UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma nota sobre o teorema de Borsuk-Ulam

José Roberto Ribeiro Júnior

SÃO CARLOS - SP

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma nota sobre o teorema de Borsuk-Ulam

José Roberto Ribeiro Júnior

Orientador: Prof. Dr. Fábio Gomes Figueira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

R484ns

Ribeiro Júnior, José Roberto.
Uma nota sobre o teorema de Borsuk-Ulam / José Roberto Ribeiro Júnior. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
70 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Topologia algébrica. 2. Teorema de Borsuk-Ulam. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Fábio G. Figueira

Prof. Dr. Fábio Gomes Figueira
DM - UFSCar

Adriana Ramos.

Profa. Dra. Adriana Ramos
DM - UFSCar

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto
ICMC - USP

Dedico este trabalho a meus pais,

a minha irmã, e aos professores

Fernando e Mônica.

Agradecimentos

Ao incentivo dos meus pais Gilda e José Roberto, e da minha irmã Roberta.

Ao Professor Fábio Gomes Figueira por sua orientação e por sua paciência.

A todos os professores deste departamento com os quais tive aulas, os quais contribuiram na minha formação.

Aos professores e amigos Fernando e Mônica que me incentivaram a fazer o mestrado.

Ao apoio de todos os meus amigos que fiz no departamento de matemática.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Muito obrigado a todos!

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar que a função β definida em $\mathcal{F}$ tomando valores em $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções contínuas de S^n sobre $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ é o conjunto de todos os subconjuntos fechados (não vazio) de S^n invariantes pela antipodal, que leva f no conjunto $\{x \in S^n;\ f(x) = f(-x)\}$, é contínua quando a topologia de $\mathcal{F}$ é a topologia induzida pela métrica usual e a topologia sobre $\mathcal{B}$ é a topologia semi finita superior. Ao considerar sobre $\mathcal{F}$ a topologia induzida pela métrica usual, teremos que a topologia mais fina sobre $\mathcal{B}$ tal que a função β é contínua é a topologia semi finita superior.

Abstract

The main objective of this work is to prove that the map β defined on $\mathcal{F}$ and taking values in $\mathcal{B}$, where $\mathcal{F}$ is the set of all continuous functions from S^n to $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{B}$ is the set of all nonempty closed subsets of S^n, invariant under the antipodal map, which assign to each $f \in \mathcal{F}$ the set $\{x \in S^n;\ f(x) = f(-x)\}$, is continuous when the topology of $\mathcal{F}$ is the topology induced by the usual metric, and the topology of $\mathcal{B}$ is the upper semi-finite topology. Considering in $\mathcal{F}$ the topology induced by the usual metric, we will have that the finest topology in $\mathcal{B}$ such that the map β is continuous is the upper semi-finite topology.

Sumário

Introdução

Sejam S^n e $\mathbb{R}^n$ com a topologia induzida pela métrica euclidiana. Consideremos $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua qualquer. Um ponto $x \in S^n$ é chamado de uma *coincidência antipodal para f* se $f(x) = f(-x)$, ou seja, o ponto -x, diametralmente oposto a x em S^n, tem a mesma imagem de x por f. Uma pergunta que surge é: Toda função contínua de S^n sobre $\mathbb{R}^n$ possui coincidência antipodal? A resposta para esta pergunta é dada pelo clássico teorema de Borsuk-Ulam que nos diz que: toda aplicação contínua de S^n sobre $\mathbb{R}^k$ possui coincidência antipodal para $k \leq n$, o qual fizemos um esboço de uma demonstração da versão do teorema para $k = n$.

Consideremos $\mathcal{F}$ como sendo o espaço topológico das funções contínuas de S^n sobre $\mathbb{R}^n$ com a topologia induzida pela métrica da convergência uniforme, $\mathcal{B}$ o conjunto formado pelos fechados não vazio de S^n munido da topologia semi finita superior, que está definida no exemplo 1.1, e β a função de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{B}$ definida por $\beta(f)$ sendo o conjunto de todas as coincidências antipodais de f.

Nosso objetivo neste trabalho é demonstrar que a função β acima citada está bem definida, e para isto usaremos o teorema de Borsuk-Ulam, é contínua e a topologia semifinita superior é a mais fina que torna esta função contínua.

Já que estaremos trabalhando com uma função β sobre o conjunto dos subconjuntos fechados, diferentes do vazio, de S^n que leva uma função contínua no conjunto formado por todas suas coincidências antipodais, uma pergunta que surge é a seguinte: dado qualquer $F \subset S^n$ fechado diferente do vazio, existe alguma função contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que F é o conjunto formado por todas as coincidências antipodais de f, ou seja, β é sobrejetora? A resposta para esta pergunta é sim, existe.

Este trabalho está organizado em 3 capítulos. No capítulo 1 encontra-se todos os pré-requisitos que acreditamos serem necessários para o desenvolvimento dos dois capítulos seguintes.

No capítulo 2 enunciamos e demonstramos a versão do teorema de Borsuk-Ulam citada inicialmente nesta introdução, tomando como principal referência para esta demonstração [3].

No capítulo 3 abrimos as contas do artigo [1] de Gauld, mostrando que quando o espaço $\mathcal{F}$ tem a topologia induzida pela métrica usual a topologia mais fina sobre $\mathcal{B}$ tal que β é contínua é a topologia semi finita superior.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo iremos colocar os resultados necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.1 Topologia

Esta primeira seção possui resultados conhecidos por todos, acredito que exceto pelo primeiro exemplo. Iniciaremos com a seguinte:

Definição 1.1 Um espaço topológico é um par (X, τ) consistindo de um conjunto X e de uma coleção de subconjuntos de X, chamados conjuntos abertos relativamente a τ ou conjuntos τ-abertos, satisfazendo:

i. X e $\emptyset$ pertencem a τ;

ii. se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \tau$ então, $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$;

iii. se $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \tau$ então, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

A coleção τ de conjuntos abertos satisfazendo as três propriedades acima é chamada uma topologia sobre X.

Quando estiver claro qual é a topologia sobre X denotaremos o espaço topológico (X, τ) por X.

Definição 1.2 Seja X um conjunto, dizemos que $\mathcal{C} = \{B_i\}_{i \in J}$ é uma *base sobre* X se $\mathcal{C}$ é uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes condições:

i. para cada $x \in X$ existe $B_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B_x$;

ii. se B_i, $B_j \in \mathcal{C}$, para cada $x \in B_i \cap B_j$ existe $B_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B_x \subset B_i \cap B_j$.

Chamamos os elementos de $\mathcal{C}$ de *abertos básicos.*

Teorema 1.1 *Sejam X um conjunto e $\mathcal{C} = \{B_i\}_{i \in I}$ uma base sobre X. Então, a coleção de todas as reuniões de elementos básicos é uma topologia sobre X, chamada topologia gerada pela base $\mathcal{C}$ e será denotada por $\tau_{\mathcal{C}}$.*

Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é induzido por uma métrica quando seus abertos básicos tem a seguinte forma $B(x_0; r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$, onde x_0 é um elemento arbitrário de X, d é a métrica em X e r é um número real positivo.

Definição 1.3 Dado (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$, dizemos que A é fechado em (X, τ) se o seu complementar $X \setminus A$ é τ-aberto.

Seja (X, τ) um espaço topológico arbitrário e $A \subset X$, podemos induzir uma topologia sobre A, denotemos esta por τ_A, onde esta é formada pela intersecção de todos os τ-abertos com A. Neste trabalho quando falarmos de abertos ou fechados em S^n estaremos pensando em relação ao espaço topológico induzido sobre S^n pela topologia induzida pela métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}^{n+1}$.

Outros dois espaços topológicos que iremos trabalhar, são definidos nos dois seguintes exemplos:

Exemplo 1.1 Consideremos $\mathcal{B}$ sendo o conjunto formado por todos os subconjuntos de S^n que são fechados, não vazios e invariantes com respeito a antípoda. Uma topologia sobre este conjunto $\mathcal{B}$ é a topologia semi finita superior, definida por Michael em [4], que tem como base a seguinte coleção:

$$\mathcal{C} = \{V^{\#} : V \text{ é um subconjunto aberto de } S^n\},$$

onde $V^{\#} = \{C \in \mathcal{B} : C \subset V\}$.

Exemplo 1.2 Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos, podemos considerar o conjunto $X \times Y$ e a coleção $\mathcal{C} = \{U \times V; U \in \tau_X \text{ e } V \in \tau_Y\}$. Esta coleção é uma base sobre $X \times Y$, e a topologia gerada por está base é chamada de *topologia produto*.

Definição 1.4 Dados (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos e $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, dizemos que f é *contínua em relação às topologias* τ *e* τ' ou f *é* $\tau - \tau'$ *contínua* se: para todo conjunto τ'-aberto $V \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(V)$ é τ-aberto.

Um método prático para verificar se uma determinada função é contínua é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 1.2 *Seja* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *e* $\mathcal{C}'$ *uma base para* τ'. *Então,* f *é* $\tau - \tau'$ *contínua se, e somente se, para todo elemento básico* $V \in \mathcal{C}'$ *temos que* $f^{-1}(V) \in \tau$.

Definição 1.5 Suponhamos que τ e τ' são duas topologias sobre um conjunto X. Se $\tau \subset \tau'$, dizemos que τ' é *mais fina* do que τ; se $\tau \subsetneq \tau'$, dizemos que τ' é *estritamente mais fina* do que τ.

Teorema 1.3 (Lema da colagem) *Seja* $X = A \cup B$, *onde* A *e* B *são fechados em* X. *Sejam* $f : A \to Y$ *e* $g : B \to Y$ *funções contínuas. Se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in A \cap B$, *então a função* $h : X \to Y$, *definida abaixo, é contínua*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{se} \quad x \in A \\ g(x), & \textit{se} \quad x \in B \end{cases}$$

Definição 1.6 Seja (X, τ) um espaço topológico, e $a, b \in X$. *Um caminho em* X unindo os pontos a e b é uma função $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

Definição 1.7 Um espaço topológico (X, τ) é *conexo por caminho* se dados $a, b \in X$ quaisquer, existe um caminho em X unindo a e b.

Definição 1.8 Sejam X e Y espaços topológicos; seja $p : X \to Y$ uma aplicação contínua sobrejetora. A aplicação p é dita ser uma *aplicação quociente* contanto que cada subconjunto U é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(U)$ é aberto em X.

Definição 1.9 (Topologia Quociente) Se X é um espaço topológico e A é um conjunto e se $p : X \to A$ é uma aplicação sobrejetora, então existe exatamente uma topologia τ sobre A na qual p é a aplicação quociente; esta é chamada de *topologia quociente* induzida por p.

Definição 1.10 Dada uma coleção $\mathcal{C}$ formada por subconjuntos abertos de um espaço topológico X e um subconjunto Y de X, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *cobertura aberta* de B se B está contido na união de todos os elementos de $\mathcal{C}$.

Definição 1.11 Um espaço métrico X é dito ser *compacto* se para toda cobertura aberta de X existe uma subcobertura finita de X

Proposição 1.1 *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto.*

1.2 Álgebra

Definição 1.12 Dado um grupo G, o *subgrupo comutador* G' é o conjunto de todos produtos (finitos) da forma $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$.

Proposição 1.2 *Se $G \cong H$, então* $\dfrac{G}{G'} \cong \dfrac{H}{H'}$.

Definição 1.13 Espaços vetoriais com dimensão finita V e W sobre um corpo F são ditos *espaços duais* se existe uma função $V \times W \to F$, a imagem de (v, w) sendo escrita por $\langle v, w\rangle$, com as seguintes propriedades:

(i) $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$, $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \langle v, \lambda w\rangle$, $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall w, w_1, w_2 \in W$ e $\forall \lambda \in F$.

(ii) $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in W$ implica que $v = 0$; $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $v \in V$ implica que $w = 0$.

Proposição 1.3 *Dados pares de espaços duais V_1, W_1 e V_2, W_2, e uma aplicação linear $\theta : V_1 \to V_2$, existe uma única aplicação linear $\theta' : W_2 \to W_1$ tal que*

$$\langle \theta(v_1), w_2 \rangle = \langle v_1, \theta'(w_2) \rangle,$$

para todo $v_1 \in V_1$ *e* $w_2 \in W_2$*. E* θ' *é chamada aplicação dual a* θ*.*

Proposição 1.4 *Suponhamos que além das hipóteses do teorema anterior, a aplicação* θ *seja um isomorfismo, então a aplicação dual* $\theta' : W_2 \to W_1$ *de* θ *é um isomorfismo.*

Demonstracão: Sendo θ um isomorfismo, temos que existe a inversa, digamos θ^{-1}, de θ. Pela proposição 1.3, temos que existe $\theta" : W_1 \to W_2$ dual a $\theta^{-1} : V_2 \to V_1$, logo

$$\langle \theta^{-1}(v_2), w_1 \rangle = \langle v_2, \theta"(w_1) \rangle,$$

para todo $v_2 \in V_2,\ w_1 \in W_1$.

Seja qualquer $w_1 \in W_1$ fixo e qualquer $v_1 \in V_1$, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle v_1, (\theta' \circ \theta")(w_1) - w_1 \rangle &= \langle v_1, (\theta' \circ \theta")(w_1) \rangle - \langle v_1, w_1 \rangle \\
&= \langle v_1, \theta'(\theta"(w_1)) \rangle - \langle v_1, w_1 \rangle \\
&= \langle \theta(v_1), \theta"(w_1) \rangle - \langle v_1, w_1 \rangle \\
&= \langle \theta^{-1}(\theta(v_1)), (w_1) \rangle - \langle v_1, w_1 \rangle \\
&= \langle (\theta^{-1} \circ \theta)(v_1), (w_1) \rangle - \langle v_1, w_1 \rangle \\
&= \langle v_1, w_1 \rangle - \langle v_1, w_1 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo, pelo item (ii) da definição 1.13, otemos que $(\theta' \circ \theta")(w_1) = w_1$ para todo $w_1 \in W_1$. Portanto, $(\theta' \circ \theta") = Id_{W_1}$ e, consequentemente, θ' é sobrejetora.

Sejam $w_2,\ w_2' \in W_2$ tais que $\theta'(w_2) = \theta'(w_2')$, então, para cada $v_1 \in V_1$, temos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle v_1, (\theta'(w_2) - \theta'(w_2')) \rangle \\
&= \langle v_1, \theta'(w_2) \rangle - \langle v_1, \theta'(w_2') \rangle \\
&= \langle \theta(v_1), w_2 \rangle - \langle \theta(v_1), w_2' \rangle \\
&= \langle \theta(v_1), w_2 - w_2' \rangle,
\end{aligned}$$

pelo fato de θ ser sobrejetora podemos concluir que $\langle v_2, w_2 - w_2' \rangle = 0$ para todo $v_2 \in V_2$ e, daí obtemos que $w_2 = w_2'$. Portanto θ' é injetora, logo θ' é um isomorfismo. $\square$

Definição 1.14 *Uma sequência de conjuntos com pontos básicos e funções com pontos básicos*

$$(X', x_0') \xrightarrow{f} (X, x_0) \xrightarrow{g} (X'', x_0'')$$

é chamada de sequência exata se

$$Im(f) = Ker(g), \text{ onde } Ker(g) = g^{-1}(x_0'').$$

Definição 1.15 Uma sequência de grupos e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é chamada uma *sequência exata* se, para cada n, $Kerf_n = Imf_{n+1}$.

Denotemos R como sendo um anel comutativo com unidade, e 1_R como sendo a unidade de R.

Definição 1.16 Um *R-módulo* é um grupo abeliano aditivo X, junto com uma função $\mu : R \times X \to X$ tal que:

(i) $\mu(\alpha+\beta, x) = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x)$ e $\mu(\alpha, x+y) = \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y), \forall \alpha, \beta \in R$ e $\forall x, y \in X$

(ii) $\mu[\alpha, \mu(\beta, x)] = \mu(\alpha.\beta, x), \forall \alpha, \beta \in R$ e $\forall x \in X$

(iii) $\mu(1_R, x) = x, \forall x \in X$.

Dado qualquer (α, x), denotemos a imagem desse par pela função μ como sendo $\mu(\alpha, x) = \alpha \cdot x$.

Notemos que se R é um corpo então, um R-módulo é um espaço vetorial, ou seja, um espaço vetorial sobre um corpo R é um exemplo de um R-módulo.

Definição 1.17 Um subconjunto $S \subseteq X$ é dito um *submódulo de X*, se:

(i) S é um subgrupo de X; e

(ii) $\forall x \in S, \forall \alpha \in R$ temos que $\alpha \cdot x \in S$.

Um resultado que facilita a verificação de que dado um subconjunto S de um R-módulo X este é submódulo, é o seguinte:

Teorema 1.4 *Um subconjunto não vazio S de um R-módulo X é um submódulo se:*

(i) $\forall x, y \in S, x - y \in S$; *e*

(ii) $\forall x \in S, \forall \alpha \in R$, $\alpha \cdot x \in S$.

Dado um R-módulo X e S um submódulo de X, denotemos $Q = \dfrac{X}{S}$ como sendo o conjunto de todos os elementos da forma $u + S$ onde $u \in X$. Se considerarmos a função $\mu' : R \times Q$ definida por $\mu'(\alpha, u + S) = \mu(\alpha, u) + S = \alpha \cdot u + S$, teremos que ela satisfaz as condições da definição 1.16. E, portando, Q é um R-módulo.

Seja agora A um subconjunto do R-módulo X, consideremos B como sendo a intersecção de todos os submódulos de X que contem A. Teremos que B será um submódulo de X, e se $B = X$ diremos que A é um *conjunto de geradores de X*, ou que X é gerado por A.

Definição 1.18 Diremos que um R-módulo X é um *R-módulo livre* quando existe um subconjunto $B = \{x_i \in X, i \in I\}$ de X, onde I é um conjunto de índices, satisfazendo:

(i) X é gerado por B;

(ii) se $x_1, x_2, ..., x_n \in B$ e $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = 0$, então $\alpha_i = 0, i = 1, ..., n$.

Sendo X um R-módulo livre gerado por B, o item (i) implicará que dado qualquer $x \in X$, existe um número finito de elementos $x_1, x_2, ..., x_n \in B$ tais que x pode ser escrito como $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n$, com $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$, e o item (ii) implicará que a maneira acima de escrever x é única.

Dado X um conjunto qualquer, uma maneira de obtermos um R-módulo livre gerado por X é construindo o conjunto

$$F(X) = \{\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n : \alpha_i \in R, x_i \in X\}$$

e definirmos a soma entre dois elemento de $F(X)$ e o produto escalar por:

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i) + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda_i) \cdot x_i$$

e

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i) \cdot x_i.$$

Definição 1.19 Um *homomorfismo de um R-módulo X em um R-módulo Y* é uma função $f : X \to Y$, a qual é um homomorfismo do grupo X no grupo Y e preserva a multiplicação escalar.

Notemos que se R for um corpo, temos que f definida acima é uma aplicação linear.

Proposição 1.5 *Sejam X, Y, Z R-módulos, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ homomorfismos, então $g \circ f : X \to Z$ é um homomorfismo.*

Teorema 1.5 *Sejam $F(X)$ o R-módulo livre gerado por X, Y um R-módulo arbitrário e $f : X \to Y$ uma função. Então, existe um único homomorfismo $h : F(X) \to Y$ tal que $h(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.*

1.3 Homologia Singular

Definição 1.20 Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O segmento de reta unindo x a y é definido por

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definição 1.21 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser *convexo* se para todo $x, y \in X$, tem-se $[x, y] \subset X$.

Definição 1.22 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, chamaremos de *Envoltória Convexa de X* e denotaremos por $EC(X)$, o conjunto obtido pela intersecção de todos os subonjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contem X.

Como $\emptyset \neq X \subseteq EC(X)$, temos que $EC(X)$ é não vazio. Além disso, $EC(X)$ é convexo, pois se $x, y \in EC(X)$ temos que x, y pertence a cada um dos convexos que contem X e, portanto, cada um desses convexos contem o segmento de reta com extremidades em x, y e consequentemente este segmento de reta esta contido em $EC(X)$.

Definição 1.23 Dados $x_0, x_1, ..., x_p \in \mathbb{R}^n$ dizemos que eles são *geometricamente independentes* se $x_1 - x_0, ..., x_p - x_0$ são linearmente independentes.

Definição 1.24 Para todo $p \geq 0$, o *p-simplexo* é $EC(X)$, onde $X = \{x_0, x_1, ..., x_p\}$ é geometricamente independentes.

Proposição 1.6 *Sejam $\{x_0, ..., x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Então são equivalentes:*

(i) *$x_1 - x_0, ..., x_p - x_0$ são linearmente independentes;*

(ii) *se $\Sigma s_i x_i = \Sigma t_i x_i$ e $\Sigma s_i = \Sigma t_i$, então $s_i = t_i$ para $i = 1, ..., p$.*

Demonstracão: Ver [7] pag. 2.

Uma consequência da proposição acima é que dado qualquer $x \in EC(\{x_0, ..., x_p\})$ podemos representá-lo de maneira única como $\Sigma t_i x_i$, onde $\Sigma t_i = 1$ e $t_i \geq 0$ para cada i. Deste fato, segue que se fixada uma ordem para os pontos $\{x_0, ..., x_p\}$ podemos representar x por $(t_0, ..., t_p)$, e dizemos que $(t_0, ..., t_p)$ é a *coordenada baricêntrica* de x.

Vamos descrever agora uma forma prática para obter o Envoltório Convexo de X, onde X é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.25 Dado um subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}^n$. Definimos $P(X) = \bigcup\limits_{x,y \in X} [x, y]$, a união de todos os segmentos de reta unindo pontos de X.

Denotemos agora

$$P^m(X) = \overbrace{P\left(P\left(...\left(P(X)\right)\right)\right)}^{m \text{ vezes}},$$

e utilizando esta notação enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 1.6 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que para algum $m > 0$, $P^m(X)$ seja um conjunto convexo; então, $P^m(X) = EC(X)$.*

Para cada $i = 1, .., n$, denotamos e_i como sendo o elemento de $\mathbb{R}^n$ que tem 1 na i-ésima coordenada e zero nas demais.

Definição 1.26 Para todo $n > p \geq 0$, o *p-simplexo padrão* Δ_p é o $EC(\{e_1, ..., e_{p+1}\})$.

Definição 1.27 Dado um espaço topológico X, um *p-simplexo singular* σ é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_p \to X$.

Definição 1.28 Seja $\sigma : \Delta_p \to X$ um p-simplexo singular. Para cada $i = 0, ..., p$; defini-se a *i-ésima face de* σ como sendo o (p-1)-simplexo singular $\partial_i\sigma : \Delta_{p-1} \to X$, dado por:

$$\partial_i\sigma(t_0, ..., t_{p-1}) = \sigma(t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, t_{i+1}, ..., t_{p-1}).$$

Observemos que $\partial_i\sigma$ é a composta de σ com uma aplicação inclusão, e portanto, $\partial_i\sigma$ é contínua.

Dado X um espaço topológico qualquer, denotaremos

$$C_p(X) = \{\phi : \Delta_p \to X; \phi \text{ é contínua }\}.$$

Definição 1.29 Dado R um anel comutativo com unidade, definimos

$$S_p(X, R) = R\text{-}\textit{módulo livre gerado por } C_p(X).$$

E chamamos os elementos de $S_p(X, R)$ de *p-cadeia singular em X com coeficientes em R.*

Observação 1.1 Um elemento de $S_p(X, R)$ é uma soma formal $\displaystyle\sum_{\sigma \in C_p(X)} a_\sigma\sigma$, com $a_\sigma \in R$, onde apenas um número finito de a_σ's não nulos, e $\sigma \in C_p(X)$.

A partir de agora denotaremos $S_p(X, R)$ por $S_p(X)$, exceto quando precisarmos especificar o anel R.

Consideremos $\partial_i : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$, para $i = 0, ..., p$, o operador definido por $\partial_i(\sigma) = \partial_i\sigma$.

Como $C_p(X)$ é uma base de $S_p(X)$, podemos estender linearmente ∂_i para $S_p(X)$ e, assim, obtemos o homomorfismo $\partial_i : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$.

Definição 1.30 O *operador bordo* $\partial : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$ é a aplicação definida por

$$1_R\partial_0 - 1_R\partial_1 + 1_R\partial_2 - \cdots (-1_R)^p\partial_p.$$

Sabendo que dado qualquer elemento $\alpha \in R$ e f sendo um R-homomorfismo tem-se que αf é um homomorfismo, e que se $f, g : S_p(X) \to S_p(X)$ são R-homomorfismos obtêm-se que $f + g$ é um homomorfismo, podemos concluir que o operador bordo é um homomorfismo.

A demonstração do próximo teorema que enunciaremos pode ser encontrado em [6] na página 65 como demonstração do teorema 4.6, onde $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ em [6] não denota a n-ésima face, mas sim o operador bordo.

Teorema 1.7 *Consideremos a sequência abaixo:*

$$\cdots \longrightarrow S_p(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-2}(X) \longrightarrow \cdots,$$

então $\partial \circ \partial = 0$.

Definição 1.31 Dados $\partial : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$ e $\partial : S_{p+1}(X) \to S_p(X)$. Denotemos,

$$Z_p(X) = \{c \in S_p(X); \partial(c) = 0\}$$

e

$$B_p(X) = \{u \in S_p : u = \partial(c) \text{ para algum } c \in S_{p+1}\}.$$

Chamamos os elementos de $Z_p(X)$ e $B_p(X)$ de *p-ciclos* e *p-bordos* respectivamente.

Observando que dados quaisquer $c, d \in Z_p(X)$, qualquer $\alpha \in R$ e sendo ∂ um R-homomorfismo, teremos que

$$\partial(c - d) = \partial(c) - \partial(d) = 0 + 0 = 0$$

e

$$\partial(\alpha c) = \alpha\partial(c) = 0.$$

Logo, pelo teorema 1.4, temos que $Z_p(X)$ é um submódulo do R-módulo $S_p(X)$. Utilizando o teorema 1.7 e a definição 1.31, obtemos que $B_p(X) \subset Z_p(X)$.

Se utilizarmos a definição de $B_p(X)$, o fato de $\partial : S_{p+1}(X) \to S_p(X)$ ser um R-homomorfismo e o teorema 1.4, obtem-se que $B_p(X)$ é um submódulo de $Z_p(X)$. E portanto, existe o R-módulo quociente $\dfrac{Z_p(X)}{B_p(X)}$.

Definição 1.32 Para cada $p \geq 0$, o *p-ésimo R-módulo de homologia (singular) do espaço* X é

$$H_p(X) = \frac{Z_p(X)}{B_p(X)}.$$

As classes laterais $\phi_p + B_p(X)$, onde ϕ_p é um p-ciclo, é chamada a *classe de homologia* de ϕ_p.

A partir daqui estaremos trabalhando não mais com um anel comutativo arbitrário R, mas sim com $R = \mathbb{Z}$.

Definição 1.33 Um *complexo de cadeias* é uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \; ,$$

no qual a composição $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Denotamos o complexo de cadeias acima por $\{C_*, \partial\}$. Um exemplo de complexo de cadeias é $\{S_*(X), \partial\}$, onde $S_*(X) = \{S_n(X)\}$ e $S_n(X)$ é o R-módulo livre gerado por $C_n(X)$ e os homomorfismos são os operadores bordo para n natural, e para n inteiro negativo $S_n(X)$ é o R-módulo nulo e os homomorfismos são os homomorfismos nulos.

Definição 1.34 Dados $\{C_*, \partial\}$ e $\{C'_*, \partial'\}$ dois complexos de cadeias quaisquer. Dizemos que $f : C \to C'$ é uma *aplicação de cadeias* se esta é uma coleção de homomorfismos $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, tal que cada quadrado do diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & {} \\
{} \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & C'_{n-2} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Definição 1.35 Se (C_*, ∂) é um complexo de cadeias, então $Ker(\partial_n)$ é chamado o grupo de *n-ciclos* e denotado por $Z_n(C_*, \partial)$; $Im(\partial_{n+1})$ é o grupo dos *n-bordos* e denotado por $B_n(C_*, \partial)$. Então o *n-ésimo grupo de homologia* deste complexo é

$$H_n(C_*, \partial) = \frac{Z_n(C_*, \partial)}{B_n(C_*, \partial)}.$$

Se $z_n \in Z_n(C_*, \partial)$, então $z_n + B_n(C_*, \partial)$ é chamado da *classe de homologia* de z_n e denotamos por cls z_n.

Para simplificar as notações denotaremos

$$Z_n(C_*, \partial) = Z_n(C_*), \quad B_n(C_*, \partial) = B_n(C_*) \quad \text{e} \quad H_n(C_*, \partial) = H_n(C_*).$$

Seja $f : C \to C'$ uma aplicação de cadeias. Se $c \in Z_i(C)$, então temos que

$$\partial_i'(f_i(c)) = (\partial_i' \circ f_i)(c) = (f_{i-1} \circ \partial_i)(c) = f_{i-1}(\partial_i(c)) = f_{i-1}(0) = 0.$$

E se $b \in B_i$, teremos que existe $a \in C_{i+1}$ tal que $\partial_{i+1}(a) = b$, daí segue que:

$$f_i(b) = (f_i \circ \partial_{i+1})(a) = \partial_{i+1}'(f_{i+1}(a)) \in B_i(C').$$

Portanto, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$f_i(Z_i(C)) \subset Z_i(C')$$

e

$$f_i(B_i(C)) \subset B_i(C').$$

Logo, dada uma aplicação de cadeias $f : C \to C'$, ao definirmos, para cada $i \in \mathbb{N}$, a aplicação $f_{i*} : H_i(C) \to H_i(C')$ por $f_{i*}(c + H_i(C)) = f_i(c) + H_i(C')$, verifica-se que está bem definida e é um homomorfismo.

Consideremos agora X, Y sendo dois espaços topológicos arbitrários e $f : X \to Y$ uma função contínua qualquer. E, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_\# : C_n(X) \to S_n(Y)$ por $f_\#(\phi) = f \circ \phi$. Como $S_n(X)$ é um R-módulo livre gerado por $C_n(X)$, podemos estender linearmente a função acima, obtendo, para cada n, o homomorfismo $f_{\#} : S_n(X) \to S_n(Y)$ dado por

$$f_{\#}\left(\sum_{\phi \in C_n(X)} a_\phi \phi\right) = \sum_{\phi \in C_n(X)} a_\phi \left(f \circ \phi\right).$$

A aplicação $f_{\#}$ é uma aplicação de cadeias de $S_*(X)$ em $S_*(Y)$. E daí segue que

$$f_{\#}\left(Z_n(X)\right) \subset Z_n\left(Y\right) \;\; e \;\; f_{\#}\left(B_n(X)\right) \subset B_n\left(Y\right).$$

Logo podemos obter para cada i o homomorfismo $(f_{\#})_{i*} : H_i(X) \to H_i(Y)$.

Para simplificar as notações escreveremos $(f_{\#})_{i*} = f_{i*}$.

Teorema 1.8 *Se X é um espaço conexo por caminho não vazio, então $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Além disso, se $x_0,\ x_1 \in X$, então $cls\ x_0 = cls\ x_1$ é um gerador de $H_0(X)$.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [6] na página 70, e uma consequência desse teorema é a seguinte:

Proposição 1.7 *Sejam X e Y espaços conexos por caminhos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, então o homomorfismo induzido em homologia $f_* : H_0(X) \to H_0(Y)$ é um isomorfismo.*

Definição 1.36 Uma sequência de complexos de cadeias e aplicações de cadeia

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

é uma sequência *exata curta de complexos de cadeias* se

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow D_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

é exata para cada n.

Teorema 1.9 *Dada uma sequência exata curta de complexos de cadeias*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0,$$

existe um homomorfismo $\partial_* : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ para cada n, tal que

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots,$$

é uma sequência exata de grupos abelianos e homomorfismos.

Demonstracão: Ver [3] página 125.

O homomorfismo ∂_* é chamado *homomorfismo conectante.*

Definição 1.37 Se $f, g : (S'_*, \partial') \to (S_*, \partial)$ são aplicações de cadeias, então f e g são *(cadeias) homotópicas*, denotado por $f \simeq g$, se existe uma sequência de homomorfismos $\{P_n : S'_n \to S_{n+1}\}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial'_n = f_n - g_n.$$

A sequência $P = \{P_n\}$ é chamada uma *homotopia de cadeias.*

Definição 1.38 Uma aplicação de cadeia $f : (S'_*, \partial') \to (S_*, \partial)$ é dita uma *equivalência de cadeia* se existe uma aplicação de cadeia $g : (S_*, \partial) \to (S'_*, \partial')$ tal que $g \circ f \simeq 1_{S'_*}$ e $f \circ g \simeq 1_*$. Dois complexos de cadeias são chamados *cadeia equivalentes* se existe uma equivalência de cadeia entre elas.

A demonstração da próxima proposição pode ser encontrada em [7] na página 14.

Proposição 1.8 *Se $f, g : S' \to S$ são cadeias de homotópicas, então $f_* = g_*$.*

Como consequência desta proposição, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.10 *Se $f : S'_* \to S_*$ é uma equivalência de cadeia, então para todo n,*

$$f_{n*} : H_n(S'_*) \to H_n(S_*)$$

é um isomorfismo.

Definição 1.39 Um complexo de cadeia é do *tipo finito* se cada um dos termos C_n é finitamente gerado. Um espaço X é do *tipo finito* se cada um dos grupos de homologia $H_n(X)$ é finitamente gerado.

Lema 1.1 *Se X é um espaço do tipo finito, então existe um complexo de cadeia livre C_* do tipo finito tal que C_* é uma cadeia equivalente a $S_*(X)$.*

Demonstracão: Ver [6] página 387.

1.4 Homologia relativa

Nesta seção iremos definir homologia relativa para que na próxima seção possamos obter a homologia de certos espaços, chamados CW-complexos finitos, de uma maneira diferente.

Definição 1.40 Um *par* (X, A) consiste de um espaço topológico X e de um subespaço $A \subset X$. Dado pares (X, A) e (Y, B), uma *aplicação de pares* $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Se X é um espaço topológico e $A \subset X$, ao considerar $\alpha \in C_n(A)$ podemos identificá-lo com um elemento $\alpha \circ i \in C_n(X)$, onde $i : A \to X$ é a inclusão. Logo, podemos ver $S_n(A)$ como um submódulo de $S_n(X)$. Daí segue que para cada n inteiro não negativo que

$$S_n(X, A) = \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

é um R-módulo.

Além disso, podemos obter o homomorfismo bordo $\partial : S_n(X, A) \to S_{n-1}(X, A)$ como sendo o homomorfismo induzido pelo homomorfismo bordo $\partial' : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$, isto é, o homomorfismo definido por $\partial[\alpha] = [\partial'(\alpha)]$.

Ao denotarmos $S_*(X, A) = \{S_n(X, A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, teremos que $(S_*(X, A), \partial)$ será um complexo de cadeia singular.

Sendo $(S_*(X, A), \partial)$ um complexo de cadeia singular, é possível calcular os grupos de homologia deste complexo.

Definição 1.41 Se (X, A) é um par de espaços topológicos, $(S_*(X, A), \partial)$ é chamado de *complexo singular de cadeia relativa* e o n-ésimo grupo de homologia $H_n(X, A)$ é chamado de *n-ésimo grupo de homologia relativa de* (X, A).

1.5 CW-complexo finito

Consideremos X e Y como sendo espaços topológicos satisfazendo $X \cap Y = \varnothing$ e A um subespaço fechado de X. Podemos considerar o espaço topológico $X \cup Y$, onde um aberto deste novo espaço é formado pela união de um aberto de X com um aberto de Y. Notemos que o fato de X e Y serem disjuntos implica que X e Y são abertos e fechados do espaço $X \cup Y$.

Sejam $f : A \to Y$ uma aplicação contínua e $\sim$ a menor relação de equivalência em $X \cup Y$ tal que $x \sim f(x)$. Podemos considerar então o espaço $\frac{X \cup Y}{\sim}$, e chamamos este espaço, de espaço obtido pela colagem de X a Y via $f : A \to Y$. Denotemos $\frac{X \cup Y}{\sim}$ por $X \bigcup_f Y$.

No caso particular em que $X = D^n$ e $A = S^{n-1}$ chamamos o espaço de n-célula.

Definição 1.42 Um *CW-complexo finito*, X, é um espaço de Hausdorff compacto e uma sequência $X^0 \subseteq X^1 \subseteq ... \subseteq X^n = X$ de subconjuntos fechados tal que

(i) X^0 é um conjunto finito; e

(ii) X^k é homeomorfo a um espaço obtido colando um número finito de k-células a X^{k-1}.

O conjunto X^k é chamado k-esqueleto de X. E dizemos que X é n-dimensional se $X^n = X$ e $X^{n-1} \neq X$.

Dado um CW-complexo finito X, podemos considerar o par de espaços (X^k, X^{k-1}), o próximo teorema dá a sua homologia e sua demonstração pode ser encontrada em [7] página 66.

Teorema 1.11 *Seja X um CW-complexo finito e X^k o k-esqueleto de X, então*

$$H_j(X^k, X^{k-1}) = 0 \text{ para } j \neq k,$$

e $H_k(X^k, X^{k-1})$ é um grupo abeliano com um elemento básico para cada k-célula de X.

O próximo teorema nos permitirá calcular a homologia de um CW-complexo finito X de um modo diferente, mas antes de enunciá-lo iremos considerar a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow S_n(X^{m-1}) \xrightarrow{(j_m)_\#} S_n(X^m) \xrightarrow{i_m} S_n(X^m, X^{m-1}) \longrightarrow 0,$$

onde $j_m : X^{m-1} \to X^m$ é a inclusão e $i_m : S_n(X^m) \to S_n(X^m, X^{m-1})$ é o homomorfismo definido por $a \mapsto a + S_n(X^{m-1})$. Esta sequência é uma sequência exata curta para todo

n. Logo, tomando $m = k,\ k-1$ e $k-2$, teremos pelo teorema 1.9 as seguintes sequências exatas:

$$\cdots \longrightarrow H_k(X^{k-1}) \xrightarrow{(j_k)_*} H_k(X^k) \xrightarrow{(i_k)_*} H_k(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\partial'} H_{k-1}(X^{k-1}) \to \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_{k-1}(X^{k-2}) \xrightarrow{(j_{k-1})_*} H_{k-1}(X^{k-1}) \xrightarrow{(i_{k-1})_*} H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}) \xrightarrow{\partial''} H_{k-2}(X^{k-2}) \to \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_{k-2}(X^{k-3}) \xrightarrow{(j_{k-2})_*} H_{k-2}(X^{k-2}) \xrightarrow{(i_{k-2})_*} H_{k-2}(X^{k-2}, X^{k-3}) \xrightarrow{\partial'''} H_{k-3}(X^{k-3}) \to \cdots$$

Notemos que $\partial'' \circ (i_{k-1})_* = 0$.

Agora podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & H_{k-2}(X^{k-2}) \arrow[d, "(i_{k-2})_*"] \\
H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, "\partial'"] & & H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[urr, "\partial''"] & & H_{k-2}(X^{k-1}, X^{k-2}) \\
H_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[urr, "(i_{k-1})_*"] & & & &
\end{tikzcd}$$

tal que cada triângulo comuta. Daí segue que

$$\partial \circ \partial = (i_{k-2})_* \circ \partial'' \circ (i_{k-1})_* \circ \partial' = 0.$$

E portanto $(C_*(X), \partial)$ é um complexo de cadeia, onde $C_*(X) = \{H_n(X^n, X^{n-1})\}$, consequentemente podemos falar de grupo de homologia de $C_*(X)$.

Teorema 1.12 *Se X é um CW-complexo finito, então $H_k\left(C_*(X)\right) \cong H_k(X)$.*

Demonstracão: Ver [7] página 67.

Agora vamos falar sobre um caso particular de CW-complexo finito, os espaços projetivos reais n-dimensionais.

Seja $\sim$ a menor relação de equivalência em S^n para a qual $x \sim -x$. Consideremos o espaço $\dfrac{S^n}{\sim}$, este é um espaço compacto de Hausdorff. Chamamos este espaço de *espaço projetivo real n-dimensional* e denotamos por RP^n.

Em geral temos que $RP^0 \subset RP^1 \subset \cdots \subset RP^{n-1} \subset RP^n$ para todo $n \geq 1$, sendo RP^0 um conjunto unitário, e $RP^{n+1} \cong D^{n+1} \bigcup_\pi RP^n$, onde $\pi : S^n \to RP^n$ é a aplicação quociente.

Daí segue, pela definição 1.42, que RP^n é um CW-complexo finito. E pela seguinte proposição, que pode ser encontrada em [7] na página 72, temos os seus grupos de homologia.

Proposição 1.9 *Os grupos de homologia de um espaço projetivo são dados por*

$$H_i(RP^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & se & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & se\ i\ ímpar\ , & 0 < i < n \\ \mathbb{Z} & se\ i\ ímpar\ , & i = n \\ 0, & os\ outros\ casos & \end{cases}$$

1.6 Homologia com coeficientes arbitrários

Para definirmos homologia com coeficientes arbitrários é necessário antes definirmos o produto tensorial. Os resultados desta seção referentes ao produto tensorial são baseados em [3].

Definição 1.43 Sejam A, B grupos abelianos, o *produto tensorial* de A, B é o grupo abeliano $A \otimes B$ gerado por todos os símbolos $a \otimes b$, para cada elemento $a \in A$ e cada $b \in B$, sujeitos às relações

$$a_1 \otimes (b_1 + b_2) - a_1 \otimes b_1 - a_1 \otimes b_2$$

e

$$(a_1 + a_2) \otimes b_1 - a_1 \otimes b_1 - a_2 \otimes b_1,$$

para cada $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$.

Observação 1.2 Seja G um grupo abeliano, então $G \otimes \mathbb{Z} \cong G$, e $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{(p,q)}$, onde (p, q) é o maior divisor comum de p e q. A demonstração destes dois isomorfismos consiste em demonstrar que $h : G \otimes \mathbb{Z} \to G$ e $h' : \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_{(p,q)}$ definidos, respectivamente, por $h(g \otimes n) = n.g$ e $h'(a \otimes b) = a.b \bmod(p, q)$ são isomorfismos.

Observação 1.3 Dados dois homomorfismos $f : M_1 \to M_1'$, $g : M_2 \to M_2'$, podemos construir um homomorfismo $f \otimes g : M_1 \otimes M_2 \to M_1' \otimes M_2'$, definido por

$$(f \otimes g)(m_1 \otimes m_2) = (f(m_1)) \otimes (g(m_2)) .$$

Observação 1.4 Dados homomorfismos $f_1, f_2 : M_1 \to M_1'$ e $g_1, g_2 : M_2 \to M_2'$, tem-se que

$$(f_1 \otimes f_2) \circ (g_1 \otimes g_2) = (f_1 \circ g_1) \otimes (f_2 \circ g_2) .$$

Seja (C_*, ∂) um complexo de cadeia e G um grupo abeliano, e consideremos a seguinte sequência

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_{n-1} \otimes G \longrightarrow \cdots ,$$

como cada C_n é um grupo abeliano e G é um grupo abeliano, temos pela definição de produto tensorial que $C_n \otimes G$ é um grupo abeliano para cada n, e utilizando a observação anterior junto com o fato de $\partial \circ \partial = 0$, obtemos que $(\partial \otimes 1) \circ (\partial \otimes 1)$ é o homomorfismo nulo. Logo ao denotarmos tal sequência por $(C_* \otimes G, \partial \otimes 1)$, podemos concluir que $(C_* \otimes G, \partial \otimes 1)$ é um complexo de cadeia.

E utilizando a definição de aplicação de cadeia e a observação 1.4, podemos obter:

Proposição 1.10 *Se $f : C \to D$ é uma aplicação de cadeia, então $f \otimes 1 : C \otimes G \to D \otimes G$ também é.*

Agora já temos o suficiente para definirmos os grupos de homologia com coeficiente em um grupo abeliano arbitrário.

Definição 1.44 Seja (X, Y) um par de espaços. Os grupos de homologia de (X, Y) com coeficientes em G são definidos por

$$H_n(X, Y; G) = H_n(S(X, Y) \otimes G).$$

Escrevemos $H_n(X; G)$ se Y é vazio e $H_*(X, Y; G)$ por $\sum_{n \geq 0} H_n(X, Y; G)$ (soma direta dos grupos de homologia $H_n(X, Y; G)$) .

Lema 1.2 *Seja G um grupo abeliano, e $\alpha : G \to G$ um homomorfismo definido por $\alpha(g) = p \cdot g$. Existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow Ker(\alpha) \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0,$$

onde $\beta(g) = g \otimes 1$.

Demonstracão: Ver [3] página 147.

Quando escrevemos $p \cdot g$ no lema acima, queremos dizer g operado consigo mesmo p vezes.

Dado um espaço topológico X, como já foi visto temos que $S_n(X)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo gerado por $C_n(X)$. Logo ao considerarmos $G = S_n(X)$, podemos obter que $Ker(\alpha) = 0$, e assim obtemos pelo lema acima, para cada n inteiro, a sequência:

$$0 \longrightarrow S_n(X) \xrightarrow{\alpha} S_n(X) \xrightarrow{\beta} S_n(X) \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

E pelo teorema 1.9, obtemos a seguinte sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(X) \xrightarrow{\beta_*} H_n(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots .$$

Esta sequência possibilita calcularmos algumas homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$.

Observação 1.5 Seja $X = RP^r$, para $r > 1$, temos que $\beta_* : H_1(RP^r) \to H_1(RP^r; \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo. De fato, temos que:

$$\cdots \longrightarrow H_1(RP^r) \xrightarrow{\alpha_*} H_1(RP^r) \xrightarrow{\beta_*} H_1(RP^r; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_0(RP^r) \xrightarrow{\alpha_*} H_0(RP^r),$$

Pela proposição 1.9 temos que $H_1(RP^r) \cong \mathbb{Z}_2$ quando $r > 1$. Logo se a é a classe não nula de $H_1(RP^r)$ teremos que $\alpha_*(a) = a.a = 0$, portanto $\alpha_* \equiv 0$ e daí segue que $Ker(\beta_*) = 0$, o que equivale a dizer que β_* é um homomorfismo injetor. Como RP^n é conexo por caminho, pelo teorema 1.8, temos que $\alpha_* : H_0(RP^r) \to H_0(RP^r)$ é um isomorfismo. Logo, o homomorfismo $\partial_* : H_1(RP^r) \to H_0(RP^r)$ é nulo. Portanto, $Im\beta_* = Ker\partial_* = 0$, ou seja, β_* é sobrejetora. Portanto β_* é um isomorfismo.

1.7 Cohomologia

Sejam A, G grupos abelianos, consideremos o conjunto e as operações abaixo: $A \pitchfork G = \{f : A \to G; f$ é um homomorfismo$\}$

$$\begin{array}{rcl} + : A \pitchfork G \times A \pitchfork G & \longrightarrow & A \pitchfork G \\ (f, g) & \longmapsto & f + g : \begin{array}{rcl} A & \to & G \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \bullet : G \times A \pitchfork G & \longrightarrow & A \pitchfork G \\ (a, f) & \longmapsto & a.f : \begin{array}{rcl} A & \to & G \\ x & \longmapsto & a.f(x) \end{array} \end{array}$$

O cojunto $A \pitchfork G$ munido com as duas operações acima tem estrutura de um grupo abeliano. Em alguns livros é denotado $A \pitchfork G$ por $Hom(A, G)$.

Dados quaisquer grupos abelianos A e B, e um homomorfismo $h : A \to B$, podemos definir a operação $h \pitchfork 1 : B \pitchfork G \to A \pitchfork G$ por $(h \pitchfork 1)(f) = f \circ h$. Observemos que se C é um grupo abeliano e $g : C \to A$ um homomorfismo, então

$$\begin{aligned} (g \pitchfork 1) \circ (h \pitchfork 1)(f) &= (g \pitchfork 1)(f \circ h) \\ &= f \circ h \circ g \\ &= ((h \circ g) \pitchfork 1)(f). \end{aligned}$$

Uma outra notação para $f \pitchfork 1$, que pode ser encontrada em alguns livros, é $f^{\#}$.

Se (C, ∂) é um complexo e G é um anel comutativo, então pelo que vimos acima, temos para todo n que $C_n \pitchfork G$ é um G-módulo, e ao denotarmos para cada n $(C \pitchfork G)_n$ por $C_{-n} \pitchfork G$ e $\delta^n = \partial_{-n+1} \pitchfork 1$, teremos que a sequência abaixo

$$\cdots \longrightarrow (C \pitchfork G)_{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} (C \pitchfork G)_n \xrightarrow{\delta^n} (C \pitchfork G)_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é um complexo de cadeias. Logo, faz sentido calcular sua homologia.

Agora iremos definir os grupos de cohomologia de um espaço topológico com coeficientes em um grupo abeliano qualquer.

Definição 1.45 Seja G um grupo abeliano e seja X um espaço topológico. Se $n \geq 0$, então o grupo de n-cocadeia (singular) em X com coeficientes em G é $S_n(X) \pitchfork G$. O grupo de n-cociclos é $Ker\widetilde{\delta}^n$ e é denotado por $Z^n(X;G)$; o grupo de n-cobordos é a imagem de $\widetilde{\delta}^{n-1}$ e é denotado por $B^n(X;G)$, onde $\widetilde{\delta}^n = \delta_{n+1} \pitchfork 1$. O n-ésimo grupo de cohomologia de X com coeficientes em G é

$$H^n(X;G) = \frac{Z^n(X;G)}{B^n(X;G)}.$$

Um elemento $\xi + B^n(X;G)$ de $H^n(X;G)$ é chamada de classe de cohomologia e é denotada por $cls\ \xi$.

Pode se notar, observando o complexo de cadeias e a definição acima, que

$$H^n(X;G) = H_{-n}(S_*(X) \pitchfork G).$$

Dado $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, já vimos que podemos obter uma aplicação de cadeia $f_\# : S_*(Y) \to S_*(X)$, e através de $f_\#$ construir o homomorfismo $f_\# \pitchfork 1 : S_*(X) \pitchfork G \to S_*(Y) \pitchfork G$, este será uma aplicação de cadeia. E assim, a induzida de f em cohomologia é a aplicação $f^* = (f_\# \pitchfork 1)_*$.

Enunciaremos abaixo duas proposições que nos permitirão estabelecer uma certa relação entre $H_{-n}(C \pitchfork G)$ e $H_n(C \otimes G)$ quando G for um corpo e C for um complexo de cadeia no qual cada C_n é finitamente gerado.

Proposição 1.11 *Dado um complexo de cadeia C e um anel G, existe um homomorfismo*

$$H_{-n}(C \pitchfork G) \otimes H_n(C \otimes G) \to G,$$

chamado produto de Kronecker, onde a imagem de $\alpha \otimes \beta$ é escrita por $\langle \alpha, \beta \rangle$. Além disso, se $f : C \to D$ é uma aplicação de cadeia, e $\alpha \in H_n(D \pitchfork G)$ e $\beta \in H_n(C \otimes G)$, então $\langle (f \pitchfork 1)_*(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, (f \otimes 1)_*(\beta) \rangle$.

Demonstracão: Ver [3] pag. 164.

Dados $\alpha \in H_{-n}(C \pitchfork G)$ e $\beta \in H_n(C \otimes G)$, se h e $\sum c_i \otimes g_i$ são representantes de α e β respectivamente, o produto de Kronecker citado no enunciado da proposição acima é definido por $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum h(c_i) g_i$.

Proposição 1.12 *Seja C um complexo de cadeia no qual cada C_n é um grupo abeliano finitamente gerado, e seja F um corpo. Então o produto de Kronecker torna os espaços vetoriais $H_{-n}(C \pitchfork F)$ e $H_n(C \otimes F)$ duais sobre F. Além disso, se $g : C \to D$ é uma aplicação de cadeia, $(g \pitchfork 1)_*$ e $(g \otimes 1)_*$ são aplicações lineares duais.*

Demonstracão: Ver [3] página 165.

Vamos mostrar que $H_1(RP^n \otimes \mathbb{Z}_2)$ e $H_{-1}(RP^n \pitchfork \mathbb{Z}_2)$ são duais. Para isto basta mostrar que o produto de Kronecker satisfaz as propriedades da definição 1.13. Mas antes enunciaremos a seguinte:

Afirmação 1.1 Se $f : (S'_*, \partial') \to (S_*, \partial)$ é uma equivalência de cadeia, então

$$f \otimes 1 : (S'_* \otimes \mathbb{Z}_2, \partial' \otimes 1) \to (S_* \otimes \mathbb{Z}_2, \partial \otimes 1)$$

e

$$f \pitchfork 1 : (S_* \pitchfork \mathbb{Z}_2, \delta) \to (S'_* \pitchfork \mathbb{Z}_2, \delta')$$

são equivalências de cadeia, onde $(f \otimes 1)_n = f_n \otimes 1$ e $(f \pitchfork 1)_n = f_{-n} \pitchfork 1$.

Demonstracão: Se $f : (S'_*, \partial') \to (S_*, \partial)$ é uma equivalência de cadeia, então existe uma aplicação de cadeia $g : (S_*, \partial) \to (S'_*, \partial')$ tal que $g \circ f \simeq 1_{S'_*}$ e $f \circ g \simeq 1_{S_*}$. Logo existem sequências de homomorfismos: $\{P_n : S'_* \to S_{n+1}\}$ e $\{T_n : S_* \to S'_{n+1}\}$ tais que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial'_n = f_n \circ g_n - 1_{S_n}$$

e

$$\partial'_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = g_n \circ f_n - 1_{S'_n}.$$

Consideremos a sequência de homomorfismos $\{P_n \otimes 1 : S'_n \otimes \mathbb{Z}_2 \to S_{n+1} \otimes \mathbb{Z}_2\}$, temos que

$$\begin{aligned}
(\partial_{n+1}\otimes 1)\circ(P_n\otimes 1)+(P_{n-1}\otimes 1)\circ(\partial'_n\otimes 1) &= ((\partial_{n+1}\circ P_n)\otimes 1)+((P_{n-1}\circ\partial'_n)\otimes 1)\\
&= (\partial_{n+1}\circ P_n+P_{n-1}\circ\partial'_n)\otimes 1\\
&= (f_n\circ g_n-1_{S_n})\otimes 1\\
&= ((f_n\circ g_n)\otimes 1)-(1_{S_n}\otimes 1)\\
&= (f_n\otimes 1)\circ(g_n\otimes 1)-(1_{S_n}\otimes 1)\\
&= (f_n\otimes 1)\circ(g_n\otimes 1)-1_{S_n\otimes\mathbb{Z}_2}\\
&= (f\otimes 1)_n\circ(g\otimes 1)_n\simeq(1_{S_*\otimes\mathbb{Z}_2})_n,
\end{aligned}$$

Ao considerarmos a sequência de homomorfismos $\{T_n\otimes 1 : S_n\otimes\mathbb{Z}_2\to S'_{n+1}\otimes\mathbb{Z}_2\}$, podemos obter de forma similar que $(g\otimes 1)_n\circ(f\otimes 1)_n\simeq(1_{S'_*\otimes\mathbb{Z}_2})_n$. Portanto

$$f\otimes 1 : (S'_*\otimes\mathbb{Z}_2,\partial'\otimes 1)\to(S_*\otimes\mathbb{Z}_2,\partial\otimes 1)$$

é uma equivalência de cadeia.

Seja $\{G_n : (S_*\pitchfork\mathbb{Z}_2)_n\to(S'_*\pitchfork\mathbb{Z}_2)_{n+1}\}$ a sequência de homomorfismos, onde $G_n=P_{-n-1}\pitchfork 1$. Como $\delta^n=\partial_{-n+1}\pitchfork 1$ e $\delta'^n=\partial'_{-n+1}\pitchfork 1$, segue para todo n que:

$$\begin{aligned}
\delta'^{n+1}\circ G_n+G_{n-1}\circ\delta^n &= \left(\partial'_{-n}\pitchfork 1\right)\circ(P_{-n-1}\pitchfork 1)+(P_{-n}\pitchfork 1)\circ(\partial_{-n+1}\pitchfork 1)\\
&= \left(\left(P_{-n-1}\circ\partial'_{-n}\right)\pitchfork 1\right)+((\partial_{-n+1}\circ P_{-n})\pitchfork 1)\\
&= \left(\partial_{-n+1}\circ P_{-n}+P_{-n-1}\circ\partial'_{-n}\right)\pitchfork 1\\
&= \left(f_{-n}\circ g_{-n}-1_{S_{-n}}\right)\pitchfork 1\\
&= ((f_{-n}\circ g_{-n})\pitchfork 1)-\left(1_{S_{-n}}\pitchfork 1\right)\\
&= (g_{-n}\pitchfork 1)\circ(f_{-n}\pitchfork 1)-\left(1_{S_{-n}}\pitchfork 1\right)\\
&= (g_{-n}\pitchfork 1)\circ(f_{-n}\pitchfork 1)-1_{S_{-n}\pitchfork\mathbb{Z}_2}\\
&= (g\pitchfork 1)_n\circ(f\pitchfork 1)_n\simeq(1_{S_*\pitchfork\mathbb{Z}_2})_n.
\end{aligned}$$

E obtemos $(f\pitchfork 1)_n\circ(g\pitchfork 1)_n\simeq(1_{S'_*\pitchfork\mathbb{Z}_2})_n$ de forma análoga ao considerarmos a sequência de homomorfismos $\{H_n : (S'_*\pitchfork\mathbb{Z}_2)_n\to(S_*\pitchfork\mathbb{Z}_2)_{n+1}\}$. Portanto $f\pitchfork 1$ é uma equivalência de cadeia. $\square$

Como consequência da proposição 1.9 temos que $H_r(RP^n)$ é finitamente gerado para cada r, logo RP^n é do tipo finito, e pelo lema 1.1 obtemos que existe um complexo de cadeia livre C_* com C_r finitamente gerado para cada r tal que C_* e $S_*(RP^n)$ são cadeias equivalentes. Daí segue que existe uma equivalência de cadeia $h : C_* \to S_*(RP^n)$, e sendo h uma equivalência de cadeia, obtemos pela afirmação 1.1 junto com o teorema 1.10 que

$$(h_r \otimes 1)_* : H_r(C_* \otimes \mathbb{Z}_2) \to H_r(S_*(RP^n) \otimes \mathbb{Z}_2)$$

e

$$(h_r \pitchfork 1)_* : H_{-r}(S_*(RP^n) \pitchfork \mathbb{Z}_2) \to H_{-r}(C_* \pitchfork \mathbb{Z}_2)$$

são isomorfismos.

Pela proposição 1.11 temos que o produto Kronecker torna os espaços vetoriais duais $H_{-r}(C_* \pitchfork \mathbb{Z}_2)$ e $H_r(C_* \otimes \mathbb{Z}_2)$ sobre $\mathbb{Z}_2$.

Como h é uma equivalência de cadeia, temos em particular que h é uma aplicação de cadeia, logo pela proposição 1.11 temos que se $\alpha \in H_{-r}\left(S_*(RP^n) \pitchfork \mathbb{Z}_2\right)$ e $\beta \in H_n\left(C_* \otimes \mathbb{Z}_2\right)$ então $\langle (h_r \pitchfork 1)_* (\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, (h_r \otimes 1)_* (\beta) \rangle$.

Vamos mostrar agora que o produto Kronecker faz com que $H_{-r}\left(S_*(RP^n) \pitchfork \mathbb{Z}_2\right)$ e $H_r\left(S_*(RP^n) \otimes \mathbb{Z}_2\right)$ sejam duais sobre $\mathbb{Z}_2$. Para isto é necessário mostrar que o produto Kronecker satisfaz as duas propriedades da definição 1.13. Através da definição do produto Kronecker pode-se verificar sem dificuldade a primeira propriedade, logo iremos apenas mostrar que o produto Kronecker satisfaz a segunda propriedade.

Se $\alpha \in H_{-r}\left(S_*(RP^n) \pitchfork \mathbb{Z}_2\right)$ e para todo $\theta \in H_r(S_*(RP^n) \otimes \mathbb{Z}_2)$ temos que

$$\langle \alpha, \theta \rangle = 0,$$

então segue que:

$$\langle (h_r \pitchfork 1)_* (\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, (h_r \otimes 1)(\beta) \rangle = 0,$$

para todo $\beta \in H_r(C_* \otimes \mathbb{Z}_2)$.

Como o produto Kronecker faz com que $H_{-r}\left(C_* \pitchfork \mathbb{Z}_2\right)$ e $H_r\left(C_* \otimes \mathbb{Z}_2\right)$ sejam duais sobre $\mathbb{Z}_2$, obtemos que $(h_r \pitchfork 1)_* (\alpha) = 0$, e pelo fato de $(h_r \pitchfork 1)_*$ ser um isomorfismo podemos concluir que $\alpha = 0$.

Seja $\theta \in H_r\left(S_*(RP^n)\otimes\mathbb{Z}_2\right)$ e suponha que para todo $\alpha \in H_{-r}\left(S_*(RP^n)\pitchfork\mathbb{Z}_2\right)$, temos que $\langle\alpha,\theta\rangle = 0$, como $(h_r\otimes 1)_*$ é um isomorfismo, existe $\theta' \in H_r\left(C_*\otimes\mathbb{Z}_2\right)$ tal que $(h_r\otimes 1)_*(\theta') = \theta$. Daí segue que:

$$\begin{aligned}\langle (h_r\pitchfork 1)_*(\alpha),\theta'\rangle &= \langle\alpha,(h_r\otimes 1)_*(\theta')\rangle\\ &= \langle\alpha,\theta\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo $\langle\mu,\theta'\rangle = 0$ para todo $\mu \in H_{-r}(C_*\pitchfork\mathbb{Z}_2)$, já que a igualdade acima vale para todo $\alpha \in H_{-r}(S_*(RP^n)\pitchfork\mathbb{Z}_2)$ e $(h_r\pitchfork 1)_*$ é em particular sobrejetora.

Novamente por termos que o produto Kronecker faz com que $H_{-r}\left(C_*\pitchfork\mathbb{Z}_2\right)$ e $H_r\left(C_*\otimes\mathbb{Z}_2\right)$ sejam duais sobre $\mathbb{Z}_2$, obtemos que $\theta' = 0$. Consequentemente segue que $\theta = (h_r\otimes 1)_*(\theta') = 0$, pois $(h_r\otimes 1)_*$ é um homomorfismo. E assim concluímos que o produto Kronecker faz com que $H_{-r}\left(S_*(RP^n)\pitchfork\mathbb{Z}_2\right)$ e $H_r\left(S_*(RP^n)\otimes\mathbb{Z}_2\right)$ sejam duais sobre $\mathbb{Z}_2$.

Observação 1.6 Em particular o produto Kronecker faz com que $H_{-1}\left(S_*(RP^n)\pitchfork\mathbb{Z}_2\right)$ e $H_1\left(S_*(RP^n)\otimes\mathbb{Z}_2\right)$ sejam duais sobre $\mathbb{Z}_2$ para todo n natural.

Definição 1.46 Um anel R é um *anel graduado* se existem subgrupos aditivos R^n, $n \geq 0$, tais que:

(a) $R = \Sigma_{n\geq 0}R^n$ (soma direta de grupos aditivos);

(b) se $x \in R^n$ e $y \in R^m$ então, $xy \in R^{n+m}$.

Definição 1.47 Dado um anel graduado $R = \Sigma_{n\geq 0}R^n$, um elemento $x \in R$ tem grau n se $x \in R^n$; tais elementos são chamados *homogêneos*. Um ideal I é chamado homogêneo se é gerado por elementos homogêneos.

Lema 1.3 *Se I é um ideal homogêneo em um anel graduado $R = \Sigma_{n\geq 0}R^n$, então $\dfrac{R}{I}$ é um anel graduado; onde $\dfrac{R}{I} = \Sigma\dfrac{R^n+I}{I}$.*

Demonstracão: Ver [6] pag 391.

Definição 1.48 Se $0 \leq i \leq d$, as aplicações $\lambda_i, \mu_i : \Delta^i \to \Delta^d$, definidas por

$$\lambda_i(t_0, ..., t_i) = (t_0, ..., t_i, 0, ..., 0)$$

e

$$\mu_i(t_0, ..., t_i) = (0, ..., 0, t_0, ..., t_i),$$

são chamadas de *face frontal* e *face posterior* respectivamente.

Dado qualquer espaço topológico X e qualquer grupo abeliano G, iremos denotar as seguintes somas diretas diretas por:

$$S^*(X, G) = \sum_{n \geq 0} S_n(X) \pitchfork G; \qquad Z^*(X, G) = \sum_{n \geq 0} Z^n(X, G);$$

$$B^*(X, G) = \sum_{n \geq 0} B^n(X, G) \quad \text{e} \quad H^*(X, G) = \sum_{n \geq 0} H^n(X, G),$$

Além disso, se $\varphi \in S_n(X) \pitchfork G$ e $c \in S_n(X)$, denotaremos $\varphi(c) = (c, \varphi) \in G$.

Definição 1.49 Sejam X um espaço, e R um anel comutativo. Se $\varphi \in S_n(X) \pitchfork R$ e $\theta \in S_m(X) \pitchfork R$, definimos seu produto cup $\varphi \cup \theta \in S_{n+m}(X) \pitchfork R$ por

$$(\sigma, \varphi \cup \theta) = (\sigma \circ \lambda_n, \varphi)(\sigma \circ \lambda_n, \theta)$$

para cada $(n + m)$-simplexo $\sigma \in X$, onde o lado direito é o produto de dois elementos do anel R.

Logo o produto cup define uma função $S^*(X, R) \times S^*(X, R) \to S^*(X, R)$ definida por

$$\left(\sum \varphi_i\right) \cup \left(\sum \theta_j\right) = \sum_{i,j} \varphi_i \cup \theta_j,$$

onde $\varphi_i \in S_i(X) \pitchfork R$ e $\theta_j \in S_j(X) \pitchfork R$.

Lema 1.4 *Se X é um espaço e R é um anel comutativo, então $S^*(X, R)$ é um anel graduado sobre o produto cup.*

Demonstracão: Ver [6] página 393.

Lema 1.5 *Se* $\varphi \in S_p(X) \pitchfork R$ *e* $\theta \in S_q(X) \pitchfork R$, *então*

$$\delta(\varphi \cup \theta) = \delta\varphi \cup \theta + (-1)^p \varphi \cup \delta\theta.$$

Demonstracão: Ver [6] pag. 394.

Temos que $B^*(X,R) \subset Z^*(X,R) \subset S^*(X,R)$, utilizando o lema acima podemos obter que $Z^*(X,R)$ é um subanel de $S^*(X,R)$ e, portanto em particular um anel. Decorre da forma que definimos $Z^*(X,R)$ que este será um anel graduado. Novamente utilizando o lema acima podemos obter que $B^*(X,R)$ é um ideal de $Z^*(X,R)$ e observando como $B^*(X,R)$ é definido notamos que este é homogêneo, para ver com mais detalhes que $Z^*(X,R)$ é uma anel graduado homogêneo e $B^*(X,R)$ é um ideal homogêneo de $Z^*(X,R)$ veja a demonstração do teorema 12.23 em [6] na página 395 . Logo pelo lema 1.3 temos que

$$H^*(X,G) = \frac{Z^*(X,R)}{B^*(X,R)}$$

é um anel graduado, onde a multiplicação é citada na seguinte:

Definição 1.50 A multiplicação $H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \to H^*(X;R)$ é também chamado produto cup, e é definido por

$$cls\varphi \cup cls\theta = cls(\varphi \cup \theta).$$

Definição 1.51 Se X é um espaço e R é um anel comutativo, então o *anel de cohomologia com coeficientes em* R é

$$H^*(X,G) = \sum_{n \geq 0} H^n(X,G).$$

Lema 1.6 *Se* $f : X \to X'$ *é uma aplicação contínua, então*

$$(f_\# \pitchfork 1)(\varphi \cup \theta) = (f_\# \pitchfork 1)(\varphi) \cup (f_\# \pitchfork 1)(\theta).$$

Além disso, se e *é o elemento neutro de* $S^*(X;R)$ *e* e' *é o elemento neutro de* $S^*(X';R)$, *então* $(f_\# \pitchfork 1)(e') = e$.

Demonstracão: Ver [6] página 394, (ressaltemos que o homomorfismo denotado aqui por $f_{\#} \pitchfork 1$ é denotado em [6] por $f^{\#}$).

Um resultado que podemos obter através do lema acima é a seguinte:

Observação 1.7 Dado $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, temos que f produz um homomorfismo de anel $f^* : H^*(Y; R) \to H^*(Y; R)$, definido por

$$f^*(cls\ a) = cls\ (f_{\#} \pitchfork 1)(a).$$

Teorema 1.13 *O anel de cohomologia $H^*(RP^n, \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo ao anel de polinômios $(\mathbb{Z}_2)[x]$ módulo o ideal (x^{n+1}). Em particular, se $\Omega_n \in H^1(RP^n, \mathbb{Z}_2)$ é o elemento não nulo, então o elemento não nulo de $H^k(RP^n, \mathbb{Z}_2)$, para $1 \leq k \leq n$, é Ω_n^k, o produto cup de Ω_n com ele mesmo k vezes.*

Demonstracão: Ver [6] pag. 410.

Um resultado que decorre deste teorema é o seguinte: $(f_{\#} \pitchfork 1)_*(\Omega_m) = 0$, onde Ω_m é o elemento não nulo de $H^1(RP^m, \mathbb{Z}_2)$. Vamos supor que $(f_{\#} \pitchfork 1)_*(\Omega_m) = \Omega_n$, pelo teorema acima temos que Ω_n^{m+1} é o elemento não nulo de $H^{m+1}(RP^n, \mathbb{Z}_2)$ e $\Omega_m^{m+1} = 0$. Daí segue que

$$0 \neq \Omega_n^{m+1} = ((f_{\#} \pitchfork 1)_*(\Omega_m))^{m+1} = (f_{\#} \pitchfork 1)_* \left(\Omega_m^{m+1}\right) = 0,$$

o que é uma contradição (a penúltima igualdade acima decorre de $(f_{\#} \pitchfork 1)_*$ ser um homomorfismo de anel graduado). Portanto $(f_{\#} \pitchfork 1)_*(\Omega_m) = 0$. □

1.8 Homotopia relativa

Definição 1.52 Duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são *homotópicas* se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \to Y$, tal que para todo $x \in X$ tem-se que

$$F(x, 0) = f(x)$$

e

$$F(x, 1) = g(x).$$

Chamamos F por: homotopia entre f e g. Quando isto ocorre, escrevemos $f \simeq g$ (ou $F : f \simeq g$ quando queremos especificar a homotopia) e dizemos que f *é homotópica a* g.

Definição 1.53 Dado dois pares de espaços topológicos (X, A) e (Y, B), duas aplicações contínuas de pares $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são *homotópicas* se existe uma aplicação contínua de pares $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$, tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = g(x),\ \forall x \in X \quad \text{com} \quad F(A \times I) \subset B$$

Chamamos F por *homotopia* de pares entre f e g, e escrevemos $f \simeq g$.

Dados os pares (X, A) e (Y, B), pode-se verificar que a homotopia de pares é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas com domínio em (X, A) e contradomínio em (Y, B).

Observação 1.8 Sejam pares (X, A) e (Y, B) com $B = \{y_0\}$ e $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ aplicações de pares tal que $f \simeq g$, digamos que $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ seja a homotopia de pares entre f e g, temos que $F(A \times I) \subseteq B$, já que F é uma aplicação de pares. Além disso, $f(A) \subseteq B$ e $g(A) \subseteq B$ já que f e g também são aplicações de pares. Logo, $y_0 = F(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ e todo $t \in I$.

Quando $B = \{y_0\}$ como acima, dizemos que y_0 é o ponto básico do espaço Y. E denotaremos a partir de agora (Y, B) por (Y, y_0)

Sejam (X, A) e (Y, y_o) dois pares de espaços topológicos. Como homotopia é uma relação de equivalência, podemos obter o seguinte conjunto:

$$[(X, A), (Y, y_o)] = \{[f]; f : (X, A) \to (Y, y_o) \text{ é uma aplicação contínua}\},$$

onde $[f]$ é uma classe de homotopia.

Dado qualquer par de espaços topológicos (X, x_o), chamaremos este par por espaço básico de X. E as aplicações entre dois espaços com pontos básicos chamaremos de aplicação com ponto básico.

Seja $[h]$ uma classe de equivalência de $[(X, A), (Y, y_0)]$, e $f : (Y, y_0) \to (Y, y_1)$ uma aplicação contínua qualquer com ponto básico . Teremos que $[f \circ h]$ é uma classe de equivalência de $[(X, A), (Y, y_1)]$, e se H é uma homotopia de pares entre h e h' teremos que $f \circ H$ é uma homotopia de pares entre $f \circ h$ e $f \circ h'$. Logo, podemos definir uma aplicação por esta lei, tal aplicação é a que se encontra no seguinte teorema:

Teorema 1.14 *Uma aplicação contínua $f : (Y, y_0) \to (Y, y_1)$ induz um homomorfismo*

$$f_* : [(X, A), (Y, y_0)] \to [(X, A), (Y, y_1)],$$

com as seguintes propriedades.

(i) *Se $f' : Y_0 \to Y_1$ é uma outra aplicação contínua, e $f \simeq f'$, então $f_* = f'_*$.*

(ii) *Se $1 : Y \to Y$ é a aplicação identidade, então 1_* é a função identidade.*

(iii) *Se $g : Y_1 \to Y_2$ é uma outra aplicação contínua, então $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

Observação 1.9 Uma consequência do item (iii) do teorema acima, é que se $f \circ g = h \circ e$ então, $f_* \circ g_* = h_* \circ e_*$.

Definição 1.54 *O grupo fundamental de X*, com ponto básico x_0, escrito por $\pi_1(X, x_0)$ é definido por $\pi_1(X, x_0) = [(I, \partial I), (X, x_0)]$, onde $I = [0, 1]$.

Teorema 1.15 *$\pi_1(X, x_0)$ é um grupo.*

Demonstracão: Ver [3] pag. 65.

A partir de agora, estaremos denotando $(1, 0, ..., 0) \in R^{n+1}$ por s_n como sendo o ponto básico de S^n.

Um resultado interessante, que pode ser encontrado em [6] e [3], é que a menos de isomorfismo temos que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s_1), (X, x_0)]$.

Definição 1.55 Para todo par de espaço topológico (X, x_0) e todo $n \geq 0$,

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_n), (X, x_0)].$$

Quando $n \geq 2$ chamamos $\pi_n(X, x_0)$ de *n-ésimo grupo de homotopia do par* (X, x_0).

Quando estiver claro qual é o ponto básico denotaremos $\pi_n(X, x_0)$ por $\pi_n(X)$.

Iremos colocar como exemplos alguns grupos fundamentais, sendo que seus cálculos podem ser encontrados em [2], a seguir.

Exemplo 1.3 $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$, para qualquer $x \in S^1$.

Exemplo 1.4 $\pi_1(S^n, x) \cong 0$, para qualquer $x \in S^1$ e com $n > 1$.

Exemplo 1.5 $\pi_1(RP^1, [x]) \cong \mathbb{Z}$, para qualquer $[x] \in RP^1$.

Exemplo 1.6 $\pi_1(RP^n, [x]) \cong \mathbb{Z}_2$, para qualquer $[x] \in RP^n$ com $n > 1$.

Vamos mostrar agora, que se $n > 0$, temos que $\pi_0\,(S^n, s_n)$ é um conjunto unitário. Seja $c : (S^0, 1) \to (S^n, s_n)$ definida por $c(-1) = c(1) = s_n$ e $h : (S^0, 1) \to (S^n, s_n)$ uma aplicação com ponto básico. Podemos escolher $v \in S^n$ qualquer diferente de s_n e de $-s_n$, e definamos $H : S^0 \times [0, 1] \to S^n$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{(1-2t)c(s) + 2tv}{\|(1-2t)c(s) + 2tv\|}, & \text{se} \quad (s,t) \in \{-1\} \times [0, \frac{1}{2}] \\ s_n, & \text{se} \quad (s,t) \in \{1\} \times [0,1] \\ \dfrac{(2t-1)h(s) + (2-2t)v}{\|(2t-1)h(s) + (2-2t)v\|}, & \text{se} \quad (s,t) \in \{-1\} \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

esta função é contínua. Já que podemos olhar para ela como a junção de três funções contínuas com domínios fechados, e na única intersecção que existe entre os domínios, no ponto $(-1, \frac{1}{2})$, temos que as funções definidas neste ponto aplicadas nele são iguais, a v, o que nos permite utilizar o Lema da Colagem.

Observemos que $H(s, 0) = c(s)$, $H(s, 1) = h(s)$ e $H(1, t) = s_n$. E assim, concluímos que $\pi_0\,(S^n, s_n)$ é um conjunto unitário para $n > 0$.

Definição 1.56 Seja (X, x_0) um espaço básico. Um *par com ponto básico* x_0 é um par ordenado (X, A) (frequentemente escrito (X, A, x_0)) na qual A é um subespaço de X que contem x_0.

Definição 1.57 Seja (X, A, x_0) e (Y, B, y_0) pares com ponto básico. Uma *aplicação de pares com ponto básico* $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação com ponto básico $f : X \to Y$

com $f(A) \subset B$. Se $f, g : (X, A) \to (Y, B)$, então uma *homotopia de pares com ponto básico* $F : f \simeq g$ é uma aplicação contínua $F : X \times I \to Y$ com

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x) \text{ para todo } x \in X,$$

$$F(x_0, t) = y_0 \text{ para todo } t \in I,$$

$$F(A \times I) \subset B.$$

Definição 1.58 Se (Y, B) e (X, A) são pares com ponto básico, então

$$[(Y, B, y_0), (X, A, x_0)]$$

é o conjunto de todas as classes de homotopias (pares com ponto básico) de aplicações de pares com ponto básico $\beta : (Y, B, y_0) \to (X, A, x_0)$. Frequentemente suprimimos os pontos básicos e escrevemos $[(Y, B), (X, A)]$.

Definição 1.59 Seja $s_n \in S^n$ o ponto básico comum de S^n e D^{n+1}. Para todo $n \geq 1$, o *grupo de homotopia relativa* de um par com ponto básico é

$$\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_{n-1}), (X, A, x_0)]$$

(usualmente abreviamos $\pi_n(X, A, x_0)$ por $\pi_n(X, A)$).

O próximo teorema é um importante resultado que nos ajuda a calcular a homotopia relativa de pares, e a sua demonstração pode ser vista em [6] na página 354. Mas antes de enunciá-lo ressaltaremos que quando falarmos de sequência exata estaremos pensando em sequência exata em conjuntos com ponto básico, onde os "grupos" de homotopia serão os conjuntos e para cada conjunto o seu ponto básico será a classe da aplicação constante.

Teorema 1.16 (Sequência de Homotopia de um Par) *Seja (X, A) um par de espaços com ponto básico, então existe uma sequência exata*

$$\cdots \to \pi_{n+1}(A) \to \pi_{n+1}(X) \to \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{d} \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi_1(A) \to \pi_1(X) \to \pi_1(X, A) \xrightarrow{d} \pi_0(A) \to \pi_0(X).$$

Além disso, $d : \pi_{n+1}(X, A) \to \pi_n(A)$ *é a aplicação* $[\beta] \to [\beta|_{S^n}]$*, enquanto as outras aplicações são as induzidas pelas inclusões.*

Teorema 1.17 *Seja* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *uma aplicação de pares com ponto básico. Então existe um diagrama comutativo com linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_2(X,A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(X,A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_0(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_0(X) \arrow[d, "f_*"'] \\
\cdots \arrow[r] & \pi_2(Y,B) \arrow[r, "d_1"] & \pi_1(B) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_1(Y) \arrow[r, "(j_1)_*"] & \pi_1(Y,B) \arrow[r, "d_1"] & \pi_0(B) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_0(Y)
\end{tikzcd}$$

onde d *e* d_1 *são definidas como a função* d *do teorema anterior e as outras são as induzidas pelas inclusões.*

Demonstracão: Pelo teorema anterior, temos que cada linha é uma sequência exata,

agora vamos mostrar que o diagrama comuta. Primeiro vamos mostrar que dado qualquer $r \geq 1$ o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
\pi_r(X,A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_{r-1}(A) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_r(Y,B) \arrow[r, "d_1"] & \pi_{r-1}(B)
\end{tikzcd}$$

De fato, seja $[h] \in \pi_r(X, A)$ uma classe de homotopia arbitrária, temos que:

$$(f_* \circ d)[h] = f_*(d[h]) = f_*[h|_{S^{r-1}}] = [f \circ h|_{S^{r-1}}] = (*)$$

e

$$(d_1 \circ f_*)\,[h] = d_1[f \circ h] = [f \circ h|_{S^{r-1}}] = (**)$$

Como $(*) = (**)$, seque que $f_* \circ d = d_1 \circ f_*$. Agora consideremos os dois diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "i_1"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & (X,A) \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "j_1"'] & (Y,B)
\end{tikzcd}$$

Observemos que dado qualquer $a \in A$ e qualquer $x \in X$, temos que :

$$(f \circ i)(a) = f(i(a)) = f(a) = i_1(f(a)) = (i_1 \circ f)(a) \Rightarrow f \circ i = i_1 \circ f$$

e

$$(f \circ j)(x) = f(j(x)) = f(x) = j_1(f(x)) = (j_1 \circ f)(x) \Rightarrow f \circ j = j_1 \circ f$$

Portanto, $f \circ i = i_1 \circ f$, $f \circ j = j_1 \circ f$ e, pela observação 1.9, obtemos que $f_* \circ i_* = (i_1)_* \circ f_*$ e $f_* \circ j_* = (j_1)_* \circ f_*$. □

Agora vamos falar de um resultado que relaciona grupo de homotopia com grupo de homologia, o Teorema de Hurewicz, iniciaremos com o seguinte:

Lema 1.7 *Seja $\eta : \Delta_1 \to I$ o homeomorfismo $(1-t)e_0 + te_1 \mapsto t$. Existe uma função bem definida $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ dada por $\varphi[f] = [f\eta]$, onde $f : I \to X$ é um caminho fechado em X com ponto básico x_0.*

Demonstracão: Ver [6] página 80.

Definição 1.60 A função $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ definida no lema acima é chamada *aplicação de Hurewicz.*

Teorema 1.18 *A aplicação de Hurewicz é um homomorfismo.*

Demonstracão: Ver [6] página 80.

Teorema 1.19 (Teorema de Hurewicz) *Se X é conexo por caminho, então a aplicação de Hurewicz é um homomorfismo sobrejetor com núcleo $\pi_1(X, x_0)'$, o grupo comutador de $\pi_1(X, x_0)$. Por isso $\dfrac{\pi_1(X, x_0)}{\pi_1(X, x_0)'} \cong H_1(X)$.*

Demonstracão: Veer [6] página 82.

Observação 1.10 Para todo $n > 1$ a aplicação de Hurewicz $\varphi : \pi_1(RP^n, [x]) \to H_1(RP^n)$ é um isomorfismo. De fato, como $\pi_1(RP^n, [x]) \cong \mathbb{Z}_2$ temos que $ker(\varphi) = \pi_1(RP^n, [x])$ ou $ker(\varphi) = \{0\}$. Se $ker(\varphi) = \pi_1(RP^n, [x])$ teríamos que $\dfrac{\pi_1(RP^n, [x])}{\pi_1(RP^n, [x])} \cong 0$. Por outro lado, temos pelo teorema 1.19 que φ é um homomorfismo sobrejetor e $\dfrac{\pi_1(RP^n)}{\pi_1(RP^n)'} \cong H_1(RP^n)$, já que RP^n é conexo por caminho. Como $\mathbb{Z}_2$ é um grupo abeliano, obtemos que $\mathbb{Z}_2' = \{0\}$ e, consequentemente, $\dfrac{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{Z}_2'} \cong \mathbb{Z}_2$. Pela proposição 1.2, temos que $\dfrac{\pi_1\left(RP^n\right)}{\pi_1\left(RP^n\right)'} \cong \dfrac{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{Z}_2'}$. Logo, $\dfrac{\pi_1\left(RP^n\right)}{\pi_1\left(RP^n\right)'} \cong \mathbb{Z}_2 \ncong \{0\}$ e, portanto, $ker(\varphi) = \{0\}$, ou seja, φ é injetora. Portanto φ é um homomorfismo bijetor, o que acarreta que φ é um isomorfismo.

1.9 Fibração

Definição 1.61 Sejam E e B espaços topológicos. Uma aplicação $p : E \to B$ tem a *propriedade do levantamento de homotopia* com respeito a um espaço topológico X se, para cada duas aplicações $\widetilde{f} : X \to E$ e $G : X \times I \to B$ para os quais $p \circ \widetilde{f} = G \circ i$ (onde $i : X \to X \times I$ é a aplicação $x \mapsto (x, 0)$), existe uma aplicação contínua $\widetilde{G} : X \times I \to E$ fazendo comutar ambos os triângulos abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{G}"] & B
\end{tikzcd}$$

Definição 1.62 Uma aplicação contínua $p : E \to B$ é uma *fibração* se tem a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a todo espaço topológico X. Se $b_0 \in B$ então, $p^{-1}\left(\{b_0\}\right) = F$ é chamado de *fibra*.

Definição 1.63 Uma aplicação contínua $f : A \to B$ é uma *fibração fraca* se tem a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a todo cubo I^n, $n \geq 0$.

Definição 1.64 Um *fibrado localmente trivial* com *fibra* F é uma aplicação $p : E \to B$ para qual existe uma cobertura C de B e homeomorfismos

$$\varphi_V : V \times F \to p^{-1}(V)$$

para todo $V \in C$ tal que

$$p \circ \varphi_V(v, x) = v$$

para todo $(v, x) \in V \times F$. Os conjuntos abertos $V \in C$ são chamados *vizinhanças coordenadas.*

Exemplo 1.7 A aplicação quociente $p_n : S^n \to RP^n$ é um fibrado localmente trivial com fibra $F = p_n^{-1}([z])$, para cada $[z] \in RP^n$ fixado. Definamos $\mathcal{C} = \{U_i\}_1^{n+1}$, onde

$$U_i = \{[(x_1, x_2, ..., x_{n+1})] \in RP^n; x_i \neq 0\}.$$

Para facilitar quando representarmos uma classe por $[v] \in U_i$, v será o representante que tem a sua i-ésima coordenada positiva e dado qualquer $v \in S^n$ representaremos a i-ésima coordenada de v por v_i. Temos, para cada $i = 1, ..., n+1$, que $RP^n - U_i = \Pi_i^{-1}(\{0\})$, onde $\Pi_i : S^n \to \mathbb{R}$ é a projeção sobre a i-ésima coordenada. Como Π_i é contínua e $\{0\}$ é fechado, temos que $RP^n - U_i$ é fechado e, portanto, U_i é aberto. Além disso, dado qualquer $\alpha \in RP^n$, temos que $\alpha = [s]$ para algum $s \in S^n$. Logo, alguma coordenada de s é diferente de zero, (observemos que se a j-ésima coordenada de s é diferente de zero implica que o mesmo ocorre para $-s$), digamos que seja a j-ésima, então $\alpha \in U_j$. Logo, $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta de RP^n. Para cada i definimos $\varphi_{U_i} : U_i \times F \to p_n^{-1}(U_i)$ por

$$\varphi_{U_i}([(v_1, v_2, ..., v_{n+1})], y) = \begin{cases} (v_1, v_2, ..., v_{n+1}), & \text{se} \quad y = z \\ -(v_1, v_2, ..., v_{n+1}), & \text{se} \quad y = -z \end{cases}$$

Suponhamos que $\varphi_{U_i}(\alpha, y) = x$ e $\varphi_{U_i}(\beta, y') = x'$ com $x \neq x'$. Se $x = -x'$ teremos que $y \neq y'$ e se $x \neq -x'$, tendo que $x \neq x'$, obtemos que $\alpha = [x] \neq [x'] = \beta$. Logo $(\alpha, y) \neq (\beta, y')$ e, portanto, φ_{U_i} está bem definida.

Consideremos agora, , as aplicações $\phi_{U_i} : p_n^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ definidas, para cada $i = 1, ..., n+1$, por

$$\phi_{U_i}(v) = \begin{cases} ([v], z), & \text{se} \quad v_i > 0 \\ ([v], -z), & \text{se} \quad v_i < 0 \end{cases}$$

Sejam $v, w \in p_n^{-1}(U_i)$ arbitrários, tais que $\phi_{U_i}(v) \neq \phi_{U_i}(w)$, teremos $y,\ y' \in F$ tais que $\phi_{U_i}(v) = ([v], y)$, $\phi_{U_i}(w) = ([w], y')$ e $([v], y) \neq ([w], y')$, daí segue que $[v] \neq [w]$

ou $y \neq y'$. Se $[v] \neq [w]$, obtemos que $v \neq w$; e se $y \neq y'$, obtemos $v_i.w_i < 0$ o que implica que $w_i \neq v_i$ e, portanto, $v \neq w$. E assim, concluímos que ϕ_{U_i} está bem definida para cada i.

Observemos que dado quaisquer $(\gamma, y) \in U_i \times F$ e $c \in p_n^{-1}(U_i)$, temos que

$$(\phi_{U_i} \circ \varphi_{U_i})(\gamma, y) = \phi_{V_\alpha}(w) = ([w], y) = (\gamma, y),$$

onde w é o representante de γ que contém a i-ésima coordenada positiva caso $y = s_n$ e negativa caso $y = -s_n$, e

$$(\varphi_{U_i} \circ \phi_{U_i})(c) = \varphi_{U_i}(\phi_{U_i}(c)) = \varphi_{U_i}([c], y) = c.$$

Portanto $\varphi_{V_{U_i}}$ é uma bijeção, com inversa ϕ_{U_i}. Vamos mostrar agora que φ_{U_i} é um homeomorfismo.

Podemos de forma análoga a forma que foi demonstrado que U_i é aberto para cada $i = 1, ..., n+1$, mostrar que os seguintes subconjuntos são abertos em S^n

$$S_i = \{v \in S^n; v_i > 0\}$$

e

$$S_{-i} = \{v \in S^n; v_i < 0\}.$$

Seja $U \subset U_i \times F$ um aberto básico, então teremos que $U = V \times \{s_n\}$ ou $U = V \times \{-s_n\}$ ou $U = V \times F = (V \times \{s_n\}) \cup (V \times \{-s_n\})$, onde V é um aberto de U_i. Se $U = V \times \{s_n\}$, então que $\varphi_{U_i}(U) = \{w \in p_{-1}^{n}(V); w_i > 0\} = p_{-1}^{n}(V) \cap S_i$ é aberto em $p_{-1}^{n}(U_i)$, de forma similar obtemos que $\varphi_{U_i}(U)$ é aberto nos outros dois casos, e portanto φ_{U_i} é uma aplicação aberta, o que implica que a inversa de φ_{U_i} é contínua.

Seja W um aberto de $p_n^{-1}(U_i)$, podemos reescrever $W = \big(W \cap S_i\big) \cup \big(W \cap S_{-i}\big)$, onde $W \cap S_i$ e $W \cap S_{-i}$ são abertos de $p_n^{-1}(U_i)$. Logo, segue que:

$$\begin{aligned}
\varphi_{U_i}^{-1}(W) &= \phi_{U_i}\big((W \cap S_i) \cup (W \cap S_{-i})\big) \\
&= \phi_{U_i}(W \cap S_i) \cup \phi_{U_i}(W \cap S_{-i}) \\
&= \big(p_n(W \cap S_i) \times \{s_n\}\big) \cup \big(p_n(W \cap S_{-i}) \times \{s_{-n}\}\big),
\end{aligned}$$

é um aberto básico do espaço produto $U_i \times F$. Portanto, φ_{U_i} é contínua, e assim concluímos que é um homeomorfismo. Dado qualquer $(\gamma, y) \in U_i \times F$, temos que

$$(p_n \circ \varphi_{U_i})(\gamma, y) = p_n(w) = [w] = \gamma.$$

Portanto, $p_n : S^n \to RP^n$ é uma fibração localmente trivial com fibra $F = p^n_{-1}(\{s_n\})$.

Teorema 1.20 *Um fibrado localmente trivial $f : X \to Y$ com fibra F é uma fibração fraca.*

Demonstracão: Ver [6] página 364.

Logo, pelo exemplo 1.7 e teorema 1.20, temos que $p_n : S^n \to RP^n$ é uma fibração fraca.

Teorema 1.21 *Seja $p : E \to B$ uma fibração fraca com fibra $F = p^{-1}(b_0)$ para algum $b_0 \in B$. Então $p^{'}_{*} : \pi_n(E, F) \to \pi_n(B, b_0)$ é uma bijeção para todo $n \geq 1$, onde $p^{'} \circ j = p$ e $j : (E, x_0) \hookrightarrow (E, F)$ é a inclusão.*

Demonstracão: Ver [6] página 362.

Observação 1.11 Sendo $p_n : S^n \to RP^n$ a aplicação quociente, temos que existe uma bijeção $(p'_n)_* : \pi_1(S^n, F) \to \pi_1(RP^n, [s])$, onde $s \in S^n$, $F = \{-s, s\}$ e $p_n = p_{n'} \circ j$, onde $j : (S^n, s) \hookrightarrow (s^n, F)$ é a inclusão.

Capítulo 2

Teorema de Borsuk-Ulam

Neste capítulo o nosso principal objetivo será demonstrar o seguinte:

Teorema 2.1 (Teorema de Borsuk-Ulam) *Dado qualquer aplicação $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Mas este teorema é uma consequência do teorema:

Teorema 2.2 *Não existe uma aplicação antipodal $f : S^n \to S^m$, se $n > m \geq 0$.*

Pois, suponhamos que exista uma aplicação contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo ponto x de S^n tem-se que $f(x) \neq f(-x)$. Logo, a aplicação $g : S^n \to S^{n-1}$, definida por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

está bem definida. Além disso, g é contínua, pois pode ser escrita como uma composição de funções contínuas, e

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -\left(\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}\right) = -g(x)$$

para todo $x \in S^n$. Portanto $g : S^n \to S^{n-1}$ é contínua e antipodal, o que contradiz o teorema anterior. E, assim, concluímos a demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam.

Como o Teorema de Borsuk-Ulam é uma consequência do teorema 2.2, nosso objetivo passa a ser demonstrar o teorema 2.2.

Iniciaremos negando o teorema e vamos, no decorrer deste capítulo, procurar obter um absurdo.

Seja $f : S^n \to S^m$ uma aplicação contínua e antipodal, isto é $f(-x) = -f(x)$, com $n, m \geq 0$. Daí segue que $f : (S^n, F_n) \to (S^m, F_m)$ é uma aplicação de pares com ponto básico, onde $F_n = \{-s_n, s_n\}$ e $F_m = \{-f(s_n), f(s_n)\}$. Pelo teorema 1.17 obtemos, para $r \geq 1$, o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\pi_r(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_r(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_r(S^n, F_n) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_{r-1}(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_{r-1}(S^n) \arrow[d, "f_*"'] \\
\pi_r(F_m) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_r(S^m) \arrow[r, "(j_1)_*"] & \pi_r(S^m, F_m) \arrow[r, "d_1"] & \pi_{r-1}(F_m) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_{r-1}(S^m),
\end{tikzcd}
$$

onde cada linha é uma sequência exata e cada quadrado é comutativo.

Consideremos $p_n : S^n \to RP^n$ e $p_m : S^m \to RP^m$ como sendo as aplicações quocientes, pela observação 1.11 juntamente com o diagrama acima podemos construir o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \pi_1(RP^n) \arrow[dr, "d\circ(p'_{n*})^{-1}"] & & \\
\pi_1(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_1(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[ur, "(p'_n)_*\circ j_*"] & \pi_1(S^n, F_n) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[u, "(p'_n)_*"'] & \pi_0(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_0(S^n) \arrow[d, "f_*"'] \\
\pi_1(F_m) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_1(S^m) \arrow[r, "(j_1)_*"] \arrow[dr, "(p'_m)_*\circ(j_1)_*"'] & \pi_1(S^m, F_m) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "(p'_m)_*"] & \pi_0(F_m) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_0(S^m) \\
 & & \pi_1(RP^m), \arrow[ur, "d_1\circ(p'_m)_*^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Destaquemos que as aplicações $(p'_m)_*$ e $(p'_n)_*$ obtidas através da observação 1.11 são bijeções.

Consideremos agora, a aplicação $g : RP^n \to RP^m$ definida por $g(\alpha) = [f(s)]$, onde s é um representante qualquer de α. Dado $\alpha = [s]$, temos que existe apenas dois representantes para α que são $-s$ e s, logo para g estar bem definida basta que $f(s)$ e $f(-s)$ representem a mesma classe, mas como f é uma aplicação antipodal e $[f(s)] = [-f(s)]$, segue que g está bem definida.

Como $f \circ p_m$ é contínua e p_n é uma aplicação aberta temos que a aplicação g é contínua, pois dado qualquer aberto $A \subset RP^n$ temos que $g^{-1}(A) = p_n\left((f \circ p_m)^{-1}(A)\right)$.

Pela forma que definimos a função g, podemos considerar a aplicação com ponto básico $g : (RP^n, [s_n]) \to (RP^m, [f(s_n)])$. Logo, também podemos considerar as seguintes funções: $g \circ p'_n : (S^n, F_n) \to (S^n, s_n)$ e $p'_m \circ f : (S^n, F_n) \to (S^n, s_n)$. Para verificar que $g \circ p'_n = p'_m \circ f$ é suficiente mostrar que $g \circ p'_n : S^n \to RP^n$ e $p'_m \circ f : S^n \to RP^n$ são iguais. Mas pela forma que construímos $g : RP^n \to RP^m$ podemos notar que as aplicações $g \circ p_n = p_m \circ f : S^n \to RP^n$. Uma outra observação que devemos fazer é que p'_n e p'_m são, respectivamente, apenas notações para expressar as duas aplicações $p_n : S^n \to RP^n$ e $p_m : S^m \to RP^m$ tais que $p_n(F_n) \subset \{[s_n]\}$ e $p_m(F_m) \subset \{[f(s_s)]\}$. E daí concluímos que $g \circ p'_n : S^n \to RP^n$ e $p'_m \circ f : S^n \to RP^n$ são iguais e, portanto $g \circ p'_n : (S^n, F_n) \to (S^n, s_n)$ e $p'_m \circ f : (S^n, F_n) \to (S^n, s_n)$ são iguais. Logo, obtemos que $g_* \circ (p'_n)_* = (p'_m) \circ f_*$ e utilizando o fato de $(p'_n)_*$ ser uma bijeção, segue que $g_* = (p'_m) \circ f_* \circ (p'_n)_*^{-1}$.

Através do diagrama acima, obtemos o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_1(S^n) \arrow[r, "(p_n)_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_1(RP^n) \arrow[r, "d\circ(p'_n)_*^{-1}"] \arrow[d, "g_*"'] & \pi_0(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_0(S^n) \arrow[d, "f_*"'] \\
\pi_1(F_m) \arrow[r, "(i_1)_*"'] & \pi_1(S^m) \arrow[r, "(p_m)_*"'] & \pi_1(RP^m) \arrow[r, "d_1\circ(p'_m)_*^{-1}"'] & \pi_0(F_m) \arrow[r, "(i_1)_*"'] & \pi_0(S^m),
\end{tikzcd}$$

onde cada linha é uma sequência exata e cada quadrado é comutativo. De fato, temos que

$Im(i_*) = Ker(j_*) = Ker((p'_n)_* \circ j_*) = Ker\,((p_n)_*)$, a segunda igualdade é consequência de $(p'_n)_*$ ser uma bijeção;

$Im\,((p_n)_*) = Im\,((p'_n)_* \circ j_*) = (p'_n)_*\,(Im(j_*)) = (p'_n)_*\,(Ker(d)) = Ker\,(d \circ (p_n)_*^{-1})$; e

$Im\,(d \circ (p'_n)_*^{-1}) = Im\,(d) = Ker(i_*)$.

Portanto, a primeira linha é exata. De forma análoga, podemos verificar que a segunda linha também é exata. Para verificarmos que cada quadrado do diagrama acima comuta é suficiente mostrar que os dois quadrados centrais comutam, pois os outros são os mesmos do diagrama anterior. Temos que:

$$\begin{aligned}
g_* \circ (p_n)_* &= (p'_m)_* \circ f_* \circ \left((p'_n)_*^{-1} \circ (p'_n)_*\right) \circ j_* \\
&= (p'_m)_* \circ (f_* \circ j_*) \\
&= (p'_m)_* \circ (j_1)_* \circ f_* \\
&= (p_m)_* \circ f_*
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(d_1 \circ (p'_m)_*^{-1}\right) \circ g_* &= d_1 \circ \left((p'_m)_*^{-1} \circ (p'_m)_*\right) \circ f_* \circ (p'_n)_*^{-1} \\
&= d_1 \circ f_* \circ (p_{n'})_*^{-1} \\
&= f_* \circ d \circ (p'_n)_*^{-1},
\end{aligned}$$

e portanto cada quadrado do diagrama comuta.

Como $F_n = \{-s_n, s_n\}$, temos que as únicas aplicações de pares de domínio $(S^0, 1)$ e contradomínio (F_n, s_n) são $h_1, h_2 : (S^0, 1) \to (F_n, s_n)$, definidas por:

$$h_1(x) = \begin{cases} s_n, & \text{se } x = 1 \\ s_n, & \text{se } x = -1 \end{cases}, \qquad h_2(x) = \begin{cases} s_n, & \text{se } x = 1 \\ -s_n, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Temos que h_1 e h_2 não são homotópicas pois, caso contrário teríamos que existiria uma aplicação contínua $H : S^0 \times [0,1] \to F_n$ tal que $H(s,0) = h_1(t)$, $H(s,1) = h_2(s)$ e $H(1,s) = s_n$. Daí, seguiria que $H' : [0,1] \to F_n$, definida por $H'(t) = H(-1,t)$, seria contínua e sobrejetora, o que é absurdo pois funções contínuas levam conexo em conexo, $[0,1]$ é conexo, e F_n é desconexo. E assim, obtemos que $\pi_0(F_n, s_n) = \{[h_1], [h_2]\}$.

De forma similar, pode-se obter $\pi_0\left(F_m, f(s_n)\right) = \{[h'_1], [h'_2]\}$, onde $h'_1 = f \circ h_1$ e $h'_2 = f \circ h_2$.

Logo, $f_* : \pi_0(F_n, s_n) \to \pi_0\left(F_m, f(s_n)\right)$ é uma bijeção, pois

$$f_*\left([h_1]\right) = [f \circ h_1] = [h'_1]$$

e

$$f_*\left([h_2]\right) = [f \circ h_2] = [h'_2].$$

Suponhamos que $m = 0$ e utilizando o diagrama anterior, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi_0(F_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_0(S^n) \arrow[d, "f_*"'] \\ \pi_0(F_0) \arrow[r, "(i_1)_*"] & \pi_0(S^0). \end{tikzcd}$$

Além disso, $F_0 = S^0$, logo $i_1 : F_0 \to S^0$ será a aplicação identidade. Utilizando o teorema 1.14 item (ii), obtemos que $(i_1)_* : \pi_0(F^0) \to \pi_0(F^0)$ é a aplicação identidade e, portanto, bijetora. Isto juntamente com o fato de $f_* : \pi_0(F_n) \to \pi_0(F_0)$ ser uma bijeção e do diagrama comutar permite concluir que $f_* \circ i_*$ é uma bijeção. Mas assim sendo, teríamos que $f_* : \pi_0(S^n) \to \pi_0(S^0)$ é sobrejetora, o que é absurdo pois $\pi_0(S^n)$ é um conjunto unitário e $\pi_0(S^0)$ possui dois elementos. Logo, não existe aplicação antipodal $f : S^n \to S^0$ se $n > 0$.

Suponhamos agora que $n > m = 1$, logo teríamos que $\pi_1(S^n) = 0$, $\pi_1(RP^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(RP^n) \cong \mathbb{Z}_2$. Tendo $\pi_1(S^n) = 0$ e desde que cada linha do diagrama é uma sequência exata, obteríamos que $d \circ (p'_n)_*^{-1} : \pi_1(RP^n) \to \pi_0(F_n)$ é injetora e como f_* é bijetora, seguiria que $f_* \circ (d \circ (p'_n)_*^{-1})$ é injetora. Por outro lado, tendo $\pi_1(RP^n) \cong \mathbb{Z}_2$ dado $a \in \pi_1(RP^n)$ diferente da classe nula, temos que $a.a = 0$. Como $\pi_1(RP^1) \cong \mathbb{Z}$ temos que existe um isomorfismo $h : \pi_1(RP^1) \to \mathbb{Z}$, sendo $g_* : \pi_1(RP^n) \to \pi_1(RP^1)$ um homomorfismo, teríamos que

$$0 = h(0) = h\left(g_*(0)\right) = h\left(g_*(a.a)\right) = h\left(g_*(a).g_*(a)\right) =$$

$$= h\left(g_*(a)\right) + h\left(g_*(a)\right) = 2.h\left(g_*(a)\right) \Rightarrow h\left(g_*(a)\right) = 0 \Rightarrow g_*(a) = 0 \Rightarrow g_* \equiv 0.$$

Mas sendo assim, teríamos que o diagrama não poderia comutar, pois caso contrário teríamos que $0 \equiv d_1 \circ (p'_m)_*^{-1} \circ g_* = f_* \circ d \circ (p'_n)_*^{-1}$ seria injetora com $\pi_1(RP^n) \neq 0$. Logo, não existe aplicação antipodal $f : S^n \to S^1$ se $n > 1$.

Por fim, suponhamos que $n > m = 2$, isto implica que $\pi_1(S^n) = 0$, $\pi_1(S^m) = 0$, $\pi_0(S^n) = 0$ e $\pi_0(S^m) = 0$. Como $\pi_1(S^n) = \pi_1(S^m) = 0$ e pelo fato das linhas do diagrama serem exatas, obtemos que $d \circ (p'_n)_*^{-1}$, $d_1 \circ (p'_m)_*^{-1}$ são injetoras. Novamente, utilizando o fato das linhas do diagrama serem exatas, agora, juntamente com $\pi_0(S^n) = \pi_0(S^m) = 0$, obtemos que $d \circ (p'_n)_*^{-1}$, $d_1 \circ (p'_m)_*^{-1}$ são sobrejetoras. Portanto, $d \circ (p'_n)_*^{-1}$ e $d_1 \circ (p'_m)_*^{-1}$

são isomorfismos. Como f_* é uma aplicação bijetora e o diagrama comuta, poderemos expressar o homomorfismo g_* por uma composição de funções bijetoras. Logo, g_* é um isomorfismo.

Pela observação 1.10, obtemos que as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \pi_1(RP^n) \to H_1(RP^n) & \text{e} & \varphi_1 : \pi_1(RP^m) \to H_1(RP^m) \\ \varphi([c]) = \text{cls }(c \circ \eta) & & \varphi([d]) = \text{cls }(d \circ \eta) \end{array},$$

são isomorfismos. Logo a aplicação $\varphi_1 \circ g_* \circ \varphi^{-1} : H_1(RP^n) \to H_1(RP^m)$ é um isomorfismo.

Pelo fato de $\varphi : \pi_1(RP^n) \to H_1(RP^n)$ ser um isomorfismo, podemos escolher um representante para a classe não nula de $H_1(RP^n)$, digamos a, tal que $a = f \circ \eta$, para alguma aplicação $f : (I, \partial I) \to (RP^n, [s_n])$. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ g_* \circ \varphi^{-1}(cls\ a) &= (\varphi_1 \circ g_*)\left(\varphi^{-1}(\text{cls } a)\right) \\ &= (\varphi_1 \circ g_*)\left(\left[a \circ \eta^{-1}\right]\right) \\ &= (\varphi_1 \circ g_*)([f]) \\ &= \varphi_1(g_*[f]) \\ &= \varphi_1([g_\#(f)]) \\ &= \varphi_1([g \circ f]) \\ &= \text{cls }(g \circ f \circ \eta) \\ &= \text{cls }(g \circ a) \\ &= g_*(\text{cls } a) \end{aligned}$$

Onde g_* na última igualdade é o homomorfismo induzido por $g : RP^n \to RP^m$ em homologia. Como $\varphi_1 \circ g_* \circ \varphi^{-1}$ e g_* são homomorfismos temos que ambas aplicadas no elemento nulo de $H_1(RP^n)$ são iguais ao elemento nulo de $H_1(RP^m)$. E assim podemos concluir que $g_* = \varphi_1 \circ g_* \circ \varphi^{-1}$, já que $H_1(RP^n) = \mathbb{Z}_2$.

Sejam $\beta : S_1(RP^n) \to S_1(RP^n) \otimes \mathbb{Z}_2$ e $\beta' : S_1(RP^m) \to S_1(RP^m) \otimes \mathbb{Z}_2$ definidas respectivamente por $\beta(a) = a \otimes 1$ e $\beta'(b) = b \otimes 1$. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} S_1(RP^n) \arrow[r, "g_{\#}"] \arrow[d, "\beta"] & S_1(RP^m) \arrow[d, "\beta'"] \\ S_1(RP^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "g_{\#}\otimes 1"] & S_1(RP^m) \otimes \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd} .$$

Vamos mostrar que ele comuta. Seja $a \in C_1(RP^n)$, temos que

$$\begin{aligned} (\beta' \circ g_{\#})(a) &= \beta'(g \circ a) \\ &= (g \circ a) \otimes 1 \\ &= (g \circ a) \otimes (1 \circ 1) \\ &= (g_{\#} \otimes 1)(a \otimes 1) \\ &= ((g_{\#} \otimes 1) \circ \beta)(a), \end{aligned}$$

e como $C_1(RP^n)$ é o gerador de $S_1(RP^n)$ concluímos que o diagrama acima comuta. Daí segue que, $(g_{\#} \otimes 1)_* \circ \beta_* = \beta' \circ g_*$. Pela observação 1.5 temos que β_* e β'_* são isomorfismos e como g_* também é um isomorfismo, segue que $(g_{\#} \otimes 1)_* = \beta'_* \circ g_* \circ \beta_*^{-1}$ é um isomorfismo.

Pela observação 1.6 juntamente com a proposição 1.11 e

$$g_{\#} : S_*(RP^n) \to S_*(RP^m)$$

ser uma aplicação de cadeia, obtemos que $(g_{\#} \otimes 1)_*$ e $(g_{\#} \pitchfork 1)_*$ são aplicações lineares duais.

Como $(g_{\#} \otimes 1)_* : H_1(S_*(RP^n) \otimes \mathbb{Z}_2) \to H_1(S_*(RP^m) \otimes \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo e $(g_{\#} \pitchfork 1)_* : H_{-1}(RP^m \pitchfork \mathbb{Z}_2) \to H_{-1}(RP^n \pitchfork \mathbb{Z}_2)$ é dual a $(g_{\#} \otimes 1)_*$, obtemos pela proposição 1.4 que $(g_{\#} \pitchfork 1)_* : H_{-1}(RP^m \pitchfork \mathbb{Z}_2) \to H_{-1}(RP^n \pitchfork \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo.

Denotando a como sendo o gerador de $H^1(RP^m, \mathbb{Z}_2)$, teremos que $(g_{\#} \pitchfork 1)_*(a)$ é o gerador de $H^1(RP^n, \mathbb{Z}_2)$. Temos $g : RP^m \to RP^n$ é contínua, logo pela observação 1.7 temos que $(g_{\#} \pitchfork 1)_* : H^*(RP^m, \mathbb{Z}_2) \to H^*(RP^n, \mathbb{Z}_2)$ é um homomorfismo de anel graduado. E daí, segue que

$$(g_{\#} \pitchfork 1)_*(a^n) = [(g_{\#} \pitchfork 1)_*(a)]^n,$$

onde no primeiro membro a^n esta denotando o produto cup de a consigo mesmo n vezes e $[(g_\# \pitchfork 1)_*(a)]^n$ esta denotando o produto cup de $(g_\# \pitchfork 1)_*(a)$ consigo mesmo n vezes. Mas isto é um absurdo, pois por um lado temos que $(g_\# \pitchfork 1)_*(a^n) = (g_\# \pitchfork 1)_*(0)$ é o elemento nulo de $H^n(RP^n;\mathbb{Z}_2)$, pois pelo teorema 1.13 temos que $a^n = 0$ já que $a \in H^1(RP^m;\mathbb{Z}_2)$ e $n > m$. E por outro lado, temos novamente pelo teorema 1.13 que $[(g_\# \pitchfork 1)_* (a)]^n$ não é o elemento não nulo de $H^n(RP^n;\mathbb{Z}_2)$. Concluindo, assim, a demonstração do teorema 2.2.

Capítulo 3

Uma nota sobre o teorema de Borsuk-Ulam

Sejam $\mathbb{R}^n$ e S^n espaços com topologia induzida pela métrica euclidiana. Denotemos por $\underline{\alpha : S^n \to S^n}$ a aplicação antipodal, ou seja, a aplicação α é a aplicação definida por $\alpha(x) = -x$ para todo $x \in S^n$. E consideremos os dois conjuntos abaixo:

$$\mathcal{B} = \{G \subset S^n : \ G \text{ é fechado diferente do vazio e } \alpha(G) = G\}$$

e

$$\mathcal{F} = \{f : S^n \to \mathbb{R}^n; f \ \text{ é contínua}\}.$$

A topologia sobre $\mathcal{F}$ com a qual estaremos trabalhando é a topologia induzida pela métrica usual sobre $\mathcal{F}$, isto é, a topologia induzida pela métrica definida para cada $f, g \in \mathcal{F}$ por $d(f,g) = sup\{d(f(x), g(x)); \ x \in S^n\}$, onde d no segundo membro é a métrica euclidiana.

Definamos $\beta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}$ por $\beta(f) = \{x \in S^n; f(x) = f(-x)\}$, nosso objetivo neste capítulo é demostrar que β está bem definida e que vale o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *A função $\beta : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ é contínua. Além disso, quando $\mathcal{F}$ tem a topologia induzida pela métrica usual, a topologia semi finita superior é a maior topologia sobre $\mathcal{B}$ na qual β é contínua.*

Seja qualquer $f \in \mathcal{F}$, vamos mostrar que $\beta(f) = \{x \in S^n; f(x) = f(-x)\}$ pertence a $\mathcal{B}$, o que implica que β está bem definida. Pelo Teorema de Borsuk-Ulam, temos que $\beta(f)$ é não vazio, e observando que

$$\begin{aligned}
\beta(f) &= \{x \in S^n;\ f(x) = f(-x)\} \\
&= \{x \in S^n;\ (f - f \circ \alpha)(x) = 0\} \\
&= (f - f \circ \alpha)^{-1}(\{0\})
\end{aligned}$$

é fechado em S^n, pois $f - f \circ \alpha$ é contínua e $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, podemos concluir que $\beta(f) \in \mathcal{B}$.

Vamos mostrar agora que β é contínua quando a topologia sobre $\mathcal{F}$ é a topologia induzida pela métrica usual e a topologia sobre $\mathcal{B}$ é a topologia semi finita superior. Seja $V^{\#}$ um aberto básico de $\mathcal{B}$ e consideremos o subconjunto $\beta^{-1}(V^{\#})$. Se $V^{\#} \cap \beta(\mathcal{F}) = \emptyset$ então $\beta^{-1}(V^{\#}) = \emptyset$ é aberto em $\mathcal{F}$. Suponhamos que $V^{\#} \cap \beta(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, seja qualquer $f \in \beta^{-1}(V^{\#})$. Como $V^{\#}$ é um elemento básico de $\mathcal{B}$ com a topologia semi finita superior temos que

$$V^{\#} = \{C \in \mathcal{B} : C \subset V \ \text{ onde V é aberto em } S^n\}.$$

Logo, $\beta(f) \subset V$.

Temos que S^n é compacto, e sendo V aberto em S^n temos, que $S^n \setminus V$ é fechado em S^n e, consequentemente, $S^n \setminus V$ é compacto. Consideremos o conjunto

$$L = \{d(f(x), f(-x)) : x \in S^n \setminus V\},$$

temos que 0 é um limitante inferior de L. Logo existe $infL$, denotemos $infL = \varepsilon$ e mostremos que $\varepsilon > 0$.

Suponhamos que $\varepsilon = 0$, então existiria uma sequência $(x_m) \subset S^n \setminus V$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} d\left(f(x_m), f(-x_m)\right) = 0$. Mas sendo $S^n \setminus V$ compacto, existe uma subsequência (x_{m_k}) da sequência (x_m) que converge para algum $x \in S^n \setminus V$. Daí segue, juntamente com a continuidade de d e f, que

$$\begin{aligned}
d\left(f(x), f(-x)\right) &= d\left(f(\lim_{k\to\infty} x_{m_k}), f(-\lim_{k\to\infty} x_{m_k})\right)\\
&= d\left(\lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}), \lim_{k\to\infty} f(-x_{m_k})\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} d\left(f(x_{m_k}), f(-x_{m_k})\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

O que implica que $f(x) = f(-x)$ e, consequentemente, $x \in \beta(f) \subset V$, o que é absurdo pois $x \in S^n \setminus V$. Portanto $\varepsilon > 0$.

Tomemos qualquer g pertencente à bola de raio $\frac{\varepsilon}{2}$ de centro em f, temos que $\beta(g) \subset V$. De fato, seja $a \in \beta(g)$, temos que

$$d(f(a), f(-a)) \leq d(f(a), g(a)) + d(g(a), g(-a)) + d(g(-a), f(-a)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + 0 + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daí segue que $a \notin S^n \setminus V$ o que implica que $a \in V$ e, daí, $\beta(g) \subset V$ o que acarreta que $\beta(g) \in V^{\#}$, logo $g \in \beta^{-1}(V^{\#})$. Portanto temos que a bola centrada em f e raio $\dfrac{\varepsilon}{2}$ está contida em $\beta^{-1}(V^{\#})$ e, consequentemente, temos que $\beta^{-1}(V^{\#})$ é um aberto. Logo β é contínua.

Vamos mostrar agora que a topologia semi finita superior é a maior topologia sobre $\mathcal{B}$ na qual β é contínua.

Usaremos as seguintes notações para os conjuntos abaixo:

$$H = \{(t_1, ..., t_{n+1}) \in S^n; t_{n+1} \geq 0\},$$

$$H' = \{(t_1, ..., t_{n+1}) \in S^n; t_{n+1} \leq 0\},$$

e

$$D = \{z \in \mathbb{R}^n; \|z\| \leq 1\}.$$

Seja $s = (0, ..., 0, 1) \in S^n$ e consideremos a aplicação $\sigma_s : S^n \to D$ definida por

$$\sigma_s(t_1, ..., t_{n+1}) = \begin{cases} \left(\dfrac{t_1}{1+t_{n+1}}, ..., \dfrac{t_n}{1+t_{n+1}}\right), & \text{se} \quad (t_1, ..., t_{n+1}) \in H \\[2ex] \left(\dfrac{t_1}{1-t_{n+1}}, ..., \dfrac{t_n}{1-t_{n+1}}\right), & \text{se} \quad (t_1, ..., t_{n+1}) \in H' \end{cases}$$

Os conjuntos H e H' são fechados e ao considerarmos $\sigma_s|_H$ e $\sigma_s|_{H'}$ temos que são duas funções bem definidas, pois se $(t_1, ..., t_{n+1}) \in H$, temos que

$$\|\sigma_s(t_1, ..., t_{n+1})\|^2 = \frac{t_1^2 + \cdots + t_n^2}{(1 + t_{n+1})^2} = \frac{1 - t_{n+1}^2}{(1 + t_{n+1})^2} = \frac{1 - t_{n+1}}{(1 + t_{n+1})} \leq 1$$

e se $(t_1, ..., t_{n+1}) \in H'$, temos que

$$\|\sigma_s(t_1, ..., t_{n+1})\|^2 = \frac{t_1^2 + \cdots + t_n^2}{(1 - t_{n+1})^2} = \frac{1 - t_{n+1}^2}{(1 - t_{n+1})^2} = \frac{1 + t_{n+1}}{(1 - t_{n+1})} \leq 1.$$

Além disso, por $\sigma_s|_H$ e $\sigma_s|_{H'}$ serem formadas por n funções coordenadas contínuas cada, segue que $\sigma_s|_H$ e $\sigma_s|_{H'}$ são contínuas. Se $(t_1, ..., t_{n+1}) \in H \cap H'$, temos que $t_{n+1} = 0$ e, daí segue, que $\sigma_s|_H(t_1, ..., t_{n+1}) = \sigma_s|_{H'}(t_1, ..., t_{n+1})$. Portanto, σ_s está bem definida e, pelo lema da colagem, é contínua.

Observação 3.1 A aplicação $\sigma_s' : D \to H$, definida por

$$\sigma_s'(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2} \right),$$

é a inversa de $\sigma_s|_H$, além de ser contínua.

Para cada $x \in S^n$, seja $\sigma_x : S^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\sigma_x = \sigma_s \circ R_x|_{S^n}$, onde $R_x : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma rotação que leva x em s. Como uma rotação de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação linear e $\mathbb{R}^{n+1}$ é um espaço vetorial normado de dimensão finita, pode-se demonstrar que $R_x|_{S^n}$ é contínua para qualquer $x \in S^n$, este fato junto com o fato de σ_s ser contínua nos permite concluir que σ_x é contínua.

Observação 3.2 $\sigma_x(y) = -\sigma_x(-y)$ para todo $x, y \in S^n$.

Afirmação 3.1 $\sigma_x(y) = \sigma_x(-y) \Leftrightarrow y = \pm x$.

Demonstracão: Vamos mostrar primeiro quando $x = s$. Seja $y \in S^n$, denotemos y por

$(t_1, ..., t_{n+1})$, tal que $\sigma_x(y) = \sigma_x(-y)$, então se $y \in H$ teremos que $-y \in H'$, logo, para $i = 1, ..., n$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t_1}{1 + t_{n+1}}, ..., \frac{t_n}{1 + t_{n+1}} \right) &= \left(\frac{-t_1}{1 + t_{n+1}}, ..., \frac{-t_n}{1 + t_{n+1}} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{t_i}{1 + t_{n+1}} &= \frac{-t_i}{1 + t_{n+1}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow t_i &= 0,
\end{aligned}$$

e como $y \in H \subset S^n$ teremos que $t_{n+1} = 1$. Portanto, $y = s$.

De forma análoga, se $y \in H'$ obtemos que $y = -s$. Além disso, se $y = \pm s$ obtemos que $\sigma_s(y) = (0, ..., 0) = \sigma_s(-y)$.

Seja, agora, $x \in S^n$ arbitrário, utilizando o fato de que $R_x|_{S^n}(-a) = -R_x|_{S^n}(a)$, para todo $a \in S^n$, e que $\sigma_s(y) = \sigma_s(-y) \Leftrightarrow y = \pm s$, temos que

$$\sigma_x(y) = \sigma_x(-y) \Leftrightarrow \sigma_s\left(R_x|_{S^n}(y)\right) = \sigma_s\left(R_x|_{S^n}(-y)\right) \Leftrightarrow \sigma_s\left(R_x|_{S^n}(y)\right) = \sigma_s\left(-R_x|_{S^n}(y)\right)$$
$$\Leftrightarrow R_x|_{S^n}(y) = \pm s \Leftrightarrow y = \pm x.$$

$\square$

Afirmação 3.2 Seja $C \in \mathcal{B}$ qualquer. Se $y \in S^n$, então $d(y, C) = d(-y, C)$.

Demonstracão: Temos que

$$\begin{aligned} d(y, C) &= inf\{d(y, z) : z \in C\} \\ &= inf\{d(-y, -z) : -z \in C\} \\ &= inf\{d(-y, c) : c \in C\} \\ &= d(-y, C). \end{aligned}$$

$\square$

Seja τ uma topologia sobre $\mathcal{B}$ tal que β seja contínua. Dado $U \in \tau$ e $C \in U$, definamos para cada $x \in C$ a aplicação $f_x : S^n \to \mathbb{R}^n$, por

$$f_x(y) = d(y, C)\sigma_x(y).$$

Como a função f_x é o produto de duas funções contínuas, segue que f_x é contínua. Portanto, $f_x \in \mathcal{F}$ e logo faz sentido calcular $\beta(f_x)$.

Se $y \notin C$ e $f_x(y) = f_x(-y)$ teríamos que $d(y, C)\sigma_x(y) = d(-y, C)\sigma_x(-y)$ implicaria que $\sigma_x(y) = \sigma_x(-y)$, a última igualdade segue pela afirmação 3.2 juntamente com $d(y, C)$ ser diferente de zero. Logo, pela afirmação 3.1, teríamos que $y = \pm x \in C$, o que contradiz $y \notin C$. Portanto, se $f_x(y) = f_x(-y)$ temos que $y \in C$. E se $y \in C$, como C é invariante pela antípoda, temos que $-y \in C$ e, consequentemente, $f_x(y) = 0 = f_x(-y)$. Portanto $\beta(f_x) = C$.

Observação 3.3 A aplicação β é sobrejetora, para verificar isto basta tomar U acima como sendo $\mathcal{B}$.

Afirmação 3.3 Se $x \in C$, então $\exists \varepsilon_x > 0$ tal que para qualquer $g \in \mathcal{F}$ pertencente à bola de centro f_x e raio $2\varepsilon_x$, tem-se $g \in \beta^{-1}(U)$.

Demonstracão: A afirmação acima decorre do fato que sendo $\beta(f_x) = C \in U$, temos que

$f_x \in \beta^{-1}(U)$. E como $U \in \tau$ e β é contínua quando a topologia sobre $\mathcal{B}$ é τ, segue que $\beta^{-1}(U)$ é aberto em $\mathcal{F}$ e portanto temos a existência do ε_x tal que $g \in B(f_x; 2\varepsilon_x) \subset \beta^{-1}(U)$. $\square$

Nosso objetivo a partir de agora será construir um aberto $V \subset S^n$ tal que $C \subset V$ e $V^{\#} \subset U$. Para cada $x \in C$, seja

$$U_x = \{y \in S^n : d(y, C) < \frac{\varepsilon_x}{2}\}.$$

Como $\left(-\infty, \dfrac{\varepsilon_x}{2}\right)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e $d_C : S^n \to \mathbb{R}$, definida por $d_C(x) = d(x, C)$ para todo $x \in S^n$, é contínua, temos que U_x é aberto em S^n. Logo $\exists \delta_x \in (0, \frac{1}{2})$ tal que a bola aberta em S^n com centro em x e raio δ_x, $B(x, \delta_x)$, esteja contida em U_x.

Consideremos agora a cobertura $\{B(z, \delta_z)\}_{z \in C}$ de C. Pelo fato de C ser um subconjunto fechado do compacto S^n, segue que C é compacto, logo admite uma subcobertura finita $\{B(x_i, \delta_{x_i}) : i = 1, ..., m\}$ de C. Seja

$$V = [\bigcap_{1 \leq i \leq m} U_{x_i}] \cap [\bigcup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \delta_{x_i})]$$

Como U_{x_i} e $B(x_i, \delta_{x_i})$ são abertos para $i = 1, ..., m$, temos que a intersecção entre os U_{x_i} e a união entre os $B(x_i, \delta_{x_i})$ são abertos em S^n. E, portanto, V é a intersecção de dois abertos e, consequentemente, V é aberto em S^n.

Vamos mostrar agora que $C \subset V$. De fato, temos $\{B(x_i, \delta_{x_i}) : i = 1, ..., m\}$ é uma cobertura de C, logo

$$C \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \delta_{x_i}).$$

E como $\forall c \in C$ temos que $d(c, C) = 0$, segue, para $i = 1, ..., m$, que

$$C \subset U_{x_i} \Rightarrow C \subset \bigcap_{1 \leq i \leq m} U_{x_i}.$$

Portanto,

$$C \subset \Big[\bigcap_{1 \leq i \leq m} U_{x_i} \Big] \cap \Big[\bigcup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \delta_{x_i}) \Big] = V.$$

Consideremos agora $V^{\#}$, e seja qualquer $A \in V^{\#}$.

Observação 3.4 Temos que existe um $1 \leq j \leq m$ tal que $A \cap B(x_j, \delta_{x_j}) \neq \emptyset$, devido a forma que V é construído.

Além disso, observando novamente a forma que V foi construído podemos notar que $V \subset U_{x_j}$, o que implica que $A \subset U_{x_j}$.

Afirmação 3.4 Existe $r \in (0, 1)$ tal que

$$\sigma_{x_j}\left(\partial B\left(\pm x_j, 2\delta_{x_j}\right)\right) = \sigma_s\left(\partial B\left(\pm s, 2\delta_{x_j}\right)\right) = \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}.$$

Demonstracão: Observemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_j}\left(\partial B\left(x_j, 2\delta_{x_j}\right)\right) &= \left(\sigma_s \circ R_{x_j}|_{S^n}\right)\left(\partial B\left(x_j, 2\delta_{x_j}\right)\right) \\
&= \sigma_s\left(R_{x_j}|_{S^n}\left(\partial B\left(x_j, 2\delta_{x_j}\right)\right)\right) \\
&= \sigma_s\left(\partial B\left(s, 2\delta_{x_j}\right)\right).
\end{aligned}$$

E de forma análoga, obtemos que $\sigma_{x_j}\left(\partial B\left(-x_j, 2\delta_{x_j}\right)\right) = \sigma_s\left(\partial B\left(-s, 2\delta_{x_j}\right)\right)$. Pela observação 3.2 juntamente com $y \in \partial B\left(s, 2\delta_{x_j}\right)$ se, e somente se, $-y \in \partial B\left(-s, 2\delta_{x_j}\right)$, obtemos que $\sigma_s\left(\partial B\left(s, 2\delta_{x_j}\right)\right) = \sigma_s\left(\partial B\left(-s, 2\delta_{x_j}\right)\right)$.

Inicialmente mostraremos que existe $r \in (0, 1)$ tal que

$$\sigma_s\left(\partial B(-s; 2\delta_{x_j})\right) = \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}.$$

Temos que $y \in \partial B(-s; 2\delta_{x_j})$ se, e somente se, $d(-s, y) = 2\delta_{x_j}$. Logo, segue que $d(-s, y) = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + (-1 - y_{n+1})^2} \Leftrightarrow y_1^2 + \cdots + y_n^2 + (-1 - y_{n+1})^2 = 4\delta_{x_j}^2 \Leftrightarrow$

$y_1^2 + \cdots + y_n^2 + y_{n+1}^2 + 2y_{n+1} + 1 = 4\delta_{x_j}^2 \Leftrightarrow 1 + 2y_{n+1} + 1 = 4\delta_{x_j}^2 \Leftrightarrow y_{n+1} = 2\delta_{x_j}^2 - 1$. Portanto,

$$\partial B(-s; 2\delta_{x_j}) = \{(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) \in S^n : y_{n+1} = 2\delta_{x_j}^2 - 1\}.$$

Daí se $y \in \partial B(-s; 2\delta_{x_j}) \subset H'$, temos que:

$$\sigma_s(y) = \left(\frac{y_1}{2 - 2\delta_{x_j}^2}, ..., \frac{y_n}{2 - 2\delta_{x_j}^2}\right)$$

e

$$\begin{aligned}\left(\frac{y_1}{2 - 2\delta_{x_j}^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y_n}{2 - 2\delta_{x_j}^2}\right)^2 &= \frac{y_1^2 + \cdots + y_n^2}{(2 - 2\delta_{x_j}^2)^2} \\ &= \frac{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + y_{n+1}^2 - y_{n+1}^2}{(2 - 2\delta_{x_j}^2)^2} \\ &= \frac{1 - y_{n+1}^2}{(2 - 2\delta_{x_j}^2)^2} \\ &= \frac{1 - 4\delta_{x_j}^4 + 4\delta_{x_j}^2 - 1}{4(1 - \delta_{x_j}^2)^2} \\ &= \frac{\delta_{x_j}^2}{(1 - \delta_{x_j}^2)}.\end{aligned}$$

Como $\delta_{x_j} < \dfrac{1}{2}$, tomando $r = \sqrt{\frac{\delta_{x_j}^2}{1-\delta_{x_j}^2}}$, temos que $r \in (0, 1)$ e para todo $y \in \partial B(-s; 2\delta_{x_j})$ temos que $\|\sigma_s(y)\| = r$.

Se $y \in \partial B(s; 2\delta_{x_j}) \subset H$, pela observação 3.2, segue que $\|\sigma_s(y)\| = \| - \sigma_s(-y)\|$. Do fato de $y \in \partial B(s; 2\delta_{x_j})$ implicar que $-y \in \partial B(-s; 2\delta_{x_j})$, obtemos que $\|\sigma_s(y)\| = r$. Portanto,

$$\sigma_{x_j}(\partial B(\pm x_j, 2\delta_{x_j})) = \sigma_s(\partial B(\pm s; 2\delta_{x_j})) \subset \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}.$$

Seja $(h_1, ..., h_n)$ um elemento arbitrário de $\{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}$ e consideremos $y = \left(\dfrac{2h_1}{1 + r^2}, ..., \dfrac{2h_n}{1 + r^2}, \dfrac{r^2 - 1}{1 + r^2}\right)$, temos que:

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= \frac{1}{(1+r^2)^2}\cdot\left[4(h_1^2+\cdots+h_n^2)+(1-r^2)^2\right]\\
&= \frac{1}{(1+r^2)^2}\cdot\left[4r^2+r^4-2r^2+1\right]\\
&= \frac{1}{(1+r^2)^2}\cdot\left(1+r^2\right)^2\\
&= 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $y \in S^n$. Como $r < 1$ temos que $\dfrac{r^2-1}{1+r^2} < 0$ e, consequentemente, $y \in H'$. Daí segue que

$$\begin{aligned}
\sigma_s(y) &= \left(\frac{\frac{2h_1}{1+r^2}}{1-\frac{r^2-1}{1+r^2}},...,\frac{\frac{2h_n}{1+r^2}}{1-\frac{r^2-1}{1+r^2}}\right)\\
&= \left(\frac{2h_1}{1+r^2-(r^2-1)},\cdots,\frac{2h_n}{1+r^2-(r^2-1)}\right)\\
&= (h_1,...,h_n)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d(y,-s) &= \sqrt{\left(\frac{2h_1}{1+r^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2h_n}{1+r^2}\right)^2+\left(\frac{r^2-1}{1+r^2}-1\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{1}{(1+r^2)^2}(4h_1^2+...+4h_n^2+4r^4)}\\
&= \sqrt{\frac{4r^2(1+r^2)}{(1+r^2)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{4r^2}{1+r^2}}
\end{aligned}$$

Mas como $r = \sqrt{\dfrac{\delta_{x_j}^2}{1-\delta_{x_j}^2}}$, temos que:

$$d(y,-s) = 2\cdot\sqrt{\frac{\frac{\delta_{x_j}^2}{1-\delta_{x_j}^2}}{1+\frac{\delta_{x_j}^2}{1-\delta_{x_j}^2}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{\frac{\delta_{x_j}^2}{1-\delta_{x_j}^2}}{\frac{1-\delta_{x_j}^2+\delta_{x_j}^2}{1-\delta_{x_j}^2}}} = 2\cdot\sqrt{\delta_{x_j}^2} = 2\delta_{x_j}.$$

Portanto $(h_1,\cdots,h_n) \in \sigma_s(\partial B(-s;2\delta_{x_j}))$, e como consequência obtemos que

$$\sigma_{x_j}(\partial B(\pm x_j,2\delta_{x_j})) = \sigma_s(\partial B(-s;2\delta_{x_j})) \supset \{(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n : y_1^2+\cdots+y_n^2=r^2\}.$$

E assim concluímos que

$$\sigma_{x_j}(\partial B(\pm x_j, 2\delta_{x_j})) = \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}. \qquad \square$$

Afirmação 3.5 Para todo $y \in B[\pm s; 2\delta_{x_j}]$, tem-se que $\|\sigma_s(y)\| \leq r$, para o mesmo r da afirmação anterior.

Demonstracão: Para $y \in \partial B[\pm s; 2\delta_{x_j}] = \partial B(\pm s; 2\delta_{x_j})$ temos, pela afirmação anterior, que $\|\sigma_s(y)\| = r$. Suponhamos que $y \in S^n$ tal que $\|\sigma_s(y)\| > r$, denotemos y por $(t_1, ..., t_{n+1})$, se $y \in H$ obtemos que

$$\|\sigma_s(y)\|^2 = \frac{t_1^2 + \cdots + t_n^2}{(1 + t_{n+1})^2} = \frac{t_1^2 + \cdots + t_n^2 + t_{n+1}^2 - t_{n+1}^2}{(1 + t_{n+1})^2} = \frac{1 - t_{n+1}^2}{(1 + t_{n+1})^2} = \frac{1 - t_{n+1}}{1 + t_{n+1}}.$$

Tendo $\|\sigma_s(y)\| > r$ e $\|\sigma_s(y)\|^2 = \dfrac{1 - t_{n+1}}{1 + t_{n+1}}$, podemos obter que $t_{n+1} < \dfrac{1 - r^2}{r^2 + 1}$. Observemos agora que

$$(d(y, s))^2 = t_1^2 + \cdots + t_n^2 + (t_{n+1} - 1)^2 = 2 - 2t_{n+1} > 2 - 2 \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2}.$$

Substituindo $r = \sqrt{\dfrac{\delta_{x_j}^2}{1 - \delta_{x_j}^2}}$, obtemos que

$$(d(y, s))^2 > 2 - 2 \cdot \left(\frac{1 - \dfrac{\delta_{x_j}^2}{1 - \delta_{x_j}^2}}{1 + \dfrac{\delta_{x_j}^2}{1 - \delta_{x_j}^2}} \right) = 2 - 2(1 - 2\delta_{x_j}^2) = 4\delta_{x_j}^2.$$

O que implica que $d(y, s) > 2\delta_{x_j}$ e, portanto, $y \notin B(s; \delta_{x_j})$. E como $y \in H$ também temos que $y \notin B(-s; \delta_{x_j})$, logo $y \notin B(\pm s; \delta_{x_j})$. De forma similar se $y \in H'$ tal que $\|\sigma_s(y)\| > r$ também teremos que $y \notin B(\pm s; \delta_{x_j})$. E isto conclui a demonstração desta afirmação. $\square$

Agora queremos encontrar uma função $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\beta(g) = A$ e g pertença a bola aberta de centro f_{x_j} e raio $2\varepsilon_{x_j}$, pois existindo tal função teremos pela afirmação 3.3 que $A \in U$ e, consequentemente, $V^\# \subset U$. Mas antes iremos construir algumas funções para tornar viável a construção da função g.

A observação 3.4 nos garante que existe $x \in A \cap B(x_j, 2\delta_{x_j})$. Seja $R_{x_j}|_{S^n}$ a rotação utilizada na definição de σ_{x_j} e denotemos x' como sendo o ponto $R_{x_j}|_{S^n}(x)$.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2 : B[s; 2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\} \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por

$$\lambda_1(y) = \parallel \sigma_s(y) \parallel^2 + \parallel \sigma_s(x') \parallel^2 - 2\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y) \rangle$$

e

$$\lambda_2(y) = 2\left(\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y) \rangle - \|\sigma_s(x')\|^2\right),$$

onde $\|.\|$ é a norma e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno.

Logo, tanto λ_1 quanto λ_2 estão bem definidas e são contínuas, pois são composições de funções contínuas.

Vamos mostrar agora que $\lambda_1 > 0$. Suponhamos que $\lambda_1 \leqslant 0$ e denotemos x' por $(\overline{x}_1, .., \overline{x}_n)$ e y por $(y_1, ..., y_n)$. Daí seguiria que

$$\tfrac{\overline{x}_1^2}{(1+\overline{x}_{n+1})^2} + \cdots + \tfrac{\overline{x}_n^2}{(1+\overline{x}_{n+1})^2} + \tfrac{y_1^2}{(1+y_{n+1})^2} + \cdots + \tfrac{y_n^2}{(1+y_{n+1})^2} - 2\left[\tfrac{\overline{x}_1 \cdot y1 + \cdots + \overline{x}_n \cdot y_n}{(1+\overline{x}_{n+1})(1+y_{n+1})}\right] \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\tfrac{(\overline{x}_1^2 + \cdots + \overline{x}_n^2)(1+y_{n+1})^2 + (y_1^2 + \cdots + y_n^2)(1+\overline{x}_{n+1})^2 - 2(\overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n)(1+y_{n+1})(1+\overline{x}_{n+1})}{(1+\overline{x}_{n+1})^2(1+y_{n+1})^2} \leqslant 0.$$

Como $(1 + \overline{x}_{n+1})^2(1 + y_{n+1})^2 > 0$, pois x', y são diferentes de $-s$, segue que

$$(\overline{x}_1^2 + ... + \overline{x}_n^2)(1+y_{n+1})^2 + (y_1^2 + ... + y_n^2)(1+\overline{x}_{n+1})^2 - 2(\overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n)(1+y_{n+1})(1+\overline{x}_{n+1}) \leq 0$$
$$\Rightarrow (1-\overline{x}_{n+1}^2)(1+y_{n+1})^2 + (1-y_{n+1}^2)(1+\overline{x}_{n+1})^2 - 2(\overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n)(1+\overline{x}_{n+1})(1+y_{n+1}) \leq 0 \Rightarrow$$
$$2(\overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n)(1+\overline{x}_{n+1})(1+y_{n+1}) \geq (1-\overline{x}_{n+1}^2)(1+y_{n+1})^2 + (1-y_{n+1}^2)(1+\overline{x}_{n+1})^2 \Rightarrow$$
$$2(\overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n) \geq (1-\overline{x}_{n+1})(1+y_{n+1}) + (1-y_{n+1})(1+\overline{x}_{n+1}) \Rightarrow$$
$$2(\overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n) \geq 2 - 2\overline{x}_{n+1} y_{n+1} \Rightarrow \overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n + \overline{x}_{n+1} y_{n+1} \geq 1.$$

Mas ao considerar v e u, como sendo respectivamente os seguintes vetores $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n+1})$ e $(y_1, ..., y_{n+1})$, e θ o ângulo entre eles, então obtemos que $cos(\theta) = \frac{\langle v,u \rangle}{\|v\|\|u\|} \geq 1$. Mas como $|cos(\theta)| \leq 1$, segue que $cos(\theta) = 1$, o que implica que $\theta = 0$. E como $\|v\| = 1 = \|u\|$, segue que $v = u$. O que acarreta que $x' = y$, o que contradiz $y \in B[s; 2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\}$. Portanto, $\lambda_1 > 0$.

Seja $t : B[s; 2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$t(y) = \frac{-\lambda_2(y) + \sqrt{\lambda_2^2(y) + 4\lambda_1(y)\left(r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2\right)}}{2\lambda_1(y)}.$$

Como $\lambda_1(y) > 0$ e $r^2 - \|\sigma_s(y)\|^2 \geq 0$ para todo $y \in B[s; 2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\}$, onde a última desigualdade decorre da afirmação 3.5, concluímos que t está bem definida. E pelo fato de podermos escrever t como uma composição de funções contínuas temos que t também será contínua.

Observação 3.5 Para cada $y \in B[s; 2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\}$ temos que $t(y)$ é uma solução da equação

$$\lambda_1(y)t^2 + \lambda_2(y)t + \|\sigma_s(x')\|^2 = r^2.$$

Seja $\upsilon' : B[s; 2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\} \to \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}$, definida por

$$\upsilon'(y) = (1 - t(y))\sigma_s(x') + t(y)\sigma_s(y).$$

Vamos mostrar que υ' está bem definida, para isto basta mostrar que $\|\upsilon'(y)\|^2 = r^2$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\|\upsilon'(y)\|^2 &= \|((1 - t(y))\sigma_s(x') + t(y)\sigma_s(y)\|^2 \\
&= \left\|(1 - t(y))\left(\frac{\overline{x}_1}{1 + \overline{x}_{n+1}}, \cdots, \frac{\overline{x}_n}{1 + \overline{x}_{n+1}}\right) + t(y)\left(\frac{y_1}{1 + y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{1 + y_{n+1}}\right)\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\frac{(1 - t(y))\overline{x}_1}{1 + \overline{x}_{n+1}} + \frac{(t(y))y_1}{1 + y_{n+1}}, \cdots, \frac{(1 - t(y))\,\overline{x}_n}{1 + \overline{x}_{n+1}} + \frac{t(y)y_n}{1 + y_{n+1}}\right)\right\|^2 \\
&= (1 - t(y))^2 \frac{\overline{x}_1^2 + \cdots + \overline{x}_n^2}{(1 + \overline{x}_{n+1})^2} + \frac{2(1 - t(y))t(y)\left(\overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n\right)}{(1 + \overline{x}_{n+1})(1 + y_{n+1})} + \\
&\quad + t(y)\frac{y_1^2 + \cdots + y_n^2}{(1 + y_{n+1})^2} \\
&= (1 - t(y))^2 \|\sigma_s(x')\|^2 + 2\left(t(y) - t(y)^2\right)\frac{\overline{x}_1 y_1 + \cdots \overline{x}_n y_n}{(1 + \overline{x}_{n+1})(1 + y_{n+1})} + t(y)^2\|\sigma_s(y)\|^2 \\
&= t(y)^2\left[\|\sigma_s(x')\|^2 + \|\sigma_s(y)\|^2 - \frac{2(\overline{x}_1 y_1 + \cdots \overline{x}_n y_n)}{(1 + \overline{x}_{n+1})(1 + y_{n+1})}\right] \\
&\quad + t(y)\left[-2\|\sigma_s(x')\|^2 + 2\frac{\overline{x}_1 y_1 + \cdots \overline{x}_n y_n}{(1 + \overline{x}_{n+1})(1 + y_{n+1})}\right] + \|\sigma_s(x')\|^2 \\
&= \lambda_1(y)t(y)^2 + \lambda_2(y)t(y) + \|\sigma_s(x')\|^2 \\
&= r^2,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade acima segue da observação 3.5. Logo υ' está bem definida e como υ' é a soma de produtos de funções contínuas é portanto uma função contínua.

Como υ' é contínua, podemos construir a aplicação contínua

$$\upsilon : \left(B[s;2\delta_{x_j}] \cup B[-s;2\delta_{x_j}]\right) \setminus \{\pm x'\} \to \left\{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\right\},$$

definida por

$$\upsilon(y) = \begin{cases} \upsilon'(y), & \text{se} \quad y \in B[s;2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\}, \\ -\upsilon'(-y), & \text{se} \quad y \in B[-s;2\delta_{x_j}] \setminus \{-x'\} \end{cases}$$

Observação 3.6 Para todo $y \in \left(B[s;2\delta_{x_j}] \cup B[-s;2\delta_{x_j}]\right) \setminus \{\pm x'\}$ temos que $\upsilon(y)$ é diferente de $\upsilon(-y)$. Pois caso contrário, utilizando a definição de υ, teríamos que $\upsilon(y)$ seria o vetor nulo e este não pertence ao conjunto $\{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = r^2\}$.

Definamos $\psi_1 : B[s;2\delta_{x_j}] \setminus \{x'\} \to \mathbb{R}^n$ e $\psi_2 : B[-s;2\delta_{x_j}] \setminus \{-x'\} \to \mathbb{R}^n$, respectivamente por

$$\psi_1(y) = \frac{d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(x')\right)}{d\left(\upsilon(y), \sigma_s(x')\right)}\upsilon(y)$$

e

$$\psi_2(y) = \frac{d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(-x')\right)}{d\left(\upsilon(y), \sigma_s(-x')\right)}\upsilon(y).$$

Não é difícil de notar que estas duas funções estão bem definidas e são contínuas.

Dado qualquer $y \in \partial B(s;2\delta_{x_j})$, temos que:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1(y)(r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2) &= 4\left(r^2 + \| \sigma_s(x') \|^2 - 2\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y)\rangle\right)(r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2) \\ &= 4r^4 - 4\|\sigma_s(x')\|^4 + 8\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y)\rangle\left(-r^2 + \|\sigma_s(x')\|^2\right). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_2^2(y) &= \left[2\left(\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y)\rangle - \|\sigma_s(x')\|^2\right)\right]^2 \\ &= 4\left(\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y)\rangle\right)^2 - 8\|\sigma_s(x')\|^2\langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y)\rangle + 4\|\sigma_s(x')\|^4. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\lambda_2^2(y) + 4\lambda_1(y)(r^2 - \|\sigma_{x_j}(x')\|^2) &= 4\left(r^2 - \langle \sigma_s(x'), \sigma_s(y)\rangle\right)^2 \\ &= \left(2\lambda_1(y) + \lambda_2(y)\right)^2.\end{aligned}$$

E portanto, utilizando as definições das funções t e υ, temos para todo y pertencente a $\partial B(s; 2\delta_{x_j})$ que $t(y) = 1 \Rightarrow \upsilon(y) = \sigma_s(y)$.

Utilizando as definições de υ e σ_s, também teremos que $\upsilon(y) = \sigma_s(y)$ caso y pertença a $\partial B(-s; 2\delta_{x_j})$.

Daí segue que, se $y \in \partial B(s; 2\delta_{x_j})$, temos que $\sigma_s(y) = \psi_1(y)$ e se $y \in \partial B(-s; 2\delta_{x_j})$, temos que $\sigma_s(y) = \psi_2(y)$.

Além disso, algo que podemos notar em relação às funções ψ_1 e ψ_2 é que: dado qualquer sequência $(y_n) \subset B(s; 2\delta_{x_j})$ que converge para x', tem-se que $\psi_1(y_n)$ converge a zero; e para qualquer sequência $(y_n) \subset B(-s; 2\delta_{x_j})$ que converge para $-x'$, tem-se que $\psi_2(y_n)$ converge a zero.

Logo, pelo lema da colagem, obtemos que a função $\overline{\psi} : S^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\overline{\psi}(y) = \begin{cases} \sigma_s(y), & \text{se} \quad y \in S^n - \left(B(s; 2\delta_{x_j}) \cup B(-s; 2\delta_{x_j})\right) \\ 0, & \text{se} \quad y = \pm x' \\ \psi_1(y), & \text{se} \quad y \in B(s; 2\delta_{x_j}) \setminus \{x'\} \\ \psi_2(y), & \text{se} \quad y \in B(-s; 2\delta_{x_j}) \setminus \{-x'\} \end{cases},$$

é uma função contínua. Através de $\overline{\psi}$ podemos obter a função contínua $\psi = \overline{\psi} \circ R_{x_j}|_{S^n}$.

Afirmação 3.6 Não existe $y \in S^n$ diferente de $\pm x$ tal que $\psi(y) = \psi(-y)$

Demonstracão: Como $x' = R_{x_j}|_{S^n}(x)$ e $-x' = -R_{x_j}|_{S^n}(x)$, demonstrar esta afirmação

é equivalente a demonstrar que não existe $y \in S^n$ diferente de $\pm x'$ tal que $\overline{\psi}(y) = \overline{\psi}(-y)$ Se $y \in S^n \setminus \left(B(s; 2\delta_{x_j}) \cup B(-s; 2\delta_{x_j})\right)$, temos que:

$$-y \in S^n \setminus \left(B(s; 2\delta_{x_j}) \cup B(-s; 2\delta_{x_j})\right).$$

Daí, juntamente com a afirmação 3.1, segue que $\overline{\psi}(y) = \sigma_s(y) \neq \sigma_s(-y) = \overline{\psi}(-y)$. Portanto, não existe $y \in S^n \setminus \left(B(s; 2\delta_{x_j}) \cup B(-s; 2\delta_{x_j})\right)$ tal que $\overline{\psi}(y) = \overline{\psi}(-y)$. Se

$y \in B(s; 2\delta_{x_j})$ então, temos que $-y \in B(-s; 2\delta_{x_j})$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(x')\right)}{d\left(\upsilon(y), \sigma_s(x')\right)}\upsilon(y) &= \frac{d\left(-\sigma_s(-y), -\sigma_s(-x')\right)}{d\left(-\upsilon(y), -\sigma_s(-x')\right)}\upsilon(y)\\ &= \frac{d\left(\sigma_s(-y), \sigma_s(-x')\right)}{d\left(\upsilon(-y), \sigma_s(-x')\right)}\upsilon(y)\\ &\neq \frac{d\left(\sigma_s(-y), \sigma_s(-x')\right)}{d\left(\upsilon(-y), \sigma_s(-x')\right)}\upsilon(-y),\end{aligned}$$

onde o sinal de diferente é consequência da observação 3.6 juntamente com o fato de $\frac{d(\sigma_s(y),\sigma_s(x'))}{d(\upsilon(y),\sigma_s(x'))} = \frac{d(\sigma_s(-y),\sigma_s(-x'))}{d(\upsilon(-y),\sigma_s(-x'))} \neq 0$. Portanto, $\overline{\psi}(y) \neq \overline{\psi}(-y)$ para todo $y \in B(s; 2\delta_{x_j})$. Analogamente obtem-se que não existe $y \in B(-s; 2\delta_{x_j})$ tal que $\overline{\psi}(y) = \overline{\psi}(-y)$, e assim concluímos a demonstração da afirmação. □

Afirmação 3.7 Para todo $y \in S^n$ temos que $\|\psi(y)\| \leq 1$.

Demonstracão: Como $Im(\psi) \subseteq Im(\overline{\psi})$ para demonstrarmos a afirmação é suficiente verificar que $\|\overline{\psi}(y)\| \leq 1$ para todo $y \in S^n$. Por $\|\sigma_s(y)\| \leq 1$, será necessário apenas mostrar que: quando $y \in B(s; 2\delta_{x_j})$ temos que

$$\left|\frac{d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(x')\right)}{d\left(\upsilon(y), \sigma_s(x')\right)}\right| \leq 1 \tag{3.1}$$

e quando $y \in B(-s; 2\delta_{x_j})$ temos que

$$\left|\frac{d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(-x')\right)}{d\left(\upsilon(y), \sigma_s(-x')\right)}\right| \leq 1. \tag{3.2}$$

Seja $y \in B(s; 2\delta_{x_j})$ então, $\upsilon(y) = (1 - t(y))\sigma_s(x') + t(y)\sigma_s(y)$. Suponhamos, por absurdo, que $t(y) < 1$ para $y \in B(s; 2\delta x_j)$. Logo após multiplicarmos ambos os membros por $2\lambda_1(y)$, teríamos

$$-\lambda_2(y) + \sqrt{\lambda_2^2(y) + 4\lambda_1(y)\left(r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2\right)} < 2\lambda_1(y),$$

somando $\lambda_2(y)$ em ambos os membros e depois elevando ao quadrado obteríamos

$$\lambda_2^2(y) + 4\lambda_1(y)\left(r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2\right) < 4\lambda_1^2(y) + 4\lambda_1(y)\lambda_2(y) + \lambda_2^2(y).$$

Subtraindo $\lambda_2^2(y)$ em ambos os membros e colocando $4\lambda_1(y)$ em evidência no segundo membro obteríamos

$$4\lambda_1(y)\left(r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2\right) < 4\lambda_1(y)\left(\lambda_1(y) + \lambda_2(y)\right),$$

e como $\lambda_1 > 0$ seguiria que

$$r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2 < \lambda_1(y) + \lambda_2(y).$$

Pela definição de λ_1 e λ_2 obtemos que $\lambda_1(y)+\lambda_2(y) = \|\sigma_s(y)\|^2 - \|\sigma_s(x')\|^2$, e substituindo na desigualdade acima obteríamos

$$r^2 - \|\sigma_s(x')\|^2 < \|\sigma_s(y)\|^2 - \|\sigma_s(x')\|^2 \Rightarrow \|\sigma_s(y)\|^2 > r^2,$$

o que contradiz a afirmação 3.5 já que $y \in B(s, 2\delta_{x_j}) \subset B[s, 2\delta_{x_j}]$. Portanto $t(y) > 1$, isto juntamente com o fato de $\upsilon(y) = (1 - t(y))\sigma_s(x') + t(y)\sigma_s(y)$ implica que $\sigma_s(x'),\ \sigma_s(y)$ e $\upsilon(y)$ são colineares nesta ordem. Logo,

$$d\left(\upsilon(y), \sigma_s(x')\right) = d\left(\upsilon(y), \sigma_s(y)\right) + d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(x')\right) \geq d\left(\sigma_s(x'), \sigma_s(y)\right).$$

Portanto quando $y \in B(s; 2\delta_{x_j})$ vale a desigualdade (3.1). Observando que

$$\frac{d\left(\sigma_s(-y), \sigma_s(x')\right)}{d\left(\upsilon(-y), \sigma_s(x')\right)} = \frac{d\left(\sigma_s(y), \sigma_s(-x')\right)}{d\left(\upsilon(y), \sigma_s(-x')\right)}$$

e que se $y \in B(-s; 2\delta_{x_j})$ implica que $-y \in B(s; 2\delta_{x_j})$, obtemos que vale a desigualdade (3.2). $\square$

Definamos $\varphi : S^n \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(y) = max\left\{d(y, C), \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}\right\}.$$

Seja (a, b) um aberto básico de $\mathbb{R}$. Se $b \leq \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}$, temos que $\varphi^{-1}(a, b) = \varnothing$ é aberto em S^n. Se $a \geq \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(a, b) &= \{y \in S^n : \varphi(y) \in (a, b)\} \\
&= \{y \in S^n : d(y, C) \in (a, b)\} \\
&= d_C^{-1}\left((a, b)\right)
\end{aligned}$$

é aberto em S^n, pois $d_C : S^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $(a, +\infty), (-\infty, b)$ são abertos em $\mathbb{R}$. E se $\frac{\varepsilon_{x_j}}{2} \in (a, b)$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(a,b) &= \{y \in S^n : \varphi(y) \in (a,b)\} \\ &= \left\{y \in S^n : \varphi(y) \in \left[\frac{\varepsilon_{x_j}}{2}, b\right)\right\} \\ &= \{y \in S^n : d(y, C) < b\} \\ &= d_C^{-1}(-\infty, b) \end{aligned}$$

é aberto em S^n, pois d_C é contínua e $(-\infty, b)$ é aberto em $\mathbb{R}$. Portanto φ é contínua.

Observação 3.7 Temos, para todo $y \in S^n$, que $\varphi(y) > 0$ e, com o auxílio da afirmação 3.2, temos que $\varphi(y) = \varphi(-y)$.

Definamos agora $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$g(y) = \frac{d(y, A)}{d(y, A) + d\left(y, S^n \setminus U_{x_j}\right)} \varphi(y)\psi(y).$$

Temos que está bem definida, pois $A \subset U_{x_j}$ e $S^n \setminus U_{x_j}$ são fechados em S^n, o que implica que $d(y, A) = 0$ e $d(z, S^n \setminus U_{x_j}) = 0$ apenas se $y \in A$ e $z \in S^n \setminus U_{x_j}$, e $A \cap \left(S^n \setminus U_{x_j}\right) = \emptyset$ acarretam que $d(y, A)$ e $d\left(y, S^n \setminus U_{x_j}\right)$ não são simultaneamente nulas e, consequentemente, temos que $d(y, A) + d\left(y, S^n \setminus U_{x_j}\right) \neq 0$. Como g pode ser vista como composição de funções contínuas, g é contínua. Portanto $g \in \mathcal{F}$.

Vamos calcular agora $\beta(g)$. Se $y \in A$, temos que $-y \in A$ e, consequentemente, $g(y) = 0 = g(-y)$. Portanto $A \subset \beta(g)$.

Mas antes de mostrar que $\beta(g) \subset A$, enunciaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 3.8 Se $M \subset S^n$ é um conjunto invariante pela antípoda então, $S^n - M$ é invariante pela antípoda e $d(y, M) = d(-y, M)$.

De forma similar à demonstração da afirmação 3.2, pode-se demonstrar a segunda parte desta afirmação enquanto a primeira decorre do fato de M, sendo invariante pela antípoda, implicar que se um elemento não pertence a M então o seu oposto também não pertencerá.

Pela afirmação 3.8 temos para todo $y \in S^n$ que:

$$\frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,S^n \setminus U_{x_j})} = \frac{d(-y,A)}{d(-y,A)+d(-y,S^n \setminus U_{x_j})}.$$

Suponhamos, por absurdo, que existe $y \in S^n \setminus A$ tal que $g(y) = g(-y)$. Desde que $y \in S^n \setminus A$, temos que:

$$\frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,S^n \setminus U_{x_j})} = \frac{d(-y,A)}{d(-y,A)+d(-y,S^n \setminus U_{x_j})} \neq 0.$$

Logo,

$$g(y) = g(-y) \Leftrightarrow \varphi(y)\psi(y) = \varphi(-y)\psi(-y),$$

isto juntamente com a observação 3.7, implica que

$$g(y) = g(-y) \Leftrightarrow \psi(y) = \psi(-y).$$

O que é um absurdo, pois temos que $-x, x \in A$ e pela afirmação 3.6 não existe y diferente de $\pm x$ tal que $\psi(y) = \psi(-y)$. Portanto $\beta(g) \subset A$ e, assim, concluímos que $\beta(g) = A$.

Afirmação 3.9 A função g pertence à bola centrada em f_{x_j} de raio $2\varepsilon_{x_j}$.

Demonstracão: Para demonstrar esta afirmação é suficiente demonstrar que

$$d\left(g, f_{x_j}\right) = sup\{d\left(g(y), f_{x_j}(y)\right); y \in S^n\} < 2\varepsilon_{x_j}.$$

Se $y \in U_{x_j}$ então, temos que:

$$\frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,S^n \setminus U_{x_j})} < 1 \quad \text{e} \quad d(y,C) < \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}.$$

Logo, pela afirmação 3.7, obtemos que $\|g(y)\| < \dfrac{\varepsilon_{x_j}}{2}$. Além disso,

$$\|f_{x_j}(y)\| = d(y,C)\|\sigma_{x_j}(y)\| < \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}.$$

Portanto,

$$d(g(y), f_{x_j}(y)) = \|g(y) - f_{x_j}(y)\| \leq \|g(y)\| + \|f_{x_j}(y)\| < \varepsilon_{x_j}.$$

Se $y \in S^n \setminus U_{x_j}$ então, temos que:

$$\frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,S^n \setminus U_{x_j})} = 1 \quad \text{e} \quad d(y,C) \geq \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}.$$

Logo, $\varphi(y) = d(y,C)$ e $g(y) = d(y,C)\psi(y)$. Mas $B(\pm x_j, 2\delta_{x_j}) \subset U_{x_j}$ e como rotações preservam distância, temos que $R_{x_j}|_{S^n}\left(B(\pm x_j, 2\delta_{x_j})\right) = B(\pm s, 2\delta_{x_j})$ e, consequentemente, $R_{x_j}|_{S^n}(y) \in S^n - B(\pm s, 2\delta_{x_j})$. Daí segue que $\psi(y) = \sigma_{x_j}(y)$, o que acarreta que

$$g(y) = d(y,C)\sigma_{x_j}(y) = f_{x_j}(y).$$

E portanto,

$$d(g(y), f_{x_j}(y)) = 0.$$

Como para todo $x \in S^n$ temos que $d(g(y), f_{x_j}(y)) < \varepsilon_{x_j}$, podemos concluir que

$$d(g, f_{x_j}) \leq \varepsilon_{x_j} < 2\varepsilon_{x_j}. \qquad \square$$

Até então escolhemos $U \in \tau$ arbitrário, onde τ é uma topologia sobre $\mathcal{B}$ tal que a função β é contínua. Pegamos um $C \in U$ qualquer e construímos $V^{\#}$ pertencente a topologia semi finita superior tal que $C \in V^{\#}$ e escolhemos um $A \in V^{\#}$ qualquer. Logo, para concluir a demonstração de que a topologia semi finita superior é a mais fina sobre $\mathcal{B}$ tal que β é contínua basta mostrar que $A \in U$.

Como $x_j \in C$, temos pela afirmação acima e a afirmação 3.3 que $g \in \beta^{-1}(U)$. E portanto, $A = \beta(g) \in U$ e, consequentemente, $V^{\#} \subset U$.

E terminamos este trabalho com a seguinte representação para conjuntos F fechados não vazio e invariantes pela antípoda: dado qualquer conjunto fechado não vazio e invariante pela antípoda, existe pelo menos uma função contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$F = \{x \in S^n; f(x) = f(-x)\}.$$

Tal representação é consequência da observação 3.3.

Referências Bibliográficas

[1] Gauld D., *A note on the BOrsuk-Ulam Theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 99, nº 3 1987; 571-572.

[2] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura Aplicada, Projeto Euclides, 2006.

[3] Maunder, C. R. F., *Algebraic topology.* Mineola: Dover, 1996.

[4] Michael, Ernest, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71, 1951; 152-182.

[5] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[6] Rotman, Joseph J., *An introduction to algebraic topology.* New York: Springer-Verlag, 1998.

[7] Vick, J. W. , *Homology Theory - An Introduction To Algebraic Topology*, Academic Press, Inc. , New York , 1973.