UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

Graduações de Grupo na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores

Dissertação de Mestrado

Alexandra Cristina Menis*

Orientador: **Prof. Dr. Marcello Fidélis**

Agosto de 2009
São Carlos-SP

* Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Graduações de Grupo na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Alexandra Cristina Menis** e aprovada pela comissão julgadora.

São Carlos, 11 de agosto de 2009.

Prof. Dr. Marcello Fidélis
Orientador

Banca Examinadora
1 Prof. Dr. Marcello Fidélis (UFRuralRJ)
2 Profa. Dra. Ires Dias (USP)
3 Profa. Dra. Adriana Ramos (UFSCar)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSCar, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M545gg

Menis, Alexandra Cristina.
Graduações de grupo na álgebra das matrizes triangulares superiores / Alexandra Cristina Menis. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
48 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Álgebra. 2. Matrizes (Matemática). 3. Representações de grupos. 4. Graduação elementar. 5. Grupos abelianos. I. Título.

CDD: 512 (20ª)

Banca Examinadora:

Marcello Fidélis

Prof. Dr. Marcello Fidélis
UFRRJ

Adriana Ramos.

Profa. Dra. Adriana Ramos
DM - UFSCar

Ires Dias

Profa. Dra. Ires Dias
ICMC - USP

Agradecimentos

Toda honra por esse trabalho seja dada a Deus, porque sei que Ele é quem exalta e quem humilha. Ele é quem coloca pessoas em nossa vida e quem as tira.

Agradeço ao meu orientador o professor Marcello pela paciência, amizade e disposição em me atender. Também aos demais professores do departamento de Matemática da UFS-Car que colaboraram para minha formação. Agradeço ao Prof. Dr. Plamen E. Koshlukov pela idéia do projeto.

À minha família que é tão importante em minha vida, agradeço pelo incentivo, por me entender e estar sempre presente.

Agradeço aos meus amigos do departamento e fora, que me ajudaram, das palavras de apoio à sugestões que colaboraram na elaboração deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho estudamos graduações de grupo na álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_n(F)$, as quais possuem muitas aplicações na teoria de PI-álgebras. Nosso principal objetivo é exibir uma descrição de todas as graduações finitas de $UT_n(F)$ por um grupo G, a menos de isomorfismo.

Primeiramente, nos restringimos ao caso onde o corpo base F é algebricamente fechado de característica zero e o grupo G é abeliano finito. Usando o método de representação de grupo, apresentamos uma descrição explícita da dualidade entre G-ações e G-graduações numa álgebra associativa, dualidade esta que desempenha um papel importante na prova do resultado principal apresentada para este caso.

Finalmente, apresentamos uma prova do resultado geral, para um corpo base arbitrário F e um grupo arbitrário G, que utiliza uma abordagem alternativa fortemente baseada em propriedades de semi-simplicidade de anéis.

Abstract

In this work we study group gradings on the upper triangular matrices algebra $UT_n(F)$, which have several applications in the PI-algebra theory. Our main purpose is to exhibit a description of all finite gradings of $UT_n(F)$ by a group G up to isomorphism.

To begin with, we restrict to the case where the base field F is algebraically closed of characteristic zero and the group G is finite abelian. Using the method of group representation we present an explicit description of the duality between G-actions and G-gradings on an associative algebra, and such duality plays an important role in the proof of the main result presented for this case.

Finally, the proof of the general result, for an arbitrary base field F and an arbitrary group G, accomplished by an alternative approach deeply based on semi-simplicity properties of rings is presented.

Sumário

Introdução

As álgebras de matrizes tem grande importância devido ao seu amplo campo de aplicações. As graduações de grupo das álgebras de matrizes por sua vez tem desempenhado um papel significante no desenvolvimento da teoria de identidades polinomiais e também de superálgebras de Lie (ver, por exemplo [1]). Mais precisamente, a descrição de todas as $\mathbb{Z}_2$-graduações nas álgebras de matrizes foi um passo importante no estudo das variedades verbalmente primas. No entanto, mesmo no caso das matrizes de tamanho 2, a descrição de todas as graduações não é uma tarefa fácil.

As matrizes triangulares em blocos superiores aparecem em diversas aplicações, por exemplo, no estudo de invariantes numéricos de PI-álgebras e, em particular, no estudo de variedades minimais (ver, por exemplo [6]). Um caso particular de álgebra triangular em bloco superior são as triangulares superiores, sobre as quais dedicamos nosso trabalho.

O texto está organizado em quatro capítulos onde procuramos fornecer os detalhes omitidos nos artigos que estudamos. Os capítulos estão estruturados da seguinte forma:

O primeiro capítulo é um capítulo de preliminares, onde apresentamos formalmente os nossos principais objetos de trabalho, bem como exemplos e alguns resultados exigidos no decorrer do texto. É um passo necessário para se fixar as notações e avançarmos.

No segundo capítulo introduzimos o poderoso método das representações de grupo, mostramos que no caso de grupos abelianos finitos, o conjunto dos caracteres irredutíveis que são originados pelas representações irredutíveis é um grupo isomorfo ao inicial, nesta situação e ainda assumindo álgebras sobre um corpo algebricamente fechado com característica zero, construímos uma relação entre G-ações que no caso são isomorfismos gerados pelo grupo dos caracteres irredutíveis de G e G-graduações. Essa relação que chamamos de dualidade nos leva ao objetivo do capítulo que é encontrar condições dependendo do grupo de caracteres irredutíveis para que um ideal de uma álgebra graduada herde a graduação.

Ainda estudamos semi-simplicidade, vimos teoremas clássicos que nos ajudaram na construção da dualidade, e também nos levaram a propriedades de certas álgebras que serão exploradas no Capítulo 4.

O terceiro capítulo contém uma exposição mais detalhada do artigo [12], onde usamos a dualidade vista no capítulo anterior para trabalhar técnicas que nos levaram à demonstração do teorema principal que caracteriza todas as graduações abelianas finitas da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo algebricamente fechado com característica zero em um determinado tipo, as elementares, onde as componentes homogêneas são geradas por matrizes unitárias.

No último capítulo seguimos o artigo [13] para generalizar o resultado obtido no Capítulo 3, aplicamos uma prova alternativa baseada em aspectos de semi-simplicidade dentro da álgebra que estudamos e assim pudemos descrever as graduações das matrizes triangulares superiores, sem restrições no corpo nem no grupo. A dualidade usada na demonstração do caso restrito é construída em cima das hipóteses do corpo base algebricamente fechado com característica zero e o grupo graduando abeliano finito, por isso não se aplica ao caso geral. Comparando os casos podemos ver a importância da teoria de representações usada na dualidade, pois tornou a demonstração mais simples e elegante.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos Básicos sobre Álgebras

Começaremos com a apresentação de nosso principal objeto de pesquisa e algumas subestruturas, temos o objetivo de fixar os conceitos usados no trabalho. Ao longo do texto F denotará um corpo muitas vezes algebricamente fechado e de característica zero, mas sempre destacaremos a necessidade desta hipótese.

Definição 1.1 Um espaço vetorial A é dito uma *álgebra* (ou F-álgebra) se está definida uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$ (chamada *mutiplicação*) que satisfaz, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\alpha \in F$, as seguintes propriedades:

(i) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot c$

(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(iii) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$

Usualmente escreveremos ab ao invés de $a \cdot b$.

Definição 1.2 Seja A um álgebra sobre F.

(i) A é dita *associativa*, se $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in A$.

(ii) A é dita *comutativa*, se $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in A$.

(iii) A é dita *unitária* ou *com unidade*, se possui uma *unidade*. Isto é, se possui um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$, para todo $a \in A$.

Em todo o texto trabalharemos sempre com álgebras associativas com unidade. Portanto usaremos o termo álgebra para álgebra associativa com unidade.

Definição 1.3 Um subespaço B da álgebra A é uma *subálgebra* se para todo $b_1, b_2 \in B$ temos que $b_1 b_2 \in B$. Um subespaço I de A é chamado de *ideal à esquerda* se para todo $a \in A$ e $i \in I$, temos que $ai \in I$. De modo análogo, define-se *ideal à direita*. Um ideal bilateral é chamado simplesmente *ideal*.

Exemplo 1.4 Seja $M_n(F)$ o conjunto das matrizes de ordem n com entradas em F com as operações usuais, $M_n(F)$ é uma álgebra associativa, com unidade e não comutativa e $UT_n(F)$, o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n, é uma subálgebra de $M_n(F)$.

Definição 1.5 Seja I um ideal em uma álgebra A. Chamaremos de *álgebra quociente* ao conjunto das classes laterais $A/I = \{a + I; a \in A\}$, no qual a adição é dada por $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$ e a multiplicação por $(a+I)(b+I) = (ab)+I$ $(a, b \in A)$, com essas operações temos que A/I é álgebra.

Definição 1.6 Uma transformação linear $\varphi : A \to A'$ entre as álgebras A e A' é dita um *homomorfismo* (de álgebras) se:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

e, além disso, $\varphi(1_A) = 1_{A'}$ se as álgebras A e A' são unitárias. Analogamente podemos definir a noção de *endomorfismo*, *isomorfismo*, *automorfismo*, etc.

Os teoremas clássicos de isomorfismo de espaços vetoriais, grupos e anéis também valem para álgebras. O próximo resultado é muito comum e é denominado Teorema do Isomorfismo.

Teorema 1.7 *Seja $\varphi : A \to A'$ um homomorfismo. Então o núcleo de φ,*

$$Ker\varphi = \{a \in A \,|\, \varphi(a) = 0\}$$

é um ideal de A e a álgebra quociente $A/Ker\varphi$ é isomorfa a subálgebra $\varphi(A) = \{\varphi(a) \,|\, a \in A\}$.

1.2 Graduações de Grupos em Álgebras Associativas

Este trabalho dedica-se ao estudo das graduações da álgebra das matrizes triangulares superiores. Nesta seção definiremos o conceito de graduação de grupo em uma álgebra associativa, que tem um importante papel na teoria de identidades polinomiais no sentido de classificar as identidades polinomiais de uma dada álgebra, Kemer usou graduações em sua teoria de estrutura de uma classe de álgebras chamadas T-primas, obtendo importantes contribuições para a Teoria de Álgebras com Identidades Polinomiais, ver [10]. Além disso, a classificação de todas as graduações de uma álgebra tem relevância por si própria.

Definição 1.8 Sejam G um grupo arbitrário e A uma álgebra associativa. Uma *G-graduação* em A é uma decomposição de A (como espaço vetorial) em soma direta de subespaços A_g:

$$A = \oplus_{g\in G} A_g,$$

tal que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

Os subespaços A_g são chamados de *componentes homogêneas* e A_1 a componente correspondente ao elemento neutro do grupo G, chamaremos de *componente neutral*. Um elemento $a \in \cup_{g\in G} A_g$ é dito *homogêneo*.

Seja G um grupo. Toda álgebra A possui uma G-graduação chamada *graduação trivial*, onde $A_1 = A$ e $A_g = \{0\}$ se $1 \neq g \in G$. Ao longo do texto quando for dito que A é uma álgebra G-graduada na verdade estaremos pensando em A com uma certa G-graduação fixada.

Definição 1.9 Se $A = \oplus_{g\in G} A_g$ é um álgebra graduada por um grupo G, chamaremos de *suporte de* G ao subconjunto $\mathrm{Supp}(G) = \{g \in G \,:\, A_g \neq 0\}$. Note que o suporte depende da álgebra A, e também da G-graduação considerada.

Definição 1.10 Se $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação em A, dizemos que essa G-graduação é finita se $\mathrm{Supp}(G)$ é finito.

Definição 1.11 Um subespaço B de uma álgebra G-graduada $A = \oplus_{g\in G} A_g$, é dito *homogêneo na G-graduação* ou *G-graduado* se $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$.

Desta forma B é homogêneo se para todo $b \in B$ tem-se que $b = \sum_{g \in G} b_g$ onde $b_g \in B_g = A_g \cap B$.

Nem todo subespaço de uma álgebra G-graduada é G-graduado, como podemos ver no exemplo abaixo:

Exemplo 1.12 Seja $A = UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2 graduada pelo grupo aditivo $\mathbb{Z}_2$ com a seguinte graduação $A = A_0 \oplus A_1$, onde $A_0 = [E_{11}, E_{22}]$ é o subespaço gerado por E_{11}, E_{22} e $A_1 = [E_{12}]$ o subespaço gerado por E_{12}, onde E_{ij} denota a matriz que tem 1 na entrada $i \times j$ e as demais nulas. Considere a subálgebra B de A gerada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então se B fosse homogênea na $\mathbb{Z}_2$-graduação dada, teríamos que $B = B_0 \oplus B_1$, onde $B_i = B \cap A_i$, $i = 0, 1$, mas temos que $B \cap A_0 = [E]$, onde E é a matriz identidade e $B \cap A_1 = \{0\}$ e portanto $B_0 \oplus B_1 \subsetneq B$.

Os dois lemas abaixo mostram que o anulador de uma subálgebra homogênea é sempre homogêneo. Para o caso em que o corpo F é algebricamente fechado com característica zero e G abeliano veremos que a demonstração mais direta, depois de estudarmos a dualidade entre G-graduações e G-ações.

Lema 1.13 *Sejam G um grupo qualquer, $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra com uma G-graduação finita e $a \in A$ um elemento homogêneo. Então o anulador à esquerda de a, $W = \{w \in A : wa = 0\}$ é homogêneo na G-graduação.*

Demonstração: A graduação é finita, então podemos enumerar as componentes homogêneas não nulas. Sejam $A_{g_1}, \ldots, A_{g_m}$ as componentes não nulas, onde A_{g_1} representa a componente neutral e $m \geq 1$. Mostraremos que se $w \in W$, então $w = w_1 + \ldots + w_m$ com $w_i \in W \cap A_{g_i}$ para $i = 1, \ldots, m$. Com efeito, temos que $w \in A$ então $w = w_1 + \ldots + w_m$ onde $w_i \in A_{g_i}$.

$$0 = wa = (w_1 + \ldots + w_m)a = w_1 a + \ldots + w_m a$$

Agora se $a = 0$ então $W = A$ e nada temos a fazer. Se $a \neq 0$, $a \in A_{g_k}$ para algum $k \in \{1, \ldots, m\}$ pela regra $A_{g_i} a_{g_k} \subseteq A_{g_i g_k}$ e por G ser grupo, cada $w_i a$ deve estar em uma componente homogênea distinta.

Então $w_1 a + \ldots + w_m a = 0 + \ldots + 0 = 0$, pela unicidade da decomposição de 0 como soma de homogêneos segue que $w_i a = 0$, de onde $w_i \in W$ como queríamos. ∎

Lema 1.14 *Sejam A como no Lema 1.13 e B uma subálgebra homogênea de A, se $W = \{w \in A; wb = 0 \forall b \in B\}$ é o anulador à esquerda de B, então W também é homogêneo.*

Demonstração: Sejam $A_{g_1}, ..., A_{g_m}$ as componentes homogêneas não nulas da G-graduação. Tomemos $w \in W$, então $w = w_1 + ... + w_m$ com $w_i \in A_{g_i}$. Se $B = \oplus_{g \in G} B_g$ onde $B_g = B \cap A_g$, para todo $a \in B$, temos $wa = 0$ e $a = a_1 + \ldots + a_m$ onde $a_i \in B \cap A_{g_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Como $a_i \in B$, temos que $wa_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, logo

$$0 = wa_i = (w_1 + \ldots + w_m)a_i = w_1 a_i + \ldots + w_m a_i.$$

Como cada somando $w_j a_i$ deve estar em componentes homogêneas distintas, temos que $w_j a_i = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Agora $w_i a = w_i a_1 + \ldots + w_i a_m = 0 + \ldots + 0 = 0$ e como a é um elemento qualquer de B, $w_i \in W$. ∎

Definição 1.15 Sejam G um grupo, $A = \oplus_{g \in G} A_g$ e $A' = \oplus_{g \in G} A'_g$ álgebras G-graduadas. Uma aplicação $\varphi : A \to A'$ é chamada *homomorfismo G-graduado* se φ é um homomorfismo que satisfaz $\varphi(A_g) \subseteq A'_g$, para todo $g \in G$. De modo análogo define-se *isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduados.*

Dado um grupo G definiremos a seguir quando duas G-graduações em uma álgebra A são isomorfas, destacamos essa definição pois nosso trabalho no texto em grande parte se dedica em construir um automorfismo entre uma G-graduação qualquer da álgebra das matrizes triangulares superiores em uma outra G-graduação da mesma, com algumas características específicas.

Definição 1.16 Diremos que duas G-graduações em uma álgebra A são isomorfas se existe um automorfismo G-graduado $\varphi : A' \to A''$, onde consideramos A' como a álgebra A com a primeira G-graduação e A'' com a segunda G-graduação.

Os próximos dois lemas são de demonstração imediata.

Lema 1.17 *Se A é uma álgebra G-graduada e B é uma subálgebra de A, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) B é subálgebra G-graduada de A;

(ii) B é uma álgebra G-graduada tal que $B_g \subseteq A_g$, para todo $g \in G$;

(iii) Os somandos homogêneas de cada elemento B pertencem a B.

Lema 1.18 *Se I é um ideal G-graduado da álgebra G-graduada A, então A/I é G-graduada de maneira natural, considerando-se $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

Observação 1.19 Se $\varphi : A \to A'$ é um homomorfismo G-graduado, então temos que $\mathrm{Ker}\varphi$ é um ideal G-graduado e $\varphi(A)$ é uma subálgebra G-graduada de A' tal que $(\varphi(A))_g = \varphi(A_g)$. Em outras palavras, conforme o Lema acima, vale a "versão graduada" do Teorema do Isomorfismo, isto é, a álgebra quociente $A/\mathrm{Ker}\varphi$ é isomorfa (como álgebra graduada) a $\varphi(A)$.

1.3 Graduações Elementares

A seguir definiremos um tipo especial de graduação em $M_n(F)$ chamada de graduação elementar. Seja G um grupo qualquer e considere $G^n = G \times \ldots \times G$ o n produto cartesiano de G. Um elemento de G^n é do tipo $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n)$.

Fixado $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ definiremos uma graduação em $M_n(F)$ associada a $\bar{g}$ tomando cada componente homogênea A_g como a combinação linear das matrizes unitárias E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, tal que $g_i^{-1} g_j = g$, ou seja:

$$E_{ij} \in A_g \Leftrightarrow g = g_i^{-1} g_j \tag{1}$$

Sabemos que as matrizes E_{ij} formam uma base para o espaço vetorial $M_n(F)$, pela condição acima temos que cada E_{ij} pertence a uma componente homogênea A_g, onde $g = g_i^{-1}g_j$.

Também sabemos que $M_n(F) = \oplus_{i,j=1}^{n}[E_{ij}]$ e, conforme a equação acima, para cada $g \in G$ fixado temos que $A_g = \{0\}$ ou $A_g = \oplus_{g=g_r^{-1}g_s}[E_{rs}]$. Portanto, se necessário, podemos reagrupar os subespaços $[E_{ij}]$ de forma que $A_g = \oplus_{g=g_r^{-1}g_s}[E_{rs}]$, e então $M_n(F) = \oplus_{i,j=1}^{n}[E_{ij}] = \oplus_{g\in G}A_g$.

Agora mostraremos que a condição (1) realmente define uma graduação em $M_n(F)$. De fato, sejam $E_{ij} \in A_g$ e $E_{kl} \in A_h$, então $E_{ij}E_{kl} = 0$ se $j \neq k$, e se $j = k$ temos $E_{ij}E_{jl} = E_{il} \in A_x$, onde $x = g_i^{-1}g_l = g_i^{-1}g_jg_j^{-1}g_l = gh$, pois $g = g_i^{-1}g_j$ e $h = g_j^{-1}g_l$, donde concluímos que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$.

Definição 1.20 Uma graduação na álgebra $M_n(F)$ é dita uma *graduação elementar* se satisfaz a condição (1) para algum $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$.

Note que todas as matrizes unitárias são elementos homogêneos para qualquer graduação elementar.

Definição 1.21 Uma G-graduação em $UT_n(F)$, $UT_n(F) = \oplus_{g\in G}A_g$ é dita *elementar* se existe $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que qualquer componente homogênea A_g é combinação linear das matrizes unitárias E_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$ tal que $g_i^{-1}g_j = g$.

A seguir construiremos uma graduação em $M_n(F)$ não elementar a fim de mostrarmos que nem todas as graduações são elementares.

Exemplo 1.22 Sejam F um corpo algebricamente fechado com característica zero e $G = \langle a\rangle_n \times \langle b\rangle_n$ o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem n, seja $\varepsilon \in F$ uma raiz primitiva n-ésima da unidade. Consideremos:

$$X_a = \begin{pmatrix} \varepsilon^{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{n-2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \; Y_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Então temos as relações

$$X_aY_b = \varepsilon Y_bX_a, \quad X_a^n = Y_b^n = E,$$

É possível mostrar que o conjunto $\{X_a^iY_b^j;\ 1 \leq i, j \leq n\}$ é linearmente independente. Daí os elementos $X_a^iY_b^j$, $i, j = 1, \ldots, n$, formam uma base de $M_n(F)$.

Agora, para todo $g \in G$ tem-se $g = a^ib^j$ e então definimos $A_g = [X_a^iY_b^j]$, vamos verificar que essa decomposição é de fato uma graduação em $M_n(F)$, observe que:

$X_a^iY_b^jX_a^kY_b^l = (\epsilon)^{k+l}X_a^{i+k}Y_b^{j+l}$ assim se $g = a^ib^j$ e $h = a^kb^l$ então $A_gA_h \subseteq A_{gh}$.

Chamamos essa graduação de ε-*graduação* e ela não é elementar. Com efeito, pelo modo com foram definidas as componentes homogêneas A_g, todas são unidimensionais o que implica que a graduação não é elementar, já que a componente neutral A_1 de qualquer graduação elementar contém todas as matrizes E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, pois para todo $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, $g_i^{-1}g_i = 1$.

1.4 O Radical de Jacobson

Nesta seção denotaremos R como sendo um anel qualquer com unidade, lembrando que toda álgebra associativa é um anel, poderíamos fazer a mesma discussão para álgebras. Definiremos o radical de Jacobson de um anel e apresentaremos um caminho para o cálculo do radical, destacando também que aqui serão feitos cálculos do radical de Jacobson de algumas álgebras que usaremos à frente.

Definição 1.23 Um grupo aditivo abeliano M é chamado de R-módulo se existe uma aplicação de $M \times R$ em M (levando (m, r) em mr) tal que:

(i) $m(a + b) = ma + mb$;

(ii) $(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2b$;

(iii) $(ma)b = m(ab)$.

para todo $m, m_1, m_2 \in M$ e todo $a, b \in R$.

Estamos definindo um R-módulo à direita, isto é, os elementos de R atuam no módulo pela direita mas por simplicidade diremos apenas R-módulo ao invés de R-módulo à direta.

Observação 1.24 Um anel R é um módulo sobre si mesmo, isto é, R é um R-módulo e qualquer ideal de R também é R-módulo.

Definição 1.25 Um subconjunto N de um R-módulo M, é um *submódulo de* M se N é um R-módulo com as operações induzidas por M.

Definição 1.26 Dizemos que M é um R-módulo *irredutível* se seus únicos sub-módulos são $\{0\}$ e o próprio M.

Definição 1.27 Se M é um R-módulo então definimos o *anulador à direita* de M, da seguinte forma $\mathrm{Ann}(M) = \{x \in R \,|\, Mx = 0\}$.

Observação 1.28 O anulador $\mathrm{Ann}(M)$ é um ideal bilateral de R. De fato, se $x_1, x_2 \in \mathrm{Ann}(M)$ então $M(x_1 + x_2) = Mx_1 + Mx_2 = 0$. Agora se $x \in \mathrm{Ann}(M)$ e $r \in R$ teremos $Mxr = 0$ e $Mrx \subseteq Mx = 0$ então $xr, rx \in \mathrm{Ann}(M)$.

Definição 1.29 O *radical de Jacobson de* R, escrito como $J(R)$, é o conjunto de todos os elementos de R que anulam todos os R-módulos irredutíveis. Se R não possui R-módulos irredutíveis dizemos que $J(R) = R$.

Note que $J(R) = \cap\mathrm{Ann}(M)$ onde a intersecção percorre todos os R-módulos irredutíveis M. E por $\mathrm{Ann}(M)$ ser ideal de R, temos que $J(R)$ é um ideal de R.

Proposição 1.30 *$J(R) = \cap\rho$ onde ρ percorre todos os ideais à direita maximais de R.*

Demonstração: Veja [8] Teorema 1.2.2, pp. 14-15. ∎

A seguir, usando a proposição acima mostraremos que o radical de Jacobson de UT_n é a subálgebra das matrizes estritamente triangulares superiores.

Agora denotaremos $A = UT_n(F)$, recordemos que $UT_n(F)$ é um anel com unidade.

Lema 1.31 *Se ρ é um ideal maximal à direita de $A = UT_n(F)$, então ρ será um ρ_i para algum i, onde ρ_i é a subálgebra de A consistindo de todas as matrizes em A com zero na posição (i, i).*

Demonstração: É fácil verificar que ρ_i é ideal de A para $i = 1, ..., n$, e temos que cada ρ_i é maximal pela dimensão como espaço vetorial.

Agora se I é um ideal que contém E_{ii} para todo $i = 1, \ldots, n$ então a matriz identidade está em I, e um ideal que contém a matriz identidade é a própria A. Então se I é um ideal próprio, ele não contém pelo menos um dos E_{ii} e disto temos que $I \subseteq \rho_i$. ∎

Observação 1.32 O radical de Jacobson de $A = UT_n(F)$ é o ideal das matrizes estritamente triangulares superiores.

De fato, pela Proposição 1.30 $J(A) = \cap\rho$ onde ρ é ideal maximal à direita de A, mas pelo Lema 1.31 os ideais maximais de A são $\rho_1, \ldots, \rho_n$, onde ρ_i é o ideal de todas as matrizes com zero na posição (i, i).

Assim

$$J(A) = \cap_{i=1}^{n} \rho_i.$$

Sempre que falarmos em $UT_s(F)$ para $s < n$ estaremos considerando na verdade sua projeção em $UT_n(F)$, onde as $n - s$ colunas à direita são nulas.

Encerraremos este capítulo calculando o radical de Jacobson de um quociente importante no Capítulo 3. Considere $W = [E_{1n}, E_{2n}, \ldots, E_{n-1,n}]$, e observemos que W anula $J(A)$ à esquerda.

Denotamos por $\pi : A \longrightarrow A/W$ a projeção canônica. A seguir encontraremos o radical de Jacobson de $\pi(UT_{n-1})$.

Primeiramente temos que $A/W = \pi(UT_{n-1}) \oplus C$ onde $C = \pi(\langle E_{nn} \rangle)$ e $\pi(UT_{n-1}) \cong UT_{n-1}$.

Agora conhecemos os ideais maximais de $UT_{n-1}(F)$, e lembrando que isomorfismo leva ideal maximal à direita em ideal maximal à direita, temos que os ideais maximais de $\pi(UT_{n-1})$ são:

$I_i = \{(a_{ij}) + W \mid (a_{ij}) \in UT_{n-1}, \text{com}\, a_{ii} = 0\}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Basta então tomarmos a intersecção para obtermos o radical de Jacobson:

$$J(\pi(UT_{n-1}) = \{(a_{ij}) + W \mid (a_{ij}) \in UT_{n-1} \text{ com } i < j\}$$

Note ainda, que pelo teorema do isomorfismo os ideais maximais à direita de $\pi(UT_{n-1})$ são as projeções dos ideais maximais à direita de A que contém W. Logo o radical de

Jacobson não contém o elemento E_{nn} e portando segue a igualdade $J(\pi(UT_{n-1}) \oplus C) = J(\pi(UT_{n-1}))$.

Capítulo 2

Teoria de Representações de Grupos

2.1 Teoria de Representação de Grupos

Estudaremos um pouco da teoria de representações de grupos, uma importante ferramenta no decorrer do texto. Muitas vezes nos limitaremos ao caso em que o grupo G é finito, onde chamaremos de $|G|$ a ordem do grupo G, também terá um interesse especial o caso G abeliano, visto que o objetivo é usar a dualidade entre ações e álgebras graduadas por grupos abelianos finitos para demonstrar o teorema de classificação de todas as álgebras G-graduadas. Nesta seção o corpo F será sempre algebricamente fechado e com característica zero.

Definição 2.1 Se X é um conjunto e G um grupo dizemos que G *age em* X se existe uma função $\alpha : G \times X \to X$, chamada *ação*, tal que para $g \in G$, $\alpha_g : X \to X$ dada por $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$ para $x \in X$, satisfaz:

(i) Se $g, h \in G$ então $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$.

(ii) $\alpha_1 = 1_X$, a função identidade.

Todo subgrupo G de S_X age em X (onde S_X é o grupo das bijeções do conjunto X). Mais geralmente, ações de um grupo G em um conjunto X correspondem a homomorfismos de G em S_X. No caso em que o conjunto é uma álgebra A, se G é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(A)$, o grupo dos automorfismos de A, então G age naturalmente em A. Como estaremos lidando apenas com este caso, uma *ação de G em A* significa que $G \subseteq \mathrm{Aut}(A)$.

Definição 2.2 Sejam G um grupo e V um espaço vetorial sobre F, denotaremos por $GL(V)$ o grupo dos operadores lineares invertíveis de V.

(i) Uma *representação* ϕ de G em V é um homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rcl} \phi : G & \to & GL(V) \\ g & \longmapsto & \phi(g) \end{array}$$

O *grau* da representação ϕ é igual a dimensão do espaço vetorial V. Uma representação ϕ é dita *fiel* se o núcleo de ϕ é trivial e ϕ é dita *trivial* se o núcleo de ϕ coincide com G.

(ii) Duas representações $\phi : G \to GL(V)$ e $\phi' : G \to GL(V')$ são *equivalentes* ou *isomorfas* se existe um isomofismo $\theta : V \to V'$ de espaços vetoriais tal que:

$$(\theta \circ \phi(g))(v) = (\phi'(g) \circ \theta)(v); v \in V, g \in G.$$

(iii) Se W é um subespaço de V tal que $(\phi(g))(W) = W$ para todo $g \in G$, então a representação $\psi : G \to GL(W)$ definida por $(\psi(g))(w) = (\phi(g))(w)$; $g \in G$, $w \in W \subseteq V$; é chamada *sub-representação* de ϕ. Uma sub-representação ψ é *própria* se $W \neq 0$ e $W \neq V$.

(iv) Uma representação $\phi : G \to GL(V)$ é *irredutível* se ela não possui sub-representações próprias; e ϕ é dita *completamente redutível* se ela é soma direta de sub-representações irredutíveis.

Definição 2.3 Seja $\phi : G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita do grupo G. A função $\chi_\phi : G \to F$ definida por

$$\chi_\phi(g) = tr_V(\phi(g)),\ g \in G,$$

é chamada *caracter* de ϕ. Se ϕ é uma representação irredutível então χ_ϕ é chamado um *caracter irredutível.*

Note que se g_1 e g_2 são dois elementos conjugados do grupo G e ϕ é uma representação de dimensão finita de G, então $\chi_\phi(g_1) = \mathrm{tr}(\phi(g_1)) = \mathrm{tr}(P^{-1}\phi(g_2)P) = \mathrm{tr}(\phi(g_2)) = \chi_\phi(g_2)$, isto é, os caracteres são constantes nas classes conjugadas do grupo G.

Teorema 2.4 *Sejam G um grupo finito e F um corpo algebricamente fechado. Então:*

(i) Toda representação de dimensão finita de G é determinada a menos de isomorfismo por seus caracteres.

(ii) O número de representações irredutíveis não isomorfas de G é igual ao número de classes de conjugação de G.

Demonstração: Ver Drensky [3], Theorem 12.1.15, p. 198. ∎

Segundo o Teorema 2.4 o número de representações irredutíveis é determinado apenas por propriedades do grupo e mais, se G é abeliano então o número de representações irredutíveis de G a menos de isomorfismo é igual a $|G|$.

Exemplo 2.5 Sejam $G = \langle g \,|\, g^n = 1 \rangle$ um grupo cíclico de ordem n, F um corpo algebricamente fechado e ε uma raiz primitiva de ordem n de 1. Então os caracteres $\chi_j : G \to F$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ definidos por:

$$\chi_j(g^k) = \varepsilon^{jk}, k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

são todos os caracteres irredutíveis a menos de isomorfismo de G em F.

Para demonstrarmos a afirmação acima, consideremos $\phi_j : G \to GL(F)$, definida por $\phi_j(g^k) = T_{jk} : F \to F$ onde $T_{jk}(1_F) = \varepsilon^{jk}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$, e teremos que ϕ_j é uma representação de dimensão 1 de G para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Assim por ϕ_j ser de dimensão 1, ϕ_j é irredutível para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$ e pelo Teorema 2.4, G tem n representações irredutíveis não isomorfas, e ϕ_j não é isomorfa a ϕ_i se $i \neq j$. De fato, seja $\theta : F \to F$ isomorfismo de F-espaços vetoriais, então

$$(\theta \circ \phi_j(g^k))(v) = (\theta \circ \varepsilon^{kj})(v) = \theta(\varepsilon^{kj} v) = \varepsilon^{kj} v\theta(1),$$

por outro lado temos

$$(\phi_i(g^k) \circ \theta)(v) = \phi_i(g^k) v\phi(1) = \varepsilon^{ik} v\theta(1),$$

logo não são isomorfas. Portanto encontramos as n representações irredutíveis a menos de isomorfismo.

E segue da definição $\chi_j(g^k) = \mathrm{tr}_V(\phi_j(g^k))$, que $\chi_j(g^k) = \varepsilon^{jk}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemplo 2.6 Se G é produto de l grupos cíclicos $G = \langle g_1 \rangle_{n_1} \times \cdots \times \langle g_l \rangle_{n_l}$ e F é um corpo algebricamente fechado , então sabemos que G possui $n_1 \cdots n_l$ caracteres irredutíveis não isomorfos e de forma análoga a feita no Exemplo 2.5, teremos que os caracteres $\chi_{p_1 \cdots p_l}$: $G \to F$ para $p_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1; \ldots; p_l = 0, 1, \ldots, n_l - 1$ definidos por:

$$\chi_{p_1 \cdots p_l}(g_1^i \cdots g_l^j) = \xi^{ip_1} \cdots \eta^{jp_l},$$

onde ξ é raiz de ordem n_1 da unidade, e assim sucessivamente, até η que denota uma raiz de ordem n_l da unidade.

E estes são todos os caracteres irredutíveis de G a menos de isomorfismo.

Se G é um grupo abeliano finito sabemos que G é produto finito de subgrupos cíclicos finitos então pelo exemplo acima conhecemos todos os caracteres irredutíveis de G a menos de isomorfismo. Ainda, pelos exemplos podemos ver que qualquer representação irredutível de um grupo abeliano finito tem grau 1, pois deve ser equivalente a uma das dadas no exemplo que por sua vez têm grau 1.

Observação 2.7 Seja G um grupo abeliano finito. Então se $\hat{G}_0$ é o conjunto dos caracteres irredutíveis dado no Exemplo 2.6, $\hat{G}_0$ é grupo com o produto $\chi_{h_1}\chi_{h_2}(g) = \chi_{h_1}(g)\chi_{h_2}(g)$, para todo $g \in G$, e além disso temos $\hat{G}_0 \cong G$.

Por simplicidade de notação, faremos a demonstração apenas para o caso em que G é cíclico.

Seja $G = \langle g \,|\, g^n = 1 \rangle$ onde $g^0 = 1$, seguindo a notação do exemplo o caracter χ_0 é o correspondente ao elemento neutro em $\hat{G}_0$. Então para $g^j \in G$ temos:

$$\chi_0\chi_j(g^k) = \chi_0(g^k)\chi_j(g^k) = \varepsilon^{0k}\chi_j(g^k) = \chi_j(g^k)$$

Logo χ_0 é o elemento neutro de $\hat{G}_0$.

Sejam $g^i, g^j \in G$ então $\chi_i\chi_j(g^k) = \chi_i(g^k)\chi_j(g^k) = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{jk} = \varepsilon^{(i+j)k} = \chi_{i+j}(g^k)$ portanto $\chi_i\chi_j \in \hat{G}_0$ é o caracter irredutível associado à g^ig^j.

Existe o inverso $\chi_j\chi_{-j}(g^k) = \chi_j(g^k)\chi_{-j}(g^k) = \varepsilon^{jk}\varepsilon^{-jk} = \varepsilon^{0k} = \chi_0(g^k)$.

Agora considere a bijeção

$$\begin{array}{rcl} f: G & \to & \hat{G}_0 \\ g^i & \longmapsto & \chi_i \end{array},$$

se $g^i, g^j \in G$ então $\chi_{i+j}(g^k) = \varepsilon^{(i+j)k} = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{jk} = \chi_i(g^k)\chi_j(g^k)$. Assim, temos que $f(g^ig^j) = f(g^{i+j}) = \chi_{i+j} = \chi_i\chi_j = f(g^i)f(g^j)$.

Observação 2.8 Se $\hat{G}$ é um conjunto de caracteres irredutíveis não equivalentes de G então $\hat{G}$ é isomorfo a $\hat{G}_0$. Como $\hat{G}_0$ é grupo, temos que $\hat{G}$ tem estrutura de grupo via o isomorfismo que existe entre eles pelo Teorema 2.4.

Agora sejam A uma álgebra sobre um corpo algebricamente fechado com característica zero, G um grupo abeliano finito e $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma G-graduação em A. Então o grupo de caracteres irredutíveis $\hat{G}$ define uma ação de automorfismos em A da seguinte forma:

$$\chi(a) = \sum_{g \in G} \chi(g) a_g$$

para $a = \sum_{g \in G} a_g \in A$, onde $a_g \in A_g$, e $\chi \in \hat{G}$ e este conjunto de ações também será denotado por $\hat{G}$ e também chamado de grupo de caracteres irredutíveis.

A seguir mostraremos que de fato a ação definida é um grupo.

Seja $1 \in G$ então

$$(\chi_1 \circ \chi_h)(a) = \chi_1(\chi_h(a)) = \chi_1(\sum_{g \in G} \chi_h(g) a_g) = \sum_{g \in G} \chi_h(g) \chi_1(a_g) =$$

$$\sum_{g \in G} \chi_h(g) \chi_1(g) a_g = \sum_{g \in G} \chi_h(g) a_g = \chi_h(a).$$

Disto χ_1 é o elemento neutro. Sejam agora χ_{h_1}, χ_{h_2} automorfismos em $\hat{G}$:

$$(\chi_{h_1} \circ \chi_{h_2})(a) = \chi_{h_1}(\sum_{g \in G} \chi_{h_2}(g) a_g) = \sum_{g \in G} \chi_{h_2}(g) \chi_{h_1}(a_g) = \sum_{g \in G} \chi_{h_1}(g) \chi_{h_2}(g) a_g =$$

$$\sum_{g \in G} \chi_{h_1} \chi_{h_2}(g) a_g = \sum_{g \in G} \chi_{h_1 h_2}(g) a_g = \chi_{h_1 h_2}(a)$$

então o conjunto é fechado com a composição como operação.

Por fim para qualquer $\chi_h \in \hat{G}$ temos que $\chi_{h^{-1}}$ é seu inverso:

$$\chi_h(\chi_{h^{-1}}(a)) = \chi_h(\sum_{g \in G} \chi_{h^{-1}}(g) a_g) = \sum_{g \in G} \chi_{h^{-1}}(g) \chi_h(a_g) =$$

$$\sum_{g \in G} \chi_{h^{-1}}(g) \chi_h(g) a_g = \sum_{g \in G} \chi_1(g) a_g = \chi_1(a).$$

O lema abaixo nos fornece uma condição necessária e suficiente, dependendo do grupo $\hat{G}$, para que um dado elemento de uma álgebra G-graduada esteja na componente neutral.

Lema 2.9 *Sejam F um corpo algebricamente fechado com característica zero e $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada onde G é abeliano finito com elemento neutro $1 \in G$, $e \in A$ e $\hat{G}$ o grupo dos caracteres irredutíveis de G agindo em A por automorfismos. Então $e \in A_1$ se, e somente se, $\varphi(e) = e$ para todo $\varphi \in \hat{G}$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $e \in A_1$, seja $\varphi \in \hat{G}$ qualquer, então φ é um automorfismo associado a um elemento $h \in G$. Pela definição de φ, temos $\varphi(e) = \sum_{g\in G} \chi_h(g)e_g = \chi_h(1)e$ onde $\chi_h(1) = 1_F$ se G é abeliano finito, pois neste caso todas as representações irredutíveis de G tem grau 1, então se ϕ é uma representação irredutível de G, $\phi : G \to GL(V)$ homomorfismo de grupo, onde $\dim(V) = 1$ então $\phi(1) = Id_V$ e $\chi_\phi(1) = \mathrm{tr}(Id_V) = 1_F$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\varphi(e) = e$ para todo $\varphi \in \hat{G}$.

Temos que $e \in A$ então $e = \sum_{g\in G} e_g$. Para todo $h \in G$ temos um automorfismo φ_h associado a h em $\hat{G}$ tal que se

$$\varphi_h(e) = \sum_{g\in G} \chi_h(g)e_g \text{ então } e = \sum_{g\in G} \chi_h(g)e_g,$$

mas pela unicidade na decomposição de e como soma de homogêneos, vem que:

$$e_g = \chi_h(g)e_g, g \in G. \tag{1}$$

Sabemos que $\chi_h(1) = 1_F$ para todo $h \in G$, quando G é abeliano finito

Suponha por contradição que existe $1 \neq g_0 \in G$ tal que $e_{g_0} \neq 0$, então pela relação (1) temos $\chi_h(g_0) = 1_F$, para qualquer $h \in G$.

Como os caracteres irredutíveis provém de representações irredutíveis temos para cada h, ϕ_h tal que $\chi_h(g_0) = \mathrm{tr}(\phi_h(g_0))$ onde:

$$\begin{array}{ccccc} \phi_h : G & \to & GL(V) & & \\ g & \longmapsto & T_g : & V \to V & , \\ & & & v \longmapsto \alpha_g v & \end{array}$$

se $V = [v]$. Mas então $\alpha_{g_0} = \mathrm{tr}(\phi_h(g_0)) = 1_F$. Qualquer representação irredutível é isomorfa a alguma ϕ_h então, pelas considerações acima, todas as representações irredutíveis de G devem levar g_0 no operador identidade, o que é um absurdo. ∎

Podemos ver através do Exemplo 2.6, que existem representações irredutíveis que não satisfazem a propriedade descrita no último parágrafo da demonstração acima, o exemplo nos fornece representações irredutíveis, que levam apenas o elemento neutro no operador identidade.

2.2 A Álgebra de Grupo

A álgebra FG que definiremos agora terá uma função especial na teoria de representações pois nos ajudará a compreender a relação entre G-ações e G-graduações. O leitor poderá encontrar mais detalhes sobre os resultados apresentados sobre a álgebra FG no livro do Herstein [8].

Definição 2.10 Seja G um grupo finito. Definimos a F-álgebra do grupo G por $FG = \{\sum \alpha_i g_i : \alpha_i \in F, g_i \in G\}$, onde os elementos do grupo G são considerados linearmente independentes sobre F. A adição é de modo natural e para a multiplicação usamos a propriedade distributiva em conjunto com a operação do grupo G. A F-álgebra FG tem como base os elementos de G e é chamada *álgebra de grupo de G.*

Observação 2.11 Temos que toda representação $\phi : G \to GL(V)$ de um grupo G em V define uma ação linear α de G em V, da seguinte forma $\alpha : G \times V \to V$ tal que $\alpha(g, v) = \phi_g(v)$. Podemos então considerar V como um FG-módulo à esquerda. Algumas vezes diremos simplesmente que V é um G-módulo ao invés de FG-módulo. As demais noções como sub-representações, irredutibilidade, etc., para ϕ correspondem a noções similares para o G-módulo V. Em particular, a *representação regular* ρ de G é a representação de G em FG definida por

$$\rho(g) : \sum_{h\in G} \alpha_h h \mapsto \sum_{h\in G} \alpha_h gh, g \in G,\ \alpha_h \in F.$$

Considerando FG como um G-módulo à esquerda, assumiremos que G age em FG deste modo. As sub-representações de ρ correspondem aos ideais à esquerda da álgebra de grupo FG e as subrepresentações irredutíveis correspondem aos ideais à esquerda minimais de FG.

2.3 Semi-simplicidade

A seguir definiremos semi-simplicidade em anéis, com o objetivo de caracterizar a estrutura de um anel Artiniano semi-simples.

Definição 2.12 Um anel R é dito *semi-simples* se seu radical de Jacobson $J(R)$ é nulo.

Temos uma definição de semi-simplicidade, agora queremos uma descrição da estrutura dos anéis semi-simples, o que teremos pelo menos para o caso de semi-simples Artiniano. Em paralelo também procuraremos entender um pouco mais a estrutura da álgebra FG.

Definição 2.13 Diremos que um anel R é *Artiniano à direita* se qualquer cadeia decrescente de ideais à direita de R

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots,$$

é estacionária, isto é, existe um inteiro n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ temos $I_n = I_{n+1}$.

Se uma álgebra A tem dimensão finita, então claramente A é Artiniana. Em particular, as álgebras $M_n(F)$ e $UT_n(F)$ são Artinianas, assim como FG quando $|G|$ é finito.

Definição 2.14 Diremos que um anel R é *simples* se $R^2 \neq 0$ e R não possui ideais não triviais.

Teorema 2.15 *Um anel Artiniano semi-simples é soma direta de um número finito de subanéis simples.*

Demonstração: Ver Herstein [8] Theorem 1.4.4, p. 34. ∎

O resultado abaixo, garante ainda que existe uma unicidade na decomposição.

Teorema 2.16 *Se R é um anel Artiniano semi-simples e $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ onde A_i são simples então os A_i, $i = 1, \ldots, k$ percorrem todos os ideais minimais de R.*

Demonstração: Ver Herstein [8] Lemma 1.4.4, pp. 34-35. ∎

Recordemos que um elemento e de um anel R é *idempotente* se $e^2 = e$, e tal elemento e é *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $e^k = 0$.

Definição 2.17 Um ideal I de R é dito *nil* se todos os seus elementos são nilpotentes, e diremos que I é *nilpotente* se existe n natural tal que $I^n = 0$.

Note que $I^n = 0$ implica em $a_1 \dots a_n = 0$ para qualquer conjunto de n elementos em I, disto nilpotente implica em nil. A recíproca também é verdade quando R é Artiniano.

Teorema 2.18 *Se R é um anel Artiniano então $J(R)$ é um ideal nilpotente.*

Demonstração: Ver Herstein [8] Theorem 1.3.1, p. 20. ∎

Teorema 2.19 *Seja R um anel Artiniano, então seu radical de Jacobson $J(R)$ é o maior ideal nilpotente, isto é, se I é um ideal nilpotente de R, então $I \subseteq J(R)$.*

Demonstração: Ver Lam [9] Theorem 4.12, p. 56. ∎

Teorema 2.20 *Se G é um grupo finito e F um corpo de característica zero, então a álgebra de grupo FG é semi-simples.*

Demonstração: Seja $a \in FG$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} T_a : FG & \rightarrow & FG \\ x & \longmapsto & xa \end{array},$$

é um automorfismo de FG, para todo $a \in FG$. Assim a aplicação $\psi : a \longmapsto T_a$ é um isomorfismo de álgebras de FG em $GL(FG)$.

Vamos avaliar a matriz de T_g, para $g \in G$, nos elementos da base de FG, ou seja, em $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ com $g_1 = 1$. Temos $T_g(g_1) = g_1 g, \dots, T_g(g_n) = g_n g$. Agora note que:

(i) Se $g \neq 1$ então $\mathrm{tr}(T_g) = 0$, pois $g_i g = g$ se, e somente se, $g = 1$.

(ii) $\mathrm{tr}(T_1) = |G|$.

Seja J o radical de Jacobson de FG, mostraremos que $J = \{0\}$. Suponha por contradição, que existe $0 \neq y = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n \in J$. Como $y \neq 0$, existe $\alpha_i \neq 0$ e então multiplicando pelo g_i^{-1} apropriado, segue de J ser ideal que $y g_i^{-1} \in J$. Disto podemos assumir, sem perda de generalidade, que $i = 1$ e então $y = \alpha_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$ com $\alpha_1 \neq 0$.

Pelo Teorema 2.18, J é nilpotente e portanto x é nilpotente, daí T_y é um operador nilpotente, o que implica que $\mathrm{tr}(T_y) = 0$.

Mas $y = \alpha_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n$, implica que $T_y = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_{g_2} + \ldots + \alpha_n T_{g_n}$ e então

$$0 = \mathrm{tr}(T_y) = \alpha_1 \mathrm{tr}(T_1) + \alpha_2 \mathrm{tr}(T_{g_2}) + \ldots + \alpha_n \mathrm{tr}(T_{g_n}) = \alpha_1 |G|,$$

uma contradição, pois $\alpha_1 \neq 0$. ∎

Voltando ao estudo de ideais em anéis Artinianos semi-simples, o resultado que segue nos ajudará a entender a estrutura da álgebra FG.

Teorema 2.21 *Sejam R um anel Artiniano semi-simples e $\rho \neq (0)$ um ideal à direita de R. Então $\rho = eR$ para algum idempotente $e \in R$.*

Demonstração: Ver Herstein [8] Theorem 1.4.2, p. 29. ∎

O famoso Teorema de Wedderburn tem sido a pedra angular para muitos tópicos de álgebra não comutativa e entre eles está a teoria de representações. Enunciaremos aqui uma versão deste resultado para anéis Artinianos semi-simples.

Teorema 2.22 (Wedderburn-Artin) *Se R é um anel Artiniano semi-simples, então*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(D_k),$$

onde cada D_i, $i = 1, \ldots, k$ é um anel com divisão.

Demonstração: Ver Herstein [8] Theorem 2.1.7, p. 50. ∎

Como corolário do teorema de Wedderburn-Artin, temos:

Corolário 2.23 *Seja A uma álgebra semi-simples de dimensão finita sobre um corpo de característica zero. Então o número de somandos simples de A é igual a dimensão do centro de A sobre F.*

Demonstração: Ver Herstein [8] Corollary 2.1.8, p. 51. ∎

Observação 2.24 Como combinação dos resultados de semi-simplicidade dados acima temos que se F é um corpo algebricamente fechado com característica zero e G é um grupo abeliano finito com ordem $|G|$, então $FG = f_1F \oplus \ldots \oplus f_{|G|}F$, onde $f_1, \ldots, f_{|G|}$ são idempotentes minimais de FG.

De fato, como a álgebra FG é semi-simples, pelos Teoremas 2.15 e 2.16, $FG = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$, onde B_i é ideal minimal à direita simples de FG, $i = 1, \ldots, k$. E se B é ideal minimal de FG, então $B = B_i$ para algum i. Ainda sabemos pelo Teorema 2.21, que $B_i = FGf_i$ com f_i idempotente em FG.

Por G ser abeliano a álgebra FG é comutativa, e por hipótese F é algebricamente fechado com característica zero então usando o teorema de Wedderburn-Artin temos que $k = |G|$. Daí $FG = FGf_1 \oplus \ldots \oplus FGf_{|G|}$, então temos $|G|$ elementos idempotentes distintos em FG. Observe que Ff_i é ideal minimal de FG, donde concluímos a seguinte decomposição:

$$FG = Ff_1 \oplus \ldots \oplus Ff_|G|.$$

2.4 Dualidade entre G-ações e G-graduações

Nesta seção descreveremos explicitamente a dualidade que existe entre G-ações e G-graduações em uma álgebra associativa A sobre um corpo algebricamente fechado com característica zero e quando G é grupo abeliano finito. Veremos que nesta situação uma G-ação gera uma G-graduação e uma G-graduação gera uma G-ação. Usando esse fato estabeleceremos uma condição, dependendo do grupo dos caracteres irredutíveis $\hat{G}$, para que um ideal de $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada seja G-graduado.

Proposição 2.25 *Sejam A uma álgebra associativa sobre um corpo F algebricamente fechado com característica zero e G um grupo abeliano de ordem k. Então uma G-ação em A induz uma G-graduação e uma G-graduação induz uma G-ação.*

Demonstração: Para mostrarmos a primeira implicação considere $G \subseteq \mathrm{Aut}A$ e denote a G-ação por $g(a) = a^g$, para $a \in A, g \in G$. Por conveniência estenderemos a G-ação para uma FG-ação da álgebra de grupo FG fazendo $a^{\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k} = \alpha_1 a^{g_1} + \ldots + \alpha_k a^{g_k}$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$.

Seja $\{f_1, \ldots, f_k\}$ um conjunto ortogonal de idempotentes minimais da álgebra FG como fora obtido na Observação 2.24. Logo $FG = Ff_1 \oplus \ldots \oplus Ff_k$ onde $1 = f_1 + \ldots + f_k$.

Assim se $g \in FG$, $g = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_k f_k$, e $gf_i = \beta_i f_i$. Disto temos

$$\begin{array}{rcl} \psi_i(g) : Ff_i & \longrightarrow & Ff_i \\ 1f_i & \longmapsto & \psi_i(g)(1f_i) = 1gf_i = \beta_i f_i \end{array}$$

onde ψ_i é a sub-representação irredutível da representação regular de FG associada a Ff_i, portanto $\beta_i = \chi_i(g)$, onde χ_i é o caracter irredutível associado a ψ_i. De onde obtemos $gf_i = \chi_i(g)f_i$. Logo, se $\chi_1, \ldots, \chi_k$ são os caracteres irredutíveis de G, temos que $\chi_i(f_j) = \delta_{ij} f_j$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Agora definamos, para $i = 1, \ldots, k$, os seguintes subconjuntos:

$$A_{\chi_i} = \{a \in A : a^g = \chi_i(g)a\}.$$

Veja que a^{f_i} esta em A_{χ_i} pois $gf_i = \chi_i(g)f_i$. Não é difícil se provar que A_{χ_i} é um subespaço de A gerado por todos os elementos da forma a^{f_i}, $a \in A$. Desde que $1 = f_1 + \ldots + f_k$, então para todo $a \in A$ podemos escrever $a = a^{f_1} + \ldots + a^{f_k}$ e disto segue que

$$A = \oplus_{\chi \in \hat{G}} A_\chi,$$

denotando $\hat{G}$ como o grupo dos caracteres irredutíveis de G.

Note que se $a \in A_{\chi_i}$, $b \in A_{\chi_j}$, então $a^g = \chi_i(g)a, b^g = \chi_j(g)b$, o que implica que $(ab)^g = a^g b^g = \chi_i(g)\chi_j(g)ab = \chi_i\chi_j(g)ab$, então $ab \in A_{\chi_i\chi_j}$. E portanto,

$$A_{\chi_i} A_{\chi_j} \subseteq A_{\chi_i\chi_j}.$$

Segue então que $A = \oplus_{\chi \in \hat{G}} A_\chi$ é uma $\hat{G}$-graduação. Agora, pela Observação 2.7, $G \cong \hat{G}$ e fazendo $A_{g_i} = A_{\chi_i}$ temos que $A = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma G-graduação em A.

Para demonstrarmos a recíproca, suponha que $A = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma álgebra graduada por um grupo abeliano G de ordem k. A ação definida na Observação 2.8,

$$\chi(a) = \sum_{g \in G} \chi(g) a_g,$$

onde $\chi \in \hat{G}$ e $a \in A$ é da forma $a = \sum_{g \in G} a_g$, $a_g \in A_g$. Sendo $G \cong \hat{G}$ temos que qualquer G-graduação gera uma G-ação dada por $\hat{G}$. ∎

Exemplo 2.26 Se $G = \{1, \varphi\} \cong \mathbb{Z}_2$, o grupo cíclico de ordem 2, então $A = A_0 \oplus A_1$, onde $A_0 = \{a \in A \,:\, \varphi(a) = a\} = A^G$, a subálgebra dos elementos de A fixos pela G-ação, e $A_1 = \{a \in A \,:\, \varphi(a) = -a\}$.

Por outro lado, se A é graduada por $G = \mathbb{Z}_k$, o grupo cíclico de ordem k, então o resultado acima garante a existência de um automorfismo em A de ordem k. A saber, a aplicação

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} \mapsto a_0 + \varepsilon a_1 + \ldots + \varepsilon^{k-1} a_{k-1},$$

onde $a_0 \in A_0, \ldots, a_{k-1} \in A_{k-1}$ e ε é uma raiz primitiva k-ésima da unidade, define um automorfismo em A de ordem k.

Para nosso trabalho é importante observarmos na demonstração da Proposição 2.25, que o modo com que definimos uma G-graduação à partir de uma G-ação, garante que podemos voltar, isto é, se A e G estão nas condições da proposição e $A = \oplus_{g\in G} A_g$, a G-ação $\hat{G}$ gera exatamente a graduação inicial. Este fato é consequência do isomorfismo entre G e $\hat{G}$.

Vamos ilustrar a afirmação acima para o caso em que $G = \langle g \,:\, g^n = 1\rangle \cong \mathbb{Z}_n$. Sabemos que se ε é uma raiz de ordem n da unidade então $\chi_i(g^j) = \varepsilon^{ij}$, $i = 0, \ldots, n-1$, são todos os caracteres irredutíveis de G a menos de isomorfismo, ou seja, $\hat{G} = \{\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Assim se $A = \oplus_{g^j \in G} A_j$ o automorfismo

$$\chi_1(a) = \sum_{g^j \in G} \chi_1(g^j) a_j = a_0 + \varepsilon a_1 + \ldots + \varepsilon^{n-1} a_{n-1}$$

é um gerador da G-ação definida via $\hat{G}$. A k-ésima componente homogênea da $\hat{G}$-graduação segundo a demonstração da Proposição 2.25 é

$$A_{\chi_k} = \{a \in A \,:\, a^{g^j} = \chi_k(g^j) a\}.$$

O isomorfismo entre G e $\hat{G}$ é dado por $g \mapsto \chi_1$ e então G é identificado com $\hat{G} \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ através de $a^g := \chi_1(a)$ conforme definido na demonstração da proposição. Agora note que se $a \in A_g$, então $a^g = \chi_1(a) = \varepsilon a = \chi_1(g) a$ e disto temos que $a \in A_{\chi_1}$, ou seja, $A_g \subseteq A_{\chi_1}$. Como o grupo é cíclico segue que $A_{g^j} \subseteq A_{\chi_1^j} = A_{\chi_j}$. Finalmente usando que $A = \oplus_{g^j \in G} A_{g^j} = \oplus_{\chi_j \in \hat{G}} A_{\chi_j}$ segue que $A_{g^j} = A_{\chi_j}$.

Quando o grupo G é produto de cíclicos podemos fazer considerações análogas.

Um problema que observamos no primeiro capítulo é que nem toda subálgebra de uma álgebra G-graduada herda esta propriedade. O corolário que segue estabelece uma condição necessária e suficiente para que um ideal seja homogêneo.

Corolário 2.27 *Um ideal I da álgebra $A = \oplus_{g\in G} A_g$ é estável sobre G-ações se, e somente se, I é homogêneo na G-graduação.*

Demonstração: Primeiro assumimos que I é homogêneo na G-graduação, isto é, $I = \oplus_{g\in G} I_g$ com $I_g = A_g \cap I$. Seja $\varphi \in \hat{G} \subseteq \mathrm{Aut}(A)$. Então para $i \in I$ temos

$$\varphi(i) = \varphi(\sum_{g\in G} i_g) = \sum_{g\in G} \varphi(i_g) = \sum_{g\in G} \chi_\varphi(g) i_g \in I.$$

Suponhamos agora que $\varphi(I) = I$ para toda $\varphi \in \hat{G} \subseteq \mathrm{Aut}(A)$. Então via restrição ao ideal I obtemos uma G-ação em I e essa G-ação gera uma G-graduação em I onde:

$$I_{g_i} = I_{\chi_i} = \{a \in I : a^g = \chi_i(g) a\} = I \cap A_{g_i},$$

com $i = 1, \ldots, |G|$. ∎

Como aplicação do corolário acima temos que se $A = UT_n(F)$ então seu radical de Jacobson $J(A)$ é homogêneo. Com efeito, da Observação 1.32, $J(A)$ é o ideal formado pelas matrizes estritamente triangulares. Agora, como automorfismo leva ideal maximal em ideal maximal e o radical de Jacobson é a intersecção dos ideais maximais, se φ é um automorfismo de A então $\varphi(J(A)) = \varphi(\cap \rho_i) = \cap \varphi(\rho_i) = \cap \rho_j = J(A)$, onde ρ_k percorre todos os ideais maximais de A.

Observação 2.28 Ainda se $W = [E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}]$ é claro que W está contido em $\mathrm{Ann}(J)$. (anulador à esquerda do radical de Jacobson $J = J(A)$ em A.) Já sabemos que J é homogêneo pelo Lema 1.14 e acima fornecemos outra demonstração deste fato agora usando o Corolário 2.27.

Encerraremos este capítulo mostrando que o ideal $W = [E_{1,n}, \ldots, E_{n-1,n}]$ que foi apresentado no final do primeiro capítulo é homogêneo, mas antes precisamos de duas afirmações.

Afirmação 2.29 *$Ann(J)$ é homogêneo.*

Demonstração: Seja $x \in \mathrm{Ann}(J)$. Vamos mostrar que $\varphi(x) \in \mathrm{Ann}(J)$, para todo automorfismo φ de A. Com efeito, seja $a \in J = \varphi(J)$, então existe $b \in J$ tal que $a = \varphi(b)$. Logo

$$\varphi(x)a = \varphi(x)\varphi(b) = \varphi(xb) = \varphi(0) = 0.$$

Assim, segue que $\varphi(x) \in \mathrm{Ann}(J)$ e disto que $\mathrm{Ann}(J)$ é homogêneo. ∎

Afirmação 2.30 *$[E_{nn}]$ é homogêneo.*

Demonstração: Temos que $W \oplus [E_{nn}] = \mathrm{Ann}(J)$ é homogêneo. Logo $\varphi(E_{nn}) = \alpha_1 E_{1,n} + \ldots + \alpha_{n-1}E_{n-1,n} + \alpha_n E_{n,n}$. Como $E_{nn}^2 = E_{nn}$ temos que $\varphi(E_{nn})^2 = \varphi(E_{nn})$. Usando que os E_{ij} são idempotentes e que $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$, temos que $(\alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n + \alpha_n^2)E_{nn} = \varphi(E_{nn})$, donde concluímos que $\varphi(E_{nn}) \in [E_{nn}]$. ∎

Proposição 2.31 *O ideal $W = [E_{1,n}, \ldots, E_{n-1,n}]$ é homogêneo.*

Demonstração: Fixemos $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Do que foi mostrado nas duas afirmações acima temos que $\varphi(E_{i,n}) = \alpha_1 E_{1,n} + \ldots + \alpha_{n-1}E_{n-1,n} + E_{n,n}$. Como $\varphi(E_{n,n}) = \alpha\varphi(E_{n,n})$ e $\varphi(E_{n,n})\varphi(E_{i,n}) = 0$ temos que $\alpha\alpha_n = 0$ e disto temos $\alpha = 0$ ou $\alpha_n = 0$. Se $\alpha = 0$ então $\varphi(E_{n,n}) = 0$ contrariando a injetividade de φ. Assim $\alpha_n = 0$, donde concluimos que $\varphi(W) = W$. ∎

Capítulo 3

As Graduações Abelianas de $UT_n(F)$

A descrição de todas as possíveis graduações de uma álgebra é um importante problema na teoria de anéis graduados e suas aplicações. Em particular, a descrição das graduações da álgebra $M_n(F)$ tem um papel essencial na teoria de identidades polinomiais (ver, por exemplo [2]).

Também é interessante trabalharmos as graduações das álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_n(F)$, que é o caso mais simples de álgebra de matrizes triangulares em bloco superior, e estas por sua vez são importantes no estudo de invariantes numéricos de PI-álgebras, em particular no estudo de variedades minimais ver por exemplo [6].

Neste capítulo descreveremos todas as G-graduações da álgebra $UT_n(F)$ a menos de isomorfismo, para o caso em que G é abeliano finito e o corpo F é algebricamente fechado com característica zero.

3.1 Algumas Propriedades de uma Graduação

Nosso objetivo aqui é definir algumas propriedades de uma G-graduação. Nesta seção os resultados ainda não necessitam das condições descritas acima, isto é, são válidos para qualquer grupo G e corpo F.

Observação 3.1 Sejam G um grupo e $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação em A. Em geral, não podemos dizer que o conjunto $\mathrm{Supp}(G) = \{g \in G : A_g \neq 0\}$ é um subgrupo de G, temos apenas que este é fechado para a multiplicação de G, o que vem da relação $A_g A_h \subseteq A_{gh}$.

Adicionando algumas hipóteses podemos mostrar que $\mathrm{Supp}(G)$ é grupo. Por exemplo, suponha que $UT_n(F) = A = \oplus_{g\in G} A_g$ onde cada A_g tem dimensão no máximo 1, e além disso, temos que os elementos homogêneos não nulos são invertíveis e a componente neutral é da forma $A_1 = \{\lambda E : \lambda \in F\}$, onde E é a matriz identidade, então temos que $\mathrm{Supp}(G)$ é subgrupo de G. De fato, se $0 \neq x \in A_g$ então x é invertível e $x^{-1} = \sum_{h\in G} y_h$, $y_h \in A_h$. Por outro lado, $E = xx^{-1} = x(\sum_{h\in G} y_h) = \sum_{h\in G} xy_h$, com $xy_h \in A_{gh}$. Mas $E \in A_1$, e portanto $A_{gh} \subseteq A_1$, para todo $h \in G$, disto segue que $h = g^{-1}$ e $x^{-1} \in A_{g^{-1}}$.

Apesar de bem restritivas as condições impostas acima, destacamos esse resultado pois será usado no texto.

Lema 3.2 *Sejam G um grupo qualquer, $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada, e $a, b \in A_1$. Então a subálgebra aAb é homogênea na G-graduação.*

Demonstração: Tomemos $x \in aAb$, então $x = ax'b$ para algum $x' \in A$, como A é G-graduada $x' = \sum_{g\in G} x'_g$, onde $x'_g \in A_g$. Então:

$$x = a(\sum_{g\in G} x'_g)b = \sum_{g\in G} ax'_g b,$$

observe que $ax'_g b \in aAb$ e $A_1 A_g A_1 \subseteq A_g$ então $ax'_g b \in A_g$. Assim conseguimos escrever qualquer elemento de aAb como uma soma, onde cada fator $ax'_g b \in A_g \cap aAb$.

Portanto aAb é homogêneo na G-graduação. ∎

A seguir daremos uma condição necessária e suficiente para que uma graduação em UT_n seja elementar. Lembrando que UT_n tem dimensão finita então qualquer graduação em UT_n é finita independente do grupo ser finito ou não.

Proposição 3.3 *Seja $A = UT_n(F) = \oplus_{g\in G} A_g$ graduada por um grupo qualquer G com elemento neutro 1. Então a graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes unitárias E_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$ são homogêneas.*

Demonstração: Primeiro se a graduação é elementar pela própria definição as matrizes unitárias são elementos homogêneos. Se $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ são homogêneos. Fixando i, $E_{ii} \in A_g$ para algum $g \in G$, e como $E_{ii}^2 = E_{ii}$ temos que $E_{ii} \in A_{g^2}$, isto implica que $g^2 = g$, logo $g = 1$. Então $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ pertencem à componente neutral A_1.

Como toda G-graduação em UT_n é finita, temos que $\mathrm{Supp}(A)$ é finito. Denote $g_1 = 1 \in \mathrm{Supp}(A)$, e começando por g_1 defina $g_{i+1} = g_i h_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, onde $h_i \in \mathrm{Supp}(A)$ satisfaz a condição $E_{i,i+1} \in A_{h_i}$. Temos $E_{ij} = E_{i,i+1} \ldots E_{j-1,j}$ e então pela relação $A_g A_h \in A_{gh}$ para todo $g, h \in G$ obtemos $E_{ij} \in A_{g_i^{-1} g_j}$.

Portanto para $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ a graduação dada é elementar correspondente à $\bar{g}$. ∎

Corolário 3.4 *Seja $A = UT_n = \oplus_{g \in G} A_g$ como na proposição acima. Então a graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes unitárias E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ estão na componente neutral A_1.*

Demonstração: Se a graduação é elementar temos que E_{ii} para $i = 1, \ldots, n$ são homogêneas e lembrando que elas são idempotentes o resultado segue diretamente.

Agora se as matrizes E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ estão em A_1 chamando $A_{ij} = E_{ii} A E_{jj}$ que pelo Lema 3.2 é homogêneo para $1 \leq i < j \leq n$. Abrindo as contas vemos que $\dim(A_{ij}) = 1$ de onde todos os seus elementos são homogêneos e $E_{ij} \in A_{ij}$ e o corolário esta provado. ∎

3.2 Classificação das Graduações Abelianas de $UT_n(F)$

Trabalharemos agora no sentido de descrever todas as graduações abelianas da álgebra $UT_n(F)$. A próxima proposição garante a existência de elementos bem específicos na componente neutral da graduação A_1, e será usada como um lema técnico para a demonstração do teorema principal do capítulo. As hipóteses G abeliano e F algebricamente fechado com característica zero são essenciais para essa demonstração, no entanto veremos no Capítulo 4 uma forma de contornar esse problema e assim teremos o mesmo resultado num contexto mais geral.

Proposição 3.5 *Sejam F algebricamente fechado com característica zero e $A = UT_n = \oplus_{g \in G} A_g$ onde G é um grupo abeliano finito. Então existem matrizes estritamente triangulares superiores $Y_1, \ldots, Y_n$ tais que $e_1 = E_{11} + Y_1, \ldots, e_n = E_{nn} + Y_n$ são ortogonais idempotentes e estão em A_1, onde A_1 é a componente neutral de A na G-graduação.*

Demonstração: Seja $|G| = m$. Chamaremos aqui $\hat{G} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ a G-ação em A onde $\varphi_i(a_g) = \chi_i(g)a_g$ para $a_g \in A_g$ e $\chi_1, \ldots, \chi_m$ são os caracteres irredutíveis de G.

Faremos a demonstração por indução sobre n, sempre olhando para UT_s com $s \leq n$ como sua projeção em UT_n.

O caso $n = 1$ é claro. Seja $n \geq 2$. O radical de Jacobson de A, $J(A)$ é o ideal das matrizes triangulares superiores, pela Observação 1.32, que é estável por todos os automorfismos de A. Assim como estamos nas hipóteses do Corolário 2.27, temos que $J(A)$ é homogêneo.

Seja $W = [E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}]$ então W anula $J(A)$ e é estável por automofismos de A (ver Proposição 2.28), então W é homogêneo na G-graduação.

Consideremos a projeção canônica de A sobre A/W, $\pi : A \to A/W$, onde A/W é G-graduada com a G-graduação induzida, daí π é um homomorfismo G-graduado.

Observe que

$$A/W = \pi(UT_{n-1}) \oplus \pi([E_{nn}])$$

e mais: $UT_{n-1} \cap W = (0)$, donde segue que $\pi(UT_{n-1}) \cong UT_{n-1}$.

Nossa intenção agora é mostrar que $\pi(UT_{n-1})$ é um ideal homogêneo de A/W, a fim de usarmos a hipótese de indução em $\pi(UT_{n-1})$ e só depois passar para UT_{n-1}, já que não podemos garantir que UT_{n-1} seja homogênea na G-graduação de A.

Fazendo alguns cálculos chega-se que $\mathrm{Ann}(C) = \pi(UT_{n-1})$, onde $C = \pi([E_{nn}])$, daí pelo Lema 1.14 o anulador de um ideal homogêneo é homogêneo então $\pi(UT_{n-1})$ é homogêneo em A/W se C for homogêneo.

Temos a igualdade $J(\pi(UT_{n-1}) \oplus C) = J(\pi(UT_{n-1}))$ conforme a Observação 1.32, mas o radical de $A/W = \pi(UT_{n-1}) \oplus C$ que é G-graduada com a graduação induzida é homogêneo, isto é, $J(\pi(UT_{n-1}))$ é homogêneo na G-graduação de A/W. O seu anulador bilateral que é gerado por $\{\pi(E_{nn}), \pi(E_{1,n-1})\}$ também é homogêneo por ser anulador de subálgebra homogênea.

Agora seja φ é um automorfismo de A. Como W é homogêneo este automorfismo pode ser visto de forma natural como um automorfismo em A/W que também será denotado por φ.

Pelo fato do anulador bilateral ser homogêneo temos $\varphi(\pi(E_{nn})) = \alpha\pi(E_{nn}) + \beta\pi(E_{1,n-1})$, para $\alpha, \beta \in F$. Assim $\varphi(\pi(E_{nn}))^2 = \varphi(\pi(E_{nn})^2) = \varphi(\pi(E_{nn}))$. Então

$$(\alpha\pi(E_{nn}) + \beta\pi(E_{1,n-1}))^2 = \alpha\pi(E_{nn}) + \beta\pi(E_{1,n-1}),$$

de onde concluímos que $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Portanto C é estável por todo automorfismo de A/W e segue que C é homogênea. Então seu anulador $\pi(UT_{n-1})$ também é homogêneo.

Pela hipótese de indução existem $Y'_1, \ldots, Y'_{n-1}$ pertencentes ao ideal gerado por $\{E_{ij} : 1 \leq i < j \leq n-1\}$ tal que $\bar{e}_1 = E_{11} + Y'_1 + W, \ldots, \bar{e}_{n-1} = E_{n-1,n-1} + Y'_{n-1} + W$ são ortogonais idempotentes na componente neutral da G-graduação de $\pi(UT_{n-1})$ que é induzida da G-graduação de A.

Por $UT_{n-1} \cong \pi(UT_{n-1})$ tomaremos as pré-imagens dos elementos acima $e'_1 = E_{11} + Y'_1, \ldots, e'_{n-1} = E_{n-1,n-1} + Y'_{n-1}$ que são ortogonais idempotentes em UT_{n-1} e ainda estáveis pelos automorfismos φ_i módulo W, pois pelo Lema 2.9 os elementos de $(A/W)_1$ são estáveis pelos automorfismos φ induzidos em A/W e por isso devemos tomá-los módulo W.

Fazendo $e'_n = E_{nn}$ continuamos com um conjunto estável pelos φ_i módulo W e $e'_n e'_j = e'_j e'_n = 0$ para $j = 1, \ldots, n-1$.

Desde que o corpo F é algebricamente fechado e por hipótese $\hat{G} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ é finito, então cada φ_i tem ordem finita e portanto φ_i é diagonalizável, para todo $i = 1, \ldots, m$. Além disso, como supomos $\hat{G}$ abeliano, da comutatividade dos operadores $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ segue que podemos diagonalizá-los simultaneamente. Temos ainda que $\hat{G}(W) \subseteq W$, então podemos ver $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ como operadores de W, daí existe uma base $w_1, \ldots, w_{n-1}$ de W consistindo de autovetores comuns para todos os φ_i, $i = 1, \ldots, m$, tais que $\varphi(w_j) = \lambda_j w_j$ para todo $\varphi \in \hat{G}$.

Agora a partir dos e'_j que temos, construiremos elementos idempotentes ortogonais em A_1. Para tanto, fixemos e'_j e observemos que

$$\varphi(e'_j) = e'_j + a_1 w_1 + \ldots + a_{n-1} w_{n-1},$$

para qualquer $\varphi \in \hat{G}$ onde $a_1, \ldots, a_{n-1} \in F$.

E por $\varphi(w_i) = \lambda_i w_i$ um cálculo direto nos dá que

$$\varphi^k(e'_j) = e'_j + \sum_{i=1}^{n-1} a_i (1 + \lambda_i + \ldots + \lambda_i^{k-1}) w_i.$$

Desde que $\varphi^m = 1 = Id$,

$$a_i (1 + \lambda_i + \ldots + \lambda_i^{m-1}) = 0, \text{ para } i = 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Agora se ψ é outro elemento de $\hat{G}$, $\psi(w_i) = \mu_i w_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$ e

$$\psi(e'_j) = e'_j + b_1 w_1 + \ldots + b_{n-1} w_{n-1},$$

então

$$b_i(1 + \mu_i + \ldots + \mu_i^{m-1}) = 0, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Como $\hat{G}$ é abeliano, temos que $\psi\varphi = \varphi\psi$, para todo $\psi \in \hat{G}$ e então:

$$\psi\varphi(e'_j) = e'_j + \sum_{i=1}^{n-1} (b_i + \mu_i a_i) w_i,$$

$$\varphi\psi(e'_j) = e'_j + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i b_i) w_i,$$

usando novamente a igualdade $\psi\varphi = \varphi\psi$ e também que o conjunto $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ é linearmente independente obtemos:

$$b_i(1 - \lambda_i) = a_i(1 - \mu_i), \text{ para } i = 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Agora construiremos elementos e''_j pela seguinte regra. Se todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são diferentes de 1 para o $\varphi \in \hat{G}$ fixado, faremos:

$$e''_j = e'_j + \frac{a_1}{1 - \lambda_i} w_1 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1 - \lambda_{n-1}} w_{n-1}. \tag{3}$$

Por outro lado, se algum $\lambda_i = 1$ mas para algum $\psi \in \hat{G}$ tivermos que $\mu_i \neq 1$, então na expressão de e''_j, substituímos o coeficiente $\frac{a_i}{1-\lambda_i}$ de w_i por $\frac{b_i}{1-\mu_i}$.

No último caso se $\rho(w_i) = w_i$ para todo $\rho \in \hat{G}$ então colocamos o coeficiente de w_i igual a 0. Note ainda, pela expressão (1), que $\lambda_i = 1$ somente se $a_i = 0$.

Veremos agora que os e''_j são invariantes por φ. No primeiro caso se todo $\lambda_i \neq 1$, então:

$$\varphi(e''_j) = \varphi(e'_j) \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{1 - \lambda_i} \varphi(w_i) = e'_j \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} a_i w_i \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i a_i}{1 - \lambda_i} w_i$$

$$= e^{'}_j \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(1 + \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i}\right) w_i = e^{'} j \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{1 - \lambda_i} w_i = e''_j.$$

No segundo caso se algum $\lambda_i = 1$ mas $\mu_i \neq 1$ para algum $\psi \in \hat{G}$, então o coeficiente de w_i depois da ação de φ fica:

$$a_i + \frac{b_i}{1 - \mu_i} = \frac{b_i}{1 - \mu_i},$$

pois $a_i = 0$.

E no último caso, se $\rho(w_i) = w_i$, para todo $\rho \in \hat{G}$, então o coeficiente de w_i é zero na expressão de e''_j e como $\lambda_i = 1$ implica que $a_i = 0$, então o coeficiente de w_i na expressão de $\varphi(e''_j)$ é zero como na expressão de e''_j. De onde $\varphi(e''_j) = e''_j$ para $j = 1, \ldots, n$, sendo φ o elemento fixado no início.

Tomando ψ um elemento qualquer de $\hat{G}$ observando a relação (2) teremos ainda que vale a igualdade $\psi(e''_j) = e''_j$ para $j = 1, \ldots, n$.

Agora seja $u_j = e''_j - e'_j$, segue que $e''_j = e'_j + u_j$, $j = 1, \ldots, n$. Pela própria expressão de e''_j temos que $u_j \in W$ e combinando o que fora obtido até agora segue que $e''_1, \ldots, e''_n$ são idempotentes, $We''_j = 0$ para $j = 1, \ldots, n-1$ e $Wv = 0$ para todo $v \in W$, donde vem as relações:

$$(e''_j)^2 = (e'_j + u_j)^2 = e'_j + e'_j, \quad j = 1, \ldots, n-1;$$

$$(e''_n)^2 = (e'_n + u_n)^2 = e'_n + u_n e'_n.$$

Enfim definimos

$$e_j = e'_j + e'_j u_j - e'_j(u_j + u_n)e'_n, \ j = 1, \ldots, n-1,$$

$$e_n = e'_n + u_n e'_n,$$

que são escolhidos de forma a satisfazer a condição $\psi(e_j) = e_j$ para todo $\psi \in \hat{G}$ o que, de acordo com o Lema 2.9, implica que $e_1, \ldots, e_n$ estão em A_1. Por construção, os elementos $e_1, ..., e_n$ são da forma $E_{11} + Y_1, \ldots, E_{nn} + Y_n$, respectivamente, com $Y_1, \ldots, Y_n \in J(A) = UT_{n-1}$.

Agora se $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ então $e_j e_i = (e'_j + e'_j u_j - e'_j(u_j + u_n)e'_n)(e'_i + e'_i u_i - e'_i(u_i + u_n)e'_n)$. Temos que $e'_1, \ldots, e'_n$ são idempotemtes ortogonais, $We'_j = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$ e $e'_n W = 0$.

Segue que $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ para todo $i, j \in \{1, ..., n-1\}$, $e_n^2 = e_n$ e

$$e_j e_n = (e'_j + e'_j u_j - e'_j(u_j + u_n)e'_n)(e'_n + u_n e'_n) =$$

$$e'_j u_j e'_n - e'_j(u_j + u_n)e'_n + e'_j u_n e'_n = 0,$$

para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Ou seja, encontramos os elementos $e_1, \ldots, e_n$ ortogonais idempotentes em A_1 encerrando a demonstração. ∎

Neste momento estamos em condições de enunciar e demonstrar o teorema principal deste capítulo, que garante que qualquer graduação abeliana na álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero é isomorfa a uma graduação elementar.

Teorema 3.6 *Sejam F um corpo algebricamente fechado com característica zero, G um grupo abeliano finito e $UT_n(F) = A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação na álgebra das matrizes triangulares superiores. Então A como uma álgebra G-graduada é isomorfa a $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar.*

Demonstração: Pela Proposição 3.5 existem elementos idempotentes ortogonais $e_1 = E_{11}+Y_1, \ldots, e_n = E_{nn}+Y_n$ em A_1, pelo Lema 3.2 os subespaços $A_{ij} = e_i A e_j$ são homogêneos. E ainda se $i \leq j$ temos que $0 \neq e_i E_{ij} e_j \in A_{ij}$ então $A_{ij} \neq \{0\}$.

Afirmamos que A é soma direta dos A_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$:

$$A = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq n} A_{ij}.$$

De fato, é imediato que $A_{ij} \subseteq A$ e então se mostrarmos que a intersecção de um A_{ij} com o espaço formado pela soma dos demais é nula para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq n$, obteremos que a soma é direta e está contida em A. Concluiremos a igualdade usando que a soma direta dos A_{ij} tem a mesma dimensão de A. Para tanto, se $x \in A_{ij}$ e x também esta na soma dos demais A_{kl}, então $i \neq k$ ou $j \neq l$.

Se assumirmos que $i \neq k$, teremos que $x = e_i x' e_j$ e também que $x = \sum_{k,l,k\neq i}(e_k x_{kl} e_l)$. Como e_i, e_j são idempotentes $e_i x e_j = e_i e_i x' e_j e_j = e_i x' e_j = x$ então:

$$x = e_i x e_j = e_i \sum_{k,l,k\neq i} (e_k x_{kl} e_l) e_j = 0,$$

pois $e_i e_k = 0$ se $i \neq k$. Logo a intersecção é nula. Caso $j \neq l$ chegaremos a uma contradição semelhante já que $e_j e_l = 0$ se $j \neq l$.

Já vimos que cada A_{ij} é não nulo e como a quantidade de subespaços A_{ij} é igual a dimensão de A, temos que A_{ij} é unidimensional para $1 \leq i \leq j \leq n$. De onde temos que

$$A = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq n} A_{ij}.$$

Note que o radical de Jacobson $J(A)$ que é a subálgebra das matrizes estritamente triangulares superiores é igual ao espaço gerado por $\{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$. E mais, $0 \neq J(A)^{n-1} = A_{12}A_{23} \dots A_{n-1,n}$.

Desde que A_{ij} é unidimensional, visto que é homogêneo teremos que $A_{ij} = \oplus_{g \in G}(A_{ij} \cap A_g) \subseteq A_h$ para algum $h \in G$, então todo elemento de A_{ij} é homogêneo. Consideremos então um gerador $a_{i,i+1}$ homogêneo não nulo tal que $a_{i,i+1} = e_i a_{i,i+1} e_{i+1}$ de $A_{i,i+1}$, logo $A_{i,i+1} = [a_{i,i+1}]$.

Agora considere o conjunto dos a_{ij} abaixo:

$$a_{11} = e_1, \dots, a_{nn} = e_n, \quad a_{ij} = a_{i,i+1} \dots a_{j-1,j}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

Afirmamos que o conjunto $\{a_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ é uma base de elementos homogêneos, já que produto de homogêneo é homogêneo em A. Primeiramente observe que $a_{ij} \neq 0$, $1 \leq i < j \leq n$, e temos que $A_{12} \dots A_{n-1,n} \neq 0$. Se $a_{12} \dots a_{n-1,n} = 0$ então para todo $x \in A_{12} \dots A_{n-1,n}$ teríamos:

$$x = \alpha_{12}a_{12} \dots \alpha_{n-1,n}a_{n-1,n} = \alpha_{12} \dots \alpha_{n-1,n}a_{12} \dots a_{n-1,n} = 0,$$

contradizendo o fato de $A_{12} \dots A_{n-1,n} \neq 0$. Logo $a_{12} \dots a_{n-1,n} \neq 0$ e portanto $a_{i,i+1} \dots a_{j-1,j} \neq 0$ sempre que $1 \leq i < j \leq n$.

Para mostrar que o conjunto é linearmente independente tomemos uma combinação linear nula

$$\alpha_{11}a_{11} + \dots + \alpha_{1n}a_{1n} + \alpha_{22}a_{22} + \dots + \alpha_{2n}a_{2n} + \dots + \alpha_{nn}a_{nn} = 0.$$

Pela Proposição 3.5 temos $a_{ii} = E_{ii} + Y_i$ onde Y_i é estritamente triangular superior. Como as matrizes $a_{i,i+1}$ são tomadas estritamente triangulares superiores pois estão em $A_{i,i+1} = e_i A e_{i+1}$, segue que $\alpha_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Resta então $\alpha_{12}a_{12} + \dots + \alpha_{1n}a_{1n} + \alpha_{23}a_{23} + \dots + \alpha_{2n}a_{2n} + \dots + \alpha_{n-1,n}a_{n-1,n} = 0$.

Quando $i < j$ definimos

$$a_{ij} = a_{i,i+1} \dots a_{j-1,j} \in A_{i,i+1} \dots A_{j-1,j},$$

então $a_{ij} = e_i x_i e_{i+1} \dots e_{j-1} x_{j-1} e_j$, onde $x_i, \dots, x_j \in A$ e fazendo $x = x_i e_{i+1} \dots e_{j-1} x_{j-1} \in A$ temos $a_{ij} = e_i x e_j \in e_i A e_j = A_{ij}$. Como a soma $\oplus_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}$ é direta, o zero de A se escreve de forma única como soma de elementos em A_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$ e enfim temos $\alpha_{ij}a_{ij} = 0$, donde $\alpha_{ij} = 0$. Assim temos uma base para A formada por elementos homogênos e ainda com multiplicação dada por $a_{ij}a_{kl} = \delta_{kj}a_{il}$.

Finalmente considere o automorfismo G-graduado de UT_n definido por

$$\begin{array}{rcl} \phi : A & \rightarrow & UT_n = \oplus_{g\in G}\phi(A_g) \\ a_{ij} & \longmapsto & E_{ij} \end{array}.$$

Concluimos observando que a graduação $UT_n = \oplus_{g\in G}\phi(A_g)$ é elementar conforme a Proposição 3.3, pois as matrizes unitárias E_{ij} são homogêneas nesta G-graduação. ∎

Podemos observar nas demonstrações acima que a teoria de representações foi usada fortemente. Muitas vezes é difícil se garantir que uma subálgebra seja homogênea, então o Corolário 2.27 de representações vem simplificar o trabalho, mas temos o problema da teoria de representações ser construída com a hipótese do corpo base ser algebricamente fechado com característica zero.

No entanto veremos que é possível mostrar que as graduações de UT_n são sempre elementares a menos de isomorfismo, com um trabalho mais minucioso na indução.

Capítulo 4

Graduações com Grupos Finitos

Vimos no capítulo anterior, que qualquer G-graduação na álgebra das matrizes triangulares superiores é isomorfa a uma G-graduação elementar, assumindo que G é abeliano finito e a álgebra UT_n é sobre um corpo algebricamente fechado com característica zero. Agora provaremos o mesmo resultado para o caso geral, usaremos técnicas diferentes pois o método do Capítulo 3 está baseado na dualidade entre G-graduações e G-ações e esta depende fortemente do grupo ser abeliano finito e do corpo base ser algebricamente fechado com característica zero.

Em todo este capítulo F denotará um corpo qualquer.

4.1 Alguns Resultados de Álgebra Linear

Sabemos que qualquer matriz em $M_n(F)$ é conjugada de sua forma canônica de Jordan, isto é, dada $X \in M_n(F)$ existe J uma matriz em blocos de Jordan, tal que $X = Q^{-1}JQ$ para alguma matriz inversível Q.

Se X for idempotente então teremos que a matriz J é diagonal. De fato $XX = X$ o que implica que $Q^{-1}JQQ^{-1}JQ = Q^{-1}JQ$ de onde J também será idempotente e uma matriz em blocos de Jordan é idempotente somente se todos os blocos tem tamanho 1, ou seja, ela é diagonal.

O próximo lema melhora o resultado no sentido de caracterizar essa matriz diagonal se tomarmos a matriz idempotente triangular superior.

Lema 4.1 *Qualquer matriz idempotente em $A = UT_n$ é conjugada de uma matriz idempotente diagonal do tipo $E_{i_1 i_1} + \ldots + E_{i_k i_k}$, para $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.*

Demonstração: Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre F e considere uma cadeia de subespaços de V

$$V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V,$$

com $\dim(V_k) = k$, $k = 1, \ldots, n$ e $V_k = [\{v_1, \ldots, v_k\}]$. Então uma matriz em A pode ser vista como uma transformação linear de V que satifaz a relação $T(V_k) \subseteq V_k$. De fato, seja $\beta = \{v_n, \ldots, v_1\}$ então se

$$\begin{array}{rcccccccc} T(v_n) & = & \alpha_{11}v_n & + & \alpha_{12}v_{n-1} & + & \ldots & + & \alpha_{1n}v_1 \\ T(v_{n-1}) & = & 0 & + & \alpha_{22}v_{n-1} & + & \ldots & + & \alpha_{2n}v_1 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ T(v_2) & = & 0 & + & \ldots & + & \alpha_{n-1,n-1}v_2 & + & \alpha_{n-1,n}v_1 \\ T(v_1) & = & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & \alpha_{nn}v_1 \end{array}.$$

A matriz $[T]_\beta \in A$ e satisfaz $T(V_k) \subseteq V_k$.

Seja e um elemento idempotente de A. Provar o resultado é equivalente a encontrar uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $V_k = [\{v_1, \ldots, v_k\}]$ e $e(v_i) = \varepsilon_i v_i$ para todo i, onde $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

A demonstração será feita por indução em n. O caso $n = 1$ é trivial.

Assuma então por hipótese de indução que existe $v_1, \ldots, v_n$ base de V com $e(v_j) = \varepsilon_j v_j$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Agora se $e(v_n) \notin V_{n-1}$ temos que $\{v_1, \ldots, e(v_n)\}$ é a base desejada. Caso contrário, se $e(v_n) \in V_{n-1}$, então $v_n' = v_n - e(v_n)$ é tal que $e(v_n') = 0$ e $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n'\}$ é base de V. ∎

Como corolário do acima temos o seguinte resultado.

Corolário 4.2 *Seja $e \in A$ um elemento idempotente. Então a subálgebra eAe é isomorfa a $UT_k(F)$ onde $k = tr(e)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.1 e é conjugada de uma matriz do tipo $Y = E_{i_1 i_1} + \ldots + E_{i_k i_k}$, isto é existe M inversível tal que $e = M^{-1}YM$. E ainda, e é idempotente, o que implica que os termos diagonais de e são 0 ou 1. Então $\mathrm{tr}(e) = \mathrm{tr}(Y)$.

Assim observe que $YAY = UT_k$ (aqui UT_k é visto como sua projeção em A).

Como M é invertível, temos $A \cong M^{-1}AM$, e construimos o requerido isomorfismo de eAe em YAY fazendo para $x \in A$, $exe \longmapsto M^{-1}YMxM^{-1}YM \cong M^{-1}YxYM$, pela conjugação por M em A, aplicando novamente a conjugação no resultado chegamos em YxY. ∎

Lema 4.3 *Todo conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de n idempotentes ortogonais de A está conjugado com $\{E_{11}, \ldots, E_{nn}\}$, isto é, cada a_i é conjugada de uma matriz E_{jj}, mudando a ordem se necessário, $a_i = Q^{-1}E_{ii}Q$ para alguma matriz Q inversível dependendo de i.*

Demonstração: Sejam V um espaço vetorial n-dimensional e uma cadeia como no Lema 4.1 e olhemos para A como a álgebra de todas as tranformações lineares de V que satisfazem a relação $T(V_k) \subseteq V_k$. Então para se provar o teorema é suficiente encontrar uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $V_k = [\{v_1, \ldots, v_k\}]$, $k = 1, \ldots, n$ e $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$ onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Usaremos indução em n. O caso $n = 1$ é trivial.

Seja $n \geq 2$, primeiro vamos escolher uma base arbitrária $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ do espaço vetorial V com $V_k = [\{u_1, \ldots, u_k\}]$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Assim denotaremos cada a_i como a matriz de uma transformação linear associada à base β.

Seja $[a_k]_{ij}$ denotando a (i, j)-entrada da matriz a_k, $k = 1, \ldots, n$. Note que como $a_k^2 = a_k$, temos que $[a_k]_{ii} = 0$ ou 1 para todo $i = 1, \ldots, n$. Temos n matrizes ortogonais distintas com essa propriedade. Logo cada a_k tem precisamente uma entrada não nula na diagonal, e essa entrada é diferente para cada k.

Reordenando as matrizes a_k se necessário, podemos assumir que $[a_1]_{11} = [a_2]_{22} = \ldots = [a_n]_{nn} = 1$ e $[a_i]_{jj} = 0$ se $i \neq j$. Se colocarmos $e = a_1 + \ldots + a_{n-1}$ então e tem a entrada (n, n) nula e

$$e^2 = (a_1 + \ldots + a_{n-1})^2 = a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_1 + \ldots + a_{n-1} = e.$$

Pelo Corolário 4.2, eAe é isomorfa a UT_{n-1}. Usando a hipótese de indução em $n-1$, existe uma base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de V_{n-1} tal que $a_i(v_j) = \delta_{ij}$, para todo $1 \leq i, j \leq n-1$. Agora se tomarmos $v_n = a_n(u_n) \notin V_{n-1}$, como a_n é idempotente, obtemos uma base de V que satisfaz a condição desejada. ∎

4.2 Classificação das Graduações de $UT_n(F)$

Nosso objetivo agora é mostrar que as G-graduações da álgebra UT_n são elementares a menos de isomorfismo, para isso como fizemos no Capítulo 3, precisaremos garantir a existência de n elementos ortogonais idempotentes, mas agora não será necessário estarem em A_1, pois usaremos os resultados da seção anterior para construir o isomorfismo G-graduado de outra forma. Além disso, o método usado para mostrar a existência de elementos desta forma é totalmente diferente do usado anteriormente.

O leitor poderá observar que neste caso teremos um trabalho bem maior do que quando usamos a teoria de representações.

Observação 4.4 Se A' é uma subálgebra da álgebra das matrizes triangulares superiores que contém a matriz identidade E, então A' posssui uma subálgebra maximal semi-simples, no sentido de que se C é subálgebra semi-simples de A' então $C \subseteq B$, onde B denota essa subálgebra maximal semi-simples.

Para se mostrar esse fato observe que $B_1 = [E]$ é simples logo é semi-simples e $A' = B_1 \oplus \Delta_1$, onde $\Delta_1 = A' - B_1$. Agora se Δ_1 não possui subálgebra semi-simples então $B = B_1$, caso contrário $\Delta_1 = B_2 \oplus \Delta_2$ onde B_2 é soma de subálgebras simples portanto $B_1 \oplus B_2$ é soma direta de simples que é semi-simples. Se Δ_2 não possui subálgebra semi-simples $B = B_1 \oplus B_2$, caso contrário continuamos o processo, que em um determinado momento deve parar pois A' tem dimensão finita e assim teremos B nas condições desejadas.

Quando trabalhamos com anéis Artinianos, sabemos que radical nulo implica em semi-simplicidade. Mesmo quando não temos o radical nulo, é possível estudarmos a estrutura de um anel R à partir do estudo da estrutura do anel quociente $R/J(R)$. Os anéis R e $R/J(R)$ possuem algumas propriedades em comum, como podemos ver na proposição que segue.

Proposição 4.5 *Os anéis R e $R/J(R)$ têm os mesmos módulos simples à esquerda.*

Demonstração: Ver Lam [9] Proposition 4.8, pp. 55. ∎

Agora mostraremos a existência de um conjunto de n ortogonais idempotentes na componente neutral de qualquer graduação da álgebra $UT_n(F)$. Resultado este que é essencial na classificação de todas as graduações de $UT_n(F)$.

Proposição 4.6 *Seja $A = UT_n(F) = \oplus_{g\in G} A_g$ a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo arbitrário F graduada por um grupo com identidade $1 \in G$. Então A_1 contém n elementos ortogonais idempotentes.*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução em n. O caso $n = 1$ é claro.

Seja $n \geq 2$. A matriz identidade $E \in A_1$, então A_1 é uma subálgebra de A com unidade. Seja B a subálgebra maximal semi-simples de A_1 que existe e é não trivial pela Observação 4.4. Então $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_r$, onde B_j são subálgebras simples $j = 1, \ldots, r$. Logo $E = i_1 + \ldots + i_k$, onde i_j é o elemento unidade de B_j.

Tomaremos um somando simples C qualquer de B e seja i seu elemento unidade que é idempotente por ser unidade.

Agora temos dois casos possíveis:

(1) i e $E - i$ são ortogonais idempotentes não nulos.

(2) $i = E$.

No primeiro caso se $i \neq E$, isto é i e $E - i$ são ortogonais idempotentes. Então faremos $P = iAi$ e $Q = (E - i)A(E - i)$, desde que $i,\ E - i \in A_1$, as subálgebras P e Q são homogêneas. Usando o Corolário 4.2 $P \cong UT_k(F)$ e $Q \cong UT_{n-k}(F)$ com $k \neq 0$, pois caso contrário $E = i$ pelo Lema 4.1. Usando a hipótese de indução em P e Q existem elementos ortogonais idempotentes $e_1, \ldots, e_k \in P_1 = P \cap A_1$ e $e_{k+1}, \ldots, e_n \in Q_1 = Q \cap A_1$.

Pelo modo com que foram tomadas as subálgebras P, Q a multiplicação de um elemento de P por um de Q e o contrário também é sempre o zero, pela ortogonalidade de i e $E - i$. Então o conjunto $e_1, \ldots, e_n$ é um conjunto de ortogonais idempotentes em A_1.

No segundo caso, considerando que a unidade do somando simples C de B é a própria matriz identidade, então como $E = i_1 + \ldots + i_r$, se j_0 é a unidade de C então $i_{j_0} = E$ e $i_j = 0$ para $j \neq j_0$ e disto segue que $B = C$. Ou seja, C é simples e contém a matriz identidade, logo $B = C = [E]$.

À partir daqui vamos demonstrar que $\dim(B) \neq 1$ e isto vai nos dizer que o segundo caso não pode acontecer. Mostraremos que a afirmação $\dim(B) = 1$ gera um absurdo, para isso usaremos uma outra indução agora na ordem do grupo G.

Se $|G| = 1$, então $A = A_1$. Mas uma subálgebra semi-simples maximal de A deve ter dimensão $n > 1$, note que a álgebra das matrizes diagonais tem radical zero então é semi-simples.

Suponha que para qualquer H-graduação em A, com $|H| < |G|$ temos que $\dim B = 1$ não é possível, onde B é uma subálgebra semi-simples maximal da componente neutral da H-graduação. Mostraremos que isto vale também para a G-graduação tomada no início.

Primeiro note que nestas condições todo elemento homogêneo é nilpotente ou invertível. De fato seja $a \in A_g$ para algum $g \in G$, não nilpotente. Pela relação $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ os elementos $a, a^2, \ldots, a^m$ são homogêneos e para m suficientemente grande são linearmente dependentes. Então $a^m = \alpha_1 a + \ldots + \alpha_{m-1}a^{m-1}$, disto $0 \neq a^m \in A_{g^m}$ e $a^m \in A_g \oplus \ldots \oplus A_{g^{m-1}}$ então $A_{g^m} = A_g \oplus \ldots \oplus A_{g^{m-1}}$. E portanto g deve ter ordem finita r e $a^r \in A_1$.

Além disso, a^r não é nilpotente e então não está no radical de Jacobson $J(A_1) \subseteq J(A)$ que é a subálgebra das matrizes estritamente triangulares superiores.

Usando a Proposição 4.5, temos que A_1 e $A_1/J(A_1)$ têm os mesmos módulos simples. Se $\dim(B) = 1$, na verdade, B é simples e mais: pela maximalidade B é o único módulo simples de A_1. Sabemos que $A_1/J(A_1)$ é semi-simples, mas pela proposição, B é o único módulo simples de $A_1/J(A_1)$ daí $A_1/J(A_1) = B \cong FE$, e segue que para o elemento a^r obtido acima não pertence à $J(A_1)$. Daí teremos $a^r - \lambda E$ nilpotente para algum $0 \neq \lambda \in F$. Então:

$$0 = (a^r - \lambda E)^p = a^r(a^{(p-1)r} - (p\lambda)a^{(p-2)r} + \ldots + (-1)^{p-1}p\lambda^{p-1}E) + (-1)^p\lambda^p E.$$

Disto a^r é invertível e então a também o é.

Agora se $a \in A_g$ é nilpotente, a deve ser estritamente triangular superior. Considere o seu anulador à esquerda $L_a = \{x \in A : xa = 0\}$. Pelo Lema 1.13 este é um subespaço homogêneo. Das considerações acima todo elemento homogêneo em L_a é nilpotente ou invertível, mas como um elemento invertível não pode ser divisor de zero todos os elementos homogêneos de L_a são nilpotentes, ou seja, são estritamente triangulares superiores. Então L_a consiste apenas de matrizes estritamente triangulares superiores.

Mas por outro lado, a é estritamente triangular superior e então E_{nn} deve anular à esquerda a, logo $E_{nn} \in L_a$ o que é uma contradição.

Assim todo elemento homogêneo em A deve ser invertível. Portanto o radical de Jacobson $J(A)$ não tem elementos homogêneos a não ser o zero. Mas em particular $J(A_1) \subseteq J(A)$ e $J(A_1) \subseteq A_1$ de onde $J(A_1) = \{0\}$. Daí A_1 é semi-simples, então $A_1 = B = \{\lambda E : \lambda \in F\}$. Com essa hipótese sobre A_1 foi provado na Observação 3.1 que o suporte de G, $\mathrm{Supp}(G) = \{g \in G; A_g \neq 0\}$, é um subgrupo de G que é finito pois A

tem dimensão finita. Agora caso $\text{Supp}(G) \neq G$, usamos a hipótese de indução no suporte e temos o resultado $\dim(B) \neq 1$.

Assumiremos então que $\text{Supp}(G) = G$. Afirmamos que neste caso $\dim(A_g) = 1$ para qualquer $g \in G$. De fato, suponha que $x, y \in A_g$ são linearmente independentes. Lembrando que todo elemento homogêneo é inversível, temos que $x^{-1} \in A_{g^{-1}}$ e então $yx^{-1} \in A_g A_{g^{-1}} \subseteq A_1$, disto $yx^{-1} = \lambda E$ para algum $\lambda \in F$. Então $(x - \lambda^{-1}y)x^{-1} = 0$, o que contradiz a invertibilidade de $x - \lambda^{-1}y \in A_g$ que é homogêneo não nulo.

Note ainda que G não pode ser abeliano. Com efeito, suponha que G é abeliano e considere o ideal dos comutadores $[A, A]$, isto é, o ideal gerado pelos elementos da forma $\{ab - ba \, : \, a, b \in A\}$. É imediato que o comutador de elementos de $UT_n(F)$ consiste de matrizes estritamente triangulares superiores e então $[A, A] \subseteq J(A)$, conforme a Observação 1.32. Além disso, $[E_{12}, E_{22}] = E_{12}$ e então $[A, A]$ é não nulo. Como G é abeliano temos que $[A_g, A_h] \subseteq A_{gh} + A_{hg} \subseteq A_{gh}$, para todo g, $h \in G$. Ou seja, se $x = \sum_{g \in G}$ e $y = \sum_{h \in G} y_h$, então $[x, y] = \sum_{h,g \in G} x_g y_h - y_h x_g = \sum_{gh \in G} z_{gh}$, onde $z_{gh} \in [A, A] \cap A_{gh}$ e isto nos diz que $[A, A]$ é homogênea. Resumindo, $[A, A] \subseteq J(A)$, é homogêna e não nula, mas sabemos que todos os homogêneos de $J(A)$ são nulos. Portanto $[A, A] = 0$, uma contradição que nos diz que G não pode ser abeliano.

Se G não é abeliano e G' é seu subgrupo comutador, consideraremos para o grupo quociente G/G', que é abeliano, a graduação induzida $A = \oplus_{t \in G/G'} A_t$ e para essa graduação a conclusão do lema é verdadeira. Ou seja, se $A_{\bar{1}}$ é a componente neutral da G/G'-graduação induzida de A e $\bar{B}$ sua subálgebra semi-simples maximal, então não acontece o caso $\dim(\bar{B}) = 1$, portanto estamos no caso (1) descrito acima onde já vimos que a conclusão é verdade.

Assim existem $e_1, \ldots, e_n$ idempotentes ortogonais em

$$D = A_{\bar{1}} = \oplus_{h \in G'} A_h.$$

Por outro lado, G' é gerado pelos elementos $a^{-1}b^{-1}ab$, a, $b \in G$. Se $h = a^{-1}b^{-1}ab$, sabemos que os elementos homogêneos são invertíveis, então se $0 \neq x \in A_a$, $0 \neq y \in A_b$ temos que $z = x^{-1}y^{-1}xy$ é não nulos em A_h.

Desde que mostramos que $\dim(A_h) = 1$, z gera A_h então $A_h = [z]$. Em particular, D como álgebra é gerada por todos os $x^{-1}y^{-1}xy$ com x, y homogêneos não nulos. Mas qualquer elemeno $x^{-1}y^{-1}xy$ é da forma $E + a$ onde $a \in J(A)$. Como D é gerado por elementos deste tipo, qualquer $y \in D$ é da forma $y = \lambda E + a$ com $a \in J(A)$, em particular os e_j. Assim podemos escrever $e_j = \lambda_j E + a_j$, $j = 1, \ldots, n$. Mas veja que $\lambda_j \neq 0$ para que e_j seja idempotente. Contudo se $\lambda_j \neq 0$ teremos $e_k e_j \neq 0$, para todo $k = \{1, \ldots, n\}$ o que contradiz a ortogonalidade do conjunto $e_1, \ldots, e_n$.

Portanto temos a conclusão do lema, pois o caso $\dim(B) = 1$ não acontece. ∎

Por fim estamos em condições de demonstrar o teorema que caracteriza as G-graduações de $UT_n(F)$, agora para o caso geral sem as hipóteses sobre F ser algebricamente fechado com característica zero e G abeliano finito.

Teorema 4.7 *Seja $A = UT_n(F) = \oplus_{g \in G} A_g$ a álgebra das $n \times n$ matrizes triangulares superiores sobre um corpo F graduada por um grupo qualquer G. Então A como álgebra G-graduada é isomorfa à $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar.*

Demonstração: Pela Proposição 4.6 existem n ortogonais idempotentes $e_1, \ldots, e_n$ em A_1. Pelo Lema 4.3, o conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ está conjugado com o conjunto $\{E_{11}, \ldots, E_{nn}\}$. Disto os n ortogonais idempotentes são linearmente independentes. Assim podemos completar esse conjunto para uma base de A_1.

Para cada $1 \neq g \in \mathrm{Supp}(G)$ escolha arbitrariamente uma base β_g para A_g. Então se β_1 é a base de A_1 dada acima, a união $\beta = \cup \beta_g$, onde $g \in \mathrm{Supp}(G)$, é uma base de A.

Considere o automorfismo de A que leva e_i em E_{ii}, $i = 1, ..., n$ e os demais elementos de β vão arbitrariamente nos demais elementos da base canônica de $UT_n(F)$. Chamaremos esse automorfismo de φ. Se $A'_g = \varphi(A_g)$ então $A' = \oplus_{g \in G} A'_g$ é uma G-graduação em $UT_n(F)$ onde as matrizes $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ são homogêneas e estão na componente neutral A'_1. Logo pelo Corolário 3.4 a G-graduação $A' = \oplus_{g \in G} A'_g$ é elementar. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Bahturin, Yu. A. e Zaicev, M. V., *Identities of graded algebras and codimension growth*, Trans. of Amer. Math. Soc., **356**, 3939–3950, 2004.

[2] Bahturin, Yu. A., Sehgal, S. K. e Zaicev, M. V., *Group gradings on associative algebras*, Journal of Algebra **241**, 677–698, 2001.

[3] Drensky, V., *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, 1999.

[4] Fidélis, M., *Identidades Polinomiais em Álgebras T-primas*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2005.

[5] Giambruno, A., Mishchenko S., e Zaicev, M. V., *Group actions and asymptotic behavior of polynomial identities*, J. London Math. Soc., **66**, 295–312, 2002.

[6] Giambruno, A. e Zaicev, M. V., *Minimal varieties of algebras of exponential growth*, Adv. Math. **174**, 310–323 (2003).

[7] Herstein, I. N., *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, 1970.

[8] Herstein, I. N., *Noncommutative Rings*, Carus Mathematical Monographs, 15, American Mathematical Society, 1973.

[9] Lam , T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, GTM 131, Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] Kemer, A. R., *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**, American Mathematical Society, 1991.

[11] Rotman, J. J., *A First Course in Abstract Algebra*, Third Edition, Prentice-Hall, 2005.

[12] Valenti, A. e Zaicev, M., *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Archiv der Mathematik, **80**, 12–17, 2003.

[13] Valenti, A. e Zaicev, M., *Group gradings on upper triangular matrices*, Archiv der Mathematik, **89**, 33–40, 2007.

[14] Zaicev, M. e Sehgal. K., *Finite gradings on simple Artinian rings*, Vestn. Mosk. Univ., Mtem. Mechan. No. **3**, 21–24, 2001.