UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas de Inclusões Diferenciais Governadas pelo p-Laplaciano

Ana Claudia Pereira

São Carlos - SP

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas de Inclusões Diferenciais Governadas pelo p-Laplaciano

Ana Claudia Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração: Análise Matemática

São Carlos - SP

Março de 2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

P436si

Pereira, Ana Claudia.
Sistemas de inclusões diferenciais governadas pelo p-Laplaciano / Ana Claudia Pereira. -- São Carlos : UFSCar, 2004.
131 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Operador laplaciano. 3. Inclusões diferenciais. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

.

Orientadora

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile

.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile

Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi

Dedico este trabalho aos meus pais Oliveira e Maria Concebida, pois sem eles este sonho não se realizaria.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado forças para superar as dificuldades e assim realizar este sonho.

Aos meus pais Oliveira e Maria Concebida, por todo amor, paciência, compreensão e incentivo.

Ao meu irmão Alexandre e a Diva pelo carinho, apoio e torcida. A Gabriel, meu afilhado, pelas alegrias que sempre me proporcionou, a meus avós pelo exemplo de vida, e de modo geral a toda minha família, pelo incentivo.

A minha orientadora Professora Dra. Cláudia Buttarello Gentile minha sincera gratidão, por ter acreditado em minha capacidade, por toda paciência, dedicação e amizade.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFSCar e da UFV, as professoras Margareth e Marinês, e de maneira muito especial, ao professor Olímpio Hiroshi Miyagaki, cuja participação em minha vida acadêmica foi, e tem sido fundamental, e a quem devo muito mais que o conhecimento adquirido, devo amizade e muita gratidão.

A todos os meus amigos, por compartilharem comigo os momentos difíceis e as vitórias. A Camila, Gustavo e Laércio pelo apoio e amizade.

A Célia por estar sempre pronta a nos ajudar.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Obrigada a todos!

Resumo

Neste trabalho demonstramos, usando métodos de compacidade, um resultado de existência local e global para inclusões diferenciais governadas pelo p-laplaciano, com $p > 2$. Quase totalidade dos pré-requisitos para a demonstração deste resultado estão incluídos no texto. Entre estes, destacamos a Teoria de Operadores Monótonos e Operadores Multívocos.

Abstract

In this work we proof, by compactness methods, a local and global existence result for p-laplacian differential inclusions with $p > 2$. Most of relevant theorems we need are in this text, including Monotone and Multivalued Operators Theory.

Introdução

A proposta deste trabalho é provar resultados de existência local e global de soluções para sistemas acoplados de inclusões diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta_p(u) \in F(u,v) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{dv}{dt} - \Delta_q(v) \in G(u,v) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave , $p, q > 2$, $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, e F e G são operadores possivelmente multívocos definidos em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, os quais satisfazem uma hipótese de semicontinuidade superior para existência local e uma condição de sublinearidade positiva para existência global.

A demonstração do nosso principal resultado segue o mesmo procedimento usado em um artigo de 1994, devido a Dìaz e Vrabie, [11], no qual os autores apresentam teoremas de existência local e global para um sistema do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta\varphi(u) \in F(u,v) & \\ \dfrac{dv}{dt} - \Delta\psi(v) \in G(u,v) & \\ \varphi(u) = \psi(v) = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & \end{cases}$$

onde $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e não decrescentes com $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, e $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e os dados iniciais são funções em L^∞.

O texto que segue está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 enunciamos , para evitarmos muitas referências externas, diversos resultados de Análise Funcional e Espaços de Sobolev, muitos deles sem demonstração. No capítulo 2 apresentamos parte da teoria de Operadores Monótonos em espaços de Hilbert e equações de evolução governadas por tais operadores. Neste capítulo quase a totalidade dos teoremas está acompanhada de demonstração, e procuramos inserir nestas uma grande quantidade de detalhes. Finalmente no último capítulo apresentamos uma adaptação dos resultados do artigo [11] para sistemas governados pelo p-Laplaciano.

Na primeira seção do terceiro capítulo está demonstrado um importante critério de compacidade devido à Baras. Na segunda seção estão as definições e os teoremas acerca de operadores multívocos que usaremos. A última seção é dedicada aos teoremas de existência local e global.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estudaremos alguns resultados essenciais para o desenvolvimento do trabalho. Este capítulo está dividido em várias seções, onde cada seção trata de um tema específico.

1.1 Uma Coletânea de Resultados

Definição 1.1 *Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X satisfaz a Propriedade de Intersecção Finita se para cada subcoleção finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de $\mathcal{C}$, a intersecção $C_1 \cap ... \cap C_n$ é não-vazia.*

Teorema 1.1 *Seja X um espaço topológico. Então X é compacto se e somente se para cada coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos fechados em X satisfazendo a Propriedade da Intersecção Finita, a intersecção $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C$ de todos os elementos de $\mathcal{C}$ é não-vazia.*

Teorema 1.2 (Teorema do Min-Max) *Sejam E e F dois espaços vetoriais topológicos sobre $\mathbb{R}$ e sejam $A \subset E$, $B \subset F$ dois conjuntos convexos e fechados.*

Seja K uma aplicação de $A \times B$ em $\mathbb{R}$ tal que:

(i) para todo $y \in B$, $x \mapsto K(x, y)$ é convexa e semicontínua inferiormente (s.c.i.);

(ii) para todo $x \in A$, $y \mapsto K(x, y)$ é côncava e semicontínua superiormente (s.c.s.);

Suponha que $dimE < +\infty$, $dimF < +\infty$ e que A e B sejam compactos. Então existe $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tais que

1. *$K(x_0, y) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x, y_0)$ para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$; dito de outro modo (x_0, y_0) é um ponto de sela de K. Por outro lado, a propriedade (1) é equivalente à igualdade:*

2. $\min\limits_{x \in A} \max\limits_{y \in B} K(x, y) = \max\limits_{y \in B} \min\limits_{x \in A} K(x, y)$.

(Teorema 1.1, p. 1, [6]).

Seja X um espaço vetorial normado, de norma $\| \cdot \|$. Denotaremos por X' o dual topológico de X, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre X; X' é munido da norma dual

$$\| f \|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} | f(x) | .$$

Quando $f \in X'$ e $x \in X$, denotaremos por $\langle f, x \rangle = f(x)$ e diremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ é o produto escalar na dualidade X', X.

Teorema 1.3 *Para todo $x_0 \in X$ existe $f_0 \in X'$ tal que*

$$\| f_0 \| = \| x_0 \| \qquad e \qquad \langle f_0, x_0 \rangle = \| x_0 \|^2 .$$

(Corolário I. 3, p. 3, [7])

Seja X um espaço de Banach e seja $f \in X'$. Denotamos por $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Quando f percorre X' obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f \in X'}$ de aplicações de X em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2 *A topologia fraca $\sigma(X, X')$ em X é a topologia menos fina em X que torna contínua todas as aplicações $\{\varphi_f\}_{f \in X'}$.*

Proposição 1.1 *A topologia fraca $\sigma(X, X')$ é separada.*

(Proposição III.3, p. 35, [7])

Proposição 1.2 *Sejam X um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma seqüência em X. Temos:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *se e somente se* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ *para todo* $f \in X'$.

(ii) *Se* $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$, *então* $\| x_n \|$ *é limitada e* $\| x \| \leq \liminf \| x_n \|$.

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* X' *(isto é,* $\| f_n - f \|_{X'} \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

(Proposição III. 5, p. 35, [7])

Teorema 1.4 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $K \subset X$ um subconjunto convexo, fechado e limitado. Então K é compacto na topologia fraca, $\sigma(X, X')$.*

(Corolário III. 19, p. 46, [7])

Teorema 1.5 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, $A \subset X$ um convexo fechado, não-vazio e $\varphi : A \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, s.c.i., $\varphi \not\equiv +\infty$ tal que*

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \varphi(x) \;=\; +\infty.$$

Então φ atinge seu mínimo em A, isto é, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \min_A \varphi$.

(Corolário III. 20, p. 46, [7])

Teorema 1.6 *Sejam H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um convexo fechado não-vazio. Então para todo $f \in H$, existe $u \in K$ único tal que $\| f - u \| = \min_{v \in K} \| f - v \|$. Dizemos que u é a projeção de f em K. E u é caracterizado pela seguinte propriedade:*

$$u \in K \qquad\qquad \langle f - u, v - u \rangle \;\leq\; 0$$

para todo $v \in K$. Denotamos por $u \;=\; Proj_K f$ (projeção de f sobre K).

(Teorema V. 2, p. 79, [7])

Teorema 1.7 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ uma seqüência limitada em X. Então podemos extrair uma subseqüência $\{x_{n_k}\}$ que converge para a topologia fraca, $\sigma(X, X')$.*

(Teorema III. 27, p. 50, [7])

Definição 1.3 *Um espaço de Banach X é uniformemente convexo se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$ forem tais que $\| x \| \leq 1$, $\| y \| \leq 1$ e $\| x - y \| > \epsilon$, então*

$$\| \frac{x + y}{2} \| < 1 - \delta.$$

Proposição 1.3 *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e seja $\{x_n\} \subset X$ fracamente convergente para x. Suponha que*

$$\limsup_{n\to\infty} \| x_n \| \leq \| x \| .$$

Então $\{x_n\}$ converge fortemente para $x \in X$.

(Proposição 1.4, p. 14, [4])

Observação 1.1 *Em particular, uma seqüência que converge fracamente e converge na norma, converge forte.*

Teorema 1.8 *Sejam $\{f_n\}$ uma seqüência em L^p e $f \in L^p$, tais que*

$$\| f_n - f \|_{L^p} \to 0.$$

Então podemos extrair uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *qtp em* Ω,

(ii) $| f_{n_k}(x) | \leq h(x)$ *para todo k e qtp em Ω, com $h \in L^p$.*

(Teorema IV. 9, p. 58, [7])

Definição 1.4 *Um subconjunto K em um espaço topológico é:*

(i) compacto, se toda seqüência generalizada em K tem pelo menos uma subseqüência generalizada que converge para algum elemento de K;

(ii) relativamente compacto, se seu fecho é compacto;

(iii) sequencialmente compacto, se toda seqüência em K tem pelo menos uma subseqüência que converge para algum elemento de K;

(iv) relativamente sequencialmente compacto, se seu fecho é sequencialmente compacto.

Denotamos por $Fin(X)$ a classe de todos os subconjuntos finitos em X. Um subconjunto K em um espaço de Banach real X é precompacto se dado $\epsilon > 0$, existe $K_\epsilon \in Fin(X)$, ou equivalentemente $K_\epsilon \in Fin(K)$, tal que K está incluído na união de todas as bolas fechadas com raio ϵ e cujos centros pertencem a K_ϵ.

Teorema 1.9 *(i) Um subconjunto em um espaço de Banach real é relativamente compacto se e somente se ele é precompacto.*

(ii) Um subconjunto em um espaço de Banach real é relativamente compacto se e somente se ele é relativamente sequencialmente compacto.

(Teorema, p. 13, [19]).

Se X é um espaço vetorial topológico localmente convexo satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade (isto é, cada ponto de X tem uma base de vizinhanças enumerável), então cada subconjunto compacto em X é sequencialmente compacto. Se, em adição, X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade (ou seja, se existe uma base enumerável para a topologia em X), então cada subconjunto sequencialmente compacto em X é compacto.

O resultado a seguir mostra que, se a topologia em X é a topologia fraca que, em geral, não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então a classe de todos os subconjuntos compactos coincide com a classe de todos os subconjuntos sequencialmente compactos.

Teorema 1.10 (Eberlein-Smulian) *Um subconjunto em um espaço de Banach real é fracamente compacto se e somente se ele é fracamente sequencialmente compacto.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [13], Teorema 8.12.1, p. 549 e Teorema 8.12.7, p. 551.

Seja X um espaço de Banach real e $C([a,b];X)$ o espaço de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em X munido com a norma do sup usual.

Definição 1.5 *Um subconjunto K em $C([a,b];X)$ é equicontínuo em $t_0 \in [a,b]$ se dada uma vizinhança V da origem em X existe $\delta(V) > 0$ tal que*

$$f(t) - f(t_0) \in V$$

para cada $t \in [a,b]$, $\mid t - t_0 \mid \leq \delta(V)$, e uniformemente para $f \in K$. Um subconjunto K é equicontínuo em $[a,b]$ se ele é equicontínuo em cada $t \in [a,b]$.

Teorema 1.11 (Ascoli-Arzelà) *Um subconjunto K em $C([a,b];X)$ é relativamente sequencialmente compacto se e somente se K é equicontínuo em $[a,b]$ e para cada $t \in [a,b]$*

$$K(t) = \{f(t); f \in K\}$$

é relativamente compacto em X.

(Teorema 0.4.11, p. 34, [13]).

Lema 1.1 (Gronwall-Bellman) *Seja $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ qtp em $(0,T)$ e seja a uma constante maior do que ou igual a 0. Seja ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \;\leq\; a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Então,

$$\phi(t) \;\leq\; ae^{\int_0^t m(s)ds}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Lema 1.2 (Gronwall) *Seja $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ qtp em $(0,T)$ e seja a uma constante maior do que ou igual a 0. Seja ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Então,

$$| \phi(t) | \leq a + \int_0^t m(s)ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

Lema 1.3 (Desigualdade de Tartar) *Seja $p \geq 2$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$*

$$\langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a-b \rangle \geq \gamma_0 \| a-b \|^p$$

onde γ_0 é positivo e depende apenas de p e de m.

Se $1 < p < 2$ então para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$\langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a-b \rangle \leq \gamma_1 \| a-b \|^p$$

onde γ_1 depende apenas de p e de m.

Demonstração: Demonstraremos apenas o caso $p \geq 2$. A demonstração do caso $1 < p < 2$ pode ser encontrada em [12].

Considere

$$I(p) = \langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a-b \rangle.$$

Então,

$$\begin{aligned} I(p) &= \langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a-b \rangle \\ &= \left\langle \int_0^1 \frac{d}{ds} \| sa+(1-s)b \|^{p-2} (sa+(1-s)b) ds, a-b \right\rangle \\ &= \int_0^1 (p-2) \| sa+(1-s)b \|^{p-4} | \langle sa+(1-s)b, a-b \rangle |^2 \, ds \\ &+ \int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^{p-2} \| a-b \|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Se $p \geq 2$, então

$$I(p) \geq \int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^{p-2} \| a-b \|^2 \, ds.$$

Suponha $\| a \| \geq \| b-a \|$. Temos,

$$\begin{aligned} \| sa+(1-s)b \| &= \| a-(1-s)(a-b) \| \\ &\geq \| a \| -(1-s) \| a-b \| \geq s \| a-b \| . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a-b \rangle &\geq \| a-b \|^2 \int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^{p-2} \, ds \\ &\geq \| a-b \|^2 \int_0^1 s^{p-2} \| a-b \|^{p-2} \, ds \\ &= \| a-b \|^p \int_0^1 s^{p-2} ds = \frac{1}{p-1} \| a-b \|^p \end{aligned}$$

e portanto basta tomar $\gamma' = \dfrac{1}{p-1}$, o qual é positivo pois estamos assumindo $p \geq 2$.

Se $\| a \| < \| b-a \|$ temos

$$\begin{aligned} \langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a-b \rangle &\geq \| a-b \|^2 \int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^{p-2} \, ds \\ &= \| a-b \|^2 \int_0^1 \frac{(\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}}}{\| sa+(1-s)b \|^2} ds. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \| sa+(1-s)b \| &= \| (1-s)(b-a)+a \| \\ &\leq (1-s) \| b-a \| + \| a \| \\ &< (2-s) \| b-a \| \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
& \| a-b \|^2 \int_0^1 \frac{(\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}}}{\| sa+(1-s)b \|^2} ds \\
\geq & \| a-b \|^2 \int_0^1 \frac{(\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}}}{(2-s)^2 \| b-a \|^2} ds \\
\geq & \frac{1}{4} \int_0^1 (\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Agora note que tomando $q' = \dfrac{p}{2} \geq 1$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, segue por Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^2 \, ds &\leq \left[\int_0^1 1^q ds\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 (\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}} ds\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\int_0^1 (\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}} ds\right]^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \| a-b \|^2 \int_0^1 \frac{(\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}}}{\| sa+(1-s)b \|^2} ds \\
\geq & \frac{1}{4} \int_0^1 (\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}} ds \\
\geq & \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\| sa+(1-s)b \|^2 = s^2 \| a \|^2 + 2s\langle a,b\rangle - 2s^2\langle a,b\rangle + \| b \|^2 - 2s \| b \|^2 + s^2 \| b \|^2$$

e portanto,

$$\int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^2 = \frac{1}{3} \| a \|^2 + \frac{1}{3}\langle a,b\rangle + \frac{1}{3} \| b \|^2 .$$

Então,

$$\begin{aligned}
& \| a-b \|^2 \int_0^1 \frac{(\| sa+(1-s)b \|^2)^{\frac{p}{2}}}{\| sa+(1-s)b \|^2} ds \\
\geq & \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \| sa+(1-s)b \|^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
= & \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}(\| a \|^2 + \langle a,b\rangle + \| b \|^2)\right]^{\frac{p}{2}} \\
= & \frac{1}{4} \frac{1}{3^{\frac{p}{2}}} (\| a \|^2 + \langle a,b\rangle + \| b \|^2)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Mas observe que,

$$-\langle a,b\rangle \ \leq |\ \langle a,b\rangle\ | \leq \|\ a\ \|\|\ b\ \| \leq \ \frac{1}{2}\ \|\ a\ \|^2 + \frac{1}{2}\ \|\ b\ \|^2\ .$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\|\ a\ \|^2 + \|\ b\ \|^2 + \langle a,b\rangle &= \frac{1}{4}[\|\ a\ \|^2 + \|\ b\ \|^2] + \frac{1}{4}[\|\ a\ \|^2 + \|\ b\ \|^2] \\
&+ \frac{1}{2}[\|\ a\ \|^2 + \|\ b\ \|^2] + \langle a,b\rangle \\
&\geq \frac{1}{4}[\|\ a\ \|^2 + \|\ b\ \|^2] - \frac{1}{2}\langle a,b\rangle \\
&= \frac{1}{4}\ \|\ a-b\ \|^2\ .
\end{aligned}$$

Logo temos

$$\begin{aligned}
\|\ a-b\ \|^2 \int_0^1 \frac{(\|\ sa+(1-s)b\ \|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|\ sa+(1-s)b\ \|^2}ds &\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}(\|\ a\ \|^2 + \|\ b\ \|^2 + \langle a,b\rangle)^{\frac{p}{2}} \\
&\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{4}\ \|\ a-b\ \|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p+2}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\ \|\ a-b\ \|^p\ .
\end{aligned}$$

Tomando $\gamma'' = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p+2}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}} \geq 0$ temos

$$I(p) \geq \gamma''\ \|\ a-b\ \|^p\ .$$

Tome $\gamma_0 = \min\{\gamma', \gamma''\}$. Note que $\gamma_0 > 0$ e

$$\langle \|\ a\ \|^{p-2}\ a - \|\ b\ \|^{p-2}\ b, a-b\rangle \geq \gamma_0\ \|\ a-b\ \|^p$$

para todo $a,b \in \mathbb{R}^m$. ■

1.2 Funções com valores em espaços de Banach

Seja Ω um intervalo, finito ou infinito, em $\mathbb{R}$. Nesta seção descreveremos a integral e diferencial para funções que tomam seus valores em um espaço de Banach X e tem domínio Ω. Todos os resultados abaixo foram enunciados sem demonstração e podem ser encontrados em [16].

Começamos com a definição de integral de Bochner. Seja $\mathcal{M}$ a classe de todos os conjuntos Lebesgue mensuráveis contidos em Ω, e denote a medida de Lebesgue de $A \in \mathcal{M}$ por $m(A)$.

Definição 1.6 *$s : \Omega \to X$ é uma função simples se existe uma quantidade enumerável de $A_n \in \mathcal{M}$, com $n \in \mathbb{N}$, que são mutuamente disjuntos, tal que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e s é constante em cada A_n.*

Definição 1.7 *Dado $s : \Omega \to X$, se existir uma seqüência de funções simples $\{s_n\}$ tal que $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ para x qtp, então dizemos que s é fortemente mensurável.*

Consequentemente, uma função simples é fortemente mensurável.

Definição 1.8 *Dado $s : \Omega \to X$, se $f(s(x))$ é uma função mensurável real ou complexa para todo $f \in X'$, então dizemos que s é fracamente mensurável.*

Segue diretamente da definição que se s é fortemente mensurável, então s é fracamente mensurável e $\| s(x) \|$ é uma função mensurável (real).

Teorema 1.12 *Seja X um espaço de Banach separável. Então, uma condição necessária e suficiente para $s : \Omega \to X$ ser fortemente mensurável é que s seja fracamente mensurável.*

É importante observar que combinação linear de funções fortemente mensuráveis é fortemente mensurável, e o limite fraco de uma seqüência de funções fortemente mensuráveis é fortemente mensurável.

Definição 1.9 *Seja $s : \Omega \to X$ uma função simples. Então pela definição existe uma seqüência $\{s_n\} \subset X$ e uma seqüência de conjuntos mensuráveis mutuamente disjuntos $\{A_n\}$ tais que $s(x) = s_n$ $(x \in A_n)$ e $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se $\| s(x) \|$ é Lebesgue integrável em Ω, dizemos que s é Bochner integrável em Ω e definimos a integral de Bochner por*

$$\int_\Omega s(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} s_n m(A_n).$$

Definição 1.10 *Seja $s : \Omega \to X$. Se existir uma seqüência $\{s_n\}$ de funções simples Bochner integráveis em Ω tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \qquad\qquad x \text{ qtp}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| s_n(x) - s(x) \| \, dm = 0,$$

então dizemos que s é Bochner integrável em Ω. Definimos a integral de Bochner de s por

$$\int_\Omega s(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n(x)dm.$$

Teorema 1.13 *Uma condição necessária e suficiente para $s : \Omega \to X$ ser Bochner integrável em Ω é s ser fortemente mensurável e também $\| s(x) \|$ ser Lebesgue integrável em Ω.*

Denotamos o conjunto de todas as funções Bochner integráveis em Ω por $L^1(\Omega; X)$. Os seguintes itens valem como no caso Lebesgue integrável:

(i) $\| \int_\Omega s(x)dm \| \leq \int_\Omega \| s(x) \| \, dm$;

(ii) Se $s_i \in L^1(\Omega; X)$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, com $i = 1, 2, ...,$ então $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \in L^1(\Omega; X)$ e

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(x) dm = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Omega s_i(x) dm.$$

(iii) **Teorema 1.14** *Seja* $\{s_n\}$ *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega, X)$. *Suponha que:*

(i) $s_n(x) \to s(x)$ *qtp em* Ω*,*

(ii) existe uma função Lebesgue integrável g *tal que para cada* n*,*

$\| s_n(x) \| \leq g(x)$ *qtp em* Ω*.*

Então $s \in L^1(\Omega, X)$ *e*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega s_n(x) dm = \int_\Omega s(x) dm.$$

(iv) Definimos $\| s \|_{L^1(\Omega; X)} = \int_\Omega \| s(x) \| \, dm$ para $s \in L^1(\Omega; X)$. Então, $L^1(\Omega; X)$ é um espaço de Banach com a norma $\| s \|_{L^1(\Omega; X)}$.

(v) Seja $s \in L^1(\Omega; X)$; então para x *qtp* em Ω,

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} \int_x^{x+h} \| s(t) - s(x) \| \, dt = 0$$

e logo

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} \int_x^{x+h} s(t) dt = s(x).$$

Também para funções de duas variáveis $s : \Omega \times \Omega \to X$, o teorema de mudança da ordem de integração vale exatamente como para a integral de Lebesgue.

A seguir descreveremos os conceitos de continuidade e diferenciabilidade da função $s : \Omega \to X$.

Definição 1.11 *Seja* Ω *um intervalo aberto,* $s : \Omega \to X$ *e* $x_0 \in \Omega$. *Se* $\lim\limits_{x \to x_0} f(s(x)) = f(s(x_0))$ *vale para todo* $f \in X'$, *então dizemos que* s *é fracamente contínua em* x_0.

Definição 1.12 *Seja* Ω *um intervalo aberto,* $s : \Omega \to X$ *e* $x_0 \in \Omega$. *Se* $\lim\limits_{x \to x_0} s(x) = s(x_0)$, *isto é,* $\lim\limits_{x \to x_0} \| s(x) - s(x_0) \| = 0$, *então dizemos que* s *é contínua em* x_0.

Se s é fracamente contínua (contínua) em cada ponto de um intervalo aberto Ω, então s é fracamente contínua (contínua) em Ω.

Quando Ω é um intervalo fechado (por exemplo, $\Omega = [a, b]$), se s é contínua no intervalo aberto (a, b), e $\lim\limits_{x \to a^+} s(x) = s(a)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} s(x) = s(b)$, então s é contínua no intervalo fechado $\Omega = [a, b]$. De modo semelhante definimos continuidade fraca de uma função em um intervalo fechado.

Segue da definição que se s é fortemente contínua, então ela é fracamente contínua.

Teorema 1.15 *(i) Se* $s : \Omega \to X$ *é fracamente contínua em* Ω, *então* s *é fortemente mensurável.*

(ii) Seja $[a, b]$ *um intervalo fechado limitado. Se* $s : [a, b] \to X$ *é fracamente contínua em* $[a, b]$, *então* s *é Bochner integrável em* $[a, b]$.

Observação 1.2 *Se* s *é contínua em um intervalo fechado e limitado* $[a, b]$, *então pelo Teorema 1.15,* s *é Bochner integrável em* $[a, b]$. *Neste caso, podemos definir a integral de* s *em* $[a, b]$ *pelo método de Riemann, e a integral definida pelo método de Riemann coincide com a integral de Bochner.*

Definição 1.13 *Seja* $s : (a, b) \to X$ *e* $x_0 \in (a, b)$. *Se* $\lim\limits_{h \to 0} f(h^{-1}[s(x_0 + h) - s(x_0)]) = f(s_0)$, *para toda* $f \in X'$, *então dizemos que* s *é fracamente diferenciável em* x_0 *e* s_0 *é a derivada fraca de* s *em* x_0.

Definição 1.14 *Seja* $s : (a, b) \to X$ *e* $x_0 \in (a, b)$*. Se* $\lim\limits_{h \to 0} h^{-1}[s(x_0 + h) - s(x_0)] = s_0$*, então dizemos que* s *é fortemente diferenciável em* x_0 *e* s_0 *é a derivada forte de* s *em* x_0*.*

Se s é fortemente (fracamente) diferenciável em cada ponto de (a, b), então dizemos que s é fortemente (fracamente) diferenciável em (a, b).

Além disso, se $\lim\limits_{h \to 0^+} h^{-1}[s(x_0 + h) - s(x_0)] = s_0$, então dizemos que s_0 é a derivada forte à direita de s em x_0. Definimos a derivada forte à esquerda similarmente.

Se $s : [a, b] \to X$ é fortemente diferenciável em (a, b) e tem derivada forte à direita em a e derivada forte à esquerda em b, então dizemos que s é fortemente diferenciável em $[a, b]$. De modo semelhante podemos definir os conceitos de derivada fraca à direita (esquerda) e fracamente diferenciável em um intervalo fechado.

Teorema 1.16 *Seja* $s : (a, b) \to X$ *contínua em* (a, b)*. Se existe a derivada forte à direita em cada* $x \in (a, b)$*, e esta derivada é contínua em* (a, b)*, então* s *é fortemente diferenciável em* (a, b)*.*

Finalmente descreveremos teoremas do tipo Radon-Nikodym.

Definição 1.15 *Seja* $[a, b]$ *um intervalo fechado limitado e seja* $s : [a, b] \to X$*,* s *é (fortemente) absolutamente contínua em* $[a, b]$ *se vale o seguinte: "Para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* $[a_i, b_i) \subset [a, b]$*,* $[a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *mutuamente disjuntos e* $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$*, então*

$$\sum_{i=1}^{n} \| s(b_i) - s(a_i) \| < \epsilon."$$

Teorema 1.17 *Seja* $[a, b]$ *um intervalo fechado e limitado.*

(i) Seja $s : [a,b] \to X$ *Bochner integrável em* $[a,b]$, *e*

$$y(x) = \int_a^x s(t)dt \qquad\qquad (a \leq x \leq b).$$

Então, $y(x)$ *é (fortemente) absolutamente contínua em* $[a,b]$, *fortemente diferenciável em* x *qtp, e a derivada forte* $y'(x) = s(x)$ *(*x *qtp).*

(ii) Se $y : [a,b] \to X$ *é (fortemente) absolutamente contínua e fracamente diferenciável em* x *qtp, então a derivada fraca* s *de* y *é Bochner integrável em* $[a,b]$ *e*

$$y(x) = y(a) + \int_a^x s(t)dt \qquad\qquad (a \leq x \leq b).$$

Portanto, y *é fortemente diferenciável em* x *qtp e* $y'(x) = s(x)$ x *qtp.*

Teorema 1.18 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Uma condição necessária e suficiente para* $y : [a,b] \to X$ *ser (fortemente) absolutamente contínua em* $[a,b]$ *é que existe uma função Bochner integrável,* s, *em* $[a,b]$ *tal que*

$$y(x) = y(a) + \int_a^x s(t)dt \qquad\qquad (a \leq x \leq b).$$

Neste caso, y *é fortemente diferenciável em* x *qtp e* $y'(x) = s(x)$ *(*x *qtp).*

Observação 1.3 *Em um espaço de Banach geral, existem funções que são (fortemente) absolutamente contínuas mas não são fortemente diferenciáveis em quase toda parte.*

1.3 Espaços Localmente Convexos

Os resultados desta seção foram retirados de [5], [9] e [10].

Definição 1.16 *Um espaço vetorial topológico X é localmente convexo se existe uma base de vizinhanças em 0 consistindo de conjuntos convexos.*

Dizemos simplesmente que "X é localmente convexo"ou que "X é um espaço localmente convexo (LCS)".

Note que qualquer espaço vetorial normado é um exemplo de um espaço localmente convexo. E isso ocorre pois em um espaço vetorial normado, qualquer bola, fechada ou aberta, é convexa.

Em particular, todo espaço de Banach é localmente convexo.

Proposição 1.4 *Um conjunto A é convexo se e somente se sempre que x_1, ..., $x_n \in A$ e $t_1, ..., t_n \in [0,1]$ com $\sum_j t_j = 1$, então $\sum_j t_j x_j \in A$. Se $\{A_i, i \in I\}$ é uma coleção de conjuntos convexos, então $\cap_i A_i$ é convexo.*

Definição 1.17 *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X, a envoltória convexa de A, denotada por $convA$, é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contém A. Se X é um espaço vetorial topológico, então o fecho da envoltória convexa de A é a intersecção de todos os subconjuntos convexos e fechados de X que contém A, ele é denotado por $\overline{convA}$.*

Teorema 1.19 *A envoltória convexa do subconjunto A de um espaço vetorial X consiste de todos os vetores da forma $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, onde $x_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 1, ..., n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.*

Demonstração: Seja K o conjunto de todos os vetores da forma dada na afirmação do teorema. Logo K é convexo e isto segue da própria definição de conjunto convexo. Além disso, $A \subset K$, pois para todo $x_i \in A$, $x_i \in K$. Segue então que $convA \subset K$.

Por outro lado, qualquer conjunto convexo que contém A contém K. Em particular, $convA \supset K$.

Portanto, $convA = K$. ■

Proposição 1.5 *Se X é um espaço vetorial topológico e A é um subconjunto convexo de X, então $\overline{A}$ é convexo.*

Definição 1.18 *Um hiperplano é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$$

onde f é um funcional linear contínuo sobre X, não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 1.19 *Seja X um espaço vetorial topológico real. Um subconjunto S de X é um semi-espaço aberto se existe um funcional linear contínuo $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $S = \{x \in X; f(x) > \alpha\}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. S é um semi-espaço fechado se existe um funcional linear contínuo $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $S = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$ para algum α.*

Deste modo temos que um hiperplano $H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$ divide X em dois semi-espaços fechados, a saber:

$$S_+ = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$$

e

$$S_- = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}.$$

Proposição 1.6 *Seja X um espaço vetorial topológico real. O fecho de um semi-espaço aberto é um semi-espaço fechado.*

Demonstração: Seja $A = \{x \in X; f(x) < \alpha\}$, um semi-espaço aberto, e seja $B = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$. Queremos mostrar que $\overline{A} = B$.

Mostremos que $\overline{A} \subset B$. Tome $x_0 \in \overline{A}$ e suponha que $x_0 \notin B$. Então $x_0 \in B^C$ que é aberto, logo existe uma vizinhança V de x_0 tal que $V \subset B^C$. Visto que $V \subset B^C$ então para todo $x \in V$, $f(x) > \alpha$. Assim, temos que $V \cap A = \emptyset$, o que implica que $x_0 \notin \overline{A}$ e isso contradiz o fato de termos tomado $x_0 \in \overline{A}$. Logo, $x_0 \in B$ e portanto $\overline{A} \subset B$.

Agora, mostremos que $B \subset \overline{A}$. Tome $x \in B$.

Se $\alpha > 0$, tome uma vizinhança V qualquer de x e $\epsilon > 0$ de modo que $(1-\epsilon)x \in V$. Então,

$$f((1-\epsilon)x) = (1-\epsilon)f(x) \leq (1-\epsilon)\alpha = \alpha - \epsilon\alpha < \alpha.$$

Logo, $(1-\epsilon)x \in A$ e portanto V intercepta A. Como V foi tomado arbitrariamente, segue que toda vizinhança de x intercepta A.

Se $\alpha \leq 0$, tome uma vizinhança W qualquer de x e $0 < \epsilon < 1$ de forma que $\frac{1}{\epsilon}x \in W$. Então,

$$f\left(\frac{1}{\epsilon}x\right) = \frac{1}{\epsilon}f(x) \leq \frac{1}{\epsilon}\alpha < \alpha.$$

Logo, $\frac{1}{\epsilon}x \in A$, e portanto W intercepta A. Uma vez que W foi tomado arbitrariamente segue que $x \in \overline{A}$ e portanto $B \subset \overline{A}$. ■

Dois subconjuntos A e B de X estão estritamente separados se eles estão contidos em semi-espaços abertos disjuntos.

Teorema 1.20 (Hahn-Banach (segunda forma geométrica)) *Seja E um espaço vetorial normado e sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois conjuntos convexos, não vazios, disjuntos. Suponha que A é fechado e que B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa estritamente A e B.*

(Teorema I.7, p. 7, [7])

Corolário 1.1 *Se X é um LCS real, A é um subconjunto convexo e fechado de X, e $x_0 \notin A$, então x_0 está estritamente separado de A.*

Corolário 1.2 *Se X é LCS real e $A \subseteq X$, então $\overline{convA}$ é a intersecção de todos os semi-espaços fechados que contém A.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}$ a coleção de todos os semi-espaços fechados que contém A. Como cada conjunto em $\mathcal{H}$ é fechado e convexo, $\overline{convA} \subseteq \cap\{H; H \in \mathcal{H}\}$, pois $\overline{convA}$ é o menor convexo fechado que contém A.

Por outro lado, se $x_0 \notin \overline{convA}$, então pelo Corolário 1.1, existe um funcional linear contínuo $f : X \to \mathbb{R}$ e um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) < \alpha$ e $f(x) > \alpha$, para todo $x \in \overline{convA}$.

Assim $\widetilde{H} = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{H}$, pois $\widetilde{H}$ é um semi-espaço fechado que contém A, uma vez que $A \subset convA \subset \overline{convA}$ e para todo $x \in \overline{convA}$, $f(x) > \alpha$.

Logo, $\widetilde{H} \in \mathcal{H}$ e $x_0 \notin \widetilde{H}$, e portanto $x_0 \notin \cap\{H; H \in \mathcal{H}\}$, ou seja, se $x \in \cap\{H; H \in \mathcal{H}\}$ então $x \in \overline{convA}$.

Assim concluímos que $\overline{convA} = \cap\{H; H \in \mathcal{H}\}$. ■

1.4 Convexidade e Topologia Fraca

Todos os resultados que seguem podem ser encontrados em [14].

Teorema 1.21 (Mazur) *Seja X um espaço de Banach e X' seu dual. Seja $C \subset X$ convexo. C é fracamente fechado se, e somente se, C é fortemente fechado.*

Demonstração: Suponha C é fracamente fechado, logo C^C é fracamente aberto. Como os abertos da topologia fraca são abertos da topologia forte, C^C é fortemente aberto, logo C é fortemente fechado.

Por outro lado, se C é fortemente fechado, basta mostrarmos que C^C é aberto na topologia fraca. Seja $x_0 \notin C$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (segunda forma geométrica) existe um hiperplano H de equação $f = \alpha$ que separa estritamente $\{x_0\}$ e C, ou seja,

$$f(x_0) < \alpha < f(x)$$

para todo $x \in C$. Seja $U = f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \varphi_f^{-1}((-\infty, \alpha))$ onde $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi_f(x) = f(x)$ e a topologia fraca em X é a topologia menos fina que torna contínua todas as aplicações $\{\varphi_f\}_{f \in X'}$. Como na topologia fraca φ_f é contínua e $(-\infty, \alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}$ temos que $\varphi_f^{-1}((-\infty, \alpha))$ é um aberto na topologia fraca, e $x_0 \in U \subset C^C$. Logo, x_0 é ponto interior. Como x_0 foi tomado arbitrariamente em C^C, segue que C^C é fracamente aberto. Portanto, C é fracamente fechado. ∎

Corolário 1.3 *Se a seqüência $\{x_n\}$ converge fracamente para x_0, então dado um inteiro n e $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito de números reais $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, tal que $\| x_0 - \sum_i \alpha_i x_i \| < \epsilon$.*

Demonstração: Seja $A = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ e $x_0 \in \overline{A}^w$. Sabemos que $A \subset convA$, e que $\overline{convA}^w$ é o menor fechado na topologia fraca que contém $convA$. Por outro lado, como $convA$ é convexo e $\overline{convA}^s$ é fortemente fechado segue que $\overline{convA}^s$ é fracamente fechado. Assim,

$$\overline{A}^w \subset \overline{convA}^w \subset \overline{convA}^s.$$

Logo, $x_0 \in \overline{convA}^s$ e portanto existe $\{y_n\} \subset convA$ tal que $y_n \to x_0$.

Como $y_n \in convA$, então $y_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, onde $x_i \in A$, $\alpha_i \in [0,1]$, para todo $i = 1, ..., k$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. ■

1.5 Espaços de Sobolev

A teoria dos Espaços de Sobolev constitui um tema bastante amplo, rico em detalhes e contém resultados sofisticados. Neste trabalho estudamos apenas noções básicas de tais espaços e alguns resultados de imersões. Como estamos interessados em demonstrar um resultado de existência de solução em $L^2(\Omega)$ para um sistema de inclusões governado pelo operador p-Laplaciano, com $p > 2$, com condições de fronteira de Dirichlet homogênea, concentramos nossa atenção no estudo do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$. Os resultados abaixo são apresentados sem demonstração e podem ser encontrados em [7].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, conexo com fronteira suave e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.20 *O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *é definido por* $W^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega) \,/\ $ *existem* $g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega)$ *tais que* $\int_\Omega u \frac{d\varphi}{dx_i} = -\int_\Omega g_i \varphi$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, ..., n\Big\}$.

Usaremos a seguinte notação: se $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{e} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = grad\, u.$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está munido da norma

$$\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^p}$$

ou da norma equivalente

$$\left(\| \, u \, \|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \| \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.7 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço $W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Observação 1.4 *Se $u \in C^1(\Omega) \bigcap L^p(\Omega)$ e se $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, para todo $i = 1, 2, ..., n$ (onde $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ designa a derivada parcial no sentido usual), então $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e as derivadas parciais no sentido usual coincidem com as derivadas parciais no sentido de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Se Ω é de dimensão 1, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ com imersão contínua. Em dimensão $n \geq 2$ esta inclusão vale somente para $p > n$.

Corolário 1.4 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Temos:*

(i) se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

(ii) se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$,

(iii) se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

com imersões contínuas. Além disso, se $p > n$ temos para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$| \, u(x) - u(y) \, | \leq \, c \, \| \, u \, \|_{W^{1,p}(\Omega)} \| \, x - y \, \|^\alpha$$

qtp para $x, y \in \Omega$, com $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$ e c dependendo somente de Ω, p, n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.22 (Rellich-Kondrachov) *Suponha Ω limitado de classe C^1. Temos* *(i) se* $p < n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, p')$ *onde* $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

(ii) se $p = n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, \infty)$,

(iii) se $p > n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

com imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *com imersões compactas para todo* p.

1.5.1 O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definição 1.21 *Seja* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *designa o fecho de* $C_c^1(\Omega)$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$.

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável; é reflexivo se $1 < p < \infty$.

Observação 1.5 *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *então em geral* $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$.

As funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ são “a grosso modo”as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ que “se anulam sobre $\partial\Omega$”.

Corolário 1.5 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha que* Ω *é um aberto limitado. Então existe uma constante* C, *dependendo de* Ω *e* p, *tal que*

$$\| u \|_{L^p} \leq C \| \nabla u \|_{L^p}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *com* $1 \leq p < \infty$. *Em particular a expressão* $\| \nabla u \|_{L^p}$ *é uma norma sobre* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *que é equivalente à norma* $\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Denotamos por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Se Ω é limitado temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$$

se $\dfrac{2n}{n+2} \leq p < \infty$ com imersões contínuas e densas.

Se Ω não é limitado temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$$

se $\dfrac{2n}{n+2} \leq p \leq 2$.

Observação 1.6 *Segue do Teorema de Rellich - Kondrachov que* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *está compactamente imerso em* $L^2(\Omega)$ *(veja Teorema 6.2, Parte IV, [1], pg 144).*

Capítulo 2

Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

2.1 Noção de Operador Monótono

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Um operador é uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$ (conjunto das partes de H). Se para todo $x \in H$, o conjunto Ax contém no máximo um elemento dizemos que A é unívoco, caso contrário dizemos que A é multívoco. O domínio de A é o conjunto $\mathcal{D}(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é o conjunto $\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in H} Ax$.

Identificaremos A com o seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y); y \in Ax\}$. O operador A^{-1} é o operador cujo gráfico é simétrico ao de A, isto é, $y \in A^{-1}x \Longleftrightarrow x \in Ay$; evidentemente $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$.

O conjunto dos operadores é ordenado pela inclusão dos gráficos: $A \subset B$ se e somente se para todo $x \in H, Ax \subset Bx$.

Definição 2.1 *Dizemos que um operador A em H é monótono se para todo x_1, $x_2 \in \mathcal{D}(A)$,*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

ou mais precisamente para todo $y_1 \in Ax_1$ e para todo $y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Exemplo 2.1 *Seja $(\mathcal{S}, \beta, \mu)$ um espaço de medida positiva. Dado um operador A de H, podemos definir $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{S}; H)$ por*

$$v \in \mathcal{A}u \Longleftrightarrow v(t) \in Au(t)$$

$\mu - qtp$ sobre $\mathcal{S}$. Se A é monótono, então $\mathcal{A}$ também o é.

De fato, suponha A monótono. Queremos mostrar que

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

para todo $u, v \in \mathcal{H}$, ou mais precisamente para todo $\widetilde{u} \in \mathcal{A}u$ e para todo $\widetilde{v} \in \mathcal{A}v$, $\langle \widetilde{u} - \widetilde{v}, u - v \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$. Mas

$$\langle \widetilde{u} - \widetilde{v}, u - v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{S}} \langle \widetilde{u}(t) - \widetilde{v}(t), u(t) - v(t) \rangle_H d\mu(t) \geq 0.$$

Exemplo 2.2 *Seja φ uma função convexa e própria sobre H, ou seja, uma aplicação de H em $]-\infty, +\infty]$, tal que $\varphi \not\equiv +\infty$ e*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \ \leq \ t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in H$ e para todo $t \in (0, 1)$.

A subdiferencial $\partial\varphi$ de φ, definida por

$$y \in \partial\varphi(x) \Longleftrightarrow \text{ para todo } \xi \in H, \ \varphi(\xi) \geq \varphi(x) + \langle y, \xi - x \rangle,$$

é monótona em H.

De fato, se $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ *e* $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$*, temos em particular*

$$\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle \quad e \quad \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

Assim, somando estas duas desigualdades temos

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Portanto $\partial\varphi$ *é um operador monótono.*

A noção de operador monótono em um espaço de Hilbert aparece como um caso particular de operador monótono de um espaço de Banach no seu dual. Seja X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|$. Uma aplicação A de X em $\mathcal{P}(X')$ é monótona se para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ e para todo $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$, tem-se

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X,X'} \geq 0,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X'}$ indica o produto escalar na dualidade X, X'. Se o operador A estiver definido de X em $\mathcal{P}(X)$, a condição de monotonicidade é expressa por meio do operador dualidade F da seguinte forma: para cada $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ e para todo $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2, f \rangle_{X,X'} \geq 0,$$

para algum $f \in F(x_1 - x_2)$. Neste caso dizemos que o operador é acretivo e $-A$ é dissipativo. Em espaços de Hilbert as noções de operadores monótonos e acretivos confundem-se. Para detalhes sobre operadores monótonos em espaço de Banach e operadores acretivos, veja [4].

2.2 Noção de Operador Maximal Monótono

O conjunto dos operadores monótonos de H é ordenado pela inclusão dos gráficos, e isto justifica a seguinte definição:

Definição 2.2 *O operador monótono A de H é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de H.*

Explicitemos esta definição: A é maximal monótono se e somente se A é monótono e, se $(x, y) \in H \times H$ for tal que

$$\langle y - A\xi, x - \xi \rangle \geq 0$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(A)$ (ou mais precisamente, $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$, para todo $(\xi, \eta) \in A$), então $y \in Ax$.

Nosso objetivo agora é obter outras caracterizações para operadores maximais monótonos. Para isso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.1 *Sejam $C \neq \emptyset$ um subconjunto convexo fechado de H e A um operador monótono de H tal que $\mathcal{D}(A) \subset C$. Então, para todo $y \in H$, existe $x \in C$ tal que*

$$\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle,$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, assuma $y = 0$, pois caso contrário definimos

$$A_y = \{(\xi, \eta - y); (\xi, \eta) \in A\}$$

com $\mathcal{D}(A_y) = \mathcal{D}(A)$. É fácil notar que A é monótono se e somente se A_y é monótono, e assim podemos provar o lema para A_y. Para $(\xi, \eta) \in A$, seja

$$C((\xi, \eta)) = \{x; x \in C \text{ e } \langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq 0\}.$$

Assim o lema fica provado se nós mostrarmos que $\bigcap_{(\xi,\eta)\in A} C((\xi,\eta)) \neq \emptyset$, e para isso usaremos um argumento de compacidade. Na primeira etapa da demonstração vamos verificar que para cada $(\xi,\eta) \in A$ fixado, o conjunto $C((\xi,\eta))$ é fechado, limitado, convexo e não-vazio.

Primeiramente mostremos que $C((\xi,\eta))$ é fechado. De fato, tome $\{x_n\}$ uma seqüência de elementos de $C((\xi,\eta))$ com $x_n \to x$, então $\langle \eta+x, \xi-x\rangle \geq 0$, e como C é fechado, $x \in C$, o que mostra que $x \in C((\xi,\eta))$. Portanto $C((\xi,\eta))$ é fechado.

Agora vamos verificar que $C((\xi,\eta))$ é limitado. Seja $x \in C((\xi,\eta))$, então $\langle \eta+x, \xi-x\rangle \geq 0$ implica que $\langle \eta,\xi\rangle - \langle \eta,x\rangle + \langle x,\xi\rangle - \langle x,x\rangle \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\| x \|^2 &\leq \langle \eta,\xi\rangle - \langle \eta,x\rangle + \langle x,\xi\rangle \\
&\leq \mid \langle \eta,\xi\rangle \mid + (\|\xi\| + \|\eta\|)\|x\| \\
&\leq \mid \langle \eta,\xi\rangle \mid + \frac{1}{2}\left(\|\xi\| + \|\eta\|\right)^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|x\|^2 \leq 2 \mid \langle \eta,\xi\rangle \mid + (\|\xi\| + \|\eta\|)^2.$$

Logo, existe $M > 0$, M dependendo apenas de ξ e η, tal que $\|x\|^2 \leq M$, para todo $x \in C((\xi,\eta))$. Portanto $C((\xi,\eta))$ é limitado.

Para mostrarmos que $C((\xi,\eta))$ é convexo, suponhamos que $x_1, x_2 \in C((\xi,\eta))$ e $\lambda \in (0,1)$. Então, temos que:

$$\| x_1 \|^2 \leq \langle \eta,\xi\rangle - \langle \eta,x_1\rangle + \langle x_1,\xi\rangle \quad \text{e} \quad \| x_2 \|^2 \leq \langle \eta,\xi\rangle - \langle \eta,x_2\rangle + \langle x_2,\xi\rangle.$$

Seja $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Queremos mostrar que $z \in C((\xi,\eta))$. Note que $z \in C$, pois C é convexo e $x_1, x_2 \in C$. Resta mostrarmos que $\langle \eta+z, \xi-z\rangle \geq 0$. Mas para isto, basta verificarmos que

$$\| z \|^2 \leq \langle \eta,\xi\rangle - \langle \eta,z\rangle + \langle z,\xi\rangle.$$

Mostremos que esta desigualdade realmente vale:

$$\begin{aligned} \lambda \parallel x_1 \parallel^2 + (1-\lambda) \parallel x_2 \parallel^2 &\leq \lambda(\langle \eta, \xi \rangle - \langle \eta, x_1 \rangle + \langle x_1, \xi \rangle \\ &+ (1-\lambda)(\langle \eta, \xi \rangle - \langle \eta, x_2 \rangle + \langle x_2, \xi \rangle) \\ &= \langle \eta, \xi \rangle + \langle z, \xi \rangle - \langle \eta, z \rangle. \end{aligned}$$

Como a aplicação $x \mapsto \parallel x \parallel^2$ é convexa temos que:

$$\parallel z \parallel^2 \leq \langle \eta, \xi \rangle + \langle z, \xi \rangle - \langle \eta, z \rangle.$$

Logo, $z \in C((\xi, \eta))$, e portanto $C((\xi, \eta))$ é convexo.

Finalmente, $C((\xi, \eta))$ é não-vazio. De fato, $\mathcal{D}(A) \subset C$ e como $\xi \in \mathcal{D}(A)$, temos que $\xi \in C$ e $\langle \eta + \xi, \xi - \xi \rangle = 0$. Portanto $\xi \in C((\xi, \eta))$.

Logo, $C((\xi, \eta))$ é convexo, fechado, não-vazio e limitado. Assim, para qualquer $(\xi, \eta) \in A$ podemos concluir que $C((\xi, \eta))$ é fracamente compacto, veja Teorema 1.4. Nosso próximo passo é mostrar que $\{C((\xi, \eta)); (\xi, \eta) \in A\}$ tem a propriedade da intersecção finita. Sejam $(\xi_i, \eta_i) \in A$, para $i = 1, 2, ..., n$, e defina

$$K = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}; \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{i}} = 1, \lambda_{\mathrm{i}} \geq 0 \right\}.$$

K é claramente um subconjunto convexo e compacto de $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$. Defina

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i$$

para cada $\lambda \in K$, e defina $f : K \times K \to \mathrm{I\!R}$ por

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle x(\lambda) + \eta_i, x(\lambda) - \xi_i \rangle.$$

Afirmação: A aplicação f é contínua, convexa em λ e côncava em μ. A continuidade de f e a concavidade com relação à segunda componente são diretas. Mostremos então que f é convexa em λ.

Fixemos $\mu = \mu^0 = (\mu_1^0, ..., \mu_n^0)$. Queremos mostrar que

$$(\lambda, \mu^0) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mu_i^0 \langle x(\lambda) + \eta_i, x(\lambda) - \xi_i \rangle$$

é convexa. Sejam $\lambda, \sigma \in K$ e $t \in (0,1)$. Então, pela linearidade de x temos

$$
\begin{aligned}
& f(t\lambda + (1-t)\sigma, \mu^0) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \mu_i^0 \langle x(t\lambda + (1-t)\sigma) + \eta_i, x(t\lambda + (1-t)\sigma) - \xi_i \rangle \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \mu_i^0 \langle tx(\lambda) + (1-t)x(\sigma) + \eta_i, tx(\lambda) + (1-t)x(\sigma) - \xi_i \rangle \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \mu_i^0 [t^2 \langle x(\lambda) + \eta_i, x(\lambda) - \xi_i \rangle + (1 - 2t + t^2) \langle x(\sigma) + \eta_i, x(\sigma) - \xi_i \rangle \\
+ \; & (t - t^2)(\langle x(\lambda) + \eta_i, x(\lambda) - x(\lambda) + x(\sigma) - \xi_i \rangle \\
+ \; & \langle x(\sigma) + \eta_i, x(\sigma) - x(\sigma) + x(\lambda) - \xi_i \rangle)] \\
= \; & t \sum_{i=1}^{n} \mu_i^0 \langle x(\lambda) + \eta_i, x(\lambda) - \xi_i \rangle + (1-t) \sum_{i=1}^{n} \mu_i^0 \langle x(\sigma) + \eta_i, x(\sigma) - \xi_i \rangle \\
- \; & (t - t^2) \langle x(\lambda) - x(\sigma), x(\lambda) - x(\sigma) \rangle \\
\leq \; & tf(\lambda, \mu^0) + (1-t) f(\sigma, \mu^0).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
f(t\lambda + (1-t)\sigma, \mu^0) \; \leq \; tf(\lambda, \mu^0) + (1-t) f(\sigma, \mu^0).
$$

Como f é contínua, convexa em λ e côncava em μ podemos aplicar o Teorema do Min-Max (veja Teorema 1.2) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para garantir a existência de um ponto de sela, ou seja, um ponto $(\lambda_0, \mu_0) \in K \times K$ tal que

$$
f(\lambda_0, \mu) \leq f(\lambda_0, \mu_0) \leq f(\lambda, \mu_0)
$$

para todo $\lambda, \mu \in K$. Tomando $\lambda = \mu_0$, temos

$$
f(\lambda_0, \mu) \leq f(\lambda_0, \mu_0) \leq f(\mu_0, \mu_0) \leq \sup_{\lambda \in K} f(\lambda, \lambda),
$$

para todo $\mu \in K$. Agora,

$$\begin{aligned} f(\lambda,\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x(\lambda)+\eta_i, x(\lambda)-\xi_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\langle x(\lambda)+\eta_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j\rangle - \langle x(\lambda)+\eta_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_i\rangle \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle x(\lambda)+\eta_i, \xi_j-\xi_i\rangle. \end{aligned}$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle x(\lambda), \xi_j-\xi_i\rangle \\ = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x(\lambda), \xi_j\rangle \right] - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x(\lambda), \xi_i\rangle \right] \\ = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x(\lambda), x(\lambda)\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x(\lambda), x(\lambda)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(\lambda,\lambda) &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle \eta_i, \xi_j-\xi_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle \eta_j, \xi_i-\xi_j\rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle \eta_j, \xi_j-\xi_i\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(-2\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle \eta_j, \xi_j-\xi_i\rangle \right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \langle \eta_i-\eta_j, \xi_j-\xi_i\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

pois A é monótono e (ξ_i,η_i), $(\xi_j,\eta_j) \in A$. Portanto, $f(\lambda,\lambda) \leq 0$. Como

$$f(\lambda_0,\mu) \leq \sup_{\lambda\in K} f(\lambda,\lambda),$$

para todo $\mu \in K$, segue que $f(\lambda_0,\mu) \leq 0$, para todo $\mu \in K$.

Tome, em particular, $\mu = (0,...,0,1,0,...,0)$, o vetor que assume valor 1 na i-ésima coordenada e 0 nas demais. Então,

$$\langle x(\lambda_0)+\eta_i, x(\lambda_0)-\xi_i\rangle = f(\lambda_0,\mu) \leq 0.$$

Assim,

$$\langle x(\lambda_0) + \eta_i, \xi_i - x(\lambda_0) \rangle \; \geq \; 0,$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$. Portanto,

$$x(\lambda_0) \in \bigcap_{i=1}^{n} C((\xi_i, \eta_i)).$$

Como $x(\lambda_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \xi_i$, com $\xi_i \in \mathcal{D}(A) \subset C$, C convexo e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 = 1$, temos que $x(\lambda_0) \in C$.

Assim, qualquer coleção finita

$$\{C((\xi_i, \eta_i)); (\xi_i, \eta_i) \in A, i = 1, ..., n\}$$

tem intersecção não-vazia. Logo, $\{C((\xi, \eta)); (\xi, \eta) \in A\}$ tem a propriedade da intersecção finita.

Portanto, como $C((\xi, \eta))$ é fracamente compacto para cada $(\xi, \eta) \in A$, em particular $C((\xi_0, \eta_0))$ é fracamente compacto, com $(\xi_0, \eta_0) \in A$, fixo.

Seja $K_i = C((\xi_i, \eta_i)) \cap C((\xi_0, \eta_0))$. K_i é fechado em $C((\xi_0, \eta_0))$, pois $C((\xi_i, \eta_i))$ é fechado em H, para todo i. Além disso, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$, logo $\{K_i\}$ tem a propriedade da intersecção finita e para todo i, $K_i \subset C((\xi_0, \eta_0))$, o qual é compacto.

Portanto, $\cap K_i = \cap C((\xi, \eta)) \neq \emptyset$ para todo $(\xi, \eta) \in A$ (veja Teorema 1.1). Assim, existe $x \in C$ tal que $\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq 0$, para todo $(\xi, \eta) \in A$. ■

A próxima proposição nos dá algumas caracterizações de operadores maximais monótonos:

Proposição 2.1 *Seja A um operador de H. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é maximal monótono;

(ii) A *é monótono e* $\mathcal{R}(I+A)=H$*;*

(iii) Para todo $\lambda>0$*,* $(I+\lambda A)^{-1}$ *é uma contração definida sobre todo* H*.*

Demonstração: $(ii)\Rightarrow(i)$ Assuma $\mathcal{R}(I+A)=H$, e A monótono. Queremos mostrar que A é maximal monótono.

Suponha que $B=A\cup(u,v)$ é uma extensão monótona de A, com $(u,v)\in H\times H$, ou seja $\mathcal{D}(B)=\mathcal{D}(A)\cup\{u\}$. Então,

$$\langle v-y,u-x\rangle\geq 0$$

para todo $(x,y)\in A$.

Se mostrarmos que $(u,v)\in A$, então concluiremos que A é maximal monótono. Note que

$$\begin{aligned}\| u-x+v-y\|^2 &= \langle u-x+v-y,u-x+v-y\rangle\\ &= \| u-x\|^2+2\langle v-y,u-x\rangle+\| v-y\|^2\\ &\geq \| u-x\|^2\end{aligned}$$

para todo $(x,y)\in A$.

Logo,

$$\| u-x\|\leq\| u-x+v-y\|$$

para todo $(x,y)\in A$. Como por hipótese, $\mathcal{R}(I+A)=H$, existe $(\xi,\eta)\in A$ tal que $u+v=\xi+\eta$, então

$$\| u+v-x-y\|=\|\xi+\eta-x-y\|$$

para todo $(x,y)\in A$.

Em particular, para $(x,y)=(\xi,\eta)$ temos:

$$0\leq\| u-\xi\|\leq\|\xi-\xi+\eta-\eta\|=0.$$

Logo $u=\xi$. Mas $u+v=\xi+\eta$, então $v=\eta$. Portanto $(u,v)\in A$.

Assim podemos concluir que A é maximal monótono e portanto $(ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja A maximal monótono. Queremos mostrar que A é monótono e $\mathcal{R}(I + A) = H$. Como A é maximal monótono, então A é monótono. Resta mostrar que $\mathcal{R}(I + A) = H$. Para isto utilizaremos o Lema 2.1. Seja $C = H$ e tome $y \in H$, então existe $x \in H$, tal que

$$\langle \eta - (y - x), \xi - x \rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$.

Como A é maximal monótono, segue-se que $y - x \in Ax$, ou seja $y \in (I + A)x$. Mas y foi tomado arbitrariamente em H, logo $H \subset \mathcal{R}(I + A)$. Portanto A é monótono e $\mathcal{R}(I + A) = H$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Assuma que para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre H. Queremos mostrar que A é monótono e $\mathcal{R}(I + A) = H$.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda > 0$ e sejam $w_1 \in Ax_1$ e $w_2 \in Ax_2$. Considere

$$y_1 = x_1 + \lambda w_1 \in (I + \lambda A)x_1$$

$$y_2 = x_2 + \lambda w_2 \in (I + \lambda A)x_2$$

então $x_1 = (I + \lambda A)^{-1}y_1$ e $x_2 = (I + \lambda A)^{-1}y_2$.

$$\begin{aligned} \| x_1 - x_2 \| &= \| (I + \lambda A)^{-1}y_1 - (I + \lambda A)^{-1}y_2 \| \\ &\leq \| y_1 - y_2 \| = \| x_1 + \lambda w_1 - x_2 - \lambda w_2 \| \\ &= \| (x_1 - x_2) + \lambda(w_1 - w_2) \| \end{aligned}$$

e isto implica

$$\begin{aligned} \| x_1 - x_2 \|^2 &\leq \| (x_1 - x_2) + \lambda(w_1 - w_2) \|^2 \\ &= \| x_1 - x_2 + \|^2 + \lambda^2 \| w_1 - w_2 \|^2 + 2\lambda \langle w_1 - w_2, x_1 - x_2 \rangle \end{aligned}$$

para todo $w_1 \in Ax_1$ e $w_2 \in Ax_2$ e qualquer que seja $\lambda > 0$. Assim, dividindo por λ,

$$0 \leq \lambda \parallel w_1 - w_2 \parallel^2 + 2\langle w_1 - w_2, x_1 - x_2 \rangle$$

para todo $\lambda > 0$. Portanto,

$$\langle w_1 - w_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Logo A é monótono. Além disso, como $(I + \lambda A)^{-1}$ está definido em todo H e para todo $\lambda > 0$, e em particular para $\lambda = 1$ temos $\mathcal{R}(I + A) = H$.

Portanto, A é monótono e $\mathcal{R}(I + A) = H$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Assuma que A é maximal monótono. Queremos mostrar que para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida em todo H. Se A é maximal monótono, então qualquer que seja $\lambda > 0$, λA também é maximal monótono e portanto $\mathcal{R}(I + \lambda A) = H$. Além disso, para todo $\lambda > 0$, e quaisquer que sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(I + \lambda A)$ temos que existem $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ e $w_1 \in Ax_1$ e $w_2 \in Ax_2$ tais que $y_1 = x_1 + \lambda w_1$ e $y_2 = x_2 + \lambda w_2$. Assim,

$$\parallel x_1 - x_2 \parallel \leq \parallel (x_1 - x_2) + \lambda(w_1 - w_2) \parallel = \parallel y_1 - y_2 \parallel$$

para todo $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(I + \lambda A) = H$. Portanto, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida em todo H. Em particular, $(I + \lambda A)^{-1}$ é um operador unívoco. ■

Exemplo 2.3 *Seja $(\mathcal{S}, \beta, \mu)$ um espaço de medida positiva. Dado um operador A de H, podemos definir $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{S}; H)$ por*

$$v \in \mathcal{A}u \Longleftrightarrow v(t) \in Au(t)$$

$\mu - qtp$ em $\mathcal{S}$. Se A é maximal monótono e se $\mu(\mathcal{S}) < \infty$, então $\mathcal{A}$ é maximal monótono.

A monotonicidade de $\mathcal{A}$ segue diretamente da monotonicidade de A. Resta mostrar que $\mathcal{A}$ é maximal. Para isto mostraremos que $\mathcal{R}(I+\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ e usaremos a Proposição 2.1.

Tome $v \in \mathcal{H}$, então $v : \mathcal{S} \to H$ com $\int_{\mathcal{S}} \| v(t) \|_H^2 \, d\mu(t) < \infty$. Observe que sendo A maximal monótono, então $\mathcal{R}(I + A) = H$ e como $v(t) \in H$ para todo $t \in \mathcal{S}$, então para cada t existe $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $v(t) \in (I + A)u(t) = u(t) + Au(t)$. Agora, note que, sendo $(I + A)^{-1}$ é um operador unívoco, então para todo $t \in \mathcal{S}$, $u(t) = (I + A)^{-1}v(t)$.

Mostremos que $u \in \mathcal{H}$. De fato, fixe $t = t_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \| u(s) \| &= \| u(s) - u(t_0) + u(t_0) \| \\ &\leq \| u(s) - u(t_0) \| + \| u(t_0) \| . \end{aligned}$$

Mas $u(s) = (I + A)^{-1}v(s)$ e $u(t_0) = (I + A)^{-1}v(t_0)$, logo

$$\begin{aligned} \| u(s) - u(t_0) \| &= \| (I + A)^{-1}v(s) - (I + A)^{-1}v(t_0) \| \\ &\leq \| v(s) - v(t_0) \| \leq \| v(s) \| + \| v(t_0) \| . \end{aligned}$$

Assim,

$$\| u(s) \| \leq \| v(s) \| + (\| v(t_0) \| + \| u(t_0) \|).$$

Como t_0 está fixo, então $\| v(t_0) \| + \| u(t_0) \| = c$ é uma constante. Logo,

$$\| u(s) \| \leq \| v(s) \| + c.$$

Assim, para todo $t \in \mathcal{S}$

$$\| u(t) \|^2 \leq (\| v(t) \| + c)^2 = \| v(t) \|^2 + 2c \| v(t) \| + c^2.$$

E então,

$$\int_{\mathcal{S}} \| u(t) \|^2 \, d\mu(t) \leq \int_{\mathcal{S}} \| v(t) \|^2 \, d\mu(t) + 2c \int_{\mathcal{S}} \| v(t) \| \, d\mu(t) + c^2 \int_{\mathcal{S}} d\mu(t) < \infty$$

pois $\mu(\mathcal{S}) < \infty$, por hipótese.

Portanto, $u \in \mathcal{H}$.

Observe que tomamos $v \in \mathcal{H}$ *e vimos que para todo* $t \in \mathcal{S}$, $v(t) \in u(t) + Au(t) = (I + A)u(t)$, *mas* $v(t) \in (I + A)u(t)$ *se e somente se* $v \in (I + \mathcal{A})u = u + \mathcal{A}u$, *por definição de* $\mathcal{A}$. *Logo,* $v \in \mathcal{R}(I + \mathcal{A})$.

Portanto $\mathcal{H} = \mathcal{R}(\mathcal{I}+\mathcal{A})$ *e* $\mathcal{A}$ *é monótono, logo* $\mathcal{A}$ *é maximal monótono.*

Lema 2.2 *Seja* φ *uma função convexa própria sobre* H *e* $\alpha \geq 0$. *A função convexa*

$$x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2} \parallel x - y \parallel^2$$

atinge seu mínimo em x_0 *se e somente se* $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Se $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$ então para todo $\xi \in H$

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) - \varphi(x_0) &\geq \langle \alpha(y - x_0), \xi - x_0 \rangle \\
&= \alpha\langle y - x_0, y - y + \xi - x_0 \rangle \\
&= \alpha \parallel x_0 - y \parallel^2 + \alpha\langle y - x_0, \xi - y \rangle \\
&\geq \alpha \parallel x_0 - y \parallel^2 + \alpha \left(-\frac{1}{2} \parallel y - x_0 \parallel^2 - \frac{1}{2} \parallel \xi - y \parallel^2 \right) \\
&= \frac{\alpha}{2}[\parallel x_0 - y \parallel^2 - \parallel \xi - y \parallel^2].
\end{aligned}$$

Assim, para todo $\xi \in H$

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2} \parallel x_0 - y \parallel^2 - \frac{\alpha}{2} \parallel \xi - y \parallel^2$$

ou seja,

$$\varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2} \parallel \xi - y \parallel^2 \geq \varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2} \parallel x_0 - y \parallel^2 .$$

Portanto, a função

$$x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2} \parallel x - y \parallel^2$$

atinge seu mínimo em x_0.

Note que $\varphi(x_0) < \infty$, pois $x_0 \in \mathcal{D}(\partial\varphi) \subset \mathcal{D}(\varphi)$, e $\mathcal{D}(\varphi) = \{x \in H; \varphi(x) < \infty\}$.

($\Rightarrow$) Assuma, agora, que a função

$$x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2} \parallel x - y \parallel^2$$

atinge seu mínimo em x_0. Queremos mostrar que esta função é convexa e $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.

Para mostrar a convexidade da função

$$x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2} \parallel x - y \parallel^2$$

basta lembrarmos que as funções $x \mapsto \parallel x \parallel^2$ e φ são convexas.

Seja $\eta \in H$ e defina $\xi_t = (1-t)x_0 + t\eta$, para $0 < t < 1$.

Como a função atinge seu mínimo em x_0, temos em particular,

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi_t) - \varphi(x_0) &\geq \frac{\alpha}{2} \parallel x_0 - y \parallel^2 - \frac{\alpha}{2} \parallel \xi_t - y \parallel^2 \\
&= \frac{\alpha}{2}[\langle x_0 - y, x_0 - y\rangle - \langle x_0 - y, \xi_t - y\rangle \\
&+ \langle x_0 - y, \xi_t - y\rangle - \langle \xi_t - y, \xi_t - y\rangle] \\
&= \frac{\alpha}{2}\langle x_0 + \xi_t - 2y, x_0 - \xi_t\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, pela convexidade de φ,

$$\varphi(\xi_t) \leq (1-t)\varphi(x_0) + t\varphi(\eta) = \varphi(x_0) - t\varphi(x_0) + t\varphi(\eta)$$

e

$$\begin{aligned}
t[\varphi(\eta) - \varphi(x_0)] &\geq \varphi(\xi_t) - \varphi(x_0) \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\langle x_0 + \xi_t - 2y, x_0 - \xi_t\rangle \\
&= \frac{\alpha}{2}\langle 2x_0 - tx_0 + t\eta - 2y, tx_0 - t\eta\rangle.
\end{aligned}$$

Dividindo por t e fazendo t tender a 0 temos

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \alpha\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle$$

para todo $\eta \in H$. Portanto, $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. ■

Exemplo 2.4 *Seja φ uma função convexa, própria sobre H. Se φ é semi-contínua inferiormente (s.c.i.) então $\partial\varphi$ é maximal monótono.*

Sabemos que $\partial\varphi$ é monótono. Logo, basta mostrar que $H = \mathcal{R}(I+\partial\varphi)$. Seja $y \in H$. Sabemos também que a função $x \mapsto \varphi(x)+\frac{1}{2} \parallel x-y \parallel^2$ é convexa. Além disso, como a aplicação $x \mapsto \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel^2$ é contínua e portanto s.c.i., temos que $x \mapsto \varphi(x) + \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel^2$ é s.c.i., e ainda quando $\parallel x \parallel \to \infty$, $\varphi(x) + \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel^2 \to \infty$. Logo, $\varphi(x) + \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel^2$ atinge seu mínimo em algum $x_0 \in H$, veja Teorema 1.5. Assim, pelo Lema 2.2, $(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$, isto é, existe $x_0 \in H$ tal que

$$y \in (I + \partial\varphi)x_0.$$

Logo, $H = \mathcal{R}(I + \partial\varphi)$ e portanto $\partial\varphi$ é maximal monótono.

Proposição 2.2 *Seja A uma aplicação monótona unívoca de $\mathcal{D}(A) = H$ em H. Suponha que A é hemicontínua, ou seja, para todo $x \in H$ e todo $\xi \in H$, $A(x + t\xi) \to Ax$ quando $t \to 0$, então A é maximal monótono.*

Demonstração: Seja $(x, y) \in H \times H$ tal que $\langle A\xi - y, \xi - x\rangle \geq 0$, para todo $\xi \in \mathcal{D}(A) = H$.

Defina

$$x_t \ = \ x + t(y - Ax)$$

para $0 < t < 1$. Então

$$\langle Ax_t - y, x_t - x\rangle \ \geq \ 0$$

logo,

$$\langle A(x + t(y - Ax)) - y, y - Ax\rangle \ \geq \ 0.$$

Como A é hemicontínua $Ax_t \to Ax$, quando $t \to 0$. Assim,

$$\langle Ax - y, y - Ax \rangle \ \geq \ 0$$

isto é,

$$\| \ Ax - y \ \|^2 \leq \ 0.$$

E portanto, $y = Ax$.

Logo, A é maximal monótono. ■

2.3 Propriedades Elementares dos Operadores Maximais Monótonos

Seja A um operador maximal monótono. Denotamos por $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ o resolvente de A que, para todo $\lambda > 0$ é uma contração de H em H. Segue diretamente da definição de resolvente que para todo $x \in H$, $J_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$. Com efeito, dado $x \in H$, como $\mathcal{R}(I + \lambda A) = H$, temos que existe $z \in \mathcal{D}(A)$ tal que $x \in (I + \lambda A)z$, ou seja, $z = (I + \lambda A)^{-1}x = J_\lambda x$, logo $J_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$. Além disso, é fácil ver que $\dfrac{x - J_\lambda x}{\lambda} \in AJ_\lambda x$.

Em tudo o que segue, nesta seção, considere A um operador maximal monótono.

Proposição 2.3 *Seja $(x_n, y_n) \in A$ tal que $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ e $\limsup \langle y_n, x_n \rangle \leq \langle y, x \rangle$. Então $(x, y) \in A$ e $\langle y_n, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$.*

Demonstração: Como A é monótono e $(x_n, y_n) \in A$, então

$$\langle \eta - y_n, \xi - x_n \rangle \ \geq \ 0$$

para todo $(\xi,\eta) \in A$. Sejam $\langle y_n, x_n\rangle = \tau_n \in \mathbb{R}$ e $\tau = \limsup \tau_n \leq \langle y, x\rangle$, por hipótese. Como $\limsup \tau_n$ é um ponto de aderência, então existe uma subseqüência $\{\tau_{nk}\} \subset \{\tau_n\}$ tal que

$$\tau_{nk} = \langle y_{nk}, x_{nk}\rangle \to \tau.$$

Além disso, como $\{\tau_{nk}\} \subset \{\tau_n\}$ segue que $(x_{nk}, y_{nk}) \in A$. Logo,

$$\langle \eta - y_{nk}, \xi - x_{nk}\rangle \;\geq\; 0 \tag{2.1}$$

para todo $(\xi,\eta) \in A$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim\langle \eta - y_{nk}, \xi - x_{nk}\rangle &= \lim\langle \eta, \xi\rangle \\
&- \lim\langle y_{nk}, \xi\rangle - \lim\langle \eta, x_{nk}\rangle + \lim\langle y_{nk}, x_{nk}\rangle \\
&= \langle \eta, \xi\rangle - \langle y, \xi\rangle - \langle \eta, x\rangle + \tau \\
&\leq \langle \eta - y, \xi\rangle - \langle \eta, x\rangle + \langle y, x\rangle \\
&= \langle \eta - y, \xi - x\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, de (2.1)

$$\langle \eta - y, \xi - x\rangle \;\geq\; 0$$

para todo $(\xi,\eta) \in A$. Como A é maximal monótono segue-se que $(x, y) \in A$.

Resta mostrar que $\langle y_n, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$. Como $(x, y) \in A$ segue que

$$\langle y - y_n, x - x_n\rangle \;\geq\; 0$$

e então

$$\langle y_n, x_n\rangle \;\geq\; -\langle y, x\rangle + \langle y, x_n\rangle + \langle y_n, x\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\liminf\langle y_n, x_n\rangle &\geq \liminf(-\langle y, x\rangle + \langle y, x_n\rangle + \langle y_n, x\rangle) \\
&\geq -\langle y, x\rangle + \liminf(\langle y, x_n\rangle) + \liminf(\langle y_n, x\rangle) \\
&= \langle y, x\rangle
\end{aligned}$$

e portanto

$$\liminf\langle y_n, x_n\rangle \ \geq \ \langle y, x\rangle.$$

Como, por hipótese

$$\limsup\langle y_n, x_n\rangle \ \leq \ \langle y, x\rangle$$

segue que $\lim\langle y_n, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$.

Portanto,

$$\langle y_n, x_n\rangle \rightarrow \langle y, x\rangle.$$

■

Teorema 2.1 $\overline{\mathcal{D}(A)}$ *é convexo, e para todo* $x \in H$ *temos*

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = Proj_{\overline{\mathcal{D}(A)}} x.$$

Demonstração: Seja $C = \overline{conv\mathcal{D}(A)}$, onde $conv\mathcal{D}(A)$ é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contém $\mathcal{D}(A)$. Sejam $x \in H$ e $x_\lambda = J_\lambda x$, então $\left(x_\lambda, \dfrac{x - x_\lambda}{\lambda}\right) \in A$. Como A é monótono e $\lambda > 0$, para todo $(\xi, \eta) \in A$ temos

$$\langle x - x_\lambda - \lambda\eta, x_\lambda - \xi\rangle \ \geq \ 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \| x_\lambda \|^2 &\leq \langle x - \lambda\eta, x_\lambda - \xi\rangle + \langle x_\lambda, \xi\rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \| x - \lambda\eta \|^2 + \frac{1}{2} \| x_\lambda - \xi \|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \| x_\lambda \|^2 + \frac{1}{2} \| \xi \|^2 - \frac{1}{2} \| x_\lambda - \xi \|^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \| x_\lambda \|^2 \leq \frac{1}{2} \| x - \lambda\eta \|^2 + \frac{1}{2} \| \xi \|^2 .$$

Fazendo $\lambda \to 0$, temos

$$\| x_\lambda \|^2 \leq \| x \|^2 + \| \xi \|^2$$

e portanto, x_λ é limitado quando $\lambda \to 0$.

Como $\{x_\lambda\}$ é uma seqüência limitada em H, então existe uma subseqüência $\{x_{\lambda n}\}$ que converge fracamente, veja Teorema 1.7. Assim, quando $\lambda_n \to 0$, $x_{\lambda n} \rightharpoonup x_0$, com $x_0 \in C$. E uma vez que $x_{\lambda n} \rightharpoonup x_0$ então $\| x_0 \| \leq \liminf \| x_{\lambda n} \|$, veja Proposição 1.2.

Logo, de (2.2) segue que

$$\begin{aligned}
\| x_0 \|^2 &\leq \liminf_{\lambda_n \to 0} \| x_{\lambda n} \|^2 \\
&\leq \langle x, x_0 - \xi \rangle + \langle x_0, \xi \rangle
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(A)$.

Temos então,

$$\langle x_0, x_0 \rangle \leq \langle x, x_0 - \xi \rangle + \langle x_0, \xi \rangle$$

o que implica

$$\langle x - x_0, \xi - x_0 \rangle \leq 0 \tag{2.3}$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(A)$. Como $C = \overline{conv\mathcal{D}(A)}$, a desigualdade (2.3) ocorre para todo $\xi \in C$, e portanto $x_0 = Proj_C x$.

Mas a projeção em um convexo fechado de um espaço de Hilbert é unicamente determinada, logo o limite independe da subseqüência $\{x_{\lambda n}\}$ tomada. Portanto,

$$x_\lambda \rightharpoonup Proj_C x$$

quando $\lambda \to 0$.

Assim podemos concluir que,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|^2 &\leq \limsup_{\lambda \to 0} (\langle x, x_\lambda - \xi \rangle + \langle x_\lambda, \xi \rangle + (-\lambda \langle \eta, x_\lambda - \xi \rangle) \\
&= \langle x, x_0 - \xi \rangle + \langle x_0, \xi \rangle
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in C$.

Em particular, tomando $\xi = x_0$ temos:

$$\limsup_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|^2 \leq \| x_0 \|^2 .$$

Lembrando que

$$\| x_0 \|^2 \leq \liminf_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|^2$$

segue que

$$\lim_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \| = \| x_0 \|$$

e como $x_\lambda \rightharpoonup x_0$ temos, pela Proposição 1.3, que

$$x_\lambda \to x_0$$

ou seja,

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = Proj_C x.$$

Mas $J_\lambda x = x_\lambda \in \mathcal{D}(A)$ para todo $x \in H$, e como para todo $z \in C$, $Proj_C z = z$, segue que

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda z = z$$

logo temos que $z \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e portanto $C = \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Concluímos assim que $\overline{\mathcal{D}(A)}$ é convexo e

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = Proj_{\overline{\mathcal{D}(A)}} x$$

para todo $x \in H$. ■

Pode-se verificar que o operador $x \mapsto \overline{convAx}$ é monótono se A é monótono. Logo, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, Ax é um fechado convexo quando A é maximal monótono.

Assim, existe um único elemento de norma mínima em Ax, a saber, $Proj_{Ax}0$. Denotaremos este elemento por A^0x. A aplicação $x \mapsto A^0x$ é um operador unívoco chamado seção minimal de A.

Por outro lado, denotamos por

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$$

a aproximação de Yosida de A.

É importante observar que se A é maximal monótono e $\lambda > 0$ temos a seguinte inclusão $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, para todo $x \in H$.

A seguir demonstraremos algumas propriedades fundamentais de A_λ. O operador A_λ desempenhará um papel importante na demonstração de existência de solução de problemas de evolução governados por A.

Proposição 2.4 *Seja A maximal monótono e $\lambda > 0$. Então:*

(i) *A_λ é maximal monótono e lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $\frac{1}{\lambda}$;*

(ii) *$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$, para todo $\lambda, \mu > 0$;*

(iii) *Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, temos $\| A_\lambda x \| \uparrow \| A^0 x \|$ e $A_\lambda x \to A^0 x$ quando $\lambda \downarrow 0$ com $\| A_\lambda x - A^0 x \|^2 \leq \| A^0 x \|^2 - \| A_\lambda x \|^2$;*

(iv) *Para $x \notin \mathcal{D}(A)$, $\| A_\lambda x \| \nearrow +\infty$, quando $\lambda \downarrow 0$.*

Demonstração: (i) Como A é maximal monótono, então $\mathcal{D}(J_\lambda) = \mathcal{R}(I + \lambda A) = H$. Assim, sendo $A_\lambda = \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$ temos que A_λ está definido em todo H e A_λ é unívoco.

Mostremos que A_λ é monótono. De fato, para todo $x_1, x_2 \in H$,

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle &= \frac{1}{\lambda} \langle x_1 - J_\lambda x_1 - x_2 + J_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&\geq \frac{1}{\lambda} \| x_1 - x_2 \|^2 - \frac{1}{\lambda} \mid \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle \mid \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

uma vez que J_λ é contração.

Portanto, A_λ é monótono.

Verificaremos agora que A_λ é lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a $\dfrac{1}{\lambda}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \parallel A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \parallel^2 &= \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - J_\lambda x_1 - x_2 + J_\lambda x_2\rangle \\
&\leq \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2\rangle \\
&\leq \parallel A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \parallel \parallel x_1 - x_2 \parallel .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\parallel A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \parallel \leq \frac{1}{\lambda} \parallel x_1 - x_2 \parallel$$

para todo $x_1, x_2 \in H$.

Portanto, A_λ é lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $\dfrac{1}{\lambda}$.

Resta mostrar a maximalidade de A_λ. De fato, como A_λ é lipschitziana segue que A_λ é contínuo. Temos então A_λ monótono, unívoco, com $\mathcal{D}(A_\lambda) = H$ e A_λ hemicontínua (pois continuidade implica hemicontinuidade). Logo pela Proposição 2.2 A_λ é maximal monótono.

(ii) Basta notar que $(x, y) \in A_{\lambda+\mu}$ se e somente se $(x-\lambda y-\mu y, y) \in A$, e por outro lado, $(x, y) \in (A_\lambda)_\mu$ se e somente se $(x - \mu y, y) \in A_\lambda$, e assim, se e somente se $(x - \mu y - \lambda y, y) \in A$. Consequentemente $A_{\lambda+\mu} = (A_\lambda)_\mu$.

(iii) Sabemos que $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ e $(x, A^0 x) \in A$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Como A é monótono, temos que

$$\begin{aligned}
&\langle A_\lambda x - A^0 x, J_\lambda x - x\rangle \;\geq\; 0 \\
\Rightarrow\; &\langle A_\lambda x - A^0 x, \lambda A_\lambda x\rangle \;\leq\; 0 \\
\Rightarrow\; &\langle A_\lambda x, A_\lambda x\rangle - \langle A^0 x, A_\lambda x\rangle \;\leq\; 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\parallel A_\lambda x \parallel^2 \leq | \langle A^0 x, A_\lambda x\rangle | \leq \parallel A^0 x \parallel \parallel A_\lambda x \parallel .$$

E isto implica

$$\| A_\lambda x \| \leq \| A^0 x \| \ .$$

Agora, substituindo A por A_μ, lembrando que A_μ é unívoco e portanto $A_\mu = A^0_\mu$, e usando o item (ii) temos que para todo $x \in H$,

$$\| (A_\mu)_\lambda x \|^2 \leq \ \langle A_\mu x, (A_\mu)_\lambda x \rangle \ \leq \| A_\mu x \| \, \| (A_\mu)_\lambda x \|$$

e isto implica

$$\| A_{\lambda+\mu} x \| \leq \| A_\mu x \| \ .$$

Logo, $\| A_\lambda x \|$ é não crescente. Como,

$$\| A_\lambda x \|^2 \leq \ \langle A^0 x, A_\lambda x \rangle$$

temos

$$\begin{aligned} \| A_\lambda x - A^0 x \|^2 &= \| A_\lambda x \|^2 - 2\langle A^0 x, A_\lambda x \rangle + \| A^0 x \|^2 \\ &\leq \| A_\lambda x \|^2 - 2 \| A_\lambda x \|^2 + \| A^0 x \|^2 \\ &= \| A^0 x \|^2 - \| A_\lambda x \|^2 \ . \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\| A_\lambda x \| \leq \| A^0 x \|$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e ainda $\| A_\lambda x \|$ é não crescente, segue-se que $\| A_\lambda x \|$ converge quando $\lambda \downarrow 0$.

Seja $R = \lim \| A_\lambda x \|$, com $x \in \mathcal{D}(A)$. Como $\| A_\lambda x \| \leq \| A^0 x \|$, para todo $\lambda > 0$, temos que $R \ \leq \| A^0 x \|$.

Além disso, como $\{A_\lambda x\}$ é uma seqüência limitada em H, existe uma subseqüência $\{A_{\lambda_n} x\}$ que converge fracamente, ou seja, existe $y \in H$, tal que $A_{\lambda_n} x \rightharpoonup y$ quando $\lambda_n \to 0$.

Então,

$$\| y \| \leq \ \liminf \| A_{\lambda_n} x \| = \ R. \tag{2.4}$$

Mas para $x \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = x,$$

e portanto pela Proposição 1.2

$$\langle \eta - A_{\lambda n} x, \xi - J_{\lambda n} x \rangle \to \langle \eta - y, \xi - x \rangle$$

quando $\lambda_n \to 0$ e para todo $(\xi, \eta) \in A$.

Visto que $(J_{\lambda_n} x, A_{\lambda_n} x) \in A$, segue da monotonicidade de A que

$$\langle \eta - y, \xi - x \rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$.

Mas A é maximal monótono, logo $(x, y) \in A$. Isto significa que $A_{\lambda n} x$ converge quando $\lambda_n \to 0$ para um elemento y de Ax. Deste modo segue da definição de $A^0 x$ que

$$\| y \| \geq \| A^0 x \| \geq R. \tag{2.5}$$

De (2.4) e (2.5) concluímos que,

$$\| y \| = R = \| A^0 x \| .$$

Portanto, $\| A_\lambda x \| \uparrow \| A^0 x \|$ quando $\lambda \downarrow 0$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. E por outro lado, como $\| A_\lambda x - A^0 x \|^2 \leq \| A^0 x \|^2 - \| A_\lambda x \|^2$ segue que, quando $\lambda \downarrow 0$, $A_\lambda x \to A^0 x$.

(iv) Resta mostrar que para $x \notin \mathcal{D}(A)$, $\| A_\lambda x \| \uparrow \infty$ quando $\lambda \downarrow 0$.

Seja $x \notin \mathcal{D}(A)$. Suponha que $\| A_\lambda x \| \not\to \infty$ quando $\lambda \downarrow 0$. Logo, existe $M > 0$, tal que para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, existe $\lambda < \lambda_0$, com $\| A_\lambda x \| \leq M$.

Escolha um λ_0 qualquer e fixe-o. A partir dele construiremos uma seqüência decrescente convergindo para 0. De fato, faça

$$\lambda_0^1 := \lambda_0$$

então existe $\lambda_1 < \lambda_0^1$ tal que $\| A_{\lambda_1} x \| \leq M$. Defina,

$$\lambda_0^2 := \lambda_1$$

então existe $\lambda_2 < \lambda_0^2$ tal que $\| A_{\lambda_2} x \| \leq M$.

Seguindo este processo, construiremos a seqüência $\{\lambda_j\}$ tal que

$$0 < ... < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$$

e $\| A_{\lambda_j} x \| \leq M$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Assim, para qualquer $x \in H$ temos:

$$\| J_{\lambda_j} x - x \| = \lambda_j \| A_{\lambda_j} x \| \leq \lambda_j M \to 0$$

quando $\lambda_j \to 0$. Logo,

$$\lim_{\lambda_j \to 0} J_{\lambda_j} x = x.$$

Além disso, $\{A_{\lambda_j} x\}$ é limitada, logo existe uma subseqüência $\{A_{\lambda_{j_n}} x\}$ e um elemento $y \in H$ tal que

$$A_{\lambda_{j_n}} x \rightharpoonup y.$$

Mas $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ para todo $\lambda > 0$. Em particular, $(J_{\lambda_{j_n}} x, A_{\lambda_{j_n}} x) \in A$ para todo λ_{j_n}.

Logo,

$$\langle A_{\lambda_{j_n}} x - \eta, J_{\lambda_{j_n}} x - \xi \rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$. E como, $J_{\lambda_{j_n}} x \to x$ e $A_{\lambda_{j_n}} x \rightharpoonup y$, segue que

$$\langle A_{\lambda_{j_n}} x - \eta, J_{\lambda_{j_n}} x - \xi \rangle \to \langle y - \eta, x - \xi \rangle,$$

o que implica

$$\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$.

Como A é maximal monótono, então $(x, y) \in A$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, se $x \notin A$, $\| A_\lambda x \| \uparrow \infty$ quando $\lambda \downarrow 0$. ■

2.4 Problemas de Evolução Associados a Operadores Monótonos

2.4.1 Resolução da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = u_0$

Seja H um espaço de Hilbert e seja A um operador maximal monótono em H. Denotamos por $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ o resolvente de A e por $A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ a aproximação de Yosida de A.

Considere o problema de valor inicial (p.v.i.):

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

onde $x \in \mathcal{D}(A)$ e $A \subset H \times H$ é possivelmente multívoco.

Seja $T > 0$. Dizemos que uma aplicação $u : [0, T] \to H$ é uma solução do p.v.i. (P) se u satisfaz as seguintes condições:

1. $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ e $u(0) = x$.

2. u é Lipschitz contínua em $[0, T]$.

3. a inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni 0$ é satisfeita *qtp* em $[0, T]$, (ou seja, existe η tal que $\eta(t) \in Au(t)$ *qtp* e $\dfrac{du}{dt} + \eta = 0$).

Observação 2.1 *Em qualquer espaço de Banach reflexivo (em particular, em qualquer espaço de Hilbert), a condição* (2) *implica que u é absolutamente* *contínua e portanto diferenciável qtp. Além disso, u é a integral de sua derivada e isto garante a existência de $\dfrac{du}{dt}$ qtp em $[0,T]$, [4].*

Antes de iniciarmos a demonstração de um resultado de existência e unicidade de solução para o p.v.i. (P), veremos o seguinte lema:

Lema 2.3 *Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \to H$ um operador não-expansivo (ou seja, Lipschitz com constante menor do que ou igual a 1). Então qualquer que seja $x \in H$, o problema de valor inicial*

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = T(u) - u & 0 \leq t < \infty \\ u(0) = x \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty); H)$. Além disso, a aplicação

$$t \mapsto \| \frac{du}{dt}(t) \|$$

é não crescente.

Demonstração: Note que, multiplicando $\dfrac{du}{dt} = T(u) - u$ por e^{s-t} e integrando de 0 a t obtemos o seguinte problema

$$u(t) \ = \ xe^{-t} + \int_0^t e^{s-t} T(u(s)) ds$$

que é equivalente a (P_1).

Seja T_0 um número positivo fixo, e considere

$$\mathcal{C}_1 = \{u \in \mathcal{C}([0,T_0]; H)\}.$$

Defina

$$\phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$$

dada por

$$\phi(u(t)) \ = \ xe^{-t} + \int_0^t e^{s-t} T(u(s)) ds.$$

Nosso objetivo é aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach em ϕ para obtermos a solução de (P_1).

Mostremos que para todo $u \in \mathcal{C}_1, \phi(u) \in \mathcal{C}_1$.

De fato, observe que u é contínua e como T é não-expansivo, então T é contínuo, segue-se que $e^{s-t}T(u(s))$ é contínua de $[0, T_0]$ em H. Logo, $e^{s-t}T(u(s))$ é Bochner integrável em $[0, T_0]$; para mais detalhes sobre integral de Bochner, veja [16].

Agora note que,

$$\int_0^{T_0} e^{s-t}T(u(s))ds \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_0^{T_0} x_n(s)ds \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n m(A_n)$$

onde $x_n(s)$ é uma função simples, $c_n \in H$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\{A_n\}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis mutuamente disjuntos tais que

$$[0, T_0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ou seja, $\displaystyle\int_0^{T_0} e^{s-t}T(u(s))ds \in H$.

Logo, $\displaystyle\int_0^{t} e^{s-t}T(u(s))ds$ é contínua de $[0, T_0]$ em H. Portanto, $\phi(u(t)) \in \mathcal{C}_1$.

Nosso próximo passo é verificar que $\mathcal{C}_1$ é um espaço métrico completo. Defina em $\mathcal{C}_1$ a norma

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}_1} \colon \mathcal{C}_1 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\| u \|_{\mathcal{C}_1} = \sup_{0\le t\le T_0} \| u(t) \|_H$$

e a partir dessa norma defina a seguinte métrica:

$$d : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$d(u, v) = \| u - v \|_{\mathcal{C}_1}$$

logo $\mathcal{C}_1$ é um espaço métrico.

Resta mostrar que $\mathcal{C}_1$ é completo. Seja $\{u_n\}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}_1$. Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$, $d(u_n, u_m) < \epsilon$, ou seja,

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \| u_n(t) - u_m(t) \| < \epsilon.$$

Assim, para qualquer $t = t_0$ fixo em $[0, T_0]$

$$\| u_n(t_0) - u_m(t_0) \| \leq \sup_{0 \leq t \leq T_0} \| u_n(t) - u_m(t) \| < \epsilon$$

sempre que $n, m > N$.

Logo, $\{u_n(t_0)\}$ é uma seqüência de Cauchy em H, e como H é completo, a seqüência converge, ou seja, existe um $u(t_0)$ tal que

$$u_n(t_0) \to u(t_0)$$

quando $n \to \infty$.

Deste modo, podemos associar a cada $t \in [0, T_0]$ um único elemento de H, $u(t)$. E isto define pontualmente uma função u em $[0, T_0]$. Mostremos que $u \in \mathcal{C}([0, T_0]; H)$ e $u_n \to u$. Sabemos que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > N$ então

$$d(u_n, u_m) = \sup_{t \in [0, T_0]} \| u_n(t) - u_m(t) \| < \epsilon.$$

Fixe n e faça $m \to \infty$. Temos,

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \| u_n(t) - u(t) \| \leq \epsilon$$

sempre que $n > N$. Consequentemente para todo $t \in [0, T_0]$

$$\| u_n(t) - u(t) \| \leq \epsilon$$

sempre que $n > N$.

Isto mostra que $u_n(t)$ converge para $u(t)$ uniformemente em $[0,T_0]$. Como cada u_n é contínua de $[0,T_0]$ e a convergência é uniforme, a função limite, u, é contínua em $[0,T_0]$. Logo, $u \in \mathcal{C}([0,T_0];H)$, e além disso $u_n \to u$. Assim, toda seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}([0,T_0];H)$ converge para um elemento em $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}([0,T_0];H)$, o que prova que $\mathcal{C}_1$ é completo.

Verifiquemos que ϕ é uma contração. De fato,

$$
\begin{aligned}
\| \phi(u(t)) - \phi(v(t)) \| &= \| \int_0^t e^{s-t}(T(u(s)) - T(v(s)))ds \| \\
&\leq \int_0^t e^{s-t} \| T(u(s)) - T(v(s)) \| \, ds \\
&\leq \int_0^t e^{s-t} \| u(s) - v(s) \| \, ds \\
&\leq \| u - v \|_{\mathcal{C}_1} \int_0^t e^{s-t} ds \\
&= (1 - e^{-t}) \| u - v \|_{\mathcal{C}_1} \\
&\leq (1 - e^{-T_0}) \| u - v \|_{\mathcal{C}_1} .
\end{aligned}
$$

E isto implica que

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \| \phi(u(t)) - \phi(v(t)) \| \leq (1 - e^{-T_0}) \| u - v \|_{\mathcal{C}_1}$$

e portanto,

$$\| \phi(u) - \phi(v) \|_{\mathcal{C}_1} \leq (1 - e^{-T_0}) \| u - v \|_{\mathcal{C}_1}$$

para todo $u, v \in \mathcal{C}_1$. Portanto, ϕ é lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $(1 - e^{-T_0}) < 1$.

Agora, como $\mathcal{C}_1$ é um espaço métrico completo, com $\phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ lipschitziana com constante de Lipschitz menor que 1, podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. E assim, concluímos que ϕ possui um único ponto fixo, ou seja, existe um único elemento $u \in \mathcal{C}_1$ tal que

$$u = \phi(u)$$

e isto significa que

$$u(t) = xe^{-t} + \int_0^t e^{s-t} T(u(s))ds$$

e portanto, u é uma solução de (P_1).

Mostremos que $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty); H)$. Com efeito, se u satisfaz (P_1) então $\frac{du}{dt} = T(u) - u \in \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}([0, T_0]; H)$ e como T_0 foi tomado arbitrariamente, segue-se que podemos escolher T_0 tão grande quanto desejarmos, de forma que a solução está globalmente definida e é contínua em seu domínio. Portanto, $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty); H)$.

Resta mostrar que a aplicação

$$t \mapsto \| \frac{du}{dt}(t) \|$$

é não-crescente.

Tínhamos $\frac{du}{dt} = Tu - u$ o que é equivalente a

$$\frac{d}{ds}(e^{s-t}u(s)) = e^{s-t}T(u(s)).$$

Integrando de s a t e depois de $s + h$ a $t + h$, onde $0 \leq s < t$, obtemos,

$$\begin{aligned} \| u(t+h) - u(t) \|_H &= \| e^{s-t}[u(s+h) - u(s)] \\ &+ \int_s^t e^{\tau - t}[T(u(\tau + h)) - T(u(\tau))]d\tau \|_H . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\| u(t+h) - u(t) \|_H \\ \leq \ & e^{s-t} \| u(s+h) - u(s) \|_H + \int_s^t e^{\tau - t} \| T(u(\tau + h)) - T(u(\tau)) \|_H \, d\tau \\ \leq \ & e^{s-t} \| u(s+h) - u(s) \|_H + \int_s^t e^{\tau - t} \| u(\tau + h)) - u(\tau) \|_H \, d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^t \| u(t+h) - u(t) \|_H \leq e^s \| u(s+h) - u(s) \|_H + \int_s^t e^{\tau} \| u(\tau+h) - u(\tau) \|_H \, d\tau.$$

Agora podemos aplicar o Lema de Gronwall-Bellman 1.1, e então obtemos

$$e^t \parallel u(t+h) - u(t) \parallel_H \leq \; e^s \parallel u(s+h) - u(s) \parallel_H e^{\int_s^t ds}$$

o que implica

$$e^t \parallel u(t+h) - u(t) \parallel_H \leq \; e^t \parallel u(s+h) - u(s) \parallel_H .$$

Portanto,

$$\parallel u(t+h) - u(t) \parallel_H \leq \parallel u(s+h) - u(s) \parallel_H .$$

Como s foi tomado arbitrariamente de modo que $0 \leq s < t$, então podemos dizer que

$$\parallel u(t+h) - u(t) \parallel_H \leq \parallel u(s+h) - u(s) \parallel_H$$

para todo $0 \leq s < t \leq T_0$. Dividindo por h e tomando o limite quando $h \to 0$ obtemos,

$$\parallel \frac{du}{dt}(t) \parallel \leq \parallel \frac{du}{dt}(s) \parallel$$

sempre que $0 \leq s < t$.

Portanto, a aplicação

$$t \mapsto \parallel \frac{du}{dt}(t) \parallel$$

é não-crescente. ∎

Passaremos agora às demonstrações dos principais resultados:

Proposição 2.5 *Seja A um operador monótono. Então o p.v.i.*

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

tem no máximo uma solução.

Demonstração: Sejam u e v soluções tais que $u(0) = x$ e $v(0) = y$.

Então existem $\eta(t) \in Au(t)$ e $\xi(t) \in Av(t)$ tais que

$$\frac{du}{dt} + \eta = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{dv}{dt} + \xi = 0, \qquad qtp \text{ em } [0, \infty).$$

Assim,

$$\frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} + \eta - \xi = 0, \qquad qtp \text{ em } [0, \infty).$$

Fazendo o produto interno desta equação com $u - v$, temos

$$\left\langle \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} + \eta - \xi, u - v \right\rangle = 0, \qquad qtp \text{ em } [0, \infty).$$

$$\left\langle \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt}, u - v \right\rangle + \langle \eta - \xi, u - v \rangle = 0, \qquad qtp \text{ em } [0, \infty).$$

Como A é monótono e $\eta(t) \in Au(t)$ e $\xi(t) \in Av(t)$, então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u - v \parallel^2 \leq 0 \qquad qtp \text{ em } [0, \infty).$$

Integrando de 0 a t, temos

$$\parallel u(t) - v(t) \parallel \leq \parallel u(0) - v(0) \parallel .$$

Note que se u e v são soluções de (P), então $u(0) = x = y = v(0)$. E assim, $\parallel u(t) - v(t) \parallel = 0$ o que implica que

$$u(t) = v(t)$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Portanto, se A é monótono, (P) tem no máximo uma solução. ∎

Corolário 2.1 *Seja A um operador monótono. Suponha que u é solução do p.v.i. (P). Então a aplicação*

$$t \mapsto \parallel \frac{d}{dt} u(t) \parallel$$

é não-crescente.

Demonstração: Observe que se u é solução de (P) então $\dfrac{du}{dt}$ pode não estar definido em um conjunto de medida nula. Sejam $s, t, h > 0$ tais que u é diferenciável em s e em $s+t$. Sejam u e v duas soluções, como na Proposição 2.5, tais que $y = u(s+h)$ e $x = u(s)$.

Então,

$$\| u(s+t+h) - u(s+t) \| \leq \| y - x \| = \| u(s+h) - u(s) \| .$$

Dividindo por h e fazendo $h \to 0$ e lembrando que u é diferenciável em $t+s$ e em s, obtemos

$$\| \frac{d}{dt} u(s+t) \| \leq \| \frac{d}{dt} u(s) \| .$$

Portanto, a aplicação

$$t \mapsto \| \frac{d}{dt} u(t) \|$$

é não-crescente. ■

Passaremos agora à questão de existência de solução do p.v.i. (P). Comecemos com o seguinte lema:

Lema 2.4 *Seja* $\{x_n\}$ *uma seqüência em* H *e seja* $\{\lambda_n\}$ *uma seqüência de números reais positivos tal que*

$$\langle x_n - x_m, \lambda_n x_n - \lambda_m x_m \rangle \leq 0.$$

Então:

(i) Se $\lambda_n \uparrow$ *(cresce monotonicamente), então* $\| x_n \| \downarrow$ *(decresce monotonicamente) e* $\lim_{n \to \infty} x_n$ *existe.*

(ii) Se $\lambda_n \downarrow$ *(decresce monotonicamente), então* $\| x_n \| \uparrow$ *(cresce monotonicamente) e se também* $\| x_n \|$ *é limitada, então* $\lim_{n \to \infty} x_n$ *existe.*

Demonstração: Note que

$$2\langle x_n - x_m, \lambda_n x_n - \lambda_m x_m\rangle =$$

$$(\lambda_n + \lambda_m) \parallel x_n - x_m \parallel^2 + (\lambda_n - \lambda_m)(\parallel x_n \parallel^2 - \parallel x_m \parallel^2).$$

Como, por hipótese

$$\langle x_n - x_m, \lambda_n x_n - \lambda_m x_m\rangle \leq 0$$

segue que

$$(\lambda_n + \lambda_m) \parallel x_n - x_m \parallel^2 + (\lambda_n - \lambda_m)(\parallel x_n \parallel^2 - \parallel x_m \parallel^2) \leq 0$$

o que implica que

$$(\lambda_n - \lambda_m)(\parallel x_n \parallel^2 - \parallel x_m \parallel^2) \leq 0.$$

(i) Seja $m > n$, e suponha que $\lambda_n \uparrow$, então $\lambda_m > \lambda_n$ e então $\parallel x_m \parallel < \parallel x_n \parallel$, portanto, $\parallel x_n \parallel \downarrow$. Note que neste caso $\parallel x_n \parallel < \parallel x_1 \parallel$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \parallel x_n \parallel$ existe, pois toda seqüência monótona limitada em $\mathbb{R}$ converge.

(ii) Seja $m > n$ e suponha que $\lambda_n \downarrow$, então $\lambda_m < \lambda_n$ e portanto $\parallel x_m \parallel > \parallel x_n \parallel$. Logo, $\parallel x_n \parallel \uparrow$. Como $\parallel x_n \parallel$ é limitada, por hipótese, temos que $\parallel x_n \parallel$ converge.

Agora, note que

$$\parallel x_n - x_m \parallel^2 \leq \left|\frac{\lambda_m - \lambda_n}{\lambda_m + \lambda_n}\right| \quad | \parallel x_n \parallel^2 - \parallel x_m \parallel^2| \to 0$$

quando $n, m \to \infty$, pois, $\parallel x_n \parallel$ converge e $\left|\dfrac{\lambda_m - \lambda_n}{\lambda_m + \lambda_n}\right| < 1$. Logo $\{x_n\}$ forma uma seqüência de Cauchy em H, mas H é Hilbert, logo completo e portanto $\{x_n\}$ converge. ■

Finalmente, enunciaremos e demonstraremos nosso principal resultado.

Teorema 2.2 *Seja A um operador maximal monótono. Dado $T > 0$, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ o p.v.i.*

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

tem uma solução em $[0, T]$.

Demonstração: Sejam $T > 0$, $\lambda > 0$ e A_λ a aproximação de Yosida de A. Pelo Lema 2.3, o problema

$$(P')\begin{cases} \dfrac{dv_\lambda}{dt} = J_\lambda v_\lambda - v_\lambda \\ v_\lambda(0) = x \end{cases}$$

tem uma única solução, pois o resolvente $J_\lambda : H \to H$ é não-expansivo e como A é maximal monótono $\mathcal{D}(J_\lambda) = H$. Seja $v_\lambda \in \mathcal{C}^1([0, T]; H)$ a solução de (P').

Considere agora o seguinte problema:

$$(P_\lambda)\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = x \end{cases}$$

Defina $u_\lambda(t) := v_\lambda\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)$, e observe que u_λ é uma solução de (P_λ). Além disso a aplicação

$$t \mapsto \parallel \frac{d}{dt} u_\lambda(t) \parallel$$

é não-crescente.

Logo,

$$\parallel A_\lambda u_\lambda(t) \parallel \leq \parallel A_\lambda u_\lambda(0) \parallel = \parallel A_\lambda x \parallel \leq \parallel A^0 x \parallel .$$

A partir de agora demonstraremos o teorema em três passos.

Passo 1: Neste passo mostraremos que no espaço $\mathcal{C}([0, T]; H)$, $\{u_\lambda\}$ forma uma seqüência de Cauchy. Sejam $\lambda, \mu > 0$ e seja $t \in [0, T]$. Então,

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{du_\mu}{dt} + A_\mu u_\mu = 0$$

e portanto,

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0.$$

Fazendo o produto interno com $u_\lambda(t) - u_\mu(t)$ temos:

$$\left\langle \frac{d}{dt}u_\lambda(t) - \frac{d}{dt}u_\mu(t) + A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t) \right\rangle = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 = -\langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle.$$

Integrando de 0 a t e lembrando que $u_\lambda(0) = u_\mu(0) = x$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 \\
= & \int_0^t -\langle A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s), u_\lambda(s) - u_\mu(s)\rangle ds \\
= & \int_0^t -\langle A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s), u_\lambda(s) - J_\lambda u_\lambda(s) \\
+ & J_\lambda u_\lambda(s) - J_\mu u_\mu(s) + J_\mu u_\mu(s) - u_\mu(s)\rangle ds \\
\leq & \int_0^t -\langle A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s), \lambda A_\lambda u_\lambda(s) - \mu A_\mu u_\mu(s)\rangle ds \\
\leq & \int_0^t \parallel A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s) \parallel \parallel \lambda A_\lambda u_\lambda(s) - \mu A_\mu u_\mu(s) \parallel ds \\
\leq & \int_0^t (\parallel A_\lambda u_\lambda(s) \parallel + \parallel A_\mu u_\mu(s) \parallel)(\lambda \parallel A_\lambda u_\lambda(s) \parallel + \mu \parallel A_\mu u_\mu(s) \parallel) ds \\
\leq & \int_0^t (\parallel A^0 x \parallel + \parallel A^0 x \parallel)(\lambda \parallel A^0 x \parallel + \mu \parallel A^0 x \parallel) ds \\
= & \ 2 \parallel A^0 x \parallel^2 (\lambda + \mu) t.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel \leq \ 2 \parallel A^0 x \parallel (\lambda + \mu)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}$$

Tomando o sup em $t \in [0, T]$, temos:

$$\parallel u_\lambda - u_\mu \parallel \leq \ 2 \parallel A^0 x \parallel (\lambda + \mu)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \to 0$$

quando $\lambda, \mu \to 0$.

Portanto, $\{u_\lambda\}$ forma uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}([0,T];H)$, com $u_\lambda(0) = x$, para todo $\lambda > 0$. Como $\mathcal{C}([0,T];H)$ é um espaço métrico completo temos que existe $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ tal que $u_\lambda \to u$ com relação à norma em $\mathcal{C}([0,T];H)$ e $u(0) = x$.

Por outro lado, como u_λ é solução de (P_λ) então u_λ é Lipschitz contínua em $[0,T]$, e com constante de Lipschitz igual a $\| A^0x \|$. De fato, para todo $s,t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \| u_\lambda(t) - u_\lambda(s) \| &= \| \int_s^t \frac{d}{d\tau} u_\lambda(\tau) d\tau \| \\ &\leq \int_s^t \| A_\lambda u_\lambda(\tau) \| d\tau \\ &\leq \int_s^t \| A^0x \| d\tau = \| A^0x \| | t-s | . \end{aligned}$$

Logo, u_λ é Lipschitz contínua em $[0,T]$ com constante $\| A^0x \|$. E tomando o limite quando $\lambda \to 0$, temos que u é Lipschitz contínua em $[0,T]$, com constante de Lipschitz igual a $\| A^0x \|$.

Passo 2: Mostraremos que para cada $t \in [0,T]$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$.

Note que

$$u_\lambda(t) = J_\lambda u_\lambda(t) + \lambda A_\lambda u_\lambda(t)$$

para todo $t \in [0,T]$.

Portanto,

$$\| u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t) \| = \| \lambda A_\lambda u_\lambda(t) \| \leq \lambda \| A^0x \| \to 0$$

quando $\lambda \to 0$.

Como $u_\lambda \to u$ segue que $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ uniformemente em t quando $\lambda \to 0$.

Além disso, sendo $\| A_\lambda u_\lambda(t) \| \leq \| A^0x \|$, então para cada t fixo, existe uma seqüência $\{\lambda_n\}$ de números reais positivos e $v(t) \in H$ tal que $\lambda_n \to 0$ e $A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup v(t)$.

Por outro lado temos que

$$(J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t), A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t)) \in A$$

para cada λ_n, e como

$$J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \to u(t) \qquad \text{e} \qquad A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup v(t)$$

segue-se que

$$\langle A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) - \eta, J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) - \xi \rangle \to \langle v(t) - \eta, u(t) - \xi \rangle$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$. Logo,

$$\langle v(t) - \eta, u(t) - \xi \rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$. Como A é maximal monótono, então $(u(t), v(t)) \in A$.

Portanto, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ e $v(t) \in Au(t)$ para cada $t \in [0, T]$.

Passo 3: Neste passo mostraremos que u é solução de (P), ou seja, que u satisfaz $\dfrac{du}{dt} + Au \ni 0$ qtp em $[0, T]$.

Do Passo 1 segue que

$$\frac{1}{2} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 \leq -\int_0^t \langle A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s), \lambda A_\lambda u_\lambda(s) - \mu A_\mu u_\mu(s) \rangle ds$$

então

$$\int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s), \lambda A_\lambda u_\lambda(s) - \mu A_\mu u_\mu(s) \rangle ds \;\leq\; 0.$$

Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0, T; H)$. Mostremos que $\{A_\lambda u_\lambda\} \subset \mathcal{H}$. De fato, é fácil ver que

$$\parallel A_\lambda u_\lambda \parallel_{\mathcal{H}} \leq \parallel A^0 x \parallel_H T^{\frac{1}{2}}.$$

Tome $\{\lambda_n\}$ uma seqüência de números reais positivos monotonicamente decrescente. Vimos no Passo 2, que para cada t fixo, existe uma subseqüência $\{\lambda_{n_k}\} \subset \{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_{n_k} \to 0$ e $A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(t) \rightharpoonup v(t)$, para algum $v(t) \in H$.

Agora note que

$$
\begin{aligned}
& \langle A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}} - A_{\lambda_{n_{k'}}} u_{\lambda_{n_{k'}}}, \lambda_{n_k} A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}} - \lambda_{n_{k'}} A_{\lambda_{n_{k'}}} u_{\lambda_{n_{k'}}} \rangle_{\mathcal{H}} \\
= \quad & \int_0^T \langle A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(s) - A_{\lambda_{n_{k'}}} u_{\lambda_{n_{k'}}}(s),\ \lambda_{n_k} A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(s) \\
- \quad & \lambda_{n_{k'}} A_{\lambda_{n_{k'}}} u_{\lambda_{n_{k'}}}(s) \rangle_H ds \ \leq \ 0.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema 2.4, $\{A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}\}$ converge em $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$. Seja $w \in \mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ o limite de $A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}$.

Então existe uma subseqüência $\{\lambda_j\} \subset \{\lambda_{n_k}\}$ tal que

$$A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(t) \to w(t)$$

qtp em $[0,T]$, quando $\lambda_j \to 0$, e ainda existe $g \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ tal que

$$\| A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(t) \| \leq g(t)$$

qtp em $[0,T]$, veja Teorema 1.8.

Assim,

$$A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(t) \to v(t)$$

qtp em $[0,T]$.

Seja $t \in [0,T)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in [0,T]$. Como u_λ é Lipschitz contínua em $[0,T]$, então u_λ é derivável *qtp* e u_λ é a integral de sua derivada. Logo,

$$
\begin{aligned}
u_{\lambda_j}(t+h) - u_{\lambda_j}(t) &= \int_t^{t+h} \frac{d}{ds} u_{\lambda_j}(s) ds \\
&= \int_t^{t+h} -A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(s) ds \\
&= -\int_t^{t+h} A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(s) ds
\end{aligned}
$$

para todo t em $[0,T]$.

Observe que $A_{\lambda_j} u_{\lambda_j} \in \mathcal{H}$ para todo j e $g \in L^2(0,T;\mathbb{R})$. Logo, $A_{\lambda_j} u_{\lambda_j} \in L^1(0,T;H)$ e além disso, $g \in L^1(0,T;\mathbb{R})$. E ainda,

$$\| A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(t) \| \leq \ g(t)$$

para todo j e qtp em $[0,T]$.

Então pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.14), fazendo $\lambda_j \downarrow 0$ temos

$$u(t+h) - u(t) = -\int_t^{t+h} v(s)ds,$$

para todo t em $[0,T]$; logo,

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} v(s)ds \to -v(t),$$

quando $h \to 0$.

Assim concluímos que,

$$\frac{d}{dt}u(t) = -v(t)$$

qtp em $[0,T]$.

Mas vimos no Passo 2 que $v(t) \in Au(t)$ qtp em $[0,T]$. Assim,

$$\frac{d}{dt}u(t) \in -Au(t)$$

qtp em $[0,T]$.

Portanto u satisfaz

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0$$

qtp em $[0,T]$, e isto completa a demonstração do teorema. ■

O próximo teorema traz algumas propriedades da solução do p.v.i. (P).

Teorema 2.3 *Seja u a solução do p.v.i. (P)*

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Então:

(i) $\| A^0u(t) \|$ *é não-crescente em* t*;*

(ii) $A^0u(t)$ *é contínua à direita;*

(iii) $u(t)$ *é diferenciável à direita em* $[0,T)$ *e*

$$\frac{d^+}{dt}u(t) + A^0u(t) = 0$$

para todo $t \in [0,T)$*.*

Demonstração: (i) Sabemos que $\| A_\lambda u_\lambda(t) \| \leq \| A^0x \|$, para todo $t \in [0,T]$. Assim, existe alguma seqüência $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \downarrow 0$ tal que

$$A_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup v(t)$$

para algum $v(t) \in H$.

Como no Passo 2 da demonstração anterior,

$$v(t) \in Au(t)$$

para todo $t \in [0,T]$, e então

$$\| A^0u(t) \| \leq \| v(t) \| \leq \liminf_{\lambda_n \downarrow 0} \| A_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t) \| \leq \| A^0x \|$$

e a desigualdade acima ocorre para qualquer $x \in \mathcal{D}(A)$, e em particular ocorre para $x = u(s)$.

Logo,

$$\| A^0u(t+s) \| \leq \| A^0u(s) \|$$

para todo $t, s \geq 0$ e $t + s \in [0,T]$. Portanto, $\| A^0u(t) \|$ é não-crescente em t.

(ii) Queremos mostrar que $A^0u(t)$ é contínua à direita.

Seja $t \in [0,T)$ e seja $\{t_n\}$ uma seqüência de números reais positivos tal que $t < t_n \leq T$ e $t_n \to t$. Como $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ então

$$u(t_n) \to u(t).$$

Do item (i) segue que

$$\| A^0u(t_n) \| \leq \| A^0u(t) \| \leq \| A^0x \| .$$

Assim, $\{A^0u(t_n)\}$ é uma seqüência limitada em H e existe uma subseqüência $\{t_j\} \subset \{t_n\},\ t_j \downarrow t$ tal que

$$A^0u(t_j) \rightharpoonup w$$

para algum $w \in H$.

Como A é fortemente fracamente fechado, $w \in Au(t)$. Logo, $\| w \| \geq \| A^0u(t) \|$.

Mas w é limite fraco de $A^0u(t_j)$. Assim,

$$\| w \| \leq \liminf_{t_j \downarrow t} \| A^0u(t_j) \| \leq \| A^0u(t) \| .$$

Portanto,

$$\| w \| = \| A^0u(t) \| .$$

E como o elemento de norma mínima em $Au(t)$ é único, segue-se que $w = A^0u(t)$ e

$$A^0u(t_n) \rightharpoonup A^0u(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \| A^0u(t) \| &\leq \liminf_{t_n \downarrow t} \| A^0u(t_n) \| &\leq \limsup_{t_n \downarrow t} \| A^0u(t_n) \| \\ &\leq \limsup_{t_n \downarrow t} \| A^0u(t) \| &= \| A^0u(t) \| . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\| A^0u(t_n) \| \rightarrow \| A^0u(t) \| .$$

Logo,

$$A^0u(t_n) \rightarrow A^0u(t)$$

quando $t_n \downarrow t$. Portanto, $A^0 u(t)$ é contínua à direita.

(iii) Mostremos que $u(t)$ é diferenciável à direita em $[0, T)$ e

$$\frac{d^+}{dt} u(t) + A^0 u(t) = 0$$

para todo $t \in [0, T)$.

Do Passo 3 da demonstração anterior segue que existe uma seqüência $\{\lambda_j\}$ de números reais positivos tal que $\lambda_j \downarrow 0$ e $A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(t) \rightarrow v(t)$ *qtp* em $[0, T]$ para algum $v(t) \in Au(t)$.

Como

$$\| A_{\lambda_j} u_{\lambda_j}(t) \| \leq \| A^0 x \|$$

para todo $t \in [0, T]$ então

$$\| v(t) \| \leq \| A^0 x \|$$

para todo $t \in [0, T]$.

Também do Passo 3 segue que

$$\frac{u(h) - x}{h} = -\frac{1}{h} \int_0^h v(s) ds.$$

Assim, sendo $v(t)$ limitada, podemos encontrar uma seqüência de números reais positivos $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow 0$, e $v(t_n) \rightharpoonup w$ para algum $w \in H$.

Como $u(t_n) \rightarrow x$ quando $t_n \downarrow 0$ e $v(t_n) \in Au(t_n)$, e A é fortemente fracamente fechado vem que $w \in Ax$, e portanto

$$\| w \| \geq \| A^0 x \| .$$

Mas w é limite fraco de $v(t_n)$. Logo,

$$\| w \| \leq \liminf_{t_n \downarrow 0} \| v(t_n) \| \leq \liminf_{t_n \downarrow 0} \| A^0 x \| = \| A^0 x \|$$

e portanto,

$$\| w \| = \| A^0 x \| .$$

Assim podemos concluir que w é o elemento de norma mínima em Ax, e

$$v(t_n) \rightharpoonup A^0x.$$

Além disso,

$$\| A^0x \| \leq \liminf_{t_n \downarrow 0} \| v(t_n) \| \leq \limsup_{t_n \downarrow 0} \| v(t_n) \| \leq \| A^0x \| .$$

Portanto,

$$\lim_{t_n \downarrow 0} \| v(t_n) \| = \| A^0x \| .$$

Logo, como $v(t_n) \to A^0x$, quando $t_n \to 0$, temos:

$$\frac{u(t_n+h)-u(t_n)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_n+h} v(s)ds \xrightarrow{h\downarrow 0} v(t_n) \xrightarrow{t_n \downarrow 0} A^0x$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Em particular, para $x = u(t)$ temos:

$$\frac{d^+}{dt}u(t) = -A^0u(t)$$

para todo $t \in [0,T)$, o que mostra que $u(t)$ é diferenciável à direita em $[0,T)$ e

$$\frac{d^+}{dt}u(t) + A^0u(t) = 0$$

para todo $t \in [0,T)$. ■

Observação 2.2 *É interessante notar que a inclusão* $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ *é satisfeita apenas qtp em* $[0,T]$*. Porém, quando passamos para a equação* $\frac{d^+}{dt}u(t) + A^0u(t) = 0$*, temos que ela é satisfeita para todo* $t \in [0,T]$*.*

2.4.2 O Semigrupo gerado por um conjunto maximal monótono em um espaço de Hilbert

Definição 2.3 *Seja* C *um subconjunto fechado de* H*. Um semigrupo de contrações em* C *é uma função* $S : [0,\infty) \times C \to C$ *a qual satisfaz:*

(i) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, *para todo* $x \in C$ *e para todo* $t, s \geq 0$;

(ii) $S(0)x = x$, *para todo* $x \in C$;

(iii) *Para todo* $x \in C$, $S(t)x$ *é contínua em* $t \geq 0$;

(iv) $\| S(t)x - S(t)y \| \leq \| x - y \|$, *para todo* $t \geq 0$ *e para todo* $x, y \in C$.

Seja A maximal monótono e $x \in \mathcal{D}(A)$. Pelo Teorema 2.2 existe uma solução $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ para o p.v.i.

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Podemos definir uma família de aplicações em $\mathcal{D}(A)$ da seguinte forma:

$$S(t)x = u(t)$$

para todo $t \geq 0$ onde $u(t)$ é solução do p.v.i. (P).

A unicidade da solução do p.v.i. (P) garante a propriedade de semigrupo. De fato, se u é a solução que começou em u_0 e $\overline{u}$ é a solução que começou em $u(s)$, então pela unicidade de solução temos

$$u(t+s) = \overline{u}(t)$$

pois

$$\| u(t+s) - \overline{u}(t) \| \leq \| u(s) - \overline{u}(0) \| = 0$$

ou seja,

$$u(t+s, x, u_0) = \overline{u}(t, x, \overline{u}_0) = \overline{u}(t, x, u(s)) = u(t, x, u(s, x, u_0))$$

e em notação de semigrupo:

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0.$$

A continuidade do semigrupo segue diretamente de u pertencer a $\mathcal{C}([0,T];H)$. Além disso temos que o semigrupo é de contrações. Com efeito,

$$\| S(t)x - S(t)y \| = \| u(t) - v(t) \| \leq \| x - y \|$$

onde u e v são soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av \ni 0 \\ v(0) = y \end{cases}$$

respectivamente.

Logo $\{S(t); t \geq 0\}$ forma um semigrupo de contrações em $\mathcal{D}(A)$. Vamos estender o semigrupo por continuidade à todo o fecho do domínio de A, $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Assim, se $x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \backslash \mathcal{D}(A)$, então existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos em $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{H} x$.

Definimos,

$$S(t)x = \lim_{n \to \infty} S(t)x_n.$$

Este limite certamente existe, desde que $\{S(t)x_n\}$ forma uma seqüência de Cauchy:

$$\| S(t)x_n - S(t)x_m \| \leq \| x_n - x_m \|$$

que é de Cauchy, pois x_n converge.

Note que quando estendido à $\overline{\mathcal{D}(A)}$, o semigrupo é ainda contínuo em t, e é ainda um semigrupo de contrações. De fato, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então

$$\| S(t)x_n - S(t)y_n \| \leq \| x_n - y_n \|$$

o que implica em

$$\| S(t)x - S(t)y \| \leq \| x - y \|$$

e portanto é contração.

Agora, observe que $x_n \to x$ implica em $S(t)x_n \to S(t)x$ uniformemente, pois

$$\| S(t)x_n - S(t)x \| \leq \| x_n - x \| \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Logo dado $x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \backslash \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$, $t_0 > 0$ fixo e $\epsilon > 0$, sejam $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| S(t)x - S(t)x_m \| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

em algum intervalo de tempo $[0, T]$ suficientemente grande e $t \in [0, T]$ tal que

$$\| S(t)x_m - S(t_0)x_m \| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

então

$$\begin{aligned} \| S(t)x - S(t_0)x \| &\leq \| S(t)x - S(t)x_m \| \\ &+ \| S(t)x_m - S(t_0)x_m \| + \| S(t_0)x_m - S(t_0)x \| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto o semigrupo estendido à $\overline{\mathcal{D}(A)}$ é contínuo em t.

Concluímos assim que para todo conjunto maximal monótono A, em um espaço de Hilbert H, existe um semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ de contrações definido em $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Dizemos que o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ é gerado por A. É interessante lembrar que $\overline{\mathcal{D}(A)}$ é um convexo fechado em H.

2.4.3 Semigrupos Compactos

Uma classe especial de semigrupos que aparece frequentemente em aplicações é a de semigrupos compactos, isto é, a classe de todos os semigrupos

$\{S(t); S(t) : C \to C, t \geq 0\}$ contendo apenas operadores compactos não expansivos para cada $t > 0$, e onde C é um subconjunto não vazio em um espaço de Banach real X.

Definição 2.4 *Um operador $T : C \subset X \to X$ é compacto se ele é contínuo e leva subconjuntos limitados de C em subconjuntos relativamente compactos em X.*

Lema 2.5 *Se $\{T_i\}_{i \in I}$ é uma seqüência generalizada de operadores de $C \subset X$ em X, que levam subconjuntos limitados de C em subconjuntos relativamente compactos em X, e se $\lim_i T_i = T$ uniformemente em subconjuntos limitados em C e além disso T é contínuo, então $T : C \subset X \to X$ é compacto.*

Demonstração: Note que para mostrarmos que T é compacto basta mostrarmos que T leva subconjuntos limitados de C em subconjuntos relativamente compactos em X.

Como um subconjunto em um espaço de Banach real é relativamente compacto se e somente se ele é precompacto, então devemos mostrar que $T(M)$ é precompacto em X sempre que M é limitado em C.

Sejam M um subconjunto limitado em C, e $\epsilon > 0$ arbitrário. Escolha $i(\epsilon, M) \in I$ tal que

$$\| T_i x - T x \| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para cada $i \in I$, $i \geq i(\epsilon, M)$ e uniformemente para $x \in M$.

Fixe $i \geq i(\epsilon, M)$, e observe que $T_i(M)$ é precompacto em X pois T_i leva limitados em relativamente compactos e M é limitado.

Logo existe uma família finita $\{x_1, x_2, ..., x_{n(i,\epsilon)}\}$ em X tal que

$$T_i(M) \subset \bigcup_{k=1}^{n(i,\epsilon)} \overline{B\left(x_k, \frac{\epsilon}{2}\right)}.$$

Agora, seja $x \in M$ arbitrário. Em virtude da inclusão acima, existe $k \in \{1, 2, ..., n(i, \epsilon)\}$ tal que

$$\| T_i x - x_k \| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como

$$\| Tx - x_k \| \leq \| Tx - T_i x \| + \| T_i x - x_k \| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e x foi tomado arbitrariamente em M, então

$$T_i(M) \subset \bigcup_{k=1}^{n(i,\epsilon)} \overline{B(x_k, \epsilon)}.$$

Mas $n(i, \epsilon)$ depende apenas de ϵ e M, e assim, para cada $\epsilon > 0$, $T(M)$ pode ser coberto por uma união finita de bolas fechadas com raio ϵ.

Consequentemente $T(M)$ é precompacto em X e portanto T é compacto. ■

Definição 2.5 *Um semigrupo $\{S(t); S(t) : C \to C, t \geq 0\}$ de aplicações não expansivas em $C \subset X$ é compacto se para cada $t > 0$, $S(t)$ é um operador compacto.*

Observação 2.3 *Note que se $S(t)$ é compacto para $t \geq 0$, então visto que $S(0)$ é a identidade em C, segue que C está compactamente imerso em X.*

Definição 2.6 *Um semigrupo de aplicações não expansivas $\{S(t); S(t) : C \to C, t \geq 0\}$ em $C \subset X$ é equicontínuo se para cada subconjunto limitado M em C, a família de funções $\{S(\cdot)x; x \in M\}$ é equicontínua em cada $t > 0$.*

2.4.4 Resolução da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$

Definição 2.7 *Seja A um operador de H e $f \in L^1(0, T; H)$. Chamamos de solução forte da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ à toda função $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$*

absolutamente contínua sobre todo compacto de $(0,T)$ *tal que* $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *e* $\dfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni f(t)$ *qtp em* $(0,T)$.

Definição 2.8 *Dizemos que* $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ *é solução fraca da inclusão* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *se existem seqüências* $f_n \in L^1(0,T;H)$ *e* $u_n \in \mathcal{C}([0,T];H)$ *tais que* u_n *é solução forte da inclusão*

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$$

e $f_n \to f$ *em* $L^1(0,T;H)$ *e* $u_n \to u$ *uniformemente em* $[0,T]$.

Teorema 2.4 *Seja* A *um operador maximal monótono em* H. *Para toda* $f \in L^1(0,T;H)$ *e todo* $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, *existe uma solução fraca única,* u, *da inclusão* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *tal que* $u(0) = u_0$.

Demonstração: Unicidade: Sejam $f, g \in L^1(0,T;H)$ e sejam u, v soluções fracas das inclusões $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ e $\dfrac{dv}{dt} + Av \ni g$, respectivamente. Então existem sequências $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em $L^1(0,T;H)$ e as soluções fortes u_n, v_n das inclusões $\dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ e $\dfrac{dv_n}{dt} + Av_n \ni g_n$ convergem para $u, v \in H$, uniformemente em $[0,T]$.

Assim, $f_n - \dfrac{du_n}{dt} \in Au_n$ e $g_n - \dfrac{dv_n}{dt} \in Av_n$ e pela monotonicidade de A

$$\left\langle f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t) - g_n(t) + \frac{dv_n}{dt}(t), u_n(t) - v_n(t) \right\rangle \geq 0$$

logo,

$$\langle f_n(t) - g_n(t), u_n(t) - v_n(t) \rangle - \left\langle \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{dv_n}{dt}(t), u_n(t) - v_n(t) \right\rangle \geq 0$$

e isto implica em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u_n(t) - v_n(t) \parallel^2 &\leq \langle f_n(t) - g_n(t), u_n(t) - v_n(t) \rangle \\ &\leq \parallel f_n(t) - g_n(t) \parallel \parallel u_n(t) - v_n(t) \parallel . \end{aligned}$$

Integrando de s a t, $0 \leq s < t$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \parallel u_n(t) - v_n(t) \parallel^2 \quad &\leq \quad \frac{1}{2} \parallel u_n(s) - v_n(s) \parallel^2 \\
&+ \quad \int_s^t \parallel f_n(\tau) - g_n(\tau) \parallel\parallel u_n(\tau) - v_n(\tau) \parallel d\tau.
\end{aligned}$$

Usando Gronwall, temos

$$\parallel u_n(t) - v_n(t) \parallel \leq \parallel u_n(s) - v_n(s) \parallel + \int_s^t \parallel f_n(\tau) - g_n(\tau) \parallel d\tau$$

e agora tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\parallel u(t) - v(t) \parallel \leq \parallel u(s) - v(s) \parallel + \int_s^t \parallel f(\tau) - g(\tau) \parallel d\tau.$$

No caso particular em que $s = 0$, $u(0) = u_0 = v(0)$ e $f = g$, obtemos

$$u(t) = v(t)$$

para todo t. Portanto, $u = v$, ou seja, se a solução fraca existe, ela é única.

Existência: Suponhamos primeiramente que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e que f é uma função escada definida em uma partição

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = T$$

por $f = y_i$ em $[a_{i-1}, a_i)$, e onde y_i é um elemento de H.

Denotamos por $S_i(t)$ o semigrupo gerado pelo operador maximal monótono, $A - y_i$ dado por $(A - y_i)x = Ax - y_i$, com $x \in \mathcal{D}(A)$. Definimos $u(t)$ por

$$u(0) = u_0$$

$$u(t) = S_1(t)u_0$$

se $t \in [0, a_1]$, e

$$u(t) = S_2(t - a_1)u(a_1)$$

se $t \in [a_1, a_2]$, e procedendo assim temos que para $t \in [a_{i-1}, a_i]$,

$$u(t) = S_i(t - a_{i-1})u(a_{i-1})$$

Então u é solução forte da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$.

Faremos agora um resultado de existência para o caso mais geral em que $f \in L^1(0, T; H)$ e $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Então existe uma seqüência $\{f_n\}$ de funções escada em $[0, T]$ tal que $f_n \to f$ em $L^1(0, T; H)$, e existe $u_{0_n} \in \mathcal{D}(A)$ tal que $u_{0_n} \to u_0$ em H.

Seja u_n solução forte da inclusão

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n \\ u_n(0) = u_{0_n} \end{cases}$$

Como na unicidade , obtemos

$$\| u_n(t) - u_m(t) \| \leq \| u_{0_n} - u_{0_m} \| + \int_0^t \| f_n(\tau) - f_m(\tau) \| \, d\tau$$

para $t \in [0, T]$.

Portanto, u_n converge uniformemente para uma função contínua u tal que $u(0) = u_0$ a qual é uma solução fraca da inclusão

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f.$$

■

Corolário 2.2 *Seja A um operador maximal monótono em H e u e v as soluções em $[0, T]$ de*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av \ni g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

respectivamente. Então:

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \| u(s) - v(s) \| + \int_s^t \| f(\tau) - g(\tau) \| \, d\tau$$

para todo $0 \leq s < t \leq T$.

A proposição a seguir é extremamente importante na demonstração do nosso principal resultado.

Proposição 2.6 *Sejam A um operador maximal monótono, $u \in C([0,T];H)$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Então u é solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ se e somente se u verifica*

$$\frac{1}{2} \parallel u(t) - x \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel u(s) - x \parallel^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle d\tau$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $y \in Ax$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

(Proposição 3.6, p. 70, [6]).

2.5 O Operador p-Laplaciano

Segundo Browder [8] e Minty [15] se V é um espaço de Banach reflexivo e V' é o seu dual, e H é um espaço de Hilbert, com $V \subset H \subset V'$ com imersões contínuas e densas, $A : V \to V'$ é um operador monótono, unívoco, definido em todo V, hemicontínuo e coercivo, então o operador A_H, restrição de A à H, definido por

$$\mathcal{D}(A_H) = \{u \in V; Au \in H\}, \qquad\qquad A_H(u) = A(u), \quad u \in \mathcal{D}(A_H)$$

é maximal monótono em H.

Nosso objetivo é usar este resultado para mostrar que, quando multiplicado por (-1), o operador p-Laplaciano, Δ_p, é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira regular e $p > 2$.

Consideremos então $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo, limitado, com fronteira suave, e sejam $H = L^2(\Omega)$ e $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$. Então V é um espaço de Banach reflexivo, de dual $V' = W^{-1,q}(\Omega)$, onde p e q satisfazem a relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Observe que sendo $p > 2$ então $p > \dfrac{2n}{2+n}$. Logo, como Ω é limitado temos que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega)$$

com imersões contínuas e densas.

Passemos agora à definição do operador p-Laplaciano.

Considere o operador A definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que a cada elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ associa o elemento de $W^{-1,q}(\Omega)$ dado por

$$Au = -\Delta_p u = -div(\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u).$$

Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ defina

$$Au : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

por $Au(v) = \displaystyle\int_\Omega Au.vdx$.

Au está bem definido, pois para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
Au(v) &= \int_\Omega Au.vdx = \int_\Omega -div(\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u).vdx \\
&= \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u).\nabla vdx \\
&\leq \left| \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u).\nabla vdx \right| \\
&\leq \int_\Omega \| \nabla u \|^{p-2} \| \nabla u \| \| \nabla v \| \, dx \\
&= \int_\Omega \| \nabla u \|^{p-1} \| \nabla v \| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \| \nabla v \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \| \nabla u \|_p^{p-1} \| \nabla v \|_p .
\end{aligned}$$

Assim, para todo $v \in V$,

$$Au(v) \leq \| \nabla u \|_p^{p-1} \| \nabla v \|_p < \infty$$

pois $\| \nabla u \|, \| \nabla v \| \in L^p(\Omega)$. Portanto, Au está bem definido.

Mostremos agora, que se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $Au \in W^{-1,q}(\Omega)$. De fato, como Au está bem definido, para cada u, então resta mostrar que Au é linear e limitado. A linearidade segue diretamente da definição de Au e das propriedades da integral. Provemos então que Au é limitado. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\| Au \|_{W^{-1,q}(\Omega)} &= \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} | \langle Au, v \rangle | \\
&= \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} | Au(v) | \\
&\leq \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} \| \nabla u \|_p^{p-1} \| \nabla v \|_p \\
&= \| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \| v \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} .
\end{aligned}$$

Portanto, Au é limitado.

Nosso próximo passo será mostrar que A é monótono. De fato, usando a desigualdade de Tartar temos que para todo $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v \rangle &= \langle (-div \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u) \\
&- (-div \| \nabla v \|^{p-2} \nabla v), u - v \rangle \\
&= \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u - \| \nabla v \|^{p-2} \nabla v)(\nabla u - \nabla v) dx \\
&= \int_\Omega \langle \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u - \| \nabla v \|^{p-2} \nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle dx \\
&\geq \gamma_0 \int_\Omega \| \nabla u - \nabla v \|^p \, dx = \gamma_0 \| \nabla u - \nabla v \|_p^p \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto A é monótono.

O operador A também é coercivo, isto é, $\lim\limits_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\to\infty} \dfrac{\langle Au, u\rangle}{\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \infty$.

De fato, tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle &= \int_\Omega -div \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u.udx \\
&= \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u)\nabla udx \\
&= \int_\Omega \| \nabla u \|^{p} \, dx = \| \nabla u \|_p^p \, .
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré, temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\| \nabla u \|_p \geq \ c \| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \, .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\| u \|} &= \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\| \nabla u \|_p^p}{\| u \|} \\
&\geq \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{c^p \| u \|^p}{\| u \|} \\
&= \lim_{\|u\|\to\infty} c^p \| u \|^{p-1} = \infty.
\end{aligned}$$

Logo, A é coercivo.

Agora observe que o operador p-Laplaciano pode ser representado da seguinte forma:

$$Au = -\Delta_p u = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\nabla u)$$

onde

$$a_i(\xi) = \| \xi \|^{p-2} \xi_i, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Com efeito, basta notar que para cada x, $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$.

Nosso próximo e último passo será mostrar que o operador A é hemicontínuo, isto é, que para todo $x, y \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $A((1-t)x + ty) \to Ax$ quando

$t \to 0$. De fato,

$$A((1-t)x - ty) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\| \nabla((1-t)x + ty) \|).$$

É claro que

$$\nabla((1-t)x + ty) = (1-t)\nabla x + t\nabla y \to \nabla x$$

quando $t \to 0$. Então basta observarmos que

$$-\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\xi_t) \to \sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\xi)$$

o que de fato acontece uma vez que $\partial_i a_i(\xi)$ é contínua.

Com isto pode-se concluir que o operador $-\Delta_p$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$.

Além disso, é possível mostrar que o operador $-\Delta_p$ é do tipo subdiferencial. Considere

$$\psi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

definido por

$$\psi(u) : \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx, & u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pode-se mostrar que $\partial\psi$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, uma vez que ψ é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente.

De fato, a convexidade de ψ segue da convexidade de $\| \nabla u \|^p$, por isso basta mostrarmos que $\| \nabla u \|^p$ é convexa. Com efeito, como a aplicação λ^p é convexa desde que $\lambda > 0$ e o gradiente é um operador linear temos

$$\begin{aligned} \| \nabla(tu + (1-t)v) \|^p &= \| t\nabla u + (1-t)\nabla v \|^p \\ &\leq (t \| \nabla u \| + (1-t) \| \nabla v \|)^p \\ &\leq t \| \nabla u \|^p + (1-t) \| \nabla v \|^p . \end{aligned}$$

Por outro lado, como a integral preserva desigualdades, temos

$$\begin{aligned}
\psi(tu+(1-t)v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega \| \nabla(tu+(1-t)v) \|^p \, dx \\
&\leq \frac{1}{p}\left[t\int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx + (1-t)\int_\Omega \| \nabla v \|^p \, dx\right] \\
&= t\psi(u)+(1-t)\psi(v)
\end{aligned}$$

o que mostra a convexidade de ψ.

Observe que se u ou v, ou u e v não estão em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então o resultado segue trivialmente.

É fácil ver que $\psi \not\equiv +\infty$, pois se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então $\| \nabla u \| \in L^p(\Omega)$. Logo

$$\psi(u) \;=\; \frac{1}{p}\int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx \;=\; \frac{1}{p} \| \nabla u \|_p^p < \; +\infty.$$

Portanto ψ é própria.

Resta mostrar que ψ é semicontínua inferiormente em $L^2(\Omega)$, isto é, que $\psi(u) \leq \liminf \psi(u_n)$ sempre que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$.

Seja $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Se $\liminf \psi(u_n) = +\infty$ o resultado segue. Se $\liminf \psi(u_n) = a \; < \; \infty$, então existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\}$ satisfazendo $\lim \psi(u_{n_j}) = a$, isto é, $\lim \frac{1}{p} \| u_{n_j} \|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = a$.

Logo $\| u_{n_j} \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é uma seqüência limitada e portanto existe uma subseqüência $\{u_{n_{j_k}}\}$ que converge fracamente para algum v em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $p > 2$, v deve ser igual a u, pois $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente, e então segue da unicidade do limite que $v = u$.

Portanto,

$$\| u \|_{W_01,p(\Omega)} \leq \; \liminf \| u_n \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

e pela definição de ψ,

$$\psi(u) \; \leq \; \liminf \psi(u_n)$$

o que implica que ψ é semicontínua inferiormente.

Portanto $\partial\psi$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$.

Nosso objetivo neste momento é mostrar que $-\Delta_p u = \partial\psi u$. Como ambos são maximais monótonos basta mostrarmos apenas uma das inclusões. Mostraremos então que $-\Delta_p u \subset \partial\psi u$.

Seja $u \in \mathcal{D}(-\Delta_p\mid_H)$ e $v = -\Delta_p u$, então

$$
\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle &= \langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle \\
&= \int_\Omega -div(\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u)(\xi - u)dx \\
&= \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u)(\nabla\xi - \nabla u)dx \\
&= \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u)\nabla\xi dx - \int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle + \int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx &= \int_\Omega (\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u)\nabla\xi dx \\
&\leq \frac{1}{q}\int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega \| \nabla\xi \|^p \, dx.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle + \frac{1}{p}\int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx \;\leq\; \frac{1}{p}\int_\Omega \| \nabla\xi \|^p \, dx
$$

logo,

$$
\langle v, \xi - u\rangle + \psi(u) \;\leq\; \psi(\xi)
$$

para todo $\xi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora note que se $\xi \in L^2(\Omega)\backslash W_0^{1,p}(\Omega)$ então $\psi(\xi) = \infty$ e o resultado segue.

Logo,

$$
\langle v, \xi - u\rangle + \psi(u) \leq \psi(\xi)
$$

para todo $\xi \in L^2(\Omega)$, e portanto $v \in \partial\psi(u)$.

Como $-\Delta_p$ e $\partial\psi$ são maximais monótonos segue que $-\Delta_p = \partial\psi$.

2.6 Compacidade do semigrupo gerado pelo p-Laplaciano em $L^2(\Omega)$

Os semigrupos gerados por certas classes de operadores maximais monótonos tem um efeito regularizante sobre os dados iniciais, isto é, $S(t)u_0 \in \mathcal{D}(A)$ para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e todo $t > 0$. Examinaremos o caso onde A é a subdiferencial de uma função convexa.

Teorema 2.5 *Seja φ uma função convexa, própria, semicontínua inferiormente em H, sejam $A = \partial\varphi$ e $S(t)$ o semigrupo gerado por A em $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Então $S(t)u_0 \in \mathcal{D}(A)$ para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e todo $t > 0$; além disso temos*

$$\| A^0 S(t)u_0 \| \leq \| A^0 v \| + \frac{1}{t} \| u_0 - v \|$$

para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, para todo $v \in \mathcal{D}(A)$ e todo $t > 0$. Dito de outra forma, para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, existe uma única função $u \in C([0,\infty); H)$ tal que $u(0) = u_0$,

- *$u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t > 0$;*
- *u(t)é lipschitziana em $[\delta, \infty)$ para todo $\delta > 0$, com*

  $$\| \frac{du}{dt} \|_{L^\infty(\delta,\infty;H)} \leq \| A^0 v \| + \frac{1}{t} \| u_0 - v \|$$

  para todo $v \in \mathcal{D}(A)$ e para todo $\delta > 0$;
- *u admite em todo $t > 0$ uma derivada à direita e*

  $$\frac{d^+u}{dt}(t) + A^0 u(t) = 0$$

  para todo $t > 0$.

Além disso, a função $t \mapsto \varphi(u(t))$ é convexa , decrescente e lipschitziana sobre todo intervalo $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$ e

$$\frac{d^+}{dt}\varphi(u(t)) = - \| \frac{d^+u}{dt}(t) \|^2$$

para todo $t > 0$.

Este Teorema, bem como sua demonstração encontram-se em [6], p. 57.

Teorema 2.6 *Sejam A um operador maximal monótono, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u \in C([0,T];H)$ uma solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$. Seja $t_0 \in [0,T)$ um ponto de Lebesgue à direita de f (respectivamente $t_0 \in (0,T)$ um ponto de Lebesgue de f); seja $f(t_0 + 0) = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{t_0}^{t+h} f(s)ds$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u(t_0) \in \mathcal{D}(A)$;

(ii) $\liminf\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{1}{h} \| u(t_0 + h) - u(t_0) \| < \infty$ *(respectivamente,* $\liminf\limits_{\substack{h \downarrow 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h} \| u(t_0 + h) - u(t_0) \| < \infty$*);*

(iii) u é derivável à direita em t_0.

Neste caso $\dfrac{d^+u}{dt}(t_0) = (f(t_0 + 0) - Au(t_0))^0 = f(t_0 + 0) - Proj_{Au(t_0)} f(t_0 + 0)$.

(Teorema 3.5, p. 66, [6])

Lema 2.6 *Sejam A um operador maximal monótono, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u \in C([0,T];H)$ uma solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$. Seja t_n uma seqüência de $[0,T]$ tal que $t_n \to t_0$, $t_n \neq t_0$, $\dfrac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0} \rightharpoonup \alpha$, $\dfrac{1}{t_n - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_n} f(s)ds \rightharpoonup \beta$ e $\dfrac{1}{t_n - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_n} \| f(s) \| ds$ seja limitado. Então $u(t_0) \in \mathcal{D}(A)$ e $\beta - \alpha \in Au(t_0)$.*

(Lema 3.2, p. 66, [6])

Nosso objetivo agora é mostrar que $-\Delta_p$ gera um semigrupo compacto. O lema a seguir é uma adaptação da Observação 2.1.1, p. 47, [18].

Estes resultados valem também para operadores maximais monótonos multívocos, porém como estamos trabalhando com o operador $-\Delta_p$, iremos demonstrar apenas para operadores unívocos.

Lema 2.7 *Seja $\varphi : (-\infty, +\infty] \to H$ uma função convexa, própria e semi-contínua inferiormente e sejam $S(t)$ o semigrupo gerado por $\partial\varphi$, e J_t o resolvente de $\partial\varphi$, então $\| J_t x - x \| \leq 2 \| S(t)x - x \|$, para todo $t > 0$ e $x \in \overline{\mathcal{D}(\partial\varphi)}$.*

Demonstração: Seja $S(t)$ o semigrupo gerado em H por $A = \partial\varphi$. Observe que $\dfrac{d^+}{dt}u(t) + \partial\varphi^0 u(t) = 0$ para todo t e como $\partial\varphi$ é unívoco $-\dfrac{d^+}{dt}u(t) = \partial\varphi^0 u(t)$ para todo t.

Da definição de subdiferencial

$$\varphi(y) - \varphi(S(s)x) \geq \langle \partial\varphi S(s)x, y - S(s)x \rangle$$

para todo $y \in H$, e em particular para $y \in \mathcal{D}(\varphi)$.

Logo, multiplicando por (-1)

$$\varphi(S(s)x) - \varphi(y) \leq -\left\langle \frac{d^+}{dt} S(s)x, S(s)x - y \right\rangle = -\frac{1}{2}\frac{d^+}{ds} \| S(s)x - y \|_H^2 .$$

Como $t \mapsto \varphi(S(t)x)$ é não crescente, sempre que $s \in (0, t)$,

$$\varphi(S(t)x) - \varphi(y) \leq \varphi(S(s)x) - \varphi(y) \leq -\frac{1}{2}\frac{d^+}{ds} \| S(s)x - y \|_H^2$$

portanto integrando de 0 a t em s

$$\int_0^t (\varphi(S(t)x) - \varphi(y))ds \leq \int_0^t -\frac{1}{2}\frac{d^+}{ds} \| S(s)x - y \|_H^2 \, ds$$

$$t\varphi(S(t)x) - t\varphi(y) \leq \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel_H^2 - \frac{1}{2} \parallel S(t)x - y \parallel_H^2 .$$

Se $y = J_t x$,

$$t\varphi(S(t)x) - t\varphi(J_t x) \leq \frac{1}{2} \parallel x - J_t x \parallel_H^2 - \frac{1}{2} \parallel S(t)x - J_t x \parallel_H^2 . \tag{2.6}$$

Agora, como

$$\frac{1}{t}(x - J_t x) = A_t x = \partial\varphi(J_t x)$$

então da definição de subdiferencial:

$$\varphi(S(t)x) - \varphi(J_t x) \geq \frac{1}{t}\langle x - J_t x, S(t)x - J_t x\rangle$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle x - J_t x, S(t)x - J_t x\rangle &\leq t\varphi(S(t)x) - t\varphi(J_t x) \\ &\leq \frac{1}{2} \parallel x - J_t x \parallel_H^2 - \frac{1}{2} \parallel S(t)x - J_t x \parallel_H^2 . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Além disso,

$$\langle x - J_t x, S(t)x - J_t x\rangle \geq \frac{1}{2}[\parallel J_t x - x \parallel_H^2 - \parallel S(t)x - x \parallel_H^2]. \tag{2.8}$$

De 2.7 e 2.8 vem que

$$\frac{1}{2} \parallel J_t x - x \parallel_H^2 - \frac{1}{2} \parallel S(t)x - x \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2} \parallel x - J_t x \parallel_H^2 - \frac{1}{2} \parallel S(t)x - J_t x \parallel_H^2 .$$

Logo,

$$\parallel S(t)x - J_t x \parallel \leq \parallel S(t)x - x \parallel$$

e portanto,

$$\parallel x - J_t x \parallel \leq \parallel x - S(t)x \parallel + \parallel S(t)x - J_t x \parallel \leq 2 \parallel S(t)x - x \parallel .$$

■

Primeiro observemos que o operador $-\Delta_p$ gera um semigrupo equicontínuo em $L^2(\Omega)$ e além disso para cada $t > 0$, J_t é um operador compacto, onde J_t é o resolvente de $-\Delta_p$.

Mostremos que J_t é um operador compacto. A continuidade segue do fato de J_t ser uma contração. Resta mostrar que este operador leva limitados em relativamente compactos. Sabemos que $-\Delta_p = \partial\varphi$ onde

$$\varphi(u) : \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega \| \nabla u \|^p \, dx, & u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e φ é uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente. Além disso, a função

$$\varphi_t(x) = \min_{y\in H} \left\{ \frac{1}{2t} \| y - x \|^2 + \varphi(y) \right\}$$

atinge seu mínimo em $J_t x$.

Logo,

$$\frac{1}{2t} \| J_t x - x \|^2 + \varphi(J_t x) \leq \frac{1}{2t} \| y - x \|^2 + \varphi(y)$$

para todo $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é,

$$\frac{1}{2t} \| J_t x - x \|^2 + \frac{1}{p} \| J_t x \|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{2t} \| y - x \|^2 + \frac{1}{p} \| y \|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Em particular, temos para $y = 0$

$$\frac{1}{2t} \| J_t x - x \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} \| J_t x \|^p_{W_0^{1,p}} \leq \frac{1}{2t} \| x \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Consequentemente

$$\frac{1}{p} \| J_t x \|^p_{W_0^{1,p}} \leq \frac{1}{2t} \| x \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Seja $B \subset L^2(\Omega)$ limitado e $x_0 \in B$, então existe $k > 0$ tal que $\dfrac{1}{2t} \| x_0 \|^2_{L^2(\Omega)} \leq k$, para todo $x_0 \in B$.

Logo,

$$\frac{1}{p} \parallel J_t x \parallel^p_{W_0^{1,p}} \leq \ k$$

para todo $x_0 \in B$, então o conjunto

$$\widetilde{B} = \{J_t x_0; x_0 \in B\}$$

é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$ então $\widetilde{B}$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$. Assim, J_t leva limitados em relativamente compactos. Portanto, o resolvente de $-\Delta_p$ é um operador compacto.

Mostremos agora que o semigrupo gerado por $-\Delta_p$ em $L^2(\Omega)$ é equicontínuo. De fato, temos que para cada subconjunto limitado M em $L^2(\Omega)$, cada $x \in M$, $t > 0$ e $h > 0$,

$$\parallel S(t+h)x - S(t)x \parallel \leq \ h \parallel (-\Delta_p)^0 S(t)x \parallel \leq \ 2h \left(\parallel (-\Delta_p)^0 y \parallel + \frac{1}{t} \parallel x - y \parallel \right)$$

onde y é arbitrário, mas fixo em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como M é limitado, esta desigualdade mostra que o semigrupo gerado por $-\Delta_p$ é equicontínuo.

Teorema 2.7 *O semigrupo gerado por $-\Delta_p$ em $L^2(\Omega)$ é compacto.*

Demonstração: Seja $S(t)$ o semigrupo gerado por $-\Delta_p$ e J_t o resolvente de $-\Delta_p$. Como do Lema 2.7

$$\parallel J_t x - x \parallel \leq \ 2 \parallel S(t)x - x \parallel$$

para todo $t > 0$ e $x \in \overline{W_0^{1,p}(\Omega)}$ então em particular

$$\parallel J_t(S(s)x) - S(s)x \parallel \leq \ 2 \parallel S(t+s)x - S(s)x \parallel$$

para $s, t > 0$ e $x \in \overline{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Mas por hipótese o semigrupo é equicontínuo, logo dado M limitado em $\overline{W_0^{1,p}(\Omega)}$ existe

$$a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

tal que $a(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ e tal que

$$\| S(t+s)x - S(s)x \| \leq a(s)$$

para cada $s \geq 0$ e $x \in M$. Portanto,

$$\| J_h(S(t)x) - S(t)x \| \leq 2 \| S(t+s)x - S(t)x \| \leq a(s) \rightarrow 0$$

quando $s \rightarrow 0$.

Assim $J_hS(t)$ converge uniformemente para $S(t)$ em subconjuntos limitados de $\overline{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Mas J_h é um operador compacto e $S(t)$ é não expansivo, logo $J_hS(t)$ é contínuo.

Além disso, $J_hS(t)$ leva limitados em relativamente compactos. De fato, seja $B \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ limitado. Então para cada $x \in B$, $S(t)x$ é a única solução de $\frac{du}{dt} - \Delta_p u = 0$, com $u(0) = x$. Assim, fazendo o produto interno de $\frac{du}{dt} - \Delta_p u = 0$ com u e integrando de 0 a t temos

$$\| u(t) \| \leq \| x \| \leq k$$

pois $x \in B$ e B é limitado. Portanto $S(t)B$ é limitado e como J_h é compacto, para todo $h > 0$, então $J_hS(t)B$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$.

Portanto, $J_hS(t)$ é um operador compacto para cada $h > 0$. E como $\lim_{h \rightarrow 0} J_hS(t) = S(t)$ uniformemente em subconjuntos limitados em $L^2(\Omega)$, então $S(t)$ é também um operador compacto, para todo $t > 0$.

Portanto, o semigrupo gerado por $-\Delta_p$ em $L^2(\Omega)$ é compacto. ■

Capítulo 3

Existência de soluções para um sistema de inclusões diferenciais

3.1 O Teorema de Baras

Nosso objetivo nesta seção é enunciar e demonstrar um resultado de compacidade devido à Baras o qual será essencial para a obtenção do principal resultado deste trabalho.

O Teorema de Baras refere-se às propriedades de compacidade do conjunto de soluções de uma família de equações diferenciais. Naturalmente, assim como outros importantes resultados de compacidade existentes na literatura, este também se apóia no clássico Teorema de Ascoli-Arzelà.

Considere (P_f) o seguinte problema de valor inicial:

$$(P_f)\begin{cases} \dfrac{du^f}{dt} + Au^f \ni f \\ u^f(0) = u_0 \end{cases}$$

onde A é maximal monótono em um espaço de Hilbert H, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Fazendo f variar em um conjunto $K \subset L^1(0,T;H)$ obtemos uma família de problemas e portanto uma família de soluções.

Estamos interessados em estabelecer condições para que o conjunto $\{u^f; f \in K\}$ possua alguma propriedade de compacidade.

Definição 3.1 *Um subconjunto K em $L^1([a,b];X)$ é uniformemente integrável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E \| f(t) \|_X \, dt \leq \epsilon$$

para cada subconjunto mensurável E em $[a,b]$ cuja medida de Lebesgue é menor que $\delta(\epsilon)$, e uniformemente para $f \in K$.

Observação 3.1 *Como $[a,b]$ é compacto, segue facilmente que cada subconjunto uniformemente integrável em $L^1([a,b];X)$ é limitado na norma de $L^1([a,b];X)$.*

Teorema 3.1 *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ um operador maximal monótono, seja u_0 um elemento fixo em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e seja K um subconjunto uniformemente integrável em $L^1([0,T];H)$. Sejam u^f solução de (P_f) em $[0,T]$ e $M(K) = \{u^f; f \in K\}$. Se para cada $t \in [0,T]$, o conjunto $M(K)(t) = \{u^f(t); u^f \in M(K)\}$ é relativamente compacto em H, então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$.*

Demonstração: Nosso primeiro passo será mostrar que $M(K)$ é equicontínuo em cada $t \in [0,T]$.

Seja $\{S(t); S(t) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}, t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por A em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e diremos que $S(t)u_0 = u^0(t)$ para cada $t \in [0,T]$. Logo u^0 é a única solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du^0}{dt} + Au^0 \ni 0 \\ u^0(0) = u_0 \end{cases}$$

em $[0,T]$. Como u^f é a única solução fraca do p.v.i. (P_f) temos pelo Corolário 2.2,

$$\begin{aligned} \| u^f(t) - u_0 \| &= \| u^f(t) - S(t)u_0 + S(t)u_0 - u_0 \| \\ &\leq \| u^f(t) - S(t)u_0 \| + \| S(t)u_0 - u_0 \| \\ &\leq \| S(t)u_0 - u_0 \| + \int_0^t \| f(s) \| \, ds \end{aligned}$$

para cada $f \in K$ e $t \in [0,T]$.

Como $S(\cdot)u_0$ é contínua na origem, e K é uniformemente integrável, a desigualdade acima mostra que $M(K)$ é equicontínua em $t = 0$.

De fato, seja V uma vizinhança da origem em H. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in V$ se $\| w \| \leq \epsilon$. Como $S(\cdot)u_0$ é contínua na origem então para este ϵ existe $\delta_1(\epsilon) > 0$ tal que $\| S(t)u_0 - u_0 \| < \dfrac{\epsilon}{2}$ sempre que $| t | < \delta_1(\epsilon)$. Além disso, como K é uniformemente integrável, então existe $\delta_2(\epsilon) > 0$ tal que $\displaystyle\int_0^t \| f(s) \| \, ds \leq \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $| t | < \delta_2(\epsilon)$, uniformemente para $f \in K$.

Seja $\delta(V) = \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$. Então para cada $t \in [0,T]$, tal que $| t | < \delta(V)$ temos

$$\begin{aligned} \| u^f(t) - u^f(0) \| &= \| u^f(t) - u_0 \| \\ &\leq \| S(t)u_0 - u_0 \| + \int_0^t \| f(s) \| \, ds \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

o que implica que $u^f(t) - u^f(0) \in V$ uniformemente para $u^f \in M(K)$. Portanto, $M(K)$ é equicontínua em $t = 0$.

Agora, seja $t \in (0,T)$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, e escolha $\lambda > 0$ tal que $t - \lambda \in [0,T]$, e, em adição

$$\int_E \| f(s) \| \, ds \leq \frac{\epsilon}{16} \tag{3.1}$$

para cada subconjunto mensurável E em $[0,T]$ cuja medida de Lebesgue $m(E)$ é menor do que ou igual a 2λ e uniformemente para $f \in K$.

Como $t-\lambda \in [0,T]$, então $M(K)(t-\lambda)$ é relativamente compacto em H e portanto $M(K)(t-\lambda)$ é precompacto em H (veja Teorema 1.9). Assim, para cada $\epsilon > 0$ existe uma família finita $\{f_1, f_2, ..., f_{n(\epsilon)}\}$ em K com a propriedade que, dado $f \in K$, existe $i \in \{1, 2, ..., n(\epsilon)\}$ tal que

$$\| u^f(t-\lambda) - u^{f_i}(t-\lambda) \| \leq \frac{\epsilon}{4}. \tag{3.2}$$

A família $\{u^{f_1}, u^{f_2}, ..., u^{f_{n(\epsilon)}}\}$ é equicontínua em t porque ela é finita.

Além disso, segue da continuidade de u^{f_i} que existe $0 < \delta(\epsilon) \in (0,\lambda)$ tal que

$$\| u^{f_i}(t+h) - u^{f_i}(t) \| \leq \frac{\epsilon}{4} \tag{3.3}$$

para cada $i \in \{1, 2, ..., n(\epsilon)\}$ e $h \in \mathbb{R}$ com $| h | \leq \delta(\epsilon)$, e $t+h \in [0,T]$.

Por outro lado, para todo $f \in K$ e $h \in \mathbb{R}$ com $t+h \in [0,T]$ temos, pelo Corolário 2.2:

$$\begin{aligned}
\| u^f(t+h) - u^f(t) \| &\leq \| u^f(t+h) - u^{f_i}(t+h) \| \\
&+ \| u^{f_i}(t+h) - u^{f_i}(t) \| \\
&+ \| u^f(t) - u^{f_i}(t) \| \leq 2 \| u^f(t-\lambda) - u^{f_i}(t-\lambda) \| \\
&+ \| u^{f_i}(t+h) - u^{f_i}(t) \| + \int_{t-\lambda}^{t+h} \| f(s) - f_i(s) \| \, ds \\
&+ \int_{t-\lambda}^{t} \| f(s) - f_i(s) \| \, ds.
\end{aligned}$$

Logo se $0 < h < \delta(\epsilon)$ e $t+h \in [0,T]$ temos por 3.1, 3.2 e 3.3 que

$$\begin{aligned}
\| u^f(t+h) - u^f(t) \| &\leq 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \int_{t-\lambda}^{t+\lambda} (\| f(s) \| + \| f_i(s) \|) ds \\
&+ \int_{t-\lambda}^{t} (\| f(s) \| + \| f_i(s) \|) ds < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\| u^f(t+h) - u^f(t) \| < \epsilon$ uniformemente para $f \in K$, o que mostra que $M(K)$ é equicontínua em $(0,T)$.

No caso $t = T$ basta tomar $h < 0$ e tudo segue de forma análoga ao caso $t \in (0, T)$. Consequentemente $M(K)$ é equicontínua em $[0, T]$.

Como para cada $t \in [0, T]$, o conjunto

$$M(K)(t) = \{u^f(t); u^f \in M(K)\}$$

é relativamente compacto em H, então pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, o conjunto $M(K)$ é relativamente sequencialmente compacto e portanto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0, T]; H)$. ■

Lema 3.1 *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ um operador maximal monótono, seja $\{S(t); S(t) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}, t \geq 0$ o semigrupo gerado por A em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e sejam $f \in L^1([0, T]; H)$, $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e u a única solução de (P_f) em $[0, T]$ correspondente a f e a u_0. Então para cada $t \in (0, T]$, $s \in [0, T)$ e $h > 0$ com $t - h \in [0, T]$, $s + h \in [0, T]$, temos*

$$\| S(h)u(t-h) - u(t) \| \leq \int_{t-h}^{t} \| f(s) \| \, ds$$

e

$$\| S(h)u(s) - u(s+h) \| \leq \int_{s}^{s+h} \| f(s) \| \, ds.$$

Demonstração: Provaremos apenas a primeira desigualdade, pois a segunda segue de forma análoga.

Defina

$$v^h : [t-h, t] \to \overline{\mathcal{D}(A)}$$

por $v^h(\tau) = S(\tau - (t-h))u(t-h)$, para todo $\tau \in [t-h, t]$.

Observe que v^h é a única solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv^h}{d\tau}(\tau) + Av^h(\tau) \ni 0 & t-h \leq \tau \leq t \\ v^h(t-h) = u(t-h) & \end{cases}$$

Como A é maximal monótono e $u(t-h) \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ o problema acima tem uma única solução que chamaremos v^h. Por outro lado como u é a única solução de (P_f) em $[0,T]$ e em particular em $[t-h,t]$, temos

$$\| v^h(\tau_2) - u(\tau_2) \| \leq \| v^h(\tau_1) - u(\tau_1) \| + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \| f(\tau) \| \, d\tau.$$

Em particular,

$$\| v^h(t) - u(t) \| \leq \int_{t-h}^{t} \| f(\tau) \| \, d\tau$$

e isto implica que

$$\| S(h)u(t-h) - u(t) \| \leq \int_{t-h}^{t} \| f(\tau) \| \, d\tau$$

o que prova a primeira desigualdade. ■

A seguir enunciaremos e demonstraremos o principal Teorema desta seção.

Teorema 3.2 (Baras) *Se $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ é um operador maximal monótono, A gera um semigrupo compacto, u_0 é um elemento fixo em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e K é um subconjunto uniformemente integrável em $L^1([0,T];H)$, então o conjunto $M(K) = \{u^f; f \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$.*

Demonstração: Devemos mostrar que para cada $t \in [0,T]$ o conjunto

$$M(K)(t) = \{u^f(t); u^f \in M(K)\}$$

é relativamente compacto em H, e logo após usar o Teorema 3.1.

Seja $t \in (0,T]$ arbitrário, e tome $h > 0$ tal que $t-h \in [0,T]$; observe que pelo Lema 3.1

$$\| S(h)u^f(t-h) - u^f(t) \| \leq \int_{t-h}^{t} \| f(\tau) \| \, d\tau$$

para cada $f \in K$.

Defina o operador

$$T_h : M(K)(t) \to H$$

por

$$T_h u^f(t) = S(h) u^f(t-h)$$

para cada $u^f(t) \in M(K)(t)$.

Como A gera um semigrupo compacto, segue-se que $S(h)$ é um operador compacto. Além disso, $M(K)(t-h)$ é limitado em H, pois se $u^f(t-h) \in M(K)(t-h)$ então

$$\| u^f(t-h) \| \leq \| u^f(0) \| + \int_0^{t-h} \| f(s) \| \, ds \leq c$$

onde c é uma constante. Logo $S(h)(M(K)(t-h))$ é relativamente compacto em H, e isso mostra que os operadores T_h levam limitados em relativamente compactos.

Por outro lado, como K é uniformemente integrável, a desigualdade acima mostra que $\lim_{h \to 0} T_h = I$ uniformemente em $M(K)(t)$.

Portanto, pelo Lema 2.5, o operador identidade

$$I : M(K)(t) \to M(K)(t)$$

é um operador compacto.

Como $M(K)(t)$ é limitado, segue que $M(K)(t)$ é relativamente compacto. Logo, pelo Teorema 3.1 $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$. ■

3.2 Operadores Multívocos

Seja X um espaço de Banach real, e seja M um subconjunto Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^q$, onde $q \geq 1$.

Consideraremos apenas dois casos específicos, quando M é um intervalo não vazio em $\mathbb{R}$, ou $M = I \times \Omega$, onde I é um intervalo não vazio em $\mathbb{R}$ e Ω é um subconjunto Lebesgue mensurável, limitado e não vazio em $\mathbb{R}^{q-1}$, $q \geq 2$.

Definição 3.2 *A aplicação $G : M \to \mathcal{P}(X)$ é chamada mensurável se para cada subconjunto fechado C em X o conjunto*

$$G^{-1}(C) = \{y \in M; G(y) \cap C \neq \emptyset\}$$

é Lebesgue mensurável.

Se G é unívoco a definição acima é equivalente a definição usual de função mensurável.

Definição 3.3 *Uma função $g : M \to X$ é uma seleção da aplicação multívoca $G : M \to \mathcal{P}(X)$, se $g(y) \in G(y)$, para $y \in M$, qtp. Denotamos por*

$$SelG = \{f; f : M \to X, f \, \textit{é seleção mensurável de } G\}.$$

Teorema 3.3 *Se X é separável e $G : M \to \mathcal{P}(X)$ é uma aplicação mensurável com valores não vazios e fechados, então G tem pelo menos uma seleção mensurável.*

Demonstração: Construiremos uma seqüência $\{g_n\}$ de funções mensuráveis de M em X, e mostraremos que $\{g_n\}$ é uniformemente convergente sobre M para uma seleção g de G.

A idéia é definir $\{g_n\}$ por recorrência, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y \in M$, as seguintes desigualdades valham:

$$\begin{cases} d(g_n(y), G(y)) \leq \dfrac{1}{2^n} \\ \| g_{n+1}(y) - g_n(y) \| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases} \tag{3.4}$$

Com esta intenção, observemos que, como X é separável, existe um subconjunto enumerável denso $\{x_i; i \in \mathbb{N}\} \subset X$. Definimos:

$$g_0 : M \to X$$

por $g_0(y) = x_k$, onde k é o menor inteiro satisfazendo:

$$G(y) \cap \overline{B(x_k, 2^0)} \neq \emptyset.$$

Note que um tal número sempre existe porque $G(y)$ é não vazio e $\{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ é denso em X.

Como G é mensurável, e

$$g_0^{-1}(\{x_k\}) = G^{-1}(\overline{B(x_k, 2^0)}) - \cup_{m<k} G^{-1}(\overline{B(x_m, 2^0)})$$

segue que g_0 é mensurável. De fato, da igualdade acima segue que imagem inversa de pontos por g_0 é sempre um conjunto mensurável. Logo, como cada subconjunto fechado pode ser escrito como união de seus pontos, e $g_0^{-1}(\cup x) = \cup g_0^{-1}(x)$ e a imagem de g_0 é um conjunto enumerável segue que para todo subconjunto fechado C em X, $g_0^{-1}(C)$ é Lebesgue mensurável.

Observe que g_0 foi definida de forma que, $d(g_0(y), G(y)) \leq \dfrac{1}{2^0}$, para $y \in M$. Para verificar esta desigualdade basta notar que, como $G(y) \cap \overline{B(x_k, 2^0)} \neq \emptyset$, existe $x \in \overline{B(x_k, 2^0)}$ tal que $x \in G(y)$ e então $\inf_{z \in G(y)} d(x_k, z) \leq d(x_k, x) \leq 2^0$.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o conjunto $M_p = g_0^{-1}(\{x_p\})$. Observe que M_p é mensurável, pois $g_0^{-1}(\{x_p\})$ é mensurável. Além disso, $M_p \cap M_n = \emptyset$ para $n \neq p$ e $\cup M_p = M$.

Para $y \in M_p$ defina $g_1(y) = x_k$ onde k é o menor inteiro satisfazendo

$$G(y) \cap \overline{B(x_p, 2^0)} \cap \overline{B(x_k, 2^{-1})} \neq \emptyset.$$

É evidente que g_1 é uma aplicação mensurável de M em X e as justificativas são análogas às dadas para g_0. Além disso, é fácil ver que

$$d(g_1(y), G(y)) \ \leq \ \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \| \ g_1(y) - g_0(y) \ \| \leq \ 2.$$

Logo, $\{g_0, g_1\}$ satisfazem (3.4).

Neste ponto, assumimos que já temos construído o conjunto $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ de funções mensuráveis de M em X satisfazendo (3.4).

Como na construção de g_1, considere o conjunto $M_p = g_n^{-1}(\{x_p\})$ e para cada $y \in M_p$, defina

$$g_{n+1}(y) = x_k$$

onde k é o menor inteiro satisfazendo

$$G(y) \cap \overline{B(x_p, 2^{-n})} \cap \overline{B(x_k, 2^{-(n+1)})} \neq \emptyset.$$

Certamente, g_{n+1} é mensurável de M em X e, da relação acima, segue que

$$d(g_{n+1}(y), G(y)) \ \leq \ 2^{-(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \| \ g_{n+1}(y) - g_n(y) \ \| \leq \ 2^{-n+1}.$$

Assim, $\{g_n\}$ é uma seqüência de Cauchy (uniformemente em M), e portanto é uniformemente convergente em M para alguma função g, que é mensurável, uma vez que limite de funções mensuráveis é função mensurável.

Agora, observe que

$$d(g(y), G(y)) = \lim_{n\to\infty} d(g_n(y), G(y)) \ \leq \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

E como $G(y)$ é fechado, por hipótese, temos que $g(y) \in G(y)$ para todo $y \in M$.

Logo, g é uma seleção de G. E portanto, G tem pelo menos uma seleção mensurável. ■

No que segue U denota um espaço topológico.

Definição 3.4 *Uma aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em $u \in U$, se*

(i) $G(u)$é não vazio, limitado, fechado e convexo.

(ii) Para cada subconjunto D aberto (fracamente aberto) em X satisfazendo $G(u) \subset D$, existe uma vizinhança V de u, tal que $G(v) \subset D$, para cada $v \in V$.

Se G é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em cada $u \in U$, então ela é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em U.

Observação 3.2 *É evidente que cada aplicação semicontínua superiormente $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é fracamente semicontínua superiormente , uma vez que cada aberto da topologia fraca é aberto na topologia forte. Porém, o contrário não é verdade, a menos que X seja de dimensão finita.*

Observação 3.3 *Se G é unívoca, então ela é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em u se e somente se ela é contínua (fracamente contínua) em u no sentido usual. Por este motivo alguns autores preferem chamar estas aplicações apenas de contínuas.*

Lema 3.2 *Considere a aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ e suponha que para cada $u \in U$, $G(u)$ é não vazio, limitado, fechado e convexo. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $G : U \to \mathcal{P}(X)$ *é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em* U*;*

(ii) *Para cada aberto (fracamente aberto)* D *em* X*, o conjunto*

$$\widetilde{G}^{-1}(D) = \{v \in U; G(v) \subset D\}$$

é aberto em U*;*

(iii) *Para cada fechado (fracamente fechado)* C *em* X*, o conjunto*

$$G^{-1}(C) = \{u \in U; G(u) \cap C \neq \emptyset\}$$

é fechado em U*.*

Demonstração: Mostraremos primeiro que (iii) implica (ii). Seja $D \subset X$ aberto (fracamente aberto). Então D^C é fechado (fracamente fechado) em X, logo,

$$G^{-1}(D^C) = \{u \in U; G(u) \cap D^C \neq \emptyset\}.$$

Mas,

$$G^{-1}(D^C) = U \backslash \{u \in U; G(u) \subset D\} = U \backslash \widetilde{G}^{-1}(D) = [\widetilde{G}^{-1}(D)]^C.$$

Logo, $[\widetilde{G}^{-1}(D)]^C$ é fechado em U e portanto $\widetilde{G}^{-1}(D)$ é aberto em U.

Portanto, para cada aberto (fracamente aberto) D em X, o conjunto

$$\widetilde{G}^{-1} = \{v \in U; G(v) \subset D\}$$

é aberto em U, o que mostra que $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Mostremos, agora, que $(ii) \Rightarrow (i)$. Suponha que (ii) valha. Basta mostrarmos que o segundo item da definição de aplicação semicontínua superiormente vale, pois o primeiro item já é satisfeito por hipótese. Seja $D \subset X$

um conjunto aberto (fracamente aberto) satisfazendo $G(u) \subset D$, então por (ii)

$$\widetilde{G}^{-1}(D) = \{u \in U; G(u) \subset D\}$$

é aberto em U.

Logo $\widetilde{G}^{-1}(D)$ é uma vizinhança de u tal que para todo $v \in \widetilde{G}^{-1}(D)$, $G(v) \subset D$. Portanto o segundo item da definição é satisfeito.

Finalmente, provemos que $(i) \Rightarrow (iii)$. Suponha que G é semicontínua superiormene (fracamente semicontínua superiormente) em U.

Seja $C \subset X$ fechado (fracamente fechado). Queremos mostrar que o conjunto

$$G^{-1}(C) = \{u \in U; G(u) \cap C \neq \emptyset\}$$

é fechado em U. Para isto basta mostrar que $[G^{-1}(C)]^C$ é aberto em U.

Tome $u \in [G^{-1}(C)]^C$, então $G(u) \subset C^C$ e C^C é aberto (fracamente aberto) em X, logo existe uma vizinhança V de u tal que $G(v) \subset C^C$, para todo $v \in V$ o que implica que $V \subset [G^{-1}(C)]^C$.

Portanto u é ponto interior de $[G^{-1}(C)]^C$. Como u foi tomado arbitrariamente em $[G^{-1}(C)]^C$, segue que $[G^{-1}(C)]^C$ é aberto em U.

Portanto $G^{-1}(C)$ é fechado em U. E isto completa a prova. ■

Lema 3.3 *Sejam X e Y dois espaços de Banach reais, seja $g : M \to Y$ uma função mensurável e $G : Y \to \mathcal{P}(X)$ uma aplicação semicontínua superiormente. Então*

$$G \circ g : M \to \mathcal{P}(X)$$

é mensurável.

Demonstração: De fato, seja C um subconjunto fechado em X. Queremos mostrar que o conjunto

$$(G \circ g)^{-1}(C) = \{y \in M; (G \circ g)(y) \cap C \neq \emptyset\}$$

é Lebesgue mensurável.

Temos que

$$(G \circ g)^{-1}(C) = \{y \in M; (G \circ g)(y) \cap C \neq \emptyset\} = g^{-1}(G^{-1}(C)).$$

Como G é contínua, para todo fechado $C \subset X$, $G^{-1}(C)$ é fechado em Y.

Por outro lado, como g é mensurável então $g^{-1}(G^{-1}(C))$ é Lebesgue mensurável. Logo para todo fechado $C \subset X$, $(G \circ g)^{-1}(C)$ é Lebesgue mensurável.

Portanto, $G \circ g : M \to \mathcal{P}(X)$ é mensurável. ■

Teorema 3.4 *Seja M um subconjunto não vazio, limitado e Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, U um espaço topológico, e X um espaço de Banach real. Se $E : U \to \mathcal{P}(X)$ é fracamente semicontínua superiormente, $u_n : M \to U$, e $f_n \in SelE(u_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, são seqüências satisfazendo*

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{ em } L^1(M; X)$$

e

$$u_n(y) \to u(y) \qquad \text{qtp em } M,$$

então $f \in SelE(u)$.

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ uma seqüência que converge fracamente para alguma f em $L^1(M;X)$. Então, pelo Corolário 1.3 existe uma seqüência $\{g_n\}$ cujos termos são combinações convexas de $\{f_k; k \geq n\}$, isto é,

$$g_n(y) = \sum_{k=n}^{p(n)} a_k(n) f_k(y)$$

com $a_k(n) \in [0,1]$ para $k = n, n+1, ..., p(n)$, $\sum_{k=n}^{p(n)} a_k(n) = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e tal que $\{g_n\}$ converge fortemente para f em $L^1(M; X)$.

Logo, podemos extrair uma subseqüência $\{g_{n_k}\}$ tal que

$$g_{n_k}(y) \to f(y)$$

qtp em M.

Denote por M_0 o conjunto de todos os $y \in M$ tais que:

$$g_{n_k}(y) \to f(y),$$

$$u_n(y) \to u(y)$$

e

$$f_n(y) \in E(u_n(y))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Certamente $M \backslash M_0$ tem medida nula. Agora, seja $y \in M_0$, e seja A um semi-espaço aberto em X contendo $E(u(y))$.

É fácil ver que A é fracamente aberto. De fato, como A é um semi-espaço aberto, existe um funcional linear contínuo $h \in X'$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $A = \{x \in X; h(x) > \alpha\}$. Como $(\alpha, +\infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e como h é contínuo segue que $h^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X; h(x) > \alpha\} = A$ é aberto em X. Logo, $A^C = \{x \in X; h(x) \leq \alpha\}$ é fechado em X. Como A^C é convexo, temos que A^C é fracamente fechado em X. Consequentemente A é fracamente aberto em X.

Como $E : U \to \mathcal{P}(X)$ é fracamente contínua em $u(y)$, e $\{u_n(y)\}$ converge para $u(y)$, existe $n(A) \in \mathbb{N}$ tal que

$$E(u_n(y)) \subset A$$

para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n(A)$.

Com efeito, suponha que um tal $n(A)$ não exista. Então para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k > k$ tal que

$$E(u_{n_k}(y)) \cap A^C \neq \emptyset.$$

Note que sendo A fracamente aberto em X, então A^C é fracamente fechado em X, e como E é fracamente semicontínua superiormente , então o conjunto $E^{-1}(A^C)$ é fechado em U. Ora, $\{u_{n_k}\} \subset E^{-1}(A^C)$ e $u_{n_k}(y) \rightarrow u(y)$, e como $E^{-1}(A^C)$ é fechado em U então $u(y) \in E^{-1}(A^C)$, ou seja,

$$E(u(y)) \cap A^C \neq \emptyset$$

o que é um absurdo pois tomamos A de forma que

$$E(u(y)) \subset A.$$

Portanto existe $n(A) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n(A)$, $E(u_n(y)) \subset A$.

Desta relação e considerando que $f_n(y) \in Sel E(u_n(y))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e para $y \in M$ qtp, é fácil concluir que

$$g_{n_k}(y) \subset \overline{conv(\cup_{n \geq n(A)} E(u_n(y)))}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ com $n_k \geq n(A)$. Com efeito, como $y \in M_0$, $f_n(y) \in E(u_n(y))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $i = n, n+1, ..., p(n)$, temos

$$f_i(y) \in E(u_i(y)) \subset \cup E(u_i(y))$$

o que implica que

$$g_{n_k}(y) = \sum_{i=n}^{p(n_k)} a_i(n_k) f_i(y) \subset \cup_{i \geq n(A)} E(u_i(y))$$

logo,

$$g_{n_k}(y) \subset \overline{conv(\cup_{i \geq n(A)} E(u_i(y)))}.$$

Agora, tomando o limite quando $k \to \infty$ na relação acima temos

$$f(y) \in \overline{conv(\cup_{i \geq n(A)} E(u_i(y)))}.$$

Mas observe que $E(u_n)(y) \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n(A)$, implica $\cup_{n \geq n(A)} E(u_n(y)) \subset A$ e consequentemente $conv(\cup_{n \geq n(A)} E(u_n(y))) \subset A$, pois A é convexo. Logo $\overline{conv(\cup_{n \geq n(A)} E(u_n(y)))} \subset \overline{A}$. E portanto,

$$f(y) \in \overline{A}.$$

Mas A é um semi-espaço aberto contendo $E(u(y))$ arbitrário. Assim, podemos concluir que $f(y) \in B$, onde B é qualquer semi-espaço fechado que contém $E(u(y))$. Logo,

$$f(y) \in \cap B$$

(intersecção de todos os semi-espaços fechados que contém E(u(y))).

Mas segue do Corolário 1.2 que a intersecção de todos os semi-espaços fechados que contém $E(u(y))$ é igual a $\overline{convE(u(y))}$. Logo,

$$f(y) \in \overline{convE(u(y))}.$$

Agora observe que sendo E fracamente semicontínua superiormente em $u(y)$, então $E(u(y))$ é fechado e convexo. Assim,

$$E(u(y)) = \overline{E(u(y))} = \overline{convE(u(y))} \ni f(y).$$

Logo, podemos concluir que

$$f(y) \in E(u(y))$$

para cada $y \in M_0$.

Portanto,

$$f \in SelE(u).$$

$\blacksquare$

Observação 3.4 *Como cada aplicação semicontínua superiormente é fracamente semicontínua superiormente, a conclusão do Teorema permanece inalterada se assumirmos que E é semicontínua superiormente.*

Na demonstração do teorema de existência nós usaremos o seguinte Teorema do Ponto Fixo, o qual é uma variação de um Teorema devido a Arino, Gauthier e Penot, [2], [11], [18].

Teorema 3.5 (Teorema do Ponto Fixo) *Seja K um subconjunto não vazio fracamente compacto em um espaço de Banach real X e seja $E : K \to \mathcal{P}(K)$ tal que para cada $u \in K$, $E(u)$ é fechado e convexo. Se o gráfico de E é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado, então E tem pelo menos um ponto fixo, isto é, existe pelo menos um elemento $u \in K$ tal que $u \in E(u)$.*

3.3 Sistemas de inclusões diferenciais

Considere o seguinte problema:

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta_p u \in F(u,v) & \\ \dfrac{dv}{dt} - \Delta_q v \in G(u,v) & \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $p, q > 2$, F e G são operadores possivelmente multívocos em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e u_0, $v_0 \in L^2(\Omega)$.

Definição 3.5 *Uma solução fraca de (P) é um par (u, v) satisfazendo:*

$$u, v \in C([0,T]; L^2(\Omega))$$

para o qual existem $f, g \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$,

$$f(t) \in F(u(t), v(t))$$

$$g(t) \in G(u(t), v(t))$$

qtp em $[0,T]$, *e tal que* (u,v) *é uma solução fraca no sentido da Definição 2.8 em* $[0,T]$ *para o sistema* (P_1) *abaixo:*

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \triangle_p u = f \\ \dfrac{dv}{dt} - \triangle_q v = g \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 \qquad\qquad\qquad em\ \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Para demonstrar o resultado de existência global usaremos a seguinte definição:

Definição 3.6 *Sejam* $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *(conjunto das partes de* $\mathbb{R}$*) duas aplicações possivelmente multívocas que levam limitados de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *em limitados de* $\mathbb{R}$. *O par* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *é positivamente sublinear se existem* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ *e* $m_0 > 0$ *tais que para cada* $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *com* $| u |> m_0$ *ou* $| v |> m_0$ *para os quais existe* $f_0 \in \mathcal{F}(u,v)$ *com* $uf_0 > 0$ *ou existe* $g_0 \in \mathcal{G}(u,v)$ *com* $vg_0 > 0$, *tem-se simultaneamente:*

$$| f | \leq a | u | + b | v | + c$$

e

$$| g | \leq a | u | + b | v | + c$$

para cada $f \in \mathcal{F}(u,v)$ *e cada* $g \in \mathcal{G}(u,v)$.

Diremos que um par (F, G) *de operadores* $F, G : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathcal{P}(L^2(\Omega))$ *é positivamente sublinear se* F *e* G *forem operadores de Nemitski associados à* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *respectivamente, onde* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *são operadores positivamente sublineares em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A condição acima definida, que chamaremos de sublinearidade positiva, pode ser melhor explicada da seguinte forma:

Se $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e

$$| u | \leq m_0 \qquad \text{e} \qquad | v | \leq m_0 \tag{3.5}$$

não exigimos nada de $\mathcal{F}(u, v)$ e $\mathcal{G}(u, v)$, uma vez que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ levam limitados em limitados e portanto os produtos fu e gv são limitados quaisquer que sejam $f \in \mathcal{F}(u, v)$ e $g \in \mathcal{G}(u, v)$. Se (3.5) não vale para um determinado par (u, v), então $| u | > m_0$ ou $| v | > m_0$. Neste caso, também não há necessidade de impor nada à $\mathcal{F}(u, v)$ e $\mathcal{G}(u, v)$ se

$$uf \leq 0 \quad \text{e} \quad gv \leq 0, \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{F}(u, v) \text{ e } g \in \mathcal{G}(u, v). \tag{3.6}$$

No entanto, se ambos (3.5) e (3.6) não são satisfeitas, isto é, se $| u | > m_0$ ou $| v | > m_0$ e $uf_0 > 0$ ou $vg_0 > 0$ para algum $f_0 \in \mathcal{F}(u, v)$ ou algum $g_0 \in \mathcal{G}(u, v)$ então impomos a condição de que $| f | \leq a | u | + b | v | + c$ e $| g | \leq a | u | + b | v | + c$ para cada $f \in \mathcal{F}(u, v)$ e cada $g \in \mathcal{G}(u, v)$.

Assim, consideremos primeiramente a equação não linear

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \triangle_p u = f & \\ u(t, x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \end{cases}$$

onde $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Sabemos pelo Teorema 2.4 que para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ o problema acima tem uma única solução fraca, u. Além disso, esta solução satisfaz:

$$\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \| u_0 \|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \| f(s) \|_{L^2(\Omega)} \, ds.$$

De fato, se u é solução fraca, então existem sequências $f_n \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $u_n \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $u_{0_n} \in \mathcal{D}(-\Delta_p)$ tais que u_n é solução forte da equação $\frac{du_n}{dt} - \Delta_p u_n = f_n$, com $u_n(0) = u_{0_n}$, $f_n \to f$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $u_n \to u$ uniformemente em $[0,T]$ e $u_{0_n} \to u_0$ em $L^2(\Omega)$.

Como u_n é solução forte, então $\frac{du_n}{dt} - \Delta_p u_n = f_n$ qtp em $[0,T]$.

Fazendo o produto interno com $u_n(t)$ temos

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}(t), u_n(t) \right\rangle + \langle -\Delta_p u_n(t), u_n(t) \rangle = \langle f_n(t), u_n(t) \rangle$$

logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \parallel u_n(t) \parallel^p_{W_0^{1,p}}$$

$$= \langle f_n(t), u_n(t) \rangle \ \leq \parallel f_n(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u_n(t) \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

Integrando de 0 a t temos

$$\frac{1}{2} \parallel u_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \ \frac{1}{2} \parallel u_{0_n} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \parallel f_n(s) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u_n(s) \parallel_{L^2(\Omega)} ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

Por Gronwall segue que

$$\parallel u_n(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel u_{0_n} \parallel_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \parallel f_n(s) \parallel_{L^2(\Omega)} ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

Tomando o limite quando $n \to \infty$ temos

$$\parallel u(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel u_0 \parallel_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \parallel f(s) \parallel_{L^2(\Omega)} ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

Agora enunciaremos e demonstraremos nosso principal resultado. A idéia é mostrar que uma aplicação multívoca definida adequadamente tem pelo menos um ponto fixo cuja existência é equivalente à existência de pelo menos uma solução fraca local de (P).

Teorema 3.6 *Sejam $F, G : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathcal{P}(L^2(\Omega))$ semicontínuas superiormente (Definição 3.4), e tais que: se $B_1, B_2 \subset L^2(\Omega)$ são limitados, então $F(B_1, B_2) = \bigcup_{(u,v)\in B_1\times B_2} F(u,v)$ e $G(B_1, B_2) = \bigcup_{(u,v)\in B_1\times B_2} G(u,v)$ são limitados em $L^2(\Omega)$. Dado $T > 0$, para cada par $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ existe $T_0 \in (0, T]$ tal que o sistema (P) tem pelo menos uma solução fraca (u, v) definida em $[0, T_0]$.*

Se, em adição, o par (F, G) é positivamente sublinear, a mesma conclusão vale com $T_0 = T$.

Demonstração: Dividiremos nossa demonstração em duas partes, a primeira está relacionada com a prova de existência local, e a segunda com a existência global.

Sejam $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ e escolha $m > 0$ tal que

$$\| u_0 \|_{L^2(\Omega)} + 1 \leq m \qquad \text{e} \qquad \| v_0 \|_{L^2(\Omega)} + 1 \leq m.$$

Assim, segue por hipótese que se $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$ e $\| w_1 \|_{L^2(\Omega)} \leq m$ e $\| w_2 \|_{L^2(\Omega)} \leq m$ então existe $r > 0$ tal que

$$\| z \|_{L^2(\Omega)} \leq r, \text{ para toda } z \in F(w_1, w_2)$$

e

$$\| \overline{z} \|_{L^2(\Omega)} \leq r, \text{ para toda } \overline{z} \in G(w_1, w_2).$$

Seja $T_0 \in (0, T]$ tal que

$$T_0 r \leq 1.$$

Defina o conjunto $K = \{(f, g); f, g \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega)), \| f(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq r, \| g(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq r, qtp \text{ em } [0, T_0]\}$.

É fácil ver que K é não vazio, basta notar que $(0, 0) \in K$, onde 0 é a função nula.

O conjunto K é fracamente compacto em

$$L^2(0,T_0;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T_0;L^2(\Omega)).$$

De fato, seja $\{(f_n,g_n)\}$ uma seqüência em K. Queremos mostrar que existe uma subseqüência que converge fracamente em

$$L^2(0,T_0;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$$

para algum elemento de K.

Analisaremos $\{f_n\}$, porém o mesmo raciocínio vale para $\{g_n\}$.

Como $\| f_n(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq r$ qtp em $[0,T_0]$, então

$$\| f_n \|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} = \int_0^{T_0} \| f_n(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \leq \int_0^{T_0} r^2 dt = r^2 T_0 \leq r.$$

Portanto $\{f_n\}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$, logo podemos extrair uma subseqüência $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ tal que

$$f_{n_k} \rightharpoonup w$$

em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ para algum $w \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \| w \|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} &\leq \liminf \| f_{n_k} \|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \\ &= \liminf \left(\int_0^{T_0} \| f_{n_k}(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \right)^{1/2} \\ &\leq \liminf \left(\int_0^{T_0} r^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{T_0} r^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Isto significa que

$$\int_0^{T_0} \| w(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \leq \int_0^{T_0} r^2 dt$$

o que implica

$$\| w(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq r$$

qtp em $[0, T_0]$.

Como o mesmo raciocínio pode ser aplicado à $\{g_n\}$, então podemos concluir que existe uma subseqüência $\{(f_{n_k}, g_{n_k})\} \subset \{(f_n, g_n)\}$ e $(w, \widetilde{w}) \in K$ tal que

$$(f_{n_k}, g_{n_k}) \rightharpoonup (w, \widetilde{w})$$

em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$.

Portanto K é fracamente compacto em

$$L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Nosso próximo passo será definir o operador

$$P : K \to C([0, T_0]; L^2(\Omega)) \times C([0, T_0]; L^2(\Omega))$$

por $P(f, g) = (u, v)$, onde (u, v) é a única solução fraca em $[0, T_0]$ do sistema

$$(P_1) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta_p u = f & \text{qtp em } (0, T_0] \\ \dfrac{dv}{dt} - \Delta_q v = g & \text{qtp em } (0, T_0] \\ u(t, x) = v(t, x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \end{cases}$$

Note que pelo Teorema 2.4 este operador está bem definido, uma vez que as soluções u e v sempre existem e são únicas, pois os operadores $-\Delta_p$ e $-\Delta_q$ são maximais monótonos em $L^2(\Omega)$, f e $g \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$, (e portanto f e $g \in L^1(0, T_0; L^2(\Omega)))$, e u_0 e $v_0 \in L^2(\Omega) = \overline{W_0^{1,p}(\Omega)} = \overline{W_0^{1,q}(\Omega)}$.

Mostremos que

$$\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq m \qquad \text{e} \qquad \| v(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq m$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Com efeito, sabemos que

$$\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \| u_0 \|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \| f(s) \|_{L^2(\Omega)} \, ds$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} &\leq \| u_0 \|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T_0} \| f(s) \|_{L^2(\Omega)} \, ds \\
&\leq m - 1 + \int_0^{T_0} r ds = m - 1 + rT_0 \leq m
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Uma vez que o procedimento é análogo para v temos que

$$
\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq m \qquad \text{e} \qquad \| v(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq m
$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Agora com a intenção de usarmos o Teorema do Ponto Fixo, definiremos o operador

$$
\varphi : K \to \mathcal{P}(K)
$$

por $\varphi(f, g) = (SelF(u, v), SelG(u, v))$ (veja Definição 3.3), onde $(u, v) = P(f, g)$.

O operador φ está bem definido, no sentido que sua imagem nunca é vazia. Com efeito, sejam $(f, g) \in K$ e $(u, v) = P(f, g)$.

Note que $u \in C([0, T_0]; L^2(\Omega))$, logo para todo aberto $A \subset L^2(\Omega)$, $u^{-1}(A)$ é aberto em $[0, T_0]$ e portanto $u^{-1}(A)$ é Lebesgue mensurável, o que mostra que u é mensurável. O mesmo vale para v.

Por outro lado F e G são semicontínuas superiormente, e então pelo Lema 3.3,

$$
F(u, v) : [0, T_0] \to \mathcal{P}(L^2(\Omega))
$$

e

$$
G(u, v) : [0, T_0] \to \mathcal{P}(L^2(\Omega))
$$

são mensuráveis.

Como $L^2(\Omega)$ é separável, segue do Teorema 3.3 que $SelF(u,v) \neq \emptyset$ e $SelG(u,v) \neq \emptyset$. Portanto, o operador φ está bem definido.

Verifiquemos agora que φ realmente leva elementos de K em subconjuntos de K. Tome $(f,g) \in K$, e seja $(u,v) = P(f,g)$. Logo, $\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq m$, e $\| v(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq m$, para todo $t \in [0,T_0]$. Assim, para todo $t \in [0,T_0]$, $\| z \|_{L^2(\Omega)} \leq r$ e $\| \overline{z} \|_{L^2(\Omega)} \leq r$, sempre que $z \in F(u(t),v(t))$ e $\overline{z} \in G(u(t),v(t))$,

Em particular, para todo $\widetilde{f} \in SelF(u,v)$ e para todo $\widetilde{g} \in SelG(u,v)$, $\| \widetilde{f}(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq r$ e $\| \widetilde{g}(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq r$, $\forall\, t$ em $[0,T_0]$.

Portanto, $(\widetilde{f},\widetilde{g}) \in K$. Ou seja,

$$\varphi(f,g) = (SelF(u,v), SelG(u,v)) \in \mathcal{P}(K).$$

Nosso próximo passo será mostrar que φ tem valores convexos e fechados, ou seja, que para cada $(f,g) \in K$, $\varphi(f,g) = (SelF(u,v), SelG(u,v))$ é fechado e convexo em $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Sejam, $f_1, f_2 \in SelF(u,v)$ e $\alpha \in (0,1)$. Então $\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$ é mensurável, pois f_1 e f_2 o são. Além disso, $\alpha f_1(t) + (1-\alpha) f_2(t) \in F(u(t),v(t))$ *qtp* em $[0,T_0]$, pois F é semicontínua superiormente (veja Definição 3.4), logo $F(u(t),v(t))$ é convexo. Como o mesmo procedimento se aplica a G temos que $SelF(u,v)$ e $SelG(u,v)$ são convexos.

Considere agora a seqüência $\{f_n\} \subset SelF(u,v)$ com $f_n \to \overline{f}$ em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$. Claramente $\overline{f}$ é mensurável. Além disso, existe uma subseqüência $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ tal que

$$f_{n_k}(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \overline{f}(t)$$

qtp em $[0,T_0]$. Logo $\overline{f}(t) \in \overline{F(u(t),v(t))}$ *qtp* em $[0,T_0]$. Mas $F(u(t),v(t)) = \overline{F(u(t),v(t))}$ pois F é semicontínua superiormente (veja Definição 3.4). Assim,

$$\overline{f}(t) \in F(u(t),v(t))$$

qtp em $[0,T_0]$. Portanto, $SelF(u,v)$ é fechado. Como o mesmo raciocínio vale para G, podemos concluir que φ assume valores convexos e fechados.

Resta mostrar que o gráfico de φ é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado em K.

Identificando o operador φ com seu gráfico podemos escrever

$$\varphi = \{((f,g),(\overline{f},\overline{g})); (f,g) \in K \text{ e } (\overline{f},\overline{g}) \in \varphi(f,g)\}.$$

Seja $\{((f_n,g_n),(\overline{f}_n,\overline{g}_n))\}$ uma seqüência em φ tal que

$$(f_n,g_n) \rightharpoonup (f,g)$$

em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ e

$$(\overline{f}_n,\overline{g}_n) \rightharpoonup (\overline{f},\overline{g})$$

em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$.

Queremos mostrar que $((f,g),(\overline{f},\overline{g})) \in \varphi$.

Claramente $(f,g) \in K$, já que K é fracamente compacto e portanto fracamente fechado, dêsde que a topologia fraca é separada. Logo existe um único elemento

$$(u,v) \in C([0,T_0];L^2(\Omega)) \times C([0,T_0];L^2(\Omega))$$

tal que $(u,v) = P(f,g)$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $(\overline{f},\overline{g}) \in \varphi(f,g)$, ou seja, queremos mostrar que $(\overline{f},\overline{g}) \in (SelF(u,v), SelG(u,v))$, onde $(u,v) = P(f,g)$.

Note que como $((f_n,g_n),(\overline{f}_n,\overline{g}_n)) \in \varphi$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(u_n,v_n) \in C([0,T_0];L^2(\Omega)) \times C([0,T_0];L^2(\Omega))$ tal que $(u_n,v_n) = P(f_n,g_n)$, e além disso, $(\overline{f}_n,\overline{g}_n) \in (SelF(u_n,v_n), SelG(u_n,v_n))$. Assim apelando para o Teorema 3.4, basta mostrarmos, passando a uma subseqüência se necessário, que $(u_n, v_n) \to (u, v) = P(f, g)$ qtp em $[0, T_0]$, para garantirmos que

$$(\overline{f}, \overline{g}) \in (SelF(u, v), SelG(u, v)).$$

Como u_n é solução fraca de $\dfrac{du_n}{dt} - \Delta_p u_n = f_n$, então pela Proposição 2.6 u_n verifica

$$\frac{1}{2} \parallel u_n(t) - x \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel u_n(s) - x \parallel^2 + \int_s^t \langle f_n(\tau) - y, u_n(\tau) - x \rangle d\tau$$

para todo $x \in \mathcal{D}(-\Delta_p)$ e $y = -\Delta_p x$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T_0$.

Mostraremos agora que $\{u_n\}$ contém ao menos uma subseqüência que converge para u, em $C([0, T_0]; L^2(\Omega))$, porém o mesmo procedimento pode ser usado para mostrar que existe $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ com $v_{n_k} \to v$ em $C([0, T_0]; L^2(\Omega))$.

Como o conjunto $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável (veja Definição 3.1), pois $\parallel f_n(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq\ r$ qtp em $[0, T_0]$, então pelo Teorema de Baras o conjunto das soluções $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ de

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} - \Delta_p u_n = f_n & \text{qtp em } (0, T_0] \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

quando f_n percorre o conjunto $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $C([0, T_0]; L^2(\Omega))$.

Logo existe $\overline{u} \in C([0, T_0]; L^2(\Omega))$ e uma subseqüência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tal que u_{n_k} converge para $\overline{u}$ em $C([0, T_0]; L^2(\Omega))$.

Agora observe que como

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{em} \quad L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$$

e $u_{n_k} \to \overline{u}$ em $C([0, T_0]; L^2(\Omega))$ e consequentemente

$$u_{n_k} \to \overline{u} \quad \text{em} \quad L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$$

então

$$\langle f_{n_k} - y, u_{n_k} - x \rangle_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega))} \to \langle f - y, \overline{u} - x \rangle_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega))}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(-\Delta_p)$ e $y = -\Delta_p(x)$.

Mas cada u_n com $n \in \mathbb{N}$ e em particular cada u_{n_k} verifica

$$\| u_{n_k}(t) - x \|^2 \leq \| u_{n_k}(s) - x \|^2 + 2\int_s^t \langle f_{n_k}(\tau) - y, u_{n_k}(\tau) - x\rangle_{L^2(\Omega)} d\tau$$

logo tomando o limite quando $n_k \to \infty$ temos

$$\| \overline{u}(t) - x \|^2 \leq \| \overline{u}(s) - x \|^2 + 2\int_s^t \langle f(\tau) - y, \overline{u}(\tau) - x\rangle_{L^2(\Omega)} d\tau$$

para todo $x \in \mathcal{D}(-\Delta_p)$ e $y = -\Delta_p(x)$, e novamente pela Proposição 2.6 $\overline{u}$ é uma solução fraca de $\dfrac{d\overline{u}}{dt} - \Delta_p \overline{u} = f$, com $\overline{u}(0,x) = u_0(x)$.

De modo análogo existe $\overline{v} \in C([0,T_0]; L^2(\Omega))$ tal que $\overline{v}$ é solução fraca de $\dfrac{d\overline{v}}{dt} - \Delta_p \overline{v} = f$, com $\overline{v}(0,x) = v_0(x)$.

Logo pela unicidade da solução fraca $(\overline{u}, \overline{v}) = (u, v)$, e portanto existe uma subseqüência $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\} \subset \{(u_n, v_n)\}$ tal que $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$ converge para (u, v), e onde $(u, v) = P(f, g)$.

Como $(\overline{f}_n, \overline{g}_n) \rightharpoonup (\overline{f}, \overline{g})$ em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ e consequentemente $(\overline{f}_n, \overline{g}_n) \rightharpoonup (\overline{f}, \overline{g})$ em $L^1(0, T_0; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T_0; L^2(\Omega))$, aplicando o Teorema 3.4, podemos concluir que $(\overline{f}, \overline{g}) \in \varphi(f, g)$, e portanto φ é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado.

Então pelo Teorema do Ponto Fixo (3.5), existe $(f, g) \in K$ tal que $(f, g) \in \varphi(f, g)$. Consequentemente, $(u, v) = P(f, g)$ é uma solução fraca do sistema (P), e isto completa a prova da parte de existência local.

Passemos agora a demonstração da existência global.

Primeiro observamos que, sob as hipóteses do teorema, pode-se mostrar através do Lema de Zorn que cada solução fraca local ou é não continuável ou pode ser estendida a uma solução (u^*, v^*) não continuável, definida ou em $[0, T_m]$ ou em $[0, T_m)$ para algum $T_m \leq T$. Para completar a prova é suficiente mostrar que a última situação não pode ocorrer. Com esta finalidade, assumimos por contradição que (u^*, v^*) é uma solução não continuável de (P) definida em $[0, T_m)$, onde $T_m \leq T$.

Fazendo o produto interno em ambos os lados da equação

$$\frac{du^*}{dt} - \Delta_p u^* = f^*$$

com u^* e integrando de 0 a t, $t \leq T_m$, obtemos

$$\frac{1}{2} \parallel u^*(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega f^*(s,x) u^*(s,x) dx ds.$$

Agora, por hipótese, o par (F, G) é positivamente sublinear e $f^* \in F(u^*, v^*)$. Assim, seja $m_0 > 0$ como na Definição 3.6 e seja D um subconjunto de $[0, T_m) \times \Omega$ definido da seguinte forma: $(s, x) \in D$ se e somente se

$$\mid u^*(s,x) \mid \leq \; m_0 \qquad \text{e} \qquad \mid v^*(s,x) \mid \leq \; m_0$$

ou

$$u^*(s,x) z \leq 0 \qquad \text{e} \qquad v^*(s,x) \overline{z} \leq 0$$

quaisquer que sejam $z \in F(u^*(s,x), v^*(s,x))$ e $\overline{z} \in G(u^*(s,x), v^*(s,x))$.

Defina $\widetilde{D} = D \cap ((0,t) \times \Omega)$ e $\widetilde{\widetilde{D}} = D^C \cap ((0,t) \times \Omega)$.

Como F é o operador de Nemitski associado à $\mathcal{F}$, e $\mathcal{F}$ leva limitados de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em limitados de $\mathbb{R}$, claramente existe $M_0 > 0$ tal que

$$\int \int_{\widetilde{D}} u^*(s,x) f^*(s,x) dx ds \; \leq \; M_0.$$

Da sublinearidade positiva de (F, G) temos que em $\widetilde{\widetilde{D}}$

$$u^*(s,x) f^*(s,x) \leq [a \mid u^*(s,x) \mid + b \mid v^*(s,x) \mid + c] \mid u^*(s,x) \mid$$

com $a, b, c > 0$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\| u^*(t) \|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int\int_{\widetilde{D}\cup\widetilde{\widetilde{D}}} f^*(s,x)u^*(s,x)dxds \\
&\leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int\int_{\widetilde{D}} f^*(s,x)u^*(s,x)dxds \\
&+ 2\int\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} f^*(s,x)u^*(s,x)dxds \\
&\leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int\int_{\widetilde{D}} f^*(s,x)u^*(s,x)dxds \\
&+ 2\int\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} [a \mid u^*(s,x) \mid + b \mid v^*(s,x) \mid + c] \mid u^*(s,x) \mid dxds \\
&\leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_0 + 2a\int\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \mid u^*(s,x) \mid^2 dxds \\
&+ 2b\int\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \mid v^*(s,x) \mid\mid u^*(s,x) \mid dxds \\
&+ 2c\int\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \mid u^*(s,x) \mid dxds \\
&\leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_0 + 2a\int_0^t\int_\Omega \mid u^*(s,x) \mid^2 dxds \\
&+ 2b\int_0^t\int_\Omega \mid v^*(s,x) \mid\mid u^*(s,x) \mid dxds \\
&+ 2c\int_0^t\int_\Omega \mid u^*(s,x) \mid dxds \\
&\leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + 2M_0 + 2a\int_0^t \| u^*(s,x) \|^2_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ 2b\int_0^t \| v^*(s,x) \|_{L^2(\Omega)}\| u^*(s,x) \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ 2c[m(\Omega)]^{1/2}\int_0^t \| u^*(s,x) \|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}
$$

Assim, existem constantes positivas α, β, γ e C

$$
\begin{aligned}
\| u^*(t) \|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C^2 + 2\int_0^t [\alpha \| u^*(s) \|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \beta \| v^*(s) \|_{L^2(\Omega)} + \gamma] \| u^*(s) \|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned}\| u^*(t) \|_{L^2(\Omega)} &\leq C + \gamma T \\ &+ \int_0^t [\alpha \| u^*(s) \|_{L^2(\Omega)} + \beta \| v^*(s) \|_{L^2(\Omega)}] ds.\end{aligned}$$

Ou seja, existe M independente de t tal que

$$\| u^*(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq M + \int_0^t [\alpha \| u^*(s) \|_{L^2(\Omega)} + \beta \| v^*(s) \|_{L^2(\Omega)}] ds.$$

Analogamente existe $\widetilde{M}$ independente de t tal que

$$\| v^*(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{M} + \int_0^t [\beta \| u^*(s) \|_{L^2(\Omega)} + \alpha \| v^*(s) \|_{L^2(\Omega)}] ds.$$

Somando estas duas desigualdades e denotando por $K = M + \widetilde{M}$ e $\rho = \alpha + \beta$ temos

$$\| u^*(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| v^*(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq K + \rho \int_0^t [\| u^*(s) \|_{L^2(\Omega)} + \| v^*(s) \|_{L^2(\Omega)}] ds$$

e da desigualdade de Gronwall vem que

$$\| u^*(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| v^*(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq K e^{\rho T}$$

para todo $t \in [0, T_m)$.

Como F e G levam limitados de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ em limitados de $L^2(\Omega)$ existe $L > 0$ tal que

$$\| z \| \leq L \qquad \text{e} \qquad \| \overline{z} \| \leq L$$

sempre que $z \in F(u^*(t), v^*(t))$ e $\overline{z} \in G(u^*(t), v^*(t))$, qualquer que seja $t \in [0, T_m)$.

Assim, sejam (f^*, g^*), $f^*(t) \in F(u^*(t), v^*(t))$ e $g^*(t) \in G(u^*(t), v^*(t))$ qtp em $[0, T_m)$, tais que u^* e v^* são soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{du^*}{dt} - \triangle_p u^* = f^* \\ \dfrac{dv^*}{dt} - \triangle_q v^* = g^* \end{cases}$$

respectivamente em $[0, T_m)$. Em vista das observações acima, tanto f^* quanto g^* pertencem a $L^1([0, T_m], L^2(\Omega))$. Logo, Teorema 2.4, o problema

$$(P_*) \begin{cases} \dfrac{dw_1}{dt} - \triangle_p w_1 = f^* \\ \dfrac{dw_2}{dt} - \triangle_q w_2 = g^* \\ w_1(t,x) = w_2(t,x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ w_1(0,x) = u_0(x), w_2(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

tem uma única solução $(w_1, w_2) : [0, T_m] \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a qual deve coincidir com (u^*, v^*) em $[0, T_m)$, e portanto,

$$\lim_{t \to T_m} u^*(t) = \lim_{t \to T_m} w_1(t) = w_1(T_m).$$

Analogamente

$$\lim_{t \to T_m} v^*(t) = \lim_{t \to T_m} w_2(t) = w_2(T_m).$$

Como $w_1(T_m)$ e $w_2(T_m)$ pertencem a $L^2(\Omega)$ podemos concluir que as soluções u^* e v^* podem ser continuadas a direita de T_m, contrariando a maximalidade de u^* e v^*. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.

[2] ARINO, O.; GAUTHIER, S.; PENOT, J. P. A fixed point theorem for sequentially continuous mapping with applications to ordinary differential equations. *Funkcial Ekvac.* v. 27, p. 273-279, 1984.

[3] BACHMAN, G.; NARICI, L. *Functional analysis*. New York: Academic Press, 1966.

[4] BARBU, V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach space*. Noordhoff International, 1976.

[5] BECKENSTEIN, E.; NARICI, L. *Topological vector spaces*. New York: Marcel Dekker, 1985.

[6] BRÈZIS, H. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Amsterdam: North-Holland, 1973.

[7] BRÈZIS, H. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Paris: Masson, 1983.

[8] BROWDER, F. Nonlinear elliptic boundary value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1963.

[9] BROWN, A.; PEARCY, C. *Introduction to operator theory I: elements of functional analysis*. New York: Springer-Verlag, 1977.

[10] CONWAY, J. B. *A course in functional analysis*. New York: Springer-Verlag, 1990.

[11] DÌAZ, J. I.; VRABIE, I. I. Existence for reaction diffusion systems: a compactness method approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 188, p. 521-540, 1994.

[12] DIBENEDETTO, E. *Degenerate parabolic equations*. New York: Springer-Verlag, 1993.

[13] EDWARDS, R. E. *Functional analysis: theory and applications*. Holt: Rinehart and Winston, 1965.

[14] HILLE, E.; PHILLIPS, R. S. Functional analysis and semi-groups. *Amer. Math. Soc. Coll. Publications*, v. 31, 1981.

[15] MINTY, G. On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations em Banach spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci.*. USA, 1963.

[16] MIYADERA, I. *Nonlinear Semigroups*. Providence: American Mathematical Society, 1992.

[17] PAZY, A. Semi-groups of nonlinear contractions and their asymptotic behaviour, In: "NONLINEAR ANALYSIS AND MECHANICS: HERIOT-WATT SYMPOSIUM". London, 1979.

[18] VRABIE, I.I. *Compactness methods for nonlinear evolutions*. London: Longman Scientific and Technical, 1987.

[19] YOSIDA, K. *Functional analysis*. New York: Springer-Verlag, 1968.

Sumário