UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Taxa de atração para equações de reação-difusão com difusão grande localizada

Leonardo Pires
Orientadora: Profa. Dra. Karina Schiabel Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Março de 2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

P667ta

Pires, Leonardo.
Taxa de atração para equações de reação-difusão com difusão grande localizada / Leonardo Pires. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
102 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações de reação e difusão (Matemática). 3. Sistemas dinâmicos não-lineares. 4. Atratores (Matemática). I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Karina Schiabel

Profa. Dra. Karina Schiabel-Silva
DM - UFSCar

VLCarbone

Profa. Dra. Vera Lúcia Carbone
DM - UFSCar

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
ICMC - USP

Agradecimentos[1]

À Profa. Dra. Karina Schiabel Silva pela orientação neste trabalho e por toda ajuda a mim dedicada desde a graduação.

Ao Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho pela contribuição neste trabalho.

Aos meus amigos, em especial ao Rodrigo Samprogna, pelas horas de estudo.

[1] Suporte Fapesp Processo: 2011/03398-0.

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica assintótica não linear de problemas parabólicos semilineares do tipo reação-difusão considerando que o coeficiente de difusão torna-se grande em uma sub-região Ω_0 que é interior ao domínio físico Ω. Obtemos, sob determinadas hipóteses, que a família de atratores se comporta continuamente com relação a uma taxa de atração.

Abstract

In this work we study the nonlinear asymptotical dynamics of a semilinear reaction-diffusion equation of parabolic type, when the diffusion coefficient becomes very large in a subregion Ω_0 which is interior to the physical domain Ω. We obtain, under suitable assumptions, that the family of attractors behave continuously with respect to a rate of attraction.

Sumário

Introdução

Nos modelos de condução de calor em materiais compostos o coeficiente de difusão comporta-se de modo bastante irregular, fazendo, por exemplo, com que o calor seja conduzido mais rapidamente em algumas regiões e mais lentamente em outras. Analisar tal estado singular para prever o seu comportamento ao longo do tempo é uma das razões da análise assintótica das equações diferenciais.

Neste trabalho iremos considerar problemas de reação-difusão semilineares para os quais o coeficiente de difusão torna-se muito grande em um subconjunto que está no interior do domínio físico da equação diferencial e mostrar como sua dinâmica assintótica (atrator) se comporta continuamente com respeito à variação da difusão. Formalmente, sejam Ω um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^n$, ε um parâmetro positivo, m um inteiro positivo e $\Omega_0 = \cup_{i=1}^m \Omega_{0,i}$ um subconjunto suave no interior de Ω, onde $\Omega_{0,i}$ são sub-domínios suaves de Ω com $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Denotemos $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ e notemos que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cup \partial\Omega_0$. Assumimos que os coeficientes de difusão são funções suaves em Ω, satisfazendo $0 < m_0 \leq p_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon$, para todo $x \in \Omega$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Também assumimos que a difusão é grande em Ω_0 quando $\varepsilon \to 0$, mais precisamente,

$$p_\varepsilon(x) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} p_0(x), \text{ uniformemente em } \Omega_1 \text{ com } p_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_1, (0,\infty)) \\ \infty, \text{ uniformemente em subconjuntos compactos de } \Omega_0 \end{cases}.$$

Com esta terminologia, consideramos a seguinte família de equações parabólicas

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda > 0$, $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Uma vez que difusibilidade grande implica uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais, é natural esperar que para valores pequenos de ε, a solução do problema (1) seja aproximadamente (espacialmente) constante em Ω_0. Por esta razão, suponhamos por um momento que u^ε convirja, em algum sentido, para uma função $u = u(t,x)$ que assume o valor constante $u_{\Omega_0}(t)$ sobre Ω_0.

Como mostrado em [2], o problema limite de (1), quando $\varepsilon \to 0$, toma a forma

$$\begin{cases} u_t(t) - \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u = f(u), \quad \text{em } \overline{\Omega}_1 \\ u|_{\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}, \quad \text{em } \Omega_{0,i},\ i = 1, \dots, m \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|} \displaystyle\int_{\partial \Omega_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\sigma + \lambda u_{\Omega_{0,i}} = f(u_{\Omega_{0,i}}), \quad i = 1, \dots, m \\ p_0(x) \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{em } \partial \Omega \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2}$$

Quando o parâmetro $\varepsilon \to 0$, a difusão p_ε torna-se muito grande em Ω_0, que é interior ao domínio Ω, e seu limite em Ω_0 é uma EDO. É importante observar que o problema (1) é uma perturbação singular do problema (2) onde o coeficiente de difusão é feito grande em sub-regiões do domínio.

O problema em questão foi considerado em trabalhos anteriores, dentre os quais destacamos [2] e [15]. Com algumas hipóteses sobre a não-linearidade f, os problemas (1) e (2) possuem soluções globalmente definidas e possuem atratores globais nos espaços de fase $H^1(\Omega)$ e $H^1_{\Omega_0}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \nabla u = 0 \text{ em } \Omega_0\}$, respectivamente.

O estudo do comportamento da família de atratores associada foi iniciado em [2], onde os autores obtiveram sua semicontinuidade superior em $\varepsilon = 0$. A semicontinuidade inferior foi estabelecida em [15], e em [7] com condições de fronteira não-lineares. Recentemente foi considerado em [4] um problema de reação-difusão com variação no coeficiente de difusão, ressaltando a uniformidade (em ε) da convergência dos atratores, bem como algumas taxas para tal convergência. A diferença $\|p_\varepsilon - p_0\|_\infty$ foi tomada como parâmetro, sem, entretanto, assumir que a difusão torna-se muito grande em uma sub-região interior ao domínio físico. Nosso objetivo é estender alguns resultados de taxa de convergência obtidos em [4] para o caso específico de problemas com difusão grande localizada.

Consideramos $\{T_\varepsilon(t)\,; t \geq 0\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, os semigrupos não lineares associados aos problemas (1) e (2) e $\mathscr{A}_\varepsilon$ seus atratores globais. Sem nos preocuparmos com os detalhes, apresentamos as seguir os principais resultados obtidos neste trabalho.

(i) Sejam $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ e $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ uma família com $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Então existem constantes positivas C e L tais que

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u^0\|_{H^1} \leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-\theta}\left[\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1} + (\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^\theta\right],\ t \geq 0, \quad (3)$$

onde $J_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ e está relacionado com a decomposição de $H^1(\Omega)$ em função do subespaço $H^1_{\Omega_0}(\Omega)$.

(ii) Suponha que o conjunto $\mathscr{E}_0 = \{u_*^{0,1}, ..., u_*^{0,k}\}$ dos pontos de equilíbrio de (2) seja constituído de pontos de equilíbrios hiperbólicos (portanto existe um número finito deles). Então existe $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tal que o conjunto $\mathscr{E}_\varepsilon$ dos pontos de equilíbrio de (1) é tal que $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u_*^{\varepsilon,1}, ..., u_*^{\varepsilon,k}\}$, $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$, e

$$\|u_*^{\varepsilon,i} - u_*^{0,i}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, ..., k.$$

(iii) Os atratores globais dos semigrupos não lineares associados aos problemas (1) e (2) são dados por $\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} W_\varepsilon^u(u_*^{\varepsilon,i})$, onde $W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon)$ denota a variedade instável de u_*^ε. Além disso, para cada vizinhança $B(u_*^\varepsilon, \delta)$ de u_*^ε, se $u^\varepsilon \in B(u_*^\varepsilon, \delta)$, então existem $\gamma, M > 0$ independentes de ε, tais que

$$\mathrm{dist}(T_\varepsilon(t)u^\varepsilon, W^u(u_*^\varepsilon)) \leq Me^{-\gamma t} \quad (4)$$

durante o tempo em que a órbita $T_\varepsilon(t)u^\varepsilon$ permanece em $B(u_*^\varepsilon, \delta)$.

(iv) A família $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_\varepsilon$ é contínua em $\varepsilon = 0$ e tal continuidade pode ser estimada por

$$\mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq \tilde{C}\left[[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+L}},$$

onde $\tilde{C}, \gamma$ e L são constantes positivas, $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, dist_H denota a semidistância de Hausdorff e $Z_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ está relacionado com a decomposição de $L^2(\Omega)$ em função do subespaço $L^2_{\Omega_0}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\,;\, u \text{ é constante q.s. em } \Omega_{0,i}\}$.

(v) Estamos em uma situação particular de [5], assim $\mathscr{A}_\varepsilon$ é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}^p$ para algum p apropriado, mais ainda, $\mathscr{A}_\varepsilon$ pode ser projetado injetivamente em um espaço de dimensão finita, sendo assim, podemos entendê-lo como um objeto de dimensão finita. Isto é, $\mathscr{A}_\varepsilon$ é um atrator exponencial fractal.

Organizamos este trabalho da seguinte forma: no Capítulo 1 reunimos definições, estabelecemos notações e resultados preliminares que serão utilizados no decorrer dos demais capítulos. Definimos os espaços de Sobolev e fazemos um resumo sobre a teoria de semigrupos e atratores, em seguida obtemos condições para existência e unicidade de soluções globais para o problema de Cauchy parabólico e apresentamos as noções de continuidade de atratores, taxa de atração e de convergência compacta. Com o objetivo de uma leitura rápida, as demonstrações foram omitidas.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de uma equação de reação-difusão com difusão grande localizada em uma região interior ao domínio físico da equação. Escrevemos o problema em um formato semilinear parabólico apropriado e demonstramos propriedades dos operadores. As principais propriedades são a setorialidade e a estrutura gradiente dos semigrupos não lineares associados. Na sequência estimamos a convergência compacta dos operadores resolventes, a continuidade dos semigrupos lineares e não lineares, obtendo assim a taxa de atração $(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon$. Para tanto é necessário um estudo detalhado de determinados problemas elípticos.

Reservamos o Capítulo 3 para tratarmos da continuidade dos conjuntos de equilíbrio e da continuidade dos atratores. Obtivemos que as variedades instáveis são dadas localmente como gráfico de uma aplicação Lipschitz, do que resulta a atração exponencial dos atratores. Utilizamos os resultados obtidos no capítulo anterior para estimar a continuidade dos atratores pela taxa de atração.

No apêndice A apresentamos uma estimativa para a dimensão fractal dos atratores associados aos problemas (1) e (2) e garantimos que, sob certas condições, os atratores podem ser vistos como objetos de dimensão finita.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo reunimos definições, estabelecemos notações e resultados preliminares que serão utilizados nos capítulos seguintes. Começamos com os espaços de Sobolev e a teoria de semigrupos e atratores, obtemos condições para existência e unicidade de soluções globais para o problema de Cauchy parabólico e apresentamos a noção de continuidade de atratores. Concluímos com a convergência compacta, uma ferramenta básica para compararmos problemas definidos em espaços diferentes. As principais referências são [6, 9, 10, 11, 12] e [13].

1.1 Espaços de Sobolev

Definição 1.1.1. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ por

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega)\,;\, \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega), i = 1, ..., n \Big\}.$$

Denotamos $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Se $m \geq 2$, definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega)\,;\, \forall\, |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ com $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, ..., n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$. Denotamos $D^\alpha u = g_\alpha$ e $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Consideramos $W^{1,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

$H^1(\Omega)$ com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} = \int_\Omega uv\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx,$$

o qual induz a norma

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que é equivalente à norma de $H^1(\Omega)$. Também consideramos $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

e $H^m(\Omega)$ com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2},$$

o qual induz a norma

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

que é equivalente à norma de $H^m(\Omega)$.

Observação 1.1.2. Com as respectivas normas, $W^{m,p}$ é um espaço de Banach e H^m é um espaço de Hilbert para $m \ge 1$ e $1 \le p \le \infty$. Além disso, $W^{m,p}$, $m \ge 1$, é reflexivo para $1 < p < \infty$. Note que $D^\alpha u$ está unicamente definida quase sempre e coincide com a derivada usual caso u seja derivável e esta derivada esteja em $L^p(\Omega)$. As regras de derivação tais como derivação do produto, regra da cadeia e integração por partes possuem correspondentes versões para os espaços de Sobolev. Se Ω é limitado, então $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Reciprocamente, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$, para todo $i = 1, .., n$, então $u = \tilde{u}$ q.s., onde $\tilde{u} \in C^1(\Omega)$. Se Ω é de classe C^1, então a norma de $W^{m,p}$, $m \ge 2$, é equivalente à norma $\|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$ e o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

restrito a Ω é um subespaço denso em $W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \le p < \infty$. Para detalhes indicamos [6].

Estamos interessados nos teoremas de imersões de Sobolev, sobretudo quando $p = 2$. Tais imersões dependem da dimensão do espaço bem como de propriedades de regularidade de Ω. Por exemplo, se $n = 1$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ continuamente, para $1 \le p \le \infty$, mas, se $n \ge 2$, tal resultado só vale para $p > n$.

Teorema 1.1.3 (Rellich-Kondrachov)**.** Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja aberto, limitado de classe C^1. Então temos as seguintes imersões compactas

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q$, $\forall q \in [1, p^*)$, onde $\dfrac{1}{p^*} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ se $p < n$;

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q$, $\forall q \in [1, \infty)$ se $p = n$;

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, se $p > n$.

Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente para todo p.

Observação 1.1.4. Observamos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compactamente quando Ω é limitado e suave. Além disso, $\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}$ é uma norma equivalente à norma de $H^1(\Omega)$ e, se $\|\nabla u\|_{H^1} = 0$ em Ω, então u é constante em cada componente conexa de Ω.

Denotamos, para $1 \le p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Em particular, $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ em $H^1(\Omega)$ que munido da norma de $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Informalmente, as funções em $H_0^1(\Omega)$ são aquelas que se anulam em $\partial\Omega$.

Teorema 1.1.5. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja aberto de classe C^1. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ com $1 \le p < \infty$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $u = 0$ em $\partial\Omega$.

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 1.1.6 (Desigualdade de Poincaré)**.** Suponha que $1 \le p < \infty$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Existe uma constante C (dependendo de $|\Omega|$ e p) tal que

$$\|u\|_{L^p} \le C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, $\|\nabla u\|_{L^p}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}}$. Em $H_0^1(\Omega)$, a expressão $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$ é um produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2}$, que é equivalente à norma $\|u\|_{H^1}$.

Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual topológico de $H^1(\Omega)$. Existe uma imersão canônica $T : (L^2(\Omega))^* \to H^{-1}(\Omega)$, que é simplesmente a restrição a $H^1(\Omega)$ dos funcionais lineares contínuos φ em $L^2(\Omega)$, ou seja,

$$\langle T\varphi, v\rangle_{H^{-1},H^1} = \langle \varphi, v\rangle_{(L^2)^*,L^2}\,.$$

Também, $\|T\varphi\|_{H^{-1}} \leq C\|\varphi\|_{(L^2)^*}$ para alguma constante $C > 0$, T é injetora (mas pode não ser sobrejetora) e a imagem de T é densa em $H^{-1}(\Omega)$. Assim, identificando $L^2(\Omega)$ com $(L^2(\Omega))^*$ e usando a imersão T, obtemos

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))^* \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Concluímos esta seção enunciando o Teorema de Lax-Milgram, o qual utilizaremos no próximo capítulo para obter propriedades de certos operadores e resolver problemas elípticos.

Teorema 1.1.7. Suponha que $a(u,v)$ seja uma forma bilinear contínua e coerciva[1] em um espaço de Hilbert H. Então, para qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle\,, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u é caracterizado por

$$\begin{cases} u \in H \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u\rangle = \min\limits_{v\in H}\left\{\dfrac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle\right\} \end{cases}.$$

1.2 Semigrupos

No que segue X denotará um espaço de Banach e $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Consideramos $\mathscr{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados e $X^* = \mathscr{L}(X,\mathbb{K})$ o dual topológico de X, munidos das respectivas normas

$$\|T\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} \|Tu\|_X\,, \quad \forall T \in \mathscr{L}(X).$$

[1] Uma forma bilinear $a(u,v)$ em um espaço de Hilbert H é contínua quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$ e coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$, $u,v \in H$.

e

$$\|u^*\|_{X^*} = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\le 1}} Re\langle u^*, u\rangle, \quad \forall u^* \in X^*,$$

onde $\langle u^*, u\rangle$ denota o valor de u^* em u. Denotamos $\mathscr{K}(X)$ o subespaço fechado de $\mathscr{L}(X)$ constituído de operadores compactos.

Definição 1.2.1. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma família de operadores lineares limitados $\{T(t) : X \to X\,;\, t \in [0,\infty)\}$ é um *semigrupo* quando satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t,s \in [0,\infty)$.

Dizemos que o semigrupo é *uniformemente contínuo* quando:

(iii) $\|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(X)} \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$;

e *fortemente contínuo* ou um C_0-*semigrupo* quando

(iv) $\|T(t)u - u\|_X \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0, \quad \forall u \in X$.

Dizemos que uma família $\{T(t)\,;\, t\in\mathbb{R}\} \subset \mathscr{L}(X)$ é um C_0-*grupo* quando satisfaz (i), (ii) acima e $\|T(t)u - u\|_X \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \forall u \in X$.

Definição 1.2.2. Seja $\{T(t); t\ge 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ um C_0-semigrupo. Definimos seu *gerador infinitesimal* como o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$, onde

$$D(A) = \left\{u \in X;\ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe}\right\} \quad \text{e} \quad Au = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)u - u}{t}.$$

A seguir destacamos algumas propriedades dos C_0-semigrupos.

Teorema 1.2.3. Seja $\{T(t), t\ge 0\}$ um C_0-semigrupo. Então existem constantes $\lambda \ge 0$ e $M \ge 1$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \le Me^{\lambda t}, \quad t \ge 0.$$

Denotamos $A \in G(M,\lambda)$ quando A é gerador de um C_0-semigrupo satisfazendo

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \le Me^{\lambda t}$$

.

Teorema 1.2.4. Sejam $\{T(t), t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então são válidas as seguintes propriedades:

(i) Para todo $u \in X$, a aplicação $t \to T(t)u$ é contínua para $t \geq 0$.

(ii) Para todo $u \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u\,ds = T(t)u.$$

(iii) Para todo $u \in X$,

$$\int_0^t T(s)u\,ds \in D(A) \quad \text{e} \quad A\Big(\int_0^t T(s)u\,ds\Big) = T(t)u - u.$$

(iv) A é densamente definido, fechado e, para todo $u \in D(A)$, $t \to T(t)u$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{dT(t)u}{dt} = AT(t)u = T(t)Au, \quad \forall t \geq 0.$$

(v) Para todo $u \in D(A)$,

$$T(t)u - T(s)u = \int_s^t T(h)Au\,dh.$$

(vi) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ é denso em X. Em particular, $D(A^k)$ é denso em X, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dado um operador linear A, denotaremos por $\rho(A)$ e $R(A)$ o conjunto resolvente e a imagem do operador A, respectivamente.

Teorema 1.2.5 (Hille-Yosida)**.** Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. São equivalentes:

(i) A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo satisfazendo

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq e^{\lambda t}, \quad \lambda \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) A é um operador linear fechado, densamente definido, $(\lambda, \infty) \subset \rho(A)$, $\lambda \geq 0$ e

$$\|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{|\mu - \lambda|}, \quad \forall \mu > \lambda.$$

Observação 1.2.6. Se $\mu \in \mathbb{C}$ é tal que $Re\mu > \lambda$, então $\mu \in \rho(A)$ e

$$(\mu - A)^{-1}u = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} T(t)u\,dt, \quad \forall u \in X.$$

Definição 1.2.7. Dizemos que um C_0-semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo de *contrações* quando $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Seja X um espaço de Banach. Denotamos a *aplicação dualidade* por $F : X \to \mathbb{P}(X^*)$, onde

$$F(u) = \{u^* \in X^*; Re\,\langle u^*, u\rangle = \|u\|_X^2, \|u^*\|_{X^*} = \|u\|_X\}.$$

Segue do Teorema de Hahn-Banach que $F(u) \neq \emptyset$, para todo $u \in X$. Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é *dissipativo* se, para cada $u \in D(A)$, existe $u^* \in F(u)$ tal que $Re\,\langle u^*, Au\rangle \leq 0$. Temos A dissipativo, se e somente se,

$$\|(\mu - A)u\|_X \geq \mu\|u\|_X, \quad \forall u \in D(A), \quad \forall \mu > 0.$$

Teorema 1.2.8 (Lumer-Phillips)**.** Seja A um operador linear densamente definido.

(i) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, então temos $Re\,\langle u^*, Au\rangle \leq 0$ para todo $u^* \in F(u)$ e, para todo $u \in D(A)$. Além disso, $R(\mu - A) = X$ para todo $\mu > 0$. Em particular, A é dissipativo.

(ii) Se A é dissipativo e $R(\mu_0 - A) = X$ para algum $\mu_0 > 0$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

Corolário 1.2.9. Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Denotamos sua *imagem numérica* por

$$W(A) = \{\langle u^*, Au\rangle \,; u \in D(A), \|u\|_X = 1, u^* \in X^*, \|u^*\|_{X^*} = 1, \langle u^*, u\rangle = 1\}.$$

Quando X é um espaço de Hilbert, temos

$$W(A) = \{\langle Au, u\rangle_X \,; u \in D(A), \|u\|_X = 1\}.$$

Teorema 1.2.10. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido. Se $\mu \in \mathbb{C}\backslash\overline{W(A)}$ então $\mu - A$ é injetor, $R(\mu - A)$ é fechado em X e

$$\|(\mu - A)u\|_X \geq \text{dist}(\mu, W(A))\|u\|_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Além disso, se Σ é um domínio em $\mathbb{C}\backslash\overline{W(A)}$ tal que $\rho(A)\cap\Sigma\neq\emptyset$, então $\Sigma\subset\rho(A)$ e

$$\|(\mu-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\leq\frac{1}{\mathrm{dist}(\mu,W(A))},\quad\forall\mu\in\Sigma.$$

No que segue denotaremos por $\{e^{At};t\geq 0\}$ o C_0-semigrupo cujo gerador infinitesimal é A. Para uma perturbação de um C_0-semigrupo por um operador linear limitado, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.11. Seja $\{e^{At};t\geq 0\}$ um C_0-semigrupo cujo gerador infinitesimal é A. Se $B\in\mathscr{L}(X)$, então $A+B:D(A)\subset X\to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{e^{(A+B)t};t\geq 0\}$. Se $\|e^{At}\|_{\mathscr{L}(X)}\leq Me^{\lambda t}$, para todo $t\geq 0$, então

$$\|e^{(A+B)t}\|_{\mathscr{L}(X)}\leq Me^{(\lambda+M\|B\|_{\mathscr{L}(X)})t},$$

para todo $t\geq 0$. Além disso, $\{e^{(A+B)t};t\geq 0\}$ é solução da seguinte equação integral:

$$e^{(A+B)t}u=e^{At}u+\int_0^t e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}u\,ds,\quad\forall u\in X.$$

Teorema 1.2.12. Sejam $A,A_k\in G(M,\lambda)$, $k\in\mathbb{N}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Para quaisquer $u\in X$ e $\mu\in\mathbb{C}$ com $Re\mu>\lambda$, $(\mu-A_k)^{-1}u\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(\mu-A)^{-1}u$.

(ii) Para quaisquer $u\in X$ e $t\geq 0$, $e^{A_k t}u\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}e^{At}u$.

Além disso, a convergência em (ii) é uniforme para t em intervalos limitados.

Para $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset G(M,\lambda)$ e $\mu\in\mathbb{C}$ com $Re\mu>\lambda$ definimos o operador linear

$$S(\mu)u=\lim_{k\to\infty}(\mu-A_k)^{-1}u.$$

O próximo teorema assegura que a convergência de uma sequência de geradores infinitesimais $A_k\in G(M,\lambda)$ equivale à convergência dos C_0-semigrupos correspondentes. Observamos que como tais semigrupos e geradores estão definidos nos mesmos espaços base, a noção de convergência (pontual) é natural. Este teorema motiva a abordagem que faremos futuramente onde consideraremos operadores definidos em espaços distintos, quando evidentemente uma nova noção de convergência será necessária.

Teorema 1.2.13 (Trotter-Kato)**.** Seja $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset G(M,\lambda)$. Suponha que exista $\mu_0 \in \mathbb{C}$ com $Re\mu_0 > \lambda$ satisfazendo

(i) $(\mu_0 - A_k)^{-1}u \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} S(\mu_0)u$, para todo $u \in X$ e

(ii) A imagem de $S(\mu_0)$ é densa em X.

Então existe um operador $A \in G(M,\lambda)$ tal que $S(\mu_0) = (\mu_0 - A)^{-1}$. Além disso, $e^{A_k t}u \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{At}u$, para todo $u \in X$, e a convergência é uniforme para t em subconjuntos limitados de $[0,\infty)$.

1.3 Operadores setoriais, potências fracionárias e problema de Cauchy parabólico

Definição 1.3.1. Dizemos que o operador linear A é um operador *setorial* se A é fechado, densamente definido e existem constantes $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\Sigma_{-\lambda,\phi} = \{\mu \in \mathbb{C};\, |arg(\mu+\lambda)| \leq \pi - \phi, \mu \neq \lambda\}$$

é um subconjunto de $\rho(-A)$ e

$$\|(\mu + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\mu+\lambda|}, \quad \forall \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi}.$$

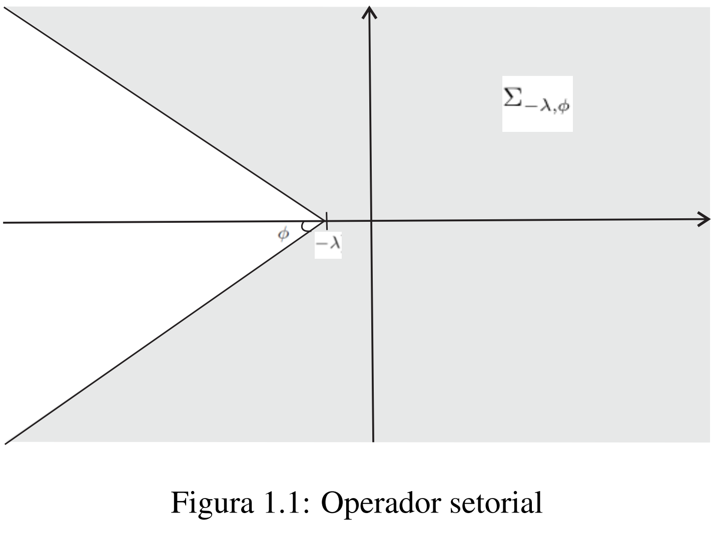

Figura 1.1: Operador setorial

Observação 1.3.2. $\Sigma_{-\lambda,\phi} \subset \rho(-A)$ e $\|(\mu+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{M}{|\mu+\lambda|}$, $\quad \forall \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi}$ se, e somente se, $\Sigma_{\lambda,\phi} = \{\mu \in \mathbb{C};\, \phi \leq |arg(\mu-\lambda)| \leq \pi, \mu \neq \lambda\} \subset \rho(A)$ e $\|(\mu-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{M}{|\mu-\lambda|}$, $\forall \mu \in \Sigma_{\lambda,\phi}$.

Teorema 1.3.3. Seja A um operador linear setorial. Então $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{e^{-At}; t \geq 0\}$, onde

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} e^{\mu t}(\mu+A)^{-1}\, d\mu,$$

onde Γ_λ é a fronteira de $\Sigma_{-\lambda,\upsilon} \backslash \{\mu \in \mathbb{C}; |\mu+\lambda| \leq r\}$ para algum r pequeno e $\upsilon \in (\phi, \frac{\pi}{2})$, orientada no sentido da parte imaginária crescente. Além disso, a aplicação $t \mapsto e^{-At}$ se estende a uma aplicação analítica em uma região contendo o eixo real positivo e existem constantes $K, K_1 \geq 0$ tais que

$$\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ke^{\lambda t}, \qquad \|Ae^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq K_1 t^{-1} e^{\lambda t}, \quad \forall t \geq 0$$

e

$$\frac{de^{-At}}{dt} = Ae^{-At}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dizemos que um operador fechado A, com $\rho(A) \neq \emptyset$, possui *resolvente compacto* se, para algum (e consequentemente todo) $\mu \in \rho(A)$, $(\mu - A)^{-1} \in \mathscr{K}(X)$. Quando o C_0-semigrupo é gerado por um operador $-A$ tal que A é setorial, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.4. Se A é um operador linear setorial com resolvente compacto, então o semigrupo $\{e^{-At}\,; t \geq 0\}$ é constituído de operadores compactos.

Teorema 1.3.5. Sejam A um operador setorial e B um operador linear tais que:

$$D(A) \subset D(B) \quad \text{e} \quad \|Bu\|_X \leq \varepsilon\|Au\|_X + K\|u\|_X, \quad \forall u \in D(A),$$

para algum $\varepsilon > 0$ e alguma constante K. Então o operador $A+B$ é setorial, $D(A+B) = D(A)$ e $\{e^{-(A+B)t}; t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo tal que $t \mapsto e^{-(A+B)t}$ se estende a um aplicação analítica em uma região contendo o eixo real positivo.

Definição 1.3.6. Para um operador setorial A satisfazendo $Re(\sigma(A)) = \{Re\mu; \mu \in \sigma(A)\} \subset (0,\infty)$, onde $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ denota o espectro de A e para $\alpha > 0$, definimos o *operador potên-*

cia fracionária associado a A por

$$A^0 = I \quad \text{e} \quad A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At}\, dt,$$

onde Γ é a função Gama e $\{e^{-At}; t \geq 0\}$ é o C_0-semigrupo gerado por $-A$.

Temos $A^{-\alpha} \in \mathscr{L}(X)$ injetor, logo $D(A^{-\alpha}) = X$ e sendo assim, definimos $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$, para $\alpha > 0$. São válidas as seguintes propriedades:

Teorema 1.3.7.

(i) A^α é um operador linear fechado, densamente definido com $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$.

(ii) Se $\alpha > \beta \geq 0$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.

(iii) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$, $A^{\alpha+\beta}u = A^\alpha A^\beta u$, para todo $u \in D(A^\gamma)$.

(iv) Para todo $u \in X$, $e^{-At}u \in D(A^\alpha)$, $\alpha \geq 0$.

(v) Para todo $u \in D(A^\alpha)$, $e^{-At}A^\alpha u = A^\alpha e^{-At}u$, $\alpha \geq 0$.

(vi) $A^\alpha e^{-At} \in \mathscr{L}(X)$ e $\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq K_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$, $t \geq 0$, K_α constante.

(vii) Se $0 < \alpha < 1$, então

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-\alpha}(\mu + A)^{-1}\, d\mu.$$

Definição 1.3.8. Seja A um operador linear satisfazendo $Re(\sigma(A)) \subset (0,\infty)$. Definimos o *espaço de potência fracionária* associado a A por $X^\alpha = D(A^\alpha)$, munido da norma do gráfico $\|u\|_{X^\alpha} = \|A^\alpha u\|_X$. Entendemos $X^0 = X$.

Teorema 1.3.9. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial satisfazendo $Re(\sigma(A)) \subset (0,\infty)$. Então:

(i) $(X^\alpha, \|\cdot\|_{X^\alpha})$, $\alpha \geq 0$, é um espaço de Banach.

(ii) Se A tem resolvente compacto, então para $\alpha > \beta \geq 0$ temos $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ compactamente.

Lema 1.3.10 (Desigualdade do Momento)**.** Para quaisquer $\beta < \alpha < \gamma$, se $u \in D(A^\gamma)$, vale:

$$\|A^\alpha u\|_X \leq C \|A^\gamma u\|_X^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}} \|A^\beta u\|_X^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}},$$

onde $C > 0$ é constante.

Teorema 1.3.11. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial tal que para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma(-A) \cap \{\mu \in \mathbb{C}; Re\mu = \alpha\} = \emptyset$. Definimos o operador *projeção espectral* $Q : X \to X$, por

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu + A)^{-1} \, d\mu,$$

onde γ é uma curva fechada, retificável e simples que envolve $\sigma(A) \cap \{\mu \in \mathbb{C}; Re\mu > \alpha\}$ e $Q = 0$ se esta interseção é vazia. Então Q é uma projeção contínua , $Q^2 = Q$ e $Qe^{-At} = e^{-At}Q$, para todo $t \geq 0$. Se $X_+ = Ker(Q)$ e $X_- = R(Q)$, então $e^{-At}|_{X_+} \in \mathscr{L}(X_+)$, $e^{-At}|_{X_-} \in \mathscr{L}(X_-)$ e existem constantes $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|e^{-At}|_{X_+}\|_{\mathscr{L}(X_+)} \leq Me^{(\alpha-\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Também, $\{e^{-At}|_{X_-} \, ; t \geq 0\}$ se estende a um C_0-grupo definindo $e^{-At}|_{X_-} = e^{-A(-t)}|_{X_-}$, para $t < 0$, e

$$\|e^{-At}|_{X_-}\|_{\mathscr{L}(X_-)} \leq Me^{(\alpha+\delta)t}, \quad t \leq 0.$$

Além disso, temos a decomposição $X = X_+ \oplus X_-$ e, se X_- tem dimensão finita, então $A|_{X_-}$ e $e^{-At}|_{X_-} = e^{-A|_{X_-}t}$ possuem representação matricial com relação a qualquer base de X_-. Os elementos de X_- são autovetores ou autovetores generalizados de $-A$.

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial satisfazendo $Re(\sigma(A)) \subset (0, \infty)$. Consideramos X^α com a norma do gráfico, $f : U \to X$ com U aberto em $\mathbb{R} \times X^\alpha$ e o problema de Cauchy parabólico

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t,u), \quad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definição 1.3.12. Uma *solução* de (1.1) em $[t_0, T)$ é uma função $u : [t_0, T) \to X$ que é diferenciável em (t_0, T) com $u(t_0) = u_0$ e tal que $(t, u(t)) \in U$ e $u(t) \in D(A)$ para $t \in [t_0, T)$, além disso $t \mapsto Au(t)$ é contínua e (1.1) está satisfeita.

Se para cada $(t_1, u_1) \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, u_1) tal que, para quaisquer $(t, u), (s, v) \in V$

$$\|f(t,u) - f(s,v)\|_X \leq L(|t-s|^\theta + \|u-v\|_{X^\alpha}),$$

onde θ e L são constantes positivas, dizemos que f é *localmente Hölder contínua na variável t* e *localmente Lipchitz contínua na variável x*.

Lema 1.3.13. Se f é localmente Hölder contínua na variável t e localmente Lipchitz contínua na variável x, então u é solução de (1.1) se, e somente se,

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s,u(s))\,ds.$$

Teorema 1.3.14. Sejam A um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, U aberto em $\mathbb{R}\times X^{\alpha}$ e $f: U \to X$ localmente Hölder contínua na variável t e localmente Lipchitz contínua na variável x. Então, para cada $(t_0,u_0) \in U$, existe uma única solução $u:[t_0,T) \to X^{\alpha}$ definida em um intervalo $[t_0,T)$. Além disso, se u é maximal e para todo $B \subset U$ limitado, $f(B) \subset X$ é limitada, então ou $T = \infty$ ou existe uma sequência $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T^{-}$ de tal maneira que $(t_k, u(t_k)) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \partial U$.

Corolário 1.3.15. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.3.14, se $U = (\tau,\infty)\times X^{\alpha}$ e também $\|f(t,u)\|_X \leq k(t)(1+\|u\|_{X^{\alpha}})$ para todo $(t,u) \in U$, onde $k(t)$ é contínua em (τ,∞), então, para $t_0 > \tau$ e $u_0 \in X^{\alpha}$, a única solução de (1.1) passando por (t_0,u_0) existe para todo $t \geq t_0$.

Observação 1.3.16. Se f é independente de t e globalmente Lipschitz, limitada, continuamente diferenciável e, para u solução de (1.1), $\dfrac{\|f(u)\|_X}{1+\|u\|_{X^{\alpha}}}$ é limitada, então u é globalmente definida.

1.4 Atratores globais para semigrupos não lineares

Sejam X um espaço de Banach e $A: D(A) \subset X \to X$ um operador setorial com resolvente compacto tal que $Re(\sigma(A)) \subset (0,\infty)$. Temos o seguinte:

Lema 1.4.1. Existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X^{\alpha},X^{\beta})} \leq Mt^{\alpha-\beta}e^{-\delta t}, \quad \beta > \alpha \geq 0. \tag{1.2}$$

Para $\alpha \in (0,1)$ fixado, consideramos o problema de Cauchy parabólico

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \in X^{\alpha}, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $f: X^{\alpha} \to X$ é globalmente Lipschitz, limitada e Fréchet continuamente diferenciável. Conforme a Observação 1.3.16, o problema (1.3) possui uma solução definida para todo $t \geq 0$.

Tal solução é dada por

$$u(t) := u(t,u_0) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s))\, ds,$$

onde $\{e^{-At}, t \geq 0\}$ é o semigrupo analítico gerado por $-A$. Definimos, para $u_0 \in X^\alpha$ e $t \geq 0$, o operador $T(t) : X^\alpha \to X^\alpha$ pela relação $T(t)u_0 = u(t,u_0)$, isto é,

$$T(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s,u_0))\, ds, \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Deste modo, $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathscr{L}(X^\alpha)$ é uma família de operadores (não lineares), satisfazendo:

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \qquad \forall t,s \in [0,\infty)$;

(iii) a aplicação $(t,u_0) \in [0,\infty) \times X^\alpha \to T(t)u_0 \in X^\alpha$ é contínua.

Definição 1.4.2. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores (não lineares) $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima é denominada um *semigrupo não linear*. Neste caso, diremos apenas que $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo.

Definição 1.4.3. Sejam $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathscr{L}(X^\alpha)$ um semigrupo e $u_0 \in X^\alpha$. Definimos

(i) $\gamma^+(u_0) = \{T(t)u_0\,;\, t \geq 0\}$ a *órbita positiva por* u_0;

(ii) uma *órbita negativa* por u_0 como sendo uma aplicação contínua $\varphi : (-\infty, 0] \to X^\alpha$ tal que $\varphi(0) = u_0$ e para todo $s \leq 0$, $T(t)\varphi(s) = \varphi(t+s)$, para todo $t \in [0,-s]$;

(iii) uma *órbita completa* por u_0 como sendo uma aplicação contínua $\varphi : \mathbb{R} \to X^\alpha$ tal que $\varphi(0) = u_0$ e para todo $s \in \mathbb{R}$, $T(t)\varphi(s) = \varphi(t+s)$, para todo $t \geq 0$.

A existência de uma órbita negativa ou completa por u_0 está condicionada a X^α e a certas restrições sobre u_0, além disso, se tal órbita negativa ou completa existe, ela pode não ser única. Denotamos

$$H(t,u_0) = \{u \in X^\alpha\,; \text{existe uma órbita negativa } \varphi \text{ por } u_0 \text{ tal que } \varphi(-t) = u\};$$

e para $E \subset X^\alpha$, $T(t)E = \{T(t)u\,;\, u \in E\}$ e

$$H(t,E) = \{u \in X^\alpha\,;\, \forall u_0 \in E,\ \text{existe uma órbita negativa } \varphi \text{ por } u_0 \text{ tal que } \varphi(-t) = u\}.$$

Assim definimos, quando possível

(iv) $\gamma^-(u_0) = \bigcup_{t\geq 0} H(t,u_0)$ a *órbita negativa por* u_0;

(v) $\gamma(u_0) = \gamma^+(u_0) \cup \gamma^-(u_0)$ a *órbita completa por* u_0;

(vi) $\gamma^+(E) = \bigcup_{u_0\in E} \gamma^+(u_0)$ a *órbita positiva por* E;

(vii) $\gamma^-(E) = \bigcup_{u_0\in E} \gamma^-(u_0)$ a *órbita negativa por* E;

(viii) $\gamma(E) = \bigcup_{u_0\in E} \gamma(u_0)$ a *órbita completa por* E;

(ix) $\omega(E) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)E}$ o *conjunto* ω*-limite de* E;

(x) $\alpha(E) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} H(t,E)}$ o *conjunto* α*-limite de* E.

Até o fim desta seção consideramos $\{T(t); t\geq 0\}$ o semigrupo associado a (1.3), ou seja, o semigrupo dado por (1.4).

Lema 1.4.4. Seja $E \subset X^\alpha$. Temos

(i) $u \in \omega(E)$ se, e somente se, existem sequências $(t_k)_k \subset [0,\infty)$ e $(u_k)_k \subset E$ com $t_k \to \infty$ e $T(t_k)u_k \overset{t_k\to\infty}{\longrightarrow} u$.

(ii) $u \in \alpha(E)$ se, e somente se, existem sequências $(t_k)_k \subset [0,\infty)$ e $(u_k)_k \subset E$ com $t_k \to \infty$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_k : (-\infty, 0] \to X^\alpha$ uma órbita negativa por u_k e $\varphi_k(-t_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$.

(iii) se E é limitado, então $\gamma^+(E)$ é limitada e $\overline{T(t)\gamma^+(E)}$ é compacto, para todo $t \geq 0$.

Definição 1.4.5. Dizemos que um subconjunto $E \subset X^\alpha$ é *invariante sob o semigrupo* $\{T(t); t\geq 0\}$ quando $T(t)E = E$, para todo $t \geq 0$.

Lema 1.4.6. Um subconjunto $E \subset X^\alpha$ é invariante sob $\{T(t); t\geq 0\}$ se, e somente se, para cada $u_0 \in E$ existe uma órbita completa $\gamma(u_0)$ por u_0 e $\gamma(u_0) \subset E$.

Definição 1.4.7. Sejam $A, B \subset X^\alpha$. Definimos a *semidistância de Hausdorff* de A até B por

$$\mathrm{dist}_H(A,B) = \sup_{u\in A} \inf_{v\in B} \|u - v\|_{X^\alpha}.$$

Observamos que a semidistância de Hausdorff não é simétrica e $A \subset B \Leftrightarrow \mathrm{dist}_H(A,B) = 0$.

Definição 1.4.8. Sejam E e F subconjuntos de X^α. Dizemos que E *atrai* F sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ se $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)F, E) = 0$.

Lema 1.4.9. Para todo $u_0 \in X^\alpha$, $\omega(u_0) = \omega(\{u_0\})$ é não vazio, conexo, compacto, invariante e atrai $\{u_0\}$ sob $\{T(t); t \geq 0\}$. Em geral, se $E \subset X^\alpha$ é limitado e conexo, então $\omega(E)$ é não vazio, conexo, compacto, invariante e atrai E sob $\{T(t); t \geq 0\}$.

Lema 1.4.10. Suponha que $u_0 \in X^\alpha$ seja tal que existe uma órbita negativa $\varphi : (-\infty, 0] \to X^\alpha$ por u_0 tal que $\overline{\varphi((-\infty,0])}$ é compacto. Então

$$\alpha_\varphi(u_0) = \{v \in X^\alpha; \exists (t_k)_k \subset [0,\infty) \text{ com } t_k \to \infty \text{ e } \varphi(-t_k) \stackrel{t_k\to\infty}{\longrightarrow} v\} \tag{1.5}$$

é não vazio, conexo, compacto e invariante sob $\{T(t); t \geq 0\}$. Em geral, se $E \subset X^\alpha$ é limitado e $\overline{\gamma^-(E)}$ é não vazio e compacto, então $\alpha(E)$ é não vazio, compacto e invariante sob $\{T(t); t \geq 0\}$.

Definição 1.4.11. Dizemos que um subconjunto não vazio $\mathscr{A} \subset X^\alpha$ é um *atrator global* para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ se $\mathscr{A}$ é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X^α sob $\{T(t); t \geq 0\}$.

Observação 1.4.12. Se E é um subconjunto limitado de X^α e invariante sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, então $E \subset \mathscr{A}$, ou seja, um atrator global para $\{T(t); t \geq 0\}$ é um conjunto maximal limitado invariante para $\{T(t); t \geq 0\}$, logo único. Também caracterizamos

$$\mathscr{A} = \{u \in X^\alpha; \text{ existe uma solução global limitada por } u\}.$$

Lema 1.4.13. Para todo subconjunto limitado $E \subset X^\alpha$, existem $N > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\sup_{t\geq\tau} \sup_{v\in T(t)E} \|v\|_{X^\alpha} \leq N. \tag{1.6}$$

Além disso,

$$\sup_{\substack{E\subset X^\alpha \\ E \text{ limitado}}} \sup_{v\in\omega(E)} \|v\|_{X^\alpha} \leq N. \tag{1.7}$$

Teorema 1.4.14. Sejam N como em (1.6) e $B_N = \{u \in X^\alpha; \|u\|_{X^\alpha} \leq N\}$. Então $\omega(B_N)$ é um atrator global para $\{T(t); t \geq 0\}$.

Consideramos a equação

$$u_t + Au = f(u). \tag{1.8}$$

Definição 1.4.15. Dizemos que uma função constante $u(t) = u_* \in X^\alpha$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma *solução de equilíbrio ou estacionária* de (1.8) quando

$$Au_* - f(u_*) = 0.$$

Definição 1.4.16. Dizemos que uma solução de equilíbrio u_* de (1.8) é *hiperbólica* se $\sigma(A - f'(u_*))$ é disjunto do eixo imaginário.

Note que $Au - f(u) = 0 \Leftrightarrow T(t)u = u$, onde $\{T(t); t \geq 0\}$ é o semigrupo dado por (1.4). Denotamos $\mathscr{E} = \{u \in X^\alpha; Au - f(u) = 0\} = \{u \in X^\alpha; T(t)u = u\}$.

Lema 1.4.17. Suponha que todos as soluções de equilíbrio de (1.8) sejam hiperbólicas. Então $\mathscr{E}$ é um conjunto finito, e assim cada solução de equilíbrio é isolada.

Definição 1.4.18. Dizemos que o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é *gradiente* se existe uma função (de Lyapunov) $V : X^\alpha \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) V é contínua;

(ii) a aplicação $t \in [0, \infty) \to V(T(t)u) \in \mathbb{R}$ é não crescente para todo $u \in X^\alpha$;

(iii) $u \in X^\alpha$, $u \in \mathscr{E} \Leftrightarrow V(T(t)u) = V(u), \forall t \geq 0$.

No que segue supomos que $\{T(t); t \geq 0\}$ dado por (1.4) é gradiente e $\mathscr{E}$ é constituído de soluções hiperbólicas.

Lema 1.4.19. Para todo $u^0 \in X^\alpha$, $\omega(u^0) = \{u^0_*\}$ para algum $u^0_* \in \mathscr{E}$. Consequentemente

$$T(t)u^0 \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} u^0_*.$$

Lema 1.4.20. Suponha que $u^0 \in X^\alpha$ seja tal que existe uma órbita negativa φ por u^0 com $\overline{\varphi((-\infty, 0])}$ compacto. Então existe $u^0_* \in \mathscr{E}$ tal que $\alpha_\varphi(u^0) = \{u^0_*\}$ onde α_φ é como em (1.5). Consequentemente, $\varphi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} u^0_*$.

Definição 1.4.21. Seja $u^0_* \in \mathscr{E}$, definimos

(i) a *variedade instável* de u^0_* como

$$W^u(u_*^0) = \{u^0 \in X^\alpha; u(t,u^0) \text{ está definido para todo } t \leq 0 \text{ e } u(t,u^0) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} u_*^0\};$$

(ii) a *variedade estável* de u_*^0 como

$$W^s(u_*^0) = \{u^0 \in X^\alpha; u(t,u^0) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} u_*^0\}.$$

Lema 1.4.22. Seja E um subconjunto relativamente compacto e invariante de X^α sob $\{T(t); t \geq 0\}$. Se $u \in E$, então existem $u_*^+, u_*^- \in \mathscr{E}$ tais que $u \in W^u(u_*^+) \cap W^s(u_*^-)$.

Teorema 1.4.23. Seja $\mathscr{A}$ o atrator de $\{T(t); t \geq 0\}$. Então $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{u_*^0 \in \mathscr{E}} W^u(u_*^0)$.

1.5 Continuidade de atratores e taxa de atração

Na seção anterior tratamos de semigrupos não lineares dados pela fórmula da variação das constantes. Nesta seção faremos uma abordagem mais geral, na qual os semigrupos independem de um problema semilinear parabólico. Continuaremos denotando X^α como um espaço de Banach onde estão definidos os semigrupos.

Definição 1.5.1. Seja $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos de X^α. Dizemos que $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é

(i) *semicontínua superiormente* em $\varepsilon = 0$ se

$$\operatorname{dist}_H(U_\varepsilon, U_0) = \sup_{u_\varepsilon \in U_\varepsilon} \operatorname{dist}(u_\varepsilon, U_0) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

(ii) *semicontínua inferiormente* em $\varepsilon = 0$ se

$$\operatorname{dist}_H(U_0, U_\varepsilon) = \sup_{u \in U_0} \operatorname{dist}(u, U_\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

(iii) *contínua* em $\varepsilon = 0$ se é semicontínua inferior e superiormente em $\varepsilon = 0$.

Lema 1.5.2. Seja $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos de X^α.

(i) Se toda sequência $(u_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$, com $u_{\varepsilon_k} \in U_{\varepsilon_k}$ e $\varepsilon_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, possui uma subsequência com limite pertencendo a U_0, então $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.

(ii) Se U_0 é compacto e para todo $u \in U_0$, existe uma sequência $(u_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ com $u_{\varepsilon_k} \in U_{\varepsilon_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $u_{\varepsilon_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$, então $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$.

Proposição 1.5.3. Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ uma família de semigrupos (não lineares) em X^α tais que, para cada $\varepsilon \in [0,1]$, o semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possua um atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$. Assuma que o conjunto $\overline{\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]} \mathscr{A}_\varepsilon}$ seja compacto e que, para $u_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u_0$, vale $\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - T_0(t)u_0\|_{X^\alpha} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, para todo $t \geq 0$. Então a família de atratores $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.

Teorema 1.5.4. Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ uma família de semigrupos em X^α tais que, para cada $\varepsilon \in [0,1]$, o semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possua um atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$. Suponhamos que

(i) $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u_*^{\varepsilon,1}, ..., u_*^{\varepsilon,k}\}$ para todo $\varepsilon \in [0,1]$ e $\|u_*^{\varepsilon,i} - u_*^{0,i}\|_{X^\alpha} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$;

(ii) Existe $\delta > 0$ tal que $\{W^u(u_*^{\varepsilon,i}) \cap B_{X^\alpha}(u_*^{\varepsilon,i}, \delta)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ é semicontínua inferiormente em 0;

(iii) $\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)u\|_{X^\alpha} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de X^α, para todo $t \geq 0$;

(iv) $\mathscr{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(u_*^{0,i})$,

Então $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$ e existe $\tilde{\varepsilon} \in (0,1]$ tal que para todo $\varepsilon \in (0,\tilde{\varepsilon}]$, $\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(u_*^{\varepsilon,i})$.

A seguir definiremos o conceito de semigrupo gradiente-like, que generaliza o conceito de semigrupo gradiente. A vantagem de considerarmos semigrupos gradiente-like é que os mesmos são estáveis sob perturbações e, em geral, verificar a definição de gradiente-like é mais simples do que exibir uma função de Lyapunov para um determinado semigrupo.

Definição 1.5.5. Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathscr{E} = \{v_*^1, ..., v_*^k\}$ e

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{\substack{1\leq i,j\leq k \\ i\neq j}} \|v_*^i - v_*^j\|_{X^\alpha} > 0.$$

Sejam $\varepsilon_0 < \delta_0, u_* \in \mathscr{E}$ e $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Uma *$\varepsilon$-cadeia* de u^* para u^* é um subconjunto $\{v_*^{l_1}, ... v_*^{l_p}\} \subset \mathscr{E}$, $p \leq k$, juntamente com um subconjunto $\{v^1, ... v^p\} \subset X^\alpha$ e constantes $s_1, t_1, ..., s_p, t_p$ tais que $0 < s_i < t_i$, para $i = 1, ..., p$, tais que $\|v^i - v_*^{l_i}\|_{X^\alpha} < \varepsilon$, para $i = 1, ..., p+1$, $v_*^{l_{k+1}} = v_*^1 = u^*$, $\mathrm{dist}(T(s_i)v^i, \mathscr{E}) > \varepsilon_0$ e $\|T(t_i)v^i - v_*^{i+1}\|_{X^\alpha} < \varepsilon$, $i = 1, .., p$. Diremos que $u_* \in \mathscr{E}$ é *recorrente por cadeias*, se existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma ε-cadeia de u_* para u_* para cada $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

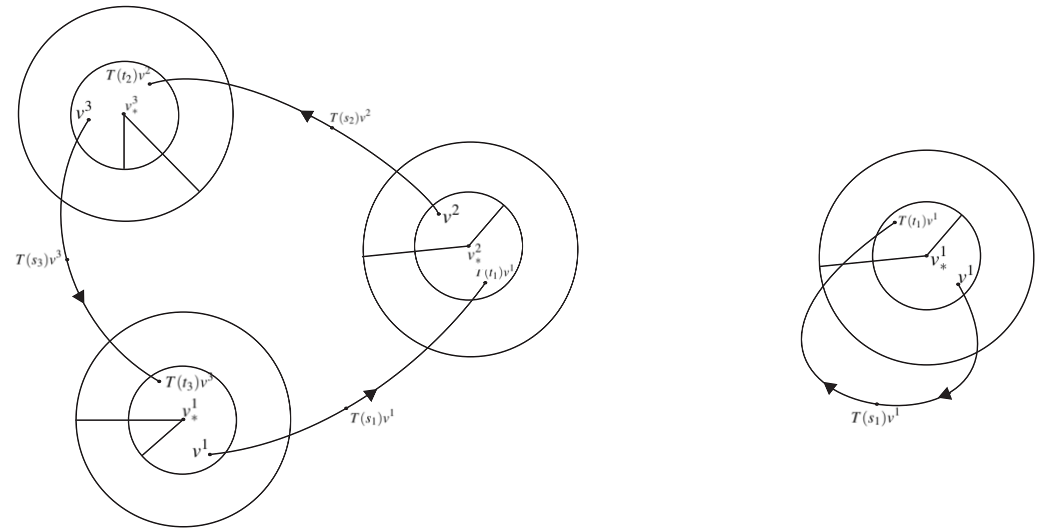

Figura 1.2: ε-cadeias

Definição 1.5.6. Seja $\{T(t)\,;t\geq 0\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathscr{E}=\{v_*^1,...,v_*^k\}$ e suponha que ele possui um atrator global $\mathscr{A}$. Dizemos que $\{T(t)\,;t\geq 0\}$ é um *semigrupo gradiente-like* se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Dada uma solução global $\varphi:\mathbb{R}\to X^\alpha$ em $\mathscr{A}$, existem $i,j\in\{1,...,k\}$, tais que

$$\lim_{t\to-\infty}\|\varphi(t)-v_*^i\|_{X^\alpha}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to-\infty}\|\varphi(t)-v_*^j\|_{X^\alpha}=0;$$

(ii) $\mathscr{E}=\{v_*^1,...,v_*^k\}$ não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.

Observação 1.5.7. Todo semigrupo gradiente é gradiente-like e uma perturbação de um semigrupo gradiente é um semigrupo gradiente-like.

Definição 1.5.8. Dizemos que um semigrupo $\{T(t)\,;t\geq 0\}$ é *assintoticamente compacto* se para cada fechado, limitado e não vazio $B\subset X^\alpha$ com $T(t)B\subset B$, existe um conjunto compacto $K=K(B)\subset B$ que atrai B.

Teorema 1.5.9. Suponha que as seguintes condições sejam válidas:

(i) O semigrupo $\{T(t)\,;t\geq 0\}$ é gradiente-like e assintoticamente compacto com órbitas limitadas de conjuntos limitados e $\mathscr{E}=\{u_*^1,...,u_*^k\}$;

(ii) $\mathscr{E}=\{u_*^1,...,u_*^k\}$ atrai pontos de X^α;

(iii) O semigrupo $\{T(t)\,;\,t \geq 0\}$ satisfaz uma condição de Lipschitz da forma

$$\|T(t)w_1 - T(t)w_2\|_{X^\alpha} \leq Ce^{Lt}\|w_1 - w_2\|_{X^\alpha}, \tag{1.9}$$

para todo $B \subset X^\alpha$ limitado e $w_1, w_2 \in B$, onde C, L são contantes positivas;

(iv) Cada $u_*^i \in \mathscr{E}$ verifica a propriedade: existem constantes positivas C_0, δ_0 e ρ_0, tais que

$$\operatorname{dist}(T(t)u_0, W_{loc}^u(u_*^i)) \leq C_0 e^{-\rho_0 t}, \tag{1.10}$$

sempre que u_0 pertence a uma δ_0-vizinhança de u_*^i e a órbita por u_0 permanece nesta vizinhança para $t \geq 0$.

Então o semigrupo $\{T(t)\,;\,t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo. De fato, existe uma atrator global $\mathscr{A}$ que atrai exponencialmente da seguinte forma: existem $\gamma > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\operatorname{dist}_H(T(t)B, \mathscr{A}) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t > 0, \tag{1.11}$$

para todo $B \subset X^\alpha$ limitado.

Para semigrupos compactos, vale o seguinte resultado.

Teorema 1.5.10. Suponha que $\{T(t)\,;\,t \geq 0\}$ seja um semigrupo gradiente-like compacto para $t > t_0 \geq 0$ que satisfaça a seguinte condição de Lipschitz: dado qualquer $v_0 \in X$, existe uma bola B_{v_0} tal que $\gamma^+(B_{v_0})$ é limitado e, para constantes positivas C_0 e L_0, temos

$$\|T(t)w_1 - T(t)w_2\|_X \leq C_0 e^{L_0 t}\|w_1 - w_2\|_X, \quad t \geq 0, \tag{1.12}$$

para todos $w_1, w_2 \in \gamma^+(B_{v_0})$. Suponha também que $\mathscr{E} = \{u_*^1, ..., u_*^k\}$ atraia pontos de X^α e que cada $u_*^i \in \mathscr{E}$ verifique a propriedade

$$\operatorname{dist}(T(t)u_0, W_{loc}^u(u_*^i)) \leq Ce^{-\rho_0 t}, \tag{1.13}$$

sempre que u_0 pertence a uma δ_0-vizinhança de u_*^i e a órbita por u_0 permanece nesta vizinhança para $t \geq 0$. Então o semigrupo $\{T(t)\,;\,t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo. De fato, existe uma atrator global $\mathscr{A}$ que atrai exponencialmente da seguinte forma: existem $\gamma > 0$ e

$K > 0$ tais que

$$\text{dist}_H(T(t)B, \mathscr{A}) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t > 0, \tag{1.14}$$

para todo $B \subset X^\alpha$ limitado.

Definição 1.5.11. Dizemos que a família de semigrupos $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é *coletivamente assintoticamente compacta* se, dada uma sequência $(\varepsilon_k)_k \subset [0,1]$ com $\varepsilon_k \to 0$, uma sequência limitada $(u^k)_k \subset X^\alpha$ e uma sequência $(t_k)_k \subset [0,\infty)$, temos $\{T_{\varepsilon_k}(t_k)u^k\}_k$ relativamente compacto em X^α.

Teorema 1.5.12. Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compactos definidos em X^α. Suponha que :

(i) Para cada $\varepsilon \in [0,1]$, $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$;

(ii) $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u_*^{\varepsilon,1}, ..., u_*^{\varepsilon,k}\}$ atrai pontos de X^α e se comportam semicontinuamente superior e inferiormente quado $\varepsilon \to 0$;

(iii) $\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)u\|_{X^\alpha} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de X^α, para todo $t \geq 0$;

(iv) Existem $\delta > 0$ e $\varepsilon_0 \in (0,1]$ tais que, se $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varphi^\varepsilon : \mathbb{R} \to X^\alpha$ é uma solução global em $\mathscr{A}_\varepsilon$, e $\|\varphi^\varepsilon(t) - u_*^{\varepsilon,i}\|_{X^\alpha} < \delta$, para todo $t \leq 0$, ($\|\varphi^\varepsilon(t) - u_*^{\varepsilon,i}\|_{X^\alpha} < \delta$, para todo $t \geq 0$), então $\|\varphi^\varepsilon(t) - u_*^{\varepsilon,i}\|_{X^\alpha} \xrightarrow{t\to-\infty} 0$ ($\|\varphi^\varepsilon(t) - u_*^{\varepsilon,i}\|_{X^\alpha} \xrightarrow{t\to\infty} 0$);

(v) $\{T_0(t); t \geq 0\}$ é gradiente-like.

Então existe $\varepsilon_0 \in (0,1]$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é um semigrupo gradiente-like. Consequentemente,

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(u_*^{\varepsilon,i}), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0].$$

Corolário 1.5.13. Assumindo as hipóteses dos Teoremas 1.5.9 e 1.5.12 para cada $\varepsilon \in [0,1]$, temos que para todo conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existem $\bar{\varepsilon} \in (0,1]$ e constantes positivas γ e $K = K(B)$, independentes de ε, tais que

$$\text{dist}_H(T_\varepsilon(t)u, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad \forall u \in B, \varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}] \text{ e } t \geq 1.$$

Teorema 1.5.14. Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ uma família de semigrupos em X^α tais que, para cada $\varepsilon \in [0,1]$, o semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possua um atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$. Suponhamos que existam $\varepsilon_0 \in (0,1]$ e um subconjunto limitado $U \subset X^\alpha$, tais que $\bigcup_{\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]} \mathscr{A}_\varepsilon \subset U$ e, para todo subconjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existem $\gamma > 0$ e $K := K(B) > 0$, tais que

$$\operatorname{dist}(T_\varepsilon(t)B, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq K e^{-\gamma t}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad \text{e} \quad t \geq 1. \tag{1.15}$$

Suponhamos também que existam constantes positivas C e L tais que

$$\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)v\|_{X^\alpha} \leq C e^{Lt}(\|u - v\|_{X^\alpha} + l(\varepsilon)), \quad \forall u, v \in U, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad \text{e} \quad t \geq 1,$$

onde $l(\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. Então,

$$\operatorname{dist}(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) + \operatorname{dist}(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq \tilde{C} l(\varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma + K}},$$

para alguma constante $\tilde{C} > 0$.

Observação 1.5.15. A função $l(\varepsilon)$ no Teorema 1.5.14 funciona como uma taxa de atração para os semigrupos que possuem o decaimento exponencial (1.15), o importante aqui é que a continuidade dos atratores na métrica de Hausdorff[2] pode ser estimada por tal taxa de atração.

1.6 Convergência compacta

Seja $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ uma família de espaços de Banach e suponha que exista uma família de operadores $\{E_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0,1]} \subset \mathscr{L}(X_0, X_\varepsilon)$, os quais chamamos de extensões, satisfazendo

$$\|E_\varepsilon u^0\|_{X_\varepsilon} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \|u^0\|_{X_0}, \qquad \forall u^0 \in X_0.$$

Definição 1.6.1. Dizemos que a família $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$, com $u^\varepsilon \in X_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1]$, *E-converge* para $u^0 \in X_0$ quando $\varepsilon \to 0$ se $\|u^\varepsilon - E_\varepsilon u^0\|_{X_\varepsilon} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. Denotamos tal convergência por $u^\varepsilon \overset{E}{\longrightarrow} u^0$.

Definição 1.6.2. Dizemos que uma sequência $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $u^k \in X_{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k \in (0,1]$ e $\varepsilon_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, é *E-relativamente compacta* se toda subsequência $(u^{k'}) \subset (u^k)$ admite uma subsequência $(u^{k''})$

[2]Distancia de Hausdorff de A até B = $\operatorname{dist}_H(A,B) + \operatorname{dist}_H(B,A)$.

convergente para um elemento $u^0 \in X_0$. Dizemos que a família $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, com $u^\varepsilon \in X_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1]$ é *E-relativamente compacta* se cada sequência $(u^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ com $\varepsilon_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, é E-relativamente compacta.

Definição 1.6.3. Dizemos que a família de operadores $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]} \subset \mathscr{L}(X)$ *EE-converge* para $B_0 \in \mathscr{L}(X_0)$ quando $\varepsilon \to 0$ se $B_\varepsilon u^\varepsilon \xrightarrow{E} B_0 u^0$ sempre que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u^0$. Denotamos tal convergência por $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$.

Definição 1.6.4. Dizemos que a família de operadores $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]} \subset \mathscr{K}(X)$ *converge compactamente* para $B_0 \in \mathscr{K}(X_0)$ quando $\varepsilon \to 0$ se $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$ e para toda família $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$, com $u^\varepsilon \in X_\varepsilon$ e $\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon} = 1$, a família $\{B_\varepsilon u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ é E-relativamente compacta. Denotamos tal convergência por $B_\varepsilon \xrightarrow{CC} B_0$.

Lema 1.6.5. Seja $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]} \subset \mathscr{K}(X)$ tal que $B_\varepsilon \xrightarrow{CC} B_0 \in \mathscr{K}(X)$. Então são válidas as seguintes afirmações:

(i) $\|B_\varepsilon\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C$, para alguma constante $C > 0$ independente de $\varepsilon \in (0,1]$.

(ii) se $Ker(I + B_0) = \{0\}$, então existem $\tilde{\varepsilon} > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|(I + B_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M, \qquad \varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}].$$

A convergência compacta será uma ferramenta fundamental para estudar o comportamento dos operadores resolvente, associados a um problema de reação difusão que introduziremos no próximo capítulo. Na ocasião, o espaço X_0 será um subespaço fechado de X_ε e as extensões serão as aplicações identidades. Também nos depararemos com a situação onde os operadores são fechados, densamente definidos com resolvente compacto e portanto faremos a seguinte hipótese:

(CC) Consideremos a família de operadores $\{A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ e suponhamos que A_ε seja fechado, densamente definido, possua resolvente compacto, $0 \in \rho(A_\varepsilon)$ e $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$.

No que segue suporemos que $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é uma família de operadores satisfazendo a hipótese **(CC)**.

Teorema 1.6.6. Para cada $\mu \in \rho(-A_0)$, existe $\varepsilon_\mu > 0$ tal que $\mu \in \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\mu]$ e

$$\sup_{\varepsilon \in [0,\varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X_\varepsilon)} < \infty.$$

Além disso, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + A_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \to 0$.

Teorema 1.6.7. Seja K um subconjunto compacto de $\rho(-A_0)$. Então existe $\varepsilon_K \in (0,1]$ tal que $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_K]$ e

$$\sup_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X_\varepsilon)} < \infty.$$

Além disso, para $u \in X_0$, temos

$$\sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} E_\varepsilon u - E_\varepsilon(\mu + A_0)^{-1} u\|_{\mathscr{L}(X_\varepsilon)} \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

O próximo resultado assegura que, para ε se aproximando de zero, o espectro de $-A_\varepsilon$ aproxima-se do espectro de $-A_0$. Note que como os operadores A_ε possuem resolvente compacto e $0 \in \rho(A_\varepsilon)$, os espectros $\sigma(-A_\varepsilon)$ consistem apenas de um número finito de autovalores isolados de multiplicidade finita.

Teorema 1.6.8. São válidas as seguintes afirmações:

(i) Se $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ é uma sequência convergindo para zero, $(\mu_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{C}$ com $\mu_{\varepsilon_k} \in \sigma(-A_{\varepsilon_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\mu_{\varepsilon_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0$, então $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$.

(ii) Para todo $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$, existem sequências $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ convergindo para zero e $(\mu_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ com $\mu_{\varepsilon_k} \in \sigma(-A_{\varepsilon_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tais que $\mu_{\varepsilon_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0$.

Seja $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$ e $\delta > 0$ tais que $\{z \in \mathbb{C};\, |z - \mu_0| \leq \delta\} \cap \sigma(-A_0) = \{\mu_0\}$. Consideramos a projeção espectral $Q_0(\mu_0) : X_0 \to X_0$, dada por

$$Q_0(\mu_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\mu_0|=\delta} (z + A_0)^{-1} dz.$$

Como $K = \{z \in \mathbb{C};\, |z - \mu_0| = \delta\}$ é compacto contido em $\rho(-A_0)$, pelo Teorema 1.6.7, existe ε_K tal que $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$, assim definimos a projeção espectral $Q_\varepsilon(\mu_0)$:

$X_\varepsilon \to X_\varepsilon$, por

$$Q_\varepsilon(\mu_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-\mu_0|=\delta} (z + A_\varepsilon)^{-1} dz.$$

Definimos o *auto-espaço generalizado* associado a μ_0 por $W(\mu_0, -A_\varepsilon) = Q_\varepsilon X_\varepsilon$.

Observação 1.6.9. A projeção espectral $Q_\varepsilon(\mu_0)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_K]$, é um operador compacto e o auto espaço $W(\mu_0, -A_\varepsilon)$ é um subespaço de dimensão finita.

Lema 1.6.10. Para todo $\mu \in K$, $Q_\varepsilon(\mu) \xrightarrow{CC} Q_0(\mu)$.

Teorema 1.6.11. São válidas as seguintes afirmações:

(i) Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\dim W(\mu, -A_0) = \dim W(\mu, -A_0)$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, e $\mu \in K$.

(ii) Para todo $u^0 \in W(\mu_0, -A_0)$, existe uma família $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ com $u^\varepsilon \in W(\mu_0, -A_\varepsilon)$, tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u^0$.

(iii) Toda sequência $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ com $u^k \in W(\mu_0, -A_{\varepsilon_k})$, $\varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ e $\|u^k\|_{X_{\varepsilon_k}} = 1$, admite uma subsequência E-convergente para um elemento $u^0 \in W(\mu_0, -A_0)$.

Lema 1.6.12. Seja $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]} \subset \mathscr{L}(X_\varepsilon)$ tal que $V_\varepsilon \xrightarrow{EE} V_0$. Então

$$A_\varepsilon^{-1} V_\varepsilon \xrightarrow{CC} A_0^{-1} V_0.$$

No que segue, supomos que $0 \notin \sigma(A_0 + V_0)$. Observamos que $A_0 + V_0$ possui resolvente compacto.

Proposição 1.6.13. Seja $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]} \subset \mathscr{L}(X_\varepsilon)$ tal que $V_\varepsilon \xrightarrow{EE} V_0$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(A_\varepsilon + V_\varepsilon)$ e $\|(A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X_\varepsilon)} < \infty$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Além disso,

$$(A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (A_0 + V_0)^{-1}.$$

Capítulo

2

Equações de reação-difusão

Na modelagem de problemas físicos, quando lidamos com materiais que possuem propriedades físicas distintas em suas componentes, é frequente encontrarmos sistemas com comportamento diferente em certas regiões. Como consequência, as leis que constituem o sistema, embora obedeçam uma formulação geral, possuem diferenças significativas dependendo em qual região do sistema estamos trabalhando. Isto, por sua vez, implica que a equação diferencial que descreve o comportamento do sistema pode também possuir propriedades diferentes ao longo do sistema. Considerando que alguns dos parâmetros do problema em questão são variáveis, é também frequente a situação em que devemos estudar algum problema limite.

Tal dinâmica, por exemplo, ocorre quando a difusão do calor é muito grande em certas partes do material e, neste caso, o problema limite pode ser considerado como um processo descrevendo a transição de solidificação do material. Nesta situação, levando em consideração que grande difusão proporciona uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais do sistema, esperamos que em uma determinada região Ω_0 interior ao domínio físico da equação, a solução do problema tende a ser espacialmente homogênea e satisfaça uma EDO, enquanto que em outra região, também interior ao domínio do problema, tal solução satisfaça uma EDP. Neste trabalho consideraremos um problema de reação-difusão com difusão grande localizada e seu problema limite, e relacionaremos as dinâmicas de tais problemas relativamente a uma "taxa de atração". Tal abordagem foi, por exemplo, considerada em [4] para uma equação de reação-difusão com variação no coeficiente de difusão, sem a hipótese de a difusão ser grande em certas regiões.

2.1 Introdução

Consideramos o problema:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(t,x) - \operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(t,x)) + \lambda u^\varepsilon(t,x) = f(u^\varepsilon(t,x)),\ x \in \Omega, t > 0, \\ p_\varepsilon(x)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

para o qual assumimos as seguintes hipóteses:

- $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ para $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda > 0$ e a não linearidade $f \in C^2(\mathbb{R})$ satisfaz certas condições de crescimento, dissipatividade e hiperbolicidade que vamos impor posteriormente;

- Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^n$;

- $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}}$ denota a derivada conormal de u^ε, isto é, $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = \nabla u^\varepsilon \cdot \vec{n}$, onde $\vec{n}$ é o vetor unitário normal <u>interior</u> a Ω na fronteira $\partial\Omega$;

- $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{0,i}$ é um aberto no interior de Ω, onde $\Omega_{0,i}$ são domínios suaves em Ω tais que $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$ para $i \neq j$, $i,j = 1,\dots,m$. Denotamos $\Omega_1 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_0$. Note que a fronteira $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cup \partial\Omega_0$, com $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$;

- os coeficientes de difusão $p_\varepsilon : \Omega \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, são tais que

  (i) $p_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$;

  (ii) $0 < m_0 \leq p_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$;

  (iii) $p_\varepsilon(x) \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} p_0(x), \text{ uniformemente em } \Omega_1 \text{ com } p_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_1, (0,\infty)) \\ \infty, \text{ uniformemente em subconjuntos compactos de } \Omega_0 \end{cases}$.

Assumiremos por um momento que $m = 1$, ou seja, que Ω_0 seja conexo, e que as soluções u^ε de (2.1) existam e convirjam, em algum sentido, para uma função $u(t,x)$ que é espacialmente constante em Ω_0, com $u(t,x) = u_{\Omega_0}(t)$ para todo $x \in \Omega_0$. Uma vez que difusibilidade grande implica uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais, é natural esperar que para valores pequenos de ε, a solução do problema (2.1) seja aproximadamente espacialmente

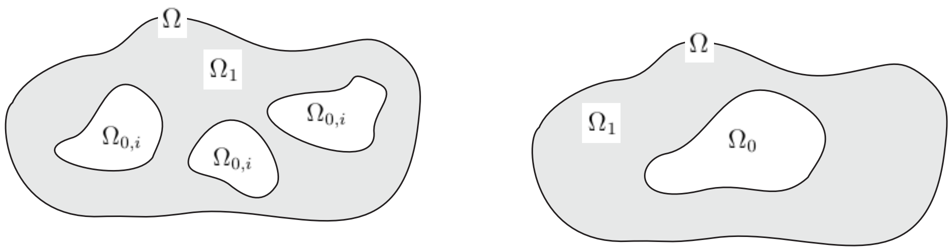

Figura 2.1: Domínio Ω

constante em Ω_0. Assim, quando $\varepsilon \to 0$, esperamos que em Ω_1, u verifique

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u(t,x)) + \lambda u(t,x) = f(u(t,x)),\ x \in \Omega_1, t > 0, \\ p_0(x)\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Integrando em Ω_0 a primeira equação em (2.1), supondo u^ε constante em Ω_0 e usando a Primeira Identidade de Green, obtemos

$$\int_{\Omega_0} u_t^\varepsilon(t,x)\,dx + \int_{\partial\Omega_0} p_\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}}\,d\sigma + \int_{\Omega_0} \lambda u^\varepsilon(t,x)\,dx = \int_{\Omega_0} f(u^\varepsilon(t,x))\,dx,$$

onde $d\sigma$ é a medida de superfície em $\partial\Omega_0$ e $\vec{n}$ é o vetor unitário normal interior a Ω_0 na fronteira $\partial\Omega_0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ e dividindo por $|\Omega_0|$, obtemos a equação diferencial ordinária

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t) + \frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,d\sigma + \lambda u_{\Omega_0}(t) = f(u_{\Omega_0}(t)).$$

Observamos que tal equação relaciona o fluxo total de calor de Ω_1 para Ω_0 através da fronteira $\partial\Omega_0$ com o calor total em Ω_1. Também relaciona o valor de u_{Ω_0} com o valor de u em Ω_1 através da integral sobre $\partial\Omega_0$.

Desta forma, tendo em mente [14], o problema limite de (2.1) quando $\varepsilon \to 0$ deve ser

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u(t,x)) + \lambda u(t,x) = f(u(t,x)), \quad x \in \overline{\Omega}_1, t > 0, \\ u|_{\Omega_{0,i}}(t,x) = u_{\Omega_{0,i}}(t), \quad x \in \Omega_{0,i},\, i = 1,...,m, \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}}(t) + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\displaystyle\int_{\partial\Omega_{0,i}} p_0(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, d\sigma + \lambda u_{\Omega_{0,i}}(t) = f(u_{\Omega_{0,i}}(t)), \quad i = 1,...,m, \\ p_0(x)\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

A seguir, escreveremos (2.1) e (2.2) em um formato semilinear parabólico apropriado e concluiremos que tais problemas estão bem postos. Para tal, consideraremos, para cada $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, o operador $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$D(A_\varepsilon) = \Big\{u \in H^1(\Omega)\,;\, -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega\Big\};$$

$$A_\varepsilon u = -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u, \quad \forall u \in D(A_\varepsilon).$$

Denotamos

$$L^2_{\Omega_0}(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega)\,;\, u \text{ é constante q.s. em cada componente conexa de } \Omega_0\Big\};$$

$$H^1_{\Omega_0}(\Omega) = \Big\{u \in H^1(\Omega)\,;\, \nabla u = 0 \text{ em } \Omega_0\Big\},$$

e definimos o operador $A_0 : D(A_0) \subset L^2_{\Omega_0}(\Omega) \to L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ por

$$D(A_0) = \Big\{u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)\,;\, -\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) \in L^2(\Omega_1) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega\Big\};$$

$$A_0 u = (-\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u)\chi_{\Omega_1} + \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\int_{\partial\Omega_{0,i}} p_0(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, d\sigma + \lambda u_{\Omega_{0,i}}\Big)\chi_{\Omega_{0,i}},$$

para todo $u \in D(A_0)$.

Mostraremos, na próxima seção, que para $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, os operadores A_ε são setoriais, auto-adjuntos, positivos com resolventes compactos e $0 \in \rho(A_\varepsilon)$. Logo, $Re(\sigma(A_\varepsilon)) \subset (0,\infty)$. Consideramos os espaços de potências fracionárias[1] $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ e $X_0^{\frac{1}{2}} = H^1_{\Omega_0}(\Omega)$

[1]Quando necessário denotaremos $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

munidos dos respectivos produtos internos

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \int_\Omega p_\varepsilon(x) \nabla\varphi \nabla\psi \, dx + \lambda \int_\Omega \varphi\psi \, dx, \quad \forall \varphi, \psi \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

quando $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{X_0^{\frac{1}{2}}} = \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla\varphi \nabla\psi \, dx + \lambda \int_\Omega \varphi\psi \, dx, \quad \forall \varphi, \psi \in X_0^{\frac{1}{2}}.$$

Tais produtos internos induzem normas equivalentes à norma de $H^1(\Omega)$. Sendo assim, temos que $X_0^{\frac{1}{2}}$ é um subespaço fechado de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $\|u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \|u\|_{X_0^{\frac{1}{2}}}$. Além disso, segue do Lema 1.4.1, com $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$, que o semigrupo analítico $\{e^{-A_\varepsilon t}\,; t \geq 0\}$ gerado por $-A_\varepsilon$ verifica

$$\|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega), X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C t^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]; \tag{2.3}$$

$$\|e^{-A_0 t}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}(\Omega), X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C t^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t}, \tag{2.4}$$

onde C é uma constante positiva independente de ε.

Observamos que o problema (2.1) é uma perturbação singular do problema (2.2) e quando o parâmetro $\varepsilon \to 0$, o coeficiente de difusão p_ε torna-se muito grande em Ω_0. Considerando os operadores A_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, reescrevemos tais problemas na seguinte forma abstrata:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = f^e(u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $f^e : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \to L^2(\Omega)$ é o operador de Nemitskii associado a f, isto é, $f^e(u)(x) = f(u(x))$, para $x \in \Omega$. Prova-se que f^e é Fréchet continuamente diferenciável e, devido à condição de dissipatividade que admitiremos a seguir, podemos assumir, sem perda de generalidade, que f^e é globalmente Lipschitz e globalmente limitada. No que segue, usaremos a mesma notação f para f^e e f. Assumimos a seguinte condição de crescimento:

(C) Se $n = 2$, para todo $\eta > 0$, existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que

$$|f(u) - f(v)| \leq C_\eta (e^{\eta |u|^2} + e^{\eta |v|^2}) |u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

e, se $n \geq 3$, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|f(u)-f(v)| \leq \tilde{C}|u-v|(|u|^{\frac{4}{n-2}}+|v|^{\frac{4}{n-2}}+1), \quad \forall u,v \in \mathbb{R}.$$

Sob estas condições, segue de [3] que o problema (2.5) está localmente bem posto. Para obtermos que as soluções estão globalmente definidas e a existência de atratores globais, assumiremos a seguinte condição de dissipatividade:

(D)

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} < 0.$$

Segue como em [1] que (2.5) está globalmente bem posto. Posteriormente, faremos mais uma hipótese, de hiperbolicidade, sobre f.

Nosso objetivo é estudar o comportamento da família de semigrupos não lineares associados ao problema (2.5), bem como o comportamento de seus atratores globais quando o parâmetro $\varepsilon \to 0$, tomando como referência o valor

$$(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon, \tag{2.6}$$

onde J_ε está relacionado com a solução de um problema elíptico associado ao problema (2.5) e com a decomposição do espaço $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ em função do subespaço $X_0^{\frac{1}{2}}$, e Z_ε possui uma interpretação análoga, porém relacionado com a decomposição do espaço $L^2(\Omega)$ em função do subespaço $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$. Nos referiremos a (2.6) como *taxa de atração*. Visamos estender alguns resultados obtidos em [4] considerando o caso específico de problemas com difusão grande localizada, ou seja, com

$$p_\varepsilon(x) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} p_0(x) \text{ uniformemente em } \Omega_1 \\ \infty \text{ uniformemente em subconjuntos compactos de } \Omega_0 \end{cases}.$$

2.2 Propriedades e existência de atratores

Nesta seção, mostraremos que para cada $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ fixado, o operador A_ε é setorial, positivo, auto-adjunto, possui resolvente compacto e $0 \in \rho(A_\varepsilon)$. Nas linhas da Seção 1.4, obteremos que os semigrupos associados aos problemas (2.1) e (2.2) possuem estrutura gradiente e concluiremos a existência de atratores globais para tais semigrupos.

Teorema 2.2.1. Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, o operador A_ε associado ao problema (2.5) é positivo, auto-adjunto, possui resolvente compacto e $0 \in \rho(A_\varepsilon)$.

Demonstração. Supomos inicialmente $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Consideramos a seguinte forma bilinear:

$$a_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega p_\varepsilon(x) \nabla u \nabla v \, dx + \lambda \int_\Omega uv \, dx, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Afirmamos que a_ε é coerciva e contínua. De fato, para $u \in H^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u,u) &= \int_\Omega p_\varepsilon(x) \nabla u \nabla u \, dx + \lambda \int_\Omega uu \, dx \\ &= \int_\Omega p_\varepsilon(x) |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx \\ &\geq m_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx \\ &\geq \min\{m_0, \lambda\} \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2 \, dx \Big) \\ &= \min\{m_0, \lambda\} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

e para $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u,v) &= \int_\Omega p_\varepsilon(x) \nabla u \nabla v \, dx + \lambda \int_\Omega uv \, dx \\ &\leq M_\varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\{M_\varepsilon, \lambda\} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Consideramos o operador $B_\varepsilon : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, definido pela relação

$$a_\varepsilon(u,v) = \langle B_\varepsilon u, v \rangle_{-1,1},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1,1}$ denota o produto de dualidade entre os espaços $H^1(\Omega)$ e $(H^1(\Omega))^* := H^{-1}(\Omega)$. Assim definido, B_ε é contínuo e injetor, pois $\langle B_\varepsilon u, u \rangle_{-1,1} = 0$ implica $u = 0$ e, pelo Teorema de Lax-Milgram, qualquer que seja $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, existe um único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\langle B_\varepsilon u, v \rangle_{-1,1} = a_\varepsilon(u,v) = \langle \varphi, v \rangle_{-1,1}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

ou seja, $B_\varepsilon u = \varphi$, o que mostra que B_ε é sobrejetor. Logo B_ε é um isomorfismo. Consideramos agora o operador $\tilde{A}_\varepsilon : D(\tilde{A}_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$D(\tilde{A}_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega)\,;\, B_\varepsilon u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\};$$

$$\tilde{A}_\varepsilon u = -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u, \quad \forall u \in D(\tilde{A}_\varepsilon).$$

Afirmamos que $D(\tilde{A}_\varepsilon) = \left\{ u \in H^2(\Omega)\,;\, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}$. De fato, seja $u \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$, então $B_\varepsilon u \in L^2(\Omega)$ e, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega p_\varepsilon(x)\nabla u \nabla \varphi\, dx + \lambda \int_\Omega u\varphi\, dx = \int_\Omega B_\varepsilon u \varphi\, dx,$$

ou seja, u é solução fraca do problema de Neumann

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u = B_\varepsilon u \ \text{ em } \Omega \\ p_\varepsilon(x)\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \ \text{ em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Logo $u \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ em $\partial\Omega$. Por outro lado, se $u \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ em $\partial\Omega$, então $u \in H^1(\Omega)$ e $B_\varepsilon u \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Agora, utilizando a Primeira Identidade de Green[2], podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle B_\varepsilon u, v\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega p_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v\, dx + \lambda \int_\Omega uv\, dx \\ &= \int_\Omega -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) v\, dx - \int_{\partial\Omega} p_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\, d\sigma + \lambda \int_\Omega uv\, dx \\ &= \int_\Omega -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) v\, dx + \lambda \int_\Omega uv\, dx \\ &= \langle -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u, v\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\langle \tilde{A}_\varepsilon u, v \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $u \in L^2(\Omega)$, segue que $B_\varepsilon u \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Logo $D(\tilde{A}_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega)\,;\, -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\} = D(A_\varepsilon)$ e $\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon$. Assim, $a_\varepsilon(u,v) = \langle A_\varepsilon u, v\rangle_{L^2(\Omega)}$, de onde segue que A_ε é positivo, simétrico e como A_ε é sobrejetor, obtemos A_ε auto-adjunto. Resta mostrar que A_ε possui resolvente compacto. Sendo A_ε bijetor e fechado, temos que A_ε^{-1} é fechado e, portanto, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $A_\varepsilon^{-1} \in$

[2] $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} v\, d\sigma = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega v \Delta u\, dx$, onde $\vec{\eta}$ é o vetor normal exterior.

$\mathscr{L}(L^2(\Omega))$. Logo $0 \in \rho(A_\varepsilon)$. Para mostrarmos que A_ε^{-1} é compacto, seja $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon \subset L^2(\Omega)$ tal que $\|g_\varepsilon\|_{L^2} \leq 1$. Temos para $v^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} g_\varepsilon$,

$$\int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx + \lambda \int_\Omega |v^\varepsilon|^2\,dx = a_\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = \langle A_\varepsilon v^\varepsilon, v^\varepsilon\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega g_\varepsilon v^\varepsilon\,dx.$$

E assim, tomando $C_1 = \min\{m_0, \lambda\}$, C_2 a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $0 < \delta < \dfrac{2C_1}{C_2^2}$, temos, utilizando a Desigualdade de Young[3]

$$\begin{aligned} C_1\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx + \lambda \int_\Omega |v^\varepsilon|^2\,dx \\ &\leq \int_\Omega |g_\varepsilon||v^\varepsilon|\,dx \leq \int_\Omega \frac{|g_\varepsilon|^2}{2\delta} + \frac{\delta|v^\varepsilon|^2}{2}\,dx \\ &= \frac{\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\delta} + \frac{\delta\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2\delta} + \frac{\delta C_2^2}{2}\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

logo

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_3, \quad \text{onde } C_3 = \frac{1}{2\delta}\Big(C_1 - \frac{\delta C_2^2}{2}\Big)^{-1} > 0. \tag{2.7}$$

Portanto, existe $M > 0$ tal que

$$A_\varepsilon^{-1}(B_{L^2(\Omega)}(0,1)) \subset B_{H^1(\Omega)}(0,M).$$

Como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compactamente, segue que $A_\varepsilon^{-1} \in \mathscr{K}(L^2(\Omega))$.

Finalmente, para o caso $\varepsilon = 0$, a demonstração segue os passos do caso anterior, utilizando a forma bilinear

$$a_0(u,v) = \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u \nabla v\,dx + \lambda \int_\Omega uv\,dx, \quad \forall u, v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega),$$

para obter um isomorfismo B_0 entre $H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ e seu dual $(H^1_{\Omega_0}(\Omega))^*$. $\square$

Teorema 2.2.2. Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, o operador A_ε associado ao problema (2.5) é setorial com

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega))} \leq \frac{M}{|\mu + \lambda|}, \qquad \forall \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

[3] $a, b \geq 0, \forall \delta > 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2}{2\delta} + \frac{\delta b^2}{2}$.

$$\|(\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}(\Omega))} \leq \frac{M}{|\mu + \lambda|}, \qquad \forall \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi},$$

para alguma constante $M \geq 1$ independente de ε, onde $\Sigma_{-\lambda,\phi} = \{\mu \in \mathbb{C};\, |arg(\mu + \lambda)| < \pi - \phi\}$ é um setor com $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

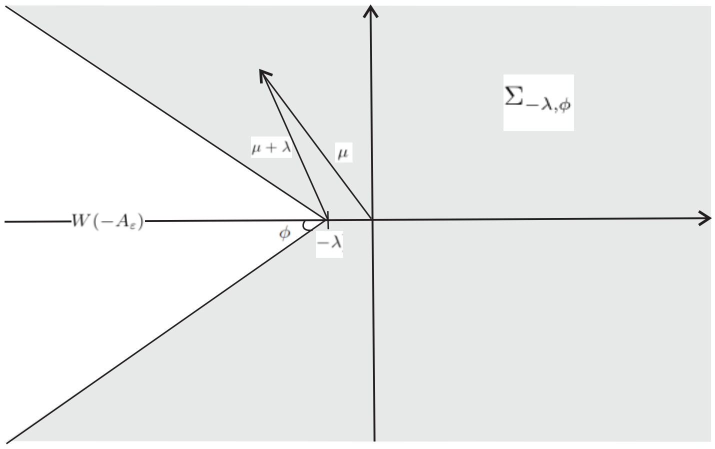

Figura 2.2: Setor $\Sigma_{-\lambda,\phi}$

Demonstração. Supomos inicialmente $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Segue da definição de A_ε e da Primeira Identidade de Green que $\langle A_\varepsilon u, u\rangle_{L^2} \geq \lambda \langle u, u\rangle_{L^2}$, assim o operador $-A_\varepsilon$ é dissipativo satisfazendo $\langle -A_\varepsilon u, u\rangle_{L^2} \leq -\lambda \langle u, u\rangle_{L^2}$, para todo $u \in D(A_\varepsilon)$. Assim, temos que $W(-A_\varepsilon) \subset (\infty, -\lambda]$, onde

$$W(-A_\varepsilon) = \{\langle -A_\varepsilon u, u\rangle_{L^2}\,;\, u \in D(A_\varepsilon), \|u\|_{L^2} = 1\}$$

é a imagem numérica de $-A_\varepsilon$. Desta forma, $R = \mathbb{C}\backslash(-\infty, -\lambda] \subset \mathbb{C}\backslash W(-A_\varepsilon)$ é aberto e conexo. Temos ainda que $0 \in R \cap \rho(-A_\varepsilon)$. Se $\mu \in R \cap \Sigma_{-\lambda,\phi}$, então $\mu \notin \overline{W(-A_\varepsilon)}$ e, do Teorema 1.2.10, segue que $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -\lambda] \subset \rho(-A_\varepsilon)$ e

$$\|(\mu - (-A_\varepsilon))^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\text{dist}(\mu, W(-A_\varepsilon))}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\text{dist}(\mu, W(-A_\varepsilon)) &\geq \text{dist}(\mu, (-\infty, -\lambda]) = |\mu + \lambda|\,\text{sen}(\pi - arg(\mu + \lambda))\\ &\geq |\mu + \lambda|\,\text{sen}\,\phi,\end{aligned}$$

e obtemos assim,

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega))} \le \frac{M}{|\mu+\lambda|}, \qquad \forall \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi},$$

onde $M = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\phi}$ independe de ε.

O caso $\varepsilon = 0$ segue as mesmas linhas acima. □

Vimos anteriormente que para qualquer $u_0^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, a solução $u^\varepsilon(t,u_0^\varepsilon)$ de (2.5) começando em u_0^ε está definida para todo $t \ge 0$ e, como na Seção 1.4, podemos definir em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ o semigrupo não linear $\{T_\varepsilon(t); t \ge 0\}$ associado a (2.5) por $T_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon = u^\varepsilon(t,u_0^\varepsilon), t \ge 0$, ou seja, o semigrupo dado por

$$T_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t}u_0^\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(u^\varepsilon(s,u_0^\varepsilon))\,ds, \quad t \ge 0. \tag{2.8}$$

Teorema 2.2.3. Os semigrupos (2.8) associados aos problemas (2.1) e (2.2) possuem estrutura gradiente.

Demonstração. Suponhamos inicialmente $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Consideramos a aplicação $V_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ definida por

$$V_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla\varphi|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda\varphi^2\,dx - \int_\Omega F(\varphi)\,dx, \quad \forall \varphi \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

onde F é uma primitiva de f. Temos V_ε contínua e, para u^ε solução de (2.1), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(u^\varepsilon) &= \int_\Omega p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon \nabla u_t^\varepsilon\,dx + \int_\Omega \lambda u^\varepsilon u_t^\varepsilon dx - \int_\Omega f(u^\varepsilon)u_t^\varepsilon\,dx \\
&= -\int_{\partial\Omega} p_\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} u_t^\varepsilon\,d\sigma - \int_\Omega \operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon)u_t^\varepsilon\,dx + \int_\Omega \lambda u^\varepsilon u_t^\varepsilon dx - \int_\Omega f(u^\varepsilon)u_t^\varepsilon\,dx \\
&= \int_\Omega [-\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon - f(u^\varepsilon)]u_t^\varepsilon\,dx \\
&= \int_\Omega -(u_t^\varepsilon)^2\,dx \le 0.
\end{aligned}$$

Logo, V_ε é uma função de Lyapunov para $\{T_\varepsilon(t)\,;\, t \ge 0\}$.

Para o caso $\varepsilon = 0$, consideramos a aplicação $V_0 : X_0^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ definida por

$$V_0(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla\varphi|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda\varphi^2\,dx - \int_\Omega F(\varphi)\,dx, \quad \forall \varphi \in X_0^{\frac{1}{2}},$$

e procedemos como anteriormente. □

Teorema 2.2.4. O semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, associado a (2.5) possui um atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Além disso,

$$\sup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \sup_{w\in\mathscr{A}_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

e

$$\sup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \sup_{w\in\mathscr{A}_\varepsilon} \|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Demonstração. Seção 1.4, [1] e [3]. □

2.3 Problema elíptico com condição de Neumann homogênea

Devido à hipótese sobre os coeficientes de difusão p_ε, vimos na seção anterior que os operadores A_ε para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e A_0 são substancialmente diferentes, nos fornecendo assim espaços bases $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, e $X_0^{\frac{1}{2}}$ diferentes. Sendo assim, podemos considerar $\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty}$ somente em Ω_1. Para obtermos uma taxa de atração para os atratores dos semigrupos dos problemas (2.5), estudaremos os problemas elípticos associados aos operadores resolventes.

Para $g_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, e $g_0 \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$, consideramos o problema

$$\begin{cases} A_\varepsilon u^\varepsilon = g_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, multiplicamos a primeira equação por $v \in H^1(\Omega)$ e integramos em Ω, obtendo

$$\int_\Omega p_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla v \, dx + \int_\Omega \lambda u^\varepsilon v \, dx = \int_\Omega g_\varepsilon v \, dx. \tag{2.10}$$

Definição 2.3.1. Dizemos que $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, é *solução fraca* de (2.9) se satisfaz (2.10), para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Para $\varepsilon = 0$, assumimos, por simplicidade, $m = 1$, e assim

$$A_0 u^0 = (-\mathrm{div}(p_0(x)\nabla u^0) + \lambda u^0)\chi_{\Omega_1} + \Big(\frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}}\, d\sigma + \lambda u^0_{\Omega_0}\Big)\chi_{\Omega_0}.$$

Multiplicando a primeira equação em (2.9) por $v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ e integrando em Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g_0 v\,dx \\
&= \int_{\Omega_1} -\mathrm{div}(p_0(x)\nabla u^0)v\,dx + \int_{\Omega_1} \lambda u^0 v\,dx + \int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} v\,d\sigma + \int_{\Omega_0} \lambda u^0_{\Omega_0} v\,dx \\
&= \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega_1} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} v\,d\sigma + \int_{\Omega_1} \lambda u^0 v\,dx \\
&+ \int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} v\,d\sigma + \int_{\Omega_0} \lambda u^0_{\Omega_0} v\,dx \\
&= \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} v\,d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} v\,d\sigma + \int_{\Omega_1} \lambda u^0 v\,dx \\
&+ \int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} v\,d\sigma + \int_{\Omega_0} \lambda u^0_{\Omega_0} v\,dx \\
&= \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla v\,dx + \int_{\Omega} \lambda u^0 v\,dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla v\,dx + \int_{\Omega} \lambda u^0 v\,dx = \int_\Omega g_0 v\,dx. \tag{2.11}$$

Definição 2.3.2. Dizemos que $u^0 \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ é *solução fraca* de (2.9) com $\varepsilon = 0$, se satisfaz (2.11), para todo $v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$.

Definição 2.3.3. Dizemos que a família $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, $u^\varepsilon \in X^{\frac{1}{2}}_\varepsilon$, *E-converge fracamente* para $u^0 \in X^{\frac{1}{2}}_0$ quando $\varepsilon \to 0$, se

$$\int_\Omega p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \lambda u^\varepsilon \varphi\,dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \lambda u^0 \varphi\,dx,\ \forall \varphi \in X^{\frac{1}{2}}_0.$$

Proposição 2.3.4. Para $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, existe uma única solução fraca u^ε de (2.9) caracterizada por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|u^\varepsilon|^2\,dx - \int_\Omega g u^\varepsilon\,dx \\
&\qquad = \min_{v\in H^1(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla v|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|v|^2\,dx - \int_\Omega g v\,dx\right\},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ e

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|u^0|^2\,dx - \int_\Omega g u^0\,dx \\
&\qquad = \min_{v\in H^1_{\Omega_0}(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla v|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|v|^2\,dx - \int_\Omega g v\,dx\right\}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Demonstração. Supomos $\varepsilon = 0$. Temos que $H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, consideramos a seguinte forma bilinear

$$a_0(u,v) = \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u \nabla v\, dx + \lambda \int_{\Omega} uv\, dx, \quad \forall u, v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega).$$

Afirmamos que a_0 é simétrica, coerciva e contínua. De fato, para $u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} a_0(u,u) &= \int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla u|^2\, dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2\, dx \\ &\geq m_0 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2\, dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2\, dx \\ &\geq \min\{m_0, \lambda\} \Big(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\Omega} |u|^2\, dx \Big) \\ &= C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

e para $u, v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a_0(u,v) &= \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u \nabla v\, dx + \lambda \int_{\Omega} uv\, dx \\ &\leq \|p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\{\|p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}, \lambda\} \Big[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \Big] \\ &\leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Consideramos também o funcional linear $\varphi : H^1_{\Omega_0}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} gv\, dx, \quad \forall v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega).$$

Note que $\varphi \in H^{-1}_{\Omega_0}(\Omega) := (H^1_{\Omega_0}(\Omega))^*$, pois

$$|\langle \varphi, v \rangle| = \Big| \int_{\Omega} gv\, dx \Big| = |\langle g, v \rangle_{L^2}| \leq \|g\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|g\|_{L^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe $u^0 \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ único, tal que

$$a_0(u^0, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega),$$

isto é,

$$\int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla v\, dx + \lambda \int_{\Omega} u^0 v\, dx = \int_{\Omega} g v\, dx, \quad \forall v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega).$$

Além disso, u^0 é caracterizado por

$$\begin{cases} u^0 \in H^1_{\Omega_0}(\Omega) \\ \dfrac{1}{2}a(u^0,u^0) - \langle \varphi, u^0 \rangle = \min\limits_{v \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \end{cases}.$$

Para o caso $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, consideramos a forma bilinear

$$a_\varepsilon(u,v) = \int_{\Omega} p_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v\, dx + \lambda \int_{\Omega} uv\, dx, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

e procedemos como anteriormente. □

No que segue denotaremos por $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ o espaço dual de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, que por sua vez coincide com o espaço de potência fracionária $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = D(A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

Teorema 2.3.5. Sejam $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\varepsilon_0]$ uma sequência convergindo para zero, $(g_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $g_{\varepsilon_k} \in X_{\varepsilon_k}^{-\frac{1}{2}}$ com $\|g_{\varepsilon_k}\|_{X_{\varepsilon_k}^{-\frac{1}{2}}} \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $(u^{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $u^{\varepsilon_k} \in D(A_{\varepsilon_k})$ satisfazendo $A_{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k} = g_{\varepsilon_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(i) Existem uma subsequência de $(u^{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$, para a qual manteremos a mesma notação, e $u^0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$ de tal modo que $(u^{\varepsilon_k})_k$ E-converge fracamente e fortemente em $L^2(\Omega)$ para u^0.

(ii) Se $(g_{\varepsilon_k})_k$ converge na topologia fraca* de $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ para $g_0 \in X_0^{-\frac{1}{2}}$, então $(u^{\varepsilon_k})_k$ E-converge fracamente e fortemente em $L^2(\Omega)$ para u_0 satisfazendo $A_0 u^0 = g_0$.

Demonstração. (i) Sendo $A_{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k} = g_{\varepsilon_k}$, então

$$\begin{aligned} \|u^{\varepsilon_k}\|^2_{X_{\varepsilon_k}^{\frac{1}{2}}} &= \int_{\Omega} p_{\varepsilon_k}(x)|\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\, dx + \lambda \int_{\Omega} |u^{\varepsilon_k}|^2\, dx \\ &= \langle g_{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k} \rangle_{L^2} = \langle g_{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k} \rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|g_{\varepsilon_k}\|_{X_{\varepsilon_k}^{-\frac{1}{2}}} \|u^{\varepsilon_k}\|_{X_{\varepsilon_k}^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

de modo que $\|u^{\varepsilon_k}\|^2_{X_{\varepsilon_k}^{\frac{1}{2}}} \leq 1$. Como

$$m_0 \int_{\Omega} |\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\, dx + \lambda \int_{\Omega} |u^{\varepsilon_k}|^2\, dx \leq \|u^{\varepsilon_k}\|^2_{X_{\varepsilon_k}^{\frac{1}{2}}} \leq 1, \tag{2.14}$$

segue que $(\|u^{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega)})_k$ é limitada e, sendo $H^1(\Omega)$ Hilbert[4], segue que existem uma subsequência de $(u^{\varepsilon_k})_k$, para a qual manteremos a mesma notação, e $u^0 \in H^1(\Omega)$ de tal forma que $(u^{\varepsilon_k})_k$ converge para u^0 na topologia fraca em $H^1(\Omega)$ e também converge fortemente em $L^2(\Omega)$, já que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compactamente. Também

$$\int_{\bar{V}} p_\varepsilon |\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\,dx + \lambda \int_{\bar{V}} |u^{\varepsilon_k}|^2\,dx \leq 1,$$

para todo aberto $V \subset\subset \Omega_0$ e, sendo $H^1(V)$ Hilbert, podemos assumir que u^{ε_k} converge fracamente para u^0 em $H^1(V)$. Logo,[5] $\int_V |\nabla u^0|^2\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_V |\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\,dx$. Por outro lado,

$$\inf_{x\in\bar{V}}\{p_{\varepsilon_k}(x)\} \int_{\bar{V}} |\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\,dx \leq \int_{\bar{V}} p_{\varepsilon_k}(x)|\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\,dx \leq 1,$$

e, como $p_{\varepsilon_k}(x) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω_0, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_V |\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\,dx = 0, \text{ e portanto } \int_V |\nabla u^0|^2\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_V |\nabla u^{\varepsilon_k}|^2\,dx = 0.$$

Mas Ω_0 é união enumerável de abertos $V \subset\subset \Omega_0$, logo $|\nabla u^0| = 0$ em Ω_0, ou seja, $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$. Agora, se $(\varphi_{\varepsilon_k}) \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ é uma sequência tal que φ_{ε_k} converge fortemente em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para $\varphi_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$, então φ_{ε_k} converge fortemente em L^2 para φ_0 em $L^2(\Omega)$ e, como u^{ε_k} converge para u^0 fortemente em $L^2(\Omega)$ e fracamente em $H^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega |u^{\varepsilon_k} - u^0|^2\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \int_\Omega |\nabla u^{\varepsilon_k} - \nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega |u^{\varepsilon_k} - u^0|^2\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$\int_\Omega |\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi_0|^2\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{e} \quad \int_\Omega p_\varepsilon |\nabla\varphi_{\varepsilon_k} - \nabla\varphi_0|^2\,dx + \int_\Omega \lambda|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi_0|^2\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^{\varepsilon_k} - \nabla u^0|^2\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_1} |\nabla\varphi_{\varepsilon_k} - \nabla\varphi_0|^2\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

resultando[6]

$$\int_\Omega u^{\varepsilon_k}\varphi_{\varepsilon_k}\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega u^0\varphi_0\,dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_1} \nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi_{\varepsilon_k}\,dx \stackrel{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega_1} \nabla u^0\nabla\varphi_0\,dx,$$

[4] E Banach e reflexivo, $(f_k)_k$ limitada em $E \Rightarrow (f_k)_k$ admite uma subsequência convergente na topologia fraca $\sigma(E,E^*)$.

[5] $f_k \rightharpoonup f \Rightarrow (\|f_k\|)_k$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_k\|$.

[6] $u^k \sim u^k \in (L^2)^*$, $u^k \stackrel{*}{\rightharpoonup} u^0$ e $\varphi_k \stackrel{L^2}{\longrightarrow} \varphi_0 \Rightarrow \langle u^k, \varphi_k\rangle \to \langle u, \varphi_0\rangle$.

assim

$$\int_{\Omega_1} p_{\varepsilon_k}\nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi_{\varepsilon_k}\,dx = \int_{\Omega_1}(p_{\varepsilon_k}-p_0)\nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi_{\varepsilon_k}\,dx + \int_{\Omega_1} p_0\nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi_{\varepsilon_k}\,dx$$
$$\overset{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega_1} p_0\nabla u^0\nabla\varphi_0\,dx.$$

Portanto

$$\int_{\Omega_1} p_{\varepsilon_k}\nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi_{\varepsilon_k}\,dx + \int_{\Omega}\lambda u^{\varepsilon_k}\varphi_{\varepsilon_k}\,dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega_1} p_0\nabla u^0\nabla\varphi_0\,dx + \int_{\Omega}\lambda u^0\varphi_0\,dx.$$

Desta forma, se $\varphi\in X_0^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\int_{\Omega} p_{\varepsilon_k}(x)\nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi\,dx + \int_{\Omega}\lambda u^{\varepsilon_k}\varphi\,dx = \int_{\Omega_1} p_{\varepsilon_k}(x)\nabla u^{\varepsilon_k}\nabla\varphi\,dx + \int_{\Omega}\lambda u^{\varepsilon_k}\varphi\,dx$$
$$\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0\nabla\varphi\,dx + \int_{\Omega}\lambda u^0\varphi\,dx,$$

ou seja, u^{ε_k} converge para u^0 E-fracamente e fortemente em $L^2(\Omega)$, ou ainda,

$$\langle A_{\varepsilon_k}u^{\varepsilon_k},\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left\langle A_0u^0,\varphi\right\rangle_{X_0^{-\frac{1}{2}},X_0^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.15}$$

(ii) Agora, suponha que $(g_{\varepsilon_k})_k$ convirja na topologia fraca* de $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ para $g_0\in X_0^{-\frac{1}{2}}$, ou seja,

$$\langle g_{\varepsilon_k},\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle g_0,\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall\,\varphi\in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Mas, $A_{\varepsilon_k}u^{\varepsilon_k}=g_{\varepsilon_k}$, assim

$$\langle g_0,\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \overset{\varepsilon_k\to 0}{\longleftarrow} \langle g_{\varepsilon_k},\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \langle A_{\varepsilon_k}u^{\varepsilon_k},\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \overset{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} \left\langle A_0u^0,\varphi\right\rangle_{X_0^{-\frac{1}{2}},X_0^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall\varphi\in X_0^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $\left\langle A_0u^0,\varphi\right\rangle_{X_0^{-\frac{1}{2}},X_0^{\frac{1}{2}}} = \langle g_0,\varphi\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \langle g_0,\varphi\rangle_{L^2}$. Assim, para toda $\varphi\in X_0^{\frac{1}{2}}$,

$$0=\int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0\nabla\varphi\,dx + \int_{\Omega_1}\lambda u^0\varphi\,dx - \int_{\Omega_1} g_0\varphi\,dx + \int_{\Omega_0}\lambda u^0\varphi\,dx - \int_{\Omega_0} g_0\varphi\,dx. \tag{2.16}$$

Mas, se $\varphi \in C_c^1(\Omega_1) \subset X_0^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_1} p_0(x)\nabla u^0 \nabla\varphi\, dx + \int_{\Omega_1} \lambda u^0 \varphi\, dx - \int_{\Omega_1} g_0 \varphi\, dx \\ &= -\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u^0)\varphi\, dx + \int_{\Omega_1} \lambda u^0\varphi\, dx - \int_{\Omega_1} g_0\varphi\, dx. \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$-\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u^0) + \lambda u^0 = g_0, \qquad \text{q.s. em } \Omega_1. \tag{2.17}$$

Supondo Ω_0 conexo, para $\varphi \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em (2.16), temos

$$\begin{aligned} -\int_{\partial\Omega_1} p_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\varphi\, d\sigma - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_0\nabla u^0)\varphi\, dx + \int_{\Omega_1} \lambda u^0\varphi\, dx& \\ - \int_{\Omega_1} g_0\varphi\, dx + \int_{\Omega_0} \lambda u^0\varphi\, dx - \int_{\Omega_0} g_0\varphi\, dx &= 0. \end{aligned}$$

Mas, $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cup \partial\Omega_0$ e utilizando (2.17), obtemos[7]

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}}\varphi\, d\sigma + \int_{\Omega_0} \lambda u^0\varphi\, dx - \int_{\Omega_0} g_0\varphi\, dx \\ &= \varphi_{\Omega_0}\Big(\int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}}\, d\sigma + |\Omega_0|\lambda u_{\Omega_0} - |\Omega_0| g_{0\Omega_0}\Big), \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\partial\Omega_0} p_0(x)\frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}}\, d\sigma + \lambda u_{\Omega_0} = g_{0\Omega_0}.$$

Assim, $A_0u^0 = g_0$. No caso $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^m \Omega_{0,i}$, procedemos como acima em cada componente conexa $\Omega_{0,i}$. □

Observação 2.3.6. Note que no item (ii) do Teorema 2.3.5 o limite u^0 independe da subsequência $(u^{\varepsilon_k})_k$. Assim, u^ε converge fortemente em L^2 para u^0 desde que $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, satisfaça as hipóteses do teorema.

Teorema 2.3.7. A família de operadores $\{A_\varepsilon^{-1}\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \subset \mathscr{K}(L^2(\Omega))$ converge compactamente para o operador $A_0^{-1} \in \mathscr{K}(L^2_{\Omega_0}(\Omega))$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Seja $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ uma família em $L^2(\Omega)$ tal que $g_\varepsilon \xrightarrow{E} g_0 \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$. Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ continuamente, segue que $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ converge para g_0 na topologia fraca*[8] de $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, e

[7] $\vec{n}$ interior $\partial\Omega_1 \Rightarrow \vec{n}$ é exterior $\partial\Omega_0$. Além disso, $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u^0}{\partial \vec{n}} = 0$ em $\partial\Omega$.

[8] $g_{\varepsilon_k} \overset{*}{\rightharpoonup} g_0$ para $(\varepsilon_k)_k \subset (0, \varepsilon_0]$.

assim $\{\|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\}_\varepsilon$ é limitada. Como $A_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon := u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, segue do Teorema 2.3.5 e da Observação 2.3.6 que existe $u^0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$ tal que $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ converge fortemente em $L^2(\Omega)$ para u^0 e $A_0u^0 = g_0$, ou seja, $A_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1}g_0$. Portanto, $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{EE} A_0^{-1}$. Agora, seja $\{h_\varepsilon\}_\varepsilon$ uma família tal que $\|h_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$, temos que mostrar que a família $\{A_\varepsilon^{-1}h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ é E-relativamente compacta em $L^2(\Omega)$. Note que $A_\varepsilon^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, é compacto, pois $D(A_\varepsilon) \hookrightarrow X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compactamente. Para $v^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}h_\varepsilon$, temos

$$\|v^\varepsilon\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx + \int_\Omega \lambda|v^\varepsilon|^2\,dx = \langle h_\varepsilon, v^\varepsilon\rangle_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|h_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo, $\{\|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\}_\varepsilon$ é limitada em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e, argumentando como na demonstração do item (i) do Teorema 2.3.5, obtemos que $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ admite uma subsequência E-convergente em $L^2(\Omega)$ para algum $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$. □

Corolário 2.3.8. Se $\mu \in \rho(-A_0)$, então existe $\varepsilon_\mu \in (0,\varepsilon_0]$ tal que $\mu \in \rho(-A_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon \in [0,\varepsilon_\mu]$, e

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega))} < \infty.$$

Além disso, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + A_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Os Teoremas 2.2.1 e 2.3.7 colocam a família $\{A_\varepsilon\}_\varepsilon$ nas hipóteses do Teorema 1.6.6. □

O Corolário 2.3.8 garante uma limitação em L^2 uniforme em ε para os operadores resolventes. Tal limitação também é válida em H^1, como mostra o:

Corolário 2.3.9. Para todo $\mu \in \rho(-A_\varepsilon)$, existe $\varepsilon_\mu \in (0,\varepsilon_0]$, tal que

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega),X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} < \infty.$$

Demonstração. Como $0 \in \rho(A_\varepsilon)$, escrevemos $A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1} = I - \mu(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$. Segue do Corolário 2.3.8 que $\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} < \infty$, e, pela Desigualdade do Momento (0 <

$\frac{1}{2} < 1$), temos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\
&\quad = \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u\in L^2 \\ \|u\|\le 1}} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u\in L^2 \\ \|u\|\le 1}} \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_{L^2} \\
&\quad \le C \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u\in L^2 \\ \|u\|\le 1}} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u\in L^2 \\ \|u\|\le 1}} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}
$$

□

O Teorema 2.3.7 garante a convergência compacta dos operadores resolventes, no entanto o fato dos operadores A_ε e A_0 não estarem definidos no mesmo espaço não nos permite obter de modo direto uma estimativa que reflita essa continuidade. O próximo resultado é fundamental para superarmos este fato.

Lema 2.3.10. Sejam $g \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$, com $\|g\|_{L^2(\Omega)} \le 1$ e u^ε solução do problema elíptico

$$
\begin{cases}
A_\varepsilon u^\varepsilon = g, & \text{em } \Omega \\
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]
\end{cases} . \tag{2.18}
$$

Então,

(i) $\|u^\varepsilon - u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\|u^\varepsilon - u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \le C(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}},
$$

onde $J_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ está relacionado com a decomposição de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ em função do subespaço $X_0^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Seja u^ε solução de (2.18), então

$$
\int_\Omega p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \lambda u^\varepsilon \varphi \, dx = \int_\Omega g \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}},\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]; \tag{2.19}
$$

$$
\int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u^0 \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \lambda u^0 \varphi \, dx = \int_\Omega g \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in X_0^{\frac{1}{2}}. \tag{2.20}
$$

(i) Segue de (2.19) e (2.20) que

$$\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \lambda\int_\Omega |u^\varepsilon|^2\,dx = \int_\Omega g u^\varepsilon\,dx;$$

$$\int_\Omega p_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^0\,dx + \lambda\int_\Omega u^\varepsilon u^0\,dx = \int_\Omega g u^0\,dx;$$

$$\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx + \lambda\int_\Omega |u^0|^2\,dx = \int_\Omega g u^0\,dx.$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g(u^\varepsilon - u^0)\,dx\\
&= \int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx - \int_{\Omega_1} p_0|\nabla u^0|^2\,dx + \lambda\int_\Omega |u^\varepsilon|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u^0|^2\,dx\\
&= \int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx + \lambda\int_\Omega |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx - \int_{\Omega_1}(p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\,dx\\
&+ 2\int_\Omega p_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^0\,dx + 2\lambda\int_\Omega u^\varepsilon u^0\,dx - 2\int_{\Omega_1} p_0|\nabla u^0|^2\,dx - 2\lambda\int_\Omega |u^0|^2\,dx\\
&= \int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx + \lambda\int_\Omega |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx - \int_{\Omega_1}(p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\,dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon - u^0\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \int_{\Omega_1}(p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega g(u^\varepsilon - u^0)\,dx\\
&\leq \int_{\Omega_1}(p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\,dx + \|g\|_{L^2}\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2}\\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

pois $p_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} p_0$ uniformemente em Ω_1 e, pelo Teorema 2.3.5, $u^\varepsilon \overset{L^2}{\longrightarrow} u^0$. Para (ii), denotamos

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|u^\varepsilon|^2\,dx - \int_\Omega g u^\varepsilon\,dx\\
&= \min_{u\in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon(x)|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|u|^2\,dx - \int_\Omega g u\,dx\right\},\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|u^0|^2\,dx - \int_\Omega g u^0\,dx\\
&= \min_{u\in X_0^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda|u|^2\,dx - \int_\Omega g u\,dx\right\}
\end{aligned}$$

e escrevemos

$$\frac{1}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 = \frac{1}{2}|\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2 + \nabla u^\varepsilon \nabla u^0 - |\nabla u^0|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u^0|^2;$$

$$\frac{1}{2}|u^\varepsilon|^2 = \frac{1}{2}|u^\varepsilon - u^0|^2 + u^\varepsilon u^0 - |u^0|^2 + \frac{1}{2}|u^0|^2,$$

temos

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega p_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^0\,dx - \int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^0|^2\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \int_\Omega \lambda u^\varepsilon u^0\,dx - \int_\Omega \lambda |u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^0|^2\,dx - \int_\Omega g u^\varepsilon\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega g u^0\,dx - \int_\Omega g u^0\,dx \\
&= \lambda_0 + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega p_\varepsilon (\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0)\nabla u^0\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^0|^2\,dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \int_\Omega \lambda (u^\varepsilon - u^0) u^0\,dx - \int_\Omega g(u^\varepsilon - u^0)\,dx \\
&= \lambda_0 + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega p_\varepsilon (\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0)(\nabla u^0 - \nabla u^\varepsilon + \nabla u^\varepsilon)\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^0|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \lambda (u^\varepsilon - u^0)(u^0 - u^\varepsilon + u^\varepsilon)\,dx - \int_\Omega g(u^\varepsilon - u^0)\,dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \lambda_0 + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx - \int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx + \int_\Omega p_\varepsilon (\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0)\nabla u^\varepsilon\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^0|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx \\
&\quad - \int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx + \int_\Omega \lambda (u^\varepsilon - u^0) u^\varepsilon\,dx - \int_\Omega g(u^\varepsilon - u^0)\,dx.
\end{aligned}$$

Aplicando (2.19) com $\varphi = u^\varepsilon - u^0 \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \lambda_0 - \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^0|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0 |\nabla u^0|^2\,dx \\
&= \lambda_0 - \frac{1}{2}\int_\Omega p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (p_\varepsilon - p_0) |\nabla u^0|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Obtemos, então

$$\lambda_\varepsilon - \lambda_0 \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\, dx \tag{2.21}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} p_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon - \nabla u^0|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \lambda |u^\varepsilon - u^0|^2\, dx = \lambda_0 - \lambda_\varepsilon + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\, dx,$$

isto é,

$$\|u^\varepsilon - u^0\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = 2(\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) + \int_{\Omega_1} (p_\varepsilon - p_0)|\nabla u^0|^2\, dx. \tag{2.22}$$

Agora, decompomos $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = X_0^{\frac{1}{2}} \oplus (X_0^{\frac{1}{2}})^\perp$ e escrevemos

$$u^\varepsilon = u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon, \quad \text{com} \quad u_1^\varepsilon \in X_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad u_2^\varepsilon \in (X_0^{\frac{1}{2}})^\perp,$$

e assim

$$\|u_1^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{e} \quad \|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|u^\varepsilon - u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.23}$$

portanto

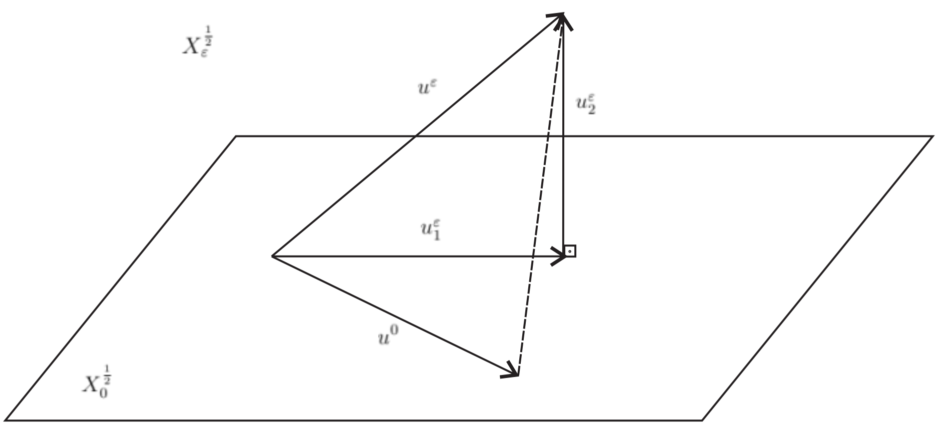

Figura 2.3: Projeção ortogonal

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \min_{u\in X_0^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\lambda|u|^2\,dx-\int_{\Omega} gu\,dx\right\}\\
&\le \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} p_0(x)|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\lambda|u_1^\varepsilon|^2\,dx-\int_{\Omega} gu_1^\varepsilon\,dx\\
&\le \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(p_0(x)-p_\varepsilon(x))|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega} p_\varepsilon(x)|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\lambda|u_1^\varepsilon|^2\,dx-\int_{\Omega} gu_1^\varepsilon\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(p_0(x)-p_\varepsilon(x))|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\frac{1}{2}\|u_1^\varepsilon\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}-\int_{\Omega} gu^\varepsilon\,dx+\int_{\Omega} gu_2^\varepsilon\,dx\\
&\le \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(p_0(x)-p_\varepsilon(x))|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\frac{1}{2}\|u^\varepsilon\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}-\int_{\Omega} gu^\varepsilon\,dx+\int_{\Omega} gu_2^\varepsilon\,dx\\
&= \lambda_\varepsilon+\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(p_0(x)-p_\varepsilon(x))|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\int_{\Omega} gu_2^\varepsilon\,dx,
\end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned}
\lambda_0-\lambda_\varepsilon &\le \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(p_0(x)-p_\varepsilon(x))|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\int_{\Omega} gu_2^\varepsilon\,dx\\
&\le \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(p_0(x)-p_\varepsilon(x))|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\|g\|_{L^2}\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Segue de (i) e (2.23) que $\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ e, de (2.21) e (2.24), que $\lambda_\varepsilon\stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\lambda_0$. Agora, aplicando (2.19) e (2.20) com $\varphi=u^\varepsilon$ e $\varphi=u^0$ respectivamente, e observando que as normas de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $X_0^{\frac{1}{2}}$ são equivalentes à norma de H^1, temos $\|u^\varepsilon\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\le\|g\|_{L^2}$ e $\|u^0\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\le C_1\|g\|_{L^2}$. Substituindo (2.24) em (2.22), temos

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon-u^0\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= 2(\lambda_0-\lambda_\varepsilon)+\int_{\Omega_1}(p_\varepsilon-p_0)|\nabla u^0|^2\,dx\\
&\le \int_{\Omega_1}(p_0-p_\varepsilon)|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\int_{\Omega_1}(p_\varepsilon-p_0)|\nabla u^0|^2\,dx+2\|g\|_{L^2}\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\le \|p_0-p_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_1)}\int_{\Omega_1}|\nabla u_1^\varepsilon|^2\,dx+\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}\int_{\Omega_1}|\nabla u^0|^2\,dx+2\|g\|_{L^2}\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\le \|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}[\|u^\varepsilon\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+\|u^0\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}]+2\|g\|_{L^2}\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\le \|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}C_2\|g\|_{L^2}+2\|g\|_{L^2}\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\le C_2\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+C_3\|u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u^{\varepsilon} - u^{0}\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \leq C\Big(\|p_{\varepsilon} - p_{0}\|_{L^{\infty}(\Omega_1)} + J_{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

onde $J_{\varepsilon} = \|u_2^{\varepsilon}\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$, e a constante C e o termo J_{ε} independem de g. □

2.4 Continuidade dos operadores resolventes

Nesta seção obteremos a taxa de atração $(\|p_{\varepsilon} - p_{0}\|_{L^{\infty}(\Omega_1)} + J_{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} + Z_{\varepsilon}$ e mostraremos que tal estimativa converge a zero quando o parâmetro ε tende a zero. Consideraremos uma projeção ortogonal P de $L^2(\Omega)$ em $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$. Tal projeção foi utilizada inicialmente em [2], onde os autores obtiveram a semicontinuidade superior dos atratores.

Lema 2.4.1. Seja $\mu \in \rho(-A_0) \cap \rho(-A_{\varepsilon})$. Então, para toda $g \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$,

$$(\mu + A_{\varepsilon})^{-1} g - (\mu + A_0)^{-1} g = (\mu + A_{\varepsilon})^{-1} A_{\varepsilon} (A_{\varepsilon}^{-1} - A_0^{-1}) A_0 (\mu + A_0)^{-1} g.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}(\mu + A_{\varepsilon})^{-1} g - (\mu + A_0)^{-1} g &= (\mu + A_{\varepsilon})^{-1} [(\mu + A_0) - (\mu + A_{\varepsilon})] (\mu + A_0)^{-1} g \\ &= (\mu + A_{\varepsilon})^{-1} A_{\varepsilon} (A_{\varepsilon}^{-1} - A_0^{-1}) A_0 (\mu + A_0)^{-1} g.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.2. Seja K um subconjunto compacto de $\rho(-A_0)$. Então existe $\varepsilon_K \in (0,1]$ tal que $K \subset \rho(-A_{\varepsilon})$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_K]$ e

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_{\varepsilon})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega), X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}})} < \infty.$$

Além disso, se $\mu \in K$ ou se $\mu \in \rho(-A_0) \cap \rho(-A_{\varepsilon})$ é tal que $Re(\mu) \notin (-\infty, \lambda]$, então existem um setor $\Sigma_{0,\phi}$ e $C_{\varphi} > 0$ tais que $\mu \in \Sigma_{0,\phi}$ e

$$\|(\mu + A_{\varepsilon})^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}(\Omega), X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}})} \leq C(\|p_{\varepsilon} - p_0\|_{L^{\infty}(\Omega_1)} + J_{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.6.7, existe $\varepsilon_K \in (0,1]$ tal que $K \subset \rho(-A_{\varepsilon})$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_K]$. Afirmamos que $\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_{\varepsilon})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} < \infty$. De fato, se existissem sequências $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$,

$(\varepsilon_k)_{k\in N} \subset (0,\varepsilon_K]$ com $\mu_k \to \mu \in K$ e $\varepsilon_k \to 0$ tais que $\|(\mu_k + A_{\varepsilon_k})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, obteríamos uma contradição da convergência compacta de $\mu_k A_{\varepsilon_k}^{-1}$ para μA_0^{-1}. Agora, escrevendo $A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1} = I - \mu(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$, pela Desigualdade do Momento $(0 < \frac{1}{2} < 1)$, temos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\
&\qquad = \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \\
&\qquad \leq C \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{\frac{1}{2}} \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq C \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|I - \mu(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{\frac{1}{2}} \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Finalmente, se $\mu \in \rho(-A_\varepsilon) \cap \rho(-A_0)$, escolhemos $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ apropriado para obtermos as estimativas setoriais

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq \frac{M_\varphi}{|\mu|}, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0];$$

e

$$\|(\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \leq \frac{M_\varphi}{|\mu|}.$$

Assim,

$$\|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq 1 + M_\varphi, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]; \tag{2.25}$$

e

$$\|A_0(\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \leq 1 + M_\varphi.$$

Pelo Lema 2.4.1, segue que para $g \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big((\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}\Big)g &= A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mu + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) A_0 (\mu + A_0)^{-1} g \\
&= A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) A_0 (\mu + A_0)^{-1} g.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}-(\mu+A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}& \\
&\leq \|A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1}-A_0^{-1})A_0(\mu+A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \\
&\leq \|A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})}\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1}-A_0^{-1})\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})}\|A_0(\mu+A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \\
&\leq \|A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1}-A_0^{-1})\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})}\|A_0(\mu+A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \\
&\leq C_\varphi(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C_\varphi > 0$ (independente de μ), já que, para $g \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$, com $\|g\|_{L^2} \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\|(A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1}-A_0^{-1}))g\|_{L^2} &= \|(A_\varepsilon^{-1}-A_0^{-1})g\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&= \|u^\varepsilon-u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{para } u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}g \text{ e } u^0 = A_0^{-1}g \\
&\leq C(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

onde usamos o Lema 2.3.10 e o fato de que C e J_ε independem de g. □

Definição 2.4.3. Definimos $P : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por

$$
Ph = \begin{cases} h, & \text{em } \overline{\Omega}_1 \\ \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\displaystyle\int_{\Omega_{0,i}} h\,dx, & \text{em } \Omega_{0,i},\ i=1,\dots,m \end{cases}.
$$

No que segue, consideraremos, por simplicidade, $m = 1$.

Proposição 2.4.4. A aplicação P é uma projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$.

Demonstração. De fato, $R(P) = L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ e $P^2 = P$. Sejam $u \in Ker(P)$ e $v \in R(P)$, temos $Pv = v$, $u = 0$ em $\overline{\Omega}_1$ e $\int_{\Omega_0} u\,dx = 0$. Logo

$$
\langle u,v\rangle_{L^2} = \int_\Omega uv\,dx = \int_{\Omega_0} uPv\,dx = v_{\Omega_0}\int_{\Omega_0} u\,dx = 0,
$$

onde $v_{\Omega_0} = \dfrac{1}{|\Omega_0|}\displaystyle\int_{\Omega_0} v\,dx$, de onde obtemos que $Ker(P) \subset (L^2_{\Omega_0})^\perp$. Por outro lado, se $u \in$

$(L^2_{\Omega_0})^\perp$, temos

$$\int_\Omega |Pu|^2\,dx = \int_{\Omega_1} u^2\,dx + \int_{\Omega_0} u_{\Omega_0}u_{\Omega_0}\,dx = \int_{\Omega_1} u^2\,dx + u_{\Omega_0}u_{\Omega_0}|\Omega_0| = \int_{\Omega_1} u^2\,dx + u_{\Omega_0}\int_{\Omega_0} u\,dx$$

e

$$0 = \langle Pu, u\rangle_{L^2} = \int_\Omega uPu\,dx = \int_{\Omega_1} u^2\,dx + u_{\Omega_0}\int_{\Omega_0} u\,dx,$$

resultando $Pu = 0$ e consequentemente $(L^2_{\Omega_0})^\perp \subset Ker(P)$. □

Teorema 2.4.5. Para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e $h \in L^2(\Omega)$ com $\|h\|_{L^2} \leq 1$, temos

$$\|A_\varepsilon^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \tag{2.26}$$

Demonstração. Temos

$$(I-P)h = \begin{cases} 0, & \text{em } \overline{\Omega}_1 \\ h - h_{\Omega_0}, & \text{em } \Omega_0 \end{cases}.$$

Desta forma, $\|A_\varepsilon^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\Omega)} = \|A_\varepsilon^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\Omega_0)}$. Denotando $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}(I-P)h$ em Ω_0, obtemos o problema elíptico

$$\begin{cases} A_\varepsilon u^\varepsilon = (I-P)h, & \text{em } \Omega_0 \\ u^\varepsilon = 0, & \text{em } \partial\Omega_0 \end{cases}.$$

Note que

$$\|u^\varepsilon\|^2_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \int_\Omega p_\varepsilon|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \int_\Omega \lambda|u^\varepsilon|^2\,dx = \int_\Omega (I-P)hu^\varepsilon\,dx \leq \|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

resultando $\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$. Assim, para $V \subset\subset \Omega_0$,

$$\int_{\bar{V}} p_\varepsilon|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \int_{\bar{V}} \lambda|u^\varepsilon|^2\,dx < \infty.$$

Como $0 < m_0 \leq p_\varepsilon(x)$, para todo $x \in \Omega$ e para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, temos

$$\int_{\bar{V}} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx \leq \frac{C_1}{\inf\limits_{x\in\bar{V}} p_\varepsilon(x)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

resultando

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Segue da desigualdade de Poincaré que

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

e consequentemente $\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\Omega_0)} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$ □

Teorema 2.4.6. Para os operadores A_ε, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in K$ com K compacto em $\rho(-A_0)$ ou $\mu \in \rho(-A_0)\cap\rho(-A_\varepsilon)$ com $Re(\mu) \notin (-\infty,\lambda]$, temos

$$\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1} - (\mu+A_0)^{-1}P\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon], \tag{2.27}$$

onde $Z_\varepsilon = \|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}(I-P)\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}$ para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ e $Z_0 = 0$. É válido que

$$(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Seja $h \in L^2(\Omega)$ com $\|h\|_{L^2} \leq 1$, escrevemos

$$\begin{aligned}\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}h - (\mu+A_0)^{-1}Ph\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}Ph - (\mu+A_0)^{-1}Ph\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Como $Ph \in L^2_{\Omega_0}$ é tal que $\|Ph\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^2} \leq 1$, segue do Teorema 2.4.2 que

$$\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}Ph - (\mu+A_0)^{-1}Ph\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_1(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Afirmamos que

$$\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

De fato,

$$(\mu+A_\varepsilon)^{-1} = A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{-1} \Rightarrow A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mu+A_\varepsilon)^{-1} = A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1},$$

assim

$$
\begin{aligned}
\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\|_{L^2}\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}(I-P)h\|_{L^2}\\
&= \|A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\|_{L^2}\|A_\varepsilon^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq C_2\|A_\varepsilon^{-1}(I-P)h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a estimativa setorial (2.25) e o Teorema 2.4.5. Tomando o sup sobre todas as $h \in L^2$ com $\|h\|_{L^2} \leq 1$, o resultado segue. □

Observação 2.4.7. A aplicação $l : [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ definida por $l(\varepsilon) = (\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon$ é contínua e $l(0) = 0$.

2.5 Continuidade do espectro, dos semigrupos lineares, não lineares e taxa de atração

O Teorema 2.5.4 apresentado nesta seção é o principal resultado deste capítulo e o primeiro passo para obtermos a continuidade dos atratores dos semigrupos associados ao problema (2.5). Mais precisamente, estimaremos a continuidade dos semigrupos lineares e dos não lineares tomando como referência a taxa de atração obtida na seção anterior. Começamos com a projeção espectral definida na Seção 1.6, onde obtivemos que para ε se aproximando de zero, o espectro de $-A_\varepsilon$ aproxima-se do espectro de $-A_0$, e que $Q_\varepsilon(\mu_0)$, $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$, converge compactamente para $Q_0(\mu_0)$.

Proposição 2.5.1. Temos que $Q_\varepsilon(\mu_0) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ converge compactamente para $Q_0(\mu_0) : L^2_{\Omega_0}(\Omega) \to L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ e existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que:

(i) $\|Q_\varepsilon(\mu_0) - Q_0(\mu_0)\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$;

(ii) $\|Q_\varepsilon(\mu_0) - Q_0(\mu_0)P\|_{\mathscr{L}(L^2, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_2[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]$.

Demonstração. A convergência compacta é o Lema 1.6.10. Utilizando o Teorema 2.4.2, temos

$$\begin{aligned}
\|Q_\varepsilon(\mu_0)-Q_0(\mu_0)\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &= \Big\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-\mu_0|=\delta}(z+A_\varepsilon)^{-1}-(z+A_0)^{-1}\,dz\Big\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-\mu_0|=\delta}\|(z+A_\varepsilon)^{-1}-(z+A_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0},X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}|dz|\\
&\leq C(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

de onde obtemos (i). Analogamente obtemos (ii), utilizando o Teorema 2.4.6. □

Teorema 2.5.2. Seja $\theta\in(0,\frac{1}{2})$. Então existem constantes $\alpha<0$ e $C>0$ tais que

$$\|e^{-A_\varepsilon t}-e^{-A_0 t}P\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}\leq Ce^{\alpha(1-2\theta)t}[(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}+Z_\varepsilon]^{2\theta}t^{-\frac{1}{2}-\theta},\quad t\geq 0. \tag{2.28}$$

Demonstração. Como os operadores A_ε, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, são setoriais, os operadores $-A_\varepsilon$ geram semigrupos analíticos $\{e^{-A_\varepsilon t};t\geq 0\}$, que são dados por

$$e^{-A_\varepsilon t}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu t}(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\,d\mu,\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],$$

onde Γ é a fronteira de $\Sigma_{-\lambda,\upsilon}\backslash\{\mu\in\mathbb{C};|\mu+\lambda|\leq r\}$ para algum r pequeno e $\upsilon\in(\phi,\frac{\pi}{2})$, orientada no sentido da parte imaginária crescente. Assim, utilizando (2.3) e (2.4), temos

$$\begin{aligned}
\|e^{-A_\varepsilon t}-e^{-A_0 t}P\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}+\|e^{-A_0 t}P\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}\\
&\leq Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}+Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\\
&\leq C_1 t^{-\frac{1}{2}}e^{\alpha t},\qquad (\alpha=-\lambda<0).
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando o Teorema 2.4.6, temos

$$\begin{aligned}
\|e^{-A_\varepsilon t}-e^{-A_0 t}P\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{\mu t}|\|(\mu+A_\varepsilon)^{-1}-(\mu+A_0)^{-1}P\|_{\mathscr{L}(L^2,X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}|d\mu|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}C_2[(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}+Z_\varepsilon]\int_\Gamma e^{Re(\mu t)}|d\mu|\\
&\leq C_3[(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}+Z_\varepsilon]t^{-1}.
\end{aligned}$$

Interpolando as estimativas acima com $1-2\theta$ e 2θ, obtemos (2.28). □

Observação 2.5.3. A necessidade de considerarmos a projeção P ficará evidente no próximo capítulo. No entanto, com uma demonstração análoga à do Teorema 2.5.2, obtemos, para $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, a existência de constantes $\alpha < 0$ e $C > 0$ tais que

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq Ce^{\alpha(1-2\theta)t}(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^\theta t^{-\frac{1}{2}-\theta}, \quad t \geq 0.$$

Teorema 2.5.4. Sejam $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ e $v, u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Então existem constantes positivas C e L tais que

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-\theta}\left[\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + [(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\right], \quad (2.29)$$

para $t \geq 0$.

Demonstração. Temos

$$T_\varepsilon(t)u^\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon)\,ds, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

e

$$T_0(t)Pv = e^{-A_0 t}Pv + \int_0^t e^{-A_0(t-s)}f(T_0(s)Pv)\,ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon - e^{-A_0 t}Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - e^{-A_0(t-s)}f(T_0(s)Pv)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\,ds.\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 2.5.2, para $t \in (0, \tau]$,

$$\begin{aligned}\|e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon - e^{-A_0 t}Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-A_\varepsilon t}(u^\varepsilon - v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|e^{-A_\varepsilon t}v - e^{-A_0 t}Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq M_1 t^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_1 e^{\alpha(1-2\theta)t}[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}t^{-\frac{1}{2}-\theta} \\ &\leq M_1 t^\theta t^{-\frac{1}{2}-\theta}\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_1 e^{\alpha(1-2\theta)t}[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}t^{-\frac{1}{2}-\theta} \\ &\leq M_2 t^{-\frac{1}{2}-\theta}\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_1[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}t^{-\frac{1}{2}-\theta}.\end{aligned}$$

Denotando L_f a constante de Lipchitz de f e observando que $f(T_0(s)Pv) = Pf(T_0(s)Pv)$, já que

$f(T_0(s)Pv) \in L^2_{\Omega_0}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - e^{-A_0(t-s)} f(T_0(s)Pv)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}[f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - f(T_0(s)Pv)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&+ \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(T_0(s)Pv) - e^{-A_0(t-s)} Pf(T_0(s)Pv)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq ML_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&+ [C_2(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}] \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{\alpha(1-2\theta)(t-s)} ds.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{\alpha(1-2\theta)(t-s)} ds &= \int_{-\alpha(1-2\theta)t}^0 \left(\frac{y}{-\alpha(1-2\theta)}\right)^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{-y} \frac{dy}{\alpha(1-2\theta)} \\
&\leq \frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}-\theta}(1-2\theta)^{\frac{1}{2}-\theta}} \int_0^\infty y^{1-\frac{1}{2}-\theta} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}-\theta}(1-2\theta)^{\frac{1}{2}-\theta}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\theta\right) := C_3.
\end{aligned}$$

Assim, se escolhermos $\delta > 0$ tal que $1 \leq t^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{-\alpha\delta t}$, temos

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq M_2 t^{-\frac{1}{2}-\theta} \|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_1[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-\theta} \\
&+ M_2 L_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + C_2[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta} C_3 \\
&\leq C_4 \Big[\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + [(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\Big] t^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{-\alpha\delta t} \\
&+ M_2 L_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\delta(t-s)} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds,
\end{aligned}$$

Definindo $\varphi(t) = e^{\alpha\delta t} \|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq C_4 \Big[\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + [(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\Big] t^{-\frac{1}{2}-\theta} \\
&+ M_2 L_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \varphi(s) ds.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall[9], existe $M > 0$ tal que

$$\varphi(t) \leq MC_4 \Big[\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + [(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta} \Big] t^{-\frac{1}{2}-\theta},$$

ou seja,

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq e^{-\alpha\delta t} MC_4 \Big[\|u^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + [(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta} \Big] t^{-\frac{1}{2}-\theta}.$$

Fazendo $L = -\alpha\delta > 0$ e $C = MC_4$, obtemos (2.29). $\square$

Observação 2.5.5. A estimativa (2.29) não reflete a continuidade dos semigrupos não lineares. Para tal, é válido o seguinte resultado: sejam $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $u^0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$, então existem constantes positivas C e L tais que

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-\theta} \left[\|u^\varepsilon - u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + (\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^\theta \right],$$

para $t \geq 0$.

[9] $a, b, \alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta < 1$ e $0 \leq \varphi(t) \leq at^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta}\varphi(s)\,ds$, $t \in (0, \tau]$ $\Rightarrow$ existe $M > 0$ tal que $\varphi(t) \leq aMt^{-\alpha}$.

Capítulo 3

Continuidade dos atratores

A continuidade da família de atratores dos semigrupos associados ao problema (2.5) foi estabelecida em [7] para condições de fronteira de Dirichlet e para condições não lineares em [15]. A semicontinuidade superior é consequência da continuidade dos semigrupos não lineares, já a semicontinuidade inferior requer hipóteses e resultados adicionais. Geralmente, o procedimento para obter a semicontinuidade inferior da família de atratores é, basicamente, a verificação das hipóteses do Teorema 1.5.4, ou seja, dos seguintes fatos:

(i) $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u_*^{\varepsilon,1}, \dots, u_*^{\varepsilon,k}\}$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e $\|u_*^{\varepsilon,i} - u_*^{\varepsilon_0,i}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$;

(ii) Existe $\delta > 0$ tal que $\{W^u(u_*^{\varepsilon,i}) \cap B_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*^{\varepsilon,i}, \delta)\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ é semicontínua inferiormente em 0;

(iii) $\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, para todo $t \geq 0$;

(iv) $\mathscr{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(u_*^{0,i})$,

onde $\mathscr{E}_\varepsilon$ denota o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\{T_\varepsilon(t)\,;\, t \geq 0\}$. Observe que a condição (iii) não faz sentido para a situação da difusão grande localizada, uma vez que o semigrupo $\{T_0(t)\,;\, t \geq 0\}$ está definido somente em $X_0^{\frac{1}{2}}$. Em [7] e [15] os autores superaram este fato caracterizando a continuidade dos semigrupos não lineares utilizando sequências, mais precisamente um teorema de aproximação do tipo Trotter-Kato. Aqui utilizaremos a projeção P definida no capítulo anterior, pois nosso objetivo é estimar a continuidade dos atratores pela taxa de atração.

3.1 Continuidade dos conjuntos de equilíbrio

As soluções de equilíbrio de (2.5) são aquelas independentes do tempo, isto é, para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, são as soluções do problema elíptico

$$A_\varepsilon u^\varepsilon - f(u^\varepsilon) = 0, \tag{3.1}$$

e para $\varepsilon = 0$ as soluções de

$$A_0 u^0 - f(u^0) = 0. \tag{3.2}$$

Como na Seção 1.4, denotamos $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u^\varepsilon \in D(A_\varepsilon)\,;\, A_\varepsilon u^\varepsilon - f(u^\varepsilon) = 0\}$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, e dizemos que $u_*^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$ é uma solução de equilíbrio hiperbólica se $\sigma(A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon)) \cap \{\mu \in \mathbb{C}\,;\, Re(\mu) = 0\} = \emptyset$.

A semicontinuidade superior da família $\{\mathscr{E}_\varepsilon\}_\varepsilon$ em $\varepsilon = 0$ é uma consequência da convergência compacta $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$.

Teorema 3.1.1. A família $\{\mathscr{E}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.

Demonstração. Seja $(u_*^{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência, com $u_*^{\varepsilon_k} \in \mathscr{E}_{\varepsilon_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $(\varepsilon_k)_k \subset (0,\varepsilon_0]$ convergindo para zero. Pelo Lema 1.5.2, basta mostrarmos que $(u_*^{\varepsilon_k})_k$ admite uma subsequência convergindo para um elemento de $\mathscr{E}_0$. Como $\mathscr{E}_{\varepsilon_k} \subset \mathscr{A}_{\varepsilon_k}$, segue do Teorema 2.2.4 que $\sup\limits_{\varepsilon_k\in[0,\varepsilon_0]} \{\|u_*^{\varepsilon_k}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\,;\, u_*^{\varepsilon_k} \in \mathscr{E}_{\varepsilon_k}\} < \infty$. Assim, $(u_*^{\varepsilon_k})_k$ admite uma subsequência, para a qual manteremos a mesma notação, convergindo para, digamos, u_*, fracamente em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e fortemente em $L^2(\Omega)$, já que $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ é reflexivo e $\mathscr{A}_{\varepsilon_k}$ é compacto. Além disso, como f é limitada e $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, temos que $\{f(u_*^{\varepsilon_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado em $L^2(\Omega)$ e $\{A_{\varepsilon_k}^{-1}(f(u_*^{\varepsilon_k}))\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ é E-relativamente compacta. Logo, tomando subsequência se necessário, $A_{\varepsilon_k}^{-1}(f(u_*^{\varepsilon_k})) \xrightarrow{k\to\infty} u_*^0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$. Assim, $u_*^{\varepsilon_k} = A_{\varepsilon_k}^{-1}(f(u_*^{\varepsilon_k})) \xrightarrow{k\to\infty} u_*^0$, logo $u_* = u_*^0$ e, pela continuidade de f, segue que $f(u_*^{\varepsilon_k}) \to f(u_*)$ em $L^2(\Omega)$, sendo assim $A_{\varepsilon_k}^{-1}(f(u_*^{\varepsilon_k})) \to A_0^{-1}f(u_*)$, ou seja, $u_* = A_0^{-1}f(u_*)$, resultando $u_* \in \mathscr{E}_0$. $\square$

Antes de provarmos a semicontinuidade inferior de $\{\mathscr{E}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, assumiremos a seguinte hipótese

(H) O conjunto $\mathscr{E}_0$ dos pontos de equilíbrio de (2.5) com $\varepsilon = 0$ é constituído de soluções de equilíbrio hiperbólicas, ou seja, $\sigma(A_0 - f'(u_*^0)) \cap \{\mu \in \mathbb{C}\,;\, Re(\mu) = 0\} = \emptyset$, para todo $u_*^0 \in \mathscr{E}_0$.

Pelo Lema 1.4.17, o conjunto $\mathscr{E}_0$ é finito, ou seja, toda solução de equilíbrio hiperbólica u_*^0 é isolada.

A seguir apresentaremos três resultados auxiliares que nos permitirão obter a semicontinuidade inferior dos conjuntos de equilíbrio. Observamos que a E-convergência estará presente em dois contextos: o primeiro envolve o subespaço $X_0^{\frac{1}{2}}$ de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ enquanto o segundo envolve o subespaço $L^2_{\Omega_0}$ de L^2. Para evitarmos confusão, nos referiremos à primeira situação como convergência (forte) em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e a segunda situação como E-convergência.

Lema 3.1.2. Para $\alpha \in (0,1)$ fixado, a família $\{A_\varepsilon^{-\alpha}\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ é E-relativamente compacta e $A_\varepsilon^{-\alpha} \xrightarrow{EE} A_0^{-\alpha}$.

Demonstração. Temos
$$A_\varepsilon^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{-\alpha}(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\,d\mu,$$
onde Γ é a fronteira do setor $\Sigma_{-\lambda,\phi}$. A integral acima é absolutamente uniformemente convergente para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_\lambda]$. Logo, dado $\eta > 0$, podemos dividir a curva $\Gamma = \Gamma_1^\eta \cup \Gamma_2^\eta$ de modo que Γ_1^η seja limitada e

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^\eta} \|\mu^{-\alpha}(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}\,d\mu \le \eta, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_\lambda].$$

Sobre Γ_1^η, reescrevemos a integral como

$$B_\varepsilon = \frac{A_\varepsilon^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^\eta} \mu^{-\alpha}A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\,d\mu,$$

e usando que $\|\mu^{-\alpha}A_\varepsilon(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \|\mu^{-\alpha}(I+\mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)}$ é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_\lambda]$ e também que $\{A_\varepsilon^{-1}\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\lambda]}$ é E-relativamente compacta, garantimos que a família $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\lambda]}$ é E-relativamente compacta. Agora, seja $\nu : \mathbb{P}(L^2) \to [0,\infty]$ uma medida de não compacidade, isto é, ν satisfaz:

(i) $\nu(A) = 0$ se, e somente se, A é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$;

(i) $\nu(A\cup B) = \max\{\nu(A),\nu(B)\}$;

(i) $\nu(A+B) \le \nu(A) + \nu(B)$.

Tomando sequências $(\varepsilon_k)_k \subset (0,\varepsilon_\lambda]$ e $(u^k)_k \subset L^2(\Omega)$ tais que $\varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ e $\|u^k\|_{L^2} = 1$, obtemos

$$\nu(A_{\varepsilon_k}^{-\alpha}u^k) \le \nu(B_{\varepsilon_k}u^k) + \nu\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^\eta} \mu^{-\alpha}(\mu + A_{\varepsilon_k})^{-1}\,d\mu(u^k)\Big) \le \eta.$$

Como η é arbitrário, concluímos que $\nu(A_{\varepsilon_k}^{-\alpha}u^k)=0$, e assim $\{A_\varepsilon^{-\alpha}\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\lambda]}$ é E-relativamente compacta. Do Teorema da Convergência Dominada e do Corolário 2.3.8, temos

$$A_\varepsilon^{-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{-\alpha}(\mu+A_\varepsilon)^{-1}\,d\mu \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{-\alpha}(\mu+A_0)^{-1}\,d\mu = A_0^{-\alpha},$$

para todo $\mu\in\Gamma$. $\square$

Lema 3.1.3. Sejam $\alpha\in(0,1]$ e $\{u_*^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ uma família tal que $u_*^\varepsilon\in\mathscr{E}_\varepsilon,\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ e u_*^ε converge em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para $u_*^0\in\mathscr{E}_0$. Então $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\alpha}\overset{CC}{\longrightarrow}f'(u_*^0)A_0^{-\alpha}$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente $\alpha=1$. Seja $u^\varepsilon\in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}},\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Como $A_\varepsilon^{-1}\overset{EE}{\longrightarrow}A_0^{-1}$, $A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\overset{E}{\longrightarrow}A_0^{-1}u^0$ e, sendo $f':X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\to\mathscr{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}},L^2(\Omega))$ contínua, obtemos $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\overset{E}{\longrightarrow}f'(u_*^0)A_0^{-1}u^0$. Consideremos a família $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, tal que $u^\varepsilon\in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}=1$. Temos que $\{A_\varepsilon^{-1}\}_\varepsilon$ é constituída de operadores compactos, o que resulta $\{A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\}_\varepsilon$ E-relativamente compacta. Assim, cada sequência $\{A_{\varepsilon_k}^{-1}u^{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\}_\varepsilon$ admite uma sub-subsequência, para a qual manteremos a mesma notação, convergindo para $y\in X_0^{\frac{1}{2}}$. Consequentemente, $f'(u_*^{\varepsilon_k})A_{\varepsilon_k}^{-1}u^{\varepsilon_k}\to f'(u_*^0)y$, portanto $\{f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\}_\varepsilon$ é E-relativamente compacta, logo $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-1}\overset{CC}{\longrightarrow}f'(u_*^0)A_0^{-1}$.

Para $\alpha\in(0,1)$, escrevemos

$$\begin{aligned}
&\|f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\alpha}u^\varepsilon-f'(u_*^0)A_0^{-\alpha}u^0\|_{L^2}\\
&\qquad\le\|f'(u_*^\varepsilon)(A_\varepsilon^{-\alpha}u^\varepsilon-A_0^{-\alpha}u^0)\|_{L^2}+\|(f'(u_*^\varepsilon)-f'(u_*^0))A_0^{-\alpha}u^0\|_{L^2}\\
&\qquad\le\|f'(u_*^\varepsilon)\|_{\mathscr{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}},L^2)}\|A_\varepsilon^{-\alpha}u^\varepsilon-A_0^{-\alpha}u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+\|(f'(u_*^\varepsilon)-f'(u_*^0))A_0^{-\alpha}u^0\|_{L^2}\\
&\qquad\le C\|A_\varepsilon^{-\alpha}u^\varepsilon-A_0^{-\alpha}u^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+\|(f'(u_*^\varepsilon)-f'(u_*^0))A_0^{-\alpha}u^0\|_{L^2}\\
&\qquad\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0,
\end{aligned}$$

onde $C>0$ é dado pelo Princípio da Limitação Uniforme. A E-compacidade relativa segue analogamente ao caso anterior. $\square$

Lema 3.1.4. Seja $\{u_*^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ uma família tal que $u_*^\varepsilon\in\mathscr{E}_\varepsilon$ e u_*^ε converge em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para $u_*^0\in\mathscr{E}_0$. Então, para todo $\alpha\in[0,1)$, existe $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon_0]$ tal que $\{A_\varepsilon^\alpha(A_\varepsilon-f'(u_*^\varepsilon))^{-1}\}_{\varepsilon\in(0,\tilde{\varepsilon}]}$ é E-relativamente compacta, uniformemente limitada e

$$A_\varepsilon^\alpha(A_\varepsilon-f'(u_*^\varepsilon))^{-1}\overset{EE}{\longrightarrow}A_0^\alpha(A_0-f'(u_*^0))^{-1}.$$

Demonstração. Sejam $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ fixado, r_1, r_2 tais que $1 > \beta + r_1 \geq \alpha$ e $r_2 = 1 - \beta - r_1$. Afirmamos que

$$A_\varepsilon^\alpha (A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon))^{-1} = A_\varepsilon^{-(\beta + r_1 - \alpha)} (I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1})^{-1} A_\varepsilon^{-r_2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon^{-(\beta + r_1 - \alpha)} (I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1})^{-1} A_\varepsilon^{-r_2} &= A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-\beta - r_1} [A_\varepsilon^{r_2} (I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1})]^{-1} \\
&= A_\varepsilon^\alpha [A_\varepsilon^{r_2} (I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1}) A_\varepsilon^{\beta + r_1}]^{-1} \\
&= A_\varepsilon^\alpha [(A_\varepsilon^{r_2} - f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1}) A_\varepsilon^{\beta + r_1}]^{-1} \\
&= A_\varepsilon^\alpha (A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon))^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $\beta - r_1 < 1$ e $r_2 < 1$, segue do Lema 3.1.2 que $\{A_\varepsilon^{-r_2}\}_\varepsilon$ e $\{A_\varepsilon^{-\beta - r_1}\}_\varepsilon$ são E-relativamente compactas, portanto $\{A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1}\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ é E-relativamente compacta. Logo, pelo Lema 1.6.5 $(I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1})^{-1}$ é uniformemente limitado, pois

$$(A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\beta - r_1})^{-1} \xrightarrow{CC} (A_0^{-r_2} f'(u_*^0) A_0^{-\beta - r_1})^{-1}.$$

Como $\beta + r_1 - \alpha < 1$, o resultado segue do Lema 3.1.2. $\square$

Proposição 3.1.5. Seja $u_*^0 \in \mathscr{E}_0$. Então, existem $\tilde{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ tais que o problema (2.5) para $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ possui exatamente uma solução de equilíbrio $u_*^\varepsilon \in \{u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} ; \|u - u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$. Além disso, $\|u_*^\varepsilon - u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

Demonstração. Do Teorema 2.4.2, do Lema 3.1.4 e da hipótese **(H)**, segue que $\sigma(A_\varepsilon - f'(u_*^0))$ é disjunto do eixo imaginário para ε pequeno, logo $(A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}$ existe, e aplicando o Lema 3.1.4 com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $u^\varepsilon = u_*^0$, obtemos $C_1 > 0$ tal que

$$\|(A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Note que se $u^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$, então

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon u^\varepsilon - f(u^\varepsilon) = 0 &\Leftrightarrow A_\varepsilon u^\varepsilon - f'(u_*^0) u^\varepsilon + f'(u_*^0) u^\varepsilon - f(u^\varepsilon) = 0 \\
&\Leftrightarrow A_\varepsilon u^\varepsilon - f'(u_*^0) u^\varepsilon + (A_\varepsilon - f'(u_*^0))(A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1} (f'(u_*^0) u^\varepsilon - f(u^\varepsilon)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (A_\varepsilon - f'(u_*^0))[u^\varepsilon + (A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1} (f'(u_*^0) u^\varepsilon - f(u^\varepsilon))] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $u^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$ se, e somente se, u^ε é ponto fixo da aplicação

$$\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon) := (A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}(f(u^\varepsilon) - f'(u_*^0)u^\varepsilon).$$

Novamente, pelo Lema 3.1.4, $A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - f'(u_*^0))^{-1}$, logo

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon(u_*^0) &= (A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}(f(u_*^0) - f'(u_*^0)u_*^0) \\
&= (A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}(A_0 u_*^0 - f'(u_*^0)u_*^0) \\
&= (A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}(A_0 - f'(u_*^0))u_*^0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Phi_\varepsilon(u_*^0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u_*^0.$$

Assim, dado $\delta > 0$, existe $\tilde{\varepsilon} > 0$, tal que

$$\|\Phi_\varepsilon(u_*^0) - u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \le \frac{\delta}{2},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$. Agora, sejam $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon) - \Phi_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|(A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}[f(u^\varepsilon) - f(v^\varepsilon) - f'(u_*^0)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\le \|(A_\varepsilon - f'(u_*^0))^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \|f(u^\varepsilon) - f(v^\varepsilon) - f'(u_*^0)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\le C_1 \|f(u^\varepsilon) - f(v^\varepsilon) - f'(u_*^0)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\le C_1 \|f'(\theta u^\varepsilon - (1-\theta)v^\varepsilon) - f'(u_*^0)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\le C_2 \|(\theta u^\varepsilon - (1-\theta)v^\varepsilon) - u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\le 2C_2\delta \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Assim, escolhemos $\delta > 0$ tal que $2C_2\delta < \dfrac{1}{2}$ e obtemos que $\Phi : \overline{B_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*^0, \delta)} \to \overline{B_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*^0, \delta)}$ é uma contração, pois, se $u^\varepsilon \in \overline{B_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*^0, \delta)}$, então

$$\begin{aligned}\|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}} &\leq \|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)-\Phi_\varepsilon(u_*^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}+\|\Phi_\varepsilon(u_*^0)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}\\ &\leq \frac12\|u^\varepsilon-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}+\|\Phi_\varepsilon(u_*^0)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}\\ &\leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.\end{aligned}$$

Portanto, existe um único ponto fixo u_*^ε de Φ_ε em $\overline{B_{X_\varepsilon^{\frac12}}(u_*^0,\delta)}$. Finalmente, vejamos que u_*^ε converge fortemente em $X_\varepsilon^{\frac12}$ para u_*^0, de fato,

$$\begin{aligned}\|u_*^\varepsilon-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}=\|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}} &\leq \|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)-\Phi_\varepsilon(u^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}+\|\Phi_\varepsilon(u_*^0)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}\\ &\leq \frac12\|u_*^\varepsilon-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}+\|\Phi_\varepsilon(u_*^0)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}},\end{aligned}$$

resultando $\|u_*^\varepsilon-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}\leq 2\|\Phi_\varepsilon(u_*^0)-u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$. □

Corolário 3.1.6. Suponha que $\mathscr{E}_0=\{u_*^{0,1},\ldots,u_*^{0,k}\}$. Então existe $\tilde\varepsilon>0$ tal que para $\varepsilon\in(0,\tilde\varepsilon]$, $\mathscr{E}_\varepsilon=\{u_*^{\varepsilon,1},\ldots,u_*^{\varepsilon,k}\}$ e

$$\|u_*^{\varepsilon,i}-u_*^{0,i}\|_{X_\varepsilon^{\frac12}}\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0,\quad i=1,\ldots,k.$$

Demonstração. Segue da semicontinuidade superior dos conjuntos de equilíbrio que para ε suficientemente pequeno, $u_*^\varepsilon\in\mathscr{E}_\varepsilon$ está em uma vizinhança de $\mathscr{E}_0$, e pelo Teorema 3.1.5 em uma vizinhança de $u_*^{0,i}\in\mathscr{E}_0$ existe apenas um elemento de $u_*^{\varepsilon,i}\in\mathscr{E}_\varepsilon$ que converge para $u_*^{0,i}$. □

Teorema 3.1.7. A família $\{\mathscr{E}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ é contínua em $\varepsilon=0$.

Demonstração. Resta mostrar a semicontinuidade inferior, que segue do Lema 1.5.2 e do Teorema 3.1.5. □

3.2 Continuidade dos semigrupos para linearização

Começamos esta seção motivando o que faremos na próxima seção. Vamos olhar por um momento para um problema linear e considerar pequenas perturbações não lineares.

Considerando $\varepsilon = 0$ no problema (2.5), obtemos o problema semilinear parabólico

$$\begin{cases} u^0_t + A_0 u^0 = f(u^0), \\ u^0(0) = u^0_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{3.3}$$

associado ao problema limite (2.2). Seja u^0_* um ponto de equilíbrio de (3.3). Fazendo a mudança de variáveis $v = u^0 - u^0_*$, somando e subtraindo $f'(u^0_*)v$ ao lado direito, obtemos

$$\begin{cases} v_t + \bar{A}_0 v = f(v + u^0_*) - f(u^0_*) - f'(u^0_*)v, \\ v(0) = u^0_0 - u^0_* := v_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $\bar{A}_0 = (A_0 - f'(u^0_*))$. Nesta situação, para v muito pequeno, a parte não linear $f(v+u^0_*) - f(u^0_*) - f'(u^0_*)v$ é muito pequena. É natural então considerarmos o que acontece quando desprezamos a não linearidade, ou seja, o que acontece com a equação

$$\begin{cases} v_t + \bar{A}_0 v = 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Se Q^+_0 é a projeção definida pelo espectro de $\bar{A}_0$ do lado direito do eixo imaginário, segue que para $v_0 \in Q_0 X_0^{\frac{1}{2}}$, a solução $v(t, v_0)$ de (3.5) existe para todo $t \leq 0$, $v(t, v_0) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ e $v + u^0_* \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} u^0_*$. Quando perturbamos (3.5) com uma não linearidade muito pequena, devemos observar soluções de (3.4) que existem para todo $t \leq 0$. Naturalmente, o dado inicial para o qual tais soluções existem não estará em $Q^+_0 X_0^{\frac{1}{2}}$, mas em uma variedade não linear próxima.

No que segue, denotamos $\bar{A}_\varepsilon = A_\varepsilon - f'(u^\varepsilon_*)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Como A_ε é setorial com resolvente compacto e $f'(u^\varepsilon_*) \in \mathscr{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, L^2(\Omega))$, o operador $\bar{A}_\varepsilon$ é setorial com resolvente compacto. Desta forma, os espectros de $-\bar{A}_\varepsilon$ consistem apenas de autovalores isolados com multiplicidade finita. A seguir listamos as propriedades de $\bar{A}_\varepsilon$ que são análogas às propriedades de A_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Lema 3.2.1. Existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $0 \notin \sigma(\bar{A}_\varepsilon)$ e $\bar{A}_\varepsilon^{-1} \overset{CC}{\longrightarrow} \bar{A}_0^{-1}$.

Lema 3.2.2. Existem $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$, um setor $\Sigma_{\omega,\varphi}$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\omega > 0$, e $\bar{M} \geq 1$ de modo que $\Sigma_{\omega,\varphi} \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ e

$$\|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq \frac{\bar{M}}{|\mu - \omega|}, \quad \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}];$$

$$\|(\mu+\bar{A}_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \leq \frac{\bar{M}}{|\mu-\omega|},$$

para todo $\mu \in \Sigma_{\omega,\varphi}$.

Teorema 3.2.3. Seja K um subconjunto compacto de $\rho(-\bar{A}_0)$. Então existe $\varepsilon_K \in (0,1]$ tal que $K \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon)$ para $\varepsilon \in [0,\varepsilon_K]$ e

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_K]} \sup_{\mu\in K} \|(\mu+\bar{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega),X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}))} < \infty.$$

Além disso, $(\mu+\bar{A}_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\mu+\bar{A}_0)^{-1}$ e para $\mu \in \Sigma_{0,\varphi}$, existe $C>0$ tal que

$$\|(\mu+\bar{A}_\varepsilon)^{-1}-(\mu+\bar{A}_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}(\Omega),X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}))} \leq C(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Como na Seção 1.6, para $\mu_0 \in \sigma(-\bar{A}_0)$ e $\delta>0$ tais que $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-\mu_0|\leq\delta\}\cap\sigma(-\bar{A}_0)=\{\mu_0\}$, consideramos as projeções espectrais $\bar{Q}_\varepsilon(\mu_0)$, associadas aos operadores $\bar{A}_\varepsilon$, dadas por

$$\bar{Q}_\varepsilon(\mu_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-\mu_0|=\delta}(z+\bar{A}_\varepsilon)^{-1}dz, \quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],$$

e o auto-espaço generalizado associado a μ_0 dado por $W(\mu_0,-\bar{A}_\varepsilon)=R(\bar{Q}_\varepsilon(\mu_0))$.

Teorema 3.2.4. São válidas as seguintes afirmações:

(i) Se $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\varepsilon_0]$ é uma sequência convergindo para zero, $(\mu_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{C}$ com $\mu_{\varepsilon_k}\in\sigma(-\bar{A}_{\varepsilon_k})$, para todo $k\in\mathbb{N}$, e $\mu_{\varepsilon_k}\xrightarrow{k\to\infty}\mu_0$, então $\mu_0\in\sigma(-\bar{A}_0)$.

(ii) Para todo $\mu_0\in\sigma(-\bar{A}_0)$, existem sequências $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset(0,\varepsilon_0]$ convergindo para zero e $(\mu_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ com $\varepsilon_k\in\sigma(-\bar{A}_{\varepsilon_k})$, para todo $k\in\mathbb{N}$, tais que $\mu_{\varepsilon_k}\xrightarrow{k\to\infty}\mu_0$.

(iii) Existe $\tilde{\varepsilon}>0$ tal que $\dim W(\mu,-\bar{A}_0)=\dim W(\mu,-\bar{A}_0)$, para todo $\varepsilon\in(0,\tilde{\varepsilon}]$.

(iv) Para todo $u^0\in W(\mu_0,-\bar{A}_0)$, existe uma família $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ com $u^\varepsilon\in W(\mu_0,-\bar{A}_\varepsilon)$, tal que $u^\varepsilon\xrightarrow{E}u^0$.

(v) Toda sequência $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ com $u^k\in W(\mu_0,-\bar{A}_{\varepsilon_k})$, $\varepsilon_k\xrightarrow{k\to\infty}0$ e $\|u^k\|_{X_{\varepsilon_k}}=1$, admite uma subsequência E-convergente para um elemento $u^0\in W(\mu_0,-\bar{A}_0)$.

Teorema 3.2.5. Seja $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Então existem constantes $\alpha < 0$ e $C > 0$ tais que

$$\|e^{-\bar{A}_\varepsilon t} - e^{-\bar{A}_0 t}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq Ce^{\alpha(1-2\theta)t}(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^\theta t^{-\frac{1}{2}-\theta}, \quad t \geq 0.$$

3.3 Continuidade das variedades instáveis

Nesta seção, veremos que a variedade instável W^u_ε para $u^\varepsilon_* \in \mathscr{E}_\varepsilon$ é dada localmente como o gráfico de uma função Lipschitz e que quando o parâmetro ε tende a zero, W^u_ε se "aproxima"da variedade W^u_0, $u^0_* \in \mathscr{E}_0$. Além disso, tais variedades possuem atração exponencial uniforme em ε. Este resultado, juntamente com o Teorema 2.5.4, será fundamental para obtermos a continuidade na métrica de Hausdorff para os atratores dos semigrupos associados ao problema (2.5).

Denotamos $\sigma^+_\varepsilon = \{\mu \in \sigma(-\bar{A}_\varepsilon)\,; Re(\mu) > 0\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Para $\mu_0 \in \sigma^+_0$ consideramos a *projeção espectral* $\bar{Q}^+_0(\sigma^+_0)$, associada a σ^+_0,

$$\bar{Q}^+_0(\sigma^+_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}(z + \bar{A}_0)^{-1}dz,$$

onde Γ^+ é uma curva em $\{\mu \in \rho(-\bar{A})\,; Re(\mu) > 0\}$, que envolve σ^+_0. Do Teorema 3.2.3, existe ε_{Γ^+} tal que $\Gamma^+ \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon)$, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\Gamma^+}]$. Assim, podemos considerar a projeção espectral $\bar{Q}^+_\varepsilon(\sigma^+_\varepsilon)$ associada a σ^+_ε,

$$\bar{Q}^+_\varepsilon(\sigma^+_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}(z + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}dz$$

e o auto-espaço generalizado associado a σ^+_ε dado por $W^+_\varepsilon = W^+_\varepsilon(\sigma^+_\varepsilon, -\bar{A}_\varepsilon) = R(\bar{Q}_\varepsilon(\sigma^+_\varepsilon))$. Denotamos $-\bar{A}^+_\varepsilon$ e $-\bar{A}^-_\varepsilon$ as restrições de $-\bar{A}_\varepsilon$ a W^+_ε e ao espaço $W^-_\varepsilon = R(I - \bar{Q}^+_\varepsilon(\sigma^+_\varepsilon))$, respectivamente. Denotamos, $\bar{Q}^+_\varepsilon(\sigma^+_\varepsilon) = \bar{Q}^+_\varepsilon$.

Teorema 3.3.1. São válidas as seguintes afirmações:

(i) Existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\dim W^+_\varepsilon = \dim W^+_0$, para todo $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$.

(ii) Se $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_0]$ é uma sequência convergindo para zero, $(u^{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência com $u^{\varepsilon_k} \in W^+_{\varepsilon_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\|u^{\varepsilon_k}\|_{L^2} = 1$, então $(u^{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência que converge para um elemento de W^+_0.

(iii) Para todo $u^0 \in W^+_0$, existe uma família $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ com $u^\varepsilon \in W^+_\varepsilon$, tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u^0$.

(iv) Existem $\beta > 0$ e $\varepsilon_\beta > 0$ tais que $\sigma(-\bar{A}_\varepsilon^+) \cap \{\mu \in \mathbb{C}; |Re\mu| > \beta\} = \emptyset$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\beta]$.

(v) Existem $\phi_\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\omega_\beta > 0$ e $\varepsilon_\beta > 0$ tais que $\Sigma_{-\omega_\beta, \phi_\beta} \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon^-)$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\beta]$ e existe $M_\beta \geq 1$, tal que

$$\|(\mu + \bar{A}_\varepsilon^-)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq \frac{M_\beta}{|\mu - \omega_\beta|}, \quad \forall \mu \in \Sigma_{-\omega_\beta, \phi_\beta},\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\beta].$$

Observamos que $\bar{Q}_0^+$ é uma projeção de posto finito e $\sigma_0^+ = \sigma(-\bar{A}_0) \cap \{\mu \in \mathbb{C}; Re\mu > 0\}$ consiste de um número finito (possivelmente zero) de autovalores com multiplicidade finita. Além disso, conforme o Teorema 1.3.11, existem $M \geq 1$ e $\beta > 0$ tais que

$$\|e^{-\bar{A}_0 t}\bar{Q}_0^+\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0})} \leq Me^{\beta t}, \quad t \leq 0;$$

$$\|e^{-\bar{A}_0 t}(I - \bar{Q}_0^+)\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq Me^{-\beta t}t^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 0.$$

Sejam $u_*^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$ e $u_*^0 \in \mathscr{E}_0$, tais que u_*^ε converge para u_*^0 em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Então existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\sigma(-\bar{A}_\varepsilon)$ não intercepta o eixo imaginário, para $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$, e $\|\bar{A}_\varepsilon^{-1}\| \leq C$, com $C > 0$ independente de ε. Além disso, $\bar{Q}_\varepsilon^+ \xrightarrow{CC} \bar{Q}_0^+$. Consequentemente, posto$(\bar{Q}_\varepsilon^+)$ =posto$(\bar{Q}_0^+)$, para $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$, e a família $\{\sigma_\varepsilon^+\}_{\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]}$ é semicontínua superior e inferiormente em $\varepsilon = 0$. Também são válidas as estimativas

$$\|e^{-\bar{A}_\varepsilon t}\bar{Q}_\varepsilon^+\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \leq 0;$$

$$\|e^{-\bar{A}_\varepsilon t}(I - \bar{Q}_\varepsilon^+)\|_{\mathscr{L}(L^2, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq Me^{-\beta t}t^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 0,$$

para $M, \beta > 0$.

Seja $u_*^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$, reescrevemos o problema (2.5) como

$$\begin{cases} w_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon w^\varepsilon = f(w^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)w^\varepsilon \\ w^\varepsilon(0) = w_0^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{cases} , \tag{3.6}$$

onde $\bar{A}_\varepsilon = (A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon))$. Segundo a projeção $\bar{Q}_\varepsilon^+$ decompomos $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I - \bar{Q}_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e escrevemos a solução de (3.6) como $w^\varepsilon = v^\varepsilon + z^\varepsilon$, com $v^\varepsilon = \bar{Q}_\varepsilon^+ w^\varepsilon$ e $z^\varepsilon = (I - \bar{Q}_\varepsilon^+)w^\varepsilon$. Desde que $\bar{Q}_\varepsilon^+$ e $I - \bar{Q}_\varepsilon^+$ comutam com $\bar{A}_\varepsilon$, obtemos

$$v_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^+ v^\varepsilon = \bar{Q}_\varepsilon^+[f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)],$$

e

$$z_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^- z^\varepsilon = (I - \bar{Q}_\varepsilon^+)[f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)].$$

Definimos

$$H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) = \bar{Q}_\varepsilon^+[f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)], \tag{3.7}$$

e

$$G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) = (I - \bar{Q}_\varepsilon^+)[f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)]. \tag{3.8}$$

Temos $H_\varepsilon(0,0) = G_\varepsilon(0,0)$, H_ε e G_ε são continuamente diferenciáveis e $\dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial v}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial v}(0,0)$. Sendo as projeções $\bar{Q}_\varepsilon^+$ uniformemente limitadas, segue que, dado $\rho > 0$, existem $\tilde{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ tais que, se $\|v^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta$ e $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$, então

$$\|H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho,$$

$$\|G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho,$$

$$\|H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) - H_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{z}^\varepsilon)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho(\|v^\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z^\varepsilon - \tilde{z}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}),$$

$$\|G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) - G_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{z}^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho(\|v^\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z^\varepsilon - \tilde{z}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}).$$

Podemos estender H_ε e G_ε fora de $B_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*^\varepsilon, \delta)$ de forma que as estimativas acima permaneçam válidas[1] para quaisquer $v^\varepsilon \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $z^\varepsilon \in (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Podemos então reescrever (3.6) como o sistema acoplado

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^+ v^\varepsilon = H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \\ z_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^- z^\varepsilon = G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon), \end{cases} \tag{3.9}$$

onde, para apropriadas constantes $\beta, M > 0$ independentes de ε, temos

$$\|e^{-\bar{A}_\varepsilon^- t} z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\beta t} \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq 0;$$

$$\|e^{-\bar{A}_\varepsilon^- t} z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M_1 t^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta t} \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t > 0;$$

$$\|e^{-\bar{A}_\varepsilon^+ t} v^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{\beta t} \|v^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \leq 0.$$

Teorema 3.3.2. Sejam $u_*^0 \in \mathscr{E}_0$ e $u_*^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$ a única solução de equilíbrio de (2.5) tal que, para algum $\delta > 0$, $\|u_*^\varepsilon - u_*^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Dados $D > 0$, $\Delta > 0$ e $\upsilon \in (0,1)$, seja $\rho_0 > 0$ de forma que, para todo $\rho \in (0, \rho_0]$, sejam válidas as seguintes estimativas :

[1] O procedimento para estender H_ε e G_ε e obter $\bar{Q}_\varepsilon^+$ explicitamente pode ser encontrado em [15].

- $\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) \leq D$;
- $\rho M^2(1+\Delta)(\frac{\beta}{2})^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) \leq \Delta$;
- $\frac{\beta}{2} \leq 2\beta - \rho M(1+\Delta) \leq 2\beta$;
- $\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})\left[1+\frac{\rho M(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}}{(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{\frac{1}{2}}}\right] \leq \upsilon$;
- $\gamma := \beta - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)(1+M)}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\right] > 0$;
- $\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) + \left[\rho^2 M^2\beta^{-1}(1+\Delta)(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})\right] \leq \frac{1}{2}$.

Para a escolha de ρ acima, sejam H_ε e G_ε dadas por (3.7) e (3.8). Então existe $s_*^\varepsilon : \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \to (I-\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ satisfazendo:

- $|||s_*^\varepsilon||| := \sup_{v\in\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|s_*^\varepsilon(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq D$;
- $\|s_*^\varepsilon(v) - s_*^\varepsilon(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta\|v-\tilde{v}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad v,\tilde{v} \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$,

e a variedade instável de u_*^ε é dada localmente como o gráfico de s_*^ε, isto é,

$$W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon) = \{(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I-\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}});\, z^\varepsilon = s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)\}.$$

Além disso, para qualquer $R>0$, se $B = B(0,R) \subset \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\sup_{v\in B}\|s_*^0(v) - s_*^\varepsilon(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

e existe uma constante $K>0$ independente de ε tal que

$$\|z^\varepsilon(t) - s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ke^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Demonstração. *(Primeiro passo)* Existência de s_*^ε.

Sejam $s_\varepsilon : \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \to (I-\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ uma aplicação contínua satisfazendo

$$|||s_\varepsilon||| \leq D,\ \|s_*^\varepsilon(v) - s_*^\varepsilon(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta\|v-\tilde{v}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \forall v,\tilde{v} \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

e $v^{\varepsilon}(t)=v^{\varepsilon}(t,\tau,\eta,s_{\varepsilon})$ uma solução de

$$\begin{cases} v_t^{\varepsilon}+\bar{A}_{\varepsilon}^{+}v^{\varepsilon}=H_{\varepsilon}(v^{\varepsilon},s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon})), \quad t<\tau \\ v^{\varepsilon}(\tau)=\eta. \end{cases}$$

Consideramos o conjunto

$$\Sigma=\Big\{s:\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\to(I-\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}});\,|||s|||\leq D \text{ e } \|s(v)-s(\tilde{v})\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\leq\Delta\|v-\tilde{v}\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\Big\}.$$

$(\Sigma,|||\cdot|||)$ é um espaço de Banach. Definimos $\Phi:\Sigma\to\Sigma$ por

$$\Phi(s_{\varepsilon})(\cdot)=\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{-}(\tau-r)}G_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r)))\,dr.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(s_{\varepsilon})(\cdot)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{-\infty}^{\tau}\|e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{-}(\tau-r)}G_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r)))\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\,dr \\
&\leq M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}\|G_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r)))\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\,dr \\
&\leq \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}\,dr \\
&\leq \rho M\int_{0}^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta u}\,du \\
&\leq \rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\leq D.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que $s_{\varepsilon},\tilde{s_{\varepsilon}}\in\Sigma$ e $\eta,\tilde{\eta}\in\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$, e consideramos $v^{\varepsilon}(t)=v^{\varepsilon}(t,\tau,\eta,s_{\varepsilon})$ e $\tilde{v}^{\varepsilon}(t)=\tilde{v}^{\varepsilon}(t,\tau,\tilde{\eta},\tilde{s}_{\varepsilon})$. Então

$$\begin{aligned}
v^{\varepsilon}(t)-\tilde{v}^{\varepsilon}(t)&=e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-\tau)}(\eta-\tilde{\eta}) \\
&\quad+\int_{\tau}^{t}e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-r)}[H_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r)))-H_{\varepsilon}(\tilde{v}^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(\tilde{v}^{\varepsilon}(r)))]\,dr.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|v^{\varepsilon}(t)-\tilde{v}^{\varepsilon}(t)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} &\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+M\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}\|H_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r)))-H_{\varepsilon}(\tilde{v}^{\varepsilon}(r),s_{\varepsilon}(\tilde{v}^{\varepsilon}(r)))\|\,dr \\
&\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+\rho M\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}[\|v^{\varepsilon}(r)-\tilde{v}^{\varepsilon}(r)\|-\|s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r))-\tilde{s}_{\varepsilon}(\tilde{v}^{\varepsilon}(r))\|]\,dr \\
&\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+\rho M\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}[(1+\Delta)\|v^{\varepsilon}(r)-\tilde{v}^{\varepsilon}(r)\|+\|s_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(r))-\tilde{s}_{\varepsilon}(\tilde{v}^{\varepsilon}(r))\|]\,dr \\
&\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+\rho M(1+\Delta)\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}\|v^{\varepsilon}(r)-\tilde{v}^{\varepsilon}(r)\|\,dr \\
&+\rho M|||s_{\varepsilon}-\tilde{s}_{\varepsilon}|||\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}\,dr.
\end{aligned}
$$

Denotando $\varphi(t)=e^{-\beta(t-\tau)}\|v^{\varepsilon}(t)-\tilde{v}^{\varepsilon}(t)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$
\varphi(t)\leq M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}+\rho M|||s_{\varepsilon}-\tilde{s_{\varepsilon}}|||\int_{t}^{\tau}e^{\beta(\tau-r)}\,dr+\rho M(1+\Delta)\int_{t}^{\tau}\varphi(r)\,dr.
$$

Utilizando o Corolário da Desigualdade de Gronwall[2], obtemos

$$
\varphi(t)\leq\Big[M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}+\rho M|||s_{\varepsilon}-\tilde{s_{\varepsilon}}|||\int_{t}^{\tau}e^{\beta(\tau-r)}\,dr\Big]e^{\rho M(1+\Delta)\int_{t}^{\tau}dr}.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|v^{\varepsilon}(t)-\tilde{v}^{\varepsilon}(t)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} &\leq M\|\eta-\tilde{\eta}\|e^{\beta(t-\tau)}e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-t)} \\
&+\rho M|||s_{\varepsilon}-\tilde{s_{\varepsilon}}|||\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}\,dr\,e^{\beta(t-\tau)}e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-t)} \\
&\leq M\|\eta-\tilde{\eta}\|e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)} \\
&+\rho M\beta^{-1}|||s_{\varepsilon}-\tilde{s_{\varepsilon}}|||(1-e^{\beta(t-\tau)})e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)} \\
&\leq\Big[M\|\eta-\tilde{\eta}\|+\rho M\beta^{-1}|||s_{\varepsilon}-\tilde{s_{\varepsilon}}|||\Big]e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)},
\end{aligned}
$$

[2]Sejam $\alpha,\varphi,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínuas tais que $\alpha',\beta\geq 0$ e $\varphi(t)\leq\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\varphi(s)\,ds$, então $\varphi(t)\leq\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(r)\,dr}$.

e

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(s_\varepsilon)(\eta)-\Phi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad\le \int_{-\infty}^{\tau}\|e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)}[G_\varepsilon(v^\varepsilon(r),s_\varepsilon(v^\varepsilon(r)))-G_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon(r),s_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon(r)))]\|\,dr\\
&\quad\le M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}\|G_\varepsilon(v^\varepsilon(r),s_\varepsilon(v^\varepsilon(r)))-G_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon(r),s_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon(r)))\|\,dr\\
&\quad\le \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}[(1+\Delta)\|v^\varepsilon(r)-\tilde{v}^\varepsilon(r)\|+|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||]\,dr\\
&\quad\le \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}(1+\Delta)\|v^\varepsilon(r)-\tilde{v}^\varepsilon(r)\|\,dr\\
&\quad+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\,dr\\
&\quad\le \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}(1+\Delta)\\
&\qquad\qquad\Big[M\|\eta-\tilde{\eta}\|+\rho M\beta^{-1}|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\Big]e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-r)}\,dr\\
&\quad+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\,dr\\
&\quad=\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}(1+\Delta)M\|\eta-\tilde{\eta}\|e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-r)}\,dr\\
&\quad+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}(1+\Delta)\rho M\beta^{-1}|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-r)}\,dr\\
&\quad+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\,dr\\
&\quad=\rho M^2(1+\Delta)\|\eta-\tilde{\eta}\|\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)+[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-r)}\,dr\\
&\quad+\rho^2M^2\beta^{-1}(1+\Delta)|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)+[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-r)}\,dr\\
&\quad+\rho M|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-r)}\,dr\\
&\quad=\rho M^2(1+\Delta)\|\eta-\tilde{\eta}\|(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\\
&\quad+\rho^2M^2\beta^{-1}(1+\Delta)|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\\
&\quad+\rho M|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\\
&\quad\le \underbrace{\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big[1+\frac{\rho M(1+\Delta)\beta^{-\frac{1}{2}}}{(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{\frac{1}{2}}}\Big]}_{\le\upsilon}|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||\\
&\quad+\underbrace{\rho M^2(1+\Delta)\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}_{\le\Delta}\|\eta-\tilde{\eta}\|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|\Phi(s_\varepsilon)(\eta)-\Phi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\leq \Delta\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}+\upsilon|||s_\varepsilon-\tilde{s}_\varepsilon|||.$$

Portanto Φ é uma contração em Σ e, consequentemente, existe uma única $s_*^\varepsilon:\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\to(I-\bar{Q}_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ satisfazendo as condições do enunciado.

(Segundo passo) $W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon)=\{(v^\varepsilon,z^\varepsilon)\in\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\times(I-\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}});z^\varepsilon=s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)\}$.

Seja $(\bar{v}^\varepsilon,\bar{z}^\varepsilon)\in\{(v^\varepsilon,z^\varepsilon)\in\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\times(I-\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}});z^\varepsilon=s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)\}$, isto é, $\bar{z}^\varepsilon=s_*^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)$. Denotemos por $v_{s_*}^\varepsilon(t)$ a solução de

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon+\bar{A}_\varepsilon^+v^\varepsilon=H_\varepsilon(v^\varepsilon,s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)), & t<\tau\\ v^\varepsilon(0)=\bar{v}^\varepsilon. \end{cases}$$

Assim, $\{(v_{s_*}^\varepsilon(t),s_*^\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t))\}_{t\in\mathbb{R}}$ define uma curva em $\{(v^\varepsilon,z^\varepsilon);z^\varepsilon=s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)\}$. Mas a única solução da equação $z_t^\varepsilon+\bar{A}_\varepsilon^-z^\varepsilon=G_\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t),s_*^\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t)))$ que permanece limitada quando $t\to-\infty$ é dada por

$$z_{s_*}^\varepsilon=\int_{-\infty}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)}G_\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t),s_*^\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t)))\,dr=s_*^\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t)).$$

Portanto $(v_{s_*}^\varepsilon(t),s_*^\varepsilon(v_{s_*}^\varepsilon(t))$ é uma solução do sistema acoplado (3.9) passando por $(\bar{v}^\varepsilon,\bar{z}^\varepsilon)$, o que mostra a invariância, ou seja, $(\bar{v}^\varepsilon,\bar{z}^\varepsilon)\in W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon)$. Por outro lado, seja $(v^\varepsilon,z^\varepsilon)\in\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\times(I-\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ uma solução global de (3.6) que está em $W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon)$. Definimos $\xi^\varepsilon(t)=z^\varepsilon-s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(t))$ e consideramos $y^\varepsilon(r,t),r\leq t$, a solução de

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon+\bar{A}_\varepsilon^+y^\varepsilon=H_\varepsilon(y^\varepsilon,s_*^\varepsilon(y^\varepsilon)), & t<\tau\\ y^\varepsilon(t,t)=v^\varepsilon(t). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|y^\varepsilon(r,t)-&v^\varepsilon(r)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\ &=\left\|\int_t^r e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(r-\theta)}[H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta,t),s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(\theta,t)))-H_\varepsilon(v^\varepsilon(\theta),z^\varepsilon(\theta))]\,d\theta\right\|\\ &\leq\rho M\int_r^t e^{\beta(r-\theta)}[(1+\Delta)\|y^\varepsilon(\theta,t)-v^\varepsilon(\theta)\|+\|s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(\theta))-z^\varepsilon(\theta)\|]\,dr\\ &\leq\rho M\int_r^t e^{\beta(r-\theta)}[(1+\Delta)\|y^\varepsilon(\theta,t)-v^\varepsilon(\theta)\|+\|\xi^\varepsilon(\theta)\|]\,dr\end{aligned}$$

Denotando $\varphi^{\varepsilon}(r) = e^{-\beta r}\|y^{\varepsilon}(r,t) - v^{\varepsilon}(r)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$\varphi^{\varepsilon}(r) \leq \rho M(1+\Delta)\int_{r}^{t}\varphi(\theta)\,d\theta + \rho M\int_{r}^{t} e^{-\beta\theta}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\,d\theta,\ \ r \leq t.$$

Utilizando a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\varphi^{\varepsilon}(r) \leq \rho M\int_{r}^{t} e^{-\beta\theta}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\,d\theta\, e^{\rho M(1+\Delta)(\theta-r)}$$

e

$$\|y^{\varepsilon}(r,t) - v^{\varepsilon}(r)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \leq \rho M\int_{r}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-r)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\,d\theta \quad r \leq t.$$

Seja agora $t_0 \in [r,t]$. Então

$$\begin{aligned}
&\|y^{\varepsilon}(r,t) - y^{\varepsilon}(r,t_0)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad= \|e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(r-t_0)}[y(t_0,t) - v^{\varepsilon}(t_0)]\|\\
&\quad+ \left\|\int_{t_0}^{r} e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(r-\theta)}[H_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(\theta,t),s_{*}^{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(\theta,t))) - H_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(\theta,t_0),s_{*}^{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(\theta,t_0)))]\,d\theta\right\|\\
&\quad\leq \rho M^2 e^{\beta(r-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|\,d\theta\\
&\quad+ \rho M\int_{r}^{t_0} e^{\beta(r-\theta)}(1+\Delta)\|y^{\varepsilon}(\theta,t) - y^{\varepsilon}(\theta,t_0)\|\,d\theta.
\end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y^{\varepsilon}(r,t) - y^{\varepsilon}(r,t_0)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \leq \rho M^2\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-r)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\,d\theta.$$

Vamos agora estimar $\xi^{\varepsilon}(t)$,

$$
\begin{aligned}
\xi^\varepsilon(t)-e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0) &= z^\varepsilon(t)-s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(t))-e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)}[z^\varepsilon(t_0)-s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(t_0))]\\
&= \int_{t_0}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)}G_\varepsilon(v^\varepsilon(r),z^\varepsilon(r))\,dr - s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(t))+e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)}s_*^\varepsilon(v^\varepsilon(t_0))\\
&= \int_{t_0}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)}G_\varepsilon(v^\varepsilon(r),z^\varepsilon(r))\,dr - \int_{-\infty}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)}G_\varepsilon(y^\varepsilon(r,t),s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(r,t)))\,dr\\
&+ e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)}\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t_0-r)}G_\varepsilon(y^\varepsilon(r,t_0),s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(r,t_0)))\,dr\\
&= \int_{t_0}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)}[G_\varepsilon(v^\varepsilon(r),z^\varepsilon(r))-G_\varepsilon(y^\varepsilon(r,t),s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(r,t)))]\,dr\\
&- \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)}[G_\varepsilon(y^\varepsilon(r,t),s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(r,t)))-G_\varepsilon(y^\varepsilon(r,t_0),s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(r,t_0)))]\,dr.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\|\xi^\varepsilon(t)-e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq \rho M\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)}[\|v^\varepsilon(r)-y^\varepsilon(r,t)\|+\|z^\varepsilon(r)-s_*^\varepsilon(y^\varepsilon(r,t))\|]\,dr\\
&+\rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)}\|y^\varepsilon(r,t)-y^\varepsilon(r,t_0)\|\,dr\\
&\leq \rho M\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)}\|\xi^\varepsilon(r)\|\,dr+\rho M(1+\Delta)\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)}\|v^\varepsilon(r)-y^\varepsilon(r,t)\|\,dr\\
&+\rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)}\|y^\varepsilon(r,t)-y^\varepsilon(r,t_0)\|\,dr\\
&\leq \rho M\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)}\|\xi^\varepsilon(r)\|\,dr\\
&+\rho^2M^2(1+\Delta)\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)}\int_r^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-r)}\|\xi^\varepsilon(\theta)\|\,d\theta dr\\
&+\rho^2M^3(1+\Delta)\int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-r)}\int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-r)}\|\xi^\varepsilon(\theta)\|\,d\theta dr\\
&\leq \rho M\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)}\|\xi^\varepsilon(r)\|\,dr\\
&+\rho^2M^2(1+\Delta)e^{-\beta t}\int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta)\theta}\|\xi^\varepsilon(\theta)\|\int_{-\infty}^\theta e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta))r}\,drd\theta\\
&+\rho^2M^3(1+\Delta)e^{-\beta t}\int_{t_0}^t e^{-(\beta(-\rho M(1+\Delta))\theta}\|\xi^\varepsilon(\theta)\|\int_{-\infty}^{t_0} e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta))r}\,drd\theta,
\end{aligned}
$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\|\xi^{\varepsilon}(t)-e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{-}(t-t_0)}\xi^{\varepsilon}(t_0)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|\xi^{\varepsilon}(r)\|\,dr\\
&+\frac{\rho^2M^2(1+\Delta)e^{-\beta t}}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta)\theta}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta)\theta}\,d\theta\\
&+\frac{\rho^2M^3(1+\Delta)e^{-\beta t}}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta)\theta}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta)t_0}\,d\theta\\
&=\rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-r)}\|\xi^{\varepsilon}(r)\|\,dr+\frac{\rho^2M^2(1+\Delta)t}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\theta)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|\,d\theta\\
&+\frac{\rho^2M^3(1+\Delta)e^{-\beta(t-t_0)}}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta)(\theta-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|\,d\theta\\
&=\left[\rho M-\frac{\rho^2M^2(1+\Delta)t}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\theta)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|\,d\theta\\
&+\frac{\rho^2M^3(1+\Delta)e^{-\beta(t-t_0)}}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta)(\theta-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|\,d\theta,
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
e^{\beta(t-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(t)\| &\leq M\|\xi^{\varepsilon}(t_0)\|+\left[\rho M+\frac{\rho^2M^2(1+\Delta)}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\beta(r-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(r)\|\,dr\\
&+\frac{\rho^2M^3(1+\Delta)}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\int_{t_0}^{t} e^{-(2\beta-\rho M(1+\Delta)(\theta-t_0)}e^{\beta(t-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(\theta)\|\,d\theta\\
&\leq M\|\xi^{\varepsilon}(t_0)\|+\left[\rho M+\frac{\rho^2M^2(1+\Delta)(1+M)}{2\beta-\rho M(1+\Delta)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\beta(r-t_0)}\|\xi^{\varepsilon}(r)\|\,dr.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall, temos

$$\|\xi^{\varepsilon}(t)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\leq M\|\xi^{\varepsilon}(t_0)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}e^{-\gamma(t-t_0)},$$

logo

$$\|z^{\varepsilon}(t)-s_*^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(t))\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}=\|\xi^{\varepsilon}(t)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\leq M\|\xi^{\varepsilon}(t_0)\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Portanto $z^{\varepsilon}(t)=s_*^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(t))$, para todo $t\in\mathbb{R}$, ou seja,

$$W_{\varepsilon}^{u}(u_*^{\varepsilon})=\{(v^{\varepsilon},z^{\varepsilon})\,;\,z^{\varepsilon}(t)=s_*^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}(t))\}.$$

Além disso, para cada vizinhança $B(u_*^{\varepsilon},\delta)$ de u_*^{ε}, se $u^{\varepsilon}\in B(u_*^{\varepsilon},\delta)$, então existem $\gamma,K>0$

independentes de ε, tais que

$$\operatorname{dist}(T_\varepsilon(t)u^\varepsilon, W^u(u_*^\varepsilon)) \leq Ke^{-\gamma(t-t_0)} \tag{3.10}$$

durante o tempo em que a órbita $T_\varepsilon(t)u^\varepsilon$ permanece em $B(u_*^\varepsilon, \delta)$.

(Terceiro passo) $\sup_{v\in B} \|s_*^0(v) - s_*^\varepsilon(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, onde $B = B(0,R) \subset \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

De fato, a aplicação $v^0 \mapsto G_0(v^0, s_*^0(v^0))$ é contínua, de modo que leva subconjuntos limitados de $\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ em subconjunto relativamente compactos de $L^2_{\Omega_0}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|s_*(\eta)^\varepsilon - s_*^0(\eta)\| &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon, s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)) - e^{-\bar{A}_0^-(\tau-r)} G_0(v^0, s_*^0(v^0))\|\, dr \\
&\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon, s_*^\varepsilon(v^\varepsilon)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^0, s_*^0(v^0))\|\, dr \\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^0, s_*^0(v^0)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_0(v^0, s_*^0(v^0))\|\, dr \\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_0(v^0, s_*^0(v^0)) - e^{-\bar{A}_0^-(\tau-r)} G_0(v^0, s_*^0(v^0))\|\, dr.
\end{aligned}$$

Denotando as três últimas integrais por I_1, I_2 e I_3, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{-\infty}^{\tau} Me^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}\rho[(1+\Delta)\|v^\varepsilon - v^0\| + |||s_*^\varepsilon - s_*^0|||]\, dr \\
&\leq \rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}\|v^\varepsilon - v^0\|\, dr \\
&+ \rho M |||s_*^\varepsilon - s_*^0||| \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}\, dr \\
&= \rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}\|v^\varepsilon - v^0\|\, dr + \rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)|||s_*^\varepsilon - s_*^0|||.
\end{aligned}$$

Como $G_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} G_0$ pontualmente sobre compactos, temos que $G_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} G_0$ uniformemente e portanto I_2 é $o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$. Ainda, como $G_0(v^0, s_*^0(v^0))$ está em subconjunto compacto de $L^2_{\Omega_0}$, garantimos, como na Observação 2.5.3, que I_3 também é $o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|s_*(\eta)^\varepsilon - s_*^0(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq o(1) + \rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)|||s_*^\varepsilon - s_*^0||| \\
&+ \rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}\|v^\varepsilon - v^0\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\, dr.
\end{aligned}$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\|v^{\varepsilon}(t)-v^{0}(t)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-\tau)}\eta-e^{-\bar{A}_{0}^{+}(t-\tau)}\eta\| \\
&+\int_{t}^{\tau}\|e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-r)}H_{\varepsilon}(v^{\varepsilon},s_{*}^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}))-e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-r)}H_{\varepsilon}(v^{0},s_{*}^{0}(v^{0}))\|\,dr \\
&+\int_{t}^{\tau}\|e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-r)}H_{\varepsilon}(v^{0},s_{*}^{0}(v^{0}))-e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-r)}H_{0}(v^{0},s_{*}^{0}(v^{0}))\|\,dr \\
&+\int_{t}^{\tau}\|e^{-\bar{A}_{\varepsilon}^{+}(t-r)}H_{0}(v^{0},s_{*}^{0}(v^{0}))-e^{-\bar{A}_{0}^{+}(t-r)}H_{0}(v^{0},s_{*}^{0}(v^{0}))\|\,dr \\
&\leq C_{3}\|p_{\varepsilon}-p_{0}\|_{L^{\infty}}^{2\theta}+\rho M\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}\,dr|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}||| \\
&+\rho M(1+\Delta)\int_{t}^{\tau}e^{\beta(t-r)}\|v^{\varepsilon}-v^{0}\|\,dr.
\end{aligned}
$$

Seja $\varphi(t)=e^{\beta(\tau-t)}\|v^{\varepsilon}(t)-v^{0}(t)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}$. Então

$$
\varphi(t)\leq o(1)+\rho M\int_{t}^{\tau}e^{\beta(\tau-r)}\,dr|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}|||+\rho M(1+\Delta)\int_{t}^{\tau}\varphi(r)\,dr,
$$

e, pela Desigualdade de Gronwall, segue que

$$
\|v^{\varepsilon}(t)-v^{0}(t)\|_{\bar{Q}_{\varepsilon}^{+}X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\leq[o(1)+\rho M\beta^{-1}|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}|||]e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)},
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\|s_{*}^{\varepsilon}(\eta)-s_{*}^{0}(\eta)\|\leq o(1)+\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}||| \\
&\quad+\rho M(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau}e^{[-2\beta+\rho M(1+\Delta)](\tau-r)}(\tau-r)^{-\frac{1}{2}}\,dr[o(1)+\rho M\beta^{-1}|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}|||] \\
&\quad\leq o(1)+\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}||| \\
&\quad+[\rho M(1+\Delta)(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\rho M\beta^{-1}]|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}||.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}|||\leq o(1) \\
&\quad+\Big[\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)+\Big(\rho^{2}M^{2}\beta^{-1}(1+\Delta)(2\beta-\rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)\Big]|||s_{*}^{\varepsilon}-s_{*}^{0}|||,
\end{aligned}
$$

e

$$|||s_*^\varepsilon - s_*^0||| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

$\square$

Definição 3.3.3. Seja $u_*^\varepsilon \in \mathscr{E}_\varepsilon$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Definimos a *variedade instável local* de u_*^ε por

$$\begin{aligned} &W^u_{\varepsilon,\mathrm{loc}}(u_*^\varepsilon) \\ &\quad = \{(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,;\, (v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon),\, \|v^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}, \end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$.

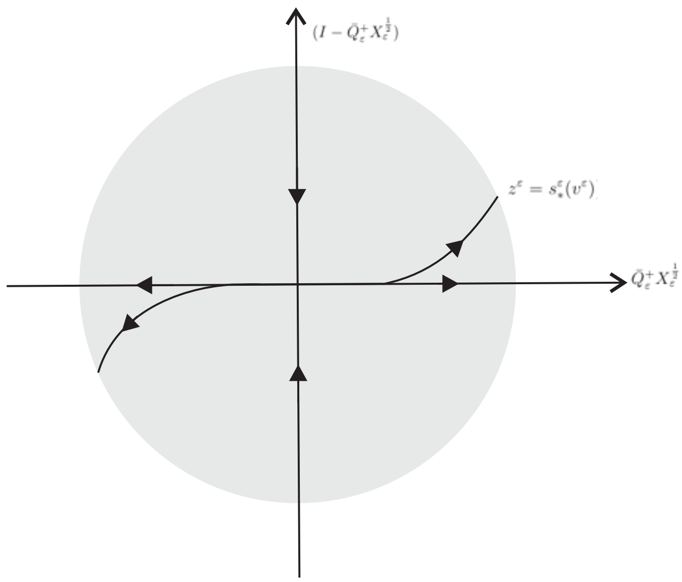

Figura 3.1: Variedade local

Corolário 3.3.4. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} W^u_{\varepsilon,\mathrm{loc}}(u_*^\varepsilon) = \{&(v^\varepsilon, s_*^\varepsilon(v^\varepsilon))\,;\, v^\varepsilon \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\} \\ &\cap \{(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,;\, \|v^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Corolário 3.3.5. Suponha que $\mathscr{E}_0 = \{u_*^{0,1}, \ldots, u_*^{0,k}\}$. Então existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que para $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$, $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u_*^{\varepsilon,1}, \ldots, u_*^{\varepsilon,k}\}$, $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$, e suas variedades instáveis locais $W^u_{\varepsilon,\mathrm{loc}}(u_*^{\varepsilon,i})$, se comportam continuamente quando $\varepsilon \to 0$.

3.4 Continuidade dos atratores e taxa de atração

Na Seção 2.2 mostramos que os semigrupos não lineares $T_\varepsilon(t)$ possuem estrutura gradiente para todo $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$. Sendo assim, segue da Seção 1.4 que os respectivos atratores são dados por $\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} W^u_\varepsilon(u_*^{\varepsilon,i})$. No que segue mostraremos a continuidade em $\varepsilon = 0$ da família $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$.

Como observado em [8], quando lidamos com alguns problemas que são perturbações singulares (por exemplo, (2.1) é uma pertubação singular de (2.2)) é algumas vezes necessário não assumir a continuidade do semigrupo no tempo inicial $t = 0$. Ao invés disso, assumimos que o semigrupo torna-se contínuo depois de certo tempo $T > 0$, o qual pode ser visto como um tempo no qual o semigrupo se regulariza. É com isto em mente que partimos para o próximo resultado.

Teorema 3.4.1. Para cada $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ o semigrupo $\{T_\varepsilon(t)\,;\,t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo, ou seja, seu atrator global $\mathscr{A}_\varepsilon$ atrai subconjuntos limitados de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ exponencialmente. Além disso, existem $\gamma > 0$ e $K > 0$ tais que para todo $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado,

$$\mathrm{dist}_H(T_\varepsilon(t)B,\mathscr{A}_\varepsilon) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \quad \text{e} \quad \mathrm{dist}_H(T_0(t)PB,\mathscr{A}_0) \leq Ke^{-\gamma\frac{t}{2}}, \quad t > 0, \tag{3.11}$$

onde K e γ independem de ε e P é como na Definição 2.4.3.

Demonstração. Afirmamos que para cada $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\{T_\varepsilon(t)\,;\,t \geq 0\}$, satisfaz as hipóteses do Teorema 1.5.10. De fato, $\{T_\varepsilon(t)\,;\,t \geq 0\}$ possui estrutura gradiente e o conjunto dos pontos de equilíbrio são constituídos de um número finito de pontos hiperbólicos. Para a condição de Lipschitz temos

$$T_\varepsilon(t)u^\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon)\,ds, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],$$

e

$$\|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega),X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]; \tag{3.12}$$

$$\|e^{-A_0 t}\|_{\mathscr{L}(L^2_{\Omega_0}(\Omega),X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}, \tag{3.13}$$

onde M é uma constante positiva independente de ε. Assim, para $w_1 = w_1(\varepsilon), w_2 = w_2(\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$,

$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,

$$\|T_\varepsilon(t)w_1 - T_\varepsilon(t)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}(w_1 - w_2)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}[(f(T_\varepsilon(s)w_1) - f(T_\varepsilon(s)w_2))]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds$$

e

$$\|e^{-A_\varepsilon t}(w_1 - w_2)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Mt^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t} \|w_1 - w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Denotando L_f a constante de Lipschitz de f, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}(f(T_\varepsilon(s)w_1 - f(T_\varepsilon(s)w_2)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \int_0^t Me^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|f(T_\varepsilon(s)w_1) - f(T_\varepsilon(s)w_2)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq ML_f \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)w_1 - T_\varepsilon(s)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds,
\end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(t)w_1 - T_\varepsilon(t)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Mt^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t} \|w_1 - w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&+ ML_f \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)w_1 - T_\varepsilon(s)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Denotando $\varphi(t) = \|T_\varepsilon(t)w_1 - T_\varepsilon(t)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} e^{\lambda t}$, obtemos

$$\varphi(t) \leq Mt^{-\frac{1}{2}} \|w_1 - w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + ML_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \varphi(s)\, ds,$$

que pela desigualdade de Gronwall, resulta

$$\|T_\varepsilon(t)w_1 - T_\varepsilon(t)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M_1 e^{-\lambda t} \|w_1 - w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

No entanto, as estimativas (3.12) e (3.13) são válidas para todo $\omega \leq \lambda$, e então obtemos a condição de Lipschitz

$$\|T_\varepsilon(t)w_1 - T_\varepsilon(t)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt} \|w_1 - w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq 1, \tag{3.14}$$

onde C e L são constantes positivas e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Agora, de (3.10), temos que

$$\mathrm{dist}(T_\varepsilon(t)u^\varepsilon, W^u(u_*^\varepsilon)) \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

durante o tempo em que a órbita $T_\varepsilon(t)u^\varepsilon$ permanece em $B(u_*^\varepsilon, \delta)$. Portanto, segue do Teorema 1.5.9 que existem $\gamma > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\mathrm{dist}_H(T_\varepsilon(t)B, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \text{e} \quad \mathrm{dist}_H(T_0(t)B_0, \mathscr{A}_0) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t > 0 \tag{3.15}$$

para todo $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado e $B_0 \subset X_0^{\frac{1}{2}}$ limitado. Agora, tomando como referência a Seção 3.1 em [8], aplicaremos o Corolário 1.5.13 da seguinte forma: $S_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e definimos

$$S_0(t) = T_0(t)P, \quad t > 0, \quad \text{e} \quad S_0(0) = I.$$

Temos que $S_0(t) \in \mathscr{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ é um semigrupo (singular em 0). De fato,

(i) $S_0(t+\tau) = T_0(t+\tau)P = T_0(t)T_0(\tau)P = T_0(t)PT_0(\tau)P = S_0(t)S_0(\tau), \quad t, \tau \geq 0;$

(ii) $(t,u) \in (0,\infty) \times X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \longrightarrow S_0(t)u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ é contínua, $\forall u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Note que $S_0(t)|_{X_0^{\frac{1}{2}}} = T_0(t)$, assim $\mathscr{A}_0$ é compacto, invariante por $S_0(t)$ e atrai exponencialmente subconjuntos limitados de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. De fato, seja $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado, então $T_0(t)PB$, $t > 0$ é limitado em $X_0^{\frac{1}{2}}$, logo

$$\mathrm{dist}_H(T_0(t)T_0(t)PB, \mathscr{A}_0) \leq Ke^{-\gamma t} \Rightarrow \mathrm{dist}_H(T_0(2t)PB, \mathscr{A}_0) \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t > 0,$$

ou ainda,

$$\mathrm{dist}_H(T_0(t)PB, \mathscr{A}_0) \leq Ke^{-\gamma \frac{t}{2}}, \quad t > 0. \tag{3.16}$$

Logo $S_0(t)$ possui um atrator global $\mathscr{A}_0'$ contendo $\mathscr{A}_0$. Mas, qualquer conjunto de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ invariante por $S_0(t)$ está contido em $X_0^{\frac{1}{2}}$, pois, se $E \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ é invariante por $S_0(t)$, então

$$E = S_0(t)E = T_0(t)PE \subset X_0^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, $\mathscr{A}_0' \subset X_0^{\frac{1}{2}}$ e segue de (3.16) que

$$\mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_0', \mathscr{A}_0) = \mathrm{dist}_H(S_0(t)\mathscr{A}_0', \mathscr{A}_0) \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

Portanto $\mathscr{A}_0' = \mathscr{A}_0$. Note também que

$$T_0(t)Pu = u \Leftrightarrow T_0(t)u = u,$$

e assim $\mathscr{E}_{S_0(t)} = \mathscr{E}_0 = \{u_*^{0,1}, ...u_*^{0,k}\}$. Consequentemente, $S_0(t)$ é gradiente-like pois, caso contrário, resultaria que $T_0(t)$ não é gradiente-like, o que contradiz o fato de $T_0(t)$ possuir estrutura gradiente. Procedendo como em (3.14), obtemos que $\{S_0(t)\,; t > 0\}$ satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|S_0(t)w_1 - S_0(t)w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt}\|w_1 - w_2\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq 1.$$

Segue do Corolário 1.5.13 que K e γ independem de ε. □

Teorema 3.4.2. Para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e $u \in U = \overline{\bigcup_{\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]} \mathscr{A}_\varepsilon}$, existem constantes $\tilde{C} > 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ tais que

$$\mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq \tilde{C}\left[[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+L}}.$$

Demonstração. Segue do Teorema 3.4.1 que para todo subconjunto limitado $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ existem constantes $\gamma, K > 0$, independentes de ε, tais que

$$\mathrm{dist}_H(T_\varepsilon(t)B, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq Ke^{-\gamma\frac{t}{2}}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad t > 0;$$

e

$$\mathrm{dist}_H(T_0(t)PB, \mathscr{A}_0) \leq Ke^{-\gamma\frac{t}{2}}, \quad t > 0.$$

Pelo Teorema 2.5.4, existem constantes positivas C e L tais que para $u \in U$,

$$\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)Pu\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt}[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}, \quad t > 1.$$

Agora, dado $\delta > 0$, se $\dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{1}{\gamma}\ln K \leq \dfrac{t}{2} + 1$, então $e^{-\gamma\frac{t}{2}} \leq \dfrac{\delta}{K}e^{\gamma}$, e

$$\mathrm{dist}_H(T_\varepsilon(t)U, \mathscr{A}_\varepsilon) \leq e^{\gamma}\delta, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad \text{e} \quad t \geq 1;$$

$$\mathrm{dist}_H(T_0(t)PU, \mathscr{A}_0) \leq e^{\gamma}\delta, \qquad t \geq 1,$$

e

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_H(T_\varepsilon(t)U, T_0(t)PU) &= \sup_{u\in U}\inf_{v\in U}\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)Pv\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq \sup_{u\in U}\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)Pu\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq \sup_{u\in U}\left[Ce^{Lt}[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\right]\\
&= Ce^{Lt}l(\varepsilon);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_H(T_0(t)PU, T_\varepsilon(t)U) &= \sup_{u\in U}\inf_{v\in U}\|T_0(t)Pu - T_\varepsilon(t)v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq \sup_{u\in U}\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)Pu\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq \sup_{u\in U}\left[Ce^{Lt}[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}\right]\\
&= Ce^{Lt}l(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

onde $l(\varepsilon) = C[(\|p_\varepsilon - p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + Z_\varepsilon]^{2\theta}$. Note que

$$\mathscr{A}_\varepsilon \subset U \Rightarrow \mathscr{A}_\varepsilon = T_\varepsilon(t)\mathscr{A}_\varepsilon \subset T_\varepsilon(t)U;$$

$$\mathscr{A}_0 \subset U \Rightarrow \mathscr{A}_0 = T_0(t)\mathscr{A}_0 = T_0(t)P\mathscr{A}_0 \subset T_0(t)PU,$$

uma vez que $\mathscr{A}_0 \in X_0^{\frac{1}{2}} \subset L^2_{\Omega_0}$, $P\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_0$, resultando

$$\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon, T_\varepsilon(t)U) = 0 = \operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_0, T_0(t)PU).$$

Assim, se $t \geq 0$ é tal que $\dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{1}{\gamma}\ln K \in [\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2} + 1)$, então $e^{Lt} \leq C_1\delta^{-\frac{L}{\gamma}}$ e

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) &\leq \operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon, T_\varepsilon(t)U) + \operatorname{dist}_H(T_\varepsilon(t)U, T_0(t)PU)\\
&\quad + \operatorname{dist}_H(T_0(t)PU, \mathscr{A}_0)\\
&\leq Ce^{Lt}l(\varepsilon) + e^\gamma\delta\\
&\leq C_2\delta^{-\frac{L}{\gamma}}l(\varepsilon) + e^\gamma\delta
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\varepsilon) &\leq \operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_0,T_0(t)PU)+\operatorname{dist}_H(T_0(t)PU,T_\varepsilon(t)U)\\
&\quad+\operatorname{dist}_H(T_\varepsilon(t)U,\mathscr{A}_\varepsilon)\\
&\leq Ce^{Lt}l(\varepsilon)+e^{\gamma}\delta\\
&\leq C_2\delta^{-\frac{L}{\gamma}}l(\varepsilon)+e^{\gamma}\delta,
\end{aligned}
$$

de onde obtemos

$$
\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon,\mathscr{A}_0)+\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\varepsilon) \leq 2C_2\delta^{-\frac{L}{\gamma}}l(\varepsilon)+2e^{\gamma}\delta. \tag{3.17}
$$

Minimizando o lado direito da expressão acima para $\delta > 0$, encontramos

$$
\delta = C_3\Big(\frac{L}{\gamma e^{\gamma}}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma+L}}l(\varepsilon)^{\frac{\gamma}{\rho+L}}.
$$

Como o lado esquerdo em (3.17) independe de δ, temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon,\mathscr{A}_0)+\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\varepsilon) &\leq 2C\Big[\Big(\frac{L}{\gamma e^{\gamma}}\Big)^{\frac{-L}{\gamma+L}}+\Big(\frac{Le^{L}}{\gamma}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma+L}}\Big]l(\varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma+L}}\\
&= \tilde{C}l(\varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma+L}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\varepsilon,\mathscr{A}_0)+\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\varepsilon) \leq \tilde{C}\Big[[(\|p_\varepsilon-p_0\|_{L^\infty(\Omega_1)}+J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}+Z_\varepsilon]^{2\theta}\Big]^{\frac{\gamma}{\gamma+L}}.
$$

□

Apêndice

A

Dimensão de Hausdorff e fractal de atratores

Em [5] os autores obtiveram uma estimativa para a dimensão fractal dos atratores para sistemas dinâmicos gradiente-like e garantiram que sob certas condições os atratores podem ser vistos como objetos de dimensão finita. De sorte, os resultados obtidos anteriormente colocam os semigrupos $\{T_\varepsilon(t)\,;t\geq 0\}$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ nas hipóteses do do Teorema A.0.8 abaixo. Mais precisamente, é válido que cada $\mathscr{A}_\varepsilon$ pode ser entendido como um objeto de dimensão finita.

Definição A.0.3. Sejam X um espaço métrico, $\beta>0$, $\delta>0$ e $A\subset X$. Denotamos

$$\mu_\delta^{(\beta)}(A)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}[\mathrm{diam}(B_i)]^\beta\,;A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,\ \mathrm{diam}(B_i)<\delta\Big\},$$

convencionando $\inf\emptyset=\infty$. Como $\mu_\delta^{(\beta)}(A)$ não decresce quando δ decresce, denotamos

$$\mu^{(\beta)}(A)=\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta^{(\beta)}(A).$$

Definimos a *dimensão de Hausdorff* de $A\subset X$, por

$$\dim_H(A)=\inf\{\beta\,;\mu^{(\beta)}(A)=0\}=\sup\{\beta\,;\mu^{(\beta)}(A)=\infty\}.$$

São válidas as seguintes propriedades;

(i) $\beta'>\beta>0$.

$$\mu^{(\beta)}(A)<\infty\Rightarrow\mu^{(\beta')}(A)=0;$$

$$\mu^{(\beta')}(A)>0\Rightarrow\mu^{(\beta)}(A)=\infty.$$

(ii) Para cada $\beta > 0$ e $\delta > 0$, $\mu_{\delta}^{(\beta)} : \mathbb{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ é uma medida exterior e $\mu^{(\beta)}$ é uma medida exterior métrica, isto é,

$$A,B \subset X\,,\, \mathrm{dist}(A,B) > 0 \Rightarrow \mu^{(\beta)}(A \cup B) = \mu^{(\beta)}(A) + \mu^{(\beta)}(B).$$

(iii) Sejam $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de X e $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Então

$$\dim_H(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j).$$

Seja $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente definido em X com conjunto de equilíbrio $\mathscr{E} = \{u_*^1, ..., u_*^k\}$. Suponha que $W_{loc}^u(u_*^i)$ é o gráfico de uma função Lipschitz com domínio Q_iX, onde Q_i é uma projeção de posto finito, $i = 1, ..., k$. Temos (veja [9] página 94),

$$\dim_H(W_{loc}^u(u_*^i)) = \mathrm{posto}(Q_iX), \quad i = 1, ..., k.$$

Como $\mathscr{A} = \bigcup_{u_*^i \in \mathscr{E}} W^u(u_*^i)$, segue que

$$\dim_H(\mathscr{A}) = \max_{1\leq i\leq k} \dim_H(Q_iX) < \infty.$$

Definição A.0.4. Seja K um subespaço compacto de X. Seja $N(r,K)$ o número mínimo necessário de bolas de raio r pra cobrir K. Definimos a *dimensão fractal* de K por

$$\dim_F(K) = \limsup_{r\to 0} \frac{\ln N(r,K)}{\ln(1/r)}.$$

Observação A.0.5. $\dim_F(K)$ é o número mínimo tal que: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ com

$$N(r,K) \leq (1/r)^{\dim_F(K)+\varepsilon}, \quad 0 < r < \delta.$$

São válidas as seguintes propriedades:

(i) $\dim_H(K) \leq \dim_F(K)$.

(ii) Para K_1, K_2 compactos em X, temos $\dim_F(K_1 + K_2) \leq \dim_F(K_1) + \dim_F(K_2)$.

(iii) Para K_1, K_2 compactos em X, tais que $K_1 \subset K_2$, temos $\dim_F(K_1) \leq \dim_F(K_2)$.

(iv) Se X é normado e $\dim_F(K) < \infty$, então $\dim_F(K-K) \leq 2\dim_F(K)$.

(v) Seja $h : X \to X$ Lipschitz com $K \subset h(K)$. Então $\dim_F(h(K)) = \dim_F(K)$.

Definição A.0.6. Seja $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathscr{A}$. Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathscr{A}$ é um *atrator local* se existe $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto ω-limite $\omega(O_\varepsilon(A)) = A$, onde $O_\varepsilon(A)$ é uma ε-vizinhança de A. Definimos o *repulsor* A^* associado ao atrator local A por

$$A^* = \{u \in \mathscr{A}\,;\, \omega(u) \cap A = \emptyset\}.$$

O par (A, A^*) é chamado um atrator-repulsor para $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$.

Se $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente-like com $\mathscr{E} = \{u_*^1, ..., u_*^k\}$ e atrator global $\mathscr{A}$. Então $\mathscr{A}$ coincide com o atrator global do semigrupo gradiente-like discreto $\{S^i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, onde $S = T(1)$. Assim, até o fim deste apêndice consideraremos um semigrupo gradiente-like discreto $\{T^i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$.

Proposição A.0.7. Seja $\{T^i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto com atrator global $\mathscr{A}$ tal que $S := T|_{\mathscr{A}}$ é Lipchitz contínuo com constante $C > 1$. Seja (A, A^*) um par atrator repulsor em $\mathscr{A}$, e suponha que:

(i) existe uma vizinhança B de A^* em $\mathscr{A}$ tal que $\dim_F(B) = \dim_F(S(B))$;

(ii) existem constantes $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que, para todo subconjunto $K \subset \mathscr{A}$ compacto com $K \cap A^* = \emptyset$, temos $\mathrm{dist}_H(S^i K, A) \leq M e^{-\gamma i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Então

$$\dim_F(B) \leq \dim_F(\mathscr{A}) \leq \max\left\{\frac{\gamma + \log(C)}{\gamma}\dim_F(B), \dim_F(A)\right\}.$$

Teorema A.0.8. Seja $\{T^i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo gradiente-like discreto com $\mathscr{E} = \{u_*^1, ..., u_*^k\}$ constituído de pontos hiperbólicos e atrator global $\mathscr{A}$ tal que $T|_{\mathscr{A}}$ é Lipchitz contínuo com constante $C > 1$. Sejam $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que, para todo para atrator-repulsor (A, A^*) em $\mathscr{A}$ e todo compacto $K \subset \mathscr{A}$ com $K \cap A^* = \emptyset$ temos que

$$\mathrm{dist}_H(T^i K, A) \leq M e^{-\gamma i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Suponha que $W^u_{loc}(u_*^j)$ sejam dados como gráficos de funções Lipschitz contínuas. Nestas condições,

$$\max_{1\le j\le k} \dim_F(W^u_{loc}(u^j_*)) \le \dim_F(\mathscr{A}) \le \frac{\gamma+\log(C)}{\gamma} \max_{1\le j\le k} \dim_F(W^u_{loc}(u^j_*)).$$

Proposição A.0.9. Seja Y um espaço de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$ compactamente. Se $T: X \to X$ é um operador compacto tal que $\{T^i; i \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$ e $T|_{\mathscr{A}}$ é Lipchitz, então $\dim_F(\mathscr{A}) < \infty$.

Observação A.0.10. É mostrado em [9] que conjuntos compactos que possuem dimensão fractal finita podem ser projetados injetivamente em um espaço de dimensão finita.

Teorema A.0.11. Seja $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ a família de atratores de (1.1). Para cada $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, a dimensão de Hausdorff $\dim_H(\mathscr{A}_\varepsilon) < \infty$, a dimensão fractal $\dim_F(\mathscr{A}_\varepsilon) < \infty$ e pode ser estimada por:

$$\max_{1\le j\le k} \dim_F(W^u_{loc}(u^{\varepsilon,j}_*)) \le \dim_F(\mathscr{A}_\varepsilon) \le \frac{\gamma+\log(C)}{\gamma} \max_{1\le j\le k} \dim_F(W^u_{loc}(u^{\varepsilon,j}_*)), \tag{A.1}$$

onde $C > 1$ e $\gamma > 0$.

Demonstração. Para $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, temos que $\mathscr{E}_\varepsilon = \{u^{\varepsilon,1}_*,\dots,u^{\varepsilon,k}_*\}$ é constituído de pontos hiperbólicos e a variedade instável local $W^u_{loc}(u^{\varepsilon,j}_*)$, $j = 1,\dots,k$ é o gráfico de uma função Lipschitz com domínio $\bar{Q}^+_\varepsilon X^{\frac{1}{2}}_\varepsilon$ com posto$(\bar{Q}^+_\varepsilon) < \infty$. Assim,

$$\dim_H(W^u_{loc}(u^{\varepsilon,j}_*)) = \text{posto}(\bar{Q}^+_\varepsilon) < \infty$$

e, como $\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{k} W^u_\varepsilon(u^{\varepsilon,j}_*)$, segue que $\dim_H(\mathscr{A}_\varepsilon) < \infty$. Em particular, $\mathscr{A}_\varepsilon$ é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}^p$, para algum p que, segundo [5], pode ser tomado como

$$p = 2\max_{1\le j\le k} \text{posto}(\bar{Q}^+_\varepsilon(u^{0,j}_*)) + 1.$$

Além disso, segue da Proposição A.0.9 que $\dim_F(\mathscr{A}_\varepsilon) < \infty$ e, pela Observação A.0.10, $\mathscr{A}_\varepsilon$ pode ser projetado injetivamente em um espaço de dimensão finita. Finalmente, para cada $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, existe somente um número finito de pares atratores-repulsores $(A_\varepsilon, A^*_\varepsilon)$ com

$$A_\varepsilon = \bigcup_{\substack{j\in I\\ I\subset\{1,\dots,k\}}} W^u_\varepsilon(u^{\varepsilon,j}_*).$$

Assim, por (3.10) podemos encontrar constantes $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que, para todo par $(A_\varepsilon, A_\varepsilon^*)$ e todo subconjunto compacto $K \subset \mathscr{A}_\varepsilon$ com $K \cap A_\varepsilon^* = \emptyset$,

$$\mathrm{dist}_H(T_\varepsilon(i)K, A_\varepsilon) \leq Me^{-\gamma i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Também, vimos na demonstração do Teorema 3.4.1 que $T_\varepsilon|_{\mathscr{A}_\varepsilon}$ é Lipschitz contínua e podemos escolher a constante $C > 1$. Aplicando o Teorema A.0.8 com $\{S_\varepsilon^i\,; i \in \mathbb{N}\}$, $S_\varepsilon = T(1)$, obtemos (A.1). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, A. Rodríguez-Bernal, *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary bondition. Uniform bounds*, Commun. in partial differential equations, **25** (1&2), 1-37 (2000).

[2] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, A. Rodríguez-Bernal, *Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions*, Journal of Differential Equations, **168**, 33-59 (2000).

[3] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, A. Rodríguez-Bernal, *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities*, Journal of Differential Equations, **156**, 376-406 (1999).

[4] F. D. M. Bezerra, *Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão perturbadas*, Tese de doutorado, ICMC-USP (2009), disponível em http://www.teses.usp.br.

[5] M.C. Bortolan, A.N. Carvalho, J.A. Langa, *An estimate on the fractal dimension of attractors of gradient-like dynamical systems*, Nonlinear Analysis, **75**, 5702-5722 (2012).

[6] H. Brezis, , *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[7] V. L. Carbone, A. N. Carvalho, K. Schiabel-Silva, *Continuity of the dynamics in a localized large diffusion problem with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **356**, 69-85 (2009).

[8] A.N. CARVALHO, J.W. CHOLEWA, T.DLOTKO, *Equi-exponential attraction and rate of convergence of attractors for singularly pertubed evolution equations*, Cadernos de matemática, **11**, 111-151 (2010).

[9] A. N. CARVALHO, *Sistemas dinâmicos não lineares, notas de aula*, (2010).

[10] A. N. CARVALHO, *Análise funcional 2, notas de aula*, (2011).

[11] J. K. HALE, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematics Surveys and Monographs, **25**, American Mathematical Society (1989).

[12] D. B. HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, **840**, Springer-Verlag (1980).

[13] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, **44**, Springer-Verlag (1983).

[14] A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Localized spatial homogenizations and large diffusion*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **29**, 1361-1380 (1998).

[15] K. SCHIABEL-SILVA, *Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares com difusibilidade grande localizada*, Tese de doutorado, ICMC-USP (2006), disponível em http://www.teses.usp.br.