

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Equação de Codazzi em Superfícies

Maria Rosilene Barroso dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Equação de Codazzi em Superfícies

Maria Rosilene Barroso dos Santos

Dissertação apresentada ao
PPG-M da UFSCar como parte
dos requisitos para a obtenção
do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

São Carlos - SP

2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S237ec

Santos, Maria Rosilene Barroso dos.

A Equação de Codazzi em superfícies / Maria Rosilene Barroso dos Santos. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
80 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

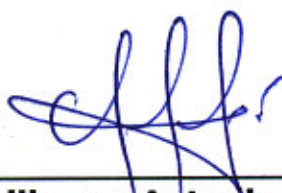
1. Geometria. 2. Codazzi, Equação de. 3. Par de Codazzi.
4. Curvaturas médias e gaussiana. 5. Weingarten,
Superfícies de. 6. Hopf, Diferencial de. I. Título.

CDD: 516 (20^a)

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
DM - UFSCar



Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
DM - UFSCar



Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis
ICMC - USP

*Dedico este trabalho a meus pais
Francisco de Assis e Maria das Graças*

*“(...) o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento
e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição,
não é a presença mas o ato de atingir a meta.”*

Carl Friedrich Gauss.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que se faz presente todos os dias de minha vida e orienta todo meu caminho, me dando forças para lutar contra as dificuldades.

Agradeço a minha família que é a base de toda minha conquista.

Agradeço ao meu Orientador pela atenção, paciência e por todo o conhecimento que adquiri com este trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos pelo carinho e incentivo. Em particular, agradeço a minhas amigas, ou melhor, irmãs do coração Maria Cristina, Içamira e Patrícia pelo companherismo de todos os dias que jamais vou esquecer.

Finalmente, agradeço à Capes, Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior, pelo financiamento deste projeto.

Resumo

Nesta dissertação, baseada no artigo “*The Codazzi Equation for Surfaces*” de Juan A. Aledo, José M. Espinar e José A. Gálvez [8], descrevemos algumas aplicações de uma teoria abstrata para a equação de Codazzi em superfícies. Nessa teoria são estudados de modo abstrato, pares de formas quadráticas definidos em uma superfície satisfazendo certas propriedades, em particular os chamados pares de Codazzi, para os quais a equação de Codazzi é satisfeita. Dentre as aplicações, apresentamos uma demonstração de uma versão abstrata do clássico teorema de Hopf sobre superfícies homeomorfas à esfera imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante. Outras aplicações são demonstrações do teorema de Liebmann sobre superfícies completas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante positiva e do teorema de Grove sobre rigidez dos ovalóides. Estudamos também a existência de diferenciais quadráticas holomorfas associadas a pares de Codazzi, as quais são usadas, em particular, na classificação das superfícies de Weingarten especiais elípticas de tipo não-mínimo, completas e mergulhadas em \mathbb{R}^3 , cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal.

Palavra-chave: Equação de Codazzi, par de Codazzi, curvaturas médias e Gaussiana, superfícies de Weingarten, diferencial de Hopf.

Abstract

In this work, based on the article “*The Codazzi Equation for Surfaces*” by Juan A. Aledo, José M. Espinar and José A. Gálvez [8], we describe some applications of an abstract theory for the Codazzi equation on surfaces. This theory deals with abstract pairs of quadratic forms on a surface, in particular the so-called Codazzi pairs, for which the Codazzi equation is satisfied. Among the applications, we give a proof of an abstract version of a classical theorem due to Hopf on immersed spheres in Euclidean space \mathbb{R}^3 with constant mean curvature. Other applications are proofs of Liebmann’s theorem on complete surfaces with constant Gaussian curvature in \mathbb{R}^3 and of Grove’s theorem on the rigidity of ovaloids. We also study the existence of holomorphic quadratic differentials associated with Codazzi pairs. This is used, in particular, in the classification of complete embedded elliptic special Weingarten surfaces of non-minimal type in \mathbb{R}^3 whose Gaussian curvature does not change sign.

Key-words: Codazzi equation, Codazzi pair, Gaussian and mean curvatures, Weingarten surface, Hopf differential.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Pares Fundamentais	4
1.1.1 Complexificação de uma forma quadrática	6
1.1.2 As curvaturas média e Gaussiana de um par fundamental	7
1.2 A conexão de Levi-Civita complexificada	8
1.3 Pares fundamentais em parâmetros especiais	10
1.3.1 Parâmetros Isotérmicos	11
1.3.2 O gradiente	14
1.3.3 Pontos umbílicos e a diferencial de Hopf	15
1.3.4 Parâmetros Duplamente Ortogonais	15
1.4 Pares de Weingarten em Σ	16
1.5 Índice de um ponto umbílico	18
1.6 Apêndice: o índice de uma singularidade isolada	20
2 Pares de Codazzi	22
2.1 Introdução	22
2.2 Pares de Codazzi	23
2.3 Pares de Weingarten em uma esfera topológica	24
2.4 Os Teoremas de Bonnet e Christoffel	28

2.5	Os Teoremas de Grove e Liebmann	33
3	A função de Codazzi	40
4	Diferenciais quadráticas holomorfas	47
4.1	Pares de Weingarten Especiais	53
5	Aplicações a superfícies de \mathbb{R}^3	58
5.1	O Princípio do Máximo para as Superfícies de Weingarten Especiais Elípticas	59
5.1.1	O Princípio do Máximo de Hopf	59
5.1.2	Demonstração do Teorema 5.2	60
5.2	Estimativa de altura máxima	65
5.3	Aplicação	72
	Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

1.1	Índice de uma singularidade isolada	21
5.1	Superfície Σ gráfico compacto cujo bordo $\partial\Sigma$ está contido no plano P	67
5.2	Construção do retângulo Π e da reta η	68
5.3	As esferas $\Sigma_0(x)$ centradas em cada ponto de η	69
5.4	Aplicação da técnica de reflexão de Alexandrov.	70
5.5	Superfície Σ compacta, mergulhada cuja a $\partial\Sigma$ está contida no plano P	71

Introdução

Em uma superfície Σ imersa em \mathbb{R}^3 estão definidas duas formas quadráticas, chamadas de *primeira e segunda formas fundamentais* de Σ , que satisfazem condições de compatibilidade conhecidas como as equações de Gauss e Codazzi.

Alguns resultados clássicos da teoria de superfícies em \mathbb{R}^3 , como o Teorema de Hopf caracterizando a esfera umbílica dentre as superfícies homeomorfas à esfera imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante, dependem, em essência, apenas da equação de Codazzi. Tendo em vista possíveis generalizações e outros resultados dessa natureza, autores como T. K. Milnor [17], [19] e [20], introduziram uma teoria abstrata de pares de formas quadráticas (I, II) em uma superfície, em que I é uma métrica Riemanniana e a equação de Codazzi é satisfeita. Nessas condições, o par (I, II) é chamado um *par de Codazzi*.

Neste trabalho, baseado no artigo de J. Aledo, J. M. Espinar e A. Galvez [8], apresentamos novas aplicações dessa teoria. Como veremos, além de conduzir a interessantes generalizações de resultados clássicos da teoria de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , como o Teorema de Hopf acima citado, a teoria de pares de Codazzi permite unificar demonstrações de teoremas aparentemente não relacionados e fornece técnicas úteis para mostrar resultados de unicidade para certas classes de superfícies.

A seguir descrevemos os conteúdos de cada um dos capítulos desta dissertação:

No capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos utilizados no restante do trabalho, assim como as ferramentas necessárias para as demonstrações dos principais resultados dos capítulos seguintes. Destacamos o conceito de *par fundamental* de formas quadráticas em uma superfície Σ e sua representação com respeito a sistemas de coordenadas especiais.

Definimos as curvaturas média e Gaussiana de um par fundamental e introduzimos a noção de um par de Weingarten. Além disso, mostramos a importante relação entre a *diferencial de Hopf* e os pontos umbílicos de um par fundamental.

No capítulo 2 definimos *par de Codazzi* e demonstramos um dos teoremas principais do trabalho, o qual é uma versão abstrata de uma generalização do Teorema de Hopf para uma classe de pares de Codazzi que são também de Weingarten. Como interessantes aplicações desse resultado, apresentamos versões abstratas de um Teorema devido a Bonnet e da parte de unicidade em um problema de Christoffel. Apresentamos ainda duas versões abstratas: o Teorema de Grove sobre a rigidez dos ovalóides em \mathbb{R}^3 e o Teorema de Liebmann sobre as superfícies completas.

No capítulo 3 estudamos a *função de Codazzi*, que mede o quanto um par fundamental deixa de ser de Codazzi. Mostramos uma versão do teorema 2.4 em que a hipótese de que o par seja de Weingarten é substituída por uma estimativa da função de Codazzi em uma vizinhança de cada um de seus pontos umbílicos.

No capítulo 4, mostramos que para cada par de Codazzi em uma superfície Σ é possível associar um outro par de Codazzi cuja diferencial de Hopf é holomorfa. Introduzimos também uma importante classe de pares de Codazzi, os pares de Weingarten especiais.

No capítulo 5 mostramos como a teoria abstrata desenvolvida nos capítulos anteriores pode ser usada para classificar as superfícies de Weingarten especiais elípticas em \mathbb{R}^3 cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos utilizados no restante do trabalho. Definimos um *par fundamental* de formas quadráticas em uma superfície, inspirados pela primeira e segunda formas quadráticas de uma superfície em \mathbb{R}^3 . Discutimos as representações de um par fundamental com respeito a sistemas de coordenadas (ou parâmetros) na superfície, em particular parâmetros isotérmicos e duplamente ortogonais, assim como as representações da complexificação de tais pares em relação aos parâmetros complexos associados. Definimos as curvaturas média e Gaussiana de um par fundamental e obtemos suas expressões em termos de parâmetros locais. Introduzimos a classe de *pares fundamentais de Weingarten*, em que a curvatura média é uma função da curvatura Gaussiana. Discutimos a noção de *ponto umbílico* de um par fundamental e sua relação com a *diferencial de Hopf* do par. Definimos o conceito de *índice* de um ponto umbílico de um par fundamental e obtemos uma fórmula para calculá-lo em termos de sua diferencial de Hopf.

Em todo o trabalho, admitimos como pré-requisito o conteúdo dos capítulos 1 e 2 de [12]. Usamos o termo *diferenciável* para significar de classe C^∞ .

1.1 Pares Fundamentais

Neste trabalho, usaremos o termo *superfície* para nos referir a uma variedade diferenciável orientável de dimensão 2. Dada uma superfície Σ , denotaremos por $\mathcal{X}(\Sigma)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em Σ e por $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ o conjunto das funções reais diferenciáveis em Σ . Uma *forma bilinear* em Σ é uma aplicação

$$T: \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$$

tal que

- (i) $T(fX, Y) = fT(X, Y) = T(X, fY)$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$;
- (ii) $T(X + Z, Y) = T(X, Y) + T(Z, Y)$ e $T(X, Y + Z) = T(X, Y) + T(X, Z)$ para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

A propriedade (i) implica que o valor de $T(X, Y)$ em $p \in \Sigma$ depende apenas dos valores de X e Y em p . Assim, para cada $p \in \Sigma$, a forma bilinear T define uma aplicação bilinear

$$T_p: T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R},$$

em que $T_p\Sigma$ denota o plano tangente a Σ em p .

Diz-se que a forma bilinear T é *simétrica* se $T(X, Y) = T(Y, X)$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Equivalentemente, T é simétrica se T_p é uma aplicação bilinear simétrica para todo $p \in \Sigma$. Se, além disso, para cada $p \in \Sigma$ a aplicação bilinear T_p é positiva definida, isto é, $T_p(X_p, X_p) > 0$ para qualquer $X_p \in T_p\Sigma$, então T é uma *métrica Riemanniana* em Σ .

Se T é uma forma bilinear simétrica em Σ , sua *forma quadrática* associada é a aplicação

$$\hat{T}: \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$$

dada por $\hat{T}(X) = T(X, X)$ para qualquer $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Em geral usaremos o mesmo símbolo para representar uma forma bilinear simétrica e sua forma quadrática associada.

Vejamos como se exprime uma forma bilinear simétrica em uma superfície Σ em termos de um sistema de coordenadas (x, U) em um aberto $U \subset \Sigma$, com $x = (x_1, x_2)$. Denotamos por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ os campos coordenados e por dx_1, dx_2 as 1-formas duais, ou seja,

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j . \end{cases}$$

Então, para cada $p \in U$, as aplicações bilineares $\{dx_i(p) \otimes dx_j(p) \mid i, j = 1, 2\}$ formam uma base do espaço das aplicações bilineares $\{\alpha: T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}\}$. Portanto, toda forma bilinear T em Σ se exprime em U por

$$T = \sum_{i,j=1}^2 T_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

em que $T_{ij} = T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, $1 \leq i, j \leq 2$, são funções reais diferenciáveis em U . Em particular, se T é simétrica, sua forma quadrática associada (denotada com o mesmo símbolo T) se exprime em U por

$$T = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2, \quad (1.1)$$

em que $E = T_{11}$, $F = T_{12} = T_{21}$ e $G = T_{22}$.

Definição 1.1. Um par fundamental em uma superfície Σ é um par (I, II) de formas quadráticas reais em Σ tal que I é uma métrica Riemanniana.

Ao par fundamental (I, II) está associado $S: \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$, chamado de *operador de forma* de (I, II) , dado por

$$II(X, Y) = I(SX, Y), \quad (1.2)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Como $S(fX) = fS(X)$ para quaisquer $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, para cada $p \in \Sigma$ obtemos um endomorfismo auto-adjunto $S: T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ dado por $II(X_p, Y_p) = I(S_p X_p, Y_p)$ para quaisquer $X_p, Y_p \in T_p\Sigma$.

1.1.1 Complexificação de uma forma quadrática

Dada uma superfície Σ , definimos o plano tangente complexificado a Σ em p , denotado por $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$, por

$$T_p^{\mathbb{C}}\Sigma = \{X_p + iY_p; X_p, Y_p \in T_p\Sigma\}.$$

Se T é uma forma bilinear simétrica em Σ , para cada $p \in \Sigma$ podemos estender \mathbb{C} -bilinearmente a aplicação T_p a uma aplicação \mathbb{C} -bilinear $T_p^{\mathbb{C}}: T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \times T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$.

Se (x, U) é um sistema de coordenadas em um aberto $U \subset \Sigma$ contendo p , com $x = (x_1, x_2)$, denotamos $z = x_1 + ix_2$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (1.3)$$

Como $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ é uma base para $T_p\Sigma$ sobre \mathbb{R} , então $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ é uma base para $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$ sobre \mathbb{C} . Além disso, denotando $dz = dx_1 + idx_2$ e $d\bar{z} = dx_1 - idx_2$, para cada $p \in U$ o conjunto $\{dz(p) \otimes dz(p), dz(p) \otimes d\bar{z}(p), d\bar{z}(p) \otimes dz(p), d\bar{z}(p) \otimes d\bar{z}(p)\}$ forma uma base do espaço das aplicações bilineares $\{\alpha^{\mathbb{C}}: T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \times T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \rightarrow \mathbb{C}\}$.

Portanto, a forma quadrática associada a $T^{\mathbb{C}}$ se exprime em U como

$$T^{\mathbb{C}} = pdz^2 + 2\lambda |dz|^2 + qd\bar{z}^2,$$

em que $|dz|^2$ significa $dzd\bar{z}$,

$$p = T^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} T^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{4} (E - G - 2iF),$$

$$q = T^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{4} T^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{4} (E - G + 2iF) = \bar{p}$$

e

$$\lambda = T^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{4} T^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{4} (E + G).$$

1.1.2 As curvaturas média e Gaussiana de um par fundamental

Definimos a curvatura média $H(I, II)$, a curvatura Gaussiana $K(I, II)$ e as curvaturas principais k_1 e k_2 do par fundamental (I, II) , respectivamente, como a metade do traço, o determinante e os autovalores do operador de forma associado S . Assim,

$$H(I, II) = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad , \quad K(I, II) = k_1 k_2 . \quad (1.4)$$

Para exprimir as curvaturas média e Gaussiana de (I, II) com respeito a um sistema de coordenadas (x, U) em Σ , com $x = (x_1, x_2)$, sejam

$$I = Edx_1^2 + 2Fx_1dx_2 + Gdx_2^2$$

e

$$II = edx_1^2 + 2fdx_1dx_2 + gdx_2^2$$

as expressões de I e II em termos de (x, U) e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a matriz do operador de forma S com respeito à base formada pelos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$. Então

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} .$$

Como I é uma métrica Riemanniana, a matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ é inversível, logo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} .$$

Portanto,

$$H(I, II) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} \quad , \quad K(I, II) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} . \quad (1.5)$$

Vejam agora como as curvaturas média e Gaussiana do par fundamental (I, II) se exprimem em termos dos coeficientes das complexificações

$$I = pdz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2 \quad (1.6)$$

e

$$II = Qdz^2 + 2\rho |dz|^2 + \bar{Q}d\bar{z}^2 \quad (1.7)$$

de I e II , respectivamente, em que

$$p = \frac{1}{4}(E - G - 2iF) , \quad (1.8)$$

$$\lambda = \frac{1}{4}(E + G) , \quad (1.9)$$

e

$$Q = \frac{1}{4}(e - g - 2if) , \quad (1.10)$$

$$\rho = \frac{1}{4}(e + g) . \quad (1.11)$$

Por um cálculo direto usando (1.5) e as expressões acima obtemos

$$H = \frac{p\bar{Q} - 2\lambda\rho + \bar{p}Q}{2(|p|^2 - \lambda^2)} , \quad K = \frac{|Q|^2 - \rho^2}{|p|^2 - \lambda^2} . \quad (1.12)$$

1.2 A conexão de Levi-Civita complexificada

Seja I uma métrica Riemanniana na superfície Σ e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Dado um sistema de coordenadas (x, U) em um aberto $U \subset \Sigma$, com $x = (x_1, x_2)$, os símbolos de Christoffel de ∇ com respeito a (x, U) são dados por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} .$$

Lembramos como exprimir Γ_{ij}^k em termos dos coeficientes de I com respeito a (x, U) . Temos:

$$I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} I\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

logo

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_{x_1}}{2}. \quad (1.13)$$

Analogamente,

$$I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1} I\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) - I\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

logo

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_{x_1} - \frac{E_{x_2}}{2}. \quad (1.14)$$

Multiplicando (1.13) por F , (1.14) por E e depois subtraindo as equações, obtemos:

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2(EG - F^2)}(EE_{x_2} - 2EF_{x_1} + FE_{x_1}). \quad (1.15)$$

Multiplicando (1.13) por G , (1.14) por F e depois subtraindo as equações, obtemos:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_{x_1} - 2FF_{x_1} + FE_{x_2}). \quad (1.16)$$

De modo análogo obtemos:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_{x_2} - FG_{x_1}), \quad (1.17)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_{x_1} - FE_{x_2}), \quad (1.18)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2(EG - F^2)}(GG_{x_1} - 2FG_{x_2} + FG_{x_2}), \quad (1.19)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_{x_2} - 2FF_{x_2} + FG_{x_1}). \quad (1.20)$$

Denotamos pelo mesmo símbolo ∇ a extensão \mathbb{C} -bilinear de ∇ . Se $z = x_1 + ix_2$ e $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ são dados por (1.3), os símbolos de Christoffel complexos associados a z são definidos por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial z} + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Calculamos os valores de ${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1, {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2$ como segue:

$$\begin{aligned} I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 p + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \lambda &= \frac{p_z}{2}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) - I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), \\ {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \lambda + {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 \bar{p} &= \lambda_z - \frac{p_{\bar{z}}}{2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Multiplicando (1.21) por λ , (1.22) por p e depois subtraindo as equações, obtemos:

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(pp_{\bar{z}} - 2p\lambda_z + \lambda p_z). \quad (1.23)$$

Multiplicando (1.21) por \bar{p} , (1.22) por λ e depois subtraindo as equações, obtemos:

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(\bar{p}p_z - 2\lambda\lambda_z + \lambda p_{\bar{z}}). \quad (1.24)$$

Analogamente, obtemos

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(\bar{p}p_{\bar{z}} - \lambda\bar{p}_z), \quad (1.25)$$

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(p\bar{p}_z - \lambda p_{\bar{z}}), \quad (1.26)$$

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(\bar{p}\bar{p}_z - 2\bar{p}\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{p}_{\bar{z}}), \quad (1.27)$$

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(p\bar{p}_{\bar{z}} - 2\lambda\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{p}_z). \quad (1.28)$$

1.3 Pares fundamentais em parâmetros especiais

Nesta seção obtemos as representações de pares fundamentais em uma superfície Σ com respeito a parâmetros especiais: os parâmetros isotérmicos e os parâmetros duplamente ortogonais.

1.3.1 Parâmetros Isotérmicos

Um sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2)$ é chamado *isotérmico*, ou *conforme*, para uma métrica Riemanniana $I = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$, quando verifica

$$E = G > 0 \text{ e } F = 0 .$$

Equivalentemente, a complexificação de I expressa em termos de $z = x_1 + ix_2$ por (1.6) satisfaz

$$p = 0 .$$

É um resultado profundo (veja, por exemplo, [14]) que, para qualquer métrica Riemanniana em uma superfície Σ , existem sempre localmente parâmetros isotérmicos em Σ . Desse fato decorre que uma métrica Riemanniana em uma superfície orientável Σ induz em Σ uma estrutura de superfície de Riemann. Recordamos que uma superfície de Riemann é uma variedade diferenciável de dimensão 2 munida de um atlas tal que as mudanças de coordenadas são aplicações holomorfas.

Lembramos que uma aplicação $w = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ é holomorfa se são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann, ou seja, $u_{x_1} = v_{x_2}$ e $u_{x_2} = -v_{x_1}$. Equivalentemente, w é holomorfa se, e somente se, $w_{\bar{z}} = 0$.

Em termos de pares fundamentais, dizemos que uma forma quadrática $Q dz^2$ é holomorfa com respeito a um parâmetro conforme local z se $Q_{\bar{z}} = 0$. Em alguns dos resultados dos capítulos seguintes usaremos o seguinte importante resultado da teoria de superfícies de Riemann.

Teorema 1.2. *Se Σ é uma superfície de Riemann homeomorfa a esfera, então toda forma quadrática holomorfa em Σ é identicamente nula.*

Demonstração. Ver [6]. □

Descrevemos a seguir a representação de um par fundamental (I, II) em termos de um parâmetro conforme local, assim como certas equações que serão úteis nas demonstrações de alguns resultados dos próximos capítulos.

Proposição 1.3. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ e z um parâmetro conforme local para a métrica Riemanniana I . Então*

$$\begin{aligned} I &= 2\lambda |dz|^2, \\ II &= Q dz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Além disso, as seguintes equações se verificam:

$$K = H^2 - \frac{|Q|^2}{\lambda^2}, \quad (1.30)$$

$$S \frac{\partial}{\partial z} = H \frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (1.31)$$

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_z}{\lambda}, \quad (1.32)$$

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^2 = 0, \quad (1.33)$$

$${}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 = 0. \quad (1.34)$$

Demonstração. Como $z = x_1 + ix_2$ é um parâmetro conforme local com respeito à métrica Riemanniana I , dada por (1.6), temos que $p = 0$. Assim, de (1.23) a (1.25) obtemos (1.32), (1.33) e (1.34). Além disso, substituindo $p = 0$ em (1.12) temos:

$$H = \rho/\lambda \Leftrightarrow \rho = \lambda H,$$

donde segue (1.29).

Por outro lado, sejam $a, b: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$S \frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Como

$$Q = I(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) = b\lambda \quad \text{e} \quad \lambda H = I(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = a\lambda,$$

obtemos (1.31).

Finalmente, (1.30) segue do fato de que a curvatura Gaussiana $K(I, II)$ é o determinante do operador de forma S e a matriz de S com respeito à base $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$ é

$$\begin{pmatrix} H & \bar{Q}/\lambda \\ Q/\lambda & H \end{pmatrix}.$$

□

Quando II é uma métrica Riemanniana, ou seja, quando a curvatura Gaussiana do par (I, II) satisfaz $K > 0$, o par (II, I) é um par fundamental. Em termos de (II, I) , a Proposição 1.3 se escreve como:

Proposição 1.4. *Sejam (II, I) um par fundamental em Σ e z um parâmetro conforme local para II . Então*

$$\begin{aligned} II &= 2\rho |dz|^2 & , \\ I &= Pdz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{P}d\bar{z}^2 & . \end{aligned} \tag{1.35}$$

Além disso,

$$S \frac{\partial}{\partial z} = \frac{K}{\rho} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} - P \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \tag{1.36}$$

Demonstração. Seja $Z = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \in T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$. Então,

$$\begin{aligned} I \left(Z, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) &= aI \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + bI \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= aP + b\lambda , \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} I \left(Z, \frac{\partial}{\partial z} \right) &= aI \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) + bI \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= a\lambda + b\bar{P} . \end{aligned} \tag{1.38}$$

Multiplicando (1.37) por \bar{P} e (1.38) por λ , e depois subtraindo-as, obtemos:

$$a = \frac{1}{\lambda^2 - |P|^2} \left(I \left(Z, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \lambda - I \left(Z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{P} \right) .$$

Multiplicando (1.37) por λ e (1.38) por P e depois subtraindo as equações, obtemos:

$$b = \frac{1}{\lambda^2 - |P|^2} \left(I \left(Z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \lambda - I \left(Z, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) P \right) .$$

Portanto, se

$$S \frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ,$$

então

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\lambda^2 - |P|^2} \left[\left(I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \lambda - I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \bar{P} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&= \frac{\rho \lambda}{\lambda^2 - |P|^2} \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{K \lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{\lambda^2 - |P|^2} \left[\left(I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \lambda - I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) P \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \\
&= \frac{\rho P}{\lambda^2 - |P|^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
&= \frac{K P}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos (1.36).

1.3.2 O gradiente

Seja f uma função real diferenciável em uma superfície Σ munida de uma métrica Riemanniana I . O *gradiente* de f , denotado por ∇f , é definido por

$$I(\nabla f, X) = X(f) , \quad \forall X \in \mathcal{X}(\Sigma) .$$

Para uso posterior, vamos exprimir ∇f em termos de um sistema de coordenadas isotérmicos $x = (x_1, x_2)$ em Σ com respeito a I , ou seja,

$$I = 2\lambda(dx_1^2 + dx_2^2),$$

com $2\lambda = I\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) = I\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. Assim, dado $w \in T_p\Sigma$, podemos escrever

$$w = \frac{1}{2\lambda} \left(I \left(w, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + I \left(w, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) .$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{2\lambda} \left(I \left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + I \left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) , \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left(f_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + f_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) .
\end{aligned}$$

Em particular

$$I(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2\lambda}(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2). \quad (1.39)$$

□

1.3.3 Pontos umbílicos e a diferencial de Hopf

O seguinte conceito irá desempenhar um papel importante nos capítulos seguintes.

Definição 1.5. Dizemos que $p \in \Sigma$ é um *ponto umbílico* do par fundamental (I, II) se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $II = \alpha I$ em p . Equivalentemente, o operador de forma S satisfaz $S = \alpha Id$ em p .

Assim, $p \in \Sigma$ é um ponto umbílico do par fundamental (I, II) se as curvaturas principais de (I, II) coincidem em p , ou equivalentemente, $H^2 - K = 0$ em p .

Definição 1.6. A *diferencial de Hopf* do par fundamental (I, II) é a parte $(2, 0)$ de II .

Em termos da representação (1.29) de (I, II) com respeito a um parâmetro isotérmico z , a diferencial de Hopf do par fundamental (I, II) é a forma quadrática Qdz^2 .

A diferencial de Hopf nos permite determinar os pontos umbílicos do par fundamental (I, II) :

Proposição 1.7. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ e z um parâmetro conforme local em Σ . Então, $p \in \Sigma$ é um ponto umbílico do par (I, II) se, e somente se, $Q(p) = 0$.*

Demonstração. Decorre de (1.29) que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $II = \alpha I$ em p se, e somente se, $Q(p) = 0$. □

1.3.4 Parâmetros Duplamente Ortogonais

Um sistema de coordenadas (x, y) em uma superfície Σ é chamado *duplamente ortogonal* para um par fundamental (I, II) se as representações $I = Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2$

e $II = edx^2 + 2fdxdy + gdy^2$ de I e II , respectivamente, com respeito a (x, y) , satisfazem

$$F = f = 0 .$$

Assim, os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ são autovetores do operador auto-adjunto S , ou seja,

$$S \frac{\partial}{\partial x} = k_1 \frac{\partial}{\partial x} , \quad S \frac{\partial}{\partial y} = k_2 \frac{\partial}{\partial y} .$$

Portanto, podemos escrever

$$I = Edx^2 + Gdy^2 , \tag{1.40}$$

$$II = k_1 Edx^2 + k_2 Gdy^2 . \tag{1.41}$$

Proposição 1.8. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ e (x, y) um parâmetro duplamente ortogonal em Σ com respeito a (I, II) . Então as seguintes equações se verificam:*

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_x}{2E} , \tag{1.42}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_y}{2G} , \tag{1.43}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_y}{2E} , \tag{1.44}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_x}{2G} , \tag{1.45}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_x}{2E} , \tag{1.46}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{G_y}{2G} . \tag{1.47}$$

Demonstração. Segue das equações (1.15) a (1.20). □

1.4 Pares de Weingarten em Σ

Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ . Para cada $p \in \Sigma$, a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K do par fundamental (I, II) verificam $H^2 - K \geq 0$.

Portanto, a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\longmapsto (H(p), K(p)) \end{aligned}$$

toma valores em $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \geq y\}$. Chamamos de *diagrama de curvatura* do par fundamental (I, II) a imagem de Σ pela aplicação Ψ .

Exemplo 1.1. Se o par fundamental (I, II) é totalmente umbílico, então o diagrama de curvatura do par (I, II) é o único ponto $\{(0, 0)\}$.

Definição 1.9. Dizemos que um par fundamental (I, II) em Σ é um *par de Weingarten* se o diagrama de curvatura do par fundamental (I, II) é uma curva (localmente) dada pela equação

$$W(H(p), K(p)) = 0, \quad p \in \Sigma \quad (1.48)$$

em que W é uma função diferenciável definida em um aberto de \mathbb{R}^2 contendo $\Psi(\Sigma)$.

Em termos das curvaturas principais do par fundamental (I, II) , a relação (1.48) pode ser escrita como

$$F(k_1, k_2) = 0,$$

em que $F(k_1, k_2) = W(\frac{1}{2}(k_1 + k_2), k_1 k_2)$. Equivalentemente,

$$W(H, K) = F\left(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}\right). \quad (1.49)$$

A seguir alguns exemplos de pares de Weingarten.

Exemplo 1.2. Seja (I, II) um par fundamental com $H(p) = c, \forall p \in \Sigma$. Então (I, II) é de Weingarten, pois (1.48) é satisfeita por W dada por

$$W(x, y) = x - c.$$

Exemplo 1.3. Sejam Σ uma superfície de rotação de \mathbb{R}^3 parametrizada por

$$\varphi(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, h(t)),$$

em que $t \rightarrow (f(t), h(t))$ parametriza a curva geratriz e θ é o ângulo de rotação em torno do eixo z (eixo de rotação). Um cálculo simples mostra que as curvaturas principais de Σ , e portanto suas curvaturas média e Gaussiana, dependem somente do parâmetro t , ou

seja, são constantes ao longo dos círculos de rotação. Logo, o diagrama de curvatura de Σ coincide com a imagem de um meridiano pela aplicação Ψ . Portanto, o par fundamental (I, II) , em que I e II são as formas fundamentais de Σ , é um par de Weingarten.

1.5 Índice de um ponto umbílico

Seja $p \in \Sigma$ um ponto umbílico isolado de um par fundamental (I, II) . Então p é uma singularidade isolada dos campos de direções em Σ determinados pelas direções principais de (I, II) , ou seja, pelos autovetores do operador de forma S . Para obter uma expressão para o índice de p , lembremos como se exprimem as direções principais de (I, II) em termos de um sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2)$ em Σ .

Temos que $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ é uma direção principal de (I, II) se, e somente se, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de máximo ou de mínimo para a função

$$\phi(a_1, a_2) = II\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = ea_1^2 + 2fa_1a_2 + ga_2^2$$

com a restrição

$$1 = \psi(a_1, a_2) := I\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = Ea_1^2 + 2Fa_1a_2 + Ga_2^2.$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os gradientes

$$\nabla\phi(a_1, a_2) = 2(ea_1 + fa_2, fa_1 + ga_2) \quad \text{e} \quad \nabla\psi(a_1, a_2) = 2(Ea_1 + Fa_2, Fa_1 + Ga_2)$$

devem ser linearmente dependentes em (a_1, a_2) , ou seja,

$$(fE - eF)a_1^2 + (gE - eG)a_1a_2 + (gF - fG)a_2^2 = 0.$$

Equivalentemente, definindo a forma quadrática

$$T = (fE - eF)dx_1^2 + (gE - eG)dx_1dx_2 + (gF - fG)dx_2^2,$$

devemos ter

$$T\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Se o sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2)$ for isotérmico, então

$$T = fEdx_1^2 + E(g - e)dx_1dx_2 - fEdx_2^2,$$

logo $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ é uma direção principal de (I, II) se, e somente se,

$$\hat{T}\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 0,$$

em que

$$\hat{T} = -fdx_1^2 + (e - g)dx_1dx_2 + fdx_2^2. \quad (1.50)$$

Observemos agora que, se Q é a diferencial de Hopf do par (I, II) , então

$$\begin{aligned} \text{Im}\{2Qdz^2\} &= \text{Im}\left\{\left(\frac{e-g}{2} - if\right)(dx_1^2 + 2idx_1dx_2 - dx_2^2)\right\}, \\ &= -fdx_1^2 + (e-g)dx_1dx_2 + fdx_2^2 = \hat{T}. \end{aligned}$$

Assim, $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ é uma direção principal de (I, II) se, e somente se,

$$\text{Im}(Q(a_1 + ia_2)^2) = 0,$$

ou seja,

$$\arg(Q) + 2 \arg(a_1 + ia_2) = m\pi,$$

com $m \in \mathbb{Z}$, ou ainda

$$\arg(a_1 + ia_2) = -\frac{1}{2} \arg(Q) + \frac{m\pi}{2}.$$

Da expressão acima obtemos a seguinte fórmula para o índice de um ponto umbílico isolado de um par (I, II) em termos de sua diferencial de Hopf.

Proposição 1.10. *Seja p um ponto umbílico isolado do par fundamental (I, II) . Então o índice de p é*

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\delta(\arg Q)}{2},$$

em que Q é a diferencial de Hopf de (I, II) e $\delta(\arg Q)$ representa a variação do argumento de Q ao longo de uma pequena curva fechada em torno de p orientada no sentido positivo.

Corolário 1.11. *Se p é um zero isolado de ordem k da diferencial de Hopf Q do par fundamental (I, II) , então o índice de p é $-\frac{k}{2} < 0$.*

Demonstração. Decorre do resultado anterior observando que, neste caso, $\delta(\arg Q) = 2k\pi$. □

1.6 Apêndice: o índice de uma singularidade isolada

Um campo de direções em uma região \mathcal{U} de Σ é determinado pelas retas tangentes a uma família a um parâmetro de curvas em \mathcal{U} . Se um campo de direções é definido em cada ponto de \mathcal{U} , exceto em um ponto q , e é impossível estendê-lo continuamente a q , dizemos que q é uma singularidade do campo. Se não existir outra singularidade do campo em uma vizinhança de q , dizemos que q é uma singularidade isolada.

O índice de uma singularidade isolada q é definido como segue: seja V uma vizinhança de p na qual não existem outras singularidades do campo de direções, e seja Z um campo de vetores ao longo de uma curva simples e fechada $C \subset V$ em torno de p , tal que Z determina o campo de direções em C . Sejam U um campo paralelo ao longo de C e $\angle(U, F)$ o ângulo entre U e F . Seja $\angle_C(U, F)$ a variação total de $\angle(U, F)$ ao longo de C na direção positiva. O índice j de q é definido por

$$2\pi j = \angle_C(U, F) .$$

Afirmção 1.1. j não depende de U ou C .

De fato, se V é outro campo paralelo ao longo de C , então $\angle(U, V)$ é constante ao longo de C , logo

$$\angle_C(U, F) = \angle_C(V, F) .$$

Além disso, notemos que $j = \frac{n}{2}$, em que n é um inteiro, logo j não depende de C .

A seguir vejamos alguns exemplos:

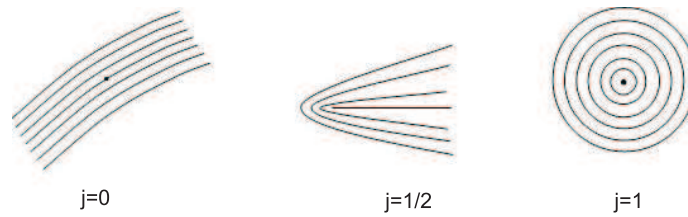


Figura 1.1: Índice de uma singularidade isolada

O seguinte resultado fundamental torna o conceito acima bastante útil.

Teorema 1.12. (Poincaré) *A soma dos índices de um campo de direções com singularidades isoladas em uma superfície compacta é igual à sua característica de Euler-Poincaré.*

Lembramos que toda superfície compacta, conexa e orientável é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças, ver [11]. O número g é chamado de *gênero* da superfície, e está relacionado com sua *característica de Euler-Poincaré* $\chi(\Sigma)$ por

$$g = \frac{2 - \chi(\Sigma)}{2} .$$

A demonstração do Teorema de Poincaré pode ser encontrada em [11]. As seguintes consequências imediatas serão utilizadas no capítulo seguinte.

Corolário 1.13. *Um campo de direções com singularidades isoladas em uma superfície homeomorfa a uma esfera tem sempre uma singularidade com índice positivo.*

Corolário 1.14. *A soma dos índices de um campo de direções com singularidades isoladas em uma superfície homeomorfa ao toro é igual a zero.*

Lembramos também que a característica de Euler-Poincaré de uma superfície compacta Σ está relacionada a sua curvatura Gaussiana pelo seguinte resultado fundamental devido a Gauss e Bonnet.

Teorema 1.15. (Gauss-Bonnet) *Seja Σ uma superfície compacta. Então,*

$$\int_{\Sigma} K(p) = 2\chi(\Sigma) ,$$

em que K é a função curvatura de Gauss de Σ .

Capítulo 2

Pares de Codazzi

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar uma classe especial de pares fundamentais em uma superfície Σ , chamados *pares de Codazzi*. Os exemplos básicos são a primeira e segunda formas fundamentais de uma superfície em \mathbb{R}^3 . Apresentaremos uma teoria abstrata de pares de Codazzi, que permite generalizar alguns resultados clássicos da teoria de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 . Um exemplo é o famoso

Teorema de Hopf: A única superfície imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante que é homeomorfa a uma esfera é a esfera totalmente umbílica.

Outra consequência de tal abordagem abstrata será mostrar que os dois seguintes conhecidos resultados da teoria de superfícies em \mathbb{R}^3 , aparentemente independentes, estão fortemente relacionados. De fato, veremos que o segundo é uma consequência da versão abstrata do primeiro:

Teorema de Bonnet: Sejam $f_1, f_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersões isométricas e H_{f_i} a curvatura média de f_i , $i = 1, 2$. Se Σ é homeomorfa a uma esfera e $H_{f_1} = H_{f_2}$, então f_1 e f_2 são congruentes (isto é, diferem por um movimento rígido de \mathbb{R}^3).

Unicidade no problema de Christoffel: Sejam $f_1, f_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersões de uma

superfície homeomorfa a uma esfera. Sejam H_i a curvatura média de f_i e K_i a curvatura Gaussiana de Σ com respeito à métrica induzida por f_i , $i = 1, 2$. Se K_1 e K_2 não se anulam em nenhum ponto, as terceiras formas fundamentais de f_1 e f_2 coincidem e $\frac{H_1}{K_1} = \frac{H_2}{K_2}$, então f_1 e f_2 são congruentes.

Por fim, apresentamos versões abstratas dos seguintes resultados:

Teorema de Grove: Dois ovalóides de \mathbb{R}^3 com mesma segunda forma fundamental e mesma curvatura Gaussiana são congruentes.

Teorema de Liebmann: A única superfície completa de \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante positiva é a esfera totalmente umbílica.

2.2 Pares de Codazzi

Motivados pela equação de Codazzi de uma superfície Σ imersa em \mathbb{R}^3 , satisfeita por sua primeira e segunda formas fundamentais, definimos a seguir o conceito de *par de Codazzi* em uma superfície abstrata.

Definição 2.1. Dizemos que um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ , com operador de forma associado S , é um par de Codazzi se

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma), \quad (2.1)$$

em que ∇ é a conexão de Levi-Civita associada à métrica Riemanniana I .

Com a estrutura conforme induzida pela métrica Riemanniana I , Σ é uma superfície de Riemann. Sejam (1.6) e (1.7) as expressões correspondentes das complexificações de I e II com respeito a um parâmetro conforme local z em Σ .

Lema 2.2. *O par (I, II) é de Codazzi se, e somente se,*

$$H_z = \frac{Q_{\bar{z}}}{\lambda}.$$

Demonstração. A equação (2.1) é equivalente a

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} S \left(\frac{\partial}{\partial z} \right),$$

em que $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ é o referencial canônico de $T^{\mathbb{C}}\Sigma$ associado ao parâmetro conforme local z . Lembramos que $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] = 0$. De (1.31) segue que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \left(\frac{\bar{Q}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \left(H \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ &= \frac{\bar{Q}}{\lambda} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\bar{Q}}{\lambda} \right)_z \frac{\partial}{\partial z} + H \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

De (1.32) a (1.34) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\bar{Q}\lambda_z}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{Q}_z\lambda - \bar{Q}\lambda_z}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} + H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ &= \frac{\bar{Q}_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} + H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

De forma análoga, encontramos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} S \frac{\partial}{\partial z} = H_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q_{\bar{z}}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

logo

$$\frac{\bar{Q}_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} + H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = H_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q_{\bar{z}}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

□

2.3 Pares de Weingarten em uma esfera topológica

Nesta seção apresentamos uma condição suficiente para que um par de Weingarten que é também de Codazzi em uma superfície Σ homeomorfa a uma esfera seja totalmente umbílico. Tal resultado generaliza o teorema clássico de Hopf para imersões com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 de uma esfera topológica. Enunciamos inicialmente um lema de análise complexa que será usado na demonstração.

Lema 2.3. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um conjunto aberto U do plano complexo. Suponha que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)| ,$$

em que h é função real contínua e não-negativa. Suponha também que $z = z_0 \in U$ seja um zero de f . Então existe uma vizinhança $V \subset U$ de z_0 tal que $f \equiv 0$ em V ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad z \in V, \quad k \geq 1 ,$$

em que $f_k(z)$ é uma função contínua e $f_k(z_0) \neq 0$.

A demonstração do Lema 2.3 pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.4. *Seja (I, II) um par de Codazzi em Σ . Suponha que (I, II) seja um par de Weingarten com respeito a uma função $W(x, y)$ tal que*

$$W_x(t, t^2) + 2tW_y(t, t^2) \neq 0 , \quad \forall t . \quad (2.2)$$

Então uma das seguintes possibilidades ocorre:

1. *Os pontos umbílicos de (I, II) são todos isolados e de índice negativo;*
2. *O par (I, II) é totalmente umbílico.*

Em particular, se Σ é homeomorfa a uma esfera, então o par (I, II) é totalmente umbílico.

Demonstração. Como antes, seja z um parâmetro conforme local em Σ com respeito à métrica Riemanniana I , em relação ao qual as complexificações de I e II se exprimem por (1.29).

Por hipótese, o par (I, II) satisfaz $W(H, K) = 0$, logo

$$W_H(H, K)H_z + W_K(H, K)K_z = 0 . \quad (2.3)$$

Derivando a equação (1.30) obtemos:

$$K_z = 2HH_z - \left[\frac{Q_z\bar{Q} + Q\bar{Q}_z}{\lambda^2} - |Q|^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_z \right]. \quad (2.4)$$

Usando (2.4) e o Lema 2.2, obtemos de (2.3) que

$$[W_H(H, K) + 2HW_K(H, K)] Q_{\bar{z}} = \lambda W_K(H, K) \left[|Q|^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_z + \frac{Q_z\bar{Q} + Q\bar{Q}_z}{\lambda^2} \right]. \quad (2.5)$$

Em um ponto umbílico $p \in \Sigma$ do par (I, II) , temos que $Q(p) = 0$, logo

$$[W_H(H, K) + 2HW_K(H, K)] Q_{\bar{z}} = 0 \quad (2.6)$$

em p . Por outro lado, os pontos umbílicos de (I, II) são precisamente aqueles em que $H^2 = K$, logo a condição (2.2) significa que

$$f := W_H(H, K) + 2HW_K(H, K) \neq 0$$

em cada ponto umbílico $p \in \Sigma$ de (I, II) , logo também em uma vizinhança aberta de p .

Portanto, decorre de (2.6) que $Q_{\bar{z}}(p) = 0$ para todo ponto umbílico $p \in \Sigma$ de (I, II) .

De (2.5) temos

$$\begin{aligned} |fQ_{\bar{z}}| &= |\lambda W_K(H, K)| \left| |Q|^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_z + \frac{Q_z\bar{Q} + Q\bar{Q}_z}{\lambda^2} \right| \\ &\leq |\lambda W_K(H, K)| \left[|Q|^2 \left| \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_z \right| + \frac{|Q_z||\bar{Q}| + |Q||\bar{Q}_z|}{|\lambda|^2} \right] \\ &\leq |\lambda W_K(H, K)| \left[|Q| \left| \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_z \right| + \frac{|Q_z| + |\bar{Q}_z|}{|\lambda|^2} \right] |Q|. \end{aligned}$$

Como f não se anula em uma vizinhança aberta de cada ponto umbílico de (I, II) , em tal vizinhança a função $h = \frac{|\lambda W_K(H, K)|}{|f|} \left[|Q| \left| \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_z \right| + \frac{|Q_z| + |\bar{Q}_z|}{|\lambda|^2} \right]$ é contínua e

$$|Q_{\bar{z}}| \leq h|Q|.$$

Portanto, decorre do Lema 2.3 que, para cada ponto umbílico $p \in \Sigma$, existe uma vizinhança aberta V de p tal que

1. $Q \equiv 0$ em V

2. $Q(z) = (z - p)^k Q_k(z)$ para todo $z \in V$, com $Q_k(p) \neq 0$.

Suponhamos que a primeira possibilidade ocorra para algum ponto umbílico do par (I, II) . Então o interior U do conjunto dos pontos umbílicos de (I, II) é não vazio. Suponhamos que $U \neq \Sigma$ e seja q um ponto na fronteira de U . Então q é um ponto umbílico de (I, II) (pois o conjunto dos pontos umbílicos de (I, II) é fechado), $q \notin U$ e q não é um ponto umbílico isolado de (I, II) . Isto contradiz o fato de que uma das duas possibilidades acima vale para q . Portanto $U = \Sigma$, o que mostra a primeira afirmação do teorema.

Se Σ é homeomorfa a uma esfera, então o par (I, II) é totalmente umbílico pelo Corolário 1.13. □

Corolário 2.5. *Nas condições do Teorema 2.4, se Σ é homeomorfa a um toro então o par (I, II) é totalmente umbílico ou livre de pontos umbílicos.*

Demonstração. Se (I, II) não é totalmente umbílico, então os pontos umbílicos de (I, II) são todos isolados de índice negativo pelo Teorema 2.4. Logo um tal ponto não pode existir pelo Corolário 1.14. □

Observação 2.1. A hipótese (2.2) no Teorema 2.4 não pode ser omitida. De fato, seja Σ um elipsóide de rotação, parametrizado por

$$\varphi(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, b \sin v), \text{ com } a, b \neq 0, \quad a \neq b.$$

O elipsóide é uma superfície não totalmente umbílica homeomorfa à esfera, e pelo exemplo 1.3 é uma superfície de Weingarten.

Por um cálculo direto, encontramos:

$$k_1 = -\frac{b}{aG^{\frac{1}{2}}} \text{ e } k_2 = -\frac{ab}{G^{\frac{3}{2}}},$$

em que $G = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v$. Assim,

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{a^4}{b^2} \left(-\frac{b}{aG^{\frac{1}{2}}} \right)^3, \\ &= \frac{a^4}{b^2} (k_1)^3. \end{aligned}$$

Assim,

$$F(k_1, k_2) := k_2 - \frac{a^4}{b^2}(k_1)^3 = 0,$$

ou equivalentemente, usando (1.49):

$$W(H, K) := \frac{H + \sqrt{H^2 - K}}{2} - \frac{a^4}{b^2} \left(\frac{H - \sqrt{H^2 - K}}{2} \right)^3 = 0.$$

Dessa forma, nos pontos umbílicos a função W não possui derivadas parciais W_H e W_K .

2.4 Os Teoremas de Bonnet e Christoffel

Mostraremos nesta seção duas interessantes consequências do Teorema 2.4: versões abstratas do Teorema de Bonnet e da unicidade no problema de Christoffel (ver [1]). Na teoria de superfícies de \mathbb{R}^3 esses resultados são demonstrados usando a teoria de integração em superfícies.

Corolário 2.6. *(Teorema Abstrato de Bonnet) Sejam Σ uma esfera topológica e (I, II_1) , (I, II_2) dois pares de Codazzi com a mesma métrica Riemanniana. Se ambos possuem a mesma curvatura média H , então $II_1 = II_2$.*

Demonstração. Seja z um parâmetro conforme local em Σ . Por (1.29), podemos escrever:

$$\begin{aligned} I &= 2\lambda |dz|^2, \\ II_1 &= Q_1 dz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{Q}_1 d\bar{z}^2 \quad . \\ II_2 &= Q_2 dz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{Q}_2 d\bar{z}^2 \quad . \end{aligned}$$

Afirmção 2.1. $(I, II_1 - II_2)$ é um par de Codazzi.

De fato, $S = S_1 - S_2$ é o operador de forma associado ao par $(I, II_1 - II_2)$, em que S_1, S_2 são os operadores de forma associados aos pares (I, II_1) , (I, II_2) , respectivamente. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita associada a métrica Riemanniana I . Como (I, II_1) e

(I, II_2) são pares de Codazzi,

$$\begin{aligned}
\nabla_X SY - \nabla_{SX} - S[X, Y] &= \nabla_X(S_1 - S_2)Y - \nabla_Y(S_1 - S_2) - (S_1 - S_2)[X, Y] , \\
&= \nabla_X S_1 Y - \nabla_Y S_1 X - S_1[X, Y] + \nabla_X S_2 Y - \nabla_Y S_2 X \\
&\quad - S_2[X, Y] , \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Portanto, $(I, II_1 - II_2)$ é um par de Codazzi.

Considere agora a função $W(x, y) = x$. Sejam H e K as curvaturas média e Gaussiana do par $(I, II_1 - II_2)$. Pela hipótese, temos que $H(I, II_1 - II_2) = 0$, logo $W(H, K) = 0$. Além disso,

$$W_x(t, t^2) + 2tW_y(t, t^2) = 1 + 2t \cdot 0 = 1.$$

Assim, o par $(I, II_1 - II_2)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.4. Como Σ é uma esfera topológica, concluimos que o par $(I, II_1 - II_2)$ é totalmente umbílico, ou seja, $Q = Q_1 - Q_2 = 0$. Portanto, $II_1 = II_2$. \square

Para o próximo resultado, definimos a *terceira forma fundamental III* associada a um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ por

$$III(X, Y) = I(SX, SY), \tag{2.7}$$

em que S é o operador de forma associado ao par (I, II) e $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, o operador S é raiz de seu polinômio característico:

$$S^2 - 2HS + KId = 0 ,$$

em que Id é a aplicação identidade. Logo, usando o fato que S é um operador auto-adjunto, temos:

$$\begin{aligned}
III(X, Y) &= I(S^2 X, Y) , \\
&= I(-KX + 2HS(X), Y) , \\
&= -KI(X, Y) + 2HIII(X, Y) .
\end{aligned}$$

Corolário 2.7. *Sejam Σ uma esfera topológica e (I_i, II_i) , $i = 1, 2$, dois pares de Codazzi com curvatura média H_i e curvatura Gaussiana K_i . Se ambos possuem a mesma terceira forma fundamental III , com $K_i(p) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$ e $\frac{H_1}{K_1} = \frac{H_2}{K_2}$, então $(I_1, II_1) = (I_2, II_2)$.*

Demonstração. Como $K_i(p) \neq 0 \forall p \in \Sigma$, o operador S_i , e portanto, S_i^2 , é inversível para $i = 1, 2$. Logo III define uma métrica Riemanniana em Σ .

Mostremos que (III, II_i) , $i = 1, 2$, são pares de Codazzi. Para tanto, defina $\bar{\nabla}$ por:

$$S_i \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^i S_i Y, \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

em que ∇^i é a conexão de Levi-Civita associada à métrica Riemanniana I_i e S_i é o operador de forma associado ao par (I_i, II_i) .

Afirmção 2.2. $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita associada à métrica Riemanniana III .

Inicialmente verificamos que $\bar{\nabla}$ é uma conexão afim. Com efeito, sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e $f, g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Então

$$\begin{aligned} (i) \quad S_i \bar{\nabla}_{fX+gY} Z &\stackrel{def}{=} \nabla_{fX+gY}^i S_i Z \\ &= f \nabla_X^i S_i Z + g \nabla_Y^i S_i Z \\ &= f S_i \bar{\nabla}_X Z + g S_i \bar{\nabla}_Y Z \\ &= S_i (f \bar{\nabla}_X Z + g \bar{\nabla}_Y Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad S_i \bar{\nabla}_X(Y + Z) &\stackrel{def}{=} \nabla_X^i S_i(Y + Z) \\
&= \nabla_X^i S_i Y + \nabla_X^i S_i Z \\
&= S_i \bar{\nabla}_X Y + S_i \bar{\nabla}_X Z \\
&= S_i(\bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad S_i \bar{\nabla}_X(fY) &\stackrel{def}{=} \nabla_X^i S_i(fY) \\
&= \nabla_X^i(fS_i Y) \\
&= f\nabla_X^i S_i Y + X(f)S_i Y \\
&= S_i(f\bar{\nabla}_X Y + X(f)Y) .
\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\bar{\nabla}$ é simétrica. Como (I_i, II_i) são pares de Codazzi,

$$\nabla_X^i S_i Y - \nabla_Y^i S_i X - S_i[X, Y] = 0 .$$

Logo

$$S_i(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X) = S_i[X, Y] .$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
Z(III(X, Y)) &= Z(I_i(S_i X, S_i Y)) \\
&= I_i(\nabla_Z^i S_i X, S_i Y) + I_i(S_i X, \nabla_Z^i S_i Y) \\
&= I_i(S_i \bar{\nabla}_Z X, S_i Y) + I_i(S_i X, S_i \bar{\nabla}_Z Y) \\
&= III(\bar{\nabla}_Z X, Y) + III(X, \bar{\nabla}_Z Y),
\end{aligned}$$

logo $\bar{\nabla}$ é compatível com a métrica Riemanniana III .

Afirmção 2.3. S_i^{-1} é o operador de forma associado ao par fundamental (III, II_i) .

De fato, seja \hat{S}_i o operador de forma associado ao par fundamental (III, II_i) . Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, segue de (1.2) e (2.7) que

$$I_i(X, S_i Y) = II_i(X, Y) = III(\hat{S}_i X, Y) = I_i(S_i \hat{S}_i X, S_i Y).$$

Logo $S_i \hat{S}_i = Id$, o que conclui a demonstração da afirmação.

O fato de que (III, II_i) , $i = 1, 2$, é um par de Codazzi decorre de

$$S_i(\bar{\nabla}_X S_i^{-1} Y - \bar{\nabla}_Y S_i^{-1} X - S_i^{-1}[X, Y]) = \nabla_X^i S_i S_i^{-1} Y - \nabla_Y^i S_i S_i^{-1} X - S_i S_i^{-1}[X, Y] = 0,$$

em que usamos (2.8).

Vamos agora encontrar as curvaturas média e Gaussiana do par (III, II_i) , $i = 1, 2$.

Seja $\{X_1, X_2\}$ um referencial ortonormal com respeito à métrica Riemanniana I_1 , formado por autovetores de S_1 , ou seja,

$$I_1(X_k, X_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k = j \\ 0 & , \text{ se } k \neq j \end{cases}$$

e $S_1 X_j = \beta_j X_j$, $j = 1, 2$, em que $\beta_j \neq 0$, uma vez que $K_1 \neq 0$.

Dessa forma,

$$III(X_k, X_j) = I_1(S_1 X_k, S_1 X_j) = \beta_k \beta_j \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2,$$

logo $\{Y_j = \frac{1}{\beta_j} X_j, j = 1, 2\}$ é um referencial ortonormal com respeito à métrica Riemanniana III . Então,

$$\begin{aligned} 2H(III, II_1) &= II_1(Y_1, Y_1) + II_1(Y_2, Y_2) \\ &= \frac{1}{\beta_1^2} II_1(X_1, X_1) + \frac{1}{\beta_2^2} II_1(X_2, X_2) \\ &= \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \\ &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(III, II_1) = \frac{H_1}{K_1}.$$

De modo análogo, obtemos

$$H(III, II_2) = \frac{H_2}{K_2}.$$

Segue da hipótese que $H(III, II_1) = H(III, II_2)$. Assim, pelo corolário 2.6, aplicado aos pares (III, II_1) e (III, II_2) , segue que $II_1 = II_2$.

Como $III = -K_i I_i + 2H_i II_i$, para mostrar que $I_1 = I_2$ basta provar que $K_1 = K_2$. Mas isto decorre de

$$K(III, II_1) = II_1(Y_1, Y_1)II(Y_2, Y_2) = \frac{1}{\beta_1\beta_2} = \frac{1}{K_1}$$

e, analogamente, $K(III, II_2) = 1/K_2$, juntamente com o fato de que $II_1 = II_2$. \square

2.5 Os Teoremas de Grove e Liebmann

Apresentamos nesta seção duas outras aplicações da teoria abstrata de pares de Codazzi. A primeira delas é uma versão abstrata do resultado provado por Grove sobre a rigidez dos ovalóides. Lembramos que um *ovalóide* em \mathbb{R}^3 é uma superfície conexa e compacta de \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana positiva. A segunda é uma versão abstrata, obtida em [17], do resultado provado por H. Liebmann sobre superfícies completas de \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante positiva.

Lema 2.8. *Seja (I, II) um par de Codazzi em Σ com curvatura Gaussiana não nula em todos os pontos de Σ . Seja z um parâmetro conforme local para II com respeito ao qual I e II se exprimem como*

$$\begin{aligned} II &= 2\rho |dz|^2 & , \\ I &= Pdz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{P}d\bar{z}^2 & . \end{aligned}$$

Então,

$$P_{\bar{z}} = -\frac{1}{2K}(K_{\bar{z}}P + K_z\lambda) . \quad (2.9)$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 2.4. $K_z = -4K\bar{\Gamma}_{12}^1$.

De fato,

$$K = K(I, II) = \frac{\rho^2}{\lambda^2 - |P|^2} . \quad (2.10)$$

Logo,

$$K_z = \frac{2\rho\rho_z(\lambda^2 - |P|^2) - \rho^2(\lambda^2 - |P|^2)_z}{(\lambda^2 - |P|^2)^2} . \quad (2.11)$$

Como (I, II) é um par de Codazzi e $[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}] = 0$, então

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} S \frac{\partial}{\partial z} .$$

Em particular,

$$I \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = I \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) .$$

Pela compatibilidade, temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} I \left(S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) - I \left(S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) - I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) .$$

Logo,

$$\rho_z = I \left(S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) - I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) .$$

$$I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = I \left(S \frac{\partial}{\partial z}, \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\Gamma}_{12}^1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \bar{\Gamma}_{12}^1 \rho$$

e

$$I \left(S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) = I \left(S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \Gamma_{11}^1 \rho .$$

Assim,

$$\rho_z = \rho (\Gamma_{11}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^1) , \quad (2.12)$$

em que, de (1.24) e (1.25),

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(\lambda^2 - |P|^2)} ((2\lambda_z - P_{\bar{z}}) \lambda - P_z \bar{P}) , \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(\lambda^2 - |P|^2)} (\bar{P}_z \lambda - P_{\bar{z}} \bar{P}) . \quad (2.14)$$

Por outro lado,

$$(\lambda^2 - |P|^2)_z = 2\lambda\lambda_z - P_z\bar{P} - P\bar{P}_z$$

e de (2.13) e (2.14) temos

$$\begin{aligned} 2(\lambda^2 - |P|^2)\Gamma_{11}^1 &= ((2\lambda_z - P_{\bar{z}})\lambda - P_z\bar{P}) \\ &= 2\lambda_z\lambda - 2(\lambda^2 - |P|^2)\bar{\Gamma}_{12}^1 - \bar{P}_zP - P_z\bar{P} . \end{aligned}$$

Assim,

$$2\lambda_z\lambda = 2(\lambda^2 - |P|^2)(\Gamma_{11}^1 + \bar{\Gamma}_{12}^1) + \bar{P}_zP + P_z\bar{P} ,$$

e portanto

$$(\lambda^2 - |P|^2)_z = 2(\lambda^2 - |P|^2)(\Gamma_{11}^1 + \bar{\Gamma}_{12}^1) . \quad (2.15)$$

Substituindo (2.12) e (2.15) em (2.11), obtemos:

$$\begin{aligned} K_z &= \frac{2\rho^2 (\Gamma_{11}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^1) (\lambda^2 - |P|^2) - 2\rho^2 (\lambda^2 - |P|^2)(\Gamma_{11}^1 + \bar{\Gamma}_{12}^1)}{(\lambda^2 - |P|^2)^2} \\ &= \frac{4\rho^2\bar{\Gamma}_{12}^1}{(\lambda^2 - |P|^2)} \\ &= -4K\bar{\Gamma}_{12}^1 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Com isso,

$$K_{\bar{z}} = -4K\Gamma_{12}^1 . \quad (2.17)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_{\bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} I \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= 2I \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= 2(\Gamma_{12}^1 P + \bar{\Gamma}_{12}^1 \lambda) . \end{aligned}$$

Portanto, segue de (2.16) e (2.17) que

$$P_{\bar{z}} = -\frac{1}{2K}(K_{\bar{z}}P + K_z\lambda) .$$

□

Mostraremos agora uma versão abstrata do Teorema de Grove.

Teorema 2.9. *Sejam Σ uma esfera topológica e (I_i, II) , $i = 1, 2$, pares de Codazzi em Σ com a mesma curvatura Gaussiana $K > 0$. Então $I_1 = I_2$.*

Demonstração. Como $K(I_i, II) > 0$, temos que II é uma métrica Riemanniana em Σ . Seja $z = x + iy$ um parâmetro local isotérmico para II com respeito ao qual os pares (II, I_i) se exprimem como

$$\begin{aligned} II &= 2\rho |dz|^2, \\ I_i &= P_i dz^2 + 2\lambda_i |dz|^2 + \bar{P}_i d\bar{z}^2 . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Do Lema 2.8 temos que

$$P_{i\bar{z}} = -\frac{1}{2K}(K_{\bar{z}}P_i + K_z\lambda_i) .$$

Além disso, as curvaturas média e Gaussiana de (I_i, II) são dadas, respectivamente, por

$$H_i(I_i, II) = \frac{-2\lambda_i\rho}{2(P_i\bar{P}_i - \lambda_i^2)} = \frac{\lambda_i\rho}{\lambda_i^2 - |P_i|^2} \quad (2.19)$$

e

$$K = K(I_i, II) = \frac{\rho^2}{\lambda_i^2 - |P_i|^2} . \quad (2.20)$$

Vamos mostrar que

$$|P_{1\bar{z}} - P_{2\bar{z}}| \leq \frac{|K_{\bar{z}}| + |K_z|}{2K} |P_1 - P_2| \quad (2.21)$$

e

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq |P_1 - P_2| . \quad (2.22)$$

Então, aplicando o Lema 2.3 a $f := P_1 - P_2$ concluímos que $P_1 - P_2 = 0$, e portanto $I_1 = I_2$.

De fato, como (I_i, II) é um par de Codazzi, então segue do Lema 2.8 que

$$\begin{aligned} |P_{1\bar{z}} - P_{2\bar{z}}| &= \frac{|K_{\bar{z}}P_1 + K_z\lambda_2 - K_{\bar{z}}P_2 - K_z\lambda_2|}{2K} \\ &\leq \frac{|K_{\bar{z}}||P_1 - P_2| + |K_z||\lambda_1 - \lambda_2|}{2K}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De (2.19), temos

$$\begin{aligned} |\lambda_1 - \lambda_2| &= \frac{\rho}{K} |H_1 - H_2| \\ &= \frac{\rho}{K} \sqrt{(H_1 - H_2)^2}. \end{aligned}$$

Afirmção 2.5. $\sqrt{(H_1 - H_2)^2} \leq \left| \sqrt{H_1^2 - K} - \sqrt{H_2^2 - K} \right|$.

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} |H_1 - H_2| &\leq \left| \sqrt{H_1^2 - K} - \sqrt{H_2^2 - K} \right| \\ \Leftrightarrow (\sqrt{H_1^2 - K} - \sqrt{H_2^2 - K})^2 - (H_1 - H_2)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2H_1H_2 - 2\sqrt{(H_1^2 - K)(H_2^2 - K)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow H_1H_2 - K &\geq \sqrt{(H_1^2 - K)(H_2^2 - K)} \\ \Leftrightarrow (H_1H_2 - K)^2 &\geq \left(\sqrt{(H_1^2 - K)(H_2^2 - K)} \right)^2 \\ \Leftrightarrow -2H_1H_2 &\geq -(H_1^2 + H_2^2) \\ \Leftrightarrow H_1^2 - 2H_1H_2 + H_2^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (H_1 - H_2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos a afirmação 2.5 e, conseqüentemente,

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq \frac{\rho}{K} \left| \sqrt{H_1^2 - K} - \sqrt{H_2^2 - K} \right|.$$

Da equação (1.36) da Proposição 1.4 temos que a matriz de S_i em relação à base $B =$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{K}{\rho} \lambda_i & -\frac{K}{\rho} \bar{P}_i \\ -\frac{K}{\rho} P_i & \frac{K}{\rho} \lambda_i \end{pmatrix} .$$

Lembramos que $K = \det(S_i)_B$, em que S_i é o operador de forma associado ao par (I_i, II) .

Assim,

$$K = \frac{K^2}{\rho^2} \lambda_i^2 - \frac{K^2}{\rho^2} |P_i|^2 = H^2 - \frac{K^2}{\rho^2} |P_i|^2 .$$

Logo,

$$|P_i| = \frac{\rho}{K} \sqrt{H^2 - K} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\lambda_1 - \lambda_2| &\leq \frac{\rho}{K} \left| \sqrt{H_1^2 - K} - \sqrt{H_2^2 - K} \right| \\ &\leq ||P_1| - |P_2|| \\ &\leq |P_1 - P_2| \end{aligned}$$

e (2.23) pode ser reescrita como

$$|P_{1\bar{z}} - P_{2\bar{z}}| \leq \frac{|K_{\bar{z}}| + |K_z|}{2K} |P_1 - P_2| .$$

□

O próximo resultado é uma versão abstrata para o Teorema de Liebmann.

Teorema 2.10. *Se (I, II) é um par de Codazzi em Σ com curvatura Gaussiana constante positiva então (II, I) é totalmente umbílico.*

Demonstração. Seja z um parâmetro conforme local para II com respeito ao qual

$$\begin{aligned} II &= 2\rho |dz|^2 & , \\ I &= P dz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{P} d\bar{z}^2 & . \end{aligned}$$

Como o par (I, II) é de Codazzi, pelo Lema 2.8 temos que

$$P_{\bar{z}} = -\frac{1}{2K} (K_{\bar{z}} P + K_z \lambda) = 0 .$$

Portanto, a diferencial de Hopf do par fundamental (II, I) é holomorfa. Como a curvatura Gaussiana de Σ é positiva, decorre do Teorema 1.15 que Σ é homeomorfa a uma esfera. Pelo Teorema 1.2, concluimos que o par fundamental (II, I) é totalmente umbílico. \square

Capítulo 3

A função de Codazzi

Neste capítulo definimos a *função de Codazzi* de um par fundamental (I, II) , a qual mede, a grosso modo, o quanto o par deixa de ser de Codazzi. Apresentamos uma versão do Teorema 2.4 em que a hipótese de que o par seja de Weingarten é substituída por uma estimativa da função de Codazzi em uma vizinhança de cada um de seus pontos umbílicos.

Definição 3.1. Dado um par fundamental (I, II) em uma superfície Σ , com operador de forma S , o *tensor de Codazzi* do par (I, II) é a aplicação $T_S: \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ definida por:

$$T_S(X, Y) = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma).$$

Notemos que, se o par (I, II) é de Codazzi, então T_S é identicamente nulo. Vejamos abaixo algumas propriedades do tensor de Codazzi.

Lema 3.2. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ com operador de forma S e T_S seu tensor de Codazzi. Então,*

1. T_S é anti-simétrico, ou seja, $T_S(X, Y) = -T_S(Y, X)$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.
2. T_S é bilinear, isto é,

$$T_S(f_1X_1 + f_2X_2, Y) = f_1T_S(X_1, Y) + f_2T_S(X_2, Y), \quad (3.1)$$

$$T_S(X, f_1Y_1 + f_2Y_2) = f_1T_S(X, Y_1) + f_2T_S(X, Y_2), \quad (3.2)$$

para quaisquer $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e quaisquer funções reais diferenciáveis f_1 e f_2 .

3. Dados $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e uma função real diferenciável f em Σ , temos

$$T_{fS}(X, Y) = fT_S(X, Y) + X(f)SY - Y(f)SX .$$

Demonstração. 1. Sejam X e $Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Por definição:

$$\begin{aligned} T_S(X, Y) &= \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] \\ &= -(\nabla_Y SX - \nabla_X SY + S[X, Y]) \\ &= -(\nabla_Y SX - \nabla_X SY - S[Y, X]) \\ &= -T_S(Y, X) . \end{aligned}$$

2. Sejam $X_1, X_2, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e f_1 e f_2 funções reais diferenciáveis. Então

$$\begin{aligned} T_S(f_1X_1 + f_2X_2, Y) &= \nabla_{f_1X_1 + f_2X_2} SY - \nabla_Y S(f_1X_1 + f_2X_2) - \\ &S[f_1X_1 + f_2X_2, Y] . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando as propriedades da conexão Riemanniana ∇ , temos

$$\nabla_{f_1X_1 + f_2X_2} SY = f_1\nabla_{X_1} SY + f_2\nabla_{X_2} SY , \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_Y S(f_1X_1 + f_2X_2) &= \nabla_Y (f_1SX_1 + f_2SX_2) \\ &= f_1\nabla_Y SX_1 + Y(f_1)SX_1 + f_2\nabla_Y SX_2 + Y(f_2)SX_2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} S[f_1X_1 + f_2X_2, Y] &= S[f_1X_1, Y] + S[f_2X_2, Y] \\ &= f_1S[X_1, Y] + f_2S[X_2, Y] - Y(f_1)SX_1 - Y(f_2)SX_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, substituindo (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.3), obtemos

$$T_S(f_1X_1 + f_2X_2, Y) = f_1T_S(X_1, Y) + f_2T_S(X_2, Y) .$$

Analogamente se verifica (3.2).

3. Temos

$$\begin{aligned}
T_{fS}(X, Y) &= \nabla_X fSY - \nabla_Y fSX - fS[X, Y] \\
&= f\nabla_X SY + X(f)SY - f\nabla_Y SX - Y(f)SX - fS[X, Y] \\
&= f(\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y]) + X(f)SY - Y(f)SX \\
&= fT_S(X, Y) + X(f)SY - Y(f)SX .
\end{aligned}$$

□

Definição 3.3. *Seja (I, II) um par fundamental em Σ com operador de forma S . Chamamos de função de Codazzi do par (I, II) a função $\tau_S: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$I(T_S(u, v), T_S(u, v)) = \tau_S(p) (I(u, u)I(v, v) - I(u, v)^2) ,$$

em que $u, v \in T_p\Sigma$ são linearmente independentes e $p \in \Sigma$.

Afirmção 3.1. A definição da função de Codazzi independe da escolha dos vetores linearmente independentes em $T_p\Sigma$.

De fato, sejam

$$\begin{aligned}
z &= a_1u + b_1v , \\
w &= a_2u + b_2v .
\end{aligned}$$

vetores linearmente independentes, de modo que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
T_S(z, w) &= T_S(a_1u + b_1v, a_2u + b_2v) \\
&= a_1b_2T_S(u, v) - b_1a_2T_S(u, v) \\
&= (a_1b_2 - b_1a_2)T_S(u, v) .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
I(z, z) &= a_1^2I(u, u) + 2a_1b_1I(u, v) + b_1^2I(v, v) , \\
I(w, w) &= a_2^2I(u, u) + 2a_2b_2I(u, v) + b_2^2I(v, v) , \\
I(z, w) &= a_1a_2I(u, u) + (a_1b_2 + a_2b_1)I(u, v) + b_1b_2I(v, v) .
\end{aligned}$$

Logo,

$$I(z, z)I(w, w) - I(z, w)^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2(I(u, u)I(v, v) - I(u, v)^2) . \quad (3.8)$$

Portanto, de (3.7) e (3.8), temos:

$$\tau_S(p) = \frac{I(T_S(z, w), T_S(z, w))}{(I(z, z)I(w, w) - I(z, w)^2)} = \frac{I(T_S(u, v), T_S(u, v))}{(I(u, u)I(v, v) - I(u, v)^2)} .$$

Lema 3.4. *Sejam (I, II) um par fundamental em Σ com operador de forma S , curvatura média H e curvatura Gaussiana K . Seja z um parâmetro conforme local para I , tal que*

$$\begin{aligned} I &= 2\lambda |dz|^2 \quad , \\ II &= Q dz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{Q}d\bar{z}^2 \quad . \end{aligned}$$

Então,

$$|Q_{\bar{z}}|^2 = \frac{\lambda\tau_{\tilde{S}}}{2(H^2 - K)} |Q|^2 \quad , \quad (3.9)$$

em que \tilde{S} é o operador de traço nulo $S - HId_p$, sendo Id_p a aplicação identidade do plano tangente em $p \in \Sigma$.

Demonstração. Pela Proposição 1.3, a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana I , com relação ao parâmetro conforme local z , é dada por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\lambda_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 0 \quad ,$$

e o operador forma S por

$$S \frac{\partial}{\partial z} = H \frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad , \quad S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{Q}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} + H \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

Como $I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = I\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0$, da definição de função de Codazzi temos:

$$I\left(T_{\tilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), T_{\tilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right) = -\tau_{\tilde{S}}\left(I\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2\right) . \quad (3.10)$$

Mas,

$$T_{\tilde{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \tilde{S} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \tilde{S} \frac{\partial}{\partial z},$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \tilde{S} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} (S - HId) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} HId \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\bar{Q}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} H \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} HId \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \frac{\bar{Q}}{\lambda} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\bar{Q}}{\lambda} \right)_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\bar{Q} \lambda_z}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{Q}_z \lambda - \bar{Q} \lambda_z}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\bar{Q}_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \tilde{S} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{Q_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Logo,

$$T_{\tilde{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\bar{Q}_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{Q_z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (3.11)$$

Portanto, reescrevemos (3.10) como:

$$\begin{aligned} -\tau_{\tilde{S}} \lambda^2 &= \frac{1}{\lambda^2} I \left(\bar{Q}_z \frac{\partial}{\partial z} - Q_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \bar{Q}_z \frac{\partial}{\partial z} - Q_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (-\bar{Q}_z Q_z \lambda - Q_z \bar{Q}_z \lambda) \\ &= -\frac{2|Q_z|^2}{\lambda}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\tau_{\tilde{S}} \lambda^2 = \frac{2|Q_z|^2}{\lambda}.$$

Por outro lado, novamente da Proposição 1.3, temos que $K = H^2 - \frac{|Q|^2}{\lambda^2}$, logo

$$\tau_{\tilde{S}} \frac{|Q|^2}{H^2 - K} = \frac{2}{\lambda} |Q_{\bar{z}}|^2 ,$$

que é equivalente a (3.9). □

No resultado a seguir, denotamos por $\Sigma_U \subseteq \Sigma$ o conjunto dos pontos umbílicos do par fundamental (I, II) .

Teorema 3.5. *Seja (I, II) um par fundamental em uma superfície Σ com operador de forma S , curvatura média H e curvatura Gaussiana K . Suponhamos que cada ponto $p \in \partial\Sigma_U$ possua uma vizinhança V_p tal que*

$$\frac{\tau_{\tilde{S}}}{H^2 - K} \text{ é limitado em } V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U) ,$$

em que $\tilde{S} = S - HId$. Então o par (I, II) é totalmente umbílico ou os pontos umbílicos de (I, II) são isolados e de índice negativo.

Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então o par (I, II) é totalmente umbílico.

Demonstração. Por hipótese, se $p \in \partial\Sigma_U$ existem uma vizinhança V_p e uma constante positiva m_0 tais que

$$\frac{\tau_{\tilde{S}}}{H^2 - K} \leq m_0 \text{ em } V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U) . \quad (3.12)$$

Seja z um parâmetro conforme local em Σ . Pelo Lema 3.4 e por (3.12) temos:

$$|Q_{\bar{z}}|^2 \leq \frac{m_0 \lambda}{2} |Q|^2 \text{ em } V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U) . \quad (3.13)$$

Como essa desigualdade é também válida no interior de Σ_U , concluímos que (3.13) vale em V_p . Decorre do Lema 2.3 que Q é identicamente nula ou os pontos umbílicos de (I, II) são isolados e de índice negativo.

Com os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.4 concluímos que, se Σ é uma esfera topológica, então o par (I, II) é totalmente umbílico. □

Corolário 3.6. *Seja (I, II) um par de Codazzi em uma superfície Σ com operador de forma S , curvatura média H e curvatura Gaussiana K . Suponhamos que cada ponto $p \in \partial\Sigma_U$ possua uma vizinhança V_p tal que*

$$\frac{I(\nabla H, \nabla H)}{H^2 - K} \text{ é limitado em } V_p \cap (\Sigma - \Sigma_U).$$

Então o par (I, II) é totalmente umbílico ou os pontos umbílicos de (I, II) são isolados e de índice negativo.

Em particular, se Σ é uma esfera topológica, então o par (I, II) é totalmente umbílico.

Demonstração. Como o par (I, II) é de Codazzi, usando o Lema 2.2 podemos reescrever (3.11) como

$$T_{\bar{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = H_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\tau_{\bar{S}} \lambda^2 &= I \left(T_{\bar{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), T_{\bar{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right) \\ &= I \left(H_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, H_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= -\lambda H_{\bar{z}} H_z - \lambda H_z H_{\bar{z}} \\ &= -2\lambda H_{\bar{z}} H_z \\ &= -2\lambda |H_z|^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Lembrando que $H_z = \frac{1}{2}(H_{x_1} - iH_{x_2})$, obtemos

$$\tau_{\bar{S}} = \frac{1}{2\lambda}(H_{x_1}^2 + H_{x_2}^2) \tag{3.15}$$

$$= I(\nabla H, \nabla H), \tag{3.16}$$

e o resultado decorre do Teorema 3.5. □

Capítulo 4

Diferenciais quadráticas holomorfas

Neste capítulo veremos que, a cada par de Codazzi (I, II) satisfazendo certas condições, podemos associar um novo par de Codazzi (A, B) cuja diferencial de Hopf é holomorfa, o que permite obter informações sobre o par original.

Seja (x, y) um parâmetro duplamente ortogonal em uma superfície Σ com respeito a um par fundamental (I, II) e (1.40), (1.41) as representações de I e II com relação a (x, y) . Em termos do referencial $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, o tensor de Codazzi T_S de (I, II) se exprime por

$$\begin{aligned} T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} S \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} S \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} k_2 \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} k_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ &= k_2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} - k_1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} + (k_2)_x \frac{\partial}{\partial y} - (k_1)_y \frac{\partial}{\partial x} \\ &= (k_2 - k_1) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} + (k_2)_x \frac{\partial}{\partial y} - (k_1)_y \frac{\partial}{\partial x} . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y}$, decorre da Proposição 1.8 que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{E_y}{2E} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{G_x}{2G} \frac{\partial}{\partial y} .$$

Substituindo em (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}
T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) &= (k_2 - k_1) \left(\frac{E_y}{2E} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{G_x}{2G} \frac{\partial}{\partial y} \right) + (k_2)_x \frac{\partial}{\partial y} - (k_1)_y \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left(\frac{k_2 G_x}{2G} + (k_2)_x \right) \frac{\partial}{\partial y} - \left(k_1 \frac{E_y}{2E} + (k_1)_y \right) \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{E_y}{2E} \frac{\partial}{\partial x} - k_1 \frac{G_x}{2G} \\
&= \frac{(k_2 G)_x}{G} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k_2 G_x}{2G} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{(k_1 E)_y}{E} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_1 E_y}{2E} \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{E_y}{2E} \frac{\partial}{\partial x} - k_1 \frac{G_x}{2G} \\
&= -\frac{1}{E} \left((k_1 E)_y - \frac{k_1 + k_2}{2} E_y \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{G} \left((k_2 G)_x - \frac{k_1 + k_2}{2} G_x \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\frac{1}{E} ((k_1 E)_y - H E_y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{G} ((k_2 G)_x - H G_x) \frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

A seguir, dado um par fundamental (I, II) , denotamos $II' = II - HI$, em que H é a curvatura média de (I, II) .

Lema 4.1. *Seja (I, II) um par de Codazzi em uma superfície Σ com curvaturas média e Gaussiana H e K , respectivamente. Seja φ uma função diferenciável em Σ tal que a função $\frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}}$ possa ser estendida diferencialmente a Σ . Então,*

$$\begin{aligned}
A &= \cosh \varphi I + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} II', \\
B &= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi I + \cosh \varphi II', \tag{4.3}
\end{aligned}$$

é um par fundamental com curvatura média $H(A, B) = 0$ e curvatura Gaussiana $K(A, B) = -(H^2 - K)$. Além disso, o tensor de Codazzi $T_{\tilde{\Sigma}}$ de (A, B) é dado por:

$$T_{\tilde{\Sigma}}(X, Y) = \omega(Y)X - \omega(X)Y \quad , \quad \omega = \frac{1}{2}(dH - \sqrt{H^2 - K}d\varphi) \quad , \tag{4.4}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

Demonstração. Seja (x, y) um parâmetro duplamente ortogonal em Σ com respeito ao par (I, II) e

$$I = Edx^2 + Gdy^2 \quad , \quad II = k_1 Edx^2 + k_2 Gdy^2 \quad ,$$

as expressões correspondentes de I e II , respectivamente, com $k_1 \geq k_2$.

Temos

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \cosh \varphi I\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} II'\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \cosh \varphi E + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} \left(II\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) - HI\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right) \\
&= \cosh \varphi E + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} (k_1 E - H E) \\
&= \cosh \varphi E + \sinh \varphi \frac{(k_1 - H)}{\sqrt{H^2 - K}} E \\
&= (\cosh \varphi + \sinh \varphi) E \\
&= \left(\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} + \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \right) E \\
&= e^\varphi E ,
\end{aligned}$$

em que, na terceira igualdade, usamos as expressões das curvaturas principais do par (I, II) em termos de H e K , isto é, $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$, $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$. Em particular, $\frac{k_1 - H}{\sqrt{H^2 - K}} = 1$. Com cálculos análogos obtemos

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{e} \quad A\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = e^{-\varphi} G .$$

Logo,

$$A = e^\varphi E dx^2 + e^{-\varphi} G dy^2 .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi I\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \cosh \varphi II'\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi E + \cosh \varphi (k_1 - H) E \\
&= (k_1 - H)(\sinh \varphi + \cosh \varphi) E \\
&= (k_1 - H) e^\varphi E ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right) &= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi I \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right) + \cosh \varphi II' \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi G + \cosh \varphi (k_2 - H)G \\
&= -(k_2 - H) \sinh \varphi G + \cosh \varphi (k_2 - H)G \\
&= (k_2 - H)(\cosh \varphi - \sinh \varphi)G \\
&= (k_2 - H)e^{-\varphi}G
\end{aligned}$$

e $B \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0$, uma vez que (x, y) é duplamente ortogonal para (I, II) . Logo,

$$\begin{aligned}
B &= (k_1 - H)e^\varphi Edx^2 + (k_2 - H)e^{-\varphi}Gdy^2 \\
&= \left(k_1 - \frac{k_1 + k_2}{2} \right) e^\varphi Edx^2 + \left(k_2 - \frac{k_1 + k_2}{2} \right) e^{-\varphi}Gdy^2 \\
&= \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) e^\varphi Edx^2 - \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) e^{-\varphi}Gdy^2 \\
&= \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) (e^\varphi Edx^2 - e^{-\varphi}Gdy^2) .
\end{aligned}$$

Em resumo,

$$A = e^\varphi Edx^2 + e^{-\varphi}Gdy^2 \quad , \quad B = \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) (e^\varphi Edx^2 - e^{-\varphi}Gdy^2) .$$

Em particular, A é uma métrica Riemanniana em Σ , portanto (A, B) é um par fundamental. Além disso,

$$H(A, B) = \frac{-(e^\varphi E)(e^{-\varphi}G) \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) + (e^\varphi E)(e^{-\varphi}G) \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)}{2EG} = 0$$

e

$$\begin{aligned}
K(A, B) &= - \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 \\
&= - \frac{(k_1 - H + (H - k_2))^2}{4} \\
&= - \frac{(\sqrt{H^2 - K} + \sqrt{H^2 - K})^2}{4} \\
&= -(H^2 - K) .
\end{aligned}$$

Resta mostrar que o tensor de Codazzi $T_{\tilde{S}}$ é dado por (4.4). Como (x, y) é também um parâmetro duplamente ortogonal para (A, B) , temos

$$\begin{aligned}\tilde{S}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{e^\varphi E}A\left(\tilde{S}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{1}{e^\varphi E}B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{1}{e^\varphi E}\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)e^\varphi E\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{k_1 - k_2}{2}\frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}$$

Analogamente, encontramos:

$$\tilde{S}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{k_1 - k_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Agora, de (4.2), temos:

$$\begin{aligned}T_{\tilde{S}}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{1}{2e^\varphi E}[(k_1 - k_2)e^\varphi E]_y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2e^{-\varphi}G}[-(k_1 - k_2)e^{-\varphi}G]_x\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{2e^\varphi E}[(k_1 - k_2)_y e^\varphi E + (k_1 - k_2)(e^\varphi E)_y]\frac{\partial}{\partial x} - \\ &\quad \frac{1}{2e^{-\varphi}G}[(k_1 - k_2)_x e^{-\varphi}G + (k_1 - k_2)(e^{-\varphi}G)_x] \\ &= -\frac{1}{2}\left[(k_1 - k_2)_y + (k_1 - k_2)\varphi_y + (k_1 - k_2)\frac{E_y}{E}\right]\frac{\partial}{\partial x} - \\ &\quad \frac{1}{2}\left[(k_1 - k_2)_x + (k_1 - k_2)\varphi_x + (k_1 - k_2)\frac{G_x}{G}\right].\end{aligned}\tag{4.5}$$

Por outro lado, de (4.2) e do fato de que $T_S = 0$, uma vez que (I, II) é um par de Codazzi, temos que

$$\frac{1}{E}((k_1 E)_y - H E_y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{G}((k_2 G)_x - H G_x)\frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$2(k_1)_y = -\frac{(k_1 - k_2)E_y}{2E} \quad \text{e} \quad 2(k_2)_x = \frac{(k_1 - k_2)G_x}{2G}.$$

Substituindo as expressões acima em (4.5) obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{S}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{2}[(k_1 - k_2)_y + (k_1 - k_2)\varphi_y - 2(k_1)_y] \frac{\partial}{\partial x} - \\
&\quad \frac{1}{2}[(k_1 - k_2)_x - (k_1 - k_2)\varphi_x + 2(k_2)_x] \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}[(k_1)_y - (k_2)_y + (k_1 - k_2)\varphi_y] \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}[(k_1)_x - \\
&\quad (k_2)_x - (k_1 - k_2)\varphi_x] \frac{\partial}{\partial y} \\
&= (H_y - \sqrt{H^2 - K}\varphi_y) \frac{\partial}{\partial x} - (H_x - \sqrt{H^2 - K}\varphi_x) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \omega \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} .
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.2. *Seja (I, II) um par de Codazzi em Σ com curvaturas média e Gaussiana H e K , respectivamente. Seja φ uma função diferenciável em Σ tal que a função $\frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}}$ pode ser estendida diferencialmente a Σ . Defina o par fundamental*

$$\begin{aligned}
A &= \cosh \varphi I + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} II' , \\
B &= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi I + \cosh \varphi II' .
\end{aligned}$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. (A, B) é um par de Codazzi.
2. A diferencial de Hopf de (A, B) é holomorfa com respeito à estrutura conforme em Σ determinada por A .
3. $dH - \sqrt{H^2 - K}d\varphi \equiv 0$.

Demonstração. Seja z um parâmetro conforme local para a métrica Riemanniana A . Pela Proposição 1.3, A e B se exprimem em termos de z por

$$A = 2\lambda' |dz|^2 \quad , \quad B = Q' dz^2 + 2\lambda' H(A, B) |dz|^2 + \bar{Q}' d\bar{z} .$$

Pelo Lema 4.1, temos que $H(A, B) = 0$, logo

$$A = 2\lambda' |dz|^2 \quad , \quad B = Q'dz^2 + \bar{Q}'d\bar{z}^2 \quad .$$

De (3.11) e (4.4) temos

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = T_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\bar{Q}'_z}{\lambda'} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{Q'_{\bar{z}}}{\lambda'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad ,$$

ou seja,

$$\left[\omega \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\bar{Q}'_z}{\lambda'} \right] \frac{\partial}{\partial z} + \left[\frac{Q'_{\bar{z}}}{\lambda'} - \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 0 \quad .$$

Assim,

$$Q'_{\bar{z}} = \lambda' \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad .$$

Portanto, tendo em vista (3.11), são equivalentes:

1. (A, B) é um par de Codazzi.
2. $T_{\mathfrak{S}}$ é identicamente nulo.
3. $Q'_{\bar{z}}$ é identicamente nula.
4. $dH - \sqrt{H^2 - K}d\varphi \equiv 0$.

□

4.1 Pares de Weingarten Especiais

Nesta seção, aplicaremos o Corolário 4.2 a uma classe de pares de Codazzi, os pares de Weingarten especiais, que são fundamentais para as aplicações desenvolvidas no Capítulo 5. Começamos com o seguinte resultado mais geral.

Corolário 4.3. *Seja (I, II) um par de Codazzi em Σ com curvaturas média e Gaussiana H e K , respectivamente. Suponha que (I, II) seja um par de Weingarten, com $H = H(t)$*

e $K = K(t)$ para t em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e que exista uma primitiva $\varphi(t)$ da função

$$\frac{H'(t)}{\sqrt{H(t)^2 - K(t)}}$$

tal que a função

$$\frac{\sinh \varphi(t)}{\sqrt{H(t)^2 - K(t)}}$$

se estenda diferenciavelmente aos pontos em que o denominador se anula. Então

$$\begin{aligned} A &= \cosh \varphi I + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} II' , \\ B &= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi I + \cosh \varphi II' . \end{aligned}$$

é um par de Codazzi definido globalmente em Σ .

Demonstração. Pela hipótese, temos que $dH - \sqrt{H^2 - K}d\varphi \equiv 0$ e $\frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}}$ se estende diferenciavelmente a Σ . Logo o resultado decorre do Corolário 4.2. \square

Definição 4.4. Dizemos que o par de Codazzi (I, II) é um par de Weingarten especial se existe uma função diferenciável f definida em um intervalo $J \subseteq [0, \infty)$ tal que a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K de (I, II) satisfazem

$$H = f(H^2 - K) .$$

Corolário 4.5. Seja (I, II) um par de Codazzi em Σ com curvaturas média e Gaussiana H e K , respectivamente. Suponha que (I, II) seja um par de Weingarten especial. Então, existe uma função diferenciável φ em Σ tal que

$$\begin{aligned} A &= \cosh \varphi I + \frac{\sinh \varphi}{\sqrt{H^2 - K}} II' , \\ B &= \sqrt{H^2 - K} \sinh \varphi I + \cosh \varphi II' . \end{aligned}$$

é um par de Codazzi definido globalmente em Σ com $H(A, B) = 0$.

Demonstração. Temos que $H = f(H^2 - K)$ para alguma uma função diferenciável f definida em um intervalo $J \subseteq [0, \infty)$. Assim, podemos escrever $H = f(t^2)$ e $H^2(t) - K(t) =$

t^2 . Logo, $\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2)ds$ é uma primitiva da função $\frac{H'(t)}{\sqrt{H(t)^2 - K(t)}}$, com $\varphi(0) = 0$. Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh \varphi(t)}{\sqrt{H(t)^2 - K(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh \varphi(t)}{t} = \varphi'(0) = 2f'(0) ,$$

logo a função

$$\frac{\sinh \varphi(t)}{\sqrt{H(t)^2 - K(t)}}$$

pode ser estendida diferenciavelmente aos pontos em que o denominador se anula. O resultado segue agora do Corolário 4.3. \square

Como consequência, obtemos a seguinte versão abstrata de um resultado provado em [15], segundo o qual a única superfície de Weingarten especial homeomorfa a uma esfera imersa em uma forma espacial é a esfera totalmente umbílica.

Corolário 4.6. *Seja (I, II) um par de Codazzi em uma superfície Σ homeomorfa a uma esfera. Suponha que (I, II) seja um par de Weingarten especial. Então (I, II) é totalmente umbílico.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.5, o par fundamental (A, B) dado por (4.6) é um par de Codazzi definido globalmente em Σ , logo sua diferencial de Hopf Q' é holomorfa com respeito à estrutura conforme determinada por A . Como Σ é homeomorfa à esfera, segue do Teorema 1.2 que Q' é identicamente nula. Logo (A, B) é totalmente umbílico. Por outro lado, pelo Lema 4.1 as curvaturas média e Gaussiana de (A, B) são, respectivamente, $H(A, B) = 0$ e $K(A, B) = -(H^2 - K)$. Então $K(A, B) = H^2(A, B) = 0$, e portanto $H^2 - K = 0$, ou seja, o par (I, II) é totalmente umbílico. \square

O último resultado deste capítulo mostra que todo par de Weingarten especial em uma superfície Σ pode ser obtido a partir de uma métrica Riemanniana em Σ e uma 2-forma em Σ que é holomorfa com respeito à estrutura conforme determinada por A e satisfaz certas condições.

Corolário 4.7. *Sejam Σ uma superfície e f uma função diferenciável definida em um intervalo $J \subseteq [0, \infty)$. Seja $\varphi(t)$ a primitiva de $2f'(t^2)$ tal que $\varphi(0) = 0$. Então todo par de Weingarten especial (I, II) em Σ satisfazendo $H = f(H^2 - K)$ é dado por*

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\sinh \varphi(t)}{t} Q' + \cosh \varphi(t) A - \frac{\sinh \varphi(t)}{t} \bar{Q}' , \\ II - f(t^2) I &= \cosh \varphi(t) Q' - t \sinh \varphi(t) A + \cosh \varphi(t) \bar{Q}' , \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que A é uma métrica Riemanniana em Σ e Q' é uma 2-forma holomorfa com respeito à estrutura conforme determinada por A tal que a imagem da função $t : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ definida por $2|Q'| = t|A|$ está contida em J . Em particular, $t^2 = H^2 - K$.

Demonstração. Seja (I, II) um par de Weingarten especial em Σ . Pelo Corolário 4.5, existe um par de Codazzi (A, B) tal que a diferencial de Hopf Q' de (A, B) é holomorfa com respeito à estrutura conforme determinada por A , e a forma quadrática B se escreve como $B = Q' dz^2 + \bar{Q}' d\bar{z}^2$ em termos de um parâmetro conforme local z , uma vez que $H(A, B) = 0$. Além disso, temos que $K(A, B) = -(H^2 - K)$, logo

$$t^2 = H^2 - K = -K(A, B) = \frac{|Q'|^2}{\lambda^2} = 4 \frac{|Q'|^2}{|A|^2}.$$

Portanto,

$$2|Q'| = t|A| .$$

Além disso, de (4.3) temos

$$A = \cosh \varphi(t) I + \frac{\sinh \varphi(t)}{t} II - f(t^2) \frac{\sinh \varphi(t)}{t} I , \quad (4.7)$$

$$Q' + \bar{Q}' = t \sinh \varphi(t) I + \cosh \varphi(t) II - f(t^2) \cosh \varphi(t) I . \quad (4.8)$$

Multiplicando as equações (4.7) por $t \cosh \varphi(t)$ e (4.8) por $\sinh \varphi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} t \cosh \varphi(t) A &= t \cosh^2 \varphi(t) I + \cosh \varphi(t) \sinh \varphi(t) II - f(t^2) \cosh \varphi(t) \sinh \varphi(t) I , \\ \sinh \varphi(t) (Q' + \bar{Q}') &= t \sinh^2 \varphi(t) I + \sinh \varphi(t) \cosh \varphi(t) II - f(t^2) \sinh \varphi(t) \cosh \varphi(t) I . \end{aligned}$$

Subtraindo as equações anteriores obtemos

$$I = -Q' \frac{\sinh \varphi(t)}{t} + A \cosh \varphi(t) - \bar{Q}' \frac{\sinh \varphi(t)}{t} .$$

Por outro lado, multiplicando (4.7) por $t \sinh \varphi(t)$ e (4.8) por $\cosh \varphi(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} t \sinh \varphi(t)A &= t \sinh \varphi(t) \cosh \varphi(t)I + \sinh^2 \varphi(t)II - f(t^2) \sinh^2 \varphi(t)I, \\ \cosh \varphi(t)(Q' + \bar{Q}') &= t \cosh \varphi(t) \sinh \varphi(t) + \cosh^2 \varphi(t)II - f(t^2) \cosh^2 \varphi(t)I. \end{aligned}$$

Subtraindo as equações obtidas, temos

$$t \sinh \varphi(t)A - \cosh \varphi(t)(Q' + \bar{Q}') = (\sinh^2 \varphi(t) - \cosh^2 \varphi(t))II + f(t^2)(\cosh^2 \varphi(t) - \sinh^2 \varphi(t))I.$$

Logo,

$$II - f(t^2)I = \cosh \varphi(t)Q' - t \sinh \varphi(t)A + \cosh \varphi(t)\bar{Q}'.$$

□

Capítulo 5

Aplicações a superfícies de \mathbb{R}^3

Neste capítulo, descrevemos algumas aplicações da teoria abstrata de pares de Codazzi a superfícies de \mathbb{R}^3 . Em particular, apresentamos uma demonstração do seguinte resultado sobre superfícies de Weingarten especiais elípticas, para as quais a função diferenciável f tal que $H = f(H^2 - K)$ está definida em $[0, a)$, $0 < a \leq \infty$, e satisfaz

$$4tf'(t)^2 < 1, \forall t \in [0, a). \quad (5.1)$$

Teorema 5.1. *Seja Σ uma superfície de Weingarten especial elíptica de \mathbb{R}^3 satisfazendo $H = f(H^2 - K)$.*

- 1. Se Σ é uma superfície completa e $K \geq 0$ em todos os pontos de Σ , então Σ é uma esfera totalmente umbílica, ou um plano ou um cilindro circular reto.*
- 2. Se $f(0) \neq 0$ e Σ é uma superfície completa, mergulhada com $K \leq 0$ em todos os pontos de Σ , então Σ é um cilindro circular reto.*

Em particular, decorre do Teorema 5.1 que uma superfície de Weingarten especial elíptica, mergulhada e completa de \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana negativa satisfaz $f(0) = 0$. Exemplos importantes com essa propriedade são as superfícies mínimas completas de \mathbb{R}^3 sem pontos planares.

Um dos ingredientes importantes para a demonstração do Teorema 5.1 é o princípio do máximo de Hopf, enunciado na próxima seção, aplicado às superfícies de \mathbb{R}^3 .

Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies em \mathbb{R}^3 tangentes em $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ e com o mesmo vetor curvatura média em p . Dizemos que Σ_1 e Σ_2 satisfazem o princípio do máximo de Hopf se, vistas localmente como gráficos de funções diferenciáveis u_1 e u_2 em relação ao plano tangente comum em p , respectivamente, tivermos que $u_1 \leq u_2$ implica $u_1 = u_2$ em uma vizinhança de p .

Teorema 5.2. *Quaisquer duas superfícies de Weingarten especiais elípticas em \mathbb{R}^3 satisfazem o princípio do máximo de Hopf.*

Veremos que, a partir do Teorema 5.2, é possível estimar a altura máxima com respeito a um plano de uma superfície de Weingarten especial elíptica com bordo em tal plano.

5.1 O Princípio do Máximo para as Superfícies de Weingarten Especiais Elípticas

Nesta seção enunciamos o Princípio do máximo no interior e na fronteira de Hopf (para mais detalhes, ver [2]) e o aplicamos à teoria de superfícies de Weingarten especiais elípticas de \mathbb{R}^3 .

5.1.1 O Princípio do Máximo de Hopf

Sejam a_{ij} , b_i , c , d funções reais de classe C^∞ em um domínio Ω de \mathbb{R}^n , com $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz simétrica. Considere o operador diferencial

$$L = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c. \quad (5.2)$$

Definição 5.3. Dizemos que L é *uniformemente elíptico* se existir uma constante $\theta > 0$ tal que:

$$\sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) x_i x_j \geq \theta |x|^2, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega. \quad (5.3)$$

Os seguintes resultados são fundamentais no restante deste trabalho.

Teorema 5.4. (*Princípio do Máximo no Interior de Hopf*) *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a função $u \in C^2(\Omega)$ satisfaça $Lu \geq 0$. Então u é constante se uma das seguintes condições ocorre:*

- $c \equiv 0$ e u atinge seu máximo em Ω .
- $c \leq 0$, u atinge seu máximo em Ω e esse máximo é negativo.

Teorema 5.5. (*Princípio do Máximo na Fronteira de Hopf*) *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ duas vezes diferenciável. Seja $x_0 \in \partial\Omega$, tal que*

1. u é de classe C^1 em x_0 .
2. $u(x_0) \geq u(x), \forall x \in \Omega$.
3. $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = 0$, em que η é o vetor normal unitário exterior de $\partial\Omega$.

Então u é constante se uma das seguintes condições ocorre:

- $c \equiv 0$.
- $c \leq 0$ e $u(x_0) \geq 0$.

5.1.2 Demonstração do Teorema 5.2

Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies de Weingarten especiais elípticas, as quais podemos supor que sejam gráficos de funções u_1 e u_2 , respectivamente, definidas em um aberto Ω de \mathbb{R}^2 . Sejam $H(N_1)$, $H(N_2)$ as curvaturas médias de u_1 e u_2 , com respeito aos campos de vetores normais unitários N_1 e N_2 , respectivamente, os quais supomos dados por

$$N_i((x, y)) = \frac{\varphi_{ix}(x, y) \times \varphi_{iy}(x, y)}{|\varphi_{ix}(x, y) \times \varphi_{iy}(x, y)|},$$

em que $\varphi_i(x, y) = (x, y, u_i(x, y))$, $1 \leq i \leq 2$.

Suponhamos que $(x, y) \in \Omega$ seja um ponto interior tal que os planos tangentes e os vetores normais unitários de Σ_1 e Σ_2 coincidem em $p = (x, y, z)$ para $z = u_1(x, y) = u_2(x, y)$. Vamos também considerar o caso em que $(x, y) \in \Omega$ é um ponto no bordo tal que $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$ e $T_p\partial\Sigma_1 = T_p\partial\Sigma_2$, com os vetores conormais interiores coincidindo em p .

Em ambos casos, mostraremos que se $u_1 \leq u_2$ ($\Sigma_1 \leq \Sigma_2$) próximo de (x, y) , então $u_1 = u_2$ ($\Sigma_1 = \Sigma_2$) próximo de p .

Sem perda de generalidade, podemos supor que os planos horizontais xy ($z = 0$) sejam os planos tangentes de Σ_1 e Σ_2 em p e que os vetores normais N_1 e N_2 sejam iguais a $N = (0, 0, 1)$ em p . Para simplificar os cálculos, usamos as seguintes notações:

$$p_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad , \quad p_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad ,$$

$$q_1 = \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad , \quad q_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} \quad ,$$

$$r_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad , \quad r_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad ,$$

$$\tau_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad , \quad \tau_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \quad ,$$

$$s_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \quad , \quad s_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \quad .$$

Portanto

$$\begin{aligned} N_i(\varphi_i) &= \frac{(1, 0, p_i) \times (0, 1, q_i)}{|(1, 0, p_i) \times (0, 1, q_i)|} \\ &= \frac{(-p_i, -q_i, 1)}{(1 + p_i^2 + q_i^2)^{1/2}} \quad , \quad i = 1, 2 \quad . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Além disso, as curvaturas média H_i e Gaussiana K_i de M_i , $i = 1, 2$, são dadas por:

$$H_i = \frac{(1 + p_i^2)\tau_i - 2p_iq_i s_i + (1 + q_i^2)r_i}{2(1 + p_i^2 + q_i^2)^{3/2}} \quad ,$$

$$K_i = \frac{1}{(1 + p_i^2 + q_i^2)^2} (r_i \tau_i - s_i^2) \quad .$$

Como Σ_i são superfícies de Weingarten especiais elípticas com respeito à mesma função elíptica f , então $H_i = f(H_i^2 - K_i)$, ou seja,

$$F(p_i, q_i, r_i, s_i, \tau_i) := H_i - f(H_i^2 - K_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.5)$$

em que F é uma função de classe C^1 nas variáveis p_i, q_i, r_i, s_i e τ_i .

Fixando (x, y) em Ω , definimos para $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & F(tp_1 + (1-t)p_2, tq_1 + (1-t)q_2, tr_1 + (1-t)r_2, ts_1 + (1-t)s_2, \\ & t\tau_1 + (1-t)\tau_2). \end{aligned}$$

Para $t = 0$ e $t = 1$ temos:

$$\alpha(0) = F(p_2, q_2, r_2, s_2, \tau_2) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(1) = F(p_1, q_1, r_1, s_1, \tau_1) = 0.$$

Como α é contínua e diferenciável em $(0, 1)$, pois F é C^1 , e $\alpha(0) = \alpha(1)$, decorre do Teorema do Valor Médio que existe $c \in (0, 1)$ tal que $\alpha'(c) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha'(c) = & \frac{\partial F}{\partial p}(\xi) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q}(\xi) \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r}(\xi) \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}(\xi) \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \tau}(\xi) \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ = & \frac{\partial F}{\partial p}(\xi)(p_1 - p_2) + \frac{\partial F}{\partial q}(\xi)(q_1 - q_2) + \frac{\partial F}{\partial r}(\xi)(r_1 - r_2) + \frac{\partial F}{\partial s}(\xi)(s_1 - s_2) \\ & + \frac{\partial F}{\partial \tau}(\xi)(\tau_1 - \tau_2) = 0, \end{aligned}$$

em que $\xi = (p, q, r, s, \tau)$ com $p = cp_1 + (1-c)p_2$, $q = cq_1 + (1-c)q_2$, $r = cr_1 + (1-c)r_2$, $s = cs_1 + (1-c)s_2$ e $\tau = c\tau_1 + (1-c)\tau_2$.

Seja $w = u_1 - u_2$. Então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = p_1 - p_2 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = q_1 - q_2 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = r_1 - r_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \tau_1 - \tau_2 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = s_1 - s_2 \quad .$$

Logo,

$$\alpha'(c) = \frac{\partial F}{\partial p}(\xi) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}(\xi) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial r}(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial s}(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial \tau}(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 .$$

Defina

$$Lw := \frac{\partial F}{\partial p}(\xi) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}(\xi) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial r}(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial s}(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial \tau}(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} .$$

Seja A a matriz formada pelas componentes de maior grau do operador L , isto é,

$$A = A(p, q, r, s, \tau) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial \tau} \end{bmatrix} .$$

Como $p_i = q_i = 0$, pois $N_i = N = (0, 0, 1)$, então $p = q = 0$.

Afirmação 5.1.

$$\text{tr}A = 1 \quad e \quad \det A = \frac{1}{4}(1 - 4tf'(t)^2) .$$

De fato, temos em $(0, 0, r, s, \tau)$:

$$\text{tr}A = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial \tau} . \quad (5.6)$$

Por (5.5),

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} H_i - \frac{\partial}{\partial r} f(t) \frac{\partial t}{\partial r} , \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} H_i - \frac{\partial}{\partial \tau} f(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} , \quad (5.8)$$

em que $t = H_i^2 - K_i$.

Notemos que $2H_i = \tau + r$ e $K_i = r\tau - s^2$ em $(0, 0, r, s, \tau)$. Logo,

$$\frac{\partial H_i}{\partial r} = \frac{1}{2} , \quad \frac{\partial K_i}{\partial r} = \tau ,$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \tau} = \frac{1}{2} , \quad \frac{\partial K_i}{\partial \tau} = r .$$

Além disso, $H_i^2 - K_i = \frac{1}{4}(\tau - r)^2 + s^2$. Portanto

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{2}(r - \tau) ,$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(\tau - r) .$$

Dessa forma, reescrevemos (5.7) e (5.8) como

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial f(t)}{\partial r} (r - \tau) ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial f(t)}{\partial \tau} (\tau - r) .$$

Como $\frac{\partial H_i}{\partial r} = \frac{\partial H_i}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial t}{\partial r}$, segue que

$$\text{tr} A = 1 .$$

Por outro lado,

$$\det A = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 .$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= -2s \frac{\partial f(t)}{\partial s} \\ &= -\frac{\partial H_i}{\partial s} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \det A &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial f(t)}{\partial r} (r - \tau) \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial f(t)}{\partial \tau} (\tau - r) \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} f'(t)^2 (\tau - r)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 4t f'(t)^2) , \end{aligned}$$

em que

$$t = \frac{(1+p^2)\tau - 2pqs + (1+q^2)r}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}(r\tau - s^2).$$

com $p = cp_1 + (1-c)p_2$, $q = cq_1 + (1-c)q_2$, $r = cr_1 + (1-c)r_2$, $s = cs_1 + (1-c)s_2$, $\tau = c\tau_1 + (1-c)\tau_2$ e $p_i, q_i, r_i, s_i, \tau_i$ variando em uma vizinhança V de (x, y) e c no intervalo $[0, 1]$.

De (5.1) temos que $\det A > 0$ e portanto A é uma matriz positiva definida. Por continuidade A também é positiva definida em V , logo L é um operador uniformemente elíptico em V .

Na vizinhança V de (x, y) temos que $Lw = 0$ e $w \leq 0$. Como $w(x, y) = 0$ segue que (x, y) é um ponto de máximo de w em V .

Se (x, y) é um ponto interior, decorre do Teorema 5.4 que w é constante. Como $w(x, y) = 0$, concluímos que $w = 0$ em V , e portanto $u_1 = u_2$ em V .

Suponha agora que (x, y) é um ponto no bordo. Como $\frac{\partial w}{\partial \eta}(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x, y) - \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x, y) = 0$, pois os vetores normais exteriores a $\partial \Sigma_i$ coincidem em p , obtemos do Teorema 5.5 que w é constante. Como $w(x, y) = 0$, concluímos que $w = 0$ em V , e portanto $u_1 = u_2$ em V .

5.2 Estimativa de altura máxima

Nesta seção vamos mostrar que é possível estimar a altura máxima em relação a um plano de uma superfície mergulhada Σ de \mathbb{R}^3 cujo bordo esteja nesse plano, desde que Σ pertença a uma família de superfícies satisfazendo as condições da definição abaixo.

Definição 5.6. Dizemos que uma família \mathcal{A} de superfícies orientadas de \mathbb{R}^3 satisfaz o princípio do máximo de Hopf se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. \mathcal{A} é invariante por isometrias de \mathbb{R}^3 . Em outras palavras, se $\Sigma \in \mathcal{A}$ e φ é uma isometria de \mathbb{R}^3 , então $\varphi(\Sigma) \in \mathcal{A}$.
2. Se $\Sigma \in \mathcal{A}$ e $\tilde{\Sigma}$ é uma superfície de \mathbb{R}^3 tal que $\tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$, então $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{A}$.
3. Existe uma superfície compacta, mergulhada e sem bordo em \mathcal{A} .

4. Quaisquer duas superfícies em \mathcal{A} satisfazem o princípio do máximo (interior e fronteira).

Proposição 5.7. *Se uma família de superfícies \mathcal{A} satisfaz o princípio do máximo de Hopf, então existe, a menos de isometria de \mathbb{R}^3 , uma única superfície compacta, mergulhada e sem bordo em \mathcal{A} . Tal superfície é necessariamente a esfera totalmente umbílica.*

Demonstração. Como \mathcal{A} é uma família de superfícies satisfazendo o princípio do máximo de Hopf, existe uma superfície Σ compacta, mergulhada e sem bordo em \mathcal{A} . Vamos mostrar que Σ é uma esfera totalmente umbílica. Isto é equivalente a mostrar que Σ possui planos de simetria em todas as direções.

Dado $\nu \in \mathbb{R}^3$, considere a família a um parâmetro de planos $P(t) \subset \mathbb{R}^3$ com vetor normal ν . Seja $I_t(\Sigma)$ a reflexão de Σ com respeito a $P(t)$. Como Σ é compacta e mergulhada, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $I_{t_0}(\Sigma)$ é tangente a Σ e, vistas localmente como gráficos de funções diferenciáveis u_1 e u_2 , respectivamente, em relação ao plano tangente comum, satisfazem $u_2 \leq u_1$. Como a família \mathcal{A} satisfaz o princípio do máximo de Hopf, temos que $I_{t_0}(\Sigma) = \Sigma$. Logo, $P(t_0)$ é um plano de simetria.

□

Exemplo 5.1. A família de superfícies de Weingarten especiais elípticas de \mathbb{R}^3 satisfaz o princípio do máximo de Hopf. De fato, a condição 1 decorre do fato de que as curvaturas média e Gaussiana de uma superfície são invariantes por isometrias de \mathbb{R}^3 . A condição 2 é imediata, enquanto que a condição 4 segue do Teorema 5.2. Quanto à condição 3, basta observar que uma esfera de raio r é uma superfície de Weingarten especial elíptica com $f(x) = \frac{1}{r}$, para a qual $f(0) \neq 0$ e $4tf'(t) = 0 < 1$.

Inicialmente obtemos uma estimativa de altura máxima em relação a um plano para um gráfico compacto pertencente a uma família de superfícies de \mathbb{R}^3 que satisfaz o princípio do máximo de Hopf.

Teorema 5.8. *Sejam \mathcal{A} uma família de superfícies de \mathbb{R}^3 satisfazendo o princípio do máximo de Hopf e $\Sigma \in \mathcal{A}$ um gráfico compacto em um domínio Ω no plano xy cujo bordo*

$\partial\Sigma$ está contido nesse plano. Então, para cada $p \in \Sigma$ a distância em \mathbb{R}^3 de p ao plano xy é menor do que ou igual a $4R_{\mathcal{A}}$, em que $R_{\mathcal{A}}$ é o raio da única esfera totalmente umbílica em \mathcal{A} .

Demonstração. Sejam $\Sigma \in \mathcal{A}$ um gráfico compacto em $\Omega \subset P$, em que P é o plano xy , e Σ_0 a única esfera totalmente umbílica em \mathcal{A} . Sejam $P(t)$ planos horizontais de \mathbb{R}^3 , tal que $P(0) = P$ e t é a distância de P a $P(t)$.

Primeiro, vamos mostrar a seguinte afirmação:

Afirmção 5.2. Para cada $t > 2R_{\mathcal{A}}$, o diâmetro de qualquer componente conexa, limitada por $\Sigma(t) = P(t) \cap \Sigma$ é menor ou igual a $2R_{\mathcal{A}}$.

De fato, suponhamos que a afirmação 5.2 é falsa, ou seja, para alguma componente conexa $C(t)$ de $\Sigma(t)$, existem pontos a e $b \in \Omega(t)$, tal que $d(a, b) > 2R_{\mathcal{A}}$ ($\Omega(t)$ é um domínio em $P(t)$ limitado por $C(t)$).

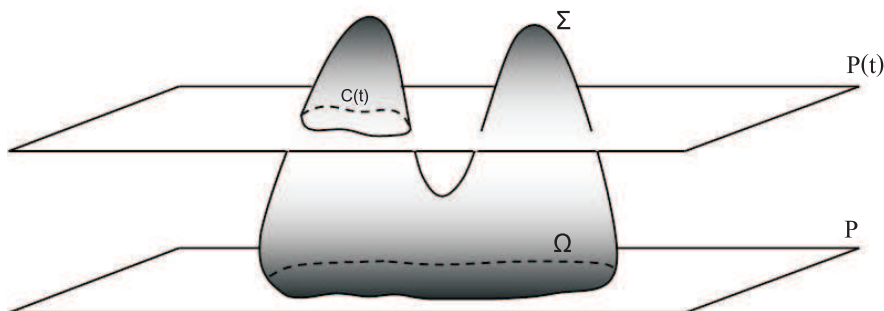


Figura 5.1: Superfície Σ gráfico compacto cujo bordo $\partial\Sigma$ está contido no plano P .

Sejam Q um domínio em \mathbb{R}^3 , limitado por $\Sigma \cup \Omega$ e β uma curva em $\Omega(t)$ que une a e b , tal que $\beta \cap C(t) = \emptyset$.

Seja Π um “retângulo” dado por:

$$\Pi = \{ \alpha_s(r) : s \in I, r \in [0, t] \} ,$$

em que I é o intervalo de definição da curva β , α_s é uma geodésica com $\alpha_s(0) = \beta(s)$ e $\alpha'_s(0) = -e_3 = -(0, 0, 1)$, e r é o parâmetro de comprimento de arco ao longo de α_s .

Como Σ é um gráfico e β está contida em $\Omega(t)$, então $\Pi \subset Q$. Além disso, se tomarmos $q = \alpha_s(0) = \beta(s)$, para algum $s \in I$, digamos $s = s_1$, tal que $d(a, q) = d(q, b)$ e “andarmos” sobre a geodésica de vetor velocidade $\alpha'_{s_1}(0)$ até uma distância $t/2$, obtemos um ponto $\tilde{p} \in \Pi$, tal que $d(\tilde{p}, \partial\Pi) > R_{\mathcal{A}}$.

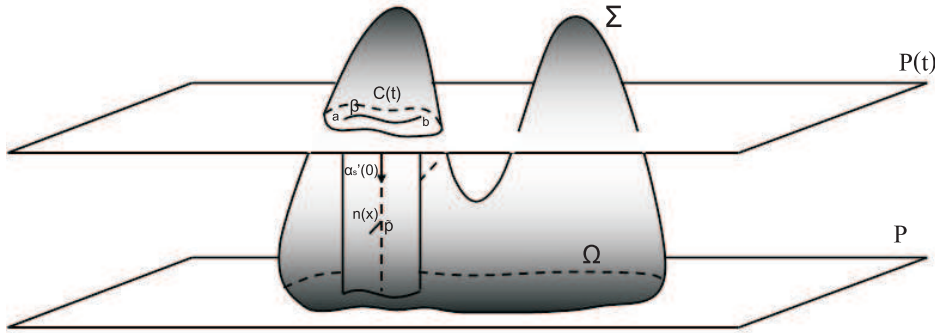


Figura 5.2: Construção do retângulo Π e da reta η .

Seja $\eta(x)$ uma reta horizontal que passa por \tilde{p} e estar contida no plano $z = t/2$ (figura 5.2). Como $d(\tilde{p}, \partial\Pi) > R_{\mathcal{A}}$, então a distância de cada ponto de η a $\partial\Pi$ é maior que $R_{\mathcal{A}}$. Além disso, η é ortogonal a geodésica de vetor velocidade $\alpha'_{s_1}(0)$.

Sejam q_0 o primeiro ponto em que η intersecta Q e q_1 o último ponto em que η intersecta Q . Considere as esferas $\Sigma_0(x) \in \mathcal{A}$, centradas em cada ponto de $\eta(x)$ obtidas da esfera rotacional Σ_0 , por meio de translações de \mathbb{R}^3 . Como $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$, então pela definição 5.6, $\Sigma_0(x) \in \mathcal{A}$. Seja $\Sigma_0(x_0)$ a primeira esfera, próximo de q_0 , que toca Σ em um ponto q'_0 , então se os vetores normais de ambas coincidem em q'_0 e como as duas superfícies pertencem a \mathcal{A} , então pelo princípio do máximo, $\Sigma = \Sigma_0(x_0)$, absurdo.

Por outro lado, suponhamos que os vetores normais não coincidam, digamos, o vetor normal de Σ “aponta para dentro” e o vetor normal de $\Sigma_0(x)$ “aponta para fora”. Então, tomamos $\Sigma_0(x_0)$ a primeira esfera na família \mathcal{A} que encontra Π em um ponto interior, e para cada $x > x_0$, consideramos a parte $\tilde{\Sigma}_0(x)$ da esfera $\Sigma_0(x)$ que passa por Π . Nenhuma dessas esferas toca $\partial\Pi$, pois a distância de cada ponto de η a $\partial\Pi$ é maior que $R_{\mathcal{A}}$ e cada ponto de η é o centro de cada esfera $\Sigma_0(x)$. Como essas esferas “deixam” Q em q_1 , existe

um primeiro valor x_1 , tal que $\Sigma_0(x_1)$ encontra Σ em um ponto q'_1 e neste ponto os vetores normais coincidem (figura 5.3).

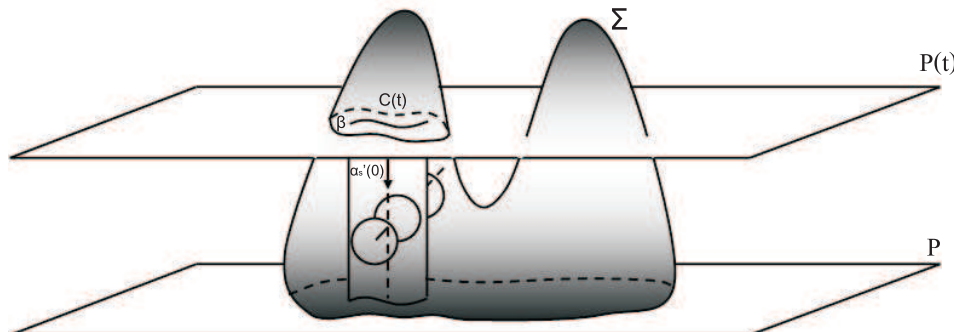


Figura 5.3: As esferas $\Sigma_0(x)$ centradas em cada ponto de η .

Logo, pelo princípio do máximo, $\Sigma = \Sigma_0(x_1)$, absurdo. Portanto, concluímos a afirmação 5.2.

Para finalizarmos, basta provarmos que $P(t) \cap \Sigma = \emptyset$, se $t > 4R_{\mathcal{A}}$. Isso é equivalente à seguinte afirmação:

Afirmação 5.3. Seja Ω_1 uma componente conexa limitado por $\Sigma(2R_{\mathcal{A}}) = P(2R_{\mathcal{A}}) \cap \Sigma$. A distância de qualquer ponto de Σ (gráfico sobre Ω_1) ao plano $P(2R_{\mathcal{A}})$ é menor ou igual ao diâmetro de Ω_1 .

Suponhamos que a afirmação 5.3 seja falsa, ou seja, existe um ponto $p \in \Sigma$ (gráfico sobre Ω_1), tal que a distância $d(p, \Omega_1) > \text{diam}\Omega_1$.

Seja σ uma reta suporte de $\partial\Omega_1$ em $P(2R_{\mathcal{A}})$ com vetor normal unitário $v \in P(2R_{\mathcal{A}})$. Seja $\gamma(r)$ uma geodésica, tal que $\gamma(0) \in \sigma$ e $\gamma'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + e_3)$, em que $e_3 = (0, 0, 1)$.

Para cada r , consideramos os planos $\pi(r)$ em \mathbb{R}^3 que passam por $\gamma(r)$ e são ortogonais a $\gamma'(r) = \gamma'(0)$. A interseção dos planos $\pi(r)$ com os planos $P(2R_{\mathcal{A}})$ são retas paralelas à

reta suporte σ e $\pi/4$ é o ângulo entre esses planos. De fato, basta calcularmos

$$\cos \theta = \frac{|\langle \gamma'(0), e_3 \rangle|}{|\gamma'(0)| |e_3|}.$$

Seja Σ_1 a parte compacta de Σ (gráfico sobre Ω_1). Observamos que, quando r é suficientemente grande, $\pi(r)$ não intercepta Σ_1 . Além disso, para $r = 0$, o plano $\pi(0)$ contém a reta suporte σ e a reflexão de p sobre o plano $\pi(0)$ é um ponto cuja projeção vertical em $P(2R_{\mathcal{A}})$ não pertence a Ω_1 . De fato, sejam $R(p)$ o ponto de reflexão de p com respeito ao plano $\pi(0)$ e $proj(R(p))$ a projeção vertical de $R(p)$ sobre o plano $P(2R_{\mathcal{A}})$. Seja $P(t_1)$ o plano que contém o ponto p e é paralelo ao plano $P(2R_{\mathcal{A}})$. Assim, $d(P(t_1), P(2R_{\mathcal{A}})) = d(p, \Omega_1)$. Logo, $d(P(t_1), proj(R(p))) = d(p, \Omega_1) > diam\Omega_1$.

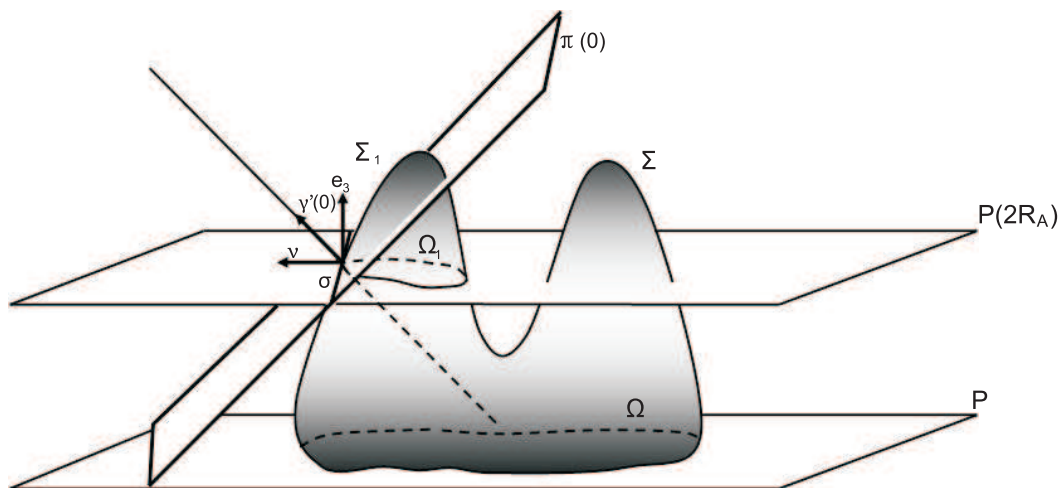


Figura 5.4: Aplicação da técnica de reflexão de Alexandrov.

Seja $\Sigma_1^*(r)$ a reflexão de $\Sigma_1(r)$ sobre os planos $\pi(r)$ com r suficientemente grande. Assim, existe um primeiro valor r_0 , tal que $\Sigma_1^*(r_0)$ é tangente a Σ_1 . Logo, pelo princípio do máximo $\Sigma_1 = \Sigma_1^*(r_0)$, absurdo. \square

Como consequência do resultado acima, estimamos a distância máxima a um plano atingida por uma superfície compacta e mergulhada $\Sigma \in \mathcal{A}$ cuja fronteira está contida nesse plano.

Corolário 5.9. *Seja \mathcal{A} uma família de superfícies de \mathbb{R}^3 , satisfazendo o princípio do máximo de Hopf. Então, cada superfície compacta e mergulhada $\Sigma \in \mathcal{A}$, cuja fronteira está contida em um plano P , verifica que para cada $p \in \Sigma$, a distância em \mathbb{R}^3 de p ao plano P é menor ou igual a $8R_{\mathcal{A}}$, em que $R_{\mathcal{A}}$ é o raio da única esfera totalmente umbílica em \mathcal{A} .*

Demonstração. Como Σ é compacta existe $q \in \Sigma$ tal que $d(q, P) \geq d(x, P) \forall x \in \Sigma$. Sejam P_t planos paralelos a P com $P_0 = P$ e $q \in P_h$. Usando o método de reflexão de Alexandrov, vamos mostrar que $\Sigma_{h/2}$ (parte de Σ que está sobre o plano $P_{h/2}$) é um gráfico sobre esse plano.

Suponhamos que $\Sigma_{h/2}$ não é um gráfico (figura 5.5). Seja Σ_t^* a reflexão de Σ_t sobre o plano P_t , com $t \in [h/2, h]$. Façamos a reflexão a partir de $t = h$ de forma decrescente. Assim, existe $t_0 \in [h/2, h]$ tal que $\Sigma_{t_0}^*$ é tangente a Σ . Então, pelo princípio do máximo, $\Sigma_{t_0}^* = \Sigma$. Logo, Σ é uma superfície fechada sem bordo, absurdo.

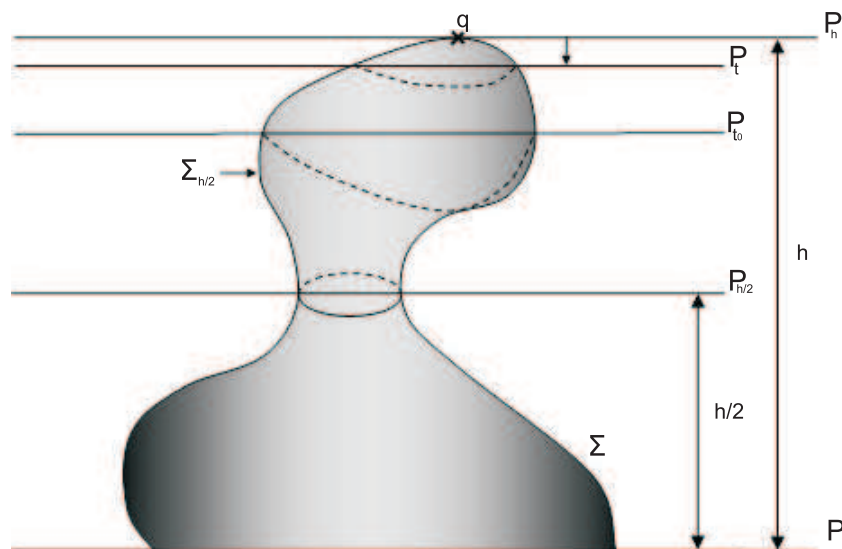


Figura 5.5: Superfície Σ compacta, mergulhada cuja a $\partial\Sigma$ está contida no plano P .

Portanto, $\Sigma_{h/2}$ é um gráfico sobre o plano $P_{h/2}$. Pelo Teorema 5.8, $d(x, P_{h/2}) \leq 4R_{\mathcal{A}}$, $\forall x \in \Sigma_{h/2}$. Logo, $\forall x \in \Sigma$, $d(x, P) \leq 8R_{\mathcal{A}}$.

□

O resultado a seguir foi obtido por [7] para as superfícies de Weingarten especiais elípticas. A demonstração usa apenas, no entanto, o fato de que tais superfícies satisfazem o princípio do máximo de Hopf e as estimativas de altura do Corolário 5.9. Portanto, tal resultado vale mais geralmente para qualquer família de superfícies de \mathbb{R}^3 que satisfaz o princípio do máximo de Hopf.

Proposição 5.10. *Seja \mathcal{A} uma família de superfícies de \mathbb{R}^3 satisfazendo o princípio do máximo de Hopf. Então,*

- (i) *\mathcal{A} não contém uma superfície mergulhada homeomorfa ao plano.*
- (ii) *Uma superfície $\Sigma \in \mathcal{A}$ com dois fins é uma superfície de rotação contida em um cilindro de \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Ver [22]. □

5.3 Aplicação

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema 5.1. Mostraremos inicialmente, usando os resultados do capítulo anterior, que uma superfície de Weingarten especial cujas curvaturas média e Gaussiana satisfazem $H^2 - K > c > 0$ admite uma métrica completa com curvatura Gaussiana nula, em particular tem a estrutura conforme do plano, do plano menos um ponto ou do toro. Iniciamos com um fato preliminar de geometria Riemanniana.

Lema 5.11. *Se (M, g_1) e (M, g_2) são variedades Riemannianas tais que $g_2 \geq cg_1$ para alguma constante $c > 0$, então (M, g_2) é completa se (M, g_1) é completa.*

Demonstração. Usaremos que uma variedade Riemanniana (M, g) é completa se, e somente se, (M, d) é um espaço métrico completo, em que d é a distância em M induzida por g (veja [12]).

Sejam d_1 e d_2 as distâncias em M induzidas por g_1 e g_2 , respectivamente. Então é imediato verificar que $d_2 \geq cd_1$. Daí decorre facilmente que toda sequência de Cauchy para d_2 é também uma sequência de Cauchy para d_1 . Assim, se (M, g_1) é completa e (x_n) é uma sequência de Cauchy em M para d_2 , então (x_n) é também uma sequência de Cauchy em M para d_1 , logo converge, pois (M, d_1) é completo. Isto implica que (M, d_2) é completo, logo (M, g_2) é uma variedade Riemanniana completa. \square

Lema 5.12. *Seja (I, II) um par de Weingarten especial do tipo elíptico em Σ , com curvaturas média e Gaussiana H e K , respectivamente. Seja A a métrica Riemanniana dada em (4.3) em termos de uma primitiva $\varphi(t)$ da função $2f'(t^2)$. Se $H^2 - K \neq 0$ em Σ , então a nova métrica $g_0 = \sqrt{H^2 - K}A$ é uma métrica cuja curvatura Gaussiana K é nula em Σ . Além disso, se I é uma métrica completa e $H^2 - K \geq c_0 > 0$, então a métrica g_0 é completa. Em particular, com a estrutura conforme dada por A (ou por g_0), Σ é conformemente equivalente ao plano complexo, ao plano complexo menos um ponto ou ao toro.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que $g_0 = \sqrt{H^2 - K}A$ é uma métrica cuja curvatura Gaussiana é nula em Σ .

Pelo Corolário 4.7, temos que $2|Q'| = t|A|$, em que $t = \sqrt{H^2 - K}$ e Q' é holomorfa com respeito a um parâmetro conforme local z para a métrica A . Escrevendo $A = 2\lambda|dz|^2$, temos

$$\begin{aligned} g_0 &= 2\lambda t |dz|^2 \\ &= 2|Q'| |dz|^2 . \end{aligned}$$

Seja $h(z)$ dada por $2Q' = h_z^2$. Então $z' = h(z)$ satisfaz $dz' = h_z dz$, logo

$$|dz'|^2 = |h_z|^2 |dz|^2 = g_0,$$

logo g_0 tem curvatura Gaussiana nula.

Mostremos agora que g_0 é uma métrica completa se I é uma métrica completa em Σ . Para tanto, basta mostrarmos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$I \leq cg_0 .$$

Iniciamos, observando que de 4.6 obtemos:

$$\begin{aligned} |I| &\leq |\cosh \varphi(t)||A| + \frac{|\sinh \varphi(t)|}{t} (|Q'| + |\bar{Q}'|) \\ &\leq |\cosh \varphi(t)||A| + |\cosh \varphi(t)||A| \\ &\leq 2 \cosh \varphi(t)|A| . \end{aligned}$$

Assim,

$$I \leq 2 \cosh \varphi(t)|A| . \quad (5.9)$$

Por outro lado, o par (I, II) é de Weingarten do tipo elíptico, então segue que

$$4t^2 f'(t^2)^2 < 1 .$$

Como $\varphi(t)$ é a primitiva da função $2f'(t^2)$, então

$$\varphi'(t)^2 = 4f'(t^2)^2 \Rightarrow t^2 \varphi'(t)^2 < 1 .$$

Logo,

$$-\frac{1}{t} \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{t} .$$

Integrando a desigualdade acima obtemos:

$$|\varphi(t)| \leq |\log(t)| .$$

Notemos que

$$\cosh \varphi(t) \leq \cosh \log(t) = \frac{t^2 + 1}{2t^2} t .$$

Como $t \geq \sqrt{c_0}$, então $\frac{1+t^2}{2t^2} \leq \frac{1+c_0}{2c_0}$. Logo, existe $c_1 = \frac{c_0+1}{2c_0}$, tal que

$$\cosh \varphi(t) \leq c_1 t .$$

Assim, substituindo a desigualdade acima em (5.9), obtemos:

$$I \leq c g_0 ,$$

em que $c = 2c_1$.

Portanto, segue do Lema 5.11 que g_0 é uma métrica completa em Σ . Dessa forma, com a estrutura conforme determinada por g_0 , Σ tem como recobrimento universal Riemanniano o plano Euclidiano. Logo, segue de [4] (pág. 103) que Σ é conformemente equivalente ao plano complexo, ao plano complexo menos um ponto ou ao toro. \square

Demonstração do Teorema 5.1: 1) Suponhamos inicialmente que K seja identicamente nula. Então $f(H^2) = H$, ou seja, a função $h(t) = t - f(t^2)$ satisfaz $h(H) = 0$. Como Σ é uma superfície de Weingarten especial elíptica, temos que

$$(2t f'(t^2))^2 = 4t^2 f'(t^2)^2 < 1 ,$$

logo $h'(t) = 1 - 2t f'(t^2) > 0$, ou seja, h é estritamente crescente. Em particular, h possui no máximo um zero, portanto de $h(H) = 0$ decorre que H é constante. Portanto Σ é um plano se $f(0) = 0$ e um cilindro circular reto se $f(0) \neq 0$.

Suponhamos agora que exista um ponto $p \in \Sigma$ tal que $K(p) > 0$. Então Σ é homeomorfa a uma esfera ou é uma superfície mergulhada homeomorfa ao plano, ver [13]. Decorre da Proposição 5.10 e do fato de que a família das superfícies de Weingarten especiais elípticas satisfaz o princípio do máximo de Hopf que a segunda possibilidade não pode ocorrer. Portanto Σ é homeomorfa a uma esfera. Vamos mostrar que Σ é de fato uma esfera totalmente umbílica. Com efeito, seja W a função diferenciável definida por $W(x, y) = x - f(x^2 - y)$. Observe que

$$W_x = 1 - 2x f'(x^2 - y) \quad \text{e} \quad W_y = f'(x^2 - y) ,$$

logo

$$W_x(t, t^2) + 2t W_y(t, t^2) = 1 \neq 0 , \quad \forall t .$$

Portanto, a afirmação decorre do Teorema 2.4.

2) Neste caso temos

$$0 \geq K = H^2 - (H^2 - K) = f(H^2 - K)^2 - (H^2 - K) . \quad (5.10)$$

Como $f(0) \neq 0$, a função contínua $f(s)^2 - s$ é positiva em $s = 0$, logo existe $s_0 > 0$ tal que $f(s)^2 - s > 0$ para $s \in [0, s_0]$. Decorre de (5.10) que $H^2 - K \geq s_0$ em Σ . Segue então do Lema 5.12 que Σ é homeomorfa ao plano complexo ou ao plano complexo menos um ponto ou ao toro. Mas, pela Proposição 5.10, Σ não pode ser homeomorfa ao plano. Além disso, Σ não pode também ser homeomorfa ao toro, pois toda superfície compacta em \mathbb{R}^3 possui pontos com curvatura Gaussiana positiva. Portanto, Σ é homeomorfa ao plano complexo menos um ponto e, pela Proposição 5.10, Σ é uma superfície de rotação contida em um cilindro circular reto de \mathbb{R}^3 .

Vamos mostrar que Σ é de fato um cilindro circular reto. De fato, suponhamos que Σ seja uma superfície de rotação com respeito ao eixo z . Seja

$$\alpha = \Sigma \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, y = 0\}$$

a curva geratriz de Σ . Temos que α é uma linha de curvatura de Σ , e o sinal da curvatura k_α de α no plano $y = 0$ muda somente se também muda o sinal da curvatura Gaussiana de Σ . Como $K \leq 0$, concluímos que k_α não muda de sinal. Logo, α é uma curva convexa. Notemos que α está contida em uma faixa determinada pelo eixo z e pela reta paralela a $C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, y = 0\}$.

Afirmção 5.4. α não intercepta o eixo de rotação.

De fato, se α interceptasse o eixo z em um único ponto, então Σ seria homeomorfa ao plano, absurdo. Se α interceptasse o eixo z em dois pontos, então Σ seria homeomorfa a esfera, novamente absurdo, pois $K \leq 0$. Portanto, α não intercepta o eixo z .

Afirmção 5.5. α é uma reta.

Considere a função altura $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$, em que v um vetor unitário em \mathbb{R}^2 normal ao eixo z . Do fato de α ser convexa e não tocar o eixo de rotação concluimos que h é positiva e tem derivada segunda positiva em \mathbb{R} . Logo h é constante.

Portanto, Σ é um cilindro circular reto.

Referências Bibliográficas

- [1] C. C. Hsiung, *A first course in Differential Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [2] Evans L. C., *Partial Differential Equation*, American Mathematical Society, 1997.
- [3] F. Brito, R. Sa Earp, *On the struture of certain Weingarten surfaces with boundary a circle*, Ann. Fac. Sci Toulouse Math., **6** (1997), 243 - 255.
- [4] Hershel M. Farkas, Irwin Kra, *Riemann Surfaces*, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [5] H. Alencar, M. do Carmo, R. Tribuzy, *A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*, Comm. Anal. Geom., **15** (2007), 283 - 298.
- [6] H. Hopf, *Differential Geometry in the large*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [7] H. Rosenberg, R. Sa Earp, *The Geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; e. g., surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a e b are positive*, Duke Math. J., **73** (1994), 291 - 306.
- [8] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, *The Codazzi Equation for Surfaces*, arXiv:0902.2283v1 [math.DG].
- [9] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, *The Codazzi Equation for Surfaces*, Advances Mathematics, 2010.

- [10] Katsuei Kenmotsu, *Surfaces with Constant Mean Curvature*, American Mathematical Society, **221** 2000, 125-126.
- [11] M. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [12] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [13] M. Spivak, *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1979, vol. III.
- [14] Noel J. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Company, New York, 1965.
- [15] P. Hartman, W. Wintner, *Umbilical points and W-surfaces*, Amer. J. Math., **76** (1994), 502-508.
- [16] R. Sa Earp, E. Toubiana, *A note on special surfaces in \mathbb{R}^3* , Mat Comtemp., **4** (1993), 108 - 118.
- [17] T. Klotz Milnor, *Some uses of the second conformal structure on strictly convex surfaces*, Proc. AMS, **14** (1963), 1281-1288.
- [18] T. Klotz Milnor, R. Ossermann, *Complete surfaces in \mathbb{R}^3 with constant mean curvature*, Comment. Math. Helv., **41** (1966-67), 313 - 318.
- [19] T. Klotz Milnor, *Codazzi Pairs on Surfaces*, Proc. Colloq. Global Anal. e Global Geom., Berlin, 1979.
- [20] T. Klotz Milnor, *Abstract Weingarten Surfaces*, J. Differential Geometry, **15** (1980), 365-380.
- [21] V. C. Grove, *On closed convex surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 777-786.

- [22] W. Meeks, *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature*, J. Differential Geom., **27** (1988) 539-552.
- [23] Wolfgang Kunhel, *Differential Geometry - Curves, Surfaces, Manifolds 2nd ed*, American Mathematical Society, 2006.