizinhança.

Reduzindo  $\Omega$  se necessário, vamos assumir que a matriz  $Z_x$  é não singular em todo conjunto. Escreva  $\lambda_{jk}$  como abaixo

$$\lambda_{jk}(x, t) = -i \sum_{l=1}^m u_{lk} \frac{\partial \phi_l}{\partial t_j},$$

onde  $u_{lk}$  é dado como no capítulo anterior. Desta forma, segue que

$$\frac{\partial Z_l}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial Z_l}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \text{ e } l = 1, \dots, m$$

o que em outros termos, significa que os campos

$$\frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

são geradores locais de  $\mathcal{L}$  em  $\Omega$ .

Estes geradores, entretanto, ainda não serão o que nós utilizaremos. Se tomarmos a equação (4.1) e a multiplicarmos por  $\det Z_x$ , temos um novo conjunto de geradores  $L_j$

$$\det Z_x \frac{\partial}{\partial t_j} + \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad (4.2)$$

com a vantagem de serem anti-simétrico, isto é,  $L_j|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  admitem um transposto dado por  $-L_j$ . Mais precisamente, temos que

$$\int (L_j u) v \, dx \, dt = - \int u L_j v \, dx \, dt, \quad j = 1, \dots, m \text{ e } u, v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Suponha  $u \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$  satisfazendo o sistema de equações dada por

$$L_j u = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Ora, também sabemos que  $u$  é uma medida e, justamente por este fato, gostaríamos de encontrar uma noção equivalente para o fato acima em termos da medida.

Antes de enunciarmos esta definição e estabelecermos a equivalência com (4.3), façamos uma pausa para um comentário. Se  $\omega$  for uma  $N$ -forma de classe  $C^0$  definida em um aberto  $U \subset \Omega$  de suporte compacto então existe uma aplicação  $\phi \in \mathcal{D}_0(\Omega)$  satisfazendo a relação

$$w = \phi \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m$$

e, neste caso, se  $u \in \mathcal{M}(\Omega)$  escreveremos  $\langle u, \omega \rangle$  para indicar  $\int \phi \, du$ . Note que, como nosso sistema de coordenadas está fixado, esta operação fica bem definida.

**Definição 4.1.1.** Dizemos que uma medida  $u \in \mathcal{M}(\Omega)$  é uma solução homogênea de  $\mathcal{L}$  se,



dado  $p$ , existe um conjunto completo de integrais primeiras continuamente diferenciáveis  $Z_1, \dots, Z_m$ , definidas próxima de  $p$ , satisfazendo

$$\langle u, dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d\omega \rangle = 0$$

para toda  $(n - 1)$ -forma de classe  $C^1$  com suporte compacto. Denotaremos tal fato por  $\mathcal{L}u = 0$ .

Observe que o símbolo  $\mathcal{L}u = 0$  independe do conjunto de integrais primeiras escolhidas para verificar que  $u$  é uma solução homogênea. Desta forma, vamos verificar que se um conjunto satisfaz a definição anterior então qualquer outro possui a mesma propriedade.

Seja  $W_1, \dots, W_m$  um outro conjunto de integrais primeiras de  $\mathcal{L}$  de classe  $C^1$ . Pelo Teorema de Aproximação, existem funções holomorfas  $F_k^j$  tal que para  $j = 1, \dots, n$  tem-se que

$$W_j = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k^j(Z_1, \dots, Z_m) \text{ na topologia de } C^1.$$

Consequentemente,  $dW_1 \wedge \dots \wedge dW_m = \lambda dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m$ , para alguma função contínua  $\lambda$ , que satisfaz, em  $\mathcal{D}_0$ ,  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(Z_1, \dots, Z_m)$ , com  $H_k$  holomorfas. Como este processo pode ser revertido, isto é, expressando  $dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m$  como múltiplo de  $dW_1 \wedge \dots \wedge dW_m$ , temos que  $\lambda \neq 0$  em uma vizinhança de  $p$ .

Desta forma, se  $\omega$  é uma  $(n - 1)$ -forma de classe  $C^1$  de suporte compacto então

$$H_k(Z) dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d\omega = dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d(H_k(Z)\omega),$$

onde  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  e consequentemente

$$\begin{aligned} \langle u, dW_1 \wedge \dots \wedge dW_m \wedge d\omega \rangle &= \langle u, \lambda dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \rangle \\ &= \langle u, \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(Z_1, \dots, Z_m) dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u, H_k(Z_1, \dots, Z_m) dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u, dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d(H_k(Z)\omega) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sendo a última igualdade verdadeira pelo fato de que  $\langle u, dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d\omega \rangle = 0$  para toda  $(n - 1)$ -forma de classe  $C^1$  com suporte compacto.

Vamos nos direcionar para verificar que a definição (4.1.1) é equivalente com (4.3).

Se definirmos, para  $v \in \mathcal{D}_1(\Omega)$ , a forma

$$\omega = v dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_n,$$

onde o circunflexo indica a omissão do termo indicado, podemos expressar  $dv$  na seguinte base  $dt_1, \dots, dt_n, dZ_1, \dots, dZ_m$ . Para isto, vamos utilizar a representação (2.1) do capítulo anterior. Temos que

$$dv = \sum_{l=1}^n \tilde{L}_l v dt_l + \sum_{k=1}^m M_k v dZ_k$$

onde  $\tilde{L}_l$ , são os campos canônicos definidos naquele capítulo.

Prosseguindo o cálculo, temos que

$$d\omega = (-1)^{j-1} \tilde{L}_j v \wedge (dt_1 \wedge \dots \wedge dt_j \wedge \dots \wedge dt_n) + \sum_{k=1}^m M_k v dZ_k \wedge (dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_j \wedge \dots \wedge dt_n)$$

e concluímos que

$$dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d\omega = (-1)^{j-1} \frac{1}{\det Z_x} L_j v dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

O que em termos da base canônica, se expressa como

$$dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \wedge d\omega = (-1)^{j-1} L_j v dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n. \quad (4.4)$$

Mediante a fórmula anterior, fica demonstrado a equivalência entre (4.1.1) e (4.3) para o caso de uma distribuição que também é uma medida de Radon.

Suponha, por ora, que  $n = 1$  e que  $\mathcal{L}$  seja localmente gerado pelo seguinte campo contínuo

$$L = \det Z_x \frac{\partial}{\partial t} + \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Considere  $u \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$  satisfazendo a condição  $Lu = 0$ .

A próxima etapa será verificar que  $\det Z_x u$  pode ser identificado com uma função de  $t$  com imagem em  $\mathcal{D}'(Q_R)$ , para alguma bola  $Q_R$  suficientemente pequena em  $\mathbb{R}^m$ . Como nosso problema é de natureza local, será suficiente restringirmos nossa atenção para uma vizinhança  $\Omega_R$  da forma  $\Omega_R = Q_R \times I_R$  onde  $I_R = (-R, R) \subset \mathbb{R}$ .

Fixada  $\psi \in \mathcal{D}(Q_R)$  e, utilizando a notação dada no capítulo anterior, defina as distribuições em  $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$  de acordo com as fórmulas

$$V := V(u, \psi) = (\det Z_x u)_\psi \text{ e}$$

$$W := W(u, \psi) = - \sum_{k=1}^m (\det Z_x \lambda_k u)_{\psi_{x_j}}.$$

Vamos verificar que  $V$  e  $W$  estão relacionados pela fórmula

$$\frac{d}{dt} V = W \text{ em } \mathcal{D}'(I_R).$$

De fato, se tomarmos  $\phi \in \mathcal{D}(I_R)$  então segue que

$$\langle W, \phi \rangle = \left\langle - \sum_{k=1}^m (\det Z_x \lambda_k u)_{\psi_{x_j}}, \phi \right\rangle = \left\langle u, - \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_k (\psi_{x_j} \otimes \phi) \right\rangle$$

Como  $Lu = 0$  e  $L' = -L$  temos que

$$\left\langle u, - \left( \det Z_x \frac{\partial}{\partial t} + \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (\psi \otimes \phi) \right\rangle = 0.$$

Usando os fatos

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\psi \otimes \phi) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \otimes \phi \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} (\psi \otimes \phi) = \psi \otimes \frac{d\phi}{dt}$$

segue que

$$\langle W, \phi \rangle = \left\langle u, - \det Z_x \psi \otimes \left( \frac{d}{dt} \phi \right) \right\rangle = \left\langle (\det Z_x u)_{\psi}, - \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} V, \phi \right\rangle,$$

o que conclui a demonstração da relação.

Mediante as identificações que foram estabelecidas no capítulo anterior segue que, fixada  $\psi$ , existe uma função  $f_\psi$ , contínua pela direita e de variação limitada em  $I_R$ , tal que

$$\langle V, \phi \rangle = \int f_\psi(t) \phi(t) dt. \quad (4.5)$$

Desta forma, fica estabelecida uma aplicação  $\psi \mapsto f_\psi$  que é contínua e linear. A verificação destas afirmações é simples e decorrem do fato de que  $V$  é uma distribuição e de que  $f_\psi$  é unicamente determinada.

Mediante estes fatos, segue que para cada  $t \in \mathbb{R}$  a aplicação  $\psi \mapsto f_\psi(t)$  é uma distribuição e sua imagem será denotada por  $\langle f(t), \psi \rangle$  para  $\psi \in \mathcal{D}'_1(Q_R)$ . Desta forma, entendemos  $f$  como uma aplicação definida em  $\mathbb{R}$  com imagem nas distribuições.

---

#### 4.1. REGRA DE LEIBNITZ PARA SOLUÇÕES

Esta notação é particularmente útil no caso em  $f$  é uma função de duas variáveis e, neste caso,  $f(t)$  será a distribuição associada a  $f|_{Q_R \times \{t\}}$ . Ora, se ainda  $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$  é um conjunto limitado com a métrica do sup e ainda  $t \in [-R, R]$  então a variação de  $f_\psi$  é limitada por um constante dependente de  $R$  e  $\mathcal{B}$ . Desta forma,

$$\langle \det Z_x u, \phi \otimes \psi \rangle = \int \langle f(t), \psi \rangle \phi(t) dt, \quad \phi \in \mathcal{D}(I_R), \psi \in \mathcal{D}(Q_R).$$

Suponha que, para certa  $\eta \in \mathcal{D}_1(\Omega_R)$ , existam um natural  $p$  e funções  $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{D}_1(I_R)$  e  $\psi_1, \dots, \psi_p \in \mathcal{D}_1(Q_R)$  satisfazendo

$$\eta = \sum_{i=1}^p \psi_i \otimes \phi_i. \tag{4.6}$$

Nestas condições, é verdade que

$$\langle \det Z_x u, \eta \rangle = \int \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle dt. \tag{4.7}$$

De fato,

$$\langle \det Z_x u, \eta \rangle = \sum_{i=1}^p \langle \det Z_x u, \psi_i \otimes \phi_i \rangle = \sum_{i=1}^p \int \langle f(t), \psi_i \rangle \phi_i(t) dt.$$

Utilizando a identidade

$$\eta|_{Q_R \times \{t\}} = \sum_{i=1}^p (\psi_i \otimes \phi_i)|_{Q_R \times \{t\}} = \sum_{i=1}^p \psi_i \phi_i(t)$$

segue que

$$\int \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle dt = \sum_{i=1}^p \int \langle f(t), \psi_i \phi_i(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^p \int \langle f(t), \psi_i \rangle \phi_i(t) dt.$$

Como o conjunto das aplicações satisfazendo (4.6) é denso em  $\mathcal{D}(\Omega_R)$  e ambos os lados de (4.7) expressam aplicações contínuas naquele espaço, segue que

$$\langle \det Z_x u, \eta \rangle = \int \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle dt, \quad \eta \in \mathcal{D}(\Omega_R). \tag{4.8}$$

Vamos verificar que a aplicação  $F$  dada por

$$F(t) = \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle = f_{\eta|_{Q_R \times \{t\}}}(t)$$

determina uma distribuição.

De fato, sabemos que existe uma constante  $C > 0$  tal que para toda  $\eta \in C^1(\Omega_R)$  vale que  $|F(t)| \leq C \|\eta\|_{C^1}$ . Também temos que  $F$  é de variação limitada e, conseqüentemente, mensurável. Fica então concluído que  $F$  é localmente integrável e portanto determina uma distribuição.

Nosso próximo objetivo é estudar, com  $\eta \in C^1(\Omega_R)$ , a Regra de Leibnitz para

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle = \frac{d}{dt} F(t).$$

É salutar considerarmos um caso mais simples e que já foi abordado neste texto. Considere  $\eta \in C^1(\Omega_R)$  uma função que seja independente de  $t$  e que satisfaça  $\eta(x, t) = \psi(x)$  para alguma  $\psi \in \mathcal{D}_1(Q_R)$ . Nestas condições, vamos verificar que

$$\frac{d}{dt} f_\psi = W \text{ em } \mathcal{D}'_1(I_R).$$

De fato, se  $\phi \in \mathcal{D}_1(I_R)$  então

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} f_\psi, \phi \right\rangle &= \left\langle f_\psi, -\frac{d\phi}{dt} \right\rangle \\ &= - \int f_\psi(t) \frac{d\phi}{dt}(t) dt = - \int \langle f(t), \psi \rangle \frac{d\phi}{dt}(t) dt \\ &= - \int \left\langle f(t), \psi \frac{d\phi}{dt}(t) \right\rangle dt = - \int \left\langle f(t), \left( \psi \otimes \frac{d\phi}{dt} \right)_{|_{Q_R \times \{t\}}} \right\rangle dt \\ &= - \left\langle \det Z_x u, \psi \otimes \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = - \left\langle (\det Z_x u)_\psi, \frac{d\phi}{dt} \right\rangle \\ &= - \left\langle V, \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \langle W, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Como construímos  $f$  de modo que para cada  $t \in \mathbb{R}$  a imagem  $f(t)$  seja uma distribuição em  $\mathcal{D}'_1(\Omega_R)$ , também escreveremos

$$W(t) := W(u, \psi, t) = \frac{d}{dt} \langle f(t), \psi \rangle.$$

Vamos agora prosseguir nosso estudo analisando o caso em que  $\eta \in \mathcal{D}_1(\Omega_R)$  é dada por

$$\eta(x, t) = \psi(x)\phi(t).$$

Neste caso especial, a Regra de Leibnitz é expressa por

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle = \frac{d\phi}{dt}(t) \langle f(t), \psi \rangle + \phi(t)W. \quad (4.9)$$

De fato, é suficiente observar que

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle = \frac{d}{dt} (\langle f(t), \psi \rangle \phi(t))$$

em seguida aplicar a Regra de Leibnitz para distribuições e concluir utilizando a identidade que acabamos de verificar.

O objetivo é encontrar uma outra representação para a equação funcional (4.9) que não dependa das aplicações  $\phi$  e  $\psi$ , mas apenas de  $\eta$ . Isto é fundamental, já esta nova fórmula poderá se mostrar verdadeira para quaisquer aplicações em  $\mathcal{D}_1(\Omega_R)$  e ser então a Regra de Leibnitz que estamos querendo encontrar para  $F$ .

Observe que, se  $\eta(x, t) = \psi(x)\phi(t)$  e  $h \in \mathcal{D}_0(I_R)$  então temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \left\langle (\det Z_x u) \frac{\partial \eta}{\partial t}, h \right\rangle &= \int f_\psi(t) \frac{d\phi}{dt}(t) h(t) dt, \\ \left\langle (\lambda_k \det Z_x u) \frac{\partial \eta}{\partial x_k}, h \right\rangle &= \left\langle \lambda_k \det Z_x u, \phi h \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ora, estas relações são suficientes para verificar que a equação dada em (4.9) é equivalente à relação abaixo se  $\eta(x, t) = \psi(x)\phi(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle = (\det Z_x u) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{k=1}^m (\lambda_k \det Z_x u) \frac{\partial \eta}{\partial x_k}. \quad (4.10)$$

A vantagem da representação anterior é que ela pode ser verificada para uma aplicação  $\eta \in \mathcal{D}_1(\Omega_R)$  qualquer. Na verdade, se aplicarmos a mesma técnica vista anteriormente, isto é, validarmos (4.10) para aplicações da forma

$$\eta = \sum_{i=1}^p \psi_p \otimes \phi_p$$

e finalmente notarmos que ambos os lados da equação são contínuas então teremos que a equação funcional acima é, na verdade, a Regra de Leibniz procurada.

Observe que, particularmente, é possível notar por (4.10) que  $F$  é uma distribuição dada por uma medida de Radon e, conseqüentemente,  $t \mapsto \langle f(t), \eta|_{Q_R \times \{t\}} \rangle$  é na verdade uma função de variação limitada.

Lembre-se que para  $t_0 \in I_R$ ,  $\det Z_x u$  admite um traço em  $t = t_0$ , isto é, existe uma noção bem definida para a restrição daquela distribuição. Deste ponto em diante, vamos indicar este traço por  $(\det Z_x)(x, t_0)u(x, t_0)$ . De acordo com as identificações já estabelecidas, segue que esta restrição é dada por  $f(t_0)$  e, conseqüentemente, satisfaz a continuidade lateral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(t_0 + \varepsilon) = f(t_0).$$

## 4.2 Regularidade e Unicidade para Medidas

Façamos uma pausa para relembrar os operadores básicos usados na demonstração do Teorema de Aproximação. Considerando  $u$  uma medida de Radon que satisfaz  $\mathcal{L}u = 0$  e  $\tau > 0$  defina

$$E_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} u(x', 0) h(x') \det Z_x(x', 0) dx',$$

$$G_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx',$$

$$R_\tau u(x, t) = G_\tau u(x, t) - E_\tau u(x, t).$$

Neste caso, é importante observar que a escolha da função  $h$ , assim como os esclarecimentos sobre a notação feitos no Capítulo 2, se aplicam de maneira idêntica ao nosso novo caso.

No caso clássico, quando  $L$  e  $Z$  eram suaves, o que foi feito foi verificar que  $R_\tau u(x, t) \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow \infty$  em uma vizinhança da origem. Nosso objetivo é apresentar uma modificação do argumento que se mostre válido na situação presente.

Para  $\xi \in \mathbb{C}^m$  e  $t \in I_R$  escreva

$$\tilde{G}_\tau u(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[\xi - Z(x',t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx',$$

Mediante o que já provamos, podemos também representar este operador por

$$\tilde{G}_\tau u(\xi, t) = \left\langle f(t), e^{-\tau[\xi - Z(x', t)]^2} u(x', t) h(x') \right\rangle,$$

ou seja, a aplicação  $t \mapsto \tilde{G}_\tau u(\xi, t)$  é passível de derivação com a Regra de Leibnitz que acabamos de construir. Considere também

$$\tilde{R}_\tau u(\xi, t) = \tilde{G}_\tau u(\xi, t) - \tilde{G}_\tau u(\xi, 0).$$

Desta forma, temos a seguinte relação entre os operadores  $R_\tau$  e  $\tilde{R}_\tau$

$$R_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \tilde{R}_\tau u(Z(x, t), t).$$

Suponha que  $F : I_R \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de variação limitada com derivada  $\mu$ . Neste caso, temos que  $\mu$  é uma medida de Radon satisfazendo a relação

$$\mu((a, b]) = F(b+) - F(a+),$$

com  $-R < a < b < R$ .

Tomando  $F(t) = \tilde{G}_\tau u(\xi, t)$  segue que,

$$\tilde{R}_\tau u(\xi, t) = F(t) - F(0) = \int_{0..t} F'(t') dt',$$

onde o símbolo  $\int_{0..t} H dt'$  deve ser entendido como  $\int_{(0,t]} H dt'$  se  $t \geq 0$  e  $-\int_{(t,0]} H dt'$  se  $t < 0$ . Utilizando a Regra de Leibnitz vista para  $F$ , segue a identidade

$$\tilde{R}_\tau u(\xi, t) = \int_{0..t} \left\langle (\det Z_{x'u}) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x', t') + \sum_{k=1}^m (\lambda_k \det Z_{x'u}) \frac{\partial \eta}{\partial x'_k}(x', t'), h \right\rangle dt',$$

onde  $\eta(x', t') = e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2}$ . Utilizando a representação através do sinal de integral obtemos a identidade

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\tau u(\xi, t) &= \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'u}) \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} h(x') \right) dx' dt' \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\lambda_k \det Z_{x'u}) \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} h(x') \right) dx' dt' \end{aligned}$$



Utilizando a Regra de Leibnitz para Aplicações segue que,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\tau u(\xi, t) &= \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'} u) \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} \right) h(x') dx' dt' \\ &+ \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'} u) \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} \right) h(x') dx' dt' \\ &+ \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'} u) \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h(x')}{\partial x'_k} e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} dx' dt'\end{aligned}$$

Para que possamos trabalhar com a igualdade acima de maneira mais apropriada, lembre-se que a aplicação  $(x', t') \mapsto e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2}$  anula o campo  $L$ , o que em outras palavras significa

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \right) e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} = 0.$$

Utilizando a identidade segue que,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\tau u(\xi, t) &= \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'} u) \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} \right) h(x') dx' dt' \\ &- \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'} u) \frac{\partial}{\partial t'} \left( e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} \right) h(x') dx' dt' \\ &+ \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} (\det Z_{x'} u) \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h(x')}{\partial x'_k} e^{-\tau[\xi - Z(x', t')]^2} dx' dt'\end{aligned}$$

Finalmente, para  $\xi = Z(x, t)$ , temos

$$R_\tau u(x, t) = \left( \frac{\tau}{\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{0..t} \int_{\mathbb{R}^m} u(x', t') Lh(x', t') e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t')]^2} dx' dt', \quad (4.11)$$

que é uma extensão da expressão clássica para  $R_\tau u$ .

A próxima etapa é estudar o comportamento de  $R_\tau$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Para isto, escolha  $\delta > 0$  tal que  $h(x') = 1$  se  $|x'| \leq 2\delta$ . Para  $(x, t)$  suficientemente pequenos (com  $|x| \leq 1$ ), a exponencial em  $R_\tau u$  pode ser majorada, para alguma constante  $c > 0$  apropriada, por  $e^{-c\tau}$ . O que nos leva a concluir que  $R_\tau u \rightarrow 0$  uniformemente em uma vizinhança  $\Omega$  da origem. Por outro lado, já sabemos que  $G_\tau u \rightarrow u$  como distribuição, acarretando que  $E_\tau u \rightarrow u$  em  $\mathcal{D}'_0(\Omega)$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Assuma, por um instante, que o traço  $\det Z_x(x, 0)u(x, 0) = 0$ . Neste caso,  $E_\tau u \equiv 0$  e,

consequentemente,  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ . Suponha agora que o limite lateral esquerdo seja nulo, isto é,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} Z_x(x, t)u(x, t) = 0$ . Neste caso, a fórmula  $u([b, 0)) = F(0-) - F(b-)$  para  $b < 0$  implica que  $\det Z_x(x, 0)u(x, b-) = 0$ .

Dado que  $F$  é contínua a menos de um conjunto enumerável, segue que este  $b$  pode ser escolhido arbitrariamente próximo da origem. Desta forma, segue que  $F$  é contínua em  $b$  e, desta forma, conclui-se que  $\det Z_x(x, b)u(x, b) = 0$ . Ora, podemos usar o traço de  $\det Z_x u$  em  $b$  para definir o operador  $E_\tau u$  e, consequentemente, concluir que  $u \equiv 0$  em uma vizinhança da origem.

Esta discussão esclarece que uma função de variação limitada  $f(t)$  satisfazendo

$$\langle \det Z_x u, \phi \otimes \psi \rangle = \int \langle f(t), \psi \rangle \phi dt, \quad \phi \in \mathcal{D}(I_R), \psi \in \mathcal{D}(Q_R),$$

não pode admitir um salto em  $t = t_0$  a não ser que  $f(t_0+)f(t_0-) \neq 0$ .

Vamos concluir esta seção enunciando e demonstrando o teorema central deste capítulo.

Sem perda de generalidade, dado um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$  e uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , o conjunto  $\Sigma(f) = \{(x, t) \in U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^N : t = f(x)\}$  é uma *hipersuperfície de classe  $C^1$*  de  $\mathbb{R}^N$ . Se considerarmos um ponto  $p = (x, f(x)) \in \Sigma(f)$  e um campo contínuo  $L$ , definido em  $U \times \mathbb{R}$ , por

$$L = \sum_{k=1}^N a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

então diremos que  $\Sigma(f)$  é *não-característico* com respeito a  $L$  em  $p$  se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k(p) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \neq a_N(p).$$

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $\mathcal{V}$  uma variedade diferenciável,  $\mathcal{L}$  um subfibrado tangente contínuo localmente integrável de  $\mathbb{C}T(\mathcal{V})$ ,  $u \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$  satisfazendo  $\mathcal{L}u = 0$  e  $\Sigma$  uma hipersuperfície de classe  $C^1$ , não característica com respeito a  $\mathcal{L}$ .*

*Se  $p \in \Sigma$  e  $N = N(p)$  é um vetor normal unitário com respeito à  $\Sigma$  em  $p$  então existe uma função contínua  $D$ , que não se anula, definida em uma vizinhança  $\Omega$  de  $p$  satisfazendo:*

(i)  *$Du$  admite um traço  $T_\tau(Du)$  definido em todas as translações  $(\tau N + \Sigma) \cap \Omega$  na direção de  $N$ ;*

(ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T_{(\tau+\varepsilon)}(Du) = T_\tau(Du)$ ;

(iii) se  $T_0(Du) = 0$  em  $\Sigma \cap \Omega$  então  $u$  é identicamente nula em uma vizinhança de  $p$ .

*Demonstração.* Sejam  $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n$  coordenadas locais de classe  $C^1$  definidas em uma vizinhança  $\Omega$  de  $p$  e  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  um conjunto de integrais primeiras, também definidas em  $\Omega$ , continuamente diferenciáveis satisfazendo

- (i)  $x_j(p) = t_k(p) = 0$ , para  $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ ;
- (ii)  $Z_j(x, t) = x_j + i\phi_j(x, t)$ , para  $1 \leq j \leq m$ ;
- (iii)  $\partial\phi_j/\partial x_k(0, 0) = 0$ , para  $1 \leq j, k \leq m$ .

Sem perda de generalidade, assumamos que  $\Sigma \cap \Omega$  é dado por  $t_1 = 0$  e que a direção definida por  $N$  coincida com a dada pelo eixo  $t_1$ .

Fixada estas coordenadas, segue que o teorema foi provado se  $n = \dim \mathcal{L} = 1$  tomando-se  $D = \det Z_x$ . Desta forma, se  $n > 1$  procederemos da seguinte forma: descarte os campos  $L_2, \dots, L_n$  e considere novas coordenadas locais dadas por

$$\begin{aligned} t' &= t_1; \\ x'_k &= x_k, \text{ para } 1 \leq k \leq m; \\ x'_{m+k} &= t_{k+1}, \text{ para } 1 \leq k \leq n-1; \end{aligned}$$

Considere também novas integrais primeiras dadas por

$$\begin{aligned} Z_{m+1}(x', t') &= x'_{m+1}, \\ &\vdots \\ Z_{m+n-1}(x', t') &= x'_{m+n-1}. \end{aligned}$$

O conjunto de integrais primeiras  $\{Z_1, \dots, Z_m, Z_{m+1}, \dots, Z_{m+n-1}\}$  induz uma estrutura localmente integrável  $\tilde{\mathcal{L}}$  de dimensão 1. Procedendo como anteriormente, segue o resultado para  $\tilde{\mathcal{L}}$  e finalmente conclui-se o resultado do teorema para  $\mathcal{L}$ .  $\square$

## Nota

Depois desta discussão, fica evidenciada a validade do Teorema de Aproximação para campos contínuos. Uma leitura mais atenta da demonstração dada na primeira parte deste

texto nos leva a concluir que um ingrediente fundamental foi a definição do traço da solução, fato que discutimos nesta seção.

Lembre-se que quando os campos são apenas contínuos entenderemos como possíveis soluções as medidas de Radon. Nestas condições, enunciaremos uma técnica para aproximar medidas por soluções mais suaves.

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $\mathcal{L}$  um subfibrado tangente contínuo localmente integrável de  $\mathbb{C}T\mathcal{V}$ . Seja  $u \in \mathcal{D}'_0$  uma medida de Radon tal que  $\mathcal{L}u = 0$ . Então para cada  $p \in \mathcal{V}$ , existe uma vizinhança  $U$  e uma sequência de polinômios  $P_k$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k \circ Z = u$ , onde  $Z = (Z_i)$  constitui um conjunto de integrais primeiras continuamente diferenciáveis e o lim ocorre na topologia de  $\mathcal{D}'_0(\Omega)$ .*

---

## Referências Bibliográficas

---

- [Fer02] P. J. Fernandez. *Medida e Integração*. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [Giu84] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, Boston, 1984.
- [Hou79] J. Hounie. *Teoria Elementar das Distribuições*. IMPA, Recife, 1979.
- [Hou07] S. Berhanu & J. Hounie. The Baouendi-Treves Approximation Theorem for Continuous Vector Fields. *Asian J. Math*, 11(1):055–068, 2007.
- [Hou08] S. Bernahu & P. D. Cordaro & J. Hounie. *An Introduction to Involutive Structures*. Dover, New York, 2008.
- [Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume 1. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Jos98] G. Friedlander & M. Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Lan91] S. Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer, New York, 1991.
- [Lim05] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 2. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

---

## Índice Remissivo

---

- Campo Vetorial Complexo
  - Definição, 15
  - Estrutura Algébrica, 16
  - Menos Regulares, 77
- Campo Vetorial Complexo Contínuo, 77
- Conjunto Característico, 24
- Conjunto Frente de Ondas, 11
- Continuidade Aproximada, 64
- Densidade de um Conjunto Mensurável, 64
- Diferencial Exterior, 21
- Distribuições, 3, 70
  - $L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$ , 3
  - Convergência, 3
  - de Suporte Compacto, 5
  - Dual de Espaços Menos Regulares, 70
  - Extensão de Operadores, 5, 71
  - Suporte, 5
  - Suporte Singular, 5
  - Transposto Formal, 4, 71
- Distribuições Temperadas, 8
- Espaço de Sobolev, 44
- Espaço de Sobolev Local, 44
- Espaços Localmente Compactos, 55
- Estrutura Formalmente Integrável, 19
- Estrutura Localmente Integrável, 23, 80
- Fibrado Cotangente Complexificado, 22
- Fibrado Tangente Complexificado, 17
  - Seção, 18
- Formas Diferenciais
  - Contínuas, 79
  - de grau  $r$ , 20
  - de grau um, 19
- Funcional Limitado, 58
- Funcional Linear Positivo, 57

- Função de Classe  $C^k(\Omega)$ , 76
- Função de Classe  $\infty$ , 19
- Função Suave, 14, 21
  - Diferencial, 19
  - Estrutura Algébrica, 14
- Funções Contínuas de Suporte Compacto
  - Topologia  $\mathcal{D}_0(X)$ , 56
  - Topologia  $C_c(X)$ , 56
- Funções de Decrescimento Rápido -  $\mathcal{S}$ , 6
  - Convergência, 7
- Funções que se Anulam no  $\infty$ , 58
- Funções-Testes
  - Convergência, 3
  - Dual, 3
  - Espaço  $D$ , 2
  - Menos Regulares, 55
- Funções-Testes Menos Regulares
  - Espaços  $\mathcal{D}_k$ , 70
  - Medidas de Radon, 55
- Medidas de Radon
  - $(\mathcal{D}_0)'(X) = \mathcal{M}(X)$ , 62
  - Definição, 55
- Produto Exterior, 21
- Pullback de uma Forma, 22
- Restrição de Distribuições, 12
- Subfibrado Cotangente, 23
- Subfibrado Cotangente Contínuo, 79
- Subfibrado Tangente, 18
- Subfibrado Tangente Contínuo, 77
- Símbolo de um Campo, 24
- Teorema de Baouendi-Treves, 26
- Teorema de Representação de Riesz, 57, 58
- Transformada de Fourier em  $\mathcal{S}'$ , 8
- Transposto Formal de Operadores, 4, 71
- Variação de uma Aplicação Real
  - $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ , 63
  - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 64
  - Variação Essencial, 65
  - Caracterização, 67
  - Espaço  $BV(\Omega)$ , 69
  - Propriedades, 68
  - Variação Limitada, 63
- Variedade Diferenciável
  - Campos Vetoriais, 15
  - Campos Vetoriais Contínuos, 77
  - Definição, 13
  - Função Suave, 14
  - Vetor Tangente, 16
- Vizinhança Cônica, 11