

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Propriedade de Wecken para Pontos Periódicos

Rafael Moreira de Souza

Orientador: Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo

Dissertação apresentada junto ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
2010



Propriedade de Wecken para pontos periódicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rafael Moreira de Souza e aprovada pela comissão julgadora.

São Carlos, 5 de março de 2010.

Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo
Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo (Orientador) - DM/UFSCar
2. Prof. Dr. Dirceu Penteado - DM/UFSCar
3. Prof. Dr. Lucília Daruiz Borsari - IME/USP

Dissertação apresentada junto ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S729pw

Souza, Rafael Moreira de.

Propriedade de Wecken para pontos periódicos / Rafael
Moreira de Souza. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
97 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2010.

1. Topologia algébrica. 2. Nielsen, Número de. 3. Teoria
de pontos fixos. 4. Teoria da homotopia. I. Título.

CDD: 514.2 (20^a)

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Daniel Vendruscolo
DM - UFSCar



Prof. Dr. Dirceu Penteado
DM - UFSCar



Prof. Dr. Lucília Daruiz Borsari
IME - USP

Dedico este trabalho aos meus pais, José e Zilá e aos meus irmãos, Mateus e Flavio.

Agradecimentos

Agradeço:

À Deus por tudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo, que considero como um irmão (mais velho), pela amizade e profissionalismo.

À minha família, pois tive a vantagem de sempre te-los ao meu lado me incentivando e me cercando de muito carinho.

Aos meus amigos de turma de mestrado, pelas muitas horas de estudos juntos e principalmente pela grande amizade.

E à FAPESP, que financiou todo este trabalho de mestrado.

Resumo

O objetivo deste trabalho é dissertar sobre possíveis procedimentos em órbitas de pontos periódicos possibilitando relacionar o número periódico de Nielsen-Jiang completo de uma dada auto-aplicação de uma variedade de dimensão maior que três com a cardinalidade do conjunto de pontos periódicos de alguma auto-aplicação homotópica a primeira. Neste sentido, o teorema que queremos provar é:

TEOREMA DE WECKEN PARA PONTOS PERIÓDICOS:

Se X é uma PL-variedade de dimensão maior que 3 e n é um número natural fixado, então toda $f : X \rightarrow X$ é homotópica a uma $g : X \rightarrow X$ tal que $\#FIX(g^n) = NF_n(f)$.

Grande parte do que foi estudado possui demonstrações muito técnicas e por isso esse trabalho exige um pouco de habilidade e intimidade com alguns resultados clássicos da topologia algébrica, da teoria de homotopia e da teoria de pontos fixos, tais como aproximações de funções e a construção de Hopf. Contudo, não é necessário um vasto conhecimento teórico. O que queremos dizer é que usamos quase sempre as mesmas idéias de várias formas diferentes.

Abstract

The objective of this work is to present some procedures for orbits of periodic points class to relate the full Nielsen-Jiang periodic point of a self map of a manifold of dimension greater than three with the cardinality of the set of periodic points of some map homotopic the first application. In this way, the theorem which we want to proof is:

Wecken's Theorem for periodic points:

For any self map $f : X \rightarrow X$ of a PL-manifold of dimension greater than tree and a natural number n there exists a map $g : X \rightarrow X$ homotopic to f such that $\#FIX(g^n) = NF_n(f)$.

Great part of results studied has much technical proofs, and so this work requires skill with some classical results of algebraic topology, homotopy theory and theory of fixed points, such as approximations of functions and Hopf-construction . However, there is not needed broad theoretical knowledge. What we mean is that we almost always use same ideas in different ways.

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	12
3	O Número Periódico de Nielsen-Jiang Completo	22
3.1	Aplicação nas classes de Reidemeister	22
3.2	Propriedades Gerais de R_h	26
3.3	Caso particular de R_h	28
3.4	O número periódico de Nielsen-Jiang completo	32
4	Procedimento de Cancelamento	34
4.1	Correção de homeomorfismos:	37
4.2	Lemas	42
4.3	Aproximação entre $f^k \circ w$ e w	48
4.4	Demonstração do teorema 4.1	58
5	Outros Procedimentos com Pontos Periódicos	63
5.1	Procedimentos de Criação e de Adição	66
5.2	Procedimento Coalescente	71
6	Teorema de Wecken para pontos periódicos	83
A	Construção de Hopf	86
B	Deformação de auto-aplicações	91
	Referências Bibliográficas	97

Lista de Figuras

2.1	Realização geométrica de K_L	14
2.2	f transversal em x	20
3.1	Órbita do ponto x por f	23
5.1	$\text{conv}\{A \cup v\}$	73
A.1	Construção de Hopf.	87
B.1	Linearização de f	95

Capítulo 1

Introdução

Sabemos que o número de Nielsen é um invariante homotópico que limita inferiormente a cardinalidade do conjunto dos pontos fixos de uma função qualquer, isto é, dada uma auto-aplicação $f : X \rightarrow X$ temos que $\#FIX(f) \geq N(f)$, onde $FIX(f) = \{x \in X; f(x) = x\}$ e $\#A$ é a cardinalidades de qualquer que seja o conjunto A .

De fato, foi provado que, sobre certas condições, o número de Nielsen é o melhor invariante homotópico com essa propriedade, no sentido de que, sobre certas condições, qualquer aplicação f é homotópica a uma aplicação g que realiza a seguinte igualdade $\#FIX(g) = N(f)$.

Essa questão foi levantada por Jakob Nielsen nos anos de 1920 para auto-aplicações de superfícies. Nos anos de 1930, quando a noção de índice de pontos fixos apareceu o problema foi automaticamente estendido para a classe dos poliedros compactos. Observamos que foge do escopo deste trabalho a apresentação da teoria de índice e por isso sugerimos a leitura dos primeiros capítulos de [JM].

Em 1942 Franz Wecken provou que o número de Nielsen pode ser realizado para qualquer auto-aplicação entre variedades compactas de dimensão diferente de 2 (isto é, diferente das superfícies).

Em 1966 Shi estendeu o resultado de Wecken para toda a classe dos poliedros. Lembrando que um ponto x em um espaço topológico X é um ponto de separação local se existe uma vizinhança aberta e conexa U de x em X tal que $U \setminus \{x\}$ não é conexo. Em 1979 Boju Jiang estendeu o resultado de Wecken para a classe dos poliedros finitos com duas propriedades:

1. Não existe ponto de separação local
2. O poliedro não é uma superfície com característica de Euler negativa.

Nos anos de 1980, observou-se que o teorema que Wecken havia provado não era verdadeiro para as superfícies com característica de Euler negativa. O primeiro contra-exemplo foi dado por Fadell e Husseini (1982) para o caso não compacto e Jiang (1984/85) exibiu contra-exemplos do caso compacto. Seguiram-se outros contra-exemplos até que

em 1987 Mikel Kelly provou que essa diferença poderia ser arbitrariamente grande. Em 2000 foi provado por Gonçalves e Ferrario que a igualdade não acontece quando assumimos que f é um mergulho local.

Apesar disso podemos dizer que o problema de realização do número de Nielsen estava quase resolvido para os poliedros, contudo muito pouco foi feito para estender o teorema para além dos poliedros.

TEOREMA DE WECKEN PARA POLIEDROS:

Seja X um poliedro convexo compacto sem pontos de separação local diferente de uma 2-variedade. Então cada auto-aplicação de $f : X \rightarrow X$ é homotópica a uma aplicação $g : X \rightarrow X$ tal que $\#FIX(g) = N(f)$.

Benjamin Halpern começou a estender o teorema de Wecken para pontos periódicos em 1983 com a seguinte **conjectura**:

Para qualquer auto-aplicação $f : X \rightarrow X$, onde X é uma variedade fechada com dimensão maior ou igual a 5, existe $g : X \rightarrow X$ uma auto-aplicação homotópica a f tal que $\#FIX(g^n) = NF_n(f)$.

Lembramos que dado um número natural n , diremos que um ponto $x \in X$ é **n -periódico** por uma auto-aplicação f se $f^n(x) = x$, isto é, $x \in FIX(f^n)$. Veremos a definição de $NF_n(f)$ no capítulo 3. Esta conjectura ficou sem prova até 1995, quando Cheng Ye You provou o resultado para o toro. Contudo, ele utilizou uma técnica que não foi possível adaptar para o caso geral.

Em 2003, Jerzy Jezierski provou o resultado para as PL-variedades de dimensão maior ou igual a 4. Jerzy Jezierski também solucionou o problema para as PL-variedades de dimensão 3. Lembrando que uma PL-estrutura linear é um atlas onde podemos passar de uma carta para outra através de aplicações lineares por partes, assim uma PL-variedade é uma variedade topológica munida de uma PL-estrutura linear. Com isso temos:

TEOREMA DE WECKEN PARA PONTOS PERIÓDICOS:

Se X é uma PL-variedade de dimensão maior ou igual a 3, então cada auto-aplicação $f : X \rightarrow X$ é homotópica a uma auto-aplicação $g : X \rightarrow X$ tal que $\#FIX(g^n) = NF_n(f)$.

A prova desse resultado se baseia no Procedimento de Cancelamento de Pontos Periódicos, provado em 2001 também por Jerzy Jezierski.

Neste Trabalho iremos mostrar nossos estudos sobre o Procedimento de Cancelamento de Pontos Periódicos e sobre o resultado provado em 2003 por Jerzy Jezierski anteriormente citado.

Capítulo 2

Preliminares

Definição 2.1 Um **complexo simplicial** K é uma coleção finita de conjuntos finitos tais que se $s \in K$ e $t \subset s$ então $t \in K$. Se s é um elemento de K e s possui $(p+1)$ pontos, então s é chamado de p -simplexo de K . Os 0-simplexos de K também são chamados de vértices de K . Dado um natural $n > 0$ a coleção de todos os p -simplexos de um complexo simplicial K com $p \leq n$ é chamado de **n -esqueleto de K** e será denotado por K^n . Um complexo simplicial K é dito **n -dimensional** se n for o menor natural que satisfaz a igualdade $K = K^n$.

Consideremos K um complexo simplicial e $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\} \in K$, onde cada $\{v_i\} \in K$ é um vértice de K , para $i = 0, \dots, p$. Se os elementos $v_i \in \sigma$ não forem todos distintos então diremos que σ é **degenerado**.

Um **p -simplexo orientado** de um complexo simplicial K é uma coleção $\{v_0, \dots, v_p\}$ não degenerada munida de uma classe de equivalência sobre a ordenação do conjunto $\{v_0, \dots, v_p\}$, onde duas ordenações são **equivalentes** quando pudermos escrever uma ordenação como produto de um número par de transposições da outra ordenação, isto é, quando uma ordenação for gerada por uma permutação par da outra ordenação.

Um p -simplexo orientado será denotado por $\langle v_0, \dots, v_p \rangle$, de forma que $v_0 < \dots < v_p$ na ordenação pertencente a classe de equivalência.

Definição 2.2 Denotaremos por $Cp(K)$ o grupo gerado por:

1. todas as coleções degeneradas $\{v_0, \dots, v_p\} = \langle v_0, \dots, v_p \rangle$.
2. todos os p -simplexos orientados $\langle v_0, \dots, v_p \rangle$

que estão sujeitos as relações:

- $\langle v_0, \dots, v_p \rangle = 0$ se $\{v_0, \dots, v_p\}$ for degenerado.
- $\langle v_0, \dots, v_p \rangle + \langle v'_0, \dots, v'_p \rangle = 0$ se $\{v_0, \dots, v_p\} = \{v'_0, \dots, v'_p\}$ como p -simplexos e seus elementos diferem por uma permutação ímpar.

Assim $Cp(K)$ é o R -módulo livre gerado pelos p -simplexos de K . Se $p < 0$ definimos $Cp(K) = 0$.

Um R -homomorfismo ∂_p entre $Cp(K)$ e $C(p-1)(K)$ é dado da seguinte forma: para cada gerador $\langle v_0, \dots, v_p \rangle$ de $Cp(K)$

$$\partial_p(\langle v_0, \dots, v_p \rangle) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \rangle$$

e estende-se esta aplicação por linearidade.

Denotaremos $C(K) = \{Cp(K)\}_{p \in \mathbb{N}}$, a coleção

$$\{C(K), \partial\} = \{Cp(K), \partial_p\}_{p \in \mathbb{N}}$$

será chamada de **complexo de cadeias**.

Definição 2.3 Seja K um complexo simplicial, criaremos um novo complexo simplicial K_1 cujo o nome será **subdivisão baricêntrica de K** .

Os vértices de K_1 estão bijectivamente correspondidos com os elementos de K , por isso denotamos os vértices de K_1 por $v(s)$ onde $s \in K$. Os simplexos de K_1 são todos os conjuntos $\{v(s_0), \dots, v(s_p)\}$ tais que para todo $i, j = 0, \dots, p$, $s_j \subset s_i$ ou $s_i \subset s_j$.

K_1 é um complexo simplicial, conseqüentemente possui subdivisão baricêntrica, denotaremos $(K_1)_1$ por K_2 . De uma forma geral, $(K_{r-1})_1 = K_r$ é a r -ésima subdivisão baricêntrica de K_1 .

Podemos generalizar um pouco mais essa construção. Consideremos um complexo simplicial K e um sub-complexo simplicial L de K , construiremos um novo complexo simplicial K_L que chamaremos de **subdivisão baricêntrica de K módulo L** .

Os vértices de K_L serão os vértices de L mais os elementos $v(s)$ onde $s \in K \setminus L$. Os p -simplexos de K_L consistem de todos os conjuntos $\{v_0, \dots, v_q, v(s_{q+1}), \dots, v(s_p)\}$, para $p > 0$, onde $\{v_0, \dots, v_q\}$ é um simplexo de L contido no simplexo $s_{q+1} \in K \setminus L$ e $s_i \subset s_{i+1}$ para $i = q+1, \dots, p-1$. Diremos que $s \in K$ está na **decomposição** de $t \in K_L$ quando $v(s)$ for um vértice de t .

Como K_L é um complexo simplicial, existe sua subdivisão baricêntrica módulo um sub-complexo L' dada por $(K_L)_{L'} = K_{L,L'}$. Se K' é um complexo simplicial obtido de um complexo simplicial K por meio de uma sucessão de subdivisões baricêntricas modulo sub-complexos, então diremos que K' é um **refinamento de K** .

Seja K um complexo simplicial com vértices v_0, \dots, v_n . Denotemos por $|K|$ o conjunto de todos os símbolos $\sum_{i=1}^n r_i v_i$ onde $r_i \in \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $r_i \geq 0, i = 1, \dots, n$.
2. $\sum_{i=1}^n r_i = 1$.

3. $\{v_i; r_i \neq 0\}$ é um simplexo de K .

Uma **métrica d para $|K|$** é definida por:

$$d\left(\sum_{i=1}^n r_i v_i, \sum_{i=1}^n r'_i v_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n (r_i - r'_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $|K|$ com a topologia induzida por d é um espaço métrico compacto que nomearemos **realização geométrica de K** . Se $s = \{v_1, \dots, v_n\}$ está em K então:

$$|s| = \left\{ \sum_{i=1}^n r'_i v_i; r_i \neq 0 \right\}$$

é dita **realização geométrica de s** . Observemos que a realização geométrica de um simplexo é aberto, pois $r_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$. O ponto $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} v_i$ é chamado **baricentro** da realização geométrica de s .

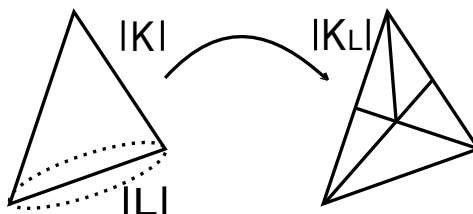


Figura 2.1: Realização geométrica de K_L .

Existe uma forma óbvia de definir um homeomorfismo $T_L : |K_L| \rightarrow |K|$: Para cada vértice v de L , conseqüentemente de K_L , defina $T_L(v) = v$ e para um vértice $v(s)$ de K_L tal que $s = \{v_0, \dots, v_p\} \in K \setminus L$ definimos

$$T_L(|v(s)|) = \sum_{i=0}^p \frac{1}{1+p} v_i.$$

Dai estenda T_L por linearidade.

Por conseguinte existe um homeomorfismo $T : |K'| \rightarrow |K|$, onde K' é um refinamento do complexo simplicial K , dado pela composição de homeomorfismos da forma T_L . (Atentemos que a composição de homeomorfismos é ainda um homeomorfismo).

No caso $\tau_1 : |K_1| \rightarrow |K|$ o homeomorfismo usual de uma subdivisão baricêntrica K_1 de um complexo K , diremos que um p -simplexo s de K_1 é um **p -skeletal** se $\tau_1(|s|) \subset |K^p|$, onde $|K^p|$ é a realização geométrica do p -esqueleto de K . Diremos ainda que s é um **simplexo maximal de K** se não existir um simplexo t em K tal que $s \subset t$.

Observemos que $\tau_1(|s|) \subset |K^p|$ é equivalente a dizer que $s \in K^p$, porquê da definição de τ_1 temos que:

$$\tau_1(|s|) = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} v_i$$

para $s = \{v_0, \dots, v_p\}$ e que se s é um simplexo maximal de um complexo simplicial K então pela definição de realização geométrica de s teremos que $|s|$ será aberto em $|K|$.

Definição 2.4 *Um espaço topológico X é um **poliedro** se existir um complexo simplicial K tal que sua realização geométrica $|K|$ é homeomorfa a X .*

Uma **triangularização de um poliedro** X é um par $T = (K, \tau)$, onde K é um complexo simplicial e $\tau : |K| \rightarrow X$ é um homeomorfismo. Dessa forma X terá **dimensão n** (ou será **n -dimensional**) se para toda triangularização (K, τ) de X tivermos que K é um complexo simplicial n -dimensional. Um poliedro X munido de uma triangularização específica T é chamado **espaço triangularizado**.

Com efeito, consideremos $T = (K, \tau)$ uma triangularização de um poliedro X , a subdivisão baricêntrica K_1 do complexo K e $\tau_1 : |K_1| \rightarrow |K|$ o homeomorfismo usual. Dai, definimos uma nova triangularização $T_1 = (K_1, \tau_1 \circ \tau)$ do poliedro X . De mesma forma podemos definir $T_n = (K_n, \tau_n \circ \dots \circ \tau)$, onde K_n é uma subdivisão baricêntrica de K_{n-1} e definimos $\tau_n : |K_n| \rightarrow |K|$ por:

$$|K_n| \xrightarrow{\tau_n} |K_{n-1}| \xrightarrow{\tau_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tau_2} |K_1| \xrightarrow{\tau_1} |K|$$

Lembremos que dado um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) , dizemos que o diâmetro de A é dado por:

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y); x, y \in A\}$$

Usamos isso em uma triangularização $T = (K, \tau)$ de um poliedro X para definir a **malha de T** por:

$$\sup\{\text{diam}(\tau(|s|)); s \in K\}$$

Definição 2.5 *Consideremos K e L dois complexos simpliciais, uma função $f : K \rightarrow L$ é chamada **função simplicial** se*

$$f(\{v_0, \dots, v_p\}) = \{f(v_0), \dots, f(v_p)\}$$

para qualquer simplexo $\{v_0, \dots, v_p\}$ de K .

Por sinal, dados complexos simpliciais K e L e uma função simplicial $f : K \rightarrow L$, existe uma aplicação:

$$|f| : \begin{array}{ccc} |K| & \rightarrow & |L| \\ \sum_{i=1}^n r_i v_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n r_i f(v_i) \end{array}$$

Sejam $(X, T) = (X, (K, \tau))$ e $(X', T') = (X', (K', \tau'))$ dois espaços triangularizados e uma função simplicial $f : K \rightarrow K'$, então uma aplicação $F : X \rightarrow X'$ que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X' \\ \tau \uparrow & & \uparrow \tau' \\ |K| & \xrightarrow{|f|} & |K'| \end{array}$$

é dada por $F = \tau' \circ |f| \circ \tau^{-1}$. Neste caso a aplicação $F : X \rightarrow X'$ será chamada de **aplicação simplicial** entre os espaços triangularizados.

Dados dois espaços triangularizados (X, T) e (X', T') , onde $T = (K, \tau)$ e $T' = (K', \tau')$, e uma aplicação $f : X \rightarrow X'$, uma aplicação simplicial $h : (X, T) \rightarrow (X', T')$ é uma **aproximação simplicial de f** se para cada $x \in X$ o conjunto $\{f(x), h(x)\}$ estiver contido em $\tau'(|s'|)$, para algum simplexo s' de K' .

Teorema 2.6 (Teorema da aproximação simplicial) *Consideremos espaços triangularizados (X, T) e (X', T') e $f : X \rightarrow X'$ uma aplicação. Então existe uma aproximação simplicial $h : (X, T_r) \rightarrow (X', T')$ de f , para algum número natural r .*

Lema 2.7 *Sejam K um complexo simplicial e s^1, s^2 p -skeletal de K_1 , tais que $s^1 \neq s^2$. Então não existe um simplexo de K_1 que contém s^1 e s^2 .*

PROVA: Tomemos um simplexo $t = \{v(s_0), \dots, v(s_q)\} \in K_1$ (este simplexo é no máximo um q -simplexo). Suponha que t está ordenado de forma que $s_i \subset s_{i+1}$ para $i = 0, \dots, q-1$. Por conseguinte, se $s_j \in K^p$, $j \leq q$, então $\tau(|v(s_j)|) \in |K^p|$ e portanto $\overline{\tau(|t|)} \cap |K^p| = \emptyset$ ou $\overline{\tau(|t|)} \cap |K^p| = \overline{\tau(|t'|)}$ para algum $t' \subset t$, onde $t' \in K_1^m$ com $m \leq p$.

O primeiro caso acontece se existir s_i , $i = 1, \dots, q$, na decomposição de t tal que $s_i \notin K^p$. O segundo caso acontece se para todo s_i , $i = 1, \dots, q$, da decomposição de t tivermos que $s_i \in K^p$.

Se existisse um m -simplexo $t \in K_1$ tal que $s^1, s^2 \subset t$, teríamos que

$$|s^1| \cup |s^2| \subset \tau_1(|t'|).$$

Por hipótese s^1 e s^2 são ambos p -simplexos de K_1 e assim $m \geq p$ e pela construção acima $m \leq p$. Portanto $m = p$ e assim $s^1 = s^2$ o que contradiz a hipótese. ■

Para os próximos resultados precisaremos da seguinte notação: Seja K um complexo simplicial e v um vértice de K , então definimos a **estrela** de v por:

$$st(v) = \{a \in |K|; \text{ existe } s \in K \text{ tal que } |v|, a \in |s|\}.$$

Para cada $x \in |K|$, denotaremos por $s(x)$ o único simplexo de K tal que $x \in |s(x)|$. De fato, $s(x)$ é único pelo fato da realização geométrica de um simplexo ser um aberto. Seja A um subconjunto de $|K|$ e $\varepsilon > 0$, definimos:

$$U(A, \varepsilon) = \{x \in |K|; d(x, A) < \varepsilon\}$$

$f : |K| \rightarrow |K|$ é uma **aplicação próxima de A** se para todo $x \in A$ tivermos $f(x) \in v(x)$ onde $v(x) = \bigcup_{\substack{t \in K \\ t \cap s(x) \neq \emptyset}} |t|$.

Definição 2.8 Um subconjunto A de um espaço X é chamado de **vizinhança retrátil de X** se existe um subconjunto aberto U de X que contém A e uma retração $r : U \rightarrow A$ tal que $r|_A = id_A$. Um espaço métrico X é um **espaço compacto ANR** (absolute neighborhood retract) se para cada subespaço A de um espaço métrico separável Y , A homeomorfo a X , tivermos que A é uma vizinhança retrátil de Y . Um espaço métrico X é um **ENR** (Euclidian neighborhood retract) se X for um retrato de um subconjunto aberto de um espaço euclidiano.

Lema 2.9 Seja L um sub-complexo simplicial do complexo K . Então v_0, v_1, \dots, v_q são vértices de um simplexo de L se, e somente se,

$$\left(\bigcap_{i=0}^q st(v_i) \right) \cap |L| \neq \emptyset.$$

Teorema 2.10 Seja U uma cobertura aberta de um poliedro compacto X . Então X possui triangularização mais fina que U .

Lema 2.11 Uma aplicação g que leva os vértices de um complexo simplicial K_1 nos vértices de um complexo simplicial K_2 é uma aproximação simplicial de $f : |K_1| \rightarrow |K_2|$ se, e somente se, para cada vértice $v \in K_1$ tivermos $f(st(v)) \subset st(g(v))$.

Teorema 2.12 A aplicação $f : |K_1| \rightarrow |K_2|$ admite aproximação simplicial $g : K_1 \rightarrow K_2$ se, e somente se, K_1 é mais fino que a cobertura aberta

$$U = \{f^{-1}(st(v)); v \text{ é um vértice de } K_2\}.$$

PROVA: Segue do teorema 2.11 que f admita aproximação simplicial se, e somente se, para cada vértice $v \in K_1$ existir um vértice $v' \in K_2$ tal que $f(st(v)) \subset st(v')$ e assim $st(v) \subset f^{-1}(st(v'))$. ■

Corolário 2.13 Seja K' um refinamento de K . Uma aplicação f que leva os vértices de K' nos vértices de K é uma aproximação de $id : |K'| \rightarrow |K|$, a identidade, se, e somente se, $v' \in st(f(v'))$ para todo $v' \in K'$.

PROVA: Devido ao teorema 2.12 temos que f é uma aproximação da identidade id se, e somente se, K' for mais fino que a cobertura aberta

$$U = \{st(v); v \text{ é um vértice de } K\}.$$
■

Teorema 2.14 Consideremos (K_1, L_1) um par simplicial finito e $f : (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$ uma aplicação. Então existe um inteiro N tal que se $n \geq N$ então existe aproximação simplicial $(sd^n(K_1), sd^n(L_1)) \rightarrow (K_2, L_2)$ de f .

Lema 2.15 *Sejam (X, d) um espaço métrico compacto, um subconjunto fechado A de X e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação sem pontos fixos em A . Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $d(x, A) < \varepsilon$ então $d(x, f(x)) > \varepsilon$.*

Prova: Salientamos que a aplicação $d \circ (f \times id)$ é contínua, porquê é a composta de aplicações contínuas (dada por $d \circ (f \times id)(x) = d(f(x), id(x))$).

Como A é compacto (fechado dentro de um compacto) temos que $d \circ (f \times id)(A)$ é limitado e assim existe $\eta > 0$ tal que $d \circ (f \times id)(A) \subset (0, \eta)$. Porque X é compacto, f é uniformemente contínua e portanto existe $\varepsilon' > 0$ tal que para cada x, x' de X que satisfazem $d(x, x') \leq \varepsilon'$ temos $d(f(x), f(x')) \leq \frac{\eta}{3}$.

Consideremos $\varepsilon < \min\{\varepsilon', \frac{\eta}{3}\}$. Por A ser fechado, temos que para todo $x \in X$ existe $a_x \in A$ tal que $d(x, a_x) = d(x, A)$. Suponhamos que $x \in X$ tal que $d(x, A) < \varepsilon$ então:

$$\begin{aligned} \eta &\leq d(f(a_x), a_x) \\ &\leq d(f(a_x), f(x)) + d(f(x), x) + d(x, a_x) \\ &< \frac{\eta}{3} + d(f(x), x) + \varepsilon \end{aligned}$$

Segue que $\varepsilon < \eta - \frac{\eta}{3} - \varepsilon < d(f(x), x)$. ■

Lema 2.16 *Consideremos um ponto $x \in |K|$ contido na realização geométrica de um simplexo maximal de K , uma aplicação $f : |K| \rightarrow |K|$ e um número real $\eta > 0$ tal que:*

1. $U(\{x\}, \eta) \subset |s(x)|$.
2. $FIX(f) \cap \partial U(\{x\}, \eta) = \emptyset$.
3. f é uma aplicação próxima de $\underline{U}(\{x\}, \eta)$.

Então existe uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ tal que:

1. f' é homotópica a f em $U(\{x\}, \eta)$.
2. $FIX(f') \cap \underline{U}(\{x\}, \eta) = \{x\}$.
3. f' está em $\underline{U}(\{x\}, \eta)$.

Lema 2.17 *Sejam um espaço métrico compacto (M, d) , $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação e um número natural r fixado. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(f, g) < \delta$ então $d(f^r, g^r) < \varepsilon$.*

Prova: A prova é por indução. Para $r = 1$ é suficiente que $\delta = \varepsilon$. Como hipótese de indução, assumimos que o resultado é válido para um natural r .

Como M é compacto temos que f é uniformemente contínua. Segue que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta_1$ então $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pela hipótese de indução existe $\delta_2 > 0$ tal que se $d(f, g) < \delta_2$ então $d(f^r, g^r) < \delta_1$.

Definimos $\delta = \min\{\delta_2, \frac{\varepsilon}{2}\}$, desse modo se $d(f, g) < \delta$ então para cada $z \in M$ temos que:

$$d(f^{r+1}(x), g^{r+1}(x)) \leq \underbrace{d(f \circ f^r(x), f \circ g^r(x))}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(f \circ g^r(x), g \circ g^r(x))}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Portanto $d(f^{r+1}, g^{r+1}) = \sup_{x \in M} \{d(f^{r+1}(x), g^{r+1}(x))\} < \varepsilon$, pois M é compacto. ■

Lema 2.18 *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função e $Z \subset X$ um subconjunto disjunto de $f(Z), \dots, f^r(Z)$ então $Z, f^{-1}(Z), \dots, f^{-r}(Z)$ são mutuamente disjuntos.*

PROVA: Suponhamos que exista $x \in f^{-i}(Z) \cap f^{-j}(Z)$ onde $(0 \leq i < j \leq r)$. Segue que $f^i(x), f^j(x) \in Z$ então

$$Z \ni f^j(x) = f^{j-i}(\underbrace{f^i(x)}_{\in Z}) \in f^{j-i}(Z)$$

dessa forma $f^{j-i}(Z) \cap Z \neq \emptyset$ o que contradiz a hipótese. ■

Lema 2.19 *Consideremos $f : X \rightarrow X$ uma auto-aplicação com as seguintes propriedades:*

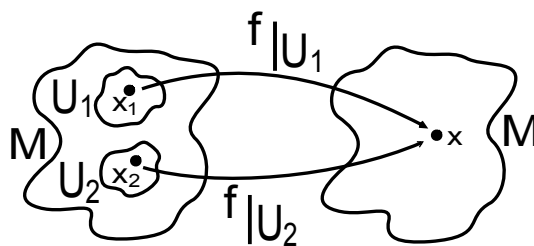
1. $FIX(f^k)$ é no máximo enumerável para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. $f^{-1}(\{x\})$ é no máximo enumerável para todo $x \in X$.

Então $\{x \in X; \exists i \neq j \in \mathbb{N} \text{ com } f^i(x) = f^j(x)\}$ é no máximo enumerável.

PROVA: Denotaremos $X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} f^{-k}(FIX(f^l))$ que é um conjunto é enumerável. Provaremos que para cada $x \notin X_0$ e $0 < i < j$ temos que $f^i(x) \neq f^j(x)$. De fato, suponhamos que exista $0 < i < j$ tal que $f^i(x) = f^j(x)$ então

$$f^i(x) = f^j(x) = f^{j-i}(f^i(x))$$

por conseguinte $f^i(x) \in FIX(f^{j-i})$. Consequentemente, $x \in f^{-i}(FIX(f^{j-i})) \subset X_0$ o que é um absurdo. ■

Figura 2.2: f transversal em x .

Definição 2.20 Diremos que $f : M \rightarrow M$ é **transversal no ponto** w de M se, e somente se, para qualquer $x \in f^{-1}(\{w\})$ existir uma vizinhança U de x em M tal que $f|_U$ é um homeomorfismo.

Teorema 2.21 Consideremos n um natural fixado, uma auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ em uma variedade compacta e $w \in \text{int}(M)$ tal que os pontos $w, f(w), \dots, f^{2k}(w)$ sejam distintos e estejam no $\text{int}(M)$. Então existe uma ε -homotopia constante em uma vizinhança de $\text{FIX}(f^k)$ tal que f, f^2, \dots, f^{k-1} são transversais a w para $k \leq n$.

PROVA: Primeiramente tornaremos f transversal a w . Os pontos $w, f(w), \dots, f^{k-1}(w)$ não estão nas imagens inversas $f^{-1}(\{w\}), \dots, f^{-k+1}(\{w\})$, pois assim teríamos $f^i(w) \in f^{-j}(\{w\})$ por conseguinte $f^{i+j}(w) = w$.

Os conjuntos $\{w\}, f^{-1}(\{w\}), \dots, f^{-k+1}(\{w\})$ são mutuamente disjuntos, uma vez que se $y \in f^{-i}(\{w\}) \cap f^{-j}(\{w\})$ com $0 \leq i < j \leq k-1$ então

$$w = f^j(y) = f^{j-i}(f^i(y)) = f^{j-i}(w).$$

Por conseguinte, quando deformarmos f próximo de uma vizinhança de $f^{-1}(\{w\}), \dots, f^{-k+1}(\{w\})$ não alteraremos os valores de $w, f^1(w), \dots, f^{k-1}(w)$. Como $f^{-1}(\{w\})$ é disjunto de $\text{FIX}(f^k)$ podemos deformar f suficientemente pouco e mantê-la constante em uma vizinhança de $\text{FIX}(f^k)$ para que f fique transversal a w .

Por indução, as interações f, \dots, f^{l-1} são transversais a w para $l < k$, então os conjuntos $\{w\}, f^{-1}(\{w\}), \dots, f^{-l+1}(\{w\})$ são finitos. Já foi observado que o conjunto $f^{-l}(\{w\})$ é disjunto das outras imagens inversas, portanto, por uma homotopia suficientemente pequena que altera apenas uma vizinhança de $f^{-l}(\{w\})$, podemos fazer f transversal a $f^{-l+1}(\{w\})$. A aplicação resultante não modifica nada próximo de $f^{-1}(\{w\}), \dots, f^{-l+1}(\{w\})$ e f^l torna-se transversal a w . ■

Podemos estender esse resultado para uma vizinhança suficientemente pequena de w . Para cada $y \in f^{-i}(w)$ denotemos U_y uma vizinhança aberta de y que é levada homeomorficamente por f^i em uma vizinhança de $w \in M$ de forma que f^i seja transversal a

w . Essas vizinhanças podem ser tomados tão pequenas que seus fechos são mutuamente disjuntos. Dessa forma w não está no conjunto fechado

$$A = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(M \setminus \bigcup_{y \in f^{-i}(\{w\})} U_y)$$

e por isso existe uma vizinhança conexa W_0 de w tal que $\overline{W_0} \cap A = \emptyset$.

Os conjuntos $\{w\}, f^{-1}(\{w\}), \dots, f^{-k+1}(\{w\})$ são mutuamente disjuntos, assim se W_0 for suficientemente pequeno então $\overline{W_0}, f^{-1}(\overline{W_0}), \dots, f^{-k+1}(\overline{W_0})$ são mutuamente disjuntos.

Como $\overline{W_0} \cap A = \emptyset$ temos que $f^{-i}(\overline{W_0}) \subset \bigcup_{y \in f^{-i}(\{w\})} U_y$, dessa modo cada componente conexa de $f^{-i}(\overline{W_0})$ deve estar contida em um subconjunto U_y que é levado homeomorficamente em uma vizinhança de w .

Consequentemente, W_0 é uma vizinhança de w tal que os conjuntos $\overline{W_0}, f^{-1}(\overline{W_0}), \dots, f^{-(k-1)}(\overline{W_0})$ são mutuamente disjuntos e cada componente conexa de $f^{-i}(\overline{W_0})$ é levada homeomorficamente em $\overline{W_0}$ por f^i .

Capítulo 3

O Número Periódico de Nielsen-Jiang Completo

3.1 Aplicação nas classes de Reidemeister

Seja X um espaço compacto ENR e seja $f : X \rightarrow X$ uma auto-aplicação. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixado consideremos $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n vezes). Note que $FIX(f) \subset FIX(f^n)$, pois para qualquer $x \in FIX(f)$ temos que $f(x) = x$, conseqüentemente $f^n(x) = x$. Portanto $x \in FIX(f^n)$.

Podemos generalizar um pouco mais o comentário anterior, e dizer que dado um divisor k de n $FIX(f^k) \subset FIX(f^n)$, pois para qualquer $x \in FIX(f^k)$ temos que $f^k(x) = x$, como k divide n podemos dizer que existe um natural d tal que $dk = n$ e assim:

$$f^n(x) = f^{kd}(x) = (f^k)^d(x) = \underbrace{f^k \circ \dots \circ f^k}_{d\text{-vezes}}(x) = x$$

com isso $x \in FIX(f^n)$.

Definição 3.1 Dado um número natural k , diremos os pontos $x_0, x_1 \in FIX(f^k)$ estão Nielsen relacionados se existir um caminho w de x_0 a x_1 homotópico ao caminho $f^k \circ w$.

A relação de Nielsen da definição anterior é uma relação de equivalência. De fato:

1. *Reflexiva*: dado $x \in X$ usamos w o caminho constante, e como X é ENR existe um caminho de x a $f(x)$.
2. *Simétrica*: dados $x_0, x_1 \in X$ Nielsen relacionados. Segue que existe um caminho w de x_0 a x_1 homotópico ao caminho $f^k \circ w$ por uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que $H(0, t) = w(t)$ e $H(1, t) = f^k \circ w(t)$.

Dai, defina um caminho $u(t) = w(1 - t)$ de x_1 a x_0 e uma homotopia $G(x, t) = H(x, 1 - t)$ entre os caminhos u e $f^k \circ u$. Portanto x_1, x_0 estão Nielsen relacionados.

3. *Transitiva:* dados $x_0, x_1 \in X$ Nielsen relacionados e $x_1, x_2 \in X$ Nielsen relacionados. Segue que existe um caminho w_0 de x_0 a x_1 homotópico ao caminho $f^k \circ w_0$ por uma homotopia $H_0 : I \times I \rightarrow X$ tal que $H_0(0, t) = w_0(t)$ e $H_0(1, t) = f^k \circ w_0(t)$ e existe um caminho w_1 de x_1 a x_2 homotópico ao caminho $f^k \circ w_1$ por uma homotopia $H_1 : I \times I \rightarrow X$ tal que $H_1(0, t) = w_1(t)$ e $H_1(1, t) = f^k \circ w_1(t)$.

Dai, defina um caminho:

$$u(t) = \begin{cases} w_0(2 \cdot t) & t \in [0, \frac{1}{2}]. \\ w_1(2 \cdot t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

de x_0 a x_2 e uma homotopia:

$$G(x, t) = \begin{cases} H_0(x, 2 \cdot t) & (x, t) \in I \times [0, \frac{1}{2}]. \\ H_1(x, 2 \cdot t - 1) & (x, t) \in I \times [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

entre os caminhos u e $f^k \circ u$. Portanto x_0, x_2 estão Nielsen relacionados.

Dessa forma podemos dividir $FIX(f^k)$ em classes de equivalência. Continuando a construção anterior a última definição, quando k for um divisor de n , como o espaço é ENR, temos que w será homotópico ao caminho $f^n \circ w$. Com isso podemos considerar uma aplicação entre as seguintes classes de Nielsen:

$$\tilde{\gamma} : N(f^k) \rightarrow N(f^n)$$

que leva uma classe $A \in N(f^k)$ na classe $\bar{A} \in N(f^n)$, tal que $A \subset \bar{A}$.

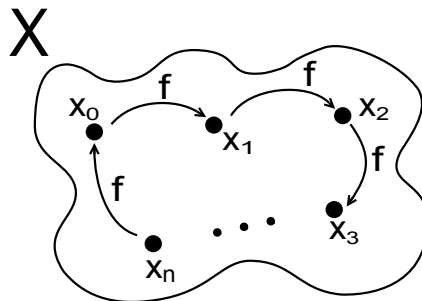


Figura 3.1: Órbita do ponto x por f .

Dessa forma $\tilde{\gamma}$ pode não ser uma inclusão. Observamos que essa aplicação está bem definida, pois nossa relação de Nielsen não "quebra" classes de Nielsen, no sentido de não relacionar parte dos elementos de uma classe A de $N(f^k)$ com uma classe $N(f^n)$ e outra parte de A com outra classe distinta de $N(f^n)$.

Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento universal fixado de X . A partir deste recobrimento vamos estender $\tilde{\gamma}$ para as classes de Reidemeister da seguinte forma:

Primeiramente observamos que, dados levantamentos \tilde{f}_1^k e \tilde{f}_2^k de f^k , se:

$$p(FIX(\tilde{f}_1^k)) = p(FIX(\tilde{f}_2^k)) \neq 0$$

então existe $\alpha \in O_X = \{\alpha : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}; p \circ \alpha = p\}$ tal que $\alpha \circ \tilde{f}_1^k = \tilde{f}_1^k \circ \alpha$. De fato, por hipótese existem $\tilde{x}_1 \in FIX(\tilde{f}_1^k)$ e $\tilde{x}_2 \in FIX(f_2^k)$ tais que $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$. Tomando $\alpha \in O_X$ tal que $\alpha(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2^k \circ \alpha(\tilde{x}_1) &= \tilde{f}_2^k \circ \alpha(\tilde{x}_1) \\ &= \tilde{f}_2^k(\tilde{x}_2) \\ &= \tilde{x}_2 \\ &= \alpha(\tilde{x}_1) \\ &= \alpha \circ \tilde{f}_1^k(\tilde{x}_1). \end{aligned}$$

Como os levantamentos $\tilde{f}_2^k \circ \alpha$ e $\alpha \circ \tilde{f}_1^k$ são iguais em \tilde{x}_1 temos que eles são iguais. Por outro lado, se $\tilde{f}_1^k = \alpha \circ \tilde{f}_2^k \circ (\alpha)^{-1}$ para $\alpha \in O_X$ então:

$$p(FIX(\tilde{f}_1^k)) = p(FIX(\tilde{f}_2^k)).$$

Isso sugere uma ação de O_X sobre $lift(f^k)$ (o conjunto dos levantamentos de f^k) dada por:

$$\alpha \star \tilde{f}^k = \alpha \circ \tilde{f}^k \circ (\alpha)^{-1}.$$

O conjunto quociente desta ação $R(f^k)$ será por chamado de **classes de Reidemeister**.

Tomemos $\gamma_{n,k} : R(f^k) \rightarrow R(f^n)$ como sendo a aplicação que leva uma classe $[\tilde{f}^k]$ de Reidemeister de $R(f^k)$ na classe $[(\tilde{f}^k)^d] = [\tilde{f}^{kd}] = [f^n]$. Esta aplicação está bem definida, pois dado $\alpha \in O_X$ temos que:

$$(\alpha \tilde{f}^k \alpha^{-1})^d = \alpha \underbrace{\tilde{f}^{kd}}_{\tilde{f}^n} \alpha^{-1}.$$

Consideremos as injeções $j_i : N(f^i) \rightarrow R(f^i)$, $i = k, n$, a inclusão canônica que leva uma classe de Nielsen $A \in N(f^i)$ na classe de Reidemeister $[\tilde{f}^i]$ tal que $A = p(FIX(\tilde{f}^i))$.

Notemos que o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N(f^k) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & N(f^n) \\ j_k \downarrow & & \downarrow j_n \\ R(f^k) & \xrightarrow{\gamma_{n,k}} & R(f^n) \end{array}$$

é comutativo, pois dada uma classe de Nielsen $A \in N(f^k)$ e um ponto $x_0 \in A$ temos que:

$$\begin{aligned} \gamma \circ j_k(A) &= \gamma([\tilde{f}^k]) = [f^n] \\ j_n \circ \tilde{\gamma}(A) &= j_n(\underbrace{\overline{A}}_{A \subset \overline{A}}) = j_n(\underbrace{p(FIX(\tilde{f}^n))}_{\ni x_0}) = [f^n]. \end{aligned}$$

Podemos fazer essa extensão de uma outra forma. Fixe um par referência (x_0, r_0) para a aplicação f^k , onde $x_0 \in X$ e r_0 é um caminho de x_0 e $f^k(x_0)$. Dai, consideramos a ação de $\Pi_1(X, x_0)$ em si próprio dada por:

$$\alpha \star \beta = \alpha * \beta * (r * (f^k(\alpha))^{-1} * (r)^{-1})$$

As órbitas $R(f^k; x_0, r_0)$ desta ação são chamadas de **classes de Reidemeister**.

Naturalmente o par referência de f^n fica determinado por (x_0, r_1) , onde:

$$r_1 = r_0 * (f^k \circ r_0) * (f^{2k} \circ r_0) * \cdots * \underbrace{(f^{n-k} \circ r_0)}_{f^{(d-1)k}}.$$

A aplicação $\tilde{\gamma}_{n,k}^c : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X; x_0)$ que leva uma classe $[a]$ na classe

$$\begin{aligned} & [(a * r_0) * (f^k \circ (a * r_0)) * (f^{2k} \circ (a * r_0)) * \cdots * (f^{n-k} \circ (a * r_0)) * \cdots \\ & \quad \cdots * (r_0 * f^k(r_0) * \cdots * f^{n-k}(r_0))^{-1}] \end{aligned}$$

induz $\gamma_{n,k}^c : R(f^k; x_0, r_0) \rightarrow R(f^n; x_0, r_1)$. De fato, se

$$a' = d * a * r_0 * f^k(d^{-1}) * r_0^{-1}$$

então

$$\begin{aligned} a_1 &= (a' * r_0) * f^k(a' * r_0) * \cdots * f^{n-k}(a' * r_0) * (r_1)^{-1} \\ &= \underbrace{(d * a * r_0 * f^k(d^{-1}))}_{\alpha} * f^k(\alpha) * \cdots * f^{n-k}(\alpha) * (r_1)^{-1} \\ &= d * (a * r_0) * (f^k(d^{-1}) * f^k(d)) * (f^k(a * r_0)) * (f^{2k}(d^{-1}) * f^{2k}(d)) * \\ & \quad * \cdots * (f^{n-k}(d^{-1}) * f^{n-k}(d)) * (f^{n-k}(a * r_0)) * f^n(d^{-1}) * (r_1)^{-1} \\ &= d * [(a * r_0) * (f^k(a * r_0)) * \cdots * (f^{n-k}(a * r_0))] * f^n(d^{-1}) * (r_1)^{-1} \\ &= d * \underbrace{[(a * r_0) * (f^k(a * r_0)) * \cdots * (f^{n-k}(a * r_0)) * (r_1)^{-1}]}_{\beta} * (r_1)^{-1} * \\ & \quad * f^n(d^{-1}) * (r_1)^{-1} \\ &= d * [\beta] * (r_1)^{-1} * f^n(d^{-1}) * (r_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Consideremos um ponto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, podemos definir:

$$\phi_k : R(f^k; x_0, r_0) \rightarrow R(f^k)$$

que leva uma classe $[a]$ na classe $[\tilde{f}^k]$ de forma que:

$$\tilde{f}^k(\tilde{x}_0) = \text{o ponto final do levantamento do caminho } a * r_0 \text{ que começa em } \tilde{x}_0.$$

dessa forma ϕ_k é obviamente sobrejetora, e é injetora porque sempre que dois levantamentos coincidem em um ponto eles implica que eles serão iguais. De forma análoga podemos definir ϕ_n . Como esses levantamentos são únicos sabemos que as aplicações ϕ_i , $i = k, n$, estão bem definidas. Ressaltemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} R(f^k; x_0, r_0) & \xrightarrow{\gamma_{n,k}^c} & R(f^n; x_0, r_1) \\ \phi_k \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ R(f^k) & \xrightarrow{\gamma_{n,k}} & R(f^n) \end{array}$$

ele é comutativo, pois dada uma classe de Reidemeister $[a] \in R(f^k; x_0, r_0)$ temos que:

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} \circ \phi_k([a]) &= \gamma([f^k]) = [f^n] \\ \phi_n \circ \gamma_{n,k}^c([a]) &= \phi_n([a_1]) = [\tilde{g}] \end{aligned}$$

onde $\tilde{g} \in \text{lift}(f^n)$ e

$$\tilde{g}(\tilde{x}_0) = \text{o ponto final do levantamento do caminho } a_1 * r_1 \text{ iniciado em } \underbrace{\tilde{x}_0}_{= \tilde{f}^n(\tilde{x}_0)}.$$

Portanto $[\tilde{g}] = [f^n]$.

Definição 3.2 *Seja $A \in R(f^n)$, diremos que a **profundidade de A** é o menor divisor k de n que satisfaz $A \subset \text{Im}(\gamma_{n,k})$*

Observemos que o próprio n possui essa propriedade e portanto n é um limitante superior para a profundidade de qualquer $A \in R(f^n)$.

3.2 Propriedades Gerais de R_h

Começamos essa seção construindo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

De forma que, X e Y sejam espaços conexos por caminho e que admitam recobrimentos universais

$$p_X : \tilde{X} \rightarrow X \quad p_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$$

Consideremos um "levantamento" de h , ou seja, suponhamos a existência de uma aplicação $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ com a propriedade $p_Y \circ \tilde{h} = g \circ p_X$.

Conseqüentemente definimos uma aplicação $l_{\tilde{h}} : \text{lift}(f) \rightarrow \text{lift}(g)$ da seguinte forma: dado um levantamento $\tilde{f} \in \text{lift}(f)$ e um ponto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, é conhecido que existe um único levantamento $\tilde{g} \in \text{lift}(g)$ que leva $\tilde{h}(\tilde{x}_0)$ em $\tilde{h}(\tilde{f}(\tilde{x}_0))$ como mostra o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x}_0 \in & \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} & \ni \tilde{f}(\tilde{x}_0) \\ & \tilde{h} \downarrow & & \downarrow \tilde{h} & \\ \tilde{h}(\tilde{x}_0) \in & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Y} & \ni \tilde{h}(\tilde{f}(\tilde{x}_0)). \end{array}$$

Dai, esse diagrama comutativo define uma aplicação $l_{\tilde{h}}$ por $l_{\tilde{h}}(\tilde{f}) = \tilde{g}$. Com a aplicação $l_{\tilde{h}}$ bem definida podemos estende-la para uma função

$$R_h : R(f) \rightarrow R(g)$$

da seguinte forma:

para cada $\alpha \in O_X$ existe um único $\beta \in O_Y$ que faz o diagrama a baixo comutar

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{X} \\ \tilde{h} \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\beta} & \tilde{Y} \end{array}$$

(aqui basta usar o mesmo argumento usado para definir $l_{\tilde{h}}$). Com isso ganhamos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \tilde{X} \\ \tilde{h} \downarrow & & \tilde{h} \downarrow & & \tilde{h} \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\beta} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\beta^{-1}} & \tilde{Y}. \end{array}$$

Portanto $l_{\tilde{h}}(\alpha^{-1} \circ \tilde{f} \circ \alpha) = \beta^{-1} \circ \tilde{g} \circ \beta$, e definimos R_h por

$$R_h([\tilde{f}]) = [\tilde{g}].$$

Uma primeira observação que fazemos sobre R_h , é que essa aplicação não depende da escolha de um particular "levantamento" \tilde{h} de h .

De fato, consideremos \tilde{k} um outro levantamento de h e seja $\alpha \in O_Y$ a única transformação com a propriedade $\alpha \circ \tilde{k} = \tilde{h}$. Assim dado qualquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$ temos que:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{k}(\tilde{x}) & \xrightarrow{l_{\tilde{k}}(\tilde{f})} & \tilde{k}(\tilde{f}(\tilde{x})) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \tilde{h}(\tilde{x}) & \xrightarrow{l_{\tilde{h}}(\tilde{f})} & \tilde{h}(\tilde{f}(\tilde{x})) \end{array}$$

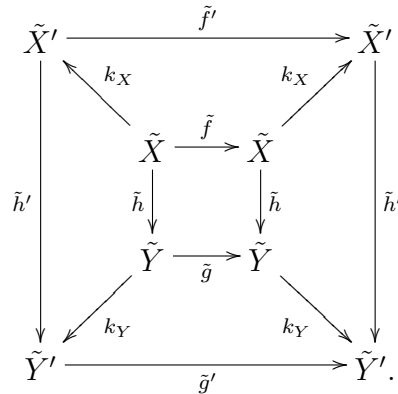
isto é, $l_{\tilde{h}}(\tilde{f}) = \alpha l_{\tilde{k}}(\tilde{f}) \alpha^{-1}$ e portanto $[l_{\tilde{h}}(\tilde{f})] = [l_{\tilde{k}}(\tilde{f})]$.

Notemos ainda que R_h não depende da escolha dos recobrimentos universais. De fato, consideremos $p'_X : \tilde{X}' \rightarrow X$ e $p'_Y : \tilde{Y}' \rightarrow Y$ outros dois recobrimentos universais. Para provar que R_h não depende da escolha dos recobrimentos universais basta mostrar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} R(f) & \xrightarrow{R_h} & R(g) \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 \\ R'(f) & \xrightarrow{R'_h} & R'(g) \end{array}$$

onde η_i é o isomorfismo canônico, para $i = 1, 2$. Fixemos homeomorfismos $k_X : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ e $k_Y : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}'$ que satisfazem $p'_X \circ k_X = p_X$ e $p'_Y \circ k_Y = p_Y$ e um "levantamento" $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ de $h : X \rightarrow Y$. Assim, dado $\tilde{f} \in \text{lift}(f)$ existem únicos $\tilde{g} \in \text{lift}(g)$, $\tilde{f}' \in \text{lift}(f)$,

$\tilde{g}' \in \text{lift}(g)$ e \tilde{h}' "levantamento" de h que fazem o diagrama seguinte comutar:



Segue do diagrama acima que :

$$\eta_2 \circ R_h([\tilde{f}]) = \eta_2([\tilde{g}]) = [\tilde{g}'] = R'_{h'}([\tilde{f}']) = R'_{h'} \circ \eta_1([\tilde{f}])$$

e portanto R_h não depende da escolha do recobrimento universal.

3.3 Caso particular de R_h

Vamos usar toda a construção da seção anterior no seguinte caso particular:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f^n} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{f^n} & X
 \end{array}$$

Esse diagrama é comutativo (assumimos que o espaço X satisfaz as exigências requeridas). Dessa forma, ganhamos uma aplicação

$$R_f : R(f^n) \rightarrow R(f^n)$$

que como primeiro resultado temos:

Lema 3.3 1. $R_f([\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n]) = [\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}]$.

2. $(R_f)^n = \text{id}_{R(f^n)}$.

3. Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento universal de X , assim:

$$f(p(\text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n))) = p(\text{FIX}(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})).$$

4. $\text{ind}(f^n; p(\text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n))) = \text{ind}(f^n; p(\text{FIX}(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})))$.

Prova:

1. Segue da construção de R_f e da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n} & \tilde{X} \\ \tilde{f}_n \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_n \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}} & \tilde{X}. \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned} R_f([\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n]) &= [\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}] \\ (R_f)^2([\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n]) &= [\tilde{f}_{n-1} \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-2}] \\ &\vdots \\ (R_f)^n([\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n]) &= [\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n]. \end{aligned}$$

3. Primeiramente vamos provar que :

$$\tilde{f}_n(FIX(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n)) = FIX(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}).$$

- Se $\tilde{f}_n(x) \in \tilde{f}_n(FIX(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n))$ então $x \in FIX(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n)$.
Portanto

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(x) &= \tilde{f}_n(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n(x)) \\ &= (\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})(\tilde{f}_n(x)) \end{aligned}$$

e assim $\tilde{f}_n(x) \in FIX(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})$.

- Se $y \in FIX(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})$ então

$$\begin{aligned} y &= (\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})(y) \\ &= (\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}(y)) \\ &= \tilde{f}_n(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1} \circ \tilde{f}_n)(\underbrace{\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}(y)}_{=x}) \\ &= \tilde{f}_n(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n(x)). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n(x) &= (\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n)(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}(y)) \\ &= (\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})(\underbrace{\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}(y)}_{=y}) \\ &= (\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1})(y) \\ &= x \end{aligned}$$

e assim $x \in \text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n)$. Por conseguinte

$$\begin{aligned} y &= \tilde{f}_n(\underbrace{\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n(x)}_{=x}) \\ &= \tilde{f}_n(\underbrace{x}_{\in \text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n)}). \end{aligned}$$

Segue que $y \in \tilde{f}_n(\text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n))$. Portanto

$$\tilde{f}_n(\text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n)) = \text{FIX}(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}).$$

Agora basta aplicar p dos dois lados dessa igualdade.

4. Sejam $A = p(\text{FIX}(\tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_n))$ e $B = p(\text{FIX}(\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_1 \circ \dots \circ \tilde{f}_{n-1}))$.

Pelo item anterior $f(A) = B$ e pelo item dois $A = f^n(A) = f^{n-1}(B)$. Segue da propriedade comutativa do índice que:

$$\text{ind}(f^n; A) = \text{ind}(f^{n-1} \circ f; A) \underbrace{=}_{f(A)=B} \text{ind}(f \circ f^{n-1}; B) = \text{ind}(f^n; B).$$

■

Com a função R_f podemos definir uma ação de Z_n sobre R_{f^n} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi : R_{f^n} \times Z_n &\rightarrow R_{f^n} \\ ([f^n], m) &\mapsto (R_f)^m([f^n]). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $\phi|_{N_{f^n} \times Z_n}$ é uma ação de Z_n sobre o conjunto das classes de Reidemeister.

Podemos descrever essa ação ainda de uma outra forma:

tomemos uma auto-aplicação $f : X \rightarrow X$ e fixemos um par referência (x_0, r_0) de f^n , onde r_0 é um caminho do ponto $r_0(0) = x_0 \in X$ no ponto $r_0(1) = f^n(x_0)$. Observamos que um outro par referência de f^n pode ser dado por $(f^k(x_0), f^k \circ r_0)$, onde k é um divisor de n . Dai :

Lema 3.4 *A aplicação $\Pi_1(X, x_0) \ni \alpha \mapsto f^k \circ \alpha \in \Pi_1(X, x_0)$ define uma aplicação*

$$R_f^c : R(f^n; x_0, r_0) \rightarrow R(f^n; f^k(x_0), f^k \circ r_0)$$

que faz o diagrama a baixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} R(f^n; x_0, r_0) & \xrightarrow{R_f^c} & R(f^n; f^k(x_0), f^k \circ r_0) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ R(f^n) & \xrightarrow{R_f} & R(f^n) \end{array}$$

PROVA: Observe que R_f^c está bem definida, pois

$$f^k(d * \alpha * r_0 * f^n(d^{-1}) * r_0^{-1}) = f^k(d) * f^k(\alpha) * f^k(r_0) * f^n(f^k(d^{-1})) * f^k(r_0^{-1})$$

e com isso a relação de Reidemeister está bem definida. Para provar a comutatividade do diagrama observe que:

$$\phi(R_f^c([\alpha])) = \phi([f^k \circ \alpha]) = [\tilde{h}^n]$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{h}^n(\tilde{f}^k(\tilde{x}_0)) &= \text{o ponto final do levantamento de } (f^k \circ \alpha) * (f^k \circ r_0) \text{ que} \\ &\quad \text{começa em } \tilde{f}^k(\tilde{x}_0) \\ &= \text{o ponto final do levantamento de } f^k(\alpha * r_0) \text{ que começa em } \tilde{x}_0. \end{aligned}$$

(Na segunda igualdade usamos $(f^k \circ \alpha) * (f^k \circ r_0) = f^k(\alpha * r_0)$). Por outro lado, $R_f(\phi([\alpha])) = R_f([\tilde{f}^n])$ onde

$$\tilde{f}^n(\tilde{x}_0) = \text{o ponto final do levantamento de } (\alpha * r_0) \text{ que começa em } \tilde{x}_0.$$

$\tilde{h}^n(\tilde{f}^k(\tilde{x}_0)) = \tilde{f}^k(\tilde{f}^n(\tilde{x}_0))$, pois um levantamento que passa por um ponto é único. Por conseguinte o diagrama a baixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}^n} & \tilde{X} \\ \tilde{f}^k \downarrow & & \downarrow \tilde{f}^k \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{h}^n} & \tilde{X}. \end{array}$$

Portanto $R_f([\tilde{f}^n]) = [\tilde{h}^n]$ e assim $R_f(\phi([\alpha])) = \phi(R_f^c([\alpha]))$. ■

Agora podemos fazer a seguinte definição:

Definição 3.5 *O conjunto quociente de $R(f^n)$ sobre a ação de Z_n será denotado por OR_{f^n} e seus elementos serão chamados de **órbitas das classes de Reidemeister**.*

Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos estender

$$\gamma_{n,k} : R(f^k) \rightarrow R(f^n)$$

para $\gamma_{n,k} : OR_{f^k} \rightarrow OR_{f^n}$.

3.4 O número periódico de Nielsen-Jiang completo

Abrimos essa seção estendendo a noção de profundidade para as órbitas das classes de Reidemeister.

Definição 3.6 *Seja $A \in OR_{f^n}$, diremos que a profundidade de A o menor divisor k de n que satisfaz $A \subset Im(\gamma_{n,k})$, assim deve existir $B \in OR_{f^k}$ tal que $\gamma_{n,k}(B) = A$, neste caso diremos que B precede A ou que A é precedido por B . Denotaremos k por $d(A)$*

Uma classe de Reidemeister $A \in R(f^n)$ é chamada **reduzível** se existirem um divisor k de n $k < n$ e uma classe $B \in R(f^k)$ tais que $\gamma_{n,k}(B) = A$. Uma extensão natural desse conceito para as órbitas das classes de Reidemeister é dada por: *uma órbita das classes de Reidemeister que contém uma classe de Reidemeister reduzível é chamada **reduzível**.*

Assim uma órbita das classes de Reidemeister que não possui classes de Reidemeister reduzíveis será chamada de **irreduzível**.

Dessa forma, observamos que $A \in OR(f^n)$ é irreduzível se, e somente se, $d(A) = n$. De fato, se $A \in OR(f^n)$ é irreduzível então por definição não existe $B \in R(f^n)$ com B em A e B irreduzível. Segue que não existe k divisor de n ($k < n$) tal que $\gamma_{n,k}(A) = B$. Como $\gamma_{n,n}(A) = A$ temos que $d(A) = n$.

Por outro lado, se $d(A) = n$ então $\gamma_{n,k}(A) \not\subset B$ para qualquer $B \in R(f^n)$ e para qualquer divisor k de n ($k < n$). Assim A é irreduzível.

Uma classe de Reidemeister $A \in R(f^n)$ é chamada **essencial** se, e só se, $ind(f^n, A)$ for diferente de 0. Caso contrário A é **não essencial**.

Pela propriedade da comutatividade do índice temos que quaisquer duas classes de Reidemeister A e B que estão em uma mesma órbita das classes de Reidemeister possuem o mesmo índice, isto é, $ind(f^n, A) = ind(f^n, B)$. Segue que uma extensão natural do conceito de essencialidade para as órbitas das classes de Reidemeister é dada por: *uma órbita $A \in OR(f^n)$ é essencial se uma (e portanto todas) classe de Reidemeister em A for essencial.* Agora estamos prontos para o seguinte lema:

Lema 3.7 *Se uma órbita $A \in OR(f^n)$ é essencial e irreduzível, então ela contém pelo menos n pontos periódicos.*

PROVA: Como A é uma órbita das classes de Reidemeister essencial segue que todas as classes de Reidemeister em A são não vazias.

Assim fixando um ponto a em uma classe de Reidemeister $B \in R(f^n)$ com $B \in A$ temos que o comprimento da órbita de a tem que ser n , pois n é um limitante superior, uma vez que a está em uma classe de Reidemeister.

Por outro lado, se $f^k(a) \neq a$ para qualquer $k < n$, pois se para algum $k < n$ tivéssemos $f^k(a) = a$ então $a \in FIX(f^k)$ e assim teríamos alguma classe de Nielsen B contida em $FIX(f^k)$ tal que $\gamma_{n,k}(B) = A$. Consequentemente a profundidade de A é $d(A) = k < n$ o que contraria o fato de A ser irreduzível.

■

Definição 3.8 *Seja $f : X \rightarrow X$*

1. $IEC_n(f)$ = o número de classes de Reidemeister irredutíveis e essenciais em $R(f^n)$.
Portanto $IEC_n(f)$ é um número natural.
2. $NP_n(f)$ = o número de classes de órbitas de Reidemeister essenciais e irredutíveis em $OR(f^n)$. $NP_n(f)$ é chamado de número periódico primo de Nielsen-Jiang.

Notemos que $NP_n(f)$ é definido a partir de invariantes homotópicos e portanto $NP_n(f)$ é um invariante homotópico.

Consideremos a união $\bigcup_{k|n} OR(f^k)$. Um subconjunto G de $\bigcup_{k|n} OR(f^k)$ é chamado **um sistema precedente** se toda órbita essencial A em $\bigcup_{k|n} OR(f^k)$ é precedida por um elemento de G . O sistema precedente G é chamado um **sistema precedente mínimo** (MPS) se $\sum_{A \in G} d(A)$ é minimal.

Definição 3.9 *A cardinalidade de um MPS G é chamado de número periódico de Nielsen-Jiang completo e será denotado por $NF_n(f)$.*

Note que se A é uma órbita de classes de Reidemeister essencial de $\bigcup_{k|n} OR(f^k)$ e G é um MPS de $\bigcup_{k|n} OR(f^k)$ então existe $B \in G$ tal que $\gamma_{n,k}(C) = B$ para $C \in A$. Assim se A for irredutível então $\gamma_{n,n}(B) = B$ para todo $B \in A$ e portanto A está em G .

Portanto toda órbita de classes de Reidemeister essencial e irredutível está em G .

Teorema 3.10 *$NF_n(f)$ é um invariante homotópico e é um limitante inferior do número de pontos n -periódicos de f .*

PROVA: $NF_n(f)$ é um invariante homotópico porque é definido a partir de invariantes homotópicos, isto é, as classes de Reidemeister são invariantes homotópicos, segue que as órbitas das classes de Reidemeister são invariantes homotópicos, logo a profundidade de uma classe de órbitas de Reidemeister não se alteram durante homotópias, e portanto $NF_n(f)$ é um invariante homotópico.

Para provar que $NF_n(f) \leq \#FIX(f^n)$ observe que se $FIX(f^n)$ for infinito então a desigualdade é verdadeira.

Se $FIX(f^n)$ for finito podemos dizer que

$$FIX(f^n) = \{x_1^1, \dots, x_{s_1}^1; \dots; x_1^l, \dots, x_{s_l}^l\}$$

onde $\{x_1^i, \dots, x_{s_i}^i\}$ determina uma órbita de Nielsen da classe $A_i \in OR(f^{s_i})$, para cada i . Segue que $d(A_i) \leq s_i$.

Para cada i , seja $B_i \in OR(f^{d(A_i)})$ que precede A_i , então:

$$\sum_{i=1}^l d(B_i) = \sum_{i=1}^l d(A_i) \leq \sum_{i=1}^l s_i = \#FIX(f^n)$$

■

Observe no teorema anterior que $G = \{B_1, \dots, B_l\}$ é um sistema precedente, pois se uma classe essencial $C \in OR(f^k)$ então existe $i = 1, \dots, l$ tal que $\{x_1^i, \dots, x_{s_i}^i\} \subset C$ e portanto $\gamma_{n,s_i}(C) = B_i$ e assim B_i precede C .

Capítulo 4

Procedimento de Cancelamento

Vamos começar este capítulo verificando que: se X é uma PL-variedade de dimensão maior ou igual a 4 possivelmente com bordo e se $f : X \rightarrow X$ é uma auto-aplicação então $NF_n(f) = 0$ é equivalente $N(f^k) = 0$ para todo divisor k de n .

De fato, suponhamos que $N(f^k) = 0$ para todo divisor k de n então, pelo fato de X ser uma PL-variedade, temos f^k é homotópica a uma aplicação que não possui pontos fixos, essa nova aplicação também será denotada por f^k , para todo divisor k de n . Em particular, para $k = n$, f^n não possui pontos fixos e $NF_n(f) \leq \#FIX(f^n)$. Portanto $NF_n(f) = 0$.

Por outro lado, se $NF_n(f) = 0$ então nenhuma órbita das classes de Reidemeister $A \in \bigcup_{k|n} OR(f^k)$ é essencial, conseqüentemente todas as classes de Reidemeister $B \in A$ são não essenciais, o que significa que $ind(f^n, B) = 0$ para todo divisor k de n . Portanto $N(f^k)$ para todo divisor k de n .

O que focamos anterior é importante porque o que queremos provar no final deste capítulo é:

Teorema 4.1 *Seja X uma PL-variedade de dimensão maior ou igual a 4 possivelmente com bordo e seja $f : X \rightarrow X$ uma auto-aplicação. Neste caso f é homotópica a uma aplicação g sem pontos n -periódicos (onde n é um número natural fixado) se, e somente se, para todo divisor k de n o número de Nielsen $N(f^k) = 0$.*

De fato, se f for homotópica a uma aplicação g sem pontos n -periódicos temos que $0 = N(g^k) = N(f^k)$ para todo divisor k de n .

Reafirmamos que o número natural n foi previamente fixado, assim n possui uma quantidade finita de divisores. A prova da "volta" do nosso teorema é dada por indução sobre os divisores de n . Dessa forma, provaremos que para qualquer divisor k de n , f é homotópica a uma aplicação g sem pontos l -periódicos, onde l também é um divisor de n e $l < k$.

Portanto ganhamos o caso $k = 1$, pois este está provado no próprio teorema de Wecken. Daí como hipótese de indução temos que para um dado divisor k de n , $\#FIX(f^l) = 0$ para todo divisor l de n com $l < k$, isto é, f é homotópica a uma aplicação g sem pontos

l -periódicos, onde l é um divisor de n menor que k . Segue que $\#FIX(g^l) = NF_l(f)$, para qualquer divisor l de n menor que k .

Para terminar o resultado devemos provar que é possível remover os pontos fixos de f^k , isto é, devemos remover os pontos k -periódicos de f sem criarmos outros pontos de período menor ou igual a k .

Observemos o seguinte resultado:

Lema 4.2 *Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação. Suponha-mos que exista $C \subset M$ compacto e disjunto de $FIX(f^n)$, $n > 0$.*

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que a igualdade $FIX(g^n) = FIX(f^n)$ é verdadeira, onde $g : M \rightarrow M$ é qualquer auto-aplicação que satisfaz $g|_{M \setminus C} = f|_{M \setminus C}$ e $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in C$.

PROVA: Notemos que para cada $x \in C$ temos que $d(x, f^n(x)) > 0$, pois C e $FIX(f^n)$ são fechados disjuntos de M . Portanto

$$\inf\{d(x, f^n(x)); x \in C\} = \varepsilon_1 > 0.$$

Dai, consideremos o seguinte procedimento: Seja $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2n}$ e uma auto-aplicação g (qualquer) que satisfaça $g|_{M \setminus C} = f|_{M \setminus C}$ e $d(g(x), f(x)) < \varepsilon_2$ para todo $x \in C$.

Notemos que, para qualquer $x \in C$:

$$d(g^2(x), f^2(x)) \leq \underbrace{d(g^2(x), g \circ f(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f(x), \varepsilon_2))\}} + \underbrace{d(g \circ f(x), f^2(x))}_{< \varepsilon_2}$$

onde

$$\text{diam}\{g(B(f(x), \varepsilon_2))\} = \sup\{d(g(x), g(y)); x, y \in B(f(x), \varepsilon_2)\}$$

e $B(f(x), \varepsilon_2)$ é a bola de centro em $f(x)$ e raio ε_2 . Devemos considerar os seguintes casos:

- Se

$$\text{diam}\{g(B(f(x), \varepsilon_2))\} + \varepsilon_2 = a_1 < \varepsilon_1$$

então passamos para a próxima desigualdade

$$d(g^3(x), f^3(x)) \leq \underbrace{d(g^3(x), g \circ f^2(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f^2(x), a_1))\}} + \underbrace{d(g \circ f^2(x), f^3(x))}_{< \varepsilon_2}$$

- Se

$$\text{diam}\{g(B(f(x), \varepsilon_2))\} + \varepsilon_2 = a_1 \geq \varepsilon_1$$

então consideraremos $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1}{in}$, $i = 3, 4, \dots$, até que a desigualdade

$$d(g^2(x), f^2(x)) \leq \underbrace{d(g^2(x), g \circ f(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f(x), \varepsilon_i))\}} + \underbrace{d(g \circ f(x), f^2(x))}_{< \varepsilon_i}$$

satisfaça

$$\text{diam}\{g(B(f(x), \varepsilon_i))\} + \varepsilon_i = a_1 < \varepsilon_1.$$

Dai passamos para a próxima desigualdade

$$d(g^3(x), f^3(x)) \leq \underbrace{d(g^3(x), g \circ f^2(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f^2(x), a_1))\}} + \underbrace{d(g \circ f^2(x), f^3(x))}_{< \varepsilon_i}.$$

Podemos dizer que isso irá ocorrer porque nossas funções são todas contínuas.

Na desigualdade seguinte verificaremos :

- Se

$$\text{diam}\{g(B(f^2(x), a_1))\} + \varepsilon_2 = a_2 < \varepsilon_1$$

então passamos para a próxima desigualdade

$$d(g^4(x), f^4(x)) \leq \underbrace{d(g^4(x), g \circ f^3(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f^3(x), a_2))\}} + \underbrace{d(g \circ f^3(x), f^4(x))}_{< \varepsilon_2}.$$

- Se

$$\text{diam}\{g(B(f^2(x), a_1))\} + \varepsilon_2 = a_2 \geq \varepsilon_1$$

então consideraremos $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1}{in}$, $i = 3, 4, \dots$, até que as desigualdades anteriores sejam verdadeiras e que a desigualdade

$$d(g^3(x), f^3(x)) \leq \underbrace{d(g^3(x), g \circ f^2(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f^2(x), \varepsilon_i))\}} + \underbrace{d(g \circ f^2(x), f^3(x))}_{< \varepsilon_i}$$

satisfaça

$$\text{diam}\{g(B(f^2(x), \varepsilon_i))\} + \varepsilon_i = a_2 < \varepsilon_1.$$

Dai passamos para a próxima desigualdade

$$d(g^4(x), f^4(x)) \leq \underbrace{d(g^4(x), g \circ f^3(x))}_{\leq \text{diam}\{g(B(f^3(x), a_2))\}} + \underbrace{d(g \circ f^3(x), f^4(x))}_{< \varepsilon_i}.$$

Esse procedimento é finito, pois n está fixado. Segue que conseguiremos um ε tal que :

$$d(f^n(x), g^n(x)) < \varepsilon$$

e portanto, para cada $x \in C$ teremos:

$$d(x, g^n(x)) \geq d(x, f^n(x)) - d(f^n(x), g^n(x)) > 0$$

■

Este resultado é o "ponta-pé" inicial para resolvermos nosso problema, uma vez que ele garante que podemos considerar nossas deformações arbitrariamente pequenas sem alterar o conjunto de pontos n -periódicos, para qualquer $n > 0$ fixado. Outro resultado importante para nosso capítulo é:

Teorema 4.3 *Seja n um número natural fixado e uma PL-subvariedade M em \mathbb{R}^N compacta com a métrica inerente a métrica euclidiana de \mathbb{R}^N . Então qualquer auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ é homotópica a uma auto-aplicação $g : M \rightarrow M$ com:*

1. $\#FIX(g^n)$ finito.
2. g um PL-homeomorfismo próximo de qualquer $x \in FIX(g^n)$.
3. Para qualquer $\varepsilon > 0$ dado podemos escolher g que satisfazendo $d(f, g) < \varepsilon$.

O último teorema é de fato muito importante para nosso trabalho, pois em sua demonstração foi possível estudar muitos resultados importantes da teoria de pontos fixos, deixando assim nosso trabalho muito mais amplo. Por isso a demonstração desse resultado se encontra nos anexos.

4.1 Correção de homeomorfismos:

Nessa seção podemos assumir que:

- Pela hipótese de indução, $FIX(f^l)$ é vazio para qualquer divisor l de n menor que k .
- Pelo teorema 4.3, $FIX(f^n)$ é finito e com isso $FIX(f^l)$ é finito para qualquer divisor l de n .
- Pela Construção de Hopf, cada ponto $x \in FIX(f^k)$ está no interior de um simplexo maximal onde f é um PL-homeomorfismo.

Geometricamente, aqui nos prepararemos para separar as possíveis imagens de um PL-arco por uma auto-aplicação. Esse arco liga duas órbitas. Queremos fazer isso de modo que nossa auto-aplicação seja minimamente alterada.

Lema 4.4 *Sejam $x_0, y_0 \in FIX(f^k)$. Suponhamos que:*

1. $x_0, y_0, f(x_0)$ e $f(y_0)$ são pontos distintos.
2. x_0 e y_0 estão no interior de m -simplexos maximais distintos σ_x e σ_y nos quais f é um PL-homeomorfismo.
3. $w : [-1, 1] \rightarrow M$ é um PL-arco de $w(-1) = x_0$ a $w(1) = y_0$ tal que:

- $w(t) \in \sigma_x$ se, e somente se, $t \in [-1, -1 + \varepsilon]$. Analogamente, $w(t) \in \sigma_y$ se, e somente se, $t \in [1 - \varepsilon, 1]$.
- w intercepta σ_x no ponto $w(-1 + \varepsilon)$ que está no interior de uma face $(m - 1)$ -dimensional de σ_x . Analogamente, w intercepta σ_y no ponto $w(1 - \varepsilon)$ que está no interior de uma face $(m - 1)$ -dimensional de σ_y .

Então para qualquer vizinhança V que contém $w([-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon])$ existe uma homotopia f_t constante fora de V tal que:

1. $f_0 = f$.
2. $f_1 \circ w$ é um PL-arco disjunto de w e de $FIX(f^k)$.
3. Dado qualquer $\delta > 0$ temos que $d(f, f_t) < \delta$ para todo $t \in [0, 1]$, isto é, nossa homotopia é arbitrariamente pequena.

PROVA: Como a dimensão de $w \cup FIX(f^k)$ é 1 e a dimensão de M é pelo menos 3, conseguimos uma vizinhança V disjunta de w e de $FIX(f^k)$ que contém $w([-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon])$, pois M é métrico, e a restrição de f para $w([-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon])$ é homotópica a um PL-arco disjunto de $w \cup FIX(f^k)$.

Essa homotopia é tão pequena quanto se queira e admite uma extensão também arbitrariamente pequena e constante fora de V . Temos ainda que se escolhermos V suficientemente pequeno então segue do lema 4.2 que \bar{V} é disjunto de $FIX(f^k)$, que a cardinalidade de $FIX(f_t^k)$ não varia e que $FIX(f^l) = \emptyset$ para todo divisor l de n e $l < k$.

■

Agora faremos algumas observações referentes aos resultados que foram provados anteriormente e que podem ter passados despercebidos. Usaremos essas observações nos próximos resultados.

Reparemos que se $w : [-1, 1] \rightarrow M$ é um PL-arco de x_0 a y_0 e se f for um PL-homeomorfismo próximo de x_0 e de y_0 então existem vizinhanças σ'_x e σ'_y , que podem ser menores que σ_x e σ_y , e um número $\varepsilon' > 0$ que ainda satisfazem as hipóteses 1, 2 e 3 do lema anterior.

Diremos que V é uma vizinhança Euclidiana em M se V for um subconjunto de M homeomorfo a \mathbb{R}^m . Neste caso, consideremos fixado um tal homeomorfismo. Diremos ainda que $V^+ = \mathbb{R}^{m-1} \times (0, \infty)$, $V^- = \mathbb{R}^{m-1} \times (-\infty, 0)$ e $V^0 = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma auto aplicação, $x_0, y_0, x_1 = f(x_0)$ e $y_1 = f(y_0)$ pontos distintos e $w : [-1, 1] \subset M$ um PL-arco que satisfaz o lema 4.4. Existem alguns fatos que podem ser considerados:

1. $w[-1, 1]$ e $f \circ w[-1, 1]$ são fechados e disjuntos. Como nosso espaço é métrico existem abertos disjuntos que separam $w[-1, 1]$ e $f \circ w[-1, 1]$.

2. $w[-1, 1]$ e $f \circ w[-1, 1]$ são conexos, dessa forma consideraremos que nossos abertos são conexos e portanto homeomorfos a bolas abertas de \mathbb{R}^m e assim homeomorfos ao próprio \mathbb{R}^m .
3. Diremos que $w(t) = (0, t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ e que $f \circ w(t) = (0, t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ para isso basta compor o homeomorfismo anterior com um que linearize os caminhos w e $f \circ w$.
4. Consideraremos que os simplexes s_x e s_y são tais que $w(-1 + \epsilon)$ e que $w(1 - \epsilon)$ estejam em faces $(m - 1)$ -dimensionais de s_x e s_y respectivamente. Esses simplexes $(m - 1)$ -dimensionais serão denotados por $s_{\epsilon-1}$ e por $s_{1-\epsilon}$ respectivamente.

Tomemos as seguintes projeções:

$$\begin{array}{ccc} p' : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^{m-1} \\ (x, t) & \mapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} p'' : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & t \end{array}$$

Seja s_0 um $(m - 1)$ -simplexo contido em $p'(s_{\epsilon-1}) \cap p'(s_{1-\epsilon})$, podemos dizer que $0 \in \text{int}(s_0)$ e que s_0 é suficientemente pequeno (basta refinar a triangularização do nosso espaço).

Segue que $p''(f(x, \epsilon - 1)) < 0 < p''(f(1 - \epsilon))$ para cada $x \in s_0$. Definimos a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} f' : s_0 \times [\epsilon - 1, 1 - \epsilon] & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x, t) & \mapsto & \begin{cases} \frac{t}{1-\epsilon} f(x, 1 - \epsilon) & t \in [0, 1 - \epsilon]. \\ \frac{t}{\epsilon-1} f(x, \epsilon - 1) & t \in [\epsilon - 1, 0]. \end{cases} \end{array}$$

Desse modo $f'|_{s_0 \times [\epsilon-1, 0]}$ e $f'|_{s_0 \times (0, 1-\epsilon]}$ são homeomorfismos. Dado um número $\eta > 0$ podemos considerar s_0 suficientemente pequeno para que $d(f', f) < \eta$ em $s_0 \times [\epsilon - 1, 1 - \epsilon]$. Segue que temos uma η -homotopia entre f e f' .

Consideremos nossa η -homotopia com a propriedade de se estender sobre M de forma constante fora de uma vizinhança de $s_0 \times [\epsilon - 1, 1 - \epsilon]$ previamente estabelecida, pois nossas vizinhança são convexas e portanto contráteis e assim homotópicas.

Assim assumimos que esta homotopia não gera novos pontos de período l , onde l é um divisor de n e $l \leq k$, pois se tais pontos fossem criados, os descartariamos usando o lema 4.2.

Observemos que para todo $x \in s_0$ temos que:

$$\begin{aligned} f'(x, 1 - \epsilon) &= \frac{1 - \epsilon}{1 - \epsilon} f(x, 1 - \epsilon) = f(x, 1 - \epsilon). \\ f'(x, \epsilon - 1) &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon - 1} f(x, \epsilon - 1) = f(x, \epsilon - 1). \end{aligned}$$

Segue que a homotopia entre f e f' é constante em s_x e em s_y . Seja $\epsilon' > 0$ um número suficientemente pequeno tal que $s_0 \times [1 - \epsilon, 1 + \epsilon'] \subset s_y$ e que $s_0 \times [-1 - \epsilon', \epsilon - 1] \subset s_x$. Assim $f'|_{s_0 \times [-1-\epsilon', 0]}$ e $f'|_{s_0 \times (0, 1+\epsilon']}$ são homeomorfismos. Portanto existe uma homotopia, arbitrariamente pequena, constante próximo de $FIX(f^k)$.

Por fim, consideremos as vizinhanças euclidianas $V_0 = \text{int}(s_0) \times (-1 - \epsilon', 1 + \epsilon')$ e $V_1 = f(V_0)$ com as seguintes propriedades:

- $w(t) = (0, t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} = V_0$.
- $f \circ w(t) = (0, t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} = V_1$.
- $f(V_0^+) \subset V_1^+$.
- $f(V_0^-) \subset V_1^-$.
- $f(V_0^0) = 0 \in \mathbb{R}^m = V_1$.
- $f|_{V_0 \setminus V_0^0}$ é um homeomorfismo.

Lema 4.5 *Consideremos $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação que satisfaz o teorema 4.3, duas órbitas comprimento k disjuntas $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$ e w um arco de x_0 a y_0 . Então existe uma homotopia, arbitrariamente pequena, f_t constante em uma vizinhança de $FIX(f^k)$ satisfazendo:*

1. $FIX(f_t^k) = FIX(f^k)$.
2. existem vizinhanças euclidianas mutuamente disjuntas V_0, V_1, \dots, V_{k-1} tais que $f^i \circ w(t) = (0, t)$ em $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} = V_i$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$.
3.

$$\begin{cases} f_1(V_i^+) \subset V_{i+1}^+ & \text{para } i = 0, 1, \dots, k-1 \\ f_1(V_i^-) \subset V_{i+1}^- & \text{para } i = 0, 1, \dots, k-1 \\ f_1(V_i^0) = 0 \in V_{i+1} & \text{para } i = 0, 1, \dots, k-2 \end{cases}$$
4. A restrição de f_1 para $V_i \setminus V_i^0$ é um homeomorfismo para $i = 0, 1, \dots, k-1$.

PROVA: Advertimos que as hipóteses do lema 4.4 estão satisfeitas e por isso aplicaremos esse resultado para obter w e $f \circ w$ arcos disjuntos. Dai, empregamos novamente esse resultado, que nos restitui arcos disjuntos $f \circ w$ e $f^2 \circ w$, e ainda garante que w e $f^2 \circ w$ são disjuntos.

Com essa rotina podemos considerar $w, f \circ w, f^2 \circ w, \dots, f^{k-1} \circ w$ arcos disjuntos. Pelo lema 4.4, podemos considerar uma vizinhança euclidina V_{k-1} do arco $f^{k-1} \circ w$ e assumir que :

$$f^{k-1} \circ w(t) = (0, t) \in V_{k-1} = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

e que V_{k-1} é disjunta de alguma vizinhança de cada um dos arcos $w, f \circ w, f^2 \circ w, \dots, f^{k-2} \circ w$.

Segue da construção posterior ao lema 4.4 que existe uma vizinhança euclidina V_{k-2} do arco $f^{k-2} \circ w$ que satisfaz:

1. $f^{k-2} \circ w(t) = (0, t) \in V_{k-2} = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$.
2. V_{k-2} é disjunta de V_{k-1} .

3. V_{k-1} e V_{k-2} são disjuntos de alguma vizinhança de cada um dos arcos $w, f \circ w, f^2 \circ w, \dots, f^{k-3} \circ w$.
4. f é um homeomorfismo em $V_{k-2} \setminus V_{k-2}^0$.

Com essa rotina podemos encontrar as vizinhanças V_0, \dots, V_{k-1} que estamos procurando.

■

Para demonstrar o lema 4.7 precisaremos do teorema 3.4 de [JM], que será considerado sem demonstração:

Teorema 4.6 *Consideremos M uma variedade topológica de dimensão maior ou igual a 3, um número natural n fixado, uma auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ satisfazendo as condições:*

1. *Para todo ponto $x \in M$ existe uma vizinhança U de x tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo.*
2. *$FIX(f^n)$ é finito.*
3. *Se $f^k(x) = x$ para algum divisor k de n e algum ponto x em M então existem uma vizinhança euclidiana V de x e um subconjunto aberto V' de V tais que:*
 - $x \in V'$.
 - $f^k(V') \subset V$.
 - A restrição $f^k|_{V'}$ é uma aplicação linear.

Então existe uma homotopia arbitrariamente pequena $f_t : M \rightarrow M$, com $t \in [0, 1]$, tal que:

1. $f_0 = f$.
2. f_1 satisfazem as condições 1, 2, 3 e a condição: *Para qualquer $x_0 \in P_k(f_1)$ existe um segmento $l \subset V'$ que acaba em x_0 tal que x_0 é o único ponto em comum entre quaisquer dois segmentos de $l, f_1^k \circ l, f_1^{2k} \circ l, \dots, f_1^{2n-k} \circ l$*
3. *A homotopia está contida em alguma vizinhança de $FIX(f^n)$.*
4. $FIX(f_1^n) = FIX(f^n)$.

■

Lema 4.7 *Sejam $f_1 : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação que satisfaz o lema 4.5 e S_0 um número natural fixado. Então*

1. Existe uma homotopia $\{f_t; 1 \leq t \leq 2\}$ constante em uma vizinhança de $FIX(f_1^k)$ tal que f_2 satisfaz o lema 4.5.
2. Existe um número $\varepsilon > 0$ tal que os conjuntos $f_2^i \circ w[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, para $i = 0, 1, \dots, S_0$, são mutuamente disjuntos.

PROVA: Pelo teorema 4.6 existe $\varepsilon > 0$ tal que os arcos

$$\{f^i \circ w(-1, \varepsilon - 1), f^i \circ w(1, 1 - \varepsilon)\}$$

são mutuamente disjuntos para $i = 1, \dots, S_0$.

Para garantir que os arcos $f_1^k \circ w[\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon]$, $f_1^i \circ w(-1, 1)$ são disjuntos, para $i = 0, \dots, k - 1$, podemos deformar f_1 por uma homotopia constante fora de uma vizinhança de $f_1^{k-1} \circ w(\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon)$. Essa homotopia pode ser considerada porque a dimensão de M é no mínimo 3.

Analogamente, sustentamos que os arcos $f_1^{k+1} \circ w[\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon]$, $f_1^i \circ w(-1, 1)$ são disjuntos, para $i = 0, \dots, k$, pois é possível deformar f_1 próximo de

$$f_1^k \circ w(\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon).$$

Durante essas homotopias f_1 pode ser alterada em V_0, \dots, V_{k-1} . Porém são arcos $f_1^i \circ w[\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon]$, $i = 0, \dots, S_0$, que foram construídos sucessivamente disjuntos de $\bigcup_{i=0}^{k-1} f_1^i \circ w[-1, 1]$ e assim essas homotopias podem ser isoladas desta união.

Se considerarmos uma vizinhança euclidiana suficientemente pequena V'_i em V_i então f_1 permanece inalterada em V'_i , $i = 0, \dots, k - 1$. Segue que o lema 4.5 é satisfeito e além disso todas as homotopias podem ser tão pequenas quanto se queira e portanto $FIX(f^k)$ não se altera. ■

4.2 Lemas

Nessa seção linearizaremos os caminhos que criamos na seção anterior e os tornaremos transversais a um ponto. Também serão provados alguns resultados técnicos que usaremos na demonstração do teorema 4.1 .

Lema 4.8 *Consideremos uma auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ tal que $FIX(f^n)$ é finito, duas órbitas disjuntas $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ e $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$, um arco w de x_0 a y_0 tal que os arcos $w, f \circ w, \dots, f^{k-1} \circ w$ sejam mutuamente disjuntos. Fixado um número $\varepsilon > 0$, existem vizinhanças $Z_i \subset V_i$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$, e uma (ε) -homotopia f_t tais que:*

1. $f_0 = f$.
2. f_t é constante fora de Z_i .

3. Próximo de $z_i = (0, 0) \in Z_i = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, f_1 é dado por $Z_i \ni (x, t) \mapsto (x, t) \in V_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, k-2$.

PROVA: Seja

$$h : \begin{array}{ccc} V_i & \rightarrow & V_{i+1} \\ (x, t) & \mapsto & (x, t). \end{array}$$

Então $h(z_i) = z_{i+1} = f(z_i)$. Consideremos uma vizinhança Z_i de z_i tal que $d(f, h) < \varepsilon$ em Z_i , a homotopia linear $f'_t : Z_i \rightarrow V_i = \mathbb{R}^m$ entre f e h e uma função de Urysohn $\mu : M \rightarrow [0, 1]$ que vale 1 em uma vizinhança de z_i contida em Z_i e vale 0 em $M \setminus Z_i$.

Dessa forma basta definir $f_t(z) = f'_{\mu(z)t}(z)$. De fato,

1. $f_0(z) = f'_{\mu(z)0}(z) = f'_0(z) = f(z)$.

2. Para $z \notin Z_i$

$$f_t(z) = f'_{\mu(z)t}(z) = f'_0(z) = f(z).$$

3. Para z próximo de z_i

$$f_1(z) = f'_{\mu(z)1}(z) = f'_1(z) = h(z).$$

■

Lema 4.9 *Sejam um espaço métrico compacto (M, d) , $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação, um número natural r fixado, um ponto $a \in M$ e V um subconjunto aberto de M que satisfaz $f^{-r}(\{a\}) \subset V$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $d(f, g) < \varepsilon$ então $g^{-r}(\{a\}) \subset V$.*

PROVA: Se $f^{-r}(\{a\}) \subset V$ então para todo ponto $z \in M \setminus V$ temos que $f^r(z) \neq a$ e assim $a \notin f^r(M \setminus V)$. Como V é aberto e M é compacto temos que $M \setminus V$ é fechado e portanto compacto assim $d(a, f^r(M \setminus V)) = \eta > 0$ pois $a \notin f^r(M \setminus V)$.

Segue do lema 2.17 que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(f, g) < \delta$ então

$$d(f^r, g^r) < \varepsilon.$$

Solicitamos que $\varepsilon < \eta$, pois dessa forma para $z \in M \setminus V$

$$d(a, g^r(z)) \geq \underbrace{d(a, f^r(z))}_{=\eta} - \underbrace{d(f^r(z), g^r(z))}_{\varepsilon} > 0.$$

Portanto $g^{-r}(\{a\}) \subset V$.

■

Neste ponto analisaremos um pouco mais a fundo o que se pode construir com as hipóteses do lema 4.8. Nos é consentido considerar uma vizinhança $Z'_0 \subset Z_0$ suficientemente pequena tal que f é um homeomorfismo em cada $Z'_i = f^i(Z'_0)$, para $i = 0, \dots, k-2$. Note que

$$f^{-1}(\{z_{k-1}\}) \cap W = f^{-1}(\{z_{k-1}\}) \cap Z_{k-1} = \{z_{k-2}\}$$

onde $W = Z_0 \cup \dots \cup Z_{k-1} \cup f^{k-1} \circ w[0, 1] \cup \text{FIX}(f^k)$, pois $z_{k-1} = f(z_{k-2})$ e $z_{k-1} \in Z_{k-1}$. Assim existe uma homotopia arbitrariamente pequena e constante em uma vizinhança de W que torna f transversal a z_{k-1} . Com isso $f^{-1}(\{z_{k-1}\})$ é um conjunto finito e qualquer ponto $z \in f^{-1}(\{z_{k-1}\})$ admite uma vizinhança que é levada homeomorficamente sobre uma vizinhança de z_{k-1} .

É possível criar uma homotopia arbitrariamente pequena e constante em W para que f seja transversal a z_{k-1} , $f^{-1}(\{z_{k-1}\})$, \dots , $f^{-i}(\{z_{k-1}\})$ para algum $i \leq k-2$. Assim $f^{-i}(\{z_{k-1}\}) \cap W = \{z_{k-1-i}\}$.

Ainda podemos criar uma homotopia suficientemente pequena para que f seja transversal a $f^{-i}(\{z_{k-1}\})$. De fato, suponha por absurdo que exista um ponto z na interseção $f^{-j}(\{z_{k-1}\}) \cap f^{-i-1}(\{z_{k-1}\})$ então:

$$z_{k-1} = f^{i+1}(\{z_{k-1}\}) = f^{i+1-j}(\{z_{k-1}\})$$

mas isso contradiz o fato de $z_{k-1} \neq f^r(\{z_{k-1}\})$ para $r = 1, \dots, k$.

Portanto existe uma homotopia, arbitrariamente pequena, constante próxima de W que torna f, \dots, f^{k-1} transversais a $z_{k-1} = f^{k-1} \circ w(0)$. Segue que a união

$$f^{-1}(\{z_{k-1}\}) \cup \dots \cup f^{-k+1}(\{z_{k-1}\})$$

é finita e cada ponto $z \in f^{-i}(\{z_{k-1}\})$ admite vizinhança U_z levada homeomorficamente por f^i em um vizinhança de z_{k-1} . Assim

$$V = \bigcap_{i=0}^{k-1} \left[\bigcap_{z \in f^{-i}(\{z_{k-1}\})} f^i(U_z) \right]$$

é uma vizinhança de z_{k-1} . Por outro lado z_{k-1} não está no compacto

$$A = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(M \setminus \bigcup_{z \in f^{-i}(\{z_{k-1}\})} U_z).$$

Portanto existe uma vizinhança $U_0 \subset V$ de z_{k-1} conexa e disjunta de A .

Consideremos $z' \in f^{-i}(U_0)$, então $f^i(z') \in U_0$ e $f^i(z') \notin A$. $z' \notin A$ conseqüentemente $z' \in U_{z''}$ para algum $z'' \in f^{-i}(\{z_{k-1}\})$. Segue que a componente de z' está contida em $U_{z''}$ ($U_0 \subset f^i(U_{z''})$). Por conseguinte esta componente é levada homeomorficamente por f^i para U_0 .

Como $U_{z''}$ é finito, temos que o número máximo de componentes conexas de $f^{-i}(U_0)$ é finito para $i = 1, \dots, k$. Logo z_{k-1} admite uma vizinhança U_0 tal que a união

$$U_0 \cup f^{-1}(U_0) \cup \dots \cup f^{-k+1}(U_0)$$

se fatora em uniões finitas de componente conexas, cada uma levada homeomorficamente em U_0 .

Já construímos f, f^2, \dots, f^{k-1} transversais a z_{k-1} portanto a $f^{-r}(\{z_{k-1}\})$ é finita, para $r = 1, \dots, k-1$. Fixemos $r \in \{0, \dots, k-1\}$, segue do lema 4.9 que existe $\varepsilon_r > 0$ tal que se $d(f, g) < \varepsilon_r$ então $g^{-r}(\{z_{k-1}\}) \subset f^{-r}(U_0)$.

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}\}$, temos que se $d(f, g) < \varepsilon$ então :

$$g^{-1}(\{z_{k-1}\}) \cup \dots \cup g^{-k+1}(\{z_{k-1}\}) \subset f^{-1}(U_0) \cup \dots \cup f^{-k+1}(U_0)$$

que é um número finito de abertos mutuamente disjuntos.

Ganharemos mais alguns resultados se munirmos nossos comentários com o que foi feito na seção anterior.

Corolário 4.10 *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação com $FIX(f^k)$ finito, duas órbitas disjuntas $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ de comprimento k e $w : [-1, 1] \rightarrow M$ um caminho de x_0 a y_0 . Suponhamos que próximo do conjunto $\{x_i, y_j; i, j = 0, \dots, k-1\}$ f é um PL-homomorfismo e que $w, f \circ w, \dots, f^{k-1} \circ w$ são PL-arcs. Então existe uma homotopia arbitrariamente pequena f_t tal que:*

1. $f_0 = f$.
2. *Existem vizinhanças V_0, \dots, V_{k-1} mutuamente disjuntas tais que:*
 - $f_1^i \circ w(t) = (0, t) \in V_i = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$, para $i = 0, \dots, k-1$.
 - $f_1(V_i^+) \subset V_{i+1}^+, f_1(V_i^-) \subset V_{i+1}^-, f_1(V_i^0) = 0 \in V_{i+1} = \mathbb{R}^m$, para $i = 0, \dots, k-2$.
 - $f_1|_{V_i \setminus V_i^0}$ é um homeomorfismo para $i = 0, \dots, k-2$.
3. *Os conjuntos $f^i \circ w[\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon]$, para $i = 0, \dots, S_0$, são mutuamente disjuntos. (Estamos usando S_0 e ε do lema 4.7.)*
4. $f^{-1}(\{z_{k-1}\}) \cup \dots \cup f^{1-k}(\{z_{k-1}\})$ está contido em uma quantidade finita de abertos mutuamente disjuntos.
5. $FIX(f^k)$ não se altera.

PROVA: Como as hipóteses do lema 4.7 estão satisfeitas temos que os itens 1 e 2 são válidos. Os itens 3, 4 e 5 estão assegurados pelos comentários anteriores. ■

O resultado a seguir é o primeiro em que usaremos a dimensão da PL-variedade maior que 3.

Lema 4.11 *Consideremos uma PL-variedade m -dimensional M , onde $m \geq 4$, uma auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ tal que f é um homeomorfismo próximo de cada ponto $x \in FIX(f)$ e $FIX(f)$ finito, um PL-arco $w_0[0, 1] \subset M$ e um aberto V_0 tal que:*

1. $w_0[0, 1] \subset V_0 \subset M$.
2. Os conjuntos $\overline{V_0}$, $f(\overline{V_0})$, \dots , $f^{S_0}(\overline{V_0})$ e $FIX(f^k)$ são mutuamente disjuntos, onde $S_0 = \sum_{i=1}^k i$.
3. $f|_{\overline{f^i(V_0)}} : \overline{f^i(V_0)} \rightarrow \overline{f^{i+1}(V_0)}$, $i = 0, \dots, k-2$, são homeomorfismos.

Então existe uma homotopia $f_t : M \rightarrow M$ ($0 \leq t \leq k-1$) tal que:

1. $f_0 = f$.
2. f_t é constante em $f(\overline{V_0})$, \dots , $f^{k-1}(\overline{V_0})$ e próximo a $FIX(f^k)$.
3. $FIX(f_t^k) = FIX(f^k)$.
4. f_{k-1} , $(f_{k-1})^2$, \dots , $(f_{k-1})^{k-1}$ são transversais ao arco $w_{k-1} = f^{k-1} \circ w_0$.

PROVA: Seja r um número natural e defina:

$$U_r = \{\overline{V_0}, \overline{f(V_0)}, \dots, \overline{f^r(V_0)}\}.$$

Dessa forma podemos reescrever a segunda hipótese da seguinte forma: *Os conjuntos da família $U_{S_0} \cup \{FIX(f^k)\}$ são mutuamente disjuntos.*

Construiremos por indução em $i = 0, \dots, k-1$, uma sequência de homotopias $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ com as seguintes propriedades:

1. $f_0 = f$.
2. f_t é constante nos conjuntos da família U_{S_i} e em uma vizinhança de $FIX(f^k)$ para $0 \leq t \leq i$ e $S_i = (i+1) + (i+2) + \dots + (i+k)$.
3. $FIX(f_t^k) = FIX(f^k)$ para $0 \leq t \leq i$.
4. f_i , $(f_i)^2$, \dots , $(f_i)^i$ são transversais ao arco $w_{k-1} = f^{k-1} \circ w_0$.

Dessa forma $\{f_t\}_{0 \leq t \leq k-1}$ será a homotopia que estamos procurando.

Para $i = 0$ temos que $f_0 = f$ e assim as propriedades são trivialmente satisfeitas. Suponha que as propriedades são satisfeitas para $0 \leq i \leq k-2$. Por hipótese:

1. Os conjuntos da família $U_{S_i} \cup \{FIX((f_i)^k)\}$ são mutuamente disjuntos.

2. $f_i|_{\overline{f_i^j(V_0)}} : \overline{f_i^j(V_0)} \rightarrow \overline{f_i^{j+1}(V_0)}$, $j = 0, \dots, k-2$, são homeomorfismos.

Montaremos a próxima parte da homotopia $\{f_t\}_{0 \leq t \leq i+1}$. Pelo corolário 4.10 temos que os conjuntos

$$w_{k-1}, f_i^{-1}(w_{k-1}), \dots, f_i^{-k+1}(w_{k-1}), FIX(f_i^k)$$

são mutuamente disjuntos. Consequentemente existe uma vizinhança U tal que $w_{k-1} \subset U \subset f_i^{k-1}(V_0)$. Dai, segue do lema 2.18 que os conjuntos

$$\overline{U}, (f_i)^{-1}(\overline{U}), \dots, (f_i)^{-k+1}(\overline{U}), FIX((f_i)^{-1})$$

são mutuamente disjuntos.

Observamos que:

$$\underbrace{(f_i)^{-i-1}(w_{k-1})}_{\substack{\subset U \\ \subset (f_i)^{-i-1}(U)}} = (f_i)^{-1}((f_i)^{-i}(w_{k-1})).$$

Então existe uma homotopia $\{f_t\}_{i \leq t \leq i+1}$ arbitrariamente pequena tal que:

1. Existe um aberto W tal que:

$$(f_i)^{-i-1} \circ w_{k-1} \subset \text{int}(W) \subset \overline{W} \subset (f_i)^{-i-1}(U).$$

2. f_{i+1} é transversal a $(f_i)^{-i}(w_{k-1})$.
3. $f_t(\overline{W}) \subset (f_i)^{-i}(U)$ tal que $t \in [i, i+1]$.

Agora construiremos a parte adjacente da homotopia $\{f_t\}_{1+1 \leq t \leq i+2}$.

1. Segue da propriedade 1 da parte anterior dessa homotopia que os conjuntos da família $U_{S_i} \cup \{FIX((f_i)^k)\}$ são mutuamente disjuntos e $U \subset f_i^{k-1}(V_0)$. Portanto $f_i^{-i-1}(w_{k-1})$ é disjunto de todos os elementos de $U_{S_{i+1}}$ com exceção de $f_i^{k-i-2}(V_0)$.

Como $f_i : V_{k-i-2} \rightarrow V_{k-1}$ é homeomorfismo temos que :

$$f_i^{-i-1}(w_{k-1}) \cap f_i^{k-i-2}(V_0) = w_{k-i-2}.$$

Assim f_i é transversal a w_{k-1} nos conjuntos da família $U_{S_{i+1}}$ e por conseguinte podemos assumir que W é disjunto destes conjuntos.

Por fim, se existisse $x \in W \cap FIX(f_i^k)$ então $f_i^{i+1}(x) \in f_i^{i+1}(W) \subset U$, contudo \overline{U} é disjunto de $FIX(f_i^k)$ o que é um absurdo. Logo W é disjunto de $U_{S_{i+1}} \cup FIX(f_i^k)$.

2. Vamos provar que $FIX(f_{i+1}^k) = FIX(f_i^k)$. Porque $W \cap FIX(f_i^k) = \emptyset$ temos que $FIX(f_i^k) \subset FIX(f_{i+1}^k)$.

Seja A uma órbita de $FIX(f_{i+1}^k)$. Se $x \in A \cap W$ então:

$$y = f_i^{i+1}(x) \in U \cap FIX(f_i^k) \Rightarrow y \in U \cap f_i^k(U) \subset f_i^{k-1}(V_0) \cap f_i^{2k-1}(V_0).$$

Mas isso é um absurdo pois $2k-1 \leq S_i$.

3. $\bar{U}, f_i^{-1}(\bar{U}), \dots, f_i^{-k+1}(\bar{U})$ são disjuntos e na construção da homotopia $\{f_t\}$ tal que $i \leq t \leq i+1$ nós mudamos f_i apenas dentro de $f_i^{-i-1}(\bar{U})$ mantendo $f_t(f_i^{-i-1}(\bar{U}))$ em $f_i^{-i}(\bar{U})$.

Conseqüentemente $f_{i+1}^{-j}(\bar{U}) = f_i^{-j}(\bar{U})$ para $j \leq i$. Portanto $f_{i+1}, f_{i+1}^2, \dots, f_{i+1}^i$ permanecem transversais a $z_{k-1} \in U$ daí f_{i+2} é transversal a $f_i^{-i}(w_{k-1})$.

■

4.3 Aproximação entre $f^k \circ w$ e w

Advertimos que no final desse capítulo montaremos uma homotopia parcial que remove pontos periódicos, contudo uma extensão dessa homotopia poderia criar novos pontos periódicos. No entanto, os primeiros resultados que trabalharemos aqui vão asseverar que esses pontos indesejados podem ser desconsiderados.

Lema 4.12 *Consideremos (X, d) um espaço métrico compacto ANR, um subconjunto fechado A de X , uma auto-aplicação $f : X \rightarrow X$ e uma homotopia parcial $f'_t : A \rightarrow X$ que satisfaz:*

1. $f'_0(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.
2. $f^{l-1}(f'_t(A)) \cap A = \emptyset$ para $l=1, \dots, k-1$.
3. $f^{k-1}(f'_t(x)) \neq x$ para todo $x \in \partial A$.

Então para uma vizinhança arbitrária $U \supset A$ existe $f_t : X \rightarrow X$ uma homotopia satisfazendo:

1. $f_t(a) = f'_t(a)$ para todo $a \in A$.
2. $f_0(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.
3. $f_t(x) = f(x)$ sempre que $x \notin U$.
4. Para todo $t_0 \in [0, 1]$ as órbitas de $FIX(f_{t_0}^k) \setminus A$ e de $FIX(f^k) \setminus A$ coincidem.
5. Se $FIX(f_{t_0}^k) \cap A = \emptyset$ para todo $t_0 \in [0, 1]$, então

$$FIX(f_{t_0}^k) = FIX(f^k) \setminus \{\text{órbitas de } f^k \text{ que interceptam } A\}.$$

PROVA: Provaremos que a homotopia $h : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow X$ admite uma extensão $h' : X \times I \rightarrow X$. Como X é um espaço ANR, podemos considerá-lo como uma retração de um subconjunto aberto U de um espaço normado E ($r : U \rightarrow X$).

Agora $h : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow X \subset E$ admite extensão $\tilde{h} : X \times I \rightarrow E$. Logo existe uma vizinhança V de A em X tal que $V \times I \subset (\tilde{h})^{-1}(U)$.

Seja $\chi : X \rightarrow [0, 1]$ uma função de Urysohn que satisfaz $\chi(A) = 1$ e $\chi(X \setminus V) = 0$. Segue que $h(x, t) = r \circ \tilde{h}(x, \chi(x)t)$ é a extensão que desejamos. Tomemos $f_t^i : X \rightarrow X$ uma extensão arbitrária de $f_t^i : A \rightarrow A$, homotopia parcial, com $f_0^i = f$. Pela hipótese 2 existe uma vizinhança U' de A tal que:

1. $A \subset U' \subset U$.
2. $f^{l-1}(f_t^i(\overline{U'})) \cap \overline{U'} = \emptyset$ para $l = 1, \dots, k-1$.

Seja $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ uma função de Urysohn que satisfaz $\mu(A) = 1$ e $\mu(X \setminus U') = 0$. Definimos $f_t''(x) = f_{\mu(x)t}^i(x)$ para todo ponto $x \in X$ e para todo $t \in [0, 1]$. Notemos que para $x \in \overline{U'}$ e $l = 1, \dots, k-1$

$$(f_t'')^l(x) = (f_t'')^{l-1}(\underbrace{f_t''(x)}_{\notin \overline{U'}}) = f^{l-1}(f_t''(x)) = f^{l-1}(f_{\mu(x)t}^i(x)).$$

Definamos:

$$C = \{x \in X; (f_t'')^k(x) = x \text{ para algum } t \in [0, 1]\}.$$

Este conjunto é fechado em X . Porque X é compacto temos que C é compacto, por hipótese C é disjunto de ∂A e assim temos que $C \setminus A$ é compacto.

Seja $\lambda : X \rightarrow [0, 1]$ uma função de Urysohn que satisfaz:

$$\lambda(A) = 1 \quad \lambda((X \setminus U') \cup (C \setminus A)) = 0$$

e definamos $f_t(x) = f_{\lambda(x)t}''(x)$. Assim:

1. Para cada $a \in A$, $f_t(a) = f_{\lambda(a)t}''(a) = f_t''(a) = f_{\mu(a)t}^i(a) = f_t^i(a)$.
2. Para todo $x \in X$, $f_0(x) = f_0''(x) = f_0^i(x) = f(x)$.
3. Se $x \notin U$ então $f_t(x) = \underbrace{f_{\lambda(x)t}''(x)}_{=0} = f_0''(x) = f_0^i(x) = f(x)$.

4. Tomemos uma órbita $O \subset \text{FIX}(f_{t_0}^k)$ disjunta de A . Então $O \subset C \setminus A$, por conseguinte para todo ponto x em O temos que $\lambda(x) = 0$ e assim $f_t(x) = f(x)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Portanto para todo $t \in [0, 1]$ as órbitas de $\text{FIX}(f_t^k)$ são iguais as órbitas de $\text{FIX}(f^k)$. ■

Adotaremos as seguintes notações:

$$Q = [0, 1]^m \subset \mathbb{R}^m \text{ e } Q_0 = \{(x_1, \dots, x_m) \in Q; x_m = 0\}$$

Usaremos essas notações e o próximo resultado para trabalhar um pouco mais a homotopia que estamos lapidando. Essa homotopia será usada na demonstração do resultado principal deste capítulo. Contudo admitiremos o próximo resultado sem demonstrá-lo.

Teorema 4.13 (Hopf) *Sejam aplicações $f_0, f_1 : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfazem:*

1. $f_0(z) \neq z$ e $f_1(z) \neq z$ para todo $z \in \partial Q$.
2. $ind(f_0, Q) = ind(f_1, Q)$.

Então existe um homotopia $h : Q \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo:

1. $h(z, 0) = f_0(z)$ e $h(z, 1) = f_1$ para todo $z \in Q$.
2. $h(z, t) \neq z$ para todo $t \in I$ e para todo $z \in \partial Q$.

■

Antes de provarmos os resultados 4.14 e 4.15, vamos esclarecer alguns detalhes técnicos, construindo homotopias e evidenciando certas propriedades que podem passar despercebidos. Acrescentemos as seguintes hipóteses ao teorema anterior:

1. $f_0(Q_0)$ e $f_1(Q_0)$ são pontos.
2. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus Q_0$ é um caminho de $\gamma(0) = f_0(Q_0)$ para $\gamma(1) = f_1(Q_0)$.
3. $m \geq 3$.

Ressaltamos que $deg(id - f) = ind(f) = ind(g) = deg(id - g)$, do teorema 4.13 que existe $H : Q \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

1. $H(z, 0) = z - f(z)$ e $H(z, 1) = z - g(z)$ para todo $z \in Q$
2. $H(z, t) \neq 0$ para todo $z \in \partial Q$. Dessa forma, adotaremos para todo $z \in Q$

$$H(z, 0) = z - f(z) = z - \gamma_z(0) \text{ e } H(z, 1) = z - g(z) = z - \gamma_z(1).$$

Como $Q_0 \subset \partial Q$ temos que $H(Q_0 \times I) \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Defina

$$H_1 : Q_0 \times \partial(I \times I) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

$$(z, (t, s)) \mapsto \begin{cases} H(z, t) & \text{se } s=0 \\ z - \gamma_z(t) & \text{se } s=1 \text{ ou } t=0 \text{ ou } t=1. \end{cases}$$

Consequentemente $Im(H_1) \subset \mathbb{R}^m \setminus Q_0$. Porque Q_0 é contrátil temos que $Q_0 \times \partial(I \times I)$ possui o mesmo tipo de homotopia de $\partial(I \times I)$ que por sua vez possui o mesmo tipo de homotopia de S^1 . Para $m \geq 3$ nos é permitido estender H_1 para $Q_0 \times (I \times I)$, então para

$$K_1 = (\partial Q \times I \times \{0\}) \cup (Q_0 \times I \times I) \cup (\partial Q_0 \times \{0, 1\} \times I)$$

temos:

$$H_2 : K_1 \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

$$(z, (t, s)) \mapsto \begin{cases} H(z, t) & \text{se } s=0 \text{ ou } t \in \{0, 1\} \\ H_1(z, t, s) & \text{para } z \in Q_0. \end{cases}$$

Observemos que para $z \in Q_0$ temos que :

1. $H_1(z, t, 0) = H(z, t)$.
2. $H_1(z, i, s) = z - \gamma_z(i) = H(z, i)$ onde $i \in \{0, 1\}$.

Agora aplicando as propriedades de extensão de homotopias no par

$$\partial Q \times I, Q \times I \cup (\partial Q \times \{0, 1\})$$

temos uma extensão $H_3 : \partial Q \times I \times I \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Por conseguinte, para

$$K_2 = (Q \times I \times \{0\}) \cup [(\partial Q \times I) \cup (Q \times \{0, 1\})] \times I$$

segue

$$H_4 : \quad K_2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^m$$

$$(z, (t, s)) \mapsto \begin{cases} H(z, t) & \text{se } s=0 \text{ ou } t \in \{0, 1\} \\ H_3(z, t, s) & \text{para } z \in \partial Q. \end{cases}$$

Obtemos $H_5 : Q \times I \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicando novamente as propriedades de extensão de homotopias . Definimos:

$$h_t : \quad Q \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto x - H_5(x, t, 1),$$

cujas propriedades são:

1. $h_0(x) = x - H_5(x, 0, 1) = x - H(x, 0) = x - (x - f(x)) = f(x)$.
2. $h_1(x) = x - H_5(x, 1, 1) = x - H(x, 1) = x - (x - g(x)) = g(x)$.
3. $h_t(x_0) = x_0 - H_5(x_0, t, 1) = x_0 - H(x_0, t) = x_0 - (x_0 - \gamma_{x_0}(t)) = \gamma_{x_0}(t)$ para $x_0 \in Q_0$.
4. $h_t(x) = x - H_5(x, t, 1) = x_0 - H_3(x, t, 1) \neq x$. Assim $H_3(x, t, 1) \neq 0$ para todo $x \in \partial Q$.

Então a homotopia h do teorema 4.13 pode ser tomada satisfazendo $h(z, t) = \gamma(t)$ para todo $t \in I$ e para todo $z \in Q_0$.

Seguiremos as seguintes notações:

1. $P = [-2, 2]^m \subset \mathbb{R}^m$.
2. $P_0 = \{(x_1, \dots, x_m) \in P; x_m = 0\}$.
3. $P_+ = \{(x_1, \dots, x_m) \in P; x_m \geq 0\}$.
4. $P_- = \{(x_1, \dots, x_m) \in P; x_m \leq 0\}$.
5. $P_{[a,b]} = \{(x_1, \dots, x_m) \in P; a \leq x_m \leq b\}$.

Salientamos que se $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ forem aplicações com as propriedades:

1. $f(z) \neq z$ e $g(z) \neq z$ para todo $z \in P_0 \cup \partial P$.
2. $f(P_0)$ e $g(P_0)$ são pontos.
3. $ind(f; P_+) = ind(g; P_+)$ e $ind(f; P_-) = ind(g; P_-)$.

e se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus P_0$ for um caminho de $f(P_0)$ para $g(P_0)$. Então, pelo que foi enfatizado anteriormente, existe uma homotopia $h_+ : P_+ \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaz:

1. $h_+(z, 0) = f(z)$ e $h_+(z, 1) = g(z)$ para todo $z \in P_+$.
2. $h_+(z, t) \neq z$ para todo $z \in \partial P_+$.
3. $h_+(P_0, t) = \gamma(t)$.

Analogamente, existe uma homotopia $h_- : P_- \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaz:

1. $h_-(z, 0) = f(z)$ e $h_-(z, 1) = g(z)$ para todo $z \in P_-$.
2. $h_-(z, t) \neq z$ para todo $z \in \partial P_-$.
3. $h_-(P_0, t) = \gamma(t)$.

Dai, existe uma homotopia $h_+ \cup h_- = h : P \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaz:

1. $h(z, 0) = f(z)$ e $h(z, 1) = g(z)$ para todo $z \in P$.
2. $h(z, t) \neq z$ para todo $z \in P_0 \cup \partial P$.
3. $h(z, t) = \gamma(t)$ para todo $z \in P_0$.

Fixado um $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ consideremos uma função $\eta : P \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1. $\eta(t) = t$ se, e somente se, $t = 1$ ou $t = -1$.
2. $\eta(-2) > -2$, $\eta(0) < 0$ e $\eta(2) > 2$.
3. $|\eta(t) - t| < \varepsilon$ para todo $t \in P$.

Atentemos que $P = [-2, 2]^{m-1} \times [-2, 2]$, assim usando a função anterior podemos definir a aplicação:

$$h : \begin{array}{ccc} [-2, 2]^{m-1} \times [-2, 2] = P & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x, t) & \mapsto & (\frac{|t|}{3}x, \eta(t)). \end{array}$$

Observemos que:

1. $h(P_0) = \{0, \eta(0)\}$.
2. $FIX(h) = \{(0, -1), (0, 1)\}$.

$$3. \text{ind}(h; (0, -1)) = 1 \text{ e } \text{ind}(h; (0, 1)) = -1 .$$

$$4. h(P_{[-\varepsilon, \varepsilon]}) \subset \text{int}(P).$$

Lema 4.14 *Existe uma homotopia $h_s : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($0 \leq s \leq 3$) satisfazendo:*

$$1. h_0 = h.$$

$$2. h_s(P_0) \text{ é um ponto para cada } s \in [0, 3].$$

$$3. h_s(z) \neq z \text{ para todo } z \in \partial P.$$

$$4. h_s(x, t) = h(x, t) \text{ para todo } (x, t) \in \partial P \text{ e } |t| < \varepsilon.$$

$$5. h_s(x, t) \in \text{int}(P) \text{ para todo } |t| < \varepsilon.$$

$$6. h_3(z) \neq z \text{ para todo } z \in P.$$

$$7. h_3(0) \in \text{int}(P) \setminus P_0.$$

PROVA: A homotopia h_s será a concatenação de 3 homotopias. Construiremos a primeira delas.

Consideremos a homotopia $\eta_s[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$1. \eta_0 = \eta.$$

$$2. \eta_s(t) = \eta(t) \text{ para } |t| \geq \varepsilon.$$

$$3. \eta_s(t) = t \text{ se, e somente se, } t = -1, +1.$$

$$4. \eta_s(0) < 0 \text{ para todo } s \in [0, 1) \text{ e } \eta_1(0) = 0.$$

Tome $h_s(x, t) = (\frac{|t|}{3}x, \eta_s(t))$. Dessa forma:

1.

$$\begin{aligned} h_0(x, t) &= \left(\frac{|t|}{3}x, \eta_0(t)\right) \\ &= \left(\frac{|t|}{3}x, \eta(t)\right) \\ &= h(x, t). \end{aligned}$$

2. Para cada $x \in [-2, 2]$ e s fixado temos que $h_s(P_0) = \{(0, \eta_s(0))\}$, pois:

$$\begin{aligned} h_s(x, 0) &= \left(\frac{|0|}{3}x, \eta_s(0)\right) \\ &= (0, \eta_s(0)). \end{aligned}$$

3. h_s não possui pontos periódicos no ∂P , porque :

$$\begin{cases} FIX(h_s) = \{(0, -1), (0, 1)\} & \text{para } 0 \leq s < 1 \\ FIX(h_1) = \{(0, -1), (0, 0), (0, 1)\}. \end{cases}$$

4. Para cada $(x, t) \in \partial P$ tal que $|t| \geq \varepsilon$ temos que:

$$h_s(x, t) = \left(\frac{|t|}{3}x, \eta_s(t)\right) = \left(\frac{|t|}{3}x, \eta(t)\right) = h_s(x, t).$$

5. Para $|t| < \varepsilon$ temos $h_s(x, t) = \left(\underbrace{\frac{|t|}{3}x}_{\in \text{int}([-2, 2]^{m-1})}, \underbrace{\eta_s(t)}_{\in \text{int}([-2, 2])}\right) \in \text{int}(P)$.

Trabalharemos a segunda homotopia. Defina $h_2 : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ com a propriedades $h_2(\lambda v) = \lambda h_1(v)$ para $v \in \partial P$ e $\lambda \in [0, 1]$. Dai defina $h_t : P \rightarrow \mathbb{R}^m$, a homotopia linear entre h_1 e h_2 , isto é,

$$h_s(x, t) = (s - 1)h_2(x, t) + (2 - s)h_1(x, t).$$

Consequentemente:

1. Para cada $x \in [-2, 2]$ e para s fixado temos que $h_s(P_0) = \{(0, \eta_s(0))\}$, pois:

$$\begin{aligned} h_s(x, 0) &= (s - 1)h_2(x, 0) + (2 - s)h_1(x, 0) \\ &= (s - 1)\underbrace{h_1(x, 0)}_{=0} + (2 - s)\underbrace{h_1(x, 0)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. h_s não possui pontos periódicos no ∂P , pois para $x \in \partial P$ temos que :

$$\begin{aligned} h_s(z) &= (s - 1)h_2(z) + (2 - s)h_1(z) \\ &= (s - 1)h_1(z) + (2 - s)h_1(z) \\ &= h_1(z) \neq z. \end{aligned}$$

3. Para cada $(x, t) \in \partial P$ tal que $|t| \geq \varepsilon$ temos que:

$$\begin{aligned} h_s(x, t) &= (s - 1)h_2(x, t) + (2 - s)h_1(x, t) \\ &= (s - 1)h_1(x, t) + (2 - s)h_1(x, t) \\ &= h_1(x, t) \\ &= h(x, t). \end{aligned}$$

4. Para $|t| < \varepsilon$ temos $h_s(x, t) = h_1(x, t) \in \text{int}(P)$.

Antes de trabalhar nossa última homotopia observamos os seguintes fatos:

1. $h_2(z) \neq z$ para todo $z \in \partial P$.
2. h_2 é linear.
3. $(0, 0)$ é o único ponto fixado por h_2 . De fato, denote $p'(x, t) = x$ e $p''(x, t) = t$ assim para cada $(x, t) \in \partial P$

$$h_2(x, t) = h_1(x, t) = \frac{|t|}{3}x.$$

Conseqüentemente $h_2(x, t) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Como h_2 é linear em segmentos, esta equivalência se mantém para $(x, t) \in P$.

O índice de $(0, 0)$ tem que ser 0 pois existe uma homotopia local que desaparece com esse ponto fixo.

Denotemos $v^+ = (0, 2) \in \partial P$ e seja $\mu > 0$ é uma constante suficientemente pequena, daí tomemos $\lambda : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(t) = \mu \max\{\varepsilon - |t|, 0\}$ e definimos

$$h_s(x, t) = h_2(x, t) + (s - 2)\lambda(t)v^+$$

para $s \in [2, 3]$. Assim:

1.

$$\begin{aligned} h_s(x, 0) &= h_2(x, 0) + (s - 2)\lambda(0)v^+ \\ &= 0 + (s - 2)\mu\varepsilon v^+. \end{aligned}$$

2. h_s não possui pontos periódicos no ∂P , pois para $(x, t) \in \partial P$ temos:

$$\begin{aligned} h_s(z) &= h_2(x, t) + (s - 2)\lambda(t)v^+ \\ &= h_1(x, t) + (0, (s - 2)\lambda(t)v^+) \\ &= \left(\frac{|t|}{3}x, \eta_1(t)\right) + (0, (s - 2)\lambda(t)v^+) \\ &= \left(\frac{|t|}{3}x, \eta_1(t) + (s - 2)\lambda(t)v^+\right) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{se } t=0 & \Rightarrow \eta_1(0) + (s - 2)\lambda(0)v^+ \neq 0 \\ \text{se } t \neq 0 & \Rightarrow \frac{|t|}{3}x \neq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow h_s(x, t) \neq (x, t). \end{aligned}$$

3. Para cada $(x, t) \in \partial P$ tal que $|t| \geq \varepsilon$ temos que :

$$\begin{aligned} h_s(x, t) &= h_2(x, t) + (s - 2) \underbrace{\lambda(t)}_{=0} v^+ \\ &= h_2(x, t) \\ &= h(x, t). \end{aligned}$$

4. Para $|t| < \varepsilon$ temos :

$$h_s(x, t) = \underbrace{h_2(x, t)}_{\in \text{int}(P)} + \underbrace{(0, (s-2)\mu\varepsilon 2)}_{\text{muito pequeno}} \in \text{int}(P).$$

5. Observamos que:

$$p'(h_3(x, t)) = p'(h_2(x, t) + (0, (s-2)2\lambda(t))) = p'(h_2(x, t)).$$

Dessa forma $p'(h_3(x, t)) = x$ se, e somente se, $x = 0$. Ainda

$$p''(h_3(0, t)) = p''(h_2(0, t)) + 2\lambda(t)$$

onde $p''(h_2(0, t)) \geq t$ para $t \in [-2, 2]$ e portanto $p''(h_3(0, t)) > t$ para todo $t \in [-2, 2]$. Segue que h_3 não possui pontos fixos.

6. Suponhamos que $h_3(0, 0) = z_0 \in P_0$ então:

$$h_3(z_0) = h_3(P_0) = h_3(0, 0) = z_0$$

Dessa forma z_0 seria ponto fixo de h_3 o que é um absurdo pelo item anterior.

■

O próximo resultado é apenas uma adaptação do que já foi feito não ampliando em nada em nossas construções. Contudo, seu enunciado evidencia uma homotopia que será de fundamental importância na demonstração do teorema 4.1.

Lema 4.15 *Consideremos uma auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ que satisfaz as hipóteses do corolário 4.10: $FIX(f^k)$ finito, duas órbitas disjuntas $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ de comprimento k e $w : [-1, 1] \rightarrow M$ um caminho de x_0 a y_0 . Suponhamos que próximo do conjunto $\{x_i, y_j; i, j = 0, \dots, k-1\}$ f é um PL-homomorfismo e que $w, f \circ w, \dots, f^{k-1} \circ w$ são PL-arcos.*

Então existe um número $\varepsilon > 0$ tal que para todo aberto U que satisfaz $f^{k-1} \circ w(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon) \subset U \subset V_{k-1}$ existe uma homotopia $f_s : M \rightarrow M$, ($0 \leq s \leq 1$), Constante fora de U tal que:

1. $f_0 = f$.
2. $FIX((f_s)^k) = FIX(f^k)$.
3. f_1 satisfaz o corolário 4.10 para vizinhanças pequenas V'_0, \dots, V'_{k-1} .
4. Existe uma vizinhança euclidiana W que satisfaz $V'_0 \subset W$ e a restrição $(f_1)^{k-1}|_{W \setminus W^0}$ é um homeomorfismo.

5. $f_s(W^0)$ é um ponto para todo $s \in [0, 1]$.

6. $f(V'_{k-1}) \subset W$.

PROVA: Como nosso problema satisfaz as hipóteses do corolário 4.10 fixaremos as vizinhanças V_0, \dots, V_{k-1} . Segue de:

$$f^k(w(-1)) = x_0, f^k(w(1)) = y_0 \in V_0$$

que para um número suficientemente pequeno $\eta > 0$ temos que :

$$f^k \circ w([-1, -1 + \eta]), f^k \circ w([1 - \eta, 1]) \subset V_0$$

e a restrição $f^k \circ w([-1 + \eta, 1 - \eta])$ é homotópica (com pontos extremos fixados) a um caminho em $V_0 \setminus w([-1, 1])$.

Primeiramente construiremos uma homotopia tal que :

1. $f(z_{k-1}) \in V_0$ onde $z_{k-1} = f^{k-1} \circ w(0)$.
2. A restrição $f^{k-1} \circ w([-1 + \eta, 0])$ é homotópica a $w([-1 + \eta, 0])$.
3. A restrição $f^{k-1} \circ w([0, 1 - \eta])$ é homotópica a $w([0, 1 - \eta])$.

Pela hipótese do corolário 4.10, $f^{-1}(z_{k-1}), \dots, f^{-k+1}(z_{k-1})$ estão contidos em um número finito de abertos mutuamente disjuntos. Porque $f^k \circ w$ é homotópico a w e $f^k \circ w$ é homotópico a um caminho em V_0 , existe um caminho γ de $f^k \circ w(0)$ a um ponto de V_0 tal que os caminhos $f^k \circ w([-1, 0]) * \gamma$ e $\gamma * f^k \circ w([0, 1])$ são homotópicos a caminhos em V_0 .

Assumiremos que γ não intercepte os abertos que contêm $f^{-1}(z_{k-1}), \dots, f^{-k+1}(z_{k-1})$ e $FIX(f^k)$, pois w é homotópico a $f^k \circ w$. Dessa forma, o caminho γ pode ser visto como uma homotopia parcial $\{z_{k-1}\} \times [0, 1] \rightarrow M$ que não passa por pontos periódicos, e pelo lema 4.12 essa homotopia pode ser estendida a uma homotopia em M ($A = \{z_{k-1}\}, X = M$).

Usaremos $f(z_{k-1}) = f^k \circ w(0) \in V_0$. Agora deformaremos f próximo de $f^{-k+1} \circ w(0, 1)$ de forma que $f(f^{k-1} \circ w[0, 1]) \subset V_0$. Como consequência de $f^k \circ w(0) \in V_0$, existe $\eta' > 0$ tal que $f^k \circ w([0, \eta']) \subset V_0$ e $f^k \circ w([\eta', 1 - \eta])$ é relativamente homotópica (com pontos extremos fixados) a um caminho em $V_0 \setminus w$.

Do corolário 4.10 temos que:

1. $V_i = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ para todo $i = 0, \dots, k - 1$.
2. $f(V_i^+) \subset V_{i+1}^+$ (analogamente, $f(V_i^-) \subset V_{i+1}^-$).
3. $f(V_i^0) = 0 \in V_{i+1} = \mathbb{R}^m$.
4. $f|_{V_i \setminus V_i^0}$ é homeomorfismo.

O arco $f^{k-1} \circ w([\eta', 1 - \eta']) \subset V_{k-1}$ e f^{k-1} é um homeomorfismo em V_0^+ , então denotando por $\bar{w} = f^{k-1} \circ w([\eta', 1 - \eta'])$ temos que $\bar{w} \subset f^{k-1}(V_0^+)$.

Se tomarmos $U_0 = V_0^+$ e lembrando que $\bar{w} = f^{k-1} \circ w([\eta', 1 - \eta'])$ satisfaz as hipóteses de lema 4.11 podemos considerar $\bar{w} \cup f^{-1} \circ \bar{w} \cup \dots \cup f^{-k+1} \circ \bar{w}$ como uma 1-variedade.

Fixemos um caminho $\bar{w}_1 : [\eta', 1 - \eta'] \rightarrow V_0 \setminus w$ cujos extremos são dados por $\bar{w}_1(\eta') = \bar{w}(\eta')$ e $\bar{w}_1(1 - \eta) = \bar{w}(1 - \eta)$. Assim pela relação de Nielsen temos que os caminhos $\bar{w}_1([\eta', 1 - \eta])$ e $f^k \circ w([\eta', 1 - \eta])$ são homotópicos (com pontos extremos fixados).

Como V_0 é uma vizinhança euclidiana e a dimensão de M é pelo menos 4 podemos considerar que a homotopia entre os caminhos $\bar{w}_1([\eta', 1 - \eta])$ e $f^k \circ w([\eta', 1 - \eta])$ não intercepta nossa 1-variedade.

Dai aplicamos o lema 4.12 para estender nossa homotopia para M . Advertimos que $FIX(f^k)$ não foi alterado, pois a homotopia parcial não altera os pontos periódicos de f .

Agora tomaremos V'_0, \dots, V'_{k-1} da seguinte forma:

Como $f_1(f^{k-1}(w)) \subset V_0$ existe uma vizinhança euclidiana V'_{k-1} tal que $f^{k-1} \circ w \subset V'_{k-1} \subset V_0$ e $f_1(V'_{k-1}) \subset V_0$. Por conseguinte V'_{k-i} é tal que $f^{k-i} \circ w \subset V'_{k-i} \subset V_{k-i}$ e $f_1(V'_{k-i}) \subset V'_{k-i+1}$.

■

Para que não haja dúvidas enfatizamos que $W = V_0$.

4.4 Demonstração do teorema 4.1

Consideremos $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação, $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ duas órbitas Nielsen relacionadas, tal que :

1. $FIX(f^k)$ é finito.
2. f é um PL-homeomorfismo próximo dos pontos fixos de f^k .
3. $ind(f^k, x_0) = -1$ e $ind(f^k, y_0) = 1$.

Pelo lema 4.7, podemos assumir que $w : [-1, 1] \rightarrow M$ é um PL-arco de x_0 a y_0 e que existem vizinhanças euclidianas mutuamente disjuntas V_i tais que:

1. $f(V_i) \subset V_{i+1}$.
2. $f^i \circ w(t) = (0, t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} = V_i$.
3. $V_i \cap FIX(f^k) = \{x_i, y_i\}$ para $i = 0, \dots, k - 1$.
4. $f(V_i^+) \subset V_{i+1}^+$, $f(V_i^-) \subset V_{i+1}^-$ e $f(V_i^0) = z_{i+1} \in V_{i+1}$.
5. $f|_{V_i \setminus V_i^0}$ é um homeomorfismo para $i = 0, \dots, k - 1$.
6. Existe uma vizinhança euclidiana W tal que $f(V_{k-1}), V_0 \subset W$.

7. $f|_{W \setminus W_0}$ é um homeomorfismo.

Provaremos que a restrição de f^k para um subconjunto P de W é homotópica a uma aplicação livre de pontos fixos. Esta homotopia induzirá uma homotopia parcial de f em $f^{k-1}(P)$. Uma extensão da homotopia induzida será a aplicação que desaparece com as órbitas $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ como desejado.

No entanto, existe a possibilidade desta homotopia possuir pontos periódicos no bordo e por isso não podemos aplicar o lema 4.12 para assegurar a não existência de novos pontos periódicos. Checaremos diretamente que o bordo é livre dos pontos indesejados.

Primeiro demonstraremos que depois de aplicar uma homotopia que não altera os pontos fixos de f^k a restrição $f^k|_P$ é dada pela fórmula

$$h(x, t) = \left(\frac{|t|}{3}x, \eta_0(t)\right).$$

Como:

1. $ind(f^k, P^+) = ind(f^k, x_0) = -1 = ind(h, P^+)$.
2. $ind(f^k, P^-) = ind(f^k, x_0) = 1 = ind(h, P^-)$,

o lema 4.14 produz uma homotopia especial $h_t : P \rightarrow W$ que satisfaz:

1. $h_0 = f^k|_P$.
2. $h_1 = h$.
3. $h_t(x) \neq x$ para $x \in (\partial P^+ \cup \partial P^-)$.
4. $h_t(P^0)$ é um ponto para cada $t \in [0, 1]$.

Determinemos uma homotopia parcial $f'_t : f^{k-1}(P) \rightarrow M$ tal que $f'_t(x) = h_t(y)$ onde $x = f^{k-1}(y)$ e $y \in P$. Porquanto $f^{k-1}|_P$ é injetora em $P \setminus P^0$ e $h_t(P^0)$ é um ponto para cada $t \in [0, 1]$ a aplicação está bem definida.

Suponhamos que exista $f^{k-1}(f'_t(x)) = x$ para algum $x = f^{k-1}(y), y \in \partial P$. Assim se :

1. $y \in P^0$ então $x = f^{k-1}(y) = z_{k-1}$ e

$$f^{k-1}(f'_t(x)) = f^{k-1}(h_t(y)) = f^{k-1}(h_t(P^0)) \neq f^{k-1}(z_0) = z_{k-1} = x$$

o que é um absurdo.

2. $y \notin P^0$ então $f'_t(x) = h_t(y)$,

$$x = f^{k-1}(f'_t(x)) = f^{k-1}(h_t(y)) \text{ e } x = f^{k-1}(y)$$

assim $f^{k-1}(h_t(y)) = f^{k-1}(y)$. Do fato de f^k ser um homeomorfismo em $W \setminus W_0$ temos que $y = h_t(y) \in \partial P$ é um ponto fixo de h_t no bordo de P , o que contradiz o lema 4.14.

Agora que já sabemos que nossa homotopia não possui pontos periódicos no bordo, usaremos o lema 4.12 para estender f'_t em M garantindo que $FIX((f'_1)^k) = FIX(f^k)$, e como consequência:

$$h(x, t) = \left(\frac{|t|}{3}x, \eta_0(t)\right)$$

para $(x, t \in P \subset W \subset \mathbb{R}^m)$. Por conseguinte, estamos preparados para remover as órbitas $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$.

Defina a homotopia parcial $f'_s : f^{k-1}(P) \rightarrow \mathbb{R}^m = W \subset M$ como foi feito no lema 4.14, isto é, pela fórmula

$$f'_s(\underbrace{f^{k-1}(y)}_{=x}) = h_s(y), y \in P \subset V_0 (0 \leq s \leq 3).$$

O ponto $z_{k-1} \in \partial(f^{k-1}(P))$ é periódico. Assim $f^{k-1}(f'_s(z_{k-1})) = z_{k-1}$ para algum $s \in [0, 3]$ e portanto não podemos aplicar o lema 4.12 para estender esta homotopia em M .

Por outro lado, note que não existe outro ponto em $\partial(f^{k-1}(P))$ que seja periódico durante a homotopia $f'_s : f^{k-1}(P_{[-\varepsilon, \varepsilon]}) = h_s(P_{[-\varepsilon, \varepsilon]}) \subset \text{int}(P)$ e h_s é constante para $(x, t) \in \partial P, |t| \geq \varepsilon$.

Seja $f'_s : M \rightarrow M$ uma extensão de h_s constante fora de V_{k-1} , onde $(0 \leq s \leq 3)$. Vamos provar que não aparece novos pontos periódicos em f'_s .

Fixemos um aberto $W_{k-1} \subset V_{k-1}$ que satisfaz $f^{k-1}(P_{[-\varepsilon, \varepsilon]}) \subset W_{k-1}$ e $f'_s(\overline{W_{k-1}}) \subset \text{int}(P)$. Denote por

$$A = \{x \in M; (f'_s)^k(x) = x \text{ para algum } s \in [0, 3]\}.$$

Reparemos que:

1. A é compacto.
2. $A \cap \partial f^{k-1}(P) = \{z_{k-1}\} \in V_{k-1}$. De fato, suponha que $f^{k-1}(x) \in A$ onde $x \in \partial P$. Então $(f'_s)^k(f^{k-1}(x)) = f^{k-1}(x)$, contudo:

$$\begin{aligned} (f'_s)^k(f^{k-1}(x)) &= f^{k-1}(f'_s(f^{k-1}(x))) \\ &= f^{k-1}(h_s(x)) \\ &\Rightarrow f^{k-1}(h_s(x)) = f^{k-1}(x). \end{aligned}$$

Suponha por absurdo que $x \notin P^0$, como $f^{k-1}|_{P \setminus P^0}$ é injetora temos que $h_s(x) = x \in \partial P$ o que é um absurdo, pois h_s não possui pontos fixos no bordo de P . Dessa forma $x \in P^0$ e $f^{k-1}(x) = z_{k-1} \in V_{k-1}$.

3. $A \cap W_{k-1} \subset f^{k-1}(P)$. De fato, seja $x \in W_{k-1} \cap A$ assim:

$$x = (f'_s)^k(x) = f^{k-1}(f'_s(x)).$$

Por outro lado, $f'_s(x) \in f'_s(W_{k-1}) \subset P$. Portanto

$$x = f^{k-1}(f'_s(x)) \in f^{k-1}(P).$$

4.

$$\begin{aligned} W_{k-1} \cap (A \setminus \text{int}(f^{k-1}(P))) &= (W_{k-1} \cap A) \setminus \text{int}(f^{k-1}(P)) \\ &\subset W_{k-1} \cap A \cap \partial f^{k-1}(P) \\ &= \{z_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Segue que $A \setminus f^{k-1}(P)$ também é compacto, pois:

$$\begin{aligned} A \setminus f^{k-1}(P) &= A \setminus (\text{int}(f^{k-1}(P)) \cup \partial f^{k-1}(P)) \\ &= (A \setminus \text{int}(f^{k-1}(P))) \setminus (A \cup \partial f^{k-1}(P)) \\ &= \underbrace{(A \setminus \text{int}(f^{k-1}(P)))}_{\text{fechado}} \setminus \underbrace{\{z_{k-1}\}}_{\text{isolado}}. \end{aligned}$$

Seja $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ uma função de Urysohn tal que $\lambda(f^{k-1}(P)) = 1$ e $\lambda((M \setminus V_{k-1}) \cup (A \setminus f^{k-1}(P))) = 0$. Definimos $f_s(x) = f'_{\lambda(x)s}(x)$.

Advertimos que $f_3(x) = f_0(x)$ fora de V_{k-1} . Mostraremos que :

$$FIX(f_3^k) \cap V_{k-1} = \emptyset$$

De fato, suponha por absurdo que $f_3^k(x) = x \in V_{k-1}$. Assim:

1. Se $x = z_{k-1} \in \mathbb{R}^m = V_{k-1}$ então:

$$\begin{aligned} f_3^k(z_{k-1}) &= f^{k-1}(f_3(z_{k-1})) \\ &= f^{k-1}(h_3(z_0)) \\ &\underbrace{\neq}_{h_3(z_0) \notin P \setminus P^0} z_{k-1} \in V_{k-1}. \end{aligned}$$

2. Se $x = f^{k-1}(y)$, $y \in P \subset V_0$, $y \notin P^0$ então:

$$\begin{aligned} f^{k-1}(y) &= x \\ &= f_3^k(x) \\ &= f_3^k(f^{k-1}(y)) \\ &= f^{k-1}(f_3(f^{k-1}(y))) \\ &= f^{k-1}(h_3(y)). \end{aligned}$$

Como f^{k-1} é injetora em $V \setminus V^0$, $y = h_3(y)$ é um ponto fixo de h_3 o que é um absurdo.

3. Se $x \in V_{k-1} \setminus f^{k-1}(P)$ então:

$$\begin{aligned} x &= f_3^k(x) \\ &= f^{k-1}(f_3(x)) \\ &= f^{k-1}(f'_{\lambda(x)3}(x)) \\ &= (f'_{\lambda(x)3})^k(x) \end{aligned}$$

segue que $x \in A$ como $\lambda(A \setminus f^{k-1}(P)) = 0$ assim $x = f^k(x)$ o que é um absurdo pois

$$FIX(f^k) \cap V_{k-1} = \{(0, -1), (0, 1)\} \subset f^{k-1}(P)$$

e portanto $FIX(f_3^k) \cap V^{k-1} = \emptyset$.

■

Capítulo 5

Outros Procedimentos com Pontos Periódicos

Definição 5.1 Diremos que uma auto-aplicação $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz $S_r(f)$ se for dada pela fórmula $f(z, v) = \lambda(\rho_r(z), v)$ onde $(z, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-2} = \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{Z}$, $\lambda < 1$ e $\rho_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada pela fórmula:

$$\rho_r(z) = \begin{cases} \frac{z^r}{|z|^{r-1}} & \text{para } r \geq 2 \\ \frac{\bar{z}^{-r}}{|z|^{-r-1}} & \text{para } r \leq -2 \\ \exp^{i\alpha_0} z & \text{para } r = 1 \\ \phi(z) & \text{para } r = -1 \\ \psi(z) & \text{para } r = 0 \end{cases}$$

onde

1. Para $r = 1$, $\alpha_0 = \frac{\alpha}{\pi} > 0$ denota um ângulo irracional.
2. Para $r = -1$, definimos:

$$\begin{aligned} \phi : S^1 &\rightarrow S^1 \\ x + yi &\mapsto \gamma(x) - i \cdot \operatorname{sgn}(y) \sqrt{1 - (\gamma(x))^2} \end{aligned}$$

onde $\gamma : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ é um homeomorfismo que satisfaz :

- $\gamma(-1) = -1$, $\gamma(1) = 1$.
- $\gamma(x) < x$ para $|x| < 1$.

Então estendemos $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pela fórmula $\phi(tz) = t\phi(z)$ onde $t \geq 0$ e $z \in S^1$.

3. Para $r = 0$, definimos:

$$\begin{aligned} \psi : S^1 &\rightarrow S^1 \\ x + yi &\mapsto \gamma(x) + i \cdot \operatorname{sgn}(y) \sqrt{1 - (\gamma(x))^2} \end{aligned}$$

onde $\gamma : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ é o mesmo homeomorfismo acima. Então estendemos $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pela fórmula $\psi(tz) = t\psi(z)$ onde $t \geq 0$ e $z \in S^1$.

Para que não passe despercebido, o fato de uma aplicação f satisfazer $S_r(f)$ influencia no índice de suas classes de Reidemeister. Ressaltamos que a restrição $\rho_r|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ é uma função de recobrimento para $r > 0$. Além disso, para $r = -1, +1$ esta restrição é um homeomorfismo, neste caso o conjunto dos pontos fixos da restrição $\rho_r : S^1 \rightarrow S^1$ é sempre finito. Para qualquer subconjunto A de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ usaremos a notação:

$$\text{lin}(A) = \{t.a; a \in A, t > 0\}$$

e para todo $v_0 \in \mathbb{R}^m$ usaremos a notação $v_p = f^p(v_0)$.

Lema 5.2 *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma auto-aplicação que satisfaz $S_r(f)$. Então o conjunto dos pontos $v_0 \neq 0$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Os seguimentos $\text{lin}(v_0), \dots, \text{lin}(v_k), \dots$ são mutuamente disjuntos.*
2. *Fixado $k = 0, 1, \dots$, as imagens inversas $f^{-1}(\text{lin}(v_k)), f^{-2}(\text{lin}(v_k)), \dots$ são mutuamente disjuntas.*
3. *$f^{-p}(\{v_k\})$ é finito para todo $k, p \in \mathbb{N}$.*

é denso em \mathbb{R}^m . Além disso, se v_0 satisfaz as condições acima então existe uma vizinhança U de v_0 tal que a restrição $f|_{\text{lin}(U)}$ é um homeomorfismo.

PROVA: Para provar 1 é suficiente que, para um r fixado, o subconjunto dos pontos $z \in S^1$ cuja órbita $z, \rho_r(z), \dots, \rho_r^k(z), \dots$ consiste de elementos distintos seja denso em S^1 , pois assim qualquer $v = (z', x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-2}$ com $z' = kz$ para $0 < k \in \mathbb{R}$ satisfaz 1.

Para $r = 1$, a órbita de cada ponto $z \in S^1$ consiste de elementos distintos, pois α_0 é irracional daí ρ_1 é uma rotação de um ângulo irracional. O mesmo acontece com $r = 0$ e $r = -1$.

Quando $|r| \geq 2$ temos que ρ_r é um recobrimento finito e $\text{FIX}(\rho_r^k)$ é finito para cada número natural k , assim 1 segue do lema 2.19.

Percebamos que 1 implica 2. De fato, se $x \in f^{-p}(\text{lin}(v_{v_k})) \cap f^{-q}(\text{lin}(v_{v_k}))$ para algum $0 \leq q < p$ então

$$f^p(x) = f^{p-q}(f^q(x)) \in f^{p-q}(\text{lin}(v_{v_k})) = \text{lin}(v_{v_{k+p-q}}).$$

Contudo $f^p(x) \in \text{lin}(v_{v_k})$ o que contradiz 1.

Por fim, provaremos 3. Para $r = 0$ a imagem inversa de cada ponto contém no máximo dois elementos portanto a imagem inversa de $\rho_0^{-k}(x)$ contém no máximo 2^k elementos. Para $r \neq 0$ temos que a restrição $f|_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}}$ é um recobrimento com r dobras.

Destacamos que as aplicações ρ_r são recobrimentos finitos fora de $\{0\}$ e $r \neq 0$ e ρ_0 é um recobrimento local fora de $\{0\}$.



Corolário 5.3 Consideremos $t_j \in (-1, 1)$ pontos distintos e fixados para $j \in \mathbb{N}$. Suponha que f satisfaça $S_r(f)$ e que $v_0 \in (\mathbb{C} \times \{0\}) \cap S^{m-1} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-2}$ satisfaça o lema 5.2. Sejam $v_j = (u_j, 0, t_j) \in S^{m-1} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-3} \times \mathbb{R}$ pontos tais que $u_j = (\sqrt{1-t_j^2})v_0$, para $j \in \mathbb{N}$. Denotando $v_j^i = f^i(v_j)$ temos que:

1. Os seguimentos $\text{lin}(v_j^i)$ são mutuamente disjuntos.
2. $f^{-i}(\text{lin}(v_j^k)) \cap f^{-i'}(\text{lin}(v_{j'}^{k'})) = \emptyset$ se $j \neq j'$ ou se $k = k'$ e $i \neq i'$.
3. $f^{-p}(\{v_j^i\})$ é finito para todo $i, j, p = 0, 1, \dots$.

PROVA: Mostraremos que não existem dois elementos da família $\{v_j^i\}$ que sejam colineares no sentido de existir um $\gamma > 0$ tal que $v_j^i = \gamma v_{j'}^{i'}$. Para tanto suponhamos o contrário. Sejam

1. $v_j^i = f^i(v_j) = f^i(u_j, 0, t_j) = \lambda^i(\rho_r^i(u_j, 0, t_j))$
2. $v_{j'}^{i'} = f^{i'}(v_{j'}) = f^{i'}(u_{j'}, 0, t_{j'}) = \lambda^{i'}(\rho_r^{i'}(u_{j'}, 0, t_{j'}))$

dois pontos da família $\{v_j^i\}$ colineares no sentido mencionado acima. Então após uma projeção no subespaço \mathbb{C} , isto é, na “segunda coordenada”, temos que os pontos $\rho_r^i(u_j)$ e $\rho_r^{i'}(u_{j'})$ estão no mesmo segmento. Como u_j e $u_{j'}$ são ambos colineares com v_0 segue do lema 5.2 que $i = i'$.

Por outro lado, se os pontos $(z, 0, t)$ e $(z', 0, t')$ forem colineares então $\frac{t}{|z|} = \frac{t'}{|z'|}$. Esta proporção para o ponto v_j^i é

$$\frac{t_j}{|\rho_r^i(u_j)|} = \frac{t_j}{|u_j|} = \frac{t_j}{\sqrt{1-t_j^2}}$$

por assumir que v_j^i é colinear com $v_{j'}^{i'}$ temos que:

$$\frac{t_j}{\sqrt{1-t_j^2}} = \frac{t_{j'}}{\sqrt{1-t_{j'}^2}}.$$

Como a função $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ é estritamente crescente em $-1 < t < 1$ segue que $t_j = t_{j'}$, e consequentemente $j' = j$ e 1 está provado.

Para provar 2, se denotarmos $f(w, t) = (\bar{w}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ então $\frac{t}{|w|} = \frac{\bar{t}}{|\bar{w}|}$. Assim para cada elemento de $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-i}(\text{lin}(v_j^k))$ a proporção será

$$\frac{t_j}{|u_j|} = \frac{t_j}{\sqrt{1-t_j^2}}$$

logo $f^{-i}(\text{lin}(v_j^k)) \cap f^{-i'}(\text{lin}(v_{j'}^{k'})) = \emptyset$ implicaria

$$\frac{t_j}{\sqrt{1-t_j^2}} = \frac{t_{j'}}{\sqrt{1-t_{j'}^2}}$$

dessa forma $t_j = t_{j'}$ e $j = j'$. Resta mostrar para $j = j'$, $k = k'$ e $i' < i$. Se $x \in f^{-i}(\text{lin}(v_j^k)) \cap f^{-i'}(\text{lin}(v_j^k))$ então $f^i(x) \in \text{lin}(v_j^k)$. Por outro lado, $f^i(x) = f^{i-i'}(f^{i'}(x)) \in f^{i-i'}(\text{lin}(v_j^k)) = \text{lin}(v_j^{k+i-i'})$ segue de 1 que $i = i'$.

Por fim, 3 é satisfeito percebendo que a restrição $f|_{(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{m-2}}$ é um recobrimento com r dobras para $r \neq 0$ e que para $r = 0$ a imagem inversa de cada elemento consiste de pelo menos dois elementos.

■

Corolário 5.4 *Fixados números naturais $I, J, K \in \mathbb{N}$. Então qualquer v_j do corolário 5.3 admite uma vizinhança fechada $V_j \subset \mathbb{R}^m$ tal que se denotarmos $V_j^i = f^i(V_j)$ teremos:*

1. Os conjuntos $\text{lin}(V_j^i)$ são mutuamente disjuntos para $i = 0, 1, \dots, I$ e $j = 0, 1, \dots, J$.
2. $f^{-k}(\text{lin}(V_j^i)) \cap f^{-k'}(\text{lin}(V_{j'}^{i'})) = \emptyset$ se $j \neq j'$ ou se $k = k'$ e $i \neq i'$, $i, i' = 0, 1, \dots, I$, $j, j' = 0, 1, \dots, J$ e $k, k' = 0, 1, \dots, K$.
3. $f^{-k}(V_j^i)$ é formado por uma quantidade finita de componentes conexas, todas levadas homeomorficamente em V_j para cada $k = 0, 1, \dots, K$, $j = 0, 1, \dots, J$ e $i = 0, 1, \dots, I$.

PROVA: Existe uma quantidade finita de pontos v_j^i para $i = 0, \dots, I$ e $j = 0, \dots, J$, $i \neq j$ e I, J . Por conseguinte 1 segue de vizinhanças suficientemente pequenas V_j dos pontos v_j . 1 implica 2 como no lema 5.2 e 3 é satisfeito percebendo que a restrição $f|_{(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{m-2}}$ é um recobrimento com r dobras para $r \neq 0$ e que a restrição $f|_{\mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-2}}$ é um homeomorfismo.

■

5.1 Procedimentos de Criação e de Adição

Geometricamente o que faremos nessa seção é criar novas órbitas de pontos periódicos de uma auto-aplicação de duas formas diferentes. No Procedimento de Criação criamos vários pontos periódicos, o que gera um certo controle sobre a cardinalidade do conjunto de pontos periódicos da auto-aplicação, e no Procedimento de Adição criamos representantes para classes de Reidemeister, o que facilita o cálculo do número periódico de Nilsen-Jiang completo.

Lema 5.5 *Consideremos uma PL-variedade compacta M , $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação e um subconjunto aberto $U \subset M$ que satisfazem:*

1. $f^n(x) \neq x$ para todo $x \in \partial U$.
2. Se $x \in \text{FIX}(f^n)$ então a órbita $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ está inteiramente em U ou em $M \setminus \bar{U}$.

Então existe uma ε -homotopia constante fora de U tal que:

1. $f_0 = f$.
2. f_1 satisfaz as duas hipóteses acima.
3. $\text{FIX}(f_1^n) \setminus U = \text{FIX}(f^n) \setminus U$.
4. $\text{FIX}(f_1^n) \setminus U$ é finito.
5. f_1 é um homeomorfismo linear próximo de cada $x \in \text{FIX}(f_1^n) \setminus U$.

PROVA: Fixemos uma vizinhança V satisfazendo :

1. $\text{FIX}(f^n) \setminus U \subset V$.
2. $\bar{V} \cup f(\bar{V}) \cup \dots \cup f^n(\bar{V}) \subset M \setminus \partial U$.

Consequentemente, $\inf\{d(x, f^k(x)); x \in M \setminus (U \cup V), k|n\} > 0$. Dessa forma, se a deformação f_t

1. $f_0 = f$.
2. $f_t(x) = f(x)$ para todo $x \notin U$.

for suficientemente pequena então $\text{FIX}(f_t^n) \setminus U$ não varia, pois não existe novos pontos periódicos em $M \setminus (U \cup V)$ e as órbitas de pontos de V não são levadas em $M \setminus \bar{U}$. Aplicando localmente a prova do teorema 4.3 no conjunto compacto $\text{FIX}(f_t^n) \cap U$ conseguimos a homotopia desejada. ■

Teorema 5.6 Procedimento de Criação: *Consideremos $f : M \rightarrow M$ uma auto-aplicação, uma k -órbita isolada $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ de f , tal que f é um PL-homeomorfismo próximo de cada x_i , com $i = 0, \dots, k - 1$.*

Fixemos uma vizinhança euclidiana U de x_0 tal que:

1. $f^i(\bar{U}) \cap f^j(\bar{U}) = \emptyset$ para $0 \leq i < j \leq k - 1$.
2. f é um homeomorfismo próximo de cada $f^i(\bar{U})$ para $0 \leq i < j \leq k - 1$.

Seja $V_0 \subset U$ uma vizinhança euclidiana de x_0 satisfazendo $f^k(\overline{V_0}) \subset U$. Denotemos $V_i = f^i(\overline{V_0})$ e suponhamos que $0 \in V_0 \subset U = \mathbb{R}^m$ (assumimos que $x_0 \neq 0$).

Então existe uma homotopia $\{f_t\}$ constante fora de V_{k-1} e que satisfaz:

1. $f_0 = f$.
2. $f_1^k(0) = 0$ e assim $0 \in V_0$ se torna um novo ponto k -periódico.
3. Para um dado $r \neq 0$, $S_r(f^k)$ da definição 5.1 é satisfeito.
4. $f_1(\overline{V_{k-1}}) \subset U$.
5. $FIX(f_1^k) = FIX(f^k) \cup \{ \text{a órbita de } 0 \} \cup \{ \text{as órbitas de } |r| \text{ novos pontos periódicos em } V_{k-1} \text{ cada uma com índice igual a } -\text{sgn}(r) \}$.

PROVA: Fixemos bolas centradas em $0 \in V_0$: $B(0, \rho) \subset B(0, \rho') \subset V_0$ com $\rho < \rho'$. Assim a restrição $f^{k-1} : \overline{V_0} \rightarrow \overline{V_{k-1}}$ é um homeomorfismo e portanto podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} f_1 : f^{k-1}(B(0, \rho)) &\rightarrow U = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-2} \\ f^{k-1}(z, x) &\mapsto f_1(f^{k-1}(z, x)) = \lambda(\rho_r(z), x) \end{aligned}$$

e estende-la para $f_1 : f^{k-1}(B(0, \rho')) \rightarrow U$ de forma que $f_1(y) = f(y)$ para $y \in \partial B(0, \rho')$, depois com a mesma fórmula estendemos a aplicação sobre todo M (isso é possível porque U é contrátil e assim quaisquer duas aplicações em U são homotópicas).

Note que se as bolas $B(0, \rho)$ e $B(0, \rho')$ forem suficientemente pequenas então $x_0 \neq 0$ não pertence as bolas e assim continua sendo um ponto fixo de f_1^k . Dessa forma

$$FIX(f_1^k) = FIX(f^k) \cup \{ \text{as órbitas de } f_1 \text{ que passam por } V_{k-1} \}.$$

A restrição $f_1 \circ f^{k-1} : \overline{B(0, \rho')} \setminus B(0, \rho) \rightarrow U$ não possui pontos fixos no bordo, por isso existe $\phi_t : \overline{B(0, \rho')} \setminus B(0, \rho) \rightarrow U$ uma homotopia arbitrariamente pequena, para $1 \leq t \leq 2$, e com as seguintes propriedades:

1. $\phi_1 = f_1 \circ f^{k-1}$.
2. ϕ_t é constante no bordo.
3. $FIX(\phi_2)$ é finito.
4. ϕ_2 é um isomorfismo linear proximo de cada ponto de $FIX(\phi_2)$.

Definimos a homotopia que desejamos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_t : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto \begin{cases} \phi_t(z) & \text{para } x = f^{k-1}(z), z \in \overline{B(0, \rho')} \setminus B(0, \rho). \\ f_t(x) & \text{nos outros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto $ind(f_2^k, 0) = r$ e devem aparecer no mínimo $|r|$ novos pontos fixos de f_1^k em V_{k-1} cada um com índice $-sgn(r)$.

De fato, se aparecessem mais do que $|r|$ novos pontos fixos de f_1^k em V_{k-1} então estes pontos a mais estão em pares, um com índice $-sgn(r)$ e o outro com índice $sgn(r)$, e na mesma classe de Nielsen em $FIX(f_2^k)$. Por conseguinte, podemos aplicar o procedimento de cancelamento para remover todos estes pares de órbitas com índices opostos. Dai a aplicação f_3 satisfaz o lema. ■

Observamos que se A for a união de órbitas k -periódicas de uma mesma classe de Nielsen tal que $ind(f^k; A) = rk$ para $r \neq 0$ então para $a \in A$ fixe uma vizinhança euclidiana de a que contém x_0 . Aplicando o procedimento de criação conseguimos a órbita $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\}$ de índice rk e $|r|$ órbitas de índice $-sgn(r)k$.

Dai, com o procedimento de cancelamento removemos todos os pares de órbitas com índices opostos. Portanto construímos uma homotopia f_t satisfazendo:

1. $f_0 = f$.
2. f_t é constante em uma vizinhança de $FIX(f^k) \setminus A$.
3. $FIX(f_1^k) = (FIX(f_1^k) \setminus A) \cup \{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\}$.
4. f^k satisfaz $S_r(f^k)$ da definição 5.1 na órbita $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\}$.

Teorema 5.7 Procedimento de Adição: *Seja $FIX(f^k)$ um conjunto finito e $z_0, z_1 = f(z_0), \dots, z_{3k-1} = f^{3k-1}(z_0)$ pontos distintos. Então existe uma homotopia f_t constante fora de uma vizinhança de z_{k-1} satisfazendo:*

1. $f_0 = f$.
2. $FIX(f_1^k) = FIX(f^k) \cup \{z_0, \dots, z_{k-1}\}$.
3. $z_0 \in P_k(f_1)$ representa uma classe de Reidemeister em $R(f_1^k) = R(f^k)$.
4. A órbita $\{z_0, f_1(z_0), \dots, f_1^{k-1}(z_0)\}$ satisfaz $S_0(f_1^k)$.

Prova: Por hipótese os pontos z_0, z_1, \dots, z_{3k} são diferentes, por isso deformaremos f localmente para torna-la um homeomorfismo local próximo de cada z_i com $i = 0, \dots, 3k-1$ de forma que $FIX(f^k)$ permaneça inalterado, isso é possível porque $w = z_{k-1}$ satisfaz as hipóteses do teorema 2.21.

Como consequência do mesmo teorema, assumimos que existe uma vizinhança euclidiana W de z_{k-1} tal que os conjuntos $\overline{W}, f^{-1}(\overline{W}), \dots, f^{-k+1}(\overline{W})$ sejam mutuamente disjuntos e cada uma de suas componentes conexas é levada homeomorficamente por f sobre \overline{W} .

Seja U uma vizinhança euclidiana do ponto $z_0 = 0$ tal que:

1. U é homeomorfa a \mathbb{R}^m .
2. As restrições de f, f^2, \dots, f^{3k-1} sobre U são homeomorfismos.
3. $f^i(\bar{U}) \cap f^j(\bar{U}) = \emptyset$ para $0 \leq i < j \leq 3k - 1$.
4. $f^{k-1}(\bar{U}) \subset W$.

Consideremos bolas $B(0, r) \subset B(0, r') \subset B(0, r'') \subset U$ e y_0 um ponto de $\partial B(0, r')$ (usaremos a notação $C = f^{k-1}(B(0, r))$, $C' = f^{k-1}(B(0, r'))$ e $C'' = f^{k-1}(B(0, r''))$). Dessa forma definimos uma aplicação f_1 homotópica a f tal que:

1. $f_1(x) = f(x)$ para $x \notin C''$.
2. Vamos definir f_1 em \bar{C} : Cada ponto de C é da forma $f^{k-1}(x)$ tal que $x \in B(0, r)$, assim $f_1(f^{k-1}(x)) = \lambda(\rho_0(z), t)$. Aqui usamos a definição 5.1 e λ satisfazendo:

$$r'' > \lambda r > r'.$$

Portanto $f_1(C) \subset B(0, r'')$ e $S_0(f_1^k)$ é satisfeito.

3. Em $\bar{C}' \setminus C$, f_1 será dada por: Já verificamos que $S_0(f_1^k)$ é satisfeito, por isso a aplicação $f_1 : \partial B(0, r) \rightarrow M \setminus B(0, r')$ é contrátil. A contração define uma extensão de f_1 sobre \bar{C}' que satisfaz:

- $f_1(\bar{C}' \setminus C) \subset M \setminus B(0, r')$.
- $f_1(x) = f^k(z_0)$ para $x \in \partial C'$.
- O caminho que leva $t \in [\frac{r}{r'}, 1]$ em $f_1(ty_0)$ representa uma classe de homotopia .
- $f_1(\bar{C}' \setminus C)$ é disjunto da união $\bar{C}' \cup f_1^{-1}(\bar{C}') \cup \dots \cup f_1^{-k+1}(\bar{C}')$, pois essa união está contida na união $\bar{W} \cup f_1^{-1}(\bar{W}) \cup \dots \cup f_1^{-k+1}(\bar{W})$ que por sua vez se fatora em um número finito de abertos mutuamente disjuntos e porque a dimensão de M é pelo menos 3.

4. Por fim, definimos f_1 em $\bar{C}'' \setminus C'$ pela fórmula $f_1(f^{k-1}(x)) = f^k(\frac{|x|-r'}{r''-r'}x)$.

Alteramos f apenas em C'' que é disjunto de $FIX(f^k)$. Dai, $FIX(f^k) \subset FIX(f_1^k)$ e consequentemente basta verificar que z_{k-1} é o único ponto de C'' que satisfaz $f_1^k(z) = z$.

Qualquer $z \in \bar{C}''$ é da forma $z = f^{k-1}(x)$ para algum $x \in U$, deste modo se o ponto $z = f^{k-1}(x) \in FIX(f_1^k) \cap \bar{C}$, para $x = (z, t)$, teremos:

$$f^{k-1}(x) = f_1^k(f^{k-1}(x)) = f^{k-1}(f_1((f^{k-1}(x)))) = f^{k-1}(\lambda(\rho_0(z), t))$$

f^{k-1} é um homeomorfismo em U , logo $x = \lambda(\rho_0(z), t)$ o que implica que $x = 0 = z_0$ e $z_{k-1} = f^{k-1}(z_0)$, uma vez que 0 é o único ponto fixo de aplicação f^k que satisfaz $S_0(f^k)$.

Agora se existir $z \in (\bar{C}' \setminus C) \cap FIX(f_1^k)$, logo $z = f_1^k(z)$, então :

1. $f_1(z) \in f_1^{-k+1}(\overline{C'})$
2. $f_1(z) \in f_1(\overline{C'} \setminus C)$

o que é um absurdo pois esses conjuntos são disjuntos.

Por fim, se $z \in (\overline{C'} \setminus C) \cap \text{FIX}(f_1^k)$. Tomando $z = f^{k-1}(x)$ para algum $x \in U$ teremos que:

$$f^{k-1}(x) = f_1^k(f^{k-1}(x)) = f^{k-1}(f_1(f^{k-1}(x)))$$

Como f^{k-1} é um homeomorfismo em U temos que:

$$x = f_1(f^{k-1}(x)) = f^k\left(\frac{|x| - r'}{r'' - r'}x\right) \in f^k(U).$$

O que é um absurdo, pois por construção U e $f^k(U)$ são disjuntos. ■

5.2 Procedimento Coalescente

Este procedimento é muito importante por indicar a forma de usar os procedimentos anteriores sem que um entre em conflito com o outro. Provavelmente por isso que sua demonstração exija um pouco mais de atenção que os outros.

Teorema 5.8 Procedimento Coalescente: *Consideremos $\text{FIX}(f^k)$ um conjunto finito, l um divisor de k , $\{y_0, y_1, \dots, y_{l-1}\}$, $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ órbitas disjuntas de $\text{FIX}(f^l)$ e $\text{FIX}(f^k)$ respectivamente, tais que:*

1. Os pontos x_0 e y_0 são Nielsen relacionados como pontos fixos de f^k .
2. Os pontos x_0 e y_0 satisfazem $S_r(f^k)$ e $S_r(f^l)$ respectivamente.

Então existe uma homotopia f_t constante em uma vizinhança de

$$\text{FIX}(f^k) \setminus \{x_0, \dots, x_{k-1}; y_0, \dots, y_{l-1}\}$$

que satisfaz:

1. $f_0 = f$.
2. $\text{FIX}(f_1^k) = \text{FIX}(f^k) \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$.

Essa prova será feita em 5 etapas durante toda essa seção. Contudo, não usaremos a palavra "PROVA" porque demonstraremos alguns resultados durante essa seção que, pela clareza do texto, não poderiam ser trocados de posição com esse procedimento. Nas duas primeiras etapas não modificaremos f em uma vizinhança de $\text{FIX}(f^k)$.

Etapa 1: Assumiremos que :

1. $FIX(f^k)$ é finito.
2. $x_0 \in FIX(f^k)$, $y_0 \in FIX(f^l)$ são Nielsen relacionados como pontos fixos de f^k , onde l é um divisor de k .
3. A condição S_r está satisfeita próximo dos pontos x_0, y_0 .

Vamos fixar uma vizinhança euclidiana U do ponto $y_0 = 0$ em M homeomorfa a \mathbb{R}^m que satisfaça $S_r(f^l)$. Em particular $|f^l(x)| = \lambda|x|$ para x em uma bola aberta centrada em 0 e com $\lambda > 1$.

De forma análoga, tomemos uma vizinhança euclidiana do ponto $x_0 = 0$ em M homeomorfa a \mathbb{R}^m onde $S_{r'}(f^k)$ ocorre.

Seja $w_0 : [-1, 1] \rightarrow M$ um arco tal que:

1. $w_0(-1) = y_0, w_0(1) = x_0$.
2. Os caminhos $w_0, f^k \circ w_0$ são Nielsen relacionados. Segue do corolário 5.3 que:
 - Os arcos $w_0(-1, -1 + \varepsilon], f \circ w_0(-1, -1 + \varepsilon], \dots, f^{2k-1} \circ w_0(-1, -1 + \varepsilon]$ são mutuamente disjuntos.
 - Os arcos $w_0[1 - \varepsilon, 1), f \circ w_0[1 - \varepsilon, 1), \dots, f^{2k-1} \circ w_0[1 - \varepsilon, 1)$ são mutuamente disjuntos.

Portanto f é um homeomorfismo em $w_0[-1, -1 + \varepsilon]$ e em $w_0[1, 1 - \varepsilon]$. Por outro lado, como a dimensão de M é pelo menos 3 temos que a restrição

$$f : w_0[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \rightarrow M$$

é homotópica a um arco, por uma homotopia arbitrariamente pequena que pode ser estendida sobre M por uma homotopia constante fora de uma vizinhança do caminho $w_0[-1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

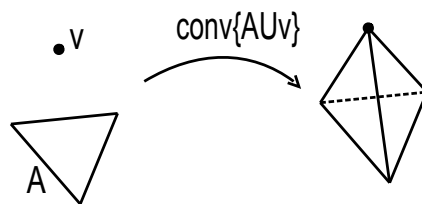
$w_0[-1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ é isolado de $FIX(f^k)$, assim o lema 5.5 garante que não aparecem novos pontos periódicos durante essa homotopia e podemos assumir que $f \circ w_0$ é um arco. Repetindo essa construção podemos assumir que $f^2 \circ w_0, \dots, f^{2k-1} \circ w_0$ são arcos.

Observemos que para $i < j$

$$w_i(t) = w_j(s) \Rightarrow \begin{cases} t = s = -1 & \text{e } j - i \text{ é um múltiplo de } l \\ & \text{ou} \\ t = s = 1 & \text{e } j - i \text{ é um múltiplo de } k. \end{cases}$$

Etapa 2: Para qualquer $i = 0, \dots, k-1$ estabelecemos uma vizinhança U_i homeomorfa a \mathbb{R}^m tal que $w_i(t) = (0, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ com $-1 \leq t \leq 1$. Tomemos o arco $w_0[-1, 1] \subset U_0$, números positivos $\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\delta}_0$ e os conjuntos :

1. $C_- = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}; t = -1 + \varepsilon_0, |x| \leq \delta_0\}$.


 Figura 5.1: $\text{conv}\{A \cup v\}$.

2. $C_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}; t = 1 - \varepsilon_0, |x| \leq \delta_0\}$.
3. $D_- = \text{conv}\{y_0 \cup C_-\}$ = o menor conjunto convexo que contém y_0 e C_- . Analogamente $D_+ = \text{conv}\{x_0 \cup C_+\}$ e $D_0 = \text{conv}\{C_- \cup C_+\}$.
4. $V_0 = \text{int}(D_- \cup D_0 \cup D_+)$.

Tomemos números positivos ε_1, δ_1 e analogamente temos uma vizinhança V_1 do arco $w_1(-1, 1)$. Observamos que se os números $\tilde{\delta}_0, \delta_1$ forem suficientemente pequenos então:

$$\overline{V_0} \cap \overline{V_1} = \begin{cases} \emptyset & \text{para } l > 1 \\ \{y_0\} & \text{para } l = 1. \end{cases}$$

Porque $f \circ w_0(-1, 1) = w_1(-1, 1)$ para ε_1, δ_1 podemos encontrar $\varepsilon'_0, \delta'_0$ (para isso basta tomar $\varepsilon_0 = \min\{\tilde{\varepsilon}_0, \varepsilon'_0\}$ e $\delta_0 = \min\{\tilde{\delta}_0, \delta'_0\}$) de forma que $f(V_0) \subset V_1$. Com esse procedimento podemos definir vizinhanças V_i , com $i = 0, \dots, k-1$, de forma que $w_i(-1, 1) \subset V_i \subset U_i, f(V_i) \subset V_{i+1}$ e

$$\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \begin{cases} \{y_i\} & \text{para } 0 \leq i < j \leq k-1, |j-i|=1 \\ \emptyset & \text{para os outros casos.} \end{cases}$$

Seja $h : \overline{V_0} \rightarrow \overline{V_1}$ uma aplicação dada por $h(z) = f(z)$ para $z \in D_- \cup D_+$. Dessa forma h manda cada segmento $[(-1 + \varepsilon_0, x), (0, x)]$ linearmente sobre $[f(-1 + \varepsilon_0, x), (0, 0)] \subset V_1$ e cada segmento $[(0, x), (1 - \varepsilon_0, x)]$ linearmente sobre $[(0, 0), f(1 - \varepsilon_0, x)] \subset V_1$.

A construção anterior possui as seguintes propriedades:

1. As restrições $f|_{D_0}, h|_{D_0}$ são homotópicas relativamente a $C_- \cup C_+$.
2. Essa homotopia pode ser estendida para todo M por uma homotopia arbitrariamente pequena e constante fora de uma vizinhança de D_0 .
3. D_0 é isolado de $\text{FIX}(f^k)$, assim usamos o lema 5.5 para assumir que $\text{FIX}(f^k)$ não se altera durante essa homotopia.
4. As restrições $f|_{V_0^-}, f|_{V_0^+}$ são homeomorfismos, onde

$$V_0^+ = \{(t, x) \in V_0; t > 0\} \quad \text{e} \quad V_0^- = \{(t, x) \in V_0; t < 0\}.$$

5. $f(V_0^0) = z_1 = (0, 0) \in U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$, onde $V_0^0 = \{(t, x) \in V_0; t = 0\}$.

Com uma construção análoga a que foi feita acima podemos assumir que as vizinhanças V_i , $i = 1, \dots, k - 1$, possuem as seguintes propriedades:

1. As restrições $f|_{V_i^-}, f|_{V_i^+}$ são homeomorfismos que chegam em vizinhanças respectivamente de $w_{i+1}(-1, 0)$ e de $w_{i+1}(0, 1)$, para $i = 0, \dots, k - 2$.
2. $f(V_i^-) = V_{i+1}^-$, $f(V_i^+) = V_{i+1}^+$ e $f(V_i^0) = z_{i+1} \in V_{i+1}$.

Podemos escrever a vizinhança $V_0 \subset U_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ da seguinte maneira:

$$V_0 = \{(t, x); -1 \leq t \leq 1, |x| < \rho(t)\}$$

onde $\rho : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz

1. $\rho(1) = \rho(-1) = 0$.
2. $\rho(x) > 0$ se $-1 < x < 1$.
3. ρ é linear nos intervalos $[-1, -1 + \varepsilon]$ e $[1 - \varepsilon, 1]$ e constante no intervalo $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Lembremos que todas essas deformações são arbitrariamente pequenas e ocorrem em subconjuntos disjuntos de $FIX(f^k)$ e portanto podemos assumir que $FIX(f^k)$ não foi alterado.

Etapa 3: Mostraremos que depois de uma homotopia que deforma apenas uma vizinhança de $w_{k-1}(-1, 1)$ e que não altera $FIX(f^k)$ teremos que:

$$f^k(t, x) = (t, \lambda\rho(t), 0) \in U_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$$

numa vizinhança da forma $\{(t, x); |x| \leq \rho(t)\} \subset [-1, 1] \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m = U_0$ onde $\rho(t)$ é definida acima e $\lambda > 1$.

Começaremos provando que essa igualdade pode ser satisfeita em alguma vizinhança do ponto $z_0 = (0, 0) \in V_0 \subset U_0$.

Sejam w_0, \dots, w_{2k-1} arcos que satisfazem a primeira etapa (não necessariamente a segunda), depois de uma homotopia arbitrariamente pequena que deforma apenas uma vizinhança dos pontos z_0, \dots, z_{k-2} . A aplicação f se torna um homeomorfismo local que leva os pontos $(t, x) \in U_i$ em $(t, x) \in U_{i+1}$ para (t, x) próximo de $(0, 0) = z_i$ e $FIX(f^k)$ não se altera uma vez que z_0, \dots, z_{k-1} não são pontos fixos de f^k .

Por outro lado, $z_{k-1}, f(z_{k-1}), \dots, f^k(z_{k-1})$ são mutuamente distintos e não estão em $FIX(f^k)$. Se for necessário podemos alterar f próximo de $f^k(z_{k-1})$ para que $f^{k+1}(z_{k-1})$ seja diferente dos pontos $z_{k-1}, f(z_{k-1}), \dots, f^k(z_{k-1})$ e para que $f^{k+1}(z_{k-1})$ não pertença a $FIX(f^k)$.

Por causa desse procedimento assumiremos que $z_{k-1}, f(z_{k-1}), \dots, f^{2k-1}(z_{k-1})$ são mutuamente diferentes.

Lema 5.9 *Assumiremos que os arcos $w_0, f \circ w_0, \dots, f^{2k-1} \circ w_0$ satisfazem a primeira etapa, então existe uma homotopia f_t tal que:*

1. $f_0 = f$.
2. f_t é constante sobre os arcos $w_0, f \circ w_0, \dots, f^{k-1} \circ w_0$ e em uma vizinhança de $FIX(f^k)$.
3. existe uma vizinhança W' de z_{k-1} tal que $\overline{W'} \cup f^{-1}(\overline{W'}) \cup \dots \cup f^{-k+1}(\overline{W'})$ está contido em um número finito de abertos mutuamente disjuntos de M .
4. f_1 satisfaz a segunda etapa.
5. $FIX(f^k) = FIX(f_1^k)$.

PROVA: Aplicando o teorema 2.21, para $w = z_{k-1}$, angariamos uma vizinhança W_{k-1} de z_{k-1} tal que os conjuntos:

$$\overline{W_{k-1}}, f^{-1}(\overline{W_{k-1}}), \dots, f^{-k+1}(\overline{W_{k-1}})$$

são mutuamente disjuntos e cada uma de suas componentes conexas é mandada homeomorficamente por f sobre $\overline{W_{k-1}}$.

Não é necessário fazer correções em f próximo dos pontos z_0, \dots, z_{k-2} , pois f já é um homeomorfismos local próximo desses pontos. Dessa forma, assumiremos que f leva $(x, t) \in U_i$ em $(x, t) \in U_{i+1}$. Assim deformamos f como na etapa 2 por uma deformação arbitrariamente pequena e que não altera $FIX(f^k)$.

Por conseguinte, podemos assumir que para uma vizinhança W'_{k-1} suficientemente pequena de z_{k-1} suas imagens inversas $\overline{W'_{k-1}}, f^{-1}(\overline{W'_{k-1}}), \dots, f^{-k+1}(\overline{W'_{k-1}})$ estão contidas em:

$$W = \overline{W_{k-1}} \cup f^{-1}(\overline{W_{k-1}}) \cup \dots \cup f^{-k+1}(\overline{W_{k-1}})$$

que é um número finito de abertos mutuamente disjuntos de M . ■

Porque o complemento $M \setminus \overline{W}$ é homotópico a $M \setminus \{\text{conjunto finito}\}$ que é conexo e conexo por caminhos, pois a dimensão de M é pelo menos 3, existe um caminho α nesse complemento que representa uma classe de homotopia tal que:

$$\alpha(0) = f(z_{k-1}) = f^k(z_0)$$

$$\alpha(1) = (0, \lambda\rho(0), 0) \in U_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2} \text{ para um } \lambda > 1.$$

Este caminho pode ser estendido por $h_s : \overline{W'_{k-1}} \rightarrow M \setminus \overline{W}$ uma homotopia com as seguintes propriedades:

1. $h_0(x) = f(x)$ para $x \in \overline{W'_{k-1}}$.

2. $h_1(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda\rho(t), 0) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$, para $(t, x) \in V_0$ satisfazendo $f^{k-1}(t, x) \in W'_{k-1}$.

3. $h_s(z_{k-1}) = \alpha(s)$.

Consideremos W''_{k-1} um aberto que satisfaz :

$$z_{k-1} \in W''_{k-1} \subset \overline{W''_{k-1}} \subset W'_{k-1}$$

e $\mu : M \rightarrow [0, 1]$ uma função de Urysohn tal que $\mu(W''_{k-1}) = 1$ e que $\mu(M \setminus W'_{k-1}) = 0$. Dessa forma podemos definir a homotopia

$$f_t(x) = \begin{cases} h_{\mu(x)t}(x) & \text{para } x \in W'_{k-1} \\ f(x) & \text{para } x \notin W'_{k-1}. \end{cases}$$

Logo, $FIX(f_1^k) = FIX(f^k)$, pois durante a homotopia os pontos de $\overline{W'_{k-1}}$ evitam \overline{W} que contém $\overline{W'_{k-1}}$, $f^{-1}(\overline{W'_{k-1}}), \dots, f^{-k+1}(\overline{W'_{k-1}})$. Além disso, para $(t, x) \in f^{-k+1}(\overline{W'_{k-1}}) \cap V_0$ temos :

$$f_1^k(t, x) = f_1(f^{k-1}(t, x)) = h_1(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda\rho(t), 0) \in V_0.$$

Mostraremos que essa igualdade pode ser satisfeita próximo dos pontos y_{l-1} e x_{k-1} . Como as aplicações $t \mapsto w_0(t)$, $t \mapsto f^k \circ w_0(t)$ e $t \mapsto (t, \lambda\rho(t), 0)$ são lineares, para $-1 \leq t \leq -1 + \varepsilon$, existe uma isotopia $\phi_s : M \rightarrow M$ que altera uma vizinhança de y_0 tal que:

1. ϕ_s é linear em segmentos $[y_0, y]$ para $|y - y_0| < \delta$.
2. $\phi_s \circ w_0(t) = w_0(t)$.
3. $\phi_1 \circ f_1^k \circ w_0(t) = (t, \lambda\rho(t), 0)$.

para $0 \leq s \leq 1$, $-1 \leq t \leq -1 + \delta$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Desse forma, podemos dizer que $f_1(x) = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}(x)$. Consequentemente

$$f_1^k(w_0(t)) = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} \circ w_0(t) = \phi_1 \circ f \circ w_0(t) = (t, \lambda\rho(t), 0).$$

Além disso, a isotopia ϕ_s é constante em $FIX(f^k)$ e por conseguinte $FIX(f_1^k) = FIX(f^k)$. O mesmo pode ser feito próximo de x_0 , então assumiremos que a igualdade $f_1^k(t, x) = (t, \lambda\rho(t), 0)$ ocorre em :

$$\{(t, 0) \in V_0; t \in (-1, -1 + \delta) \cup (-\eta, \eta) \cup (1 - \delta, 1)\} \subset V_0 \subset U_0 = \mathbb{R}^m.$$

Vamos estender essa igualdade para $conv\{y_0, W''_0\} \subset U_0 = \mathbb{R}^m$ uma vizinhança onde W''_0 é uma vizinhança de do ponto $w_0(-1 + \frac{\delta}{2})$.

Graças ao corolário 5.3 assumiremos que:

$$(t, \lambda\rho(t), 0), f(t, \lambda\rho(t), 0), \dots, f^{2k}(t, \lambda\rho(t), 0)$$

são mutuamente disjuntos para $t \in (-1, -1 + \delta)$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Dessa forma, os arcos:

$$w_0, \dots, f^k \circ w_0(t) = (t, \lambda\rho(t), 0), f(t, \lambda\rho(t), 0), \dots, f^k(t, \lambda\rho(t), 0)$$

são mutuamente disjuntos para $-1 \leq t \leq -1 + \delta$. Pela etapa 2 assumiremos que f é um homeomorfismo em $W_0 = \text{conv}\{\overline{W'_0}, y_0\}$, onde W'_0 é uma vizinhança do ponto $w_0(-1 + \delta)$, $W_i = f^i(W_0)$. $\text{int}(W_i)$ são mutuamente disjuntos, para $i = 0, \dots, 2k$ e W'_0 suficientemente pequeno.

Sejam $\tilde{f}_s : \overline{W_{k-1}} \rightarrow \overline{W_k}$ uma homotopia parcial (homotopia linear) entre $\tilde{f}_0 = f$ e $\tilde{f}_1(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda\rho(t), 0)$ para $(t, x) \in \overline{W_0} \subset U_0$, $W''_0 \subset M$ uma vizinhança do ponto $w_0(-1, -1 + \frac{\delta}{2})$ satisfazendo $W''_0 \subset \overline{W''_0} \subset W_0$. Vamos denotar $\tilde{W}_0 = \{\overline{W''_0} \cup y_0\}$. Então $\tilde{W}_0 \setminus \{y_0\}$ e $M \setminus \{\text{int}(W_0) \cup \{y_0\}\}$ são subconjuntos disjuntos e fechados do espaço $M \setminus \{y_0\}$.

Assim existe uma função de Urysohn $\eta : M \setminus \{y_0\} \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo:

1. $\eta(\text{int}(W_0) \setminus \{y_0\}) = 1$
2. $\eta(M \setminus \{(W_0) \cup \{y_0\}\}) = 0$.

Vamos definir

$$f_s(y) = \begin{cases} \tilde{f}_{\eta(x)s}(y) & \text{para } y \in f^{k-1}(W_0) = W_{k-1} \\ f(y) & \text{para os outros casos .} \end{cases}$$

Essa homotopia é contínua em y_0 , pois $\tilde{f}_s(y_0) = y_0$ para $0 \leq s \leq 1$. Logo:

1. $f_0 = f$.
2. $f_1(x) = f(x)$ para $x \notin W_{k-1}$.
3. Para $(t, x) \in \tilde{W}_0$,

$$f_1^k(t, x) = f_1(f_1^{k-1}(t, x)) = f_1^k(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda\rho(t), 0).$$

4. $\text{FIX}(f^k) = \text{FIX}(f_1^k)$. De fato, como $f^{k-1}(\overline{W})$ é a única parte alterada pela homotopia e o interior de desse conjunto é disjunto de $\text{FIX}(f^k)$, temos que a inclusão $\text{FIX}(f^k) \subset \text{FIX}(f_1^k)$.

Por outro lado, $f_1(\overline{W}_{k-1}) \subset \overline{W}_k$, isso implica que :

$$f_1^2(\overline{W}_{k-1}) \subset f_1(\overline{W}_k) \subset \overline{W}_{k+1}, \dots, f_1^k(\overline{W}_{k-1}) \subset \overline{W}_{2k-1}.$$

Como os conjuntos abertos W_i , com $i = 0, \dots, 2k - 1$, são mutuamente disjuntos não existe ponto de W_{k-1} fixado por f_1^k , dessa forma as órbitas de f_1^k não passam por W_{k-1} , conseqüentemente essas órbitas são também órbitas de f^k e portanto $\text{FIX}(f_1^k) \subset \text{FIX}(f^k)$.

Por fim, vamos estender a igualdade em torno de $w_{k-1}(-1, +1)$. Pelo teorema 2.21 podemos assumir que existe uma homotopia constante em uma vizinhança de $FIX(f^n)$ que não altera $FIX(f^n)$ e que valida a igualdade em uma vizinhança de V'_0 tal que $w_0(-1, +1) \subset V'_0 \subset V_0 \subset U_0 = \mathbb{R}^m$.

Assim a igualdade $f(t, x) = (t, \lambda\rho(t), 0) \in U_0$ ocorre em $w_{k-1}[-1, 1]$ e em uma vizinhança das extremidades desse arco, em particular essa igualdade ocorre em vizinhanças dos segmentos $w_{k-1}(-1, -1 + \delta]$ e $w_{k-1}[1 - \delta, 1)$.

Logo, podemos deformar f de modo que a igualdade ocorra em uma vizinhança de $w_{k-1}[-1 + \delta, 1 - \delta]$. Essa deformação pode ser arbitrariamente pequena e não altera $FIX(f^k)$. Portanto assumiremos que a igualdade desejada ocorre em uma vizinhança de $w_{k-1}(-1, 1)$.

Etapa 4: Assumiremos que existem vizinhanças mutuamente disjuntas $\{V_i\}$ tais que:

1. $w_i \subset V_i \subset U_i = \mathbb{R}^m$.
2. $f(V_i) \subset V_{i+1}$.
3. $w_i(t) = (t, 0) \in \mathbb{R}^m = U_i$.
4. Para $i = 0, \dots, k-2$, as restrições $f|_{V_i^-}, f|_{V_i^+}$ são homeomorfismos e $f(V_i^0) = z_{i+1}$.
5. $V_0 = \{(t, x) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}^{m-1}; |x| < \rho(t)\}$ onde $\rho : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma função que satisfaz $\rho(-1) = \rho(1) = 0, \rho(t) > 0$ para $-1 < t < 1$.

Lema 5.10 *Existe uma homotopia arbitrariamente pequena e constante em uma vizinhança de $FIX(f^k)$ e em todos os caminhos $w_i[-1, 1]$, para cada $i = 0, \dots, k-1$. Após a realização dessa homotopia as condições acima são satisfeitas. Além disso existe um número $\gamma_1 > 0$ tal que:*

1. Se $(t, x) \in V_i \subset U_i = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ e $|t| \leq \gamma_1$ então

$$f(t, x) = (t', x') \in V_{i+1} \subset U_{i+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$$

implica que $t' = t$.

2. Se $|t| \geq \gamma_1$ então $|t'| \geq \gamma_1$.

PROVA: Modificaremos um pouco a construção da etapa 2 para demonstrar esse resultado. Consideremos a vizinhança $V_0 = \text{int}((D_0 \cup D_+ \cup D_-))$ da etapa 2. Fixemos um número $0 < \gamma_1 \leq \delta$. Seja $h : \overline{V}_0 \rightarrow \overline{V}_1$ uma aplicação que leva:

1. $[(-1 + \varepsilon_0, x), (-\gamma_1, x)]$ sobre $[f(-1 + \varepsilon_0, x), (-\gamma_1, \pi_2(f(-1 + \varepsilon, x)))]$.
2. $[(-\gamma_1, 0), (0, x)]$ sobre $[\pi(f(-1 + \varepsilon_0, x)), (0, 0)]$.
3. $[(0, x), (-\gamma_1, x)]$ sobre $[(0, 0), (-\gamma_1, \pi_2(f(1 - \varepsilon_0, x)))]$.

4. $[(-\gamma_1, x), (1 - \varepsilon_0, x)]$ sobre $[(-\gamma_1, \pi_2(f(1 - \varepsilon_0, x))), f(1 - \varepsilon_0, x)]$.

onde $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ denota a projeção sobre o segundo fator. Dessa forma, se γ_1 for suficientemente pequeno então esse resultado é consequência do que foi feito na etapa 2. ■

Tomemos $C_0 = \{(t, x) \in \overline{V_0}; t = 0\} \subset U_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ um subconjunto compacto. Como $f^{k-1}(C_0) = z_{k-1} \in V_{k-1}$ existe uma vizinhança U de C_0 contida em U_0 tal que $f^{k-1}(\overline{U}) \subset V_{k-1}$ (C_0 é convexo, portanto assumiremos que U também é convexo). $(0, \rho(0), 0) \in C_0 \subset U$, e graças a isso, existem números $\lambda > 1$ e $\delta > 0$ tais que $(t, \lambda\rho(t), 0) \in U$ para $|t| \leq \delta$.

Teorema 5.11 *Existe uma homotopia $f_t(0 \leq t \leq 1)$, que altera f apenas em*

$$f^{k-1}(\overline{V_0}) \cup \{\text{uma vizinhança de } z_{k-1}\}$$

tal que $FIX(f_1^k) = FIX(f^k) \cup w_0[-1, 1] \cup \dots \cup w_{k-1}[-1, 1]$

PROVA: Usaremos a construção feita na etapa 3 para o λ que acabamos de encontrar. Assim temos uma homotopia que:

1. Deforma somente em V_{k-1} .
2. Não altera $FIX(f^k)$.
3. Após essa homotopia a igualdade $f^k(t, x) = (t, \lambda\rho(t), 0)$ é válida, para $(t, x) \in \overline{V'_0}$, onde $V'_0 = \{(t, x) \in U_0; |x| \leq \rho_1(t)\}$ e $\rho_1 : [-1, 1] \rightarrow [0, \infty)$ é uma aplicação que satisfaz:
 - $\rho_1(-1) = \rho_1(1) = 0$ e $\rho_1(t) > 0$ para $t \in (-1, 1)$.
 - ρ_1 é linear próximo de -1 e 1 .

Podemos assumir que $\rho_1(t) = k\rho(t)$ com $0 < k < 1$.

Pelo lema 5.10 $f(t, x) = (t, x') \in V'_{i+1}$, pois para cada $(t, x) \in V'_i$ com $|t| \leq \delta$, $(t', x') = f^{k-1}(t, x)$ implica que $t = t'$. Consequentemente

$$f(t, x') = f(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda\rho(t), 0)$$

para $(t, x') \in f^{k-1}(\overline{V'_0})$ e $|t| \leq \delta_1$. Como z_{k-1} não está em $FIX(f^k)$ podemos estender a igualdade $f(t, x') = (t, \lambda\rho(t), 0)$ em uma vizinhança de W' de z_{k-1} . Consideremos $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ suficientemente pequenos para que:

$$\{(t, x) \in f^{k-1}(V_0); |t| \leq \delta_2\} \subset W'.$$

Sejam $W = f^{-1}(\{(t, x) \in U_0; |t| \leq \delta_2\}) \cap \text{int}(W')$, $\eta : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função da seguinte forma:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in [-1, -\delta_2] \cup [\delta_2, 1] \\ -\frac{1}{\delta_2}t & \text{para } t \in [-\delta_2, 0] \\ \frac{1}{\delta_2}t & \text{para } t \in [0, \delta_2] \end{cases}$$

e $h : \overline{f^{k-1}(V'_0)} \rightarrow U_0 = \mathbb{R}^m$ uma outra aplicação dada pela fórmula

$$h(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda|x|\eta(t)\frac{\rho(t)}{\rho_1(t)}, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$$

(esta aplicação está bem definida, pois a restrição de f^{k-1} em V_0 só não é injetora em $\{(0, x)\}$ mas nesse caso o lado direito da equação será $(0, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2} = U_0$).

Observemos que se $|t| \geq \delta_2$, $\lambda > 1$ e $\rho(t) \geq \rho_1(t)$ então

$$h(f^{k-1}(t, x)) = (t, \lambda|x|\eta(t)\frac{\rho(t)}{\rho_1(t)}, 0) = (t, x)$$

se e somente se $x = 0$.

Seja $(t, x) \in \partial f^{k-1}(V'_0)$ segue que $|t| = \delta_2$. De fato, se $|t| < \delta_2$ então teríamos

$$(t, x) \in \text{int}(W') \cap f^{-1}(\{(t, x) \in V'_0; |t| < \delta_2\}) \subset \text{int}(W)$$

o que contradiz o fato de $(t, x) \in \partial W$.

Por outro lado, se $|t| > \delta_2$ então $f(t, x) = (t, \lambda\rho(t), 0)$ mas isso contradiz

$$(t, x) \in W = \{(t, x) \in W'; f(t, x) = (t', x') \in U_0 \text{ implica que } |t'| \leq \delta_2\}.$$

Pela observação acima estenderemos h para $\partial W \setminus f^{k-1}(V'_0)$ tomando $h(t, x) = f(t, x)$. Desse modo, temos uma aplicação $h : \overline{f^{k-1}(V'_0)} \cup \partial W \rightarrow U_0$ que satisfaz $h(t, x) = (t, x^*)$, isto é, h fixa a primeira coordenada sem alterar muito as outras. Por sua vez, h pode ser estendida para uma aplicação $h : \overline{f^{k-1}(V'_0)} \cup \overline{W} \rightarrow U_0$ de forma a continuar preservando as coordenadas.

Defina uma função $\xi : M \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz:

$$\xi(z) \neq 0 \text{ se, e somente se, } z \in M \setminus w_{k-1}[-1, 1].$$

Dai, temos que:

$$f_1(t, x) = h(t, x) + (\xi(t, x), 0) = (t + \xi(t, x), x).$$

Como $f_1(z) = f(z)$ para $z \in \partial(f^{k-1}(V'_0) \cup W)$ podemos estender f_1 para M tomando $f_1(z) = f(z)$. Consequentemente f é homotópica a f_1 , pois elas diferem apenas no conjunto $\overline{f^{k-1}(V'_0)} \cup \overline{W}$ que é levado por f_1 em $U_0 = \mathbb{R}^m$.

Notemos que se $|t| \leq \delta_2$ temos que:

$$f_1(f^{k-1}(t, x)) = f(f^{k-1}(t, x) + (\xi(t, x), 0)) = (t + \xi(t, x), x^*) = (t, x)$$

se e somente se $x = 0$.

Por fim, mostraremos que:

$$FIX(f_1^k) = FIX(f^k) \cup w_0[-1, 1] \cup \cdots \cup w_{k-1}[-1, 1].$$

Observe que

1. $f(z) = f_1(z)$ para $z \in FIX(f^k)$.
2. $f_1^k(w_0(t)) = f_1(f^{k-1}(w_0(t))) = w_0(t)$,

e assim $FIX(f_1^k) \supset FIX(f^k) \cup w_0[-1, 1] \cup \cdots \cup w_{k-1}[-1, 1]$.

Consideremos uma órbita de f_1^k . Se essa órbita evita $f^{k-1}(V'_0) \cup W$ então ela é uma órbita de f^k . Resta mostrar que $(t, x) \in f^{k-1}(V'_0) \cup W$ é fixado por f_1^k se, e somente se, $x = 0$.

Contudo, se $x = 0$ então $f_1^{k-1}(t, 0) = (t, 0)$. Agora, se $f_1^k(t, x) = (t, x) \in f^{k-1}(V'_0)$, podemos dizer que $(t, x) = f^{k-1}(t', x')$ para $(t', x') \in V'_0$, de forma que $t = 0 \Leftrightarrow t' = 0$, assim se $t = t' = 0$ então $(t, x) = z_{k-1} = (0, 0) \in V_{k-1}$.

No caso $t, t' \neq 0$, temos que $(t, x) = f^{k-1}(t', x')$ e

$$(t, x) = f_1^k(t, x) = f^{k-1}(f_1(t, x))$$

f^{k-1} é injetora em $\{(t, x) \in V_0; t \neq 0\}$ segue que $f_1(t, x) = (t', x')$. Por $(t, x) = f^{k-1}(t', x')$ temos que $x' = 0$. De fato, se $x' \neq 0$ então pela fórmula de f_1 em $f^{k-1}(V'_0)$ teríamos $f_1(f^{k-1}(t', x')) = (t^*, x^*)$ então $|t'| \delta_2$ implicaria $|x^*| > |x'|$. Por outro lado, $|t'| \delta_2$ implicaria que $t' \neq t^*$.

Se $(t, x) \in W \setminus w_{k-1}[-1, 1]$, denotaremos $f_1(t, x) = (t', x')$. Por conseguinte:

$$f_1(t, x) = (t + \xi(t, x), x^*).$$

Portanto $t \neq t'$. Além disso $|t'| \geq \delta_2$ e assim $f^{k-1}(t', x') = (t'', x'') \in V_{k-1}$ o que implica que $t'' = t'$. Dessa forma:

$$(t, x) = f_1^k(t, x) = f^{k-1}(t', x') = (t'', x'')$$

o que contradiz $t \neq t' = t''$. ■

Etapa 5: Denotaremos $T = w_0[-1, 1] \cup f \circ w_0[-1, 1] \cup \cdots \cup f^{k-1} \circ w_0[-1, 1]$.

Lema 5.12 *Existe uma homotopia $h_t : M \rightarrow M$ que satisfaz:*

1. $h_0 = id_M$.
2. $h_t(T) \subset T$.

3. h_t é um homeomorfismo para $t < 1$ e $f_1 : M \setminus T \rightarrow M \setminus \{y_0, \dots, y_{l-1}\}$ é um homeomorfismo.

4. O subconjunto de M alterado por essa homotopia intersecta uma vizinhança de $T \setminus \{y_0, \dots, y_{l-1}\}$.

PROVA: Podemos assumir que f satisfaz o teorema 5.11, dessa forma T se fatora em $T = T_0 \cup \dots \cup T_{l-1}$ onde

$$T_i = f^i \circ w_0[-1, 1] \cup f^{i+l} \circ w_0[-1, 1] \cup f^{i+2l} \circ w_0[-1, 1] \cup \dots \cup f^{i+(k-l)} \circ w_0[-1, 1].$$

Segue que cada T_i está conectado a uma componente de $FIX(f^k)$. Além disso $f(T_i) = T_{i+1}$ onde $i = 0, 1, \dots, \text{mod}(k)$ (isto é, $T_i = T_{i+k}$). ■

Neste ponto vamos fazer algumas considerações sobre a homotopia que estamos trabalhando, seja $f_t(x) = h_t \circ f \circ h_t^{-1}(x)$ uma homotopia, ela só possui problemas em $t = 1$ e $x \in \{y_0, \dots, y_{l-1}\}$, contudo

$$h_1 \circ f \circ h_1^{-1}(y_i) = h_1 \circ f(T_i) = h_1(T_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Vamos mostrar que

$$FIX(f_1^k) = (FIX(f_0^k) \setminus T) \cup \{y_0, \dots, y_{l-1}\}.$$

A homotopia é constante em $(FIX(f_0^k) \setminus T) \cup \{y_0, \dots, y_{l-1}\}$, graças a isso

$$(FIX(f_0^k) \setminus T) \cup \{y_0, \dots, y_{l-1}\} \subset FIX(f_1^k).$$

Para cada $x \in FIX(f_1^k)$ temos que:

1. Ou $x \in \{y_0, \dots, y_{l-1}\}$, e nesse caso nada temos a fazer.
2. Ou $x \notin \{y_0, \dots, y_{l-1}\}$. Logo, $h_1^{-1}(x)$ é um único ponto, assim:

$$x = f_1^k(x) = h_1 \circ f^k \circ h_1^{-1}(x).$$

Aplicando h_1^{-1} dos dois lados temos que $h_1^{-1}(x) = f^k \circ h_1^{-1}(x)$. Portanto $h_1^{-1}(x) \in FIX(f^k)$, por conseguinte

$$x \in h_1(FIX(f^k)) = (FIX(f_0^k) \setminus T) \cup \{y_0, \dots, y_{l-1}\}.$$

Capítulo 6

Teorema de Wecken para pontos periódicos

Lema 6.1 *Dada uma auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ e um número natural n , temos f é homotópica a uma aplicação tal que dados um divisor k de n e uma órbita de pontos $\{x_0, \dots, x_{k-1}\} \in \text{FIX}(f^k)$ quaisquer, temos que essa órbita de pontos:*

- *ou representa uma classe de órbitas de Reidemeister que é precedida por uma órbita de MPS.*
- *ou representa uma classe de órbitas de Reidemeister de profundidade k e essa classe de órbita de Reidemeister contém apenas k pontos k -periódicos que está em MPS.*

Além disso, $S_r(f^k)$ é satisfeito em qualquer ponto x_i (para $r \in \mathbb{Z}$).

PROVA: Usaremos indução sobre os divisores k de n . Para $k = 1$, pelo teorema de aproximação (teorema A.3) podemos assumir que $\text{FIX}(f)$ é finito e que f é um PL-homeomorfismo em uma vizinhança de cada ponto que fixa. Então pelo procedimento de cancelamento (teorema 4.1) podemos remover todas as classes não essenciais.

Segue do procedimento de criação (teorema 5.6) que podemos reduzir cada classe essencial a um ponto onde $S_r(f)$ é satisfeito ($r \neq 0$). Se uma classe de Nielsen não essencial de $R(f)$ estiver em MSP então usamos o procedimento de adição (teorema 5.7) para produzir um ponto nessa classe de forma que $S_0(f)$ é satisfeito nesse ponto.

Por indução, suponha que para um determinado divisor k de n tenhamos que para todo divisor l de n menor que k o resultado é válido. Faremos uma homotopia em f para que o lema seja verdadeiro para k . Em razão do lema 5.5 podemos assumir que:

$$P_k(f) = \{x \in \text{FIX}(f^k; f^l(x) \neq x, l < k, l|k\}$$

é finito e que f é um homeomorfismo local próximo de cada ponto de $P_k(f)$ que não altera $\text{FIX}(f^k) \setminus P_k(f)$.

Seja $A \in \text{OR}(f^k)$ uma órbita de classes de Reidemeister. Se A não for precedida por uma órbita de MPS então cada órbita de pontos de A possui comprimento k . Dai, pelo

lema 5.5 substituímos a órbita A por um número finito de órbitas cada uma com índice -1 ou $+1$. Dessa forma, podemos usar o procedimento de cancelamento e apenas um número finito dessas órbitas, todas de mesmo índice, restaram. Se A for não essencial então A desaparece.

Se A for uma órbita essencial e irredutível então A estará em MPS. Por uma consequência do teorema 5.6 segue que podemos substituir A por uma única órbita que satisfaz $S_r(f)$. Se A for uma órbita não essencial em MPS então o procedimento de adição nos auxilia a criar uma órbita de comprimento k que representa A e que satisfaz $S_0(f^k)$.

Agora vamos remover todas as órbitas que não estão em MPS. Pelo lema 5.5 podemos assumir que cada uma dessas órbitas são finitas. Seja uma representação $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$ de uma órbita precedida por uma órbita de MPS.

Pelo procedimento coalescente podemos retirar $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$. Por fim, devemos fazer esse procedimento simultaneamente em todas as órbitas de pontos que estão fora de MPS.

Primeiramente observamos que f é relativamente ε -homotópica em uma vizinhança de $FIX(f^k)$ a uma aplicação com as seguintes propriedades:

1. Existe um arco $w_0^j : [-1, 1] \rightarrow M$ satisfazendo $w_0^j(-1) = y_0^j$, $w_0^j(1) = x_0^j$ e os caminhos $f^k \circ w^j, w_0^j$ são homotópicos com pontos extremos fixados.
2. $w_i^j = f^i \circ w_0^j$ também são arcos.
3. $w_0^j(-1, 1), \dots, w_{2n}^j(-1, 1)$, onde $j \in J$, são mutuamente disjuntos.
4. $f^{-l} \circ w_{k-1}^i(-1, 1)$ são mutuamente disjuntos para $j \in J$.
5. Existe $\varepsilon > 0$ tal que todos os arcos $w_i^j[-1, -1 + \varepsilon], w_i^j[1 - \varepsilon, 1]$ são segmentos.

Pela Etapa 1, somos capazes de encontrar w_0^j para cada $j \in J$ separadamente. Dai, pelo corolário 5.3 mesmo que $w_0^j, w_0^{j'}$ começassem em um mesmo ponto poderíamos considerá-los disjuntos fora dos extremos. Então para um j fixado escolhemos vizinhanças

$$W_0^j \ni w_0^j(-1, 1], \dots, W_{k-1}^j \ni w_{k-1}^j(-1, 1]$$

onde podemos aplicar o procedimento coalescente.

Denotaremos $W^j = W_0^j \cup \dots \cup W_{k-1}^j$. Se essas vizinhanças forem suficientemente pequenas nas extremidades então:

1. $\{W^j\}$ são mutuamente disjuntos.
2. $f^{-l}(W_{k-1}^j)$ são mutuamente disjuntos para $j \in J, 0 \leq l \leq k-1$.

Para $j \in J$ fixado conseguimos uma homotopia $\{f_{j,t}\}$ tal que:

1. $f_{j,0} = f$ e $f_{j,1} = f_j$.
2. $FIX(f_j^k) = FIX(f^k) \setminus \{x_0^j, \dots, x_{k-1}^j\}$.

3. Essa homotopia altera um subconjunto de W_0^j, \dots, W_{k-1}^j .

Por conseguinte, consideremos a homotopia

$$f_t(x) = \begin{cases} f_{j,t}(x) & \text{para } x \in W_0^j, \dots, W_{k-1}^j \\ f(x) & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Provaremos que

$$FIX(f_1^k) = FIX(f^k) \setminus \bigcup_{j \in J} \{x_0^j, \dots, x_{k-1}^j\}.$$

De fato, $FIX(f^k) \setminus \bigcup_{j \in J} \{x_0^j, \dots, x_{k-1}^j\} \subset FIX(f_1^k)$ pois nossa homotopia é constante fora de $\bigcup_{j \in J} W_0^j, \dots, W_{k-1}^j$. Por outro lado, se uma órbita de $FIX(f^k)$ evitar a união $\bigcup_{j \in J} W_0^j, \dots, W_{k-1}^j$ então essa órbita é também uma órbita de f^k , é diferente de todos os x_i^j , e está em $FIX(f^k) \setminus \bigcup_{j \in J} \{x_0^j, \dots, x_{k-1}^j\}$.

Se um elemento dessa órbita está em W_i^j para algum $0 \leq i \leq k-1$ então $f_1(x) \in W_{i+1}^j$ e portanto

$$\begin{aligned} f_1^2(x) &= f_{j,1}(f_1(x)) \\ &\vdots \\ f_1^k(x) &= f_{j,1}^k(x) \end{aligned}$$

$$x = f_{j,1}^k(x) \Rightarrow x \in W_i^j \cap FIX(f_{j,1}^k) \subset FIX(f^k) \setminus \bigcup_j \{x_0^j, \dots, x_{k-1}^j\}.$$

■

Apêndice A

Construção de Hopf

A idéia geométrica deste apêndice é retirar os pontos fixos de uma auto-aplicação do bordo do espaço, deixando apenas os pontos fixos do interior do espaço. A construção que faremos terá a propriedade de alterar o mínimo possível nossa auto-aplicação.

Consideremos K' um refinamento de um complexo simplicial K , uma aplicação simplicial $|f| : |K'| \rightarrow |K|$ induzida pela função simplicial $f : K' \rightarrow K$ e t um p -simplexo não maximal de K' tal que $|t| \subset |f|(|t|)$.

Primeiramente constataremos que $f(t)$ também é um p -simplexo, pois f é uma função simplicial e assim $f(t)$ é um q -simplexo de K tal que $q \leq p$. Contudo, $|t| \subset |f|(|t|)$ e assim $q \geq p$. Consequentemente $q = p$.

Observamos que a imagem de um simplexo maximal s de K' que contém t pela aplicação simplicial f é um simplexo maximal de K . De fato, seja s um simplexo maximal de K' que contém t (s é um m -simplexo com $m > p$), segue pela definição de sua realização geométrica que $|s|$ é aberto em $|K'|$.

Uma vez que K' é um refinamento de K , existe um m -simplexo k de K tal que $|s| \subset |k|$. Dessa forma $|t| \subset |s| \subset |k|$ e $|t| \subset |f|(|t|)$ e portanto os vértices de t estão todos contidos na interseção $k \cap f(t)$.

Lembramos que $f(t)$ é um p -simplexo de K , por conseguinte $k \cap f(t)$ é no máximo um p -simplexo de K . Porém, t é um p -simplexo e assim $k \cap f(t)$ é no mínimo um p -simplexo de K . Assim $k \cap f(t)$ é um p -simplexo de K e $f(t) \subset k$ ($f(t) \neq k$, pois $f(t)$ é um p -simplexo e k é um m -simplexo com $m > p$).

Consideremos L o subcomplexo de K' que consiste de todos os simplexos de K' que não contem t . Dai, construímos o complexo simplicial K'_L que é um refinamento de K' e portanto um refinamento de K . Definiremos uma aplicação $f' : K'_L \rightarrow K$ da seguinte forma:

Para cada vértice v de L defina $f'(v) = f(v)$. Se $t \not\subset t_j$ então $f'(v(t_j))$ será qualquer elemento de $f(t)$, por fim, $f'(v(t))$ será qualquer elemento de $k \setminus f(t)$. Dai, estendemos f' para todo K'_L pela fórmula

$$f'(\{v_0, \dots, v_p\}) = \{f(v_0), \dots, f(v_p)\}$$

para qualquer simplexo $\{v_0, \dots, v_p\}$ de K'_L .

f' é uma função simplicial, conseqüentemente, obtivemos uma aplicação simplicial $|f'| : |K'_L| \rightarrow |K|$ dada por:

$$f'(|v(s)|) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+p} v_i$$

tal que $s = \{v_0, \dots, v_n\}$.

A construção de f' a partir de f e de t é o que chamamos de **Construção de Hopf**. Exibiremos algumas propriedades desta construção:

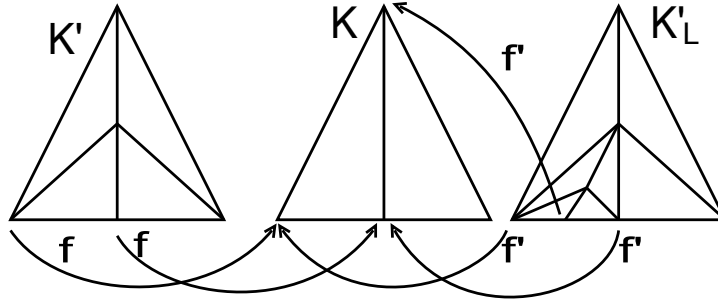


Figura A.1: Construção de Hopf.

1. $|t|$ não possui pontos fixos por f' : De fato, $|t| = \bigcup_{i=1}^r |t_i|$, onde $t_i \in K'_L$ e $v(t) \in t_i$ para $i = 1, \dots, r$. (Lembramos que um complexo simplicial é uma coleção finita de conjuntos finitos e por isso existe um tal número natural r).

Por construção $f'(v(t)) \notin f(t)$ e portanto $f'(t_i) \notin f(t)$ onde $f'(t_i)$ é um l -simplexo com $l \leq p$.

Por outro lado, $|t_i| \subset |t| \subset |f|(|t|)$ e assim $|f'|(|t_i|) \cap |f|(|t|) = \emptyset$ e portanto $|f'|(|t_i|) \cap |t_i| = \emptyset$. Segue que para todo $x \in |t|$ temos que $|f'|(|x|) \neq x$.

2. Da definição de f' temos que $f|_L = f'|_L$. Por conseguinte, se $t \subsetneq t'$ então t' é um q -simplexo de K'_L tal que $q > p$. Portanto, se $x \in |(K'_L)^p|$, isto é, se x pertence a realização geométrica dos p -simplexos de K'_L , e se $|f|(x) \neq x$ segue que $v(t)$ é um vértice de x e por isso $|f'|(|x|) \neq x$.

3. Se $x \in |K'|$ então acontece uma entre as seguintes:

- $x \in |L|$.
- $x \in |t_i|$ onde $t \subsetneq t_i$.
- $x \in |t|$, $|f|(x) \in |f|(|t|)$ e $|f'|(|x|) \in \overline{|s|}$.

No primeiro caso, $|f'|(|x|) = |f|(|x|)$ pela definição de f' .

No segundo caso, $|f|(x)$ está contido na realização geométrica de algum simplexo que contém $f(t)$, pois f é uma aplicação simplicial. Porque $f'(v(t_i)) \in f(t)$ temos que $|f'|(x)$ está em algum simplexo de K que não intercepta $f(t)$.

No terceiro caso, $|f|(x)$ e $|f'|(x)$ estão em realizações geométricas de simplexos diferentes de K , porém, ainda podemos dizer que a união desses simplexos está contida em um terceiro simplexo de K .

Neste sentido $|f'|$ aproxima $|f|$, isto é, para todo $x \in |K'|$ temos que se $|f|(x) \in s_1$ e $|f'|(x) \in s_2$ onde $s_1, s_2 \in K$ então ou $s_1 = s_2$, ou $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ ou existe um terceiro simplexo s_3 em K tal que $s_1 \cup s_2 \subset s_3$.

Teorema A.1 *Considere X um poliedro n -dimensional convexo, $n \geq 1$, e uma aplicação $f : X \rightarrow X$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação $f' : X \rightarrow X$ tal que:*

1. $\#FIX(f')$ é finito.
2. Existe uma triangularização $T' = (K', \tau')$ de X tal que cada ponto fixo de f' está em $\tau'(|x|)$ para algum simplexo maximal x de K' .
3. $d(f, f') < \varepsilon$.

PROVA: Seja $T = (K, \tau)$ uma triangularização de X cuja malha é menor ou igual a $\frac{\varepsilon}{4n}$. Pelo teorema 2.6 existe uma aproximação simplicial $f' : (X, T_r) \rightarrow (X, T)$ de f para algum número natural r .

Por X ser convexo e pelo fato de τ_r ser um homeomorfismo temos que nenhum vértice de K_r é maximal. (X é diferente de pontos isolados porque é um poliedro n -dimensional com $n > 0$).

Segue que se um vértice v_0 de K_r for ponto fixo de $|f'|$, isto é, $|f'|(|v_0|) = |v_0|$, então aplicamos a construção de Hopf para obter um refinamento K' de K_r e uma função simplicial $f'' : K' \rightarrow K$ que não possui nenhum vértice como ponto fixo. Portanto assumiremos que f'' não possui pontos fixos entre seus vértices.

Depois repetimos a construção de Hopf para todos os 1-simplexos não maximais t de K_r tais que $|f'|(|t|) \subset |t|$, para angariar um refinamento K' de K_r e uma função simplicial $f'' : K' \rightarrow K$ que não possui nenhum ponto fixo em um 1-simplexo não maximal. Por conseguinte tomaremos f'' sem pontos fixos em um 1-simplexo não maximal.

Posteriormente, reiteramos a construção de Hopf para os 2-simplexos não maximais t de K_r tais que $|f'|(|t|) \subset |t|$, para obter um refinamento K' de K_r e uma função simplicial $f'' : K' \rightarrow K$ que não possui nenhum ponto fixo em um 2-simplexo não maximal. Consequentemente nos apoderamos de uma f'' sem pontos fixos em um 2-simplexo não maximal. E assim sucessivamente.

Observamos que f'' só desloca os pontos dos simplexos que são gerados por simplexos que possuem pontos fixos, isto é, se tivermos um simplexo cujas faces não possuem pontos fixos por f' então pela forma como refinamos K_r teremos que f'' não altera f' neste simplexo.

Quando aplicamos a construção de Hopf em um simplexo que possui pontos fixados por f' em uma de suas faces teremos que f'' aplicada nestes simplexos, além de não criar novos pontos fixos, destrói os pontos fixados por f' . Neste sentido podemos dizer que a construção de Hopf falha em adicionar pontos fixos na realização geométrica de qualquer simplexo não maximal do refinamento.

Assim aplicando um número finito de vezes a construção de Hopf teremos um refinamento K' de K e uma função simplicial $f' : K' \rightarrow K$ tal que $|f'|$ só fixa pontos da realização geométrica de simplexos maximais. Com isso o item 2 está provado.

Agora vamos provar o item 1: Seja $t \in K'$ um simplexo maximal de K' e suponha que $x, x' \in |t|$ são pontos fixados por $|f'|$. Como $|f'|$ é linear em $\overline{|t|}$, pois $|f'|$ é a linearização da forma como f' foi definida nos vértices de t , temos que para cada número real r tal que $(r)x + (1 - r)x' \in t$ segue que :

$$\begin{aligned} |f'|((r)x + (1 - r)x') &= |f'|((r)x) + |f'|((1 - r)x') \\ &= (r)|f'|x + (1 - r)|f'|x' \\ &= (r)x + (1 - r)x'. \end{aligned}$$

Consequentemente existe ao menos um $y = r'x + (1 - r')x' \in \overline{|t|} \setminus |t|$, onde r' é número real, isto é, y é um ponto fixo de $|f'|$ que pertence a realização geométrica de um simplexo não maximal, o que contradiz a construção que fizemos acima.

Portanto cada realização geométrica de um simplexo maximal de K' possui no máximo 1 ponto fixo. Porque K' é um conjunto finito temos que $|f'|$ possui um número finito de pontos fixos.

Agora vamos provar o item 3: Somente podemos usar a construção de Hopf quando temos um simplexo não maximal tal que $|t| \subset |f'|(|t|)$, assim essa construção move apenas os pontos da realização geométrica de simplexos t' que contenham t .

Por isso, usando o lema 2.7 na forma como usamos a construção de Hopf temos que cada ponto foi deslocado no máximo uma vez para cada dimensão da realização geométrica do simplexo que ele está contido. Como n é a dimensão do poliedro temos que cada ponto move no máximo n vezes.

A terceira propriedade da construção de Hopf garante que cada $x \in X$ se desloca no máximo $2(\text{malha}(T))$ por vez, dessa forma, para cada $x \in X$

$$d(f(x), |f'|x) < n2(\text{malha}(T)) < \frac{n2\varepsilon}{4n} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Consequentemente $d(f, |f'|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

■

Dados espaços métricos X e Y dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma **dilatação** se para quaisquer $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ tivermos:

$$d(f(x), f(y)) > d(x, y)$$

Lema A.2 *Seja $f : s \rightarrow t$ uma função do k -simplexo s no k -simplexo t . Assim se o diâmetro de s for menor que a distância entre o baricentro e o bordo de t então f é uma dilatação.*

Teorema A.3 Teorema de Aproximação: *Seja $f : |K| \rightarrow |K|$ uma auto-aplicação do complexo simplicial K . Então existe um refinamento K' de K e uma função simplicial $g : |K'| \rightarrow |K|$ tais que:*

1. *todo ponto fixo de g está no interior de algum simplexo maximal de $|K'|$ que é dilatado por g .*
2. *toda iterada g^n de g possui apenas um número finito de pontos fixos.*

PROVA: Cada simplexo de dimensão positiva de K possui uma distância positiva entre seu baricentro e seu bordo. Porque K é um conjunto finito tomaremos $\varepsilon > 0$ a menor dessas distâncias. Pelo teorema A.1 existem um refinamento K' de K cujo diâmetro é menor que ε e uma aplicação simplicial $g : |K'| \rightarrow |K|$ homotópica a f tal que cada ponto fixo de g está no interior de algum simplexo maximal de K' .

Devido ao lema A.2 e a escolha do ε temos que a aplicação g se dilata nos simplexos maximais que não se degeneram.

Agora provaremos o item 2: Seja $x \in |K'|$ um ponto fixo de g^n e seja s_j o simplexo de K' tal que $g^j(x) \in |s_j|$ para $j = 0, \dots, n$.

Observemos que $g(g^j(x)) = g^{j+1}(x)$ para $j = 0, \dots, n-1$, conseqüentemente $g(s_j) \subset s_{j+1}$. No caso particular $g(g^{n-1}(x)) = g^n(x) = x$ temos que $s_n = s_0$, dessa forma g não degenera s_j para $j = 0, \dots, n-1$, pois se g degenerasse algum s_j então do fato de g ser uma aplicação simplicial teríamos que s_n seria um simplexo de dimensão menor que s_0 e $s_0 = s_n$ não seria possível.

Seja

$$t = (g|_{|s_0|})^{-1} \circ (g|_{|s_1|})^{-1} \circ \dots \circ (g|_{|s_n|})^{-1}(|s_0|)$$

então t é um simplexo em s_0 que contém x . Pela escolha do ε segue do lema A.2 que $g|_{|s_j|}$ é uma dilatação e assim $g^n : |t| \rightarrow |s_0|$ é uma dilatação. Dessa forma x é o único ponto fixo de g^n em $|t|$, porquê se x' fosse um ponto fixo de g^n em $|t|$ teríamos:

$$d(g^n(x'), g^n(x)) = d(x', x) \underbrace{\leq}_{g^n \text{ é dilatação}} d(g^n(x'), g^n(x))$$

Esta análise garante que dois pontos fixados por g^n não podem dividir uma seqüência s_0, \dots, s_{n-1} de comprimento n de simplexos de K' . Como K' é um conjunto finito existe apenas um número finito de tais seqüências. Portanto g^n possui um número finito de pontos fixos. ■

Apêndice B

Deformação de auto-aplicações

A idéia geométrica deste apêndice é linearizar uma dada auto-aplicação próximo aos seus pontos n -periódicos, para um número natural n previamente fixado. Para tanto, devemos provar primeiramente um lema técnico.

Lema B.1 *Consideremos $B \subset \mathbb{R}^m$ uma PL-bola fechada de dimensão $m \geq 3$, um divisor k de um número natural n (fixados), B_0 e B_1 sub-poliedros tais que $B_0 \subset \text{int}(B_1) \subset B_1 \subset \text{int}(B)$ e $f : B_1 \rightarrow \text{int}(B)$ uma PL-aplicação satisfazendo:*

1. $B_0 \cup f(B_0) \cup f^2(B_0) \cup \dots \cup f^n(B_0) \subset \text{int}(B_1)$.
2. Não existe solução da equação $f^k(x) = x$ em ∂B_0 .
3. Não existe solução da equação $f^l(x) = x$ em B_0 , onde l é um divisor de n menor que k .

Então existe uma PL-homotopia $f_t : B_1 \rightarrow \text{int}(B)$ tal que:

1. f_t é constante em $B_1 \setminus \text{int}(B_0)$
2. f_t satisfaz as hipóteses 1, 2 e 3.
3. f_1 é um homeomorfismo linear próximo de qualquer $x \in \text{FIX}(f_1^k)$.
4. Esta homotopia é arbitrariamente pequena.
5. $\text{FIX}(f_1^n)$ é finito.

PROVA: Por hipótese $f : B_1 \rightarrow \text{int}(B)$ é uma PL-aplicação do poliedro B_1 na PL-bola fechada B , segue que fixada uma triangularização $T = (K, \tau)$ temos que f é linear na realização geométrica de cada simplexo de K .

Observamos que se K' é um refinamento de K então f é também uma PL-aplicação na realização geométrica de K' e por isso assumiremos que K é tão fino que se $x \in \text{FIX}(f^n)$ então $st^2(x) \subset \text{int}(B_0)$ e se $x \neq x' \in \text{FIX}(f^n)$ então $\overline{st^2(x)} \cap \overline{st^2(x')} = \emptyset$, onde

$$st^2(x) = \{y \in B_0; \text{ existe vértice } v \text{ de } K \text{ tal que } x, y \in st(v)\}.$$

Começaremos provando que f pode ser substituída por uma aplicação f_0 que satisfaz:

1. $f|_{B_1 \setminus \text{int}(B_0)} = f_0|_{B_1 \setminus \text{int}(B_0)}$.
2. Os pontos de $\{f_0(v); v \text{ é um vértice de } K \text{ em } \text{int}(B_0)\}$ estão espalhados em $\text{int}(B)$.
3. f_0 está suficientemente próxima de f .
4. Não existe solução da equação $f_0^l(x) = x$ em B_0 , onde l é um divisor de n menor que k .
5. $\text{FIX}(f_0^k) \subset \bigcup_{x \in \text{FIX}(f^k)} \text{st}^2(x)$.
6. Se $x \in \text{FIX}(f^k)$ e $x' \in \text{FIX}(f_0^k) \cap \text{st}^2(x)$ então $f_0(x') \in \text{st}^2(f(x))$.

De fato, obteremos f_0 deslocando f nos vértices contidos em $\text{int}(B)$ e reposicionaremos estes pontos como descrito em 1, 2 e 3. Agora devemos provar que os itens 4, 5 e 6 acontecem.

O item 4 acontece por causa do lema 4.2 e da hipótese 3. Denotemos por:

$$U = \{\text{st}^2(x); x \in \text{FIX}(f^k)\}$$

então $f^k(x) \neq x$ para todo $x \in B_0 \setminus U$. Como f_0 é suficiente próxima de f temos que $\text{FIX}(f_0) \subset U$.

No item 6, para cada $x \in \text{FIX}(f^k)$ fixamos uma vizinhança $V_x \ni x$, satisfazendo $\overline{V_x} \subset \text{st}^2(x)$ e $f(\overline{V_x}) \subset \text{st}^2(x)$ (essa vizinhança existe porque nosso espaço é métrico). Por hipótese f_0 é suficientemente próxima de f assim $f_0(\overline{V_x}) \subset \text{st}^2(x)$ e podemos considerar $\text{FIX}(f_0^k) \cap \text{st}^2(x) \subset V_x$. Portanto se $x \in \text{FIX}(f^k)$ e $x' \in \text{FIX}(f_0^k) \cap \text{st}^2(x)$ então $f_0(x') \in \text{st}^2(f(x))$.

Pelo item 4 $\text{FIX}(f_0^k)$ se fatora em órbitas de comprimento k da seguinte forma:

$$\text{FIX}(f_0^k) = \{x_0^1, \dots, x_{k-1}^1; \dots; x_0^r, \dots, x_{k-1}^r\}$$

para algum número natural r . De fato, se existisse alguma órbita de comprimento l , l um divisor de n menor que k , então teríamos solução da equação $x = f_0^l(x)$, o que contradiz o item 4. Observamos que f_0 está suficientemente próxima de f e por isso satisfaz as hipóteses 1, 2 e 3 deste lema. Tomaremos $f = f_0$.

Agora construiremos uma homotopia f_t com $t \in [0, 1]$ de forma que f_1 seja um homeomorfismo linear em uma vizinhança de cada ponto de:

$$\text{FIX}(f_1^k) \cap \left(\bigcup_{i=1}^r \text{st}(x_0^i) \right).$$

Para qualquer sequência (s_0, \dots, s_{k-1}) de simplexes de K definimos :

$$s_{[s_0, \dots, s_{k-1}]} = \{x \in |s_0|; f^i(x) \in |s_i|, i = 1, \dots, k-1\}.$$

Porquê o complexo K é finito, o poliedro B_0 se fatora em um número finito de tais conjuntos (por exemplo se K possuir d simplexos então existiram no máximo d^k desses conjuntos). Note que cada um desses conjuntos é convexo, pois cada realização geométrica de um simplexo de K é convexo, e que f^k é linear em cada um desses conjuntos pois f é uma PL-aplicação em B_1 .

Se $s_{[s_0, \dots, s_{k-1}]} = s'$ possuir um ponto k periódico, então denotaremos por $V_{s'}$ o subespaço linear de \mathbb{R}^m gerado por $\{x - f^k(x); x \in s'\}$. Consequentemente a dimensão de $V_{s'}$ é limitada superiormente pela dimensão de s' , pois cada ponto fixo de f^k é levado em 0 pela equação $x - f^k(x)$.

Consideremos a união $\bigcup_{s'} V_{s'}$, onde s' está no conjunto dos $s_{[s_0, \dots, s_{k-1}]}$ que possuem pelo menos um ponto fixo de f^k e com dimensão inferior a m . Por conseguinte, $\bigcup_{s'} V_{s'}$ é uma união finita de subconjuntos próprios de \mathbb{R}^m dessa forma existe um ponto $z_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{s'} V_{s'}$, $z_0 \neq 0$ pois $0 \in \bigcup_{s'} V_{s'}$, arbitrariamente próximos de 0 e determinamos $u : B \rightarrow [0, 1]$ uma PL-aplicação dada por:

$$u(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{k-1}^i \in st(v), i = 1, \dots, r. \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Então $u(x) = 1$ para $x \in st(x_{k-1}^i)$ e $u(x) = 0$ para $x \in st(x_j^i)$ com $j \neq k-1$. Definimos $f_1(x) = f_0(x) + u(x)z_0$. Dessa forma f_1 satisfaz:

1. f_1 é constante em $B_1 \setminus int(B_0)$.
2. f_1 satisfaz as hipóteses 1, 2 e 3 deste lema.
3. Os pontos de $\{f_1(v); v \text{ é um vértice de } K \text{ no } int(B_0)\}$ estão espalhados em $int(B)$.
4. Não existe solução da equação $f_1^l(x) = x$ em B_0 , onde l é um divisor de n menor que k .
5. $FIX(f_1^k) \subset \bigcup_{x \in FIX(f^k)} st^2(x)$.
6. Se $x \in FIX(f^k)$ e $x' \in FIX(f_1^k) \cap st^2(x)$ então $f_1(x') \in st^2(f(x))$.
7. f_1 é um homeomorfismo linear próximo de qualquer $x \in FIX(f^k)$.
8. $FIX(f_1^n)$ é finito.

Os itens 1 e 2 são verdadeiros graças a construção de f_0 e da posterior construção de f_1 . No item 3, observamos que os pontos de

$$\{f_1(v); v \text{ é um vértice de } K \text{ no } int(B_0)\}$$

estão muito próximos dos pontos de

$$\{f_0(v); v \text{ é um vértice de } K \text{ no } int(B_0)\}$$

que por sua vez estão espalhados.

O item 4 é consequência do lema 4.2 e de não existir solução da equação $f_0^l(x) = x$ em B_0 , onde l é um divisor de n e $l < k$. Logo não existe solução da equação $f_1^l(x) = x$ em B_0 .

Para provar o item 5 seja $U = \{st^2(x); x \in FIX(f^k)\}$, então $f^k(x) \neq x$ para todo $x \in B_0 \setminus U$. Como z_0 é suficiente próxima de 0 temos que f_1 é suficientemente próximo de f_0 que por sua vez é suficientemente próximo de f e assim $FIX(f_1) \subset U$.

No caso do item 6, para cada $x \in FIX(f_0^k)$ fixemos uma vizinhança $V_x \ni x$, satisfazendo $\overline{V_x} \subset st^2(x)$ e $f(\overline{V_x}) \subset st^2(x)$ (essa vizinhança existe porque nosso espaço é métrico). Como f_1 é suficientemente próximo de f_0 temos que $f_1(\overline{V_x}) \subset st^2(x)$. Portanto consideraremos $FIX(f_1^k) \cap st^2(x) \subset V_x$, e se $x \in FIX(f_0^k)$ e $x' \in FIX(f_1^k) \cap st^2(x)$ então $f_1(x') \in st^2(f_0(x))$.

Para o item 7, basta provar que f_1 é um PL-homeomorfismo em uma vizinhança de cada ponto $x' \in FIX(f_1^k) \cap st^2(x_0^i)$, onde $i = 1, \dots, r$, e, que por sua vez, é suficiente mostrar que qualquer convexo $s' = s_{[s_0, \dots, s_{k-1}]}$ que contém x' é m -dimensional, uma vez que, neste caso, a imagem de um espaço m -dimensional por f será um espaço m -dimensional.

Por absurdo, consideremos x' um ponto de $s' \subset B_0$, onde s' é um subconjunto convexo de dimensão menor que m onde f_0^k é linear, $\{x'_0, \dots, x'_{k-1}\}$ a órbita de $x' = x'_0$ e $x_0^i \in FIX(f^k)$ satisfazendo $x'_0 \in st^2(x_0^i)$. Segue da propriedade 6 que $x'_1 = f_1(x'_0) \in st^2(f(x_0^i)) = st^2(x_0^i)$. Repetindo j vezes esse argumento teremos que $x'_j \in st^2(x_0^i)$ para $0 \leq j \leq k-1$. Assim $u(x'_j) = 0$ para $j \neq k-1$ e $u(x'_{k-1}) = 1$. Consequentemente:

$$\begin{aligned} x'_0 &= f_1^k(x'_0) = f_1(\underbrace{f_0^{k-1}(x'_0)}_{=f_1^{k-1}(x'_0)}) = f_0^k(x'_0) + u(f_0^{k-1}(x'_0))z_0 \\ &\Rightarrow x'_0 - f_0^k(x'_0) = u(f_0^{k-1}(x'_0))z_0 \neq 0 \end{aligned}$$

segue que $z_0 \in V_{s'}$ o que contradiz a escolha que fizemos de z_0 . Portanto a dimensão de s' é no mínimo maior que m , mas como estamos em \mathbb{R}^m temos que a dimensão de s' é igual a m .

Por fim provaremos o item 8. Notemos que qualquer convexo s' em que f_1^k é linear contém no máximo 1 ponto fixo de f_1^k . De fato, se existisse s' com dois pontos periódicos x e x' , como f_1^k é linear para todo número real r tal que $rx + (1-r)x' \in s'$ teríamos:

$$\begin{aligned} f_1^k(rx + (1-r)x') &= f_1^k(rx) + f_1^k((1-r)x') \\ &= rf_1^k(x) + (1-r)f_1^k(x') \\ &= rx + (1-r)x'. \end{aligned}$$

Portanto s' possuiria pontos fixos de f_1^k em seu bordo, mas o bordo de s' é um subconjunto de dimensão menor do que m , o que é um absurdo.

Na construção acima não nos atentamos para a criação pontos de período l , para algum divisor l de n maior que k . Mostraremos que uma homotopia arbitrariamente pequena em uma pequena vizinhança de $FIX(f^k)$ remove estes pontos preservando $FIX(f^k)$.

Tomemos uma órbita $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e uma vizinhança U_0 de x_0 tal que $f^k|_{U_0}$ seja a restrição de um homeomorfismo linear g (identifique $x_0 = 0$ e U_0 uma vizinhança de 0). Assim podemos considerar os seguintes casos:

1. Se 1 não for autovalor de $g^{\frac{n}{k}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (lembrando que k é um divisor de n) então

$$f^n(x) = g^{\frac{n}{k}}(x) \neq x$$

para $x \neq x_0$ na vizinhança $U_0 \cap f^{-1}(U_0) \cap \dots \cap f^{-n}(U_0)$ de x_0 .

2. Se 1 for autovalor de $g^{\frac{n}{k}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ então seja $f'(x) = \lambda(x)f(x)$ onde $\lambda : B_0 \rightarrow (0, \infty)$ é dada por:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \text{ fora de uma vizinhança de } x_0. \\ \lambda' & \text{para o outro caso.} \end{cases}$$

onde λ' é suficientemente próximo de 1 mas $\lambda' \neq 1$, daí segue do caso anterior.

■

Teorema B.2 *Seja n um número natural fixado e $M \subset \mathbb{R}^N$ uma PL-subvariedade compacta com a métrica inerente da métrica euclidiana de \mathbb{R}^N . Então qualquer auto-aplicação $f : M \rightarrow M$ é homotópica a uma auto-aplicação $g : M \rightarrow M$ com:*

1. $\#FIX(g^n)$ finito.
2. g um PL-homeomorfismo próximo de qualquer $x \in FIX(g^n)$.
3. Dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher g satisfazendo $d(f, g) < \varepsilon$.

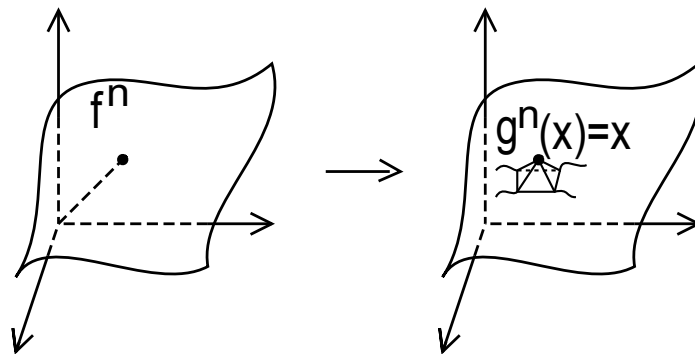


Figura B.1: Linearização de f .

PROVA: A prova deste resultado é feita por indução sobre os divisores de n . Para $k = 1$ segue da Construção de Hopf e de A.3. Ainda destes fatos os pontos fixados de g estão no interior de simplexos maximais e g se dilata nesses simplexos.

Fixemos k um divisor de n e assumimos que $FIX(g^n)$ é finito e g é um PL-homeomorfismo próximo de qualquer ponto fixado por g^l , para um divisor l de n com $l < k$. Transformaremos g em um PL-homeomorfismo próximo de qualquer ponto $x \in P_k(g) = FIX(g^k) \setminus \bigcup_{l|k} FIX(g^l)$, onde $l|k$ significa que l divide k .

Podemos dizer que $P_k(f)$ se fatora em uma quantidade finita de órbitas cada uma com dimensão k , assim:

$$P_k(f) = \{x_0^1, \dots, x_{k-1}^1; \dots; x_0^r, \dots, x_{k-1}^r\}.$$

Tomemos vizinhanças U_i , $i = 1, \dots, k-1$, mutuamente disjuntas que satisfazem:

$$U_i \cap FIX(f^n) = \{x_i^1, \dots, x_i^r\}$$

(lembrando que isso é possível porque nossa variedade possui dimensão maior que 2).

1. Como $FIX(f^n)$ é finito, existe uma PL-vizinhança B satisfazendo:

$$B \cap FIX(f^n) = \text{int}(B) \cap FIX(f^n) = P_k(f).$$

2. Como $P_k(f)$ é f -invariante, existe um sub-poliedro B_1 satisfazendo:

$$P_k(f) \subset \text{int}(B_1) \subset B_1 \subset \text{int}(B) \cap f^{-1}(\text{int}(B))$$

(pois nosso espaço é métrico). Então existe uma PL-variedade B_0 satisfazendo $P_k(f) \subset \text{int}(B_0)$ e

$$B_0 \cup f(B_0) \cup \dots \cup f^n(B_0) \subset \text{int}(B_1).$$

Com isso podemos aplicar o lema B.1 para obter uma homotopia parcial em B_0 e estende-la de forma constante para B_1 . Porquê a homotopia é suficientemente pequena consideraremos $\bigcup_{l|n, l < k} P_l(f)$ constante e que $P_k(f)$ continua no interior de B_0 .

Portanto f_1 , que encontramos no lema B.1, é o PL-homeomorfismo que procurávamos.

■

Referências Bibliográficas

- [V] *Vick, J.W.*, Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology, Springer-Verlag, 2^aed., 1994.
- [Sp] *Spanier, E.H.*, Algebraic Topology, McGraw-Hill, 1968.
- [B] *Brown, R.f.*, The Lefschetz Fixed Point Theorem, Glenview, New York, 1971.
- [J1] *Jiang, B.*, On the least number of fixed points, Amer.J.Math.102(1980)749-763.
- [J2] *Jiang, B.*, Lectures on Nielsen Fixed Point Theory, Contemporary Math, vol.14, Providence, 1983.
- [K] *Kiang, T.H.*, The Theory of Fixed Point Classes, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1989.
- [M] *Munkres, J.R.*, Topology, Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, 2^a ed., 2000.
- [R] *Rudyak, Y.B.*, Piecewise linear structures on Topological Manifolds, Arxiv:math / 0105047v1 [math.AT], 2001.
- [JJ1] *Jeziarski, J.*, Cancelling periodic points, Math. Ann.321(2001), 107-130.
- [JJ2] *Jeziarski, J.*, Wecken's Theorem for periodic points, Topology 42(2003), n°5, 1101-1124.
- [JM] *Jeziarski, J. e Marzantowicz, W.*, Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory, Springer, Netherlands, 2006.