UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência Global de Soluções para Certos Sistemas Parabólicos Não Lineares

Claudete Matilde Webler

São Carlos - SP

2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência Global de Soluções para Certos Sistemas Parabólicos Não Lineares

Claudete Matilde Webler
Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Fevereiro de 2005

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

W376eg

Webler, Claudete Matilde.
Existência global de soluções para certos sistemas parabólicos não lineares / Claudete Matilde Webler. -- São Carlos : UFSCar, 2005.
67 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Equações diferenciais parciais não lineares. 2. Sistemas parabólicos. 3. Espaços de Hölder. 4. Dinâmica dos gases. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Orientador

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Banca Examinadora

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva

Aos meus pais Lothário e Ivone com todo amor e carinho.

.

"Para fazer uma floresta, basta ter uma árvore, uma abelha e um sonho... E se não tiveres a abelha e nem a árvore, somente o sonho bastará."

(Autor desconhecido)

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus pela vida e por jamais deixar de me estender sua generosa mão. Meu profundo louvor e gratidão.

Ao Professor Dr. Cezar Issao Kondo pela orientação, disponibilidade, exemplo e amizade.

Aos meus pais Lothário e Ivone pelo carinho de sempre e por terem me educado com muito amor e responsabilidade. Aos meus irmãos e cunhados José, Cledir, Dulce e Eloir, Lori e Dionísio, Egídio e Marisa pelo carinho, compreensão e apoio de sempre. Às minhas sobrinhas Franciele e Alecsandra pelos momentos de felicidade que me proporcionam. Vocês são o meu maior tesouro, amo todos vocês.

Aos meus primos, tios e amigos campinenses que sempre me deram força para eu continuar estudando. Em especial ao Nelson Lang e ao casal Chico e Reinildes pelo exemplo e encorajamento.

Aos meus padrinhos, em especial o José Aldino e a Margarida, pelo carinho e amizade mais próxima.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSM, em especial meus orientadores de iniciação científica: Bernadete, Jetúlio e Peneireiro. Também a todos os amigos da graduação, hoje espalhados pelo Brasil, especialmente aos colegas Marli, Marnei, Sabrina, Liane, Janice, André, Carlos e Cristiane pela amizade mais próxima.

Aos professores do departamento de Matemática da UFSCar pelos ensinamentos matemáticos e pela amizade.

A todos os colegas do PPG-M pelo companheirismo, ensinamentos e amizade. Aos amigos Kelly, Marcos, Mariza e Jacson pela amizade e pela importante ajuda que me deram logo que cheguei aqui em São Carlos. Aos amigos Elaine, Taísa, Jamil e Rodrigo pela amizade, força e por estarem sempre presentes. Aos colegas Renato e Paulo pelas instruções de Latex.

Às secretárias Célia e Irma por serem sempre amigas e batalhadoras pela nossa causa.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Sumário

Abstract

In this work, we study the global existence of smooth solutions for certain systems of the form $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$, where u and f are vectors and D is a positive, constant and diagonalizable matrix. We assume that the initial condition u_0 satisfies $||u_0 - \overline{u}||_{L^\infty(\mathbb{R})} < r$, where $\overline{u}$ is a fixed vector, f is defined in the ball of the center $\overline{u}$ of radius r and $||u_0 - \overline{u}||_{L^2(\mathbb{R})}$ is sufficiently small. We show how our results apply to the equations of gas dynamics and we include a result which shows that for the Navier-Stokes equations of compressible flow, smoothing of initial discontinuities must occur for velocity and energy, but not for the density.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência global de soluções suaves para certos sistemas da forma $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$, sendo u e f vetores e D uma matriz diagonalizável, constante e positiva. Assumimos o dado inicial u_0 satisfazendo $||u_0 - \overline{u}||_{L^\infty(\mathbb{R})} < r$, onde $\overline{u}$ é um vetor fixado, f é definida numa bola de centro $\overline{u}$ e raio r e que $||u_0 - \overline{u}||_{L^2(\mathbb{R})}$ é suficientemente pequeno. Mostramos como nossos resultados se aplicam às equações da dinâmica dos gases e incluímos um resultado que mostra que para as equações de Navier-Stokes para fluxos compressíveis, suavização das descontinuidades iniciais ocorrem para a velocidade e energia, mas não para a densidade.

Introdução

Neste trabalho provamos a existência global de soluções de certos sistemas parabólicos

$$u_t + f(u)_x = Du_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

com dados iniciais $u(x,0) = u_0(x)$, baseado em [HS]. Aqui $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, f é um vetor função suave e D é uma matriz diagonalizável constante, com autovalores positivos. Assumimos que f é definida e é de classe C^3 numa bola de centro num ponto fixo $\overline{u}$ e raio r. Primeiramente obtemos a existência de uma solução local quando $u_0 - \overline{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$ com $||u_0 - \overline{u}||_{L^\infty(\mathbb{R})} < r$. Em seguida estendemos estas soluções globalmente com a hipótese de que existe um par de entropia-fluxo de entropia apropriado para o sistema (conforme definido no capítulo 2) e que $u_0 - \overline{u} \in L^2(\mathbb{R})$ com $||u_0 - \overline{u}||_{L^2(\mathbb{R})}$ suficientemente pequeno. Estes teoremas de existência são apresentados no capítulo 2.

No capítulo 3 aplicaremos nossos resultados às equações da dinâmica dos gases, isto é, às leis de conservação de massa, momento e energia com o termo de difusão Du_{xx} incluído. Construímos explicitamente o par de entropia-fluxo de entropia para as formulações mais simples destas equações e provamos um resultado geral que mostra de que maneira a entropia pode se estender sobre as formulações equivalentes. Deste modo estabelecemos a existência global de soluções suaves das equações na dinâmica dos gases (com termos de difusão adicionados como acima) na formulação de entropia, em coordenadas Lagrangeanas ou Eulerianas.

Finalmente no capítulo 4, apresentamos um resultado relativo à suavidade para descontinuidades iniciais para as mesmas equações de dinâmica dos gases nos quais termos mais realísticos de difusão são incluídos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conteúdos preliminares (definições, Lemas, Teoremas) necessários para o desenvolvimento da dissertação.

Iniciamos apresentando um resultado de [LSU] que usaremos na demonstração do Teorema 2.1.

Sejam Ω um aberto e $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Dizemos que uma função $u(x)$ definida em $\overline{\Omega}$ satisfaz a condição de Hölder em x com expoente α, $\alpha \in (0, 1)$, se $u(x)$ é limitada e existe uma constante C tal que

$$< u >_{\Omega}^{\alpha} = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x - x'| < \rho_0}} \left\{ \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} \right\} \leq C,$$

sendo $\rho_0 > 0$ uma constante.

Seja $l > 0$ um número não inteiro.

Definimos $\mathcal{H}^l(\overline{\Omega})$ como sendo o espaço de Banach cujos elementos são funções contínuas $u(x)$ em $\overline{\Omega}$ com derivadas contínuas até a ordem $[l]$, (onde $[l]$ é o maior inteiro menor que l) e

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = < u >_{\Omega}^{l} + \sum_{j=0}^{[l]} < u >_{\Omega}^{j} < \infty,$$

sendo

$< u >_{\Omega}^{0} = |u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u|;$

$< u >^j_\Omega = \sum_j |D^j_x u|^{(0)}_\Omega;$

$< u >^{(l)}_\Omega = \sum_{([l])} < D^{[l]}_x u >^{(l-[l])}_\Omega;$

$< u >^\alpha_\Omega = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x-x'| < \rho_0}} \left\{ \frac{|u(x) - u(x')|}{|x-x'|^\alpha} \right\}, \qquad \text{com } \alpha \in (0,1).$

Assim

$$\begin{aligned} |u|^l_\Omega &= \sum_{[l]} \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x-x'| < \rho_0}} \left\{ \frac{|D^{[l]}_x u(x) - D^{[l]}_x u(x')|}{|x-x'|^{l-[l]}} \right\} + \max_\Omega |u(x)| \\ &+ \sum_{j=1}^{[l]} (\sum_j \max_\Omega |D^j_x u(x)|). \end{aligned}$$

Definimos $\mathcal{H}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q_T})$ como sendo o espaço de Banach das funções $u(x,t)$ que são contínuas em $\overline{Q_T}$ juntamente com todas as suas derivadas da forma $D^r_t D^s_x$ para $2r + s < l$ e norma finita

$$|u|^l_{Q_T} = < u >^{(l)}_{Q_T} + \sum_{j=0}^{[l]} < u >^j_{Q_T} < \infty$$

sendo

$< u >^0_{Q_T} \equiv |u|^{(0)}_{Q_T} = \max_{Q_T} |u|;$

$< u >^j_{Q_T} = \sum_{2r+s=j} |D^r_t D^s_x u|^0_{Q_T};$

$< u >^{(l)}_{Q_T} = < u >^{(l)}_{x,Q_T} + < u >^{(\frac{l}{2})}_{t,Q_T};$

$< u >^{(l)}_{x,Q_T} = \sum_{2r+s=[l]} |D^r_t D^s_x u|^{(l-[l])}_{x,Q_T};$

$< u >^{(\frac{l}{2})}_{t,Q_T} = \sum_{0<l-2r-s<2} |D^r_t D^s_x u|^{(\frac{l-2r-s}{2})}_{t,Q_T};$

$< u >^{(\alpha)}_{x,Q_T} = \sup_{\substack{(x,t),(x',t) \in \overline{Q_T} \\ |x-x'| < \rho_0}} \left\{ \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha} \right\}, \qquad 0 < \alpha < 1;$

$< u >^{(\alpha)}_{t,Q_T} = \sup_{\substack{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T} \\ |t-t'| < \rho_0}} \left\{ \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha} \right\}, \qquad 0 < \alpha < 1.$

Assim

$$
\begin{aligned}
|u|^l_{Q_T} &= \sum_{2r+s=[l]} \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in\overline{Q_T}\\ |x-x'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|D^r_t D^s_x u(x,t) - D^r_t D^s_x u(x',t)|}{|x-x'|^{(l-[l])}} \right\} \\
&\quad + \sum_{0<l-2r-s<2} \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in\overline{Q_T}\\ |t-t'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|D^r_t D^s_x u(x,t) - D^r_t D^s_x u(x,t')|}{|t-t'|^{(\frac{l-2r-s}{2})}} \right\} \\
&\quad + \max_{Q_T}|u| + \sum_{j=1}^{[l]} \Big(\sum_{(2r+s=j)} \max_{Q_T} |D^r_t D^s_x u| \Big).
\end{aligned}
$$

Indicamos por $L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ o operador diferencial linear parabólico com coeficientes reais

$$
L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u.
$$

Assumimos que este operador é uniformemente parabólico, isto é, no domínio onde os problemas são resolvidos a desigualdade

$$
\nu\xi^2 \leq a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2, \quad (x,t)\in\overline{Q_T}
$$

(com ν,μ fixados) é satisfeita para quaisquer reais ξ_1,... ξ_n.

Assumimos que os coeficientes do operador acima estão definidos na faixa $D^{(T)}_{n+1} = E_n \times (0,T)$ (E_n é o espaço euclideano n-dimensional). Neste domínio, consideremos o Problema de Cauchy

$$
\begin{cases} L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})u(x,t) = g(x,t) \\ \quad u|_{t=t_0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{1.1}
$$

Introduzimos a notação
$u^{(k)}(x) = \dfrac{\partial^{(k)}u(x,t)}{\partial t^k}|_{t=t_0}$,
$A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - a(x,t)u.$
Desta forma as funções $u^{(k)}(x)$ $(k=0,1)$ são determinadas da seguinte maneira: $u^{(0)}(x)=\varphi(x)$, $u^{(1)}(x) = A(x,t_0,\frac{\partial}{\partial x})\varphi(x) + g(x,t_0)$, enquanto o restante das

funções são encontradas da relação recursiva

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(x) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} A(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) u(x,t) + \frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}|_{t=t_0} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ \\ j \end{array} \right) A^{(j)}(x,t_0,\frac{\partial}{\partial x}) u^{(k-j)}(x) + g^{(k)}(x), \end{aligned}$$

onde $g^k(x) = \dfrac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}|_{t=t_0}$ e $A^{(j)}(x,t,\partial x)$ é o operador resultante do operador A derivando os coeficientes j vezes em relação a t.

Teorema 1.1 *Suponhamos $l > 0$ um número não inteiro e os coeficientes do operador L (acima definido) de classe $\mathcal{H}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$. Então para qualquer $g \in \mathcal{H}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$, $\varphi \in \mathcal{H}^{(l+2)}(\overline{E_n})$ o problema (1.1) tem uma única solução u de classe $\mathcal{H}^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$. Ela satisfaz a desigualdade*

$$|u|_{D_{n+1}^T}^{l+2} \leq C(|g|_{D_{n+1}^T}^{l} + |\varphi|_{E_n}^{l+2})$$

com a constante C não dependendo de g e φ.

Demonstração: Ver [LSU], pag.320.

Em seguida enunciaremos alguns teoremas e definições que serão usados no decorrer do trabalho:

Teorema 1.2 *(Teorema do Ponto Fixo de Banach)*
Seja R um subconjunto fechado do espaço métrico completo (X,d). Se a aplicação $A : R \to R$ é uma contração, então A possui um, e somente um, ponto fixo em R.

Demonstração: Ver [O], pag.28.

Definição 1.1 *Dizemos que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente equicontínuo se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|x-y| < \delta$ implica*

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon \qquad para \quad x,y \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1,2,...$$

Teorema 1.3 *(Teorema de Arzela-Àscoli)*

Suponhamos que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é uma seqüência de funções contínuas a valores reais definidas em* $\mathbb{R}^n$*, tal que*

$$|f_k(x)| \leq M \qquad\qquad (k \in \mathbb{N},\ \ x \in \mathbb{R}^n)$$

para alguma constante M *e que* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é uniformemente equicontínuo. Então existe uma subseqüência* $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *e uma função contínua* f *tal que* $f_{k_j} \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração: Ver [E], pag.635.

Lema 1.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *um aberto convexo e limitado. Se a seqüência de aplicações diferenciáveis* $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *converge num ponto* $c \in \Omega$ *e a seqüência das derivadas* $f_k{}' : \Omega \to L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$*, converge uniformemente a uma aplicação* $g : \Omega \to L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ *então* (f_k) *converge uniformemente em* Ω *para uma aplicação* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, a qual é diferenciável, com* $f' = g$*.*

Demonstração: Ver [L], pag.269.

Definição 1.2 *A seqüência* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *em* $L^p(\Omega)$*, com* $1 \leq p < \infty$*, converge fracamente a* $f \in L^p(\Omega)$*, e escreve-se*

$$f_k \rightharpoonup f \qquad \text{em} \qquad L^p(\Omega)$$

se

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g\, dx = \int_\Omega f g\, dx$$

para cada $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*.*

Teorema 1.4 *(Teorema de Compacidade fraca em* L^p *)*

Suponhamos $1 < p < \infty$*. Seja* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$ *satisfazendo*

$$\sup_k \|f_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Então existe uma subseqüência $\{f_{kj}\}_{j=1}^{\infty}$ *e uma função* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$f_{kj} \rightharpoonup f \qquad \text{em} \qquad L^p(\Omega).$$

Demonstração: Ver [EG], pag.57.

Teorema 1.5 *Se* $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *então* $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$supp(u * \phi) \subset supp u + supp \phi.$$

Para qualquer multi-índice α *temos*

$$\partial^\alpha (u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi).$$

Demonstração: Ver [H], pag.88.

Definição 1.3 *:*

i) Definimos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & se \quad |x| < 1 \\ 0 & se \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

sendo a constante C *escolhida de tal forma que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$

ii) Para cada $\epsilon > 0$, *seja*

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Chamamos a função η *de mollifier. As funções* η_ϵ *são* C^∞ *e satisfazem*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1, \qquad supp(\eta_\epsilon) \subset B_\epsilon(0).$$

Definição 1.4 *Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável, definimos*

$$f_\epsilon := \eta_\epsilon * f \qquad em \;\; \Omega_\epsilon.$$

Isto é,

$$f_\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x - y) f(y) \, dy = \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) f(x - y) \, dy$$

para $x \in \Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$

Teorema 1.6 *(Propriedades dos Mollifiers)*

i) $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

ii) $f_\epsilon \to f$ *q.t.p quando* $\epsilon \to 0$.

iii) Se $f \in C(\Omega)$ *então* $f_\epsilon \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω.

iv) Se $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ *então* $f_\epsilon \to f$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [E], pag.630.

Teorema 1.7 *(Desigualdade de Minkowski para integrais em espaços* L^p*)*
Sejam $1 \leq p < \infty$ *e* $F(x,y)$ *uma função mensurável no espaço produto de medida* σ*-finita* $X \times Y$. *Então*

$$\left(\int_Y \left(\int_X |F(x,y)|\,dx\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |F(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} dx,$$

sendo dx *e* dy *medidas em* X *e* Y, *respectivamente.*

Demonstração: Ver [S], pag.271.

Definição 1.5 *Sejam* $a > 0$ *e* $b > 0$. *Definimos a função beta por*

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Definição 1.6 *Uma função* $f \in L^1(\Omega)$ *tem variação limitada em* Ω *(ou* $f \in BV(\Omega)$*) se*

$$\sup\left\{\int_\Omega f div\varphi\,dx \quad tal \quad que \quad \varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^n), |\varphi(x)| \leq 1\right\} < \infty.$$

Chamamos o espaço de tais funções de $BV(\Omega)$.

Capítulo 2

Existência de Soluções Globais

Nosso objetivo neste capítulo é provar a existência de soluções $u \in \mathbb{R}^n$ para o problema

$$u_t + f(u)_x = Du_{xx} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2.2}$$

sob restrições apropriadas para u_0, f e D.

Primeiro obtemos um resultado de existência local para o caso em que D é diagonal, denotada por $D = (d_1, d_2, ..., d_n)$, $d_i > 0$, $1 \leq i \leq n$.

Seja $K(x,t)$ a solução fundamental associada com o operador $\dfrac{\partial}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, isto é, $K(x,t)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ cuja j-ésima componente é $K_j(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi d_j t}} e^{-\frac{x^2}{4d_j t}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Observe que a solução do problema $(2.1) - (2.2)$ satisfaz a equação integral $u(t) = K(t) * u_0 - \displaystyle\int_0^t K_x(t-s) * f(u(s))ds$, onde * denota a convolução no espaço dada nas componentes. Para isso, consideremos o problema $(2.1) -$ (2.2) da seguinte forma:

$$u_t - Du_{xx} = -f(u)_x = g$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Teremos (usando a solução do problema não homogêneo que envolve a equação do calor) cada componente da solução fundamental de (2.1) - (2.2), para $x \in \mathbb{R}$, da forma:

$$\begin{aligned} u_j(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} K_j(x-y,t)u_{0j}(y)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K_j(x-y,t-s)(-f_j(u(y,s))_x)\, dyds \\ &= K_j(t) * u_{0j}(x) - \int_0^t K_{jx}(t-s) * f_j(u(s))(x)\, ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$u(x,t) = K(t) * u_0(x) - \int_0^t K_x(t-s) * f(u(s))(x)\, ds.$$

Observemos que

$$\begin{cases} \|K(.,t)\|_1 = 1 \\ \\ \left\| \dfrac{\partial^\alpha K(.,t)}{\partial x^\alpha} \right\|_1 \leq \dfrac{C(\alpha)}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \qquad\qquad para \;\; \alpha = 1, 2, \ldots \;\; . \end{cases} \tag{2.3}$$

Assumimos que f é definida e é de classe C^3 na bola fechada $\overline{Br}(\overline{u})$ de raio r e centro num ponto $\overline{u}$, tal que $f(\overline{u}) = 0$.

Definimos o conjunto das funções G_T por

$$G_T = \{u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T]) : \|u(t) - \overline{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq r\}$$

e o operador L em G_T por

$$L(u)(t) = K(t) * u_0 - \int_0^t K_x(t-s) * f(u(s))\, ds, \qquad\qquad u \in G_T. \tag{2.4}$$

Nosso resultado de unicidade local segue da propriedade de L dada no seguinte lema:

Lema 2.1 *Assuma que* $u_0 - \overline{u} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *e que* $\|u_0 - \overline{u}\|_\infty = s' < r$. *Se* $T > 0$ *é suficientemente pequeno (dependendo de* s'*) então vale o seguinte:*

a) G_T *é invariante por* L.

b) L *é uma contração na topologia* L^∞ *em* G_T.

c) Existe uma constante C_0 dependendo somente de K e f tal que se $u \in G_T$ satisfaz

$$\|u(t)\|_2 \leq C_0 \|u_0\|_2, \qquad t \in [0,T] \tag{2.5}$$

então $L(u)(t)$ também satisfaz (2.5).

d) Existe uma constante C_1 dependendo somente de K e f tal que se $u \in G_T$ satisfaz

$$\|u_x(t)\|_p \leq \frac{C_1 \|u_0\|_p}{\sqrt{t}}, \qquad 0 < t \leq T \tag{2.6}$$

para $p = 2$ ou $p = \infty$ então $L(u)(t)$ também satisfaz (2.6).

e) Dado $t_0 \in (0,T)$ existe uma constante C_2 dependendo somente de K, f e t_0 tal que se $u \in G_T$ satisfaz (2.6) e

$$\|u_{xx}(t)\|_p \leq C_2 \frac{(\|u_0\|_p + \|u_0\|_p^2)}{\sqrt{t - t_0}}, \qquad t_0 < t \leq T \tag{2.7}$$

para $p = 2$ ou $p = \infty$ então $L(u)(t)$ também satisfaz (2.7).

f) Dado $t_1 \in (0,T)$ existe uma constante C_3 dependendo somente de K, f, t_0 e t_1 tal que se $u \in G_T$ satisfaz (2.6), (2.7) e

$$\|u_{xxx}(t)\|_2 \leq C_3 \frac{(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^3)}{\sqrt{t - t_1}}, \quad t_1 < t \leq T \tag{2.8}$$

então $L(u)(t)$ também satisfaz (2.8).

Demonstração: Sem perda de generalidade, tomemos $\overline{u} = 0$. Para facilitar a leitura, denotamos a matriz jacobiana de f por $f'(u)$, a derivada de grau dois de f por $f''(u)$ e a derivada de grau três de f por $f'''(u)$. Temos desta forma $|f'(u)| \leq M_1$, $|f''(u)| \leq M_2$ e $|f'''(u)| \leq M_3$ para algum $M_k > 0$, $k = 1, 2, 3$ (pois $f \in C^3(\overline{Br}(0))$).

a) Seja $u \in G_T$ então usando (2.4), a desigualdade do Valor Médio, (2.3) e o fato de $\|u_0\|_\infty = s'$, temos

$$|L(u)(t)| = \left| K(t) * u_0 - \int_0^t K_x(t-s) * f(u(s))\, ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}} |K(x-y,t)| \|u_0\|_\infty \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t-s)| |f(u(y,s))| \, dyds \\
&\leq s' \int_{\mathbb{R}} |K(x-y,t)| \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t-s)| M_1 |u(y,s)| \, dyds \\
&\leq s' + M_1 r \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t-s)| \, dyds \\
&\leq s' + M_1 r C(1) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \, ds \\
&\leq s' + Cr\sqrt{T}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\|L(u)(t)\|_\infty \leq r[\frac{s'}{r} + C\sqrt{T}] \leq r,$$

desde que $C\sqrt{T} \leq \dfrac{r-s'}{r}$, o que é possível para T suficientemente pequeno ($0 < T < \dfrac{1}{C^2}$, sendo $C = 2M_1C(1)$). Portanto $L(u)(t) \in G_T$.

b) Sejam u, $v \in G_T$. Usando a desigualdade do Valor Médio e (2.3), temos:

$$\begin{aligned}
|L(u)(t) - L(v)(t)| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t-s)| |f(u(y,s)) - f(v(y,s))| \, dyds \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t-s)| M_1 |u(y,s) - v(y,s))| \, dyds \\
&\leq M_1 \|u-v\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t-s)| \, dyds \\
&\leq M_1 \|u-v\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} C(1) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \, ds \\
&= C(1) M_1 \|u-v\|_\infty 2\sqrt{t} \\
&\leq C\sqrt{T} \|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|L(u)(t) - L(v)(t)\|_\infty \leq C\sqrt{T}\|u-v\|_\infty.$$

Portanto L é uma contração se $0 < C\sqrt{T} < 1$, ou seja, $0 < T < \dfrac{1}{C^2}$, sendo $C = 2M_1C(1)$.

c) Seja $u \in G_T$ satisfazendo (2.5). Usando a desigualdade do Valor

Médio, uma desigualdade de Hölder e (2.3), temos:

$$
\begin{aligned}
\|L(u)(t)\|_2 \;&\leq\; \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}|K(x-y,t)|^{\frac{1}{2}}|K(x-y,t)|^{\frac{1}{2}}|u_0(y)|\,dy\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \quad + \\
&\quad + \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|K_x(x-y,t-s)|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}M_1|u(y,s)|\,dyds\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}}|K(x-y,t)|\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}|K(x-y,t)||u_0(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}}|K_x(x-y,t-s)|dy\right)^{\frac{1}{2}}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.\left(\int_{\mathbb{R}}|K_x(x-y,t-s)|M_1^2|u(y,s)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} ds\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|K(x-y,t)||u_0(y)|^2\,dy\right) dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_0^t\frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{4}}}\left(\int_{\mathbb{R}}|K_x(x-y,t-s)|M_1^2|u(y,s)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} ds\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema de Fubini, o Teorema de Minkowski para Integrais e (2.3) vem

$$
\begin{aligned}
||L(u)(t)||_2 \;&\leq\; \left\{\int_{\mathbb{R}}|u_0(y)|^2\left(\int_{\mathbb{R}}|K(x-y,t)|dx\right) dy\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \int_0^t\left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{M_1C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{4}}}\left(\int_{\mathbb{R}}|K_x(x-y,t-s)||u(y,s)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \left\{\int_{\mathbb{R}}|u_0(y)|^2\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \int_0^t\frac{M_1C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{4}}}\left\{\int_{\mathbb{R}}|u(y,s)|^2\left(\int_{\mathbb{R}}|K_x(x-y,t-s)|\,dx\right) dy\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \|u_0\|_2 + M_1C(1)\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\|u(s)\|_2\,ds \\
&\leq \|u_0\|_2 + M_1C(1)C_0\|u_0\|_2 2\sqrt{t} \\
&\leq (1+M_1C(1)C_0 2\sqrt{T})\|u_0\|_2 \\
&\leq C_0\|u_0\|_2
\end{aligned}
$$

se $C_0 \geq \dfrac{1}{1-2M_1C(1)\sqrt{T}}$ e T é suficientemente pequeno $(0 < T < \dfrac{1}{[2M_1C(1)]^2})$.

d) Seja $u \in G_T$ satisfazendo (2.6). Derivando (2.4) em relação a x, obtemos:

(i) Para $p = 2$:

$$\|L(u)_x(t)\|_2 \leq \left\{\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} K_x(x-y,t)u_0(y)\,dy\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\int_{\mathbb{R}} \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} K_x(y,t-s)f(u(x-y,s))_x\,dyds\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Usando que $|f(u)_x| \leq |f'(u)||u_x| \leq M_1|u_x|$ e (2.3) vem

$$\leq \left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t)|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}|u_0(y)|\,dy\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} M_1|u_x(x-y,s)|\,dyds\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Agora usando uma desigualdade de Hölder e (2.3) teremos

$$\begin{aligned}
\|L(u)_x(t)\|_2 \;\leq\; & \left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} (|K_x(x-y,t)|^{\frac{1}{2}})^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t)||u_0(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
& +M_1\left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} (|K_x(y,t-s)|^{\frac{1}{2}})^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\int_{\mathbb{R}} (|K_x(y,t-s)|^{\frac{1}{2}})^2|u_x(x-y,s)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} ds\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
\leq\; & \left(\frac{C(1)}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t)||u_0(y)|^2\,dydx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
& +M_1\left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t \left(\frac{C(1)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)||u_x(x-y,s)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} ds\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini, o Teorema de Minkowski para Integrais e (2.3) vem

$$
\begin{aligned}
||L(u)_x(t)||_2 \leq & \left(\frac{C(1)}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\rm I\!R} |u_0(y)|^2 \int_{\rm I\!R} |K_x(x-y,t)|\, dxdy\right\}^{\frac{1}{2}} \quad + \\
& + \; M_1 \int_0^t \left\{\int_{\rm I\!R} \left[\left(\frac{C(1)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\int_{\rm I\!R} |K_x(y,t-s)||u_x(x-y,s)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
\leq \; & \frac{C(1)}{\sqrt{t}} \left\{\int_{\rm I\!R} |u_0(y)|^2\, dy\right\}^{\frac{1}{2}} \\
& + \int_0^t \frac{M_1 C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \left\{\int_{\rm I\!R} |K_x(y,t-s)| \left(\int_{\rm I\!R} |u_x(x-y,s)|^2\, dx\right) dy\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
\leq \; & \frac{C(1)}{\sqrt{t}} \|u_0\|_2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^2({\rm I\!R})} \frac{M_1 C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \left\{\int_{\rm I\!R} |K_x(y,t-s)|\, dy\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
\leq \; & \frac{C(1)}{\sqrt{t}} \|u_0\|_2 + M_1 C(1)^{\frac{1}{2}} \int_0^t C_1 \frac{\|u_0\|_2}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\, ds \\
= \; & \frac{C(1)}{\sqrt{t}} \|u_0\|_2 + M_1 C_1 C(1) \|u_0\|_2 \int_0^t s^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1-\frac{s}{t})^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
= \; & \frac{C(1)}{\sqrt{t}} \|u_0\|_2 + M_1 C_1 C(1) \|u_0\|_2 \int_0^t s^{\frac{1}{2}-1} (1-s)^{\frac{1}{2}-1}\, ds \\
= \; & \frac{C(1)}{\sqrt{t}} \|u_0\|_2 + M_1 C_1 C(1) \|u_0\|_2 B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\
\leq \; & C \frac{\|u_0\|_2}{\sqrt{t}} \{1 + C_1 \sqrt{T}\} \\
\leq \; & C_1 \frac{\|u_0\|_2}{\sqrt{t}}
\end{aligned}
$$

se C_1 é grande e T é pequeno (de modo que $C_1 \geq \dfrac{C}{1 - C\sqrt{T}}$ e $T < \dfrac{1}{C^2}$ sendo $C = \max\{C(1), M_1 C(1) B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$) e B é a função beta.

(ii) Para $p = \infty$

$$
\begin{aligned}
|L(u)_x(t)| \; & \leq \; \int_{\rm I\!R} |K_x(x-y,t)||u_0(y)|\, dy \\
& + \int_0^t \int_{\rm I\!R} |K_x(y,t-s)||f(u(x-y,s))_x|\, dyds.
\end{aligned}
$$

Usando que $|f(u)_x| = |f'(u)||u_x| \leq M_1 |u_x|$ e (2.3) vem

$$
\begin{aligned}
|L(u)_x(t)| &\leq \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y,t)|\, dy \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)| M_1 |u_x(x-y,s)|\, dyds \\
&\leq \|u_0\|_\infty \frac{C(1)}{\sqrt{t}} + M_1 \int_0^t \|u_x(s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)|\, dyds \\
&\leq \|u_0\|_\infty \frac{C(1)}{\sqrt{t}} + M_1 C_1 \|u_0\|_\infty C(1) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}\, ds \\
&= \|u_0\|_\infty \frac{C(1)}{\sqrt{t}} + M_1 C_1 \|u_0\|_\infty C(1) B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
&= \|u_0\|_\infty \frac{C(1)}{\sqrt{t}} + M_1 C_1 \|u_0\|_\infty C(1)\pi \\
&\leq C \frac{\|u_0\|_\infty}{\sqrt{t}} \{1 + C_1\sqrt{T}\} \\
&\leq C_1 \frac{\|u_0\|_\infty}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$\|L(u)_x(t)\|_\infty \leq C_1 \frac{\|u_0\|_\infty}{\sqrt{t}}$$

se C_1 é grande e T é pequeno (de modo que $C_1 \geq \dfrac{C}{1 - C\sqrt{T}}$ e $T < \dfrac{1}{C^2}$ sendo $C = \max\{C(1), M_1 C(1) B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$).

e) Seja $v = L(u)$. Então as propriedades de semi-grupo de K (ver [Lu] pag.179) implicam que, para $t > t_0$,

$$v(t) = K(t-t_0) * v(t_0) - \int_{t_0}^t K_x(t-s) * f(u(s))\, ds.$$

(i) Para $p = 2$:

$$
\begin{aligned}
\|v_{xx}(t)\|_2 &\leq \left[\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} K_x(y,t-t_0) v_x(x-y,t_0)\, dy \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left[\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)| |f(u(x-y,s))_{xx}|\, dyds \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= A + B, \tag{2.9}$$

respectivamente. Vamos estimar separadamente A e B. Usando uma desigualdade de Hölder e (2.3) em A, obtemos:

$$A \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-t_0)|\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-t_0)| |v_x(x-y, t_0)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-t_0)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-t_0)| |v_x(x-y, t_0)|^2\, dy dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Usando o Teorema de Fubini, novamente (2.3) e (2.6) temos

$$\begin{aligned}
A &\leq \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-t_0)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-t_0)| \int_{\mathbb{R}} |v_x(x-y, t_0)|^2\, dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-t_0)^{\frac{1}{4}}} \|v_x(t_0)\|_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-t_0)|\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C(1)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}} \|v_x(t_0)\|_2 \\
&\leq \frac{C(1) C_1 \|u_0\|_2}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$A \leq \frac{C(1) C_1 \|u_0\|_2}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando uma desigualdade de Hölder e (2.3) em B obtemos

$$\begin{aligned}
B &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_0}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-s)|\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-s)| |f(u(x-y, s))_{xx}|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y, t-s)| |f(u(x-y, s))_{xx}|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Minkowski para Integrais, em seguida o Teorema de Fubini e novamente (2.3), vem

$$
\begin{aligned}
B &\leq C(1)^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)||f(u(x-y,s))_{xx}|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= C(1)^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \\
&\qquad \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u(x-y,s))_{xx}|^2\, dx \right) dy \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= C(1)^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \|f(u(s))_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)|\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C(1) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|f(u(s))_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}\, ds.
\end{aligned}
$$

Agora

$$
|f(u(x,s))_{xx}| \leq |f''(u(x,s))||u_x(x,s)|^2 + |f(u(x,s))||u_{xx}(x,s)|.
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\|f(u(s))_{xx}\|_2 &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f''(u(x,s))|^2 |u_x(x,s)|^2 |u_x(x,s)|^2\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f'(u(x,s))|^2 |u_{xx}(x,s)|^2\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M_2 \|u_x(s)\|_\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + M_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_{xx}(x,s)|^2\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M\{\|u_x(s)\|_\infty \|u_x(s)\|_2 + \|u_{xx}(s)\|_2\}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.6) e (2.7) e que $0 < t_0 \leq s \leq t$ temos

$$
\begin{aligned}
\|f(u(s))_{xx}\|_2 &\leq M \left\{ \frac{(C_1)^2 \|u_0\|_\infty \|u_0\|_2}{s} + \frac{C_2(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
&\leq M \left\{ \frac{(C_1)^2 \|u_0\|_\infty \|u_0\|_2}{t_0} + \frac{C_2(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Substituindo as estimativas de A, B e $\|f(u(s))_{xx}\|_2$ em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_{xx}(t)\|_2 &\leq \frac{C(1)C_1\|u_0\|_2}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}} + C(1)\int_{t_0}^{t}\frac{M}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\left\{(C_1)^2\frac{\|u_0\|_\infty\|u_0\|_2}{t_0}\right.\\
&+ \left.\frac{C_2(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}}\right\} ds.
\end{aligned}$$

Tomando
$C = \max\left\{\frac{C(1)C_1}{\sqrt{t_0}}, \frac{C(1)M(C_1)^2\|u_0\|_\infty}{t_0}, MC(1)\right\}$ e $N = \|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2$, vem

$$\begin{aligned}
\|v_{xx}(t)\|_2 &\leq \frac{CN}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}} + \int_{t_0}^{t} CN\left\{\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_2}{(t-s)^{\frac{1}{2}}(s-t_0)^{\frac{1}{2}}}\right\} ds\\
&= \frac{CN}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}} + CN2(t-t_0)^{\frac{1}{2}} + CC_2N\pi\\
&\leq \frac{N}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}[C + CC_2\pi(t-t_0)^{\frac{1}{2}}]\\
&\leq \frac{N}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}[C + CC_2\pi\sqrt{T}]\\
&\leq \frac{NC_2}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

para T pequeno tal que $(1-\pi\sqrt{T}C) > 0$ e assim $C_2 \geq \dfrac{C}{(1-\pi\sqrt{T}C)}$ grande (sendo $M = \max\{M_1, M_2\}$ e $C = \max\left\{\frac{C(1)C_1}{\sqrt{t_0}}, \frac{C(1)M(C_1)^2\|u_0\|_\infty}{t_0}, MC(1)\right\}$).

Usamos acima que $\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}(s-t_0)^{\frac{1}{2}}}\,ds = \pi$ que é obtida fazendo mudança de variáveis.

(i) Para $p = \infty$:

$$|v_{xx}(t)| \leq |K_x(t-t_0) * v_x(t_0)| + \left|\int_{t_0}^{t} K_x(t-s) * f(u(s))_{xx}\,ds\right| = A + B,$$

respectivamente. Vamos estimar separadamente A e B. Usando (2.6) e (2.3) temos:

$$\begin{aligned}
A &\leq \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y, t-t_0)|v_x(y, t_0)|\,dy\\
&\leq ||v_x(t_0)||_\infty \int_{\mathbb{R}} |K_x(x-y, t-t_0)\,dy\\
&\leq C_1\frac{||u_0||_\infty}{\sqrt{t_0}}\frac{C(1)}{\sqrt{t-t_0}}.
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} B &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{\rm I\!R} |K_x(x-y,t-s)\{|f''(u(y,s))||u_x(y,s)|^2 \\ &\quad +|f'(u(y,s))||u_{xx}(y,s)|\}\,dyds \\ &\leq M_2\int_{t_0}^{t} ||u_x(s)||_\infty^2 \int_{\rm I\!R} |K_x(x-y,t-s)|\,dyds \\ &\quad +M_1\int_{t_0}^{t} |||u_{xx}(s)||_\infty \int_{\rm I\!R} K_x(x-y,t-s)\,dyds. \end{aligned}$$

Usando (2.6) e (2.7) para u e (2.3), temos:

$$\begin{aligned} B &\leq M_2C_1^2||u_0||_\infty^2 C(1)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\,ds \\ &\quad +M_1C_2(||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2)C(1)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{t-s}}\,ds \\ &\leq \frac{M_2C_1^2C(1)||u_0||_\infty^2\sqrt{t-t_0}}{t_0}+M_1C_2C(1)\pi(||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2). \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas em A e B:

$$\begin{aligned} |v_{xx}(t)| &\leq \frac{C_1||u_0||_\infty C(1)}{\sqrt{t_0}\sqrt{t-t_0}}+\frac{M_2C_1^2C(1)||u_0||_\infty^2\sqrt{t-t_0}}{t_0} \\ &\quad +M_1C_2C(1)\pi(||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2). \end{aligned}$$

Tomando $C=\max\left\{\frac{C_1C(1)}{\sqrt{t_0}},\frac{M_2C_1^2C(1)}{t_0},M_1C(1)\pi\right\}$, vem:

$$\begin{aligned} |v_{xx}(t)| &\leq C\left\{\frac{||u_0||_\infty}{\sqrt{t-t_0}}+||u_0||_\infty^2\sqrt{t-t_0}+C_2(||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2)\right\} \\ &\leq C\frac{||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2}{\sqrt{t-t_0}}\{1+T+C_2\sqrt{T}\}. \end{aligned}$$

Logo

$$||v_{xx}(t)||_\infty \leq C_2\frac{||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2}{\sqrt{t-t_0}}$$

se $C_2\geq\dfrac{C+CT}{1-C\sqrt{T}}$ e $T<\dfrac{1}{C^2}$.

f) Seja $v=L(u)$. Então as propriedades de semi-grupo de K implicam que para $t>t_1$

$$v(x,t)=K(t-t_1)*v(t_1)(x)-\int_{t_1}^{t}K_x(t-s)*f(u(s))(x)\,ds$$

e assim

$$v_{xxx}(x,t) = K_x(t-t_1) * v_{xx}(t_1)(x) - \int_{t_1}^{t} K_x(t-s) * f(u(s))_{xxx}(x)\, ds,$$

$$\begin{aligned}
\|v_{xxx}(t)\|_2 &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} K_x(y,t-t_1) v_{xx}(x-y,t_1)\, dy \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{t_1}^{t} \int_{\mathbb{R}} K_x(y,t-s) f(u(x-y,s))_{xxx}\, dy ds \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= A + B,
\end{aligned}$$

respectivamente. Vamos estimar separadamente A e B. Usando uma desigualdade de Hölder e (2.3) em A, obtemos:

$$\begin{aligned}
A &\le \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-t_1)|\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-t_1)| |v_{xx}(x-y,t_1)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-t_1)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-t_1)| |v_{xx}(x-y,t_1)|^2\, dy dx \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini e em seguida (2.7) para $v = L(u)$, vem

$$\begin{aligned}
A &\le \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-t_1)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-t_1)| \int_{\mathbb{R}} |v_{xx}(x-y,t_1)|^2\, dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{C(1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}}} \|v_{xx}(t_1)\|_2 \\
&\le \frac{C(1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}}} C_2 \frac{(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{(t_1-t_0)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$A \le \frac{C(1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}}} C_2 \frac{(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{(t_1-t_0)^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando novamente uma desigualdade de Hölder e (2.3) temos

$$\begin{aligned} B &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}} K_x(y,t-s)\,dy \right)^{\frac{1}{2}} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)||f(u(x-y,s))_{xxx}|^2\,dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_1}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)||f(u(x-y,s))_{xxx}|^2\,dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Minkowski para Integrais e em seguida o Teorema de Fubini e (2.3) vem

$$\begin{aligned} B &\leq C(1)^{\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)| \right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. |f(u(x-y,s))_{xxx}|^2\,dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \int_{t_1}^{t} \frac{C(1)^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)| \int_{\mathbb{R}} |f(u(x-y,s))_{xxx}|^2\,dxdy \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\ &= C(1)^{\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} \|f(u(s))_{xxx}\|_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |K_x(y,t-s)|\,dy \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq C(1) \int_{t_1}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|f(u(s))_{xxx}\|_2\,ds. \end{aligned}$$

Agora usando o fato de $f \in C^3(\overline{Br}(0))$ temos

$$\begin{aligned} \|f(u(s))_{xxx}\|_2 &\leq M_3 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2 |u_x(x,s)|^2 |u_x(x,s)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +3M_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2 |u_{xx}(x,s)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +M_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}(x,s)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_3 \|u_x(s)\|_\infty^4 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +3M_2 \|u_x(s)\|_\infty^2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_{xx}(x,s)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} + M_1 \|u_{xxx}(s)\|_2 \\ &\leq M\{\|u_x(s)\|_\infty^4 \|u_x(s)\|_2 + \|u_x(s)\|_\infty^2 \|u_{xx}(s)\|_2 + \|u_{xxx}(s)\|_2\} \end{aligned}$$

sendo $M = \max\{M_1, 3M_2, M_3\}$. Agora usando (2.6), (2.7) e (2.8) vem

$$
\begin{aligned}
\|f(u(s))_{xxx}\|_2 \;\; \leq \;\; & M\left\{\frac{C_1^4\|u_0\|_\infty^4}{s^2}\frac{C_1\|u_0\|_2}{\sqrt{s}} + \frac{C_1^2\|u_0\|_\infty^2}{s}C_2\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)}{\sqrt{s-t_0}}\right. \\
& \left. +C_3\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)}{\sqrt{s-t_1}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Substituindo esta última estimativa em B

$$
\begin{aligned}
B \;\; \leq \;\; & MC(1)\left\{C_1^5\|u_0\|_\infty^4\|u_0\|_2\int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{s^2s^{\frac{1}{2}}}\,ds\right. \\
& +C_1^2C_2\|u_0\|_\infty^2(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}s}\,ds \\
& \left. +\,C_3(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s-t_1)^{\frac{1}{2}}}\,ds\right\}.
\end{aligned}
$$

Calculando separadamente as integrais acima, $\displaystyle\int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s-t_1)^{\frac{1}{2}}}\,ds = \pi$ (conforme vimos em (e) trocando t_0 por t_1). Do fato de $t_0 < t_1$ e $t_1 < s < t$ temos

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}s}\,ds \;\; & \leq \;\; \int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}t_1}\,ds \\
& \leq \;\; \frac{1}{t_1}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s-t_0)^{\frac{1}{2}}}\,ds \\
& = \;\; \frac{\pi}{t_1}.
\end{aligned}
$$

Também

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(s)^{\frac{5}{2}}}\,ds \;\; & \leq \;\; \int_{t_1}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(t_1)^{\frac{5}{2}}}\,ds \\
& = \;\; 2\frac{\sqrt{t-t_1}}{(t_1)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
B \;\; \leq \;\; & MC(1)\left\{C_1^5\|u_0\|_\infty^4\|u_0\|_2\frac{2\sqrt{t-t_1}}{t_1^{\frac{5}{2}}} + C_1^2C_2\|u_0\|_\infty^2(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)\frac{\pi}{t_1}\right. \\
+ \;\; & \left. C_3(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)\pi\right\}.
\end{aligned}
$$

Substituindo em A e B:

$$\begin{aligned}\|v_{xxx}(t)\|_2 &\leq \frac{C(1)}{\sqrt{t-t_1}}C_2\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)}{\sqrt{t_1-t_0}}+MC(1)\Bigg\{C_1^5\|u_0\|_\infty^4\|u_0\|_2\frac{2\sqrt{t-t_1}}{t_1^{\frac{5}{2}}}+\\ &+C_1^2C_2\|u_0\|_\infty^2(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)\frac{\pi}{t_1}+C_3(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)\pi\Bigg\}.\end{aligned}$$

Tomando $C=\max\left\{\frac{C(1)C_2}{\sqrt{t_1-t_0}},\frac{2MC(1)C_1^5\|u_0\|_\infty^4}{t_1^{\frac{5}{2}}},\frac{MC(1)C_1^2C_2\pi\|u_0\|_\infty^2}{t_1},MC(1)\pi\right\}$ segue que

$$\begin{aligned}\|v_{xxx}(t)\|_2 &\leq C\left\{\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)}{\sqrt{t-t_1}}+\|u_0\|_2\sqrt{t-t_1}\right.\\ &\left.+(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2)+C_3(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)\right\}\\ &\leq C\left\{\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)}{\sqrt{t-t_1}}+(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)\sqrt{t-t_1}\right.\\ &\left.+(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)+C_3(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)\right\}\\ &\leq \frac{[C+(C\sqrt{T}+C)\sqrt{t-t_1}+CC_3\sqrt{t-t_1}](\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)}{\sqrt{t-t_1}}.\end{aligned}$$

Para C_3 suficientemente grande ($C_3 \geq C\frac{[1+T+\sqrt{T}]}{1-\sqrt{T}}$) e T suficientemente pequeno ($T<\frac{1}{C^2}$), segue que

$$\|v_{xxx}(t)\|_2 \leq \frac{C_3}{\sqrt{t-t_1}}(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3).$$

Para concluir a demonstração, tomamos $T<E$, onde E é a menor das limitações encontradas para T de (a)-(f). ∎

Usando o Lema acima, podemos demonstrar nosso resultado de existência de solução local para o problema (2.1)-(2.2):

Teorema 2.1 *Assuma que* $u_0-\overline{u}\in L^\infty(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ *e* $\|u_0-\overline{u}\|_\infty = s' < r$. *Então existe uma única solução* u *de (2.1)-(2.2) definida na faixa* $\mathbb{R}\times[0,T]$ *onde* T *depende somente de* K, f *e* s'. *Além disso,* u_t, u_x *e* u_{xx} *são Hölder contínuas em* $0<t_0\leq t\leq T$; $u_t(t)$, $u_x(t)$, $u_{xx}(t)$, $u_{tx}(t)$ *e* $u_{xxx}(t)$ *estão em* $L^2(\mathbb{R})$ *para* $t\in(0,T)$; *e valem:*

$$\|u(t)-\overline{u}\|_2 \leq C_0\|u_0-\overline{u}\|_2, \tag{2.10}$$

e

$$\|u_x(t)\|_2 \leq C_1 \frac{\|u_0 - \overline{u}\|_2}{\sqrt{t}}. \tag{2.11}$$

Aqui C_0 *e* C_1 *são definidas como no Lema 2.1.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, tomemos $\overline{u} = 0$.
Sejam $u^0 \equiv 0$ e $u^n \equiv L(u^{n-1})$.

Como $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, logo $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Como $K \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))$ segue que $u^1 = K(t) * u_0 \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))$. Agora para

$$u^2 = K(t) * u_0 - \int_0^t K_x(t-s) * f(u^1(s))\, ds$$

onde $K(t)*u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$ e $\displaystyle\int_0^t K_x(t-s)*f(u^1(s))\, ds \in C^3(\mathbb{R}\times(0,T))$, temos a garantia de que $u^2 \in C^3(\mathbb{R} \times (0,T))$. Então por indução segue que $u^n = K(t) * u_0 - \displaystyle\int_0^t K_x(t-s) * f(u^{n-1}(s))\, ds \in C^3(\mathbb{R} \times (0,T))$.

Mostraremos agora, por indução, que as estimativas (2.5) a (2.8) valem para cada u^n: $u^0 \in G_T = \{u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T]) : \|u(t)\|_\infty \leq r\}$ e satisfaz as propriedades (2.5) a (2.8). Suponhamos que $u^{n-1} \in G_T$ e satisfaz (2.5) a (2.8) então, pelo Lema 2.1, $u^n = L(u^{n-1}) \in G_T$ e satisfaz (2.5) a (2.8). Portanto por indução segue que as estimativas valem para cada u^n.

Como $u^n(.,t) \in L^2(\mathbb{R})$ e $[(u^n)^2]_x$ é limitada, segue que $u^n(x,t) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Da mesma forma como $u^n_x(.,t) \in L^2(\mathbb{R})$ e $[(u^n_x)^2]_x$ é limitada, segue que $u^n_x(x,t) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ para cada $t > 0$ (veja [Sm], pag. 436).

Agora, pelo Lema 2.1 (a) e (b), temos que $L : G_T \to G_T$ é uma contração, onde G_T é um subconjunto fechado do espaço métrico completo $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, L tem um, e somente um, ponto fixo em G_T, ou seja, u^n converge a uma função $u \in G_T$, para algum tempo suficientemente pequeno T dependendo somente de K, f e s' (conforme demonstração de (a) e (b) do Lema 2.1).

Aplicaremos o Lema 2.1 (c) a (f) para deduzir as propriedades de regularidade de u na faixa $\mathbb{R} \times (t_2, T)$, onde $0 < t_0 < t_1 < t_2 < T$ e t_0 e t_1 são como no Lema 2.1.

Mostramos acima que as estimativas (2.5) a (2.8) valem para $u^n, \forall n$. Por (2.7) segue que:

$$\|u^n_{xx}(t)\|_2 \leq C_2 \frac{(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{\sqrt{t-t_0}} \leq C_2 \frac{(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{\sqrt{t_2-t_0}} = C^*$$

para cada $t \geq t_2$.

Mostraremos que u^n_x são Hölder contínuas em x para cada $t \geq t_2$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
|u^n_x(x_1,t) - u^n_x(x_2,t)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} u^n_{xx}(x,t)\,dx \right| \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} |u^n_{xx}(x,t)|\,dx \\
&\leq \left[\int_{x_1}^{x_2} |u^n_{xx}(x,t)|^2\,dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{x_1}^{x_2} dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u^n_{xx}(t)\|_2 (x_2-x_1)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C^*(x_2-x_1)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $u^n_{tx}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para $t \geq t_2$. Diferenciando

$$u^n_t - Du^n_{xx} = -f(u^{n-1})_x \tag{2.12}$$

em relação a x, obtemos

$$u^n_{tx} = Du^n_{xxx} - [(u^{n-1}_x)^T f''(u^{n-1}) u^{n-1}_x + f'(u^{n-1}) u^{n-1}_{xx}].$$

Assim, sendo $d = max\{d_j\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\|u^n_{tx}(t)\|_2 \leq \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |D|^2 |u^n_{xxx}(x,t)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f''(u^{n-1}(x,t))|^2 |u^{n-1}_x(x,t)|^4\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f'(u^{n-1}(x,t))|^2 |u^{n-1}_{xx}(x,t)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq d \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u^n_{xxx}(x,t)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} + M_2 \|u^{n-1}_x(t)\|_\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u^{n-1}_x(x,t)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + M_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u^{n-1}_{xx}(x,t)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C'\{\|u^n_{xxx}(t)\|_2 + \|u^{n-1}_x(t)\|_\infty \|u^{n-1}_x(t)\|_2 + \|u^{n-1}_{xx}(t)\|_2\}.
\end{aligned}$$

Por (2.6), (2.7) e (2.8) segue que

$$
\begin{aligned}
&\|u^n_{tx}(t)\|_2 \leq \\
&\leq C'\left\{C_3\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)}{\sqrt{t-t_1}}+C_1^2\frac{\|u_0\|_\infty\|u_0\|_2}{t}+C_2\frac{\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2}{\sqrt{t-t_0}}\right\} \\
&\leq \quad C'\left\{C_3\frac{(\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^3)}{\sqrt{t_2-t_1}}+C_1^2\frac{\|u_0\|_\infty\|u_0\|_2}{t_2}+C_2\frac{\|u_0\|_2+\|u_0\|_2^2}{\sqrt{t_2-t_0}}\right\} \\
&= \quad C.
\end{aligned}
$$

Portanto $u^n_{tx} \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $t \geq t_2$.

Para $t_2 \leq t' \leq t'' \leq T$, seja $f(y) = u^n_x(y,t'') - u^n_x(y,t')$. Seja $g(z) = \displaystyle\int_x^{x+z} f(y)\,dy$ então $g'(z) = f(x+z)$. Assim

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon} f(y)\,dy = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon} = g'(0) = f(x).
$$

Portanto $f(x) - \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int_x^{x+\epsilon} f(y)\,dy \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, ou seja, $f(x) - \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int_x^{x+\epsilon} f(y)\,dy = o(\epsilon)$. Daí $f(x) - \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int_x^{x+\epsilon} f(y)\,dy = O(\epsilon)$. Deste modo

$$
\begin{aligned}
&u^n_x(x,t'') - u^n_x(x,t') = \\
&= \quad \frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon} u^n_x(y,t'') - u^n_x(y,t')\,dy + O(\epsilon) \\
&= \quad \frac{1}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\int_x^{x+\epsilon} u^n_{tx}(y,t)\,dydt + O(\epsilon) \\
&\leq \quad \frac{1}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\left\{\left[\int_x^{x+\epsilon}|u^n_{tx}(y,t)|^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_x^{x+\epsilon} dy\right]^{\frac{1}{2}}\right\} dt + O(\epsilon) \\
&\leq \quad \frac{\sqrt{\epsilon}}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\|u^n_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\,dt + O(\epsilon) \\
&\leq \quad (C')^{-\frac{1}{2}}(t''-t')^{-\frac{1}{3}}\sup_{t_2\leq t\leq T}\|u^n_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\int_{t'}^{t''} dt + O(\epsilon) \\
&\leq \quad C''[(t''-t')^{-\frac{1}{3}}(t''-t') + (t''-t')^{\frac{2}{3}}] \\
&= \quad C^{**}(t''-t')^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

se $\epsilon = O(t''-t')^{\frac{2}{3}}$, ou seja, $\dfrac{\epsilon}{(t''-t')^{\frac{2}{3}}} \leq C'$ para algum C', $t''-t'$ próximo de zero, então $\epsilon \leq C'(t''-t')^{\frac{2}{3}}$. Logo u^n_x são Hölder contínuas em $t_2 \leq t \leq T$.

Agora, usando a Hölder continuidade em x e em t, temos

$$
\begin{aligned}
&|u_x^n(x_1,t') - u_x^n(x_2,t'')| \leq \\
&\quad \leq |u_x^n(x_1,t') - u_x^n(x_1,t'')| + |u_x^n(x_1,t'') - u_x^n(x_2,t'')| \\
&\quad \leq \; C'[(x_2-x_1)^{\frac{1}{2}} + (t''-t')^{\frac{1}{2}}(T)^{\frac{1}{6}}] \\
&\quad \leq \; C[(x_2-x_1)^2 + (t''-t')^2]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Além disso temos u_x^n uniformemente limitadas por (2.6) em $[t_2,T]$. Portanto as funções u_x^n são uniformemente Hölder contínuas em $\mathbb{R} \times [t_2,T]$.

Usaremos o Teorema 1.1 para mostrar que u_{xx}^n são uniformemente Hölder contínuas em $\mathbb{R} \times [t_2,T]$. Consideremos o sistema

$$
\begin{cases}
u_t^n - Du_{xx}^n = -f(u^{n-1})_x \\
u^n(x,t_2) = L(u^{n-1})(t_2).
\end{cases}
$$

Para $n=1$, sendo $u^0 = 0$

$$
\begin{cases}
u_t^1 - Du_{xx}^1 = -f(u^0)_x = -f(0)_x = 0 \\
\qquad u^1(x,t_2) = L(u^0)(t_2)
\end{cases}
$$

o sistema tem solução u^1 de classe $\mathcal{H}^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\mathbb{R}\times[t_2,T])$ com $l = \dfrac{1}{2}$ pelo Teorema 1.1. Isto segue pois $0 \in \mathcal{H}^{l,\frac{l}{2}}(\mathbb{R} \times [t_2,T])$ e $L(u^0)(t_2) \in \mathcal{H}^{l+2}(\mathbb{R})$. De fato, $L(u^0)(t_2) = K(t_2) * u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e mostraremos que a norma $|K(t_2) * u_0|_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}+2}$ é finita. Temos u_{0x} Hölder contínua com expoente $\dfrac{1}{2}$ o que segue do fato de u_x^n serem uniformemente Hölder contínuas com expoente $\dfrac{1}{2}$. Usando isto e (2.3) vem

$$
\begin{aligned}
&\frac{|[K(t_2) * u_0]_{xx}(x) - [K(t_2) * u_0]_{xx}(x')|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}} \leq \\
&\qquad \leq \; \int_{\mathbb{R}} |K_x(z,t_2)| \frac{|u_{0x}(x-z) - u_{0x}(x'-z)|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}}\, dz \\
&\qquad \leq \; C\frac{C(1)}{\sqrt{t_2}}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&|K(t_2)*u_0|_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}+2} = \\
&= \sum_{[\frac{1}{2}+2]} \sup_{\substack{x,x'\in\mathbb{R}\\ |x-x'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|D_x^{[\frac{1}{2}+2]}[K(t_2)*u_0](x) - D_x^{[\frac{1}{2}+2]}[K(t_2)*u_0](x')|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
&\quad + \max_{\mathbb{R}} |K(t_2)*u_0(x)| + \sum_{j=1}^{[\frac{1}{2}+2]} (\sum_j \max_{\mathbb{R}} |D_x^j[K(t_2)*u_0](x)|) \\
&\leq C\frac{C(1)}{\sqrt{t_2}} + ||u_0||_\infty + \frac{C(1)}{\sqrt{t_2}}||u_0||_\infty + \frac{C(2)}{t_2}||u_0||_\infty .
\end{aligned}
$$

Suponhamos que

$$
\begin{cases}
u_t^{k-1} - Du_{xx}^{k-1} = -f(u^{k-2})_x \\
u^{k-1}(x,t_2) = L(u^{k-2})(t_2)
\end{cases}
$$

tem uma solução u^{k-1} de classe $\mathcal{H}^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\mathbb{R}\times[t_2,T])$ com $l=\dfrac{1}{2}$. Logo u^{k-1} é contínua e tem derivadas contínuas da forma $D_t^r D_x^s$ para $2r+s<l+2$ e tem norma finita, ou seja, $|u^{k-1}|_{Q_T}^{(l+2)} \leq C$, para alguma constante C. Como $l+2=\dfrac{1}{2}+2$ ($\Rightarrow [l+2]=2$), segue do primeiro e do segundo somatório da norma que:

$$
\sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in\overline{Q_T}\\ |x-x'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|u_{xx}^{k-1}(x,t)-u_{xx}^{k-1}(x',t)|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}} \right\} \leq C
$$

e

$$
\sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in\overline{Q_T}\\ |t-t'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|u_{xx}^{k-1}(x,t)-u_{xx}^{k-1}(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{1}{4}}} \right\} \leq C.
$$

Portanto u_{xx}^{k-1} são uniformemente Hölder contínuas em x e em t, logo uniformemente Hölder contínuas em $\mathbb{R}\times[t_2,T]$.

Consideramos agora

$$
\begin{cases}
u_t^{k} - Du_{xx}^{k} = -f(u^{k-1})_x \\
u^{k}(x,t_2) = L(u^{k-1})(t_2).
\end{cases}
$$

Vamos mostrar que $-f(u^{k-1})_x \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}\times[t_2,T])$ e $L(u^{k-1})(t_2)\in\mathcal{H}^{\frac{1}{2}+2}(\mathbb{R})$. Temos $-f(u^{k-1})_x \in C(\mathbb{R}\times[t_2,T])$ pois $f\in C^3(\overline{Br}(0))$ para $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$ e (usando $[l]=[\dfrac{1}{2}]=0$) temos

$$
\begin{aligned}
|-f(u^{k-1})_x|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{R}\times(t_2.T)} \;=\; & \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in\overline{Q_T}\\ |x-x'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|f(u^{k-1}(x,t))_x - f(u^{k-1}(x',t))_x|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
+ & \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in\overline{Q}_T\\ |t-t'|<\rho_0}} \left\{ \frac{|f(u^{k-1}(x,t))_x - f(u^{k-1}(x,t'))_x|}{|t-t'|^{\frac{1}{4}}} \right\} \\
+ & \max_{Q_T} |f(u^{k-1}(x,t))_x|
\end{aligned}
$$

finito pois temos:

i) $\max\limits_{Q_T} |f(u^{k-1}(x,t))_x| < \infty$ pelo fato de $f \in C^3(\overline{Br}(0))$ e u_x^{k-1} são uniformemente Hölder contínuas;

ii)

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(u^{k-1}(x,t))_x - f(u^{k-1}(x',t))_x|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}} \;&\leq\; M\frac{|u_x^{k-1}(x,t) - u_x^{k-1}(x',t)|}{|x-x'|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq\; M'
\end{aligned}
$$

pois $f \in C^3(\overline{Br}(0))$ e u_x^{k-1} são uniformemente Hölder contínuas em x com expoente $\dfrac{1}{2}$;

iii)

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(u^{k-1}(x,t))_x - f(u^{k-1}(x,t'))_x|}{|t-t'|^{\frac{1}{4}}} \;&\leq\; M''\frac{|u_x^{k-1}(x,t) - u_x^{k-1}(x,t')||t-t'|^{\frac{5}{12}}}{|t-t'|^{\frac{1}{4}}|t-t'|^{\frac{5}{12}}} \\
&\leq\; M^*|T-t_2|^{\frac{5}{12}}
\end{aligned}
$$

pois $f(u^{k-1})_x \in C^2(\overline{Br}(0))$ e u_x^{k-1} são uniformemente Hölder contínuas em t com expoente $\dfrac{2}{3}$. Portanto $-f(u^{k-1})_x \in \mathcal{H}^{l,\frac{l}{2}}(\mathbb{R}\times[t_2,T])$ com $l = \dfrac{1}{2}$.

Falta mostrar que $|L(u^{k-1})(t_2)|^{\frac{1}{2}+2}_{\mathbb{R}}$ é finita. Usando (2.8) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{|[L(u^{k-1})(t_2)]_{xx}(x') - [L(u^{k-1})(t_2)]_{xx}(x)|}{|x'-x|^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_x^{x'} |[L(u^{k-1})(t_2)]_{xxx}(y)|\,dy \\
&\leq \frac{1}{|x'-x|^{\frac{1}{2}}}\left[\int_x^{x'} |[L(u^{k-1})(t_2)]_{xxx}(y)|^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_x^{x'} dy\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_3\frac{(||u_0||_2 + ||u_0||_2^2 + ||u_0||_2^3)}{\sqrt{t_2-t_1}}.
\end{aligned}
$$

Daí, usando (2.6) e (2.7) para $p=\infty$, vem:

$$
\begin{aligned}
|L(u^{k-1})(t_2)|_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}+2} &= \sup_{\substack{x,x'\in\mathbb{R}\\ |x-x'|<\rho_0}} \frac{|[L(u^{k-1})(t_2)]_{xx}(x')-[L(u^{k-1})(t_2)]_{xx}(x)|}{|x'-x|^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{2} \max_{\mathbb{R}} |D_x^j[L(u^{k-1})(t_2)](x)| \\
&\leq r + C_3\frac{(||u_0||_2+||u_0||_2^2+||u_0||_2^3)}{\sqrt{t_2-t_1}} + C_1\frac{||u_0||_\infty}{\sqrt{t_2}} \\
&\quad + C_2\frac{||u_0||_\infty+||u_0||_\infty^2}{\sqrt{t_2-t_0}}.
\end{aligned}
$$

Observe que além de $|L(u^{k-1})(t_2)|_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}+2}$ ser finita é limitada independente de k. Aplicando novamente o Teorema 1.1 com $l=\dfrac{1}{2}$, obtemos uma solução u^k de classe $\mathcal{H}^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\mathbb{R}\times[t_2,T])$. Logo, usando a desigualdade do Teorema e o fato de $L(u^{n-1}(t_2))$ e $-f(u^{n-1})_x$ serem limitadas independente de n (em $\mathcal{H}^{l+2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{H}^{\frac{l}{2}+1}(\mathbb{R}\times[t_2,T])$, respectivamente), segue que u^k_{xx} são uniformemente Hölder contínuas. Mostramos desta forma que u^n_{xx} são uniformemente Hölder contínuas em $\mathbb{R}\times[t_2,T]$, $\forall n$. Segue da equação (2.12) que u^n_t também são uniformemente Hölder contínuas em $\mathbb{R}\times[t_2,T]$, $\forall n$.

Como u^n_x e u^n_{xx} são uniformemente Hölder contínuas então, pelo Teorema de Arzela-Àscoli (Teorema 1.3), $\{u^n_x\}$ e $\{u^n_{xx}\}$ são pré-compactos em $\mathbb{R}\times[t_2,T]$.

Por $\{u^n_x\}$ ser pré-compacto, existe uma subseqüência de $\{u^n_x\}$, que denotamos também por $\{u^n_x\}$, que converge uniformemente a uma função contínua v em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}\times[t_2,T]$. Pelo fato de ser convergência uniforme segue que $v=u_x$ (Lema 1.1). Pelos mesmos argumentos, usando a subseqüência, se mostra que $u^n_{xx}\to u_{xx}$ em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}\times[t_2,T]$.

Como D é constante e $f\in C^3(\overline{Br}(0))$ segue que

$$u^n_t = Du^n_{xx} - f'(u^{n-1})u^{n-1}_x \to Du_{xx} - f(u)_x = u_t$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}\times[t_2,T]$. Como t_2 é arbitrário, segue que u_t^n, u_x^n e u_{xx}^n convergem uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R} \times (0,T]$ a u_t, u_x e u_{xx}, respectivamente, que assim também serão Hölder contínuas.

Pelo Lema 2.1 (d), para cada $0 < t \leq T$ fixo, existe C_1 dependendo somente de K e f tal que $\|u_x^n(t)\|_2 \leq C_1 \dfrac{\|u_0\|_2}{\sqrt{t}} < \infty$. Isto implica que $u_x^n(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Como $u_x^n \to u_x$ uniformemente então segue que $u_x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$.

Pelo Lema 2.1 (e), dado $t_0 \in (0,T)$, existe C_2 dependendo somente de K, f e t_0 tal que

$$\|u_{xx}^n(t)\|_2 \leq C_2 \frac{(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{\sqrt{t - t_0}}, \qquad \forall \quad t_0 < t \leq T.$$

Disto segue que $u_{xx}^n(t) \in L^2(\mathbb{R}), \forall n$. Como $u_{xx}^n \to u_{xx}$ uniformemente, segue que $u_{xx}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$.

Por (2.5) temos $\|u^n(t)\|_2 \leq C_0 \|u_0\|_2$, $\forall n$ e $u^n \to u$ uniformemente então segue que $\|u(t)\|_2 \leq C_0 \|u_0\|_2$. Da mesma forma por (2.6) segue que $\|u_x(t)\|_2 \leq C_1 \dfrac{\|u_0\|_2}{\sqrt{t}}$. Finalmente, como $u_{xxx}^n(t)$ são uniformemente limitadas em $L^2(\mathbb{R})$, para cada $t > 0$ fixo (por (2.8)), então elas convergem fracamente em $L^2(\mathbb{R})$: $u_{xxx}^n(t) \rightharpoonup w(t) \in L^2(\mathbb{R})$ (consequência do Teorema de compacidade fraca em $L^2(\Omega)$).

Por outro lado, para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^n(x,.)\phi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} u_{xxx}(x,.)\phi(x)\,dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} [u_{xxx}^n(x,.) - u_{xxx}(x,.)]\phi(x)\,dx \\
&\leq \|u^n - u\|_\infty \|\phi_{xxx}\|_\infty vol(supp\phi)
\end{aligned}$$

onde $supp(\phi)$ é o suporte compacto de ϕ. Fazendo $n \to +\infty$ obtemos $\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^n(x,.)\phi(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} u_{xxx}(x,.)\phi(x)\,dx$, o que implica que $u_{xxx}^n \to u_{xxx}$ no sentido das distribuições. Por $u_{xxx}^n(t) \rightharpoonup w(t)$ segue que $\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^n(x,.)\phi(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} w(x,.)\phi(x)\,dx$. Pela unicidade do limite segue que $w(t) = u_{xxx}(t)$ no sentido das distribuições. Como $w(t) \in L^2(\mathbb{R})$ segue que $u_{xxx}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$.

Como $u_t = Du_{xx} - f(u)_x$ e $u_{xx}(t)$, $u_x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, segue que $u_t(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Da mesma forma, como $u_{tx} = Du_{xxx} - f(u)_{xx} = Du_{xxx} - [f''(u)u_x^2 + f'(u)u_{xx}]$, $u_{xxx}(t)$, $u_{xx}(t)$, $u_x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e u_x são Hölder contínuas (logo limitadas), segue que $u_{tx} \in L^2(\mathbb{R})$. ∎

A fim de estender estas soluções globalmente, isto é, para todo $t > 0$, devemos fazer uso do chamado par de entropia-fluxo de entropia que é definido como segue:

Definição 2.1 *As funções α, β: $\overline{Br}(\overline{u}) \to \mathbb{R}$ são chamadas par de entropia-fluxo de entropia para f em $\overline{Br}(\overline{u})$, denotado por (α, β), se a relação*

$$\nabla\alpha(u)^T f'(u) = \nabla\beta(u)^T \tag{2.13}$$

vale em $\overline{Br}(\overline{u})$.

A entropia α será assumida satisfazendo

$$\delta|u - \overline{u}|^2 \le \alpha(u) \le \frac{1}{\delta}|u - \overline{u}|^2, \quad u \in \overline{Br}(\overline{u}), \tag{2.14}$$

para alguma constante δ. Finalmente, dizemos que α é consistente com a matriz diagonal D se existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$w^T D\alpha''(u)w \ge \epsilon|w|^2 \tag{2.15}$$

para todo $u \in \overline{Br}(\overline{u})$ e $w \in \mathbb{R}^n$.

A existência de um tal par (α, β) nos possibilitará deduzir certas limitações à priori para as soluções de (2.1)-(2.2). Estas limitações são fundamentais para estender nossas soluções locais para soluções globais.

Lema 2.2 *Assuma que existe um par de entropia-fluxo de entropia como descrito na Definição 2.1 satisfazendo (2.14) e (2.15). Seja $u_0 - \overline{u} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ com $\|u_0 - \overline{u}\|_\infty = s' < r$. Nestas condições existem constantes positivas C_4 e C_5 tais que se u é uma solução clássica de (2.1)-(2.2) em $\mathbb{R} \times (t_0, t_1)$ então*

$$\|u(t) - \overline{u}\|_2 \le C_4\|u(t_0)\|_2, \qquad t_0 \le t \le t_1. \tag{2.16}$$

Se $u_x(t_0) \in L^2(\mathbb{R})$ *então*

$$\|u_x(t)\|_2 \leq C_5(\|u_x(t_0)\|_2 + \|u(t_0)\|_2), \qquad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.17}$$

Demonstração: Como u é solução suave de (2.1)-(2.2) para $t \in (t_0, t_1)$ podemos multiplicar (2.1) por $\nabla\alpha^T$ e usar (2.13) e (2.15) para obter

$$\nabla\alpha(u)^T u_t + \nabla\alpha(u)^T f(u)_x = \nabla\alpha(u)^T D u_{xx}$$

$$[\alpha(u)]_t + \nabla\alpha(u)^T f'(u) u_x = \nabla\alpha(u)^T D u_{xx}$$

$$[\alpha(u)]_t + \nabla\ \beta(u)^T u_x = \nabla\alpha(u)^T D u_{xx}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha(u)]_t + [\beta(u)]_x &= -[\alpha''(u)u_x]^T D u_x + [\alpha''(u)u_x]^T D u_x + \nabla\alpha(u)^T D u_{xx} \\
&= [\nabla\alpha(u)^T D u_x]_x - (\alpha''(u)u_x)^T D u_x \\
&= [\nabla\alpha(u)^T D u_x]_x - u_x^T [\alpha''(u)]^T D u_x.
\end{aligned}$$

Usando o fato de D ser diagonal e em seguida (2.15) com $w = u_x$

$$[\alpha(u)]_t + [\beta(u)]_x = (\nabla\alpha(u)^T D u_x)_x - u_x^T D\alpha''(u) u_x \leq (\nabla\alpha(u)^T D u_x)_x - \epsilon |u_x|^2.$$

Integrando sobre $\mathbb{R} \times [t_0, t]$ e por um argumento utilizado no Teorema 2.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,.))\,\big|_{t_0}^{t}\, dx \leq -\epsilon \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2\, dx dt.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,t))\, dx + \epsilon \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2\, dx dt \leq \int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,t_0))\, dx. \tag{2.18}$$

Isto juntamente com (2.14) nos dá

$$\begin{aligned}
\delta \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,t)) + \epsilon \int_{t_0}^{t} |u_x(x,t)|^2\, dx dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,t_0))\, dx \\
&\leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t_0)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Portanto $\|u(t)\|_2 \leq C_4 \|u(t_0)\|_2$.

Para provar (2.17), consideremos novamente (2.1). Derivando em relação a x

$$u_{tx} + f(u)_{xx} = D u_{xxx}$$

e multiplicando por u_x^T

$$u_x^T u_{tx} + u_x^T f(u)_{xx} = u_x^T D u_{xxx}.$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_x^2}{2}\right) + (u_x^T f(u)_x)_x - u_{xx}^T f(u)_x = (u_x^T D u_{xx})_x - u_{xx}^T D u_{xx}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_x^2) = -(u_x^T f(u)_x)_x + u_{xx}^T f(u)_x + (u_x^T D u_{xx})_x - u_{xx}^T D u_{xx}.$$

Integrando sobre $\mathbb{R} \times [t_0, t]$ e por um argumento utilizado no Teorema 2.1 temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_x(x,.)|^2 \Big|_{t_0}^{t} dx = \\
&= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} [f(u(x,s))_x^T u_{xx}(x,s) - (Du_{xx}(x,s))^T u_{xx}(x,s)]\, dxds \\
&\leq \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} [|f'(u(x,s))||u_x(x,s)||u_{xx}(x,s)| - d'|u_{xx}(x,s)||u_{xx}(x,s)|]\, dxds \\
&\leq \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} [M_1|u_x(x,s)||u_{xx}(x,s)| - d'|u_{xx}(x,s)|^2]\, dxds
\end{aligned}$$

onde $d' = \{\min d_i\}$. Além disso

$$\begin{aligned}
\left(\frac{C}{2d'}|u_x| - |u_{xx}|\right)^2 \geq 0 \;&\Rightarrow\; \frac{C}{d'}|u_x||u_{xx}| \leq \frac{C^2}{4(d')^2}|u_x|^2 + |u_{xx}|^2 \\
&\Rightarrow\; C|u_x||u_{xx}| \leq C\left(\frac{C}{4d'}|u_x|^2 + \frac{d'}{C}|u_{xx}|^2\right).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2 - |u_x(x,t_0)|^2\, dy \;\leq\; & \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} \Bigg[C\left(\frac{C}{4d'}|u_x(x,s)|^2\right. \\
& \left. + \frac{d'}{C}|u_{xx}(x,s)|^2\right) - d'|u_{xx}(x,s)|^2\Bigg]\, dxds
\end{aligned}$$

o que implica que

$$|u_x(t)\|_2^2 \leq \|u_x(t_0)\|_2^2 + \frac{C^2}{2d'} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2 \, dxds.$$

Agora de (2.18) e (2.14) temos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2 \, dxds &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,t)) \, dx + \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,s)|^2 \, dxds \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \alpha(u(x,t_0)) \, dx \\ &\leq \frac{1}{\epsilon\delta} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t_0)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Tomando $C' = \max\left\{1, \dfrac{C^2}{2d'\epsilon\delta}\right\}$ temos

$$\|u_x(t)\|_2^2 \leq C'(\|u_x(t_0)\|_2^2 + \|u(t_0)\|_2^2).$$

Logo

$$\|u_x(t)\|_2 \leq C_5(\|u_x(t_0)\|_2 + \|u(t_0)\|_2).$$

■

Podemos agora expor nosso resultado de existência global:

Teorema 2.2 *Assuma que existe um par de entropia-fluxo de entropia como descrito na Definição 2.1, satisfazendo (2.14) e (2.15). Seja* $u_0 - \overline{u} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *com* $\|u_0 - \overline{u}\|_\infty = s' < r$ *e sejam* C_0 *a* C_5 *como definidas nos Lemas 2.1 e 2.2. Então o problema (2.1)-(2.2) tem uma solução global desde que*

$$\left[2C_4\overline{C_5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4\right)\right]^{\frac{1}{2}} \|u_0 - \overline{u}\|_2 \leq s'.$$

Aqui $\overline{C_5} = \max\{C_5, 1\}$.

Demonstração: Novamente podemos tomar $\overline{u} = 0$. Seja $a = C_4\|u_0\|_2$ e $b = \overline{C_5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4\right)\|u_0\|_2$. Nossa hipótese é então que $\sqrt{2ab} \leq s'$. Pelo Teorema 2.1 existe uma solução u definida próximo do tempo T e pelo Lema 2.1 (a) vemos que u satisfaz $\|u(t)\|_\infty \leq r$, $0 \leq t \leq T$ (pela demonstração do Teorema 2.1 , $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$ e $\|u(t)\|_\infty \leq r$). Por (2.16) $\|u(T)\|_2 \leq C_4\|u_0\|_2 = a$ e por (2.6)

$$\|u_x(T)\|_2 \le \frac{C_1\|u_0\|_2}{\sqrt{T}} \le b. \tag{2.19}$$

Agora suponhamos que u está definida próximo de um tempo kT para algum k inteiro positivo e que

$$\|u(t)\|_\infty \le r, \qquad 0 \le t \le kT \tag{2.20}$$

$$\|u(kT)\|_2 \le a \tag{2.21}$$

$$\|u_x(kT)\|_2 \le b. \tag{2.22}$$

Então

$$\begin{aligned} |u^2(x,kT)| &= 2\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2(x,kT)}{2}\right) dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} u(x,kT)u_x(x,kT)\, dx \\ &\le 2\left\{\int_{\mathbb{R}} |u(x,kT)|^2\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\mathbb{R}} |u_x(x,kT)|^2\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

por uma desigualdade de Hölder. Portanto

$$\|u(kT)\|_\infty \le (2\|u(kT)\|_2\|u_x(kT)\|_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Por (2.21), (2.22) e pela hipótese

$$\|u(kT)\|_\infty \le \sqrt{2ab} \le s'.$$

Assim pelo Teorema 2.1, u pode ser estendida ao tempo $(k+1)T$ com $\|u(t)\|_\infty \le r$ e $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para $t \le (k+1)T$. Mas então o Lema 2.2 mostra que

$$\|u((k+1)T)\|_2 \le C_4\|u_0\|_2 = a$$

e usando (2.17) e (2.19)

$$\begin{aligned} \|u_x((k+1)T)\|_2 &\le C_5(\|u_x(T)\|_2 + \|u(T)\|_2) \\ &\le C_5\left(\frac{C_1\|u_0\|_2}{\sqrt{T}} + C_4\|u_0\|_2\right) \\ &\le \overline{C_5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4\right)\|u_0\|_2 \\ &= b. \end{aligned}$$

Assim (2.20), (2.21) e (2.22) valem próximo ao tempo $(k+1)T$. Por indução, estabelecemos a existência da solução u para todo $t > 0$. ∎

Finalmente podemos nos desfazer da exigência de que D seja uma matriz diagonal por uma simples mudança de variáveis. Assumiremos agora que D seja uma matriz diagonalizável com autovalores positivos, isto é, existe P tal que

$$P^{-1}DP = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

é positiva.

Corolário 2.1 *Assuma que existe um par de entropia-fluxo de entropia* (α, β) *para* f *em* $\overline{Br}(\overline{u})$ *satisfazendo (2.14). Suponhamos que para cada* $u \in \overline{Br}(\overline{u})$ *temos*

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} P^T \alpha''(u) P \tag{2.23}$$

positiva. Então o problema (2.1)-(2.2) tem solução global desde que os dados $u_0 - \overline{u}$ *tem restrições apropriadas nas normas* L^2 *e* L^∞*, isto é,* $P^{-1}(u_0 - \overline{u})$ *satisfaz as hipóteses do último Teorema.*

Demonstração: Seja $v = P^{-1}u$. Então v satisfaz

$$v_t + g(v)_x = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} v_{xx} \tag{2.24}$$

onde $g(v) = P^{-1}f(Pv)$ (obtemos (2.24) multiplicando (2.1) por P^{-1}). Devemos mostrar que $A(v) = \alpha(Pv)$ e $B(v) = \beta(Pv)$ satisfazem (2.13) e (2.14) para g, e

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} A'' = P^{-1}DPP^T\alpha''P$$

é positiva por hipótese. Temos $\nabla A(v) = \nabla\alpha(Pv)P$, $g'(v) = P^{-1}f'(Pv)P$ e $\nabla B(v) = \nabla\beta(Pv)P$. Usando isso e (2.13) para o par de entropia-fluxo de entropia (α, β) para f obtemos

$$\begin{aligned} \nabla A(v)^T g'(v) &= \nabla\alpha(Pv)^T PP^{-1}f'(Pv)P \\ &= \nabla\alpha(Pv)^T f'(Pv)P \\ &= \nabla\beta(Pv)^T P \\ &= \nabla B(v). \end{aligned}$$

Portanto (A, B) satisfaz (2.13). Temos $v = P^{-1}u$ então $u = Pv$ e conseqüentemente $A(v) = \alpha(Pv) = \alpha(u)$. Como $u \in \overline{Br}(\overline{u})$ e α satisfaz (2.14) temos que

$$\delta|u - \overline{u}|^2 \leq \alpha(u) \leq \frac{1}{\delta}|u - \overline{u}|^2$$

então

$$\delta|P(P^{-1}u) - P(P^{-1}\overline{u})|^2 \leq \alpha(u) \leq \frac{1}{\delta}|P(P^{-1}u) - P(P^{-1}\overline{u})|^2$$

e conseqüentemente

$$\delta|P(P^{-1}u - P^{-1}\overline{u})|^2 \leq \alpha(Pv) \leq \frac{1}{\delta}|P(P^{-1}u - P^{-1}\overline{u})|^2.$$

Assim

$$\delta\left|P\left(\frac{P^{-1}u - P^{-1}\overline{u}}{|P^{-1}u - P^{-1}\overline{u}|}\right)\right|^2 |P^{-1}u - P^{-1}\overline{u}|^2 \leq A(v)$$

e

$$A(v) \leq \frac{1}{\delta}\left|P\left(\frac{P^{-1}u - P^{-1}\overline{u}}{|P^{-1}u - P^{-1}\overline{u}|}\right)\right|^2 |P^{-1}u - P^{-1}\overline{u}|^2.$$

Tomando $N_1 = \min_{\|v\|\leq 1}\{|P(v)|\}$, $N_2 = \max_{\|v\|\leq 1}\{|P(v)|\}$ e $\delta' = \min\{\delta N_1^2, \dfrac{\delta}{N_2^2}\}$, vem

$$\delta' |v - P^{-1}\overline{u}|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\delta'}|v - P^{-1}\overline{u}|^2.$$

Portanto A satisfaz (2.14). Assim temos a matriz diagonal

$$P^{-1}DP = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

positiva e o problema (2.24) com (A, B) um par de entropia-fluxo de entropia para g. Pelo Teorema 2.2, o problema (2.24) tem uma solução global v, desde que: $P^{-1}(u_0 - \overline{u}) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ com $\|P^{-1}(u_0 - \overline{u})\|_\infty = s' < r$ e $\left[2C_4\overline{C_5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4\right)\right]^{\frac{1}{2}} \|P(u_0 - \overline{u})\|_2 \leq s'$. Portanto, nestas condições, $Pv = u$ é uma solução global do problema (2.1)-(2.2). ∎

Observação 2.1 *Quando D é simétrica, podemos tomar P como sendo uma matriz ortogonal e a condição (2.23) é simplificada para a exigência de que $D\alpha''(u)$ seja positiva em $\overline{Br}(\overline{u})$.*

Capítulo 3

Aplicações às Equações da Dinâmica dos Gases

Neste capítulo aplicaremos o resultado de existência global, Corolário 2.1, às equações da dinâmica dos gases unidimensional.

Primeiro consideremos a isentropia da dinâmica dos gases em coordenadas Lagrangeanas:

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v) \end{bmatrix}_x = D \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_{xx.} \tag{3.1}$$

Tomando $U = (v, u)$ e $F(U) = (-u, p(v))$ temos a equação:

$$U_t + F(U)_x = DU_{xx}.$$

Aqui v, u e p são escalares que representam o volume específico $(= \dfrac{1}{densidade})$, velocidade e pressão, respectivamente. Assumimos que p é definida em $\{v > 0\}$ e que $p'(v) < 0$.

Vamos construir um par de entropia-fluxo de entropia e usar o Corolário 2.1 para mostrar a existência de solução global. Com este objetivo, sendo $\overline{U} = (\overline{v}, \overline{u})$, definimos as funções α, β: $\overline{Br}(\overline{U}) \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(U) = \frac{(u - \overline{u})^2}{2} + \int_{\overline{v}}^{v} [p(\overline{v}) - p(s)]\, ds$$

e

$$\beta(U) = (u-\overline{u})[p(v)-p(\overline{v})]$$

sendo $\overline{v} > 0$.

Vamos mostrar que as propriedades de par de entropia-fluxo de entropia para F são satisfeitas por (α, β). Primeiramente, α e β satisfazem (2.13), pois:

$$\begin{aligned}
\nabla\alpha^T(U)F'(U) &= \begin{bmatrix} p(\overline{v})-p(v) & (u-\overline{u}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (u-\overline{u})p'(v) & -p(\overline{v})+p(v) \end{bmatrix} \\
&= \nabla\beta^T(U).
\end{aligned}$$

Verificaremos agora que α satisfaz (2.14). Para isso considere $g(v) = \displaystyle\int_{\overline{v}}^{v} [p(\overline{v})-p(s)]\, ds$. Temos $g'(v) = p(\overline{v})-p(v)$ e $g''(v) = -p'(v)$. Observe que g e g' se anulam em $\overline{v}$. Pela fórmula de Taylor com resto temos que $g(v) = -\dfrac{p'(\xi)(v-\overline{v})^2}{2}$ (para algum $\xi \in [v, \overline{v}]$). Assim temos $\alpha(U) = \dfrac{(u-\overline{u})^2}{2} - \dfrac{p'(\xi)(v-\overline{v})^2}{2}$. Como estamos considerando $F \in C^3(\overline{Br}(\overline{U}))$, em conjuntos compactos de $\{v > 0\}$, tomamos $C_1 = \min\left\{-\dfrac{p'(\xi)}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$ e $C_2 = \max\left\{-\dfrac{p'(\xi)}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$ e obtemos

$$C_1\{|u-\overline{u}|^2 + |v-\overline{v}|^2\} \leq \alpha(U) \leq C_2\{|u-\overline{u}|^2 + |v-\overline{v}|^2\}.$$

Logo α satisfaz (2.14) para $\delta = \min\left\{C_1, \dfrac{1}{C_2}\right\}$.

Finalmente trabalharemos nossa condição de compatibilidade (2.15) para o caso especial em que $D = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ é simétrica. Pela observação feita após o Corolário 2.1, queremos que a matriz

$$D\alpha''(U) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p'(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seja positiva em $\overline{Br}(\overline{v},\overline{u})$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ap'(v) & b \\ -bp'(v) & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \forall\ (\xi_1,\xi_2),$$

isto é,

$$-ap'(v)\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 - bp'(v)\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 > 0.$$

Se $\xi_2 = 0$ e $\xi_1 \neq 0$ esta condição é satisfeita para $a > 0$. Se $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 \neq 0$ obtemos $c > 0$. Se $\xi_2 \neq 0$ e ξ_1 qualquer, queremos que a equação

$$-ap'(v)\xi_1^2 + [(b - bp'(v))\xi_2]\xi_1 + c\xi_2^2 > 0$$

$\forall\ \xi_1$, ou seja, queremos que

$$\Delta = [(b - bp'(v))\xi_2]^2 + 4acp'(v)\xi_2^2 < 0$$

$$b^2(1 - p'(v))^2 < -4acp'(v)$$

$$\frac{b^2}{4ac} < -\frac{p'(v)}{[1 - p'(v)]^2}$$

$\forall\ v \in \overline{Br}(\overline{v},\overline{u})$, logo

$$\frac{b^2}{4ac} < \min_{|v-\overline{v}|\leq r} -\frac{p'(v)}{[1 - p'(v)]^2}.$$

Portanto devemos ter

$$\begin{cases} a, c > 0 \\ \frac{b^2}{4ac} < \min\limits_{|v-\overline{v}|\leq r} -\dfrac{p'(v)}{[1 - p'(v)]^2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Por outro lado, se vale (3.2) então

$$-ap'(v)\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 - p'(v)\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 > 0$$

$\forall\ \xi_1, \xi_2$, ou seja, $D\alpha''$ é positiva. Logo a condição de $D\alpha''$ ser positiva é satisfeita se, e somente se, vale (3.2).

A aplicação do Corolário 2.1 a este problema pode então ser formulada como segue:

Assuma que $\overline{v} > \overline{v} - r > 0$ e que a matriz simétrica D satisfaz (3.2). Então o sistema (3.1) com dados iniciais (v_0, u_0) tem uma solução suave global desde que $(v_0(x), u_0(x)) \in \overline{B_{s'}}(\overline{v}, \overline{u})$ para algum $s' < r$ e que a norma-L^2 de $(v_0 - \overline{v}, u_0 - \overline{u})$ tenha restrições apropriadas (no sentido do Corolário 2.1).

Observe que (3.2) é satisfeita quando D é uma matriz diagonal positiva qualquer (se $a, c > 0$ então $\frac{b^2}{4ac} < \min\limits_{|v-\overline{v}|\leq r} -\dfrac{p'(v)}{[1-p'(v)]^2}$).

Finalmente, no importante caso em que $p(v) = v^{-\gamma}$ $(\gamma > 1)$, a condição (3.2) força D a ser quase diagonal quando $\overline{Br}(\overline{v}, \overline{u})$ inclui a condição ou de a densidade ser muito grande ou muito pequena. Se $p(v) = v^{-\gamma}$ $(\gamma > 1)$ então $p'(v) = -\gamma v^{-\gamma-1} = \dfrac{-\gamma}{v^{\gamma+1}}$ e

$$\begin{aligned} -\frac{p'(v)}{[1-p'(v)]^2} &= \frac{\frac{\gamma}{v^{\gamma+1}}}{\left[1+\frac{\gamma}{v^{\gamma+1}}\right]^2} \\ &= \left(\frac{1}{v^{\gamma+1}}\right)\left(\frac{\gamma}{\left[1+\frac{\gamma}{v^{\gamma+1}}\right]^2}\right). \end{aligned}$$

Se a densidade $(\rho = \dfrac{1}{v})$ é suficientemente grande então $v^{\gamma+1} = \dfrac{1}{\rho^{\gamma+1}} \to 0$ e assim $\left[1+\dfrac{\gamma}{v^{\gamma+1}}\right]^2 \to \infty$ o que força $-\dfrac{p'(v)}{[1-p'(v)]^2} \to 0$. Se a densidade é suficientemente pequena então $v^{\gamma+1} \to \infty$ e assim $\dfrac{1}{v^{\gamma+1}} \to 0$ e em consequência $-\dfrac{p'(v)}{[1-p'(v)]^2} \to 0$. Nos dois casos, b se aproxima de zero e teremos D quase diagonal.

Em seguida voltamos às equações de dinâmica dos gases não isentrópicas. Mostraremos que estas equações podem ser reformuladas de diferentes modos, os quais são equivalentes para a aplicação do Corolário 2.1. Devemos entretanto construir um par de entropia-fluxo de entropia para a formulação, no qual os cálculos são mais simples, e então provar o resultado geral que mostra de que maneira um par de entropia-fluxo de entropia pode se estender para os sistemas equivalentes.

Assim consideremos primeiro a formulação de entropia para estas equações em coordenadas Lagrangeanas e assumimos por simplicidade que D é uma matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ s \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v,s) \\ 0 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ s \end{bmatrix}_{xx.} \tag{3.3}$$

Aqui v, u e p são os mesmos como em (3.1) e s é uma entropia específica. Assumimos que p é definida para $v > 0$ e todo s e que $p_v < 0$.

Agora definimos

$$\alpha(v,u,s) = \frac{(u-\overline{u})^2}{2} + \int_{\overline{v}}^{v} [p(\overline{v},\overline{s}) - p(\tau,s)]\, d\tau + \frac{k(s-\overline{s})^2}{2}$$

e

$$\beta(v,u,s) = (u-\overline{u})[p(v,s) - p(\overline{v},\overline{s})].$$

Devemos mostrar que, quando a constante k é suficientemente grande, então (2.13), (2.14) e (2.15) da Definição 2.1 são satisfeitas na bola $\overline{Br}(\overline{v},\overline{u},\overline{s})$ (quando, como antes, $\overline{v} > \overline{v} - r > 0$). Primeiro, se $\overline{p} = p(\overline{v},\overline{s})$ então:

$$\begin{aligned}
&\nabla\alpha^T(v,u,s)F'(v,u,s) = \\
&= \begin{bmatrix} \overline{p} - p(v,s) & u - \overline{u} & \int_{\overline{v}}^{v} -p_s(\tau,s)\, d\tau + k(s-\overline{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_v(v,s) & 0 & p_s(v,s) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_v(v,s)[u-\overline{u}] & p(v,s) - \overline{p} & p_s(v,s)[u-\overline{u}] \end{bmatrix} \\
&= \nabla\beta^T(v,u,s)
\end{aligned}$$

e assim (2.13) é satisfeita.

Para estabelecer (2.14), vamos expandir primeiramente o termo $g(v,s) = \displaystyle\int_{\overline{v}}^{v} [\overline{p} - p(\tau,s)]\, d\tau$ em torno de $(\overline{v},\overline{s})$, usando a fórmula de Taylor com resto. Temos $g'(v,s) = \begin{bmatrix} \overline{p} - p(v,s) & -\int_{\overline{v}}^{v} p_s(\tau,s)\, d\tau \end{bmatrix}$ e

$$g''(v,s) = \begin{bmatrix} -p_v(v,s) & -p_s(v,s) \\ -p_s(v,s) & \int_{\overline{v}}^{v} -p_{ss}(\tau,s)\, d\tau \end{bmatrix}.$$

Como g e g' se anulam em $(\overline{v},\overline{s})$, temos que para algum $(\widetilde{v},\widetilde{s}) \in [(\overline{v},\overline{s}),(v,s)]$,

$$\begin{aligned}
g(v,s) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v-\overline{v} \\ s-\overline{s} \end{bmatrix}^T g''(\widetilde{v},\widetilde{s}) \begin{bmatrix} v-\overline{v} \\ s-\overline{s} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v-\overline{v} \\ s-\overline{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -p_v(\widetilde{v},\widetilde{s}) & -p_s(\widetilde{v},\widetilde{s}) \\ -p_s(\widetilde{v},\widetilde{s}) & \int_{\overline{v}}^{\widetilde{v}} -p_{ss}(\tau,\widetilde{s})\,d\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v-\overline{v} \\ s-\overline{s} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\{[-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})(v-\overline{v}) - p_s(\widetilde{v},\widetilde{s})(s-\overline{s}), (-p_s(\widetilde{v},\widetilde{s}))(v-\overline{v}) \\
&\quad + \int_{\overline{v}}^{\widetilde{v}} -p_{ss}(\tau,\widetilde{s})\,d\tau(s-\overline{s})\Big)\Big] \begin{bmatrix} v-\overline{v} \\ s-\overline{s} \end{bmatrix}\Bigg\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})(v-\overline{v})^2 - p_s(\widetilde{v},\widetilde{s})(s-\overline{s})(v-\overline{v}) \\
&\quad - [p_s(\widetilde{v},\widetilde{s})](s-\overline{s})(v-\overline{v}) - \int_{\overline{v}}^{\widetilde{v}} p_{ss}(\tau,\widetilde{s})\,d\tau(s-\overline{s})^2\Big\}.
\end{aligned}$$

Tomando $M = \max\{constantes\}$ vem

$$g(v,s) \geq \frac{-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}{2}(v-\overline{v})^2 - M[(s-\overline{s})(v-\overline{v}) + (s-\overline{s})^2]$$

e usando a desigualdade de Cauchy com $\epsilon > 0$: $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$, para $\epsilon = -\dfrac{M}{p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}$, $a = (s-\overline{s})$ e $b = (v-\overline{v})$:

$$\begin{aligned}
g(v,s) &\geq \frac{-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}{2}(v-\overline{v})^2 - M[\frac{M}{(-p_v)}(s-\overline{s})^2 + \frac{1}{4\frac{M}{(-p_v)}}(v-\overline{v})^2 + (s-\overline{s})^2] \\
&= \frac{-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}{4}(v-\overline{v})^2 - const(s-\overline{s})^2.
\end{aligned}$$

Assim para k suficientemente grande e $N = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}{4}, \left(\dfrac{k}{2} - const\right)\right\}$ em conjuntos compactos de $\{v > 0\}$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha(v,u,s) &\geq \frac{(u-\overline{u})^2}{2} - \frac{p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}{4}(v-\overline{v})^2 + \left(\frac{k}{2} - const\right)(s-\overline{s})^2 \\
&\geq N\left|\left|\begin{bmatrix} v \\ u \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{v} \\ \overline{u} \\ \overline{s} \end{bmatrix}\right|\right|^2
\end{aligned}$$

como queríamos.

Pelos cálculos acima, temos que

$$
\begin{aligned}
\alpha(v,u,s) &= \frac{(u-\overline{u})^2}{2}+\frac{1}{2}\left\{-p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})(v-\overline{v})^2-p_s(\widetilde{v},\widetilde{s})(s-\overline{s})(v-\overline{v})\right.\\
&\quad \left.-[p_s(\widetilde{v},\widetilde{s})](s-\overline{s})(v-\overline{v})-\int_{\overline{v}}^{\widetilde{v}} p_{ss}(\tau,\widetilde{s})\,d\tau(s-\overline{s})^2+k\right\},
\end{aligned}
$$

tomando $M'=\max\{|-constantes|\}$

$$
\begin{aligned}
\alpha(v,u,s) &\leq \frac{(u-\overline{u})^2}{2}-\frac{p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})(v-\overline{v})^2}{2}\\
&\quad +M'[(s-\overline{s})(v-\overline{v})+(s-\overline{s})^2]+\frac{k}{2}(s-\overline{s})^2
\end{aligned}
$$

e usando novamente a desigualdade de Cauchy,

$$
\begin{aligned}
\alpha(v,u,s) &\leq \frac{(u-\overline{u})^2}{2}-\frac{p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})(v-\overline{v})^2}{2}+M'\left[(s-\overline{s})^2\right.\\
&\quad \left.+\frac{(v-\overline{v})^2}{4}+(s-\overline{s})^2\right]+\frac{k}{2}(s-\overline{s})^2.
\end{aligned}
$$

Tomando $N'=\max\left\{\frac{1}{2},-\frac{p_v(\widetilde{v},\widetilde{s})}{2}+\frac{M'}{4},2M'+\frac{k}{2}\right\}$ em conjuntos compactos de $\{v>0\}$ segue que

$$
\alpha(v,u,s)\leq N'\left\|\begin{bmatrix} v\\ u\\ s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{v}\\ \overline{u}\\ \overline{s}\end{bmatrix}\right\|^2
$$

Portanto tomando $\delta=\min\left\{N,\frac{1}{N'}\right\}$ segue (2.14).

Por último, falta verificar se D é consistente com α. Precisamos mostrar que

$$
\begin{aligned}
D\alpha'' &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -p_v & 0 & -p_s\\ 0 & 1 & 0\\ -p_s & 0 & -\int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau,s)\,ds+k\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} -d_1p_v & 0 & -d_1p_s\\ 0 & d_2 & 0\\ -d_3p_s & 0 & d_3\left[-\int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau,s)\,ds+k\right]\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

é positiva. Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, queremos que

$$\xi^t D\alpha''\xi = -d_1 p_v \xi_1^2 - [d_1 + d_3] p_s \xi_1 \xi_3 + d_2 \xi_2^2 + d_3 \xi_3^2 \left[k - \int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau, s)\, ds \right] > 0$$

onde $-p_v > 0$, p_s e p_{ss} são limitadas em $\overline{Br}(\overline{v}, \overline{u}, \overline{s})$. Como $d_2\xi_2^2 > 0$ (para $d_2 > 0$) e $d_2\xi_2^2 = 0$ (se $\xi_2 = 0$), o resultado precisa continuar valendo se

$$-d_1 p_v \xi_1^2 - [d_1 + d_3] p_s \xi_1 \xi_3 + d_3 \xi_3^2 \left[k - \int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau, s)\, ds \right] > 0.$$

Para $\xi_3 = 0$ e $\xi_1 \neq 0$, temos $[d_1(-p_v)] > 0$ se $d_1 > 0$ e para $\xi_1 = 0$ e $\xi_3 \neq 0$ obtemos $d_3 \left[k - \int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau, s)\, ds \right] > 0$ se $d_3 > 0$ e k suficientemente grande. Para $\xi_3 \neq 0$ e $\xi_1 \neq 0$ quaisquer, devemos ter

$$\Delta \;=\; [(d_1 + d_3) p_s]^2 - 4 d_1 d_3 (-p_v) \left[k - \int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau, s)\, ds \right] < 0$$

e assim

$$\frac{(d_1 + d_3)^2 p_s^2}{4 d_1 d_3 (-p_v)} < \left[k - \int_{\overline{v}}^{v} p_{ss}(\tau, s)\, ds \right]$$

o que é possível para k suficientemente grande.

Portanto toda matriz diagonal positiva é consistente com α. Especificamos nossa conclusão formalmente como segue:

Assumimos que $\overline{v} > \overline{v} - r > 0$ e que D é uma matriz diagonal positiva. Então o sistema (3.3) com dados iniciais (v_0, u_0, s_0) tem solução suave global desde que $(v_0(x), u_0(x), s_0(x)) \in \overline{B_{s'}}(\overline{v}, \overline{u}, \overline{s})$ q.t.p para algum $s' < r$ e que a norma em L^2 de $(v_0 - \overline{v}, u_0 - \overline{u}, s_0 - \overline{s})$ tem restrições apropriadas (no sentido do Corolário 2.1).

Em seguida, consideremos as formulações alternativas das leis de conservação de massa, momento e energia. Estes sistemas, sem a difusão, são os seguintes:

$$\begin{cases} v_t - u_x &= 0 \\ u_t + p_x &= 0 \\ s_t &= 0, \qquad\qquad p = p(v, s) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} v_t - u_x & = & 0 \\ u_t + p_x & = & 0 \\ E_t + (up)_x & = & 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi & = & 0 \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p)_\xi & = & 0 \\ (\rho s)_\tau + (\rho u s)_\xi & = & 0, \qquad p = p(\rho, s) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi & = & 0 \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p)_\xi & = & 0 \\ (\rho E)_\tau + (\rho u E + up)_\xi & = & 0 \qquad p = p(\rho, u, E). \end{cases} \tag{3.7}$$

Nestes sistemas, v, u, p e s são os mesmos como em (3.3), $\rho = \dfrac{1}{v}$ é a densidade e $E = e + \dfrac{u^2}{2}$ é a energia total, onde e é a energia interna. Estes sistemas tornam-se interligados quando tomados juntamente com uma relação fundamental, a qual dá e em termos de v e s, ou s em termos de v e e. A pressão p é então definida por

$$p = -\frac{\partial e}{\partial v}(v, s).$$

Podemos então obter formalmente a equação (3.5) de (3.4) e da definição de E como segue:

$$E_t = e_t + uu_t = e_v v_t + e_s s_t + uu_t = e_v v_t + uu_t = -pu_x - up_x = -(up)_x$$

pois $e = e(v, s)$, $s_t = 0$ $p = -e_v$, $u_t = -p_x$ e $v_t = u_x$.

Os sistemas (3.6) e (3.7) são obtidos formalmente de (3.4) e (3.5) fazendo a mudança da variável dependente $\rho = \dfrac{1}{v}$ e uma mudança particular das variáveis independentes $(x, t) \to (\xi, \tau)$. As coordenadas Eulerianas ξ e τ denotam o espaço real e o tempo e estão relacionadas com as coordenadas Lagrangeanas x, t por $t = \tau$ e $x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi(x,t)} \rho(s, \tau)\, ds$. Assim tomando $h(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \rho(s, \tau)\, ds$ e $\xi = \xi(x, t)$ temos

$$1 = \frac{dx}{dx} = h'(\xi(x, t)\frac{d\xi}{dx} = [\rho(\xi(x, t), \tau)]\frac{d\xi}{dx}$$

logo
$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\rho(\xi(x,t),\tau)}.$$

Também
$$\begin{aligned} 0 = \frac{dx}{dt} &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\xi(x,t)} \frac{d}{dt}\rho(s,\tau)\,ds + \frac{d\xi}{dt}\rho(\xi(x,t),\tau) \\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\xi(x,t)} \rho_\tau(s,\tau)\,ds + \frac{d\xi}{dt}\rho(\xi(x,t),\tau) \\ &= -\lim_{a\to-\infty}\int_a^{\xi(x,t)} (\rho u)_s(s,\tau)\,ds + \frac{d\xi}{dt}\rho(\xi(x,t),\tau). \end{aligned}$$

Assim
$$\frac{d\xi}{dt} = u(\xi(x,t),\tau).$$

Obtemos então
$$\frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(x,t)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Assim a equação $v_t - u_x = 0$ pode ser reescrita em coordenadas Eulerianas como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\tau \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_t \\ \tau_t \end{bmatrix} - u_\xi \xi_x &= v_\xi u + v_\tau - u_\xi \frac{1}{\rho} \\ &= -\frac{\rho_\xi u}{\rho^2} - \frac{\rho_\tau}{\rho^2} - \frac{u_\xi}{\rho} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por $-\rho^2$ obtemos a primeira equação de (3.6) e (3.7).

Agora de $u_t + p_x = 0$ temos
$$\begin{bmatrix} u_\xi \\ u_\tau \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \xi_t \\ \tau_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_\rho \\ p_s \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \rho_\xi & \rho_\tau \\ s_\xi & s_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \tau_x \end{bmatrix} = 0$$

assim
$$(u_\xi u + u_\tau) + \frac{p_\rho \rho_\xi}{\rho} + \frac{p_s s_\xi}{\rho} = 0$$

logo
$$u_\xi u\rho + u_\tau \rho = -(p_\rho \rho_\xi + p_s s_\xi).$$

Usando isto e a primeira equação de (3.6) (ou (3.7)), obtemos

$$
\begin{aligned}
(\rho u)_\tau &= \rho_\tau u + u_\tau \rho \\
&= \rho_\tau u - (u_\xi u \rho + p_\rho \rho_\xi + p_s s_\xi) \\
&= (-\rho_\xi u - \rho u_\xi) u - u_\xi u \rho - p_\xi \\
&= -(\rho u^2)_\xi - p_\xi .
\end{aligned}
$$

Portanto obtemos a segunda equação de (3.6) (ou (3.7)).

Da terceira equação de (3.4) obtemos $s_\xi u = -s_\tau$. Usando isto e a primeira equação de (3.6) vem

$$
\begin{aligned}
(\rho s)_\tau &= \rho_\tau + \rho s_\tau \\
&= -(\rho u)_\xi s - \rho s_\xi u \\
&= -(\rho u s)_\xi .
\end{aligned}
$$

Por último, da terceira equação de (3.5) temos

$$E_\xi u + E_\tau + p\frac{u_\xi}{\rho} + [p_\rho \rho_\xi + p_u u_\xi + p_E E_\xi]\frac{u}{\rho} = 0$$

o que implica

$$E_\tau = -(E_\xi u + p\frac{u_\xi}{\rho} + p_\rho \rho_\xi \frac{u}{\rho} + p_u u_\xi \frac{u}{\rho} + p_E E_\xi \frac{u}{\rho}).$$

Usando isto e a primeira equação de (3.7) vem

$$
\begin{aligned}
(\rho E)_\tau &= \rho_\tau E + \rho E_\tau \\
&= -(\rho u)_\xi E - \rho \left[E_\xi u + p\frac{u_\xi}{\rho} + p_\rho \rho_\xi \frac{u}{\rho} + p_u u_\xi \frac{u}{\rho} + p_E E_\xi \frac{u}{\rho} \right] \\
&= -(\rho u E)_\xi - (up)_\xi \\
&= -[\rho u E + up]_\xi .
\end{aligned}
$$

Portanto obtemos a terceira equação de (3.7).

Suponhamos que u satisfaz o sistema de leis de conservação

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{3.9}$$

(u, v, f, etc., agora denotam vetores). Então formalmente fazemos a mudança da variável dependente $u = h(v)$ e a mudança da variável independente $(x,t) \to (\xi,\tau)$, onde

$$\frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(x,t)} = \begin{bmatrix} q_1(u) & q_2(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então (3.9) se transforma em

$$\begin{aligned} f'(h(v))h'(v)v_\xi q_1(h(v)) &= -[h'(v)v_\xi \xi_t + h'(v)v_\tau \tau_t] \\ &= -[h'(v)v_\xi q_2(h(v)) + h'(v)v_\tau]. \end{aligned}$$

Logo

$$[f'(h(v))h'(v)q_1(h(v)) + h'(v)q_2(h(v))]v_\xi + h'(v)v_\tau = 0.$$

Multiplicando à esquerda por $[h'(v)]^{-1}$, vem:

$$v_\tau + [q_2(h(v)) + q_1(h(v))[h'(v)]^{-1}f'(h(v))h'(v)]v_\xi = 0.$$

Porém em todos os casos de interesse, (3.5) a (3.7), encontramos v formalmente satisfazendo o sistema de leis de conservação

$$v_\tau + g(v)_\xi = 0 \tag{3.10}$$

Conseqüentemente devemos ter

$$g'(v) = q_2(h(v)) + q_1(h(v))[h'(v)]^{-1}f'(h(v))h'(v). \tag{3.11}$$

A seguinte proposição indica qual par de entropia-fluxo de entropia obtemos do sistema (3.9) sob estas mudanças de variáveis.

Proposição 3.1 *Suponhamos que (α,β) é um par de entropia-fluxo de entropia para f em $\overline{Br}(\overline{u})$, satisfazendo (2.13) e (2.14) da Definição 2.1 e que $\alpha'' > 0$ em $\overline{Br}(\overline{u})$. Sejam q_1, q_2, h e g como acima e assumimos que*

$$q_1 > 0 \tag{3.12}$$

e

$$\nabla q_1^T f' + \nabla q_2 = 0 \tag{3.13}$$

em $\overline{Br}(\overline{u})$*. Então se* r *é suficientemente pequeno, as funções*

$$A(v) = \frac{\alpha(h(v))}{q_1(h(v))} \qquad e \qquad B(v) = \left(\beta + \frac{q_2\alpha}{q_1}\right)(h(v))$$

satisfazem

$$\nabla_v A^T g' = \nabla_v B^T; \tag{3.14}$$

$$\delta|v - h^{-1}(\overline{u})|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\delta}|v - h^{-1}(\overline{u})|^2, \qquad \delta > 0; \tag{3.15}$$

e

$$A'' > 0 \tag{3.16}$$

em $h^{-1}(\overline{Br}(\overline{u}))$*.*

Demonstração: Temos de (2.13), (3.11), (3.13) e da definição de A que

$$\begin{aligned}
\nabla_v A^T g' &= \left[\frac{\nabla\alpha q_1 - \nabla q_1 \alpha}{q_1^2}\right]^T h'[q_2 + q_1(h')^{-1} f' h'] \\
&= \left[\frac{q_2 \nabla\alpha^T}{q_1} - \frac{\alpha q_2 \nabla q_1^T}{q_1^2} + \nabla\alpha^T f' - \frac{\nabla q_1^T f' \alpha}{q_1}\right] h' \\
&= \left[\frac{q_2 \nabla\alpha^T}{q_1} - \frac{\alpha q_2 \nabla q_1^T}{q_1^2} + \nabla\beta^T + \frac{\nabla q_2 \alpha}{q_1}\right] h' \\
&= \nabla\left[\frac{q_2\alpha}{q_1} + \beta\right]^T h' = \nabla_v B^T
\end{aligned}$$

como queríamos.

Para mostrar que (3.15) é satisfeita, usamos o fato de α satisfazer (2.14):

$$\delta|u - \overline{u}|^2 \leq \alpha(u) \leq \frac{1}{\delta}|u - \overline{u}|^2.$$

Assim

$$\delta|h(h^{-1}u) - h(h^{-1}\overline{u})|^2 \leq \alpha(u) \leq \frac{1}{\delta}|h(h^{-1}u) - h(h^{-1}\overline{u})|^2$$

o que implica que

$$\delta\left|h\left(\frac{h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}}{|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|}\right)\right|^2|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|^2\leq\alpha(u)$$

e

$$\alpha(u)\leq\frac{1}{\delta}\left|h\left(\frac{h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}}{|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|}\right)\right|^2|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|^2.$$

Tomando $N_1=\min\limits_{|v|\leq 1}\{|h(v)|\}$ e $N_2=\max\limits_{|v|\leq 1}\{|h(v)|\}$ vem

$$\delta N_1^2|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|^2\leq\alpha(u)\leq\frac{N_2^2}{\delta}|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|^2.$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{q_1(h(v))}>0$ obtemos

$$\frac{\delta N_1^2}{q_1(h(v))}|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|^2\leq\frac{\alpha(u)}{q_1(h(v))}\leq\frac{N_2^2}{\delta q_1(h(v))}|h^{-1}u-h^{-1}\overline{u}|^2.$$

Sendo agora $N_3=\min\{\dfrac{1}{q_1(h(v))}\}$ e $N_4=\max\{\dfrac{1}{q_1(h(v))}\}$ em $\overline{Br}(\overline{u})$, tomamos $\delta'=min\{\delta N_1^2N_3,\dfrac{\delta}{N_4N_2^2}\}$ vem que

$$\delta'|v-h^{-1}\overline{u}|^2\leq A(v)\leq\frac{1}{\delta'}|v-h^{-1}\overline{u}|^2.$$

Para provar (3.16), seja $\gamma(u)=\dfrac{\alpha(u)}{q_1(u)}$ e assim $A(v)=\gamma(h(v))$. Então $\dfrac{\partial A(v)}{\partial v_j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\gamma}{\partial u_k}(h(v))\frac{\partial h_k}{\partial v_j}(v)$ e

$$\frac{\partial^2A(v)}{\partial v_i\partial v_j}=\sum_{l,k}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial u_l\partial u_k}(h(v))\frac{\partial h_l}{\partial v_i}(v)\right]\frac{\partial h_k}{\partial v_j}(v)+\sum_k\frac{\partial\gamma}{\partial u_k}h(v)\frac{\partial^2h_k}{\partial v_i\partial v_j}(v).\quad(3.17)$$

Usando a condição (2.14)

$$\delta|(\overline{u}-(\overline{u}+he_j)|^2\leq|\alpha(\overline{u}+he_j)|\leq\frac{1}{\delta}|(\overline{u}-(\overline{u}+he_j)|^2,$$

de onde segue

$$\delta|h|\leq\frac{|\alpha(\overline{u}+he_j)|}{h}\leq\frac{1}{\delta}|h|$$

e

$$\lim_{h\to 0}\delta|h| \le \lim_{h\to 0}\frac{|\alpha(\overline{u}+he_j)|}{h} \le \lim_{h\to 0}\frac{1}{\delta}|h|.$$

Portanto

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}(\overline{u}) = 0 \qquad \forall j$$

e assim

$$\nabla\alpha(\overline{u}) = 0.$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}(u) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}(u) - \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}(\overline{u}) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}(tu+(1-t)\overline{u})\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)(tu+(1-t)\overline{u})\right][u-\overline{u}]\,dt,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}(u)\right| &\le \int_0^1 |\alpha''(tu+(1-t)\overline{u})||u-\overline{u}|\,dt \\
&\le r\int_0^1 |\alpha''(tu+(1-t)\overline{u})|\,dt \\
&\le Cr
\end{aligned}$$

sendo $\int_0^1 |\alpha''(tu+(1-t)\overline{u})|\,dt \le C$ pois α'' é suave e $tu+(1-t)\overline{u} \subset \overline{Br}(\overline{u})$.

Como q_1 é suave, temos $q_1(u)$, $\frac{\partial q_1}{\partial u_k}(u)$ e $\frac{\partial^2 q_1}{\partial u_k\partial u_l}(u)$ limitadas para $u \in \overline{Br}(\overline{u})$. Para $r \to 0$ temos

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u_k} = \frac{1}{q_1}\frac{\partial\alpha}{\partial u_k} - \frac{\alpha}{q_1^2}\frac{\partial q_1}{\partial u_k} = O(r)$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\gamma}{\partial u_k\partial u_l} &= \frac{1}{q_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial u_l} - \left\{\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u_k}\frac{q_1^2}{q_1^4} - 2\frac{\alpha q_1}{q_1^4}\frac{\partial q_1}{\partial u_k}\right]\frac{\partial q_1}{\partial u_l} + \frac{\alpha}{q_1^2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial u_k\partial u_l}\right\} \\
&= \frac{1}{q_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial u_l} - \left\{\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u_k}\frac{1}{q_1^2} - 2\frac{\alpha}{q_1^3}\frac{\partial q_1}{\partial u_k}\right]\frac{\partial q_1}{\partial u_l} + \frac{\alpha}{q_1^2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial u_k\partial u_l}\right\} \\
&= \frac{1}{q_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial u_l} + O(r).
\end{aligned}$$

Conseqüentemente obtemos de (3.17) que para $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} w^T A'' w &= (h'w)^T \frac{\alpha''}{q_1}(h'w) + O(r)|w|^2 \\ &\geq C_1|h'w|^2 + C_2 r|w|^2 \\ &\geq C|w|^2 \end{aligned}$$

para algum $C > 0$, quando r é suficientemente pequeno. ■

Recordamos que já construímos um par de entropia-fluxo de entropia (α, β) para o sistema (3.4) e que $\alpha'' > 0$ (consideramos aqui que D é um múltiplo positivo da matriz identidade). Vimos que a transformação de (3.4) em (3.5) envolve somente uma mudança das variáveis dependentes. Portanto $q_1 = 1$ e $q_2 = 0$ neste caso são tais que as hipóteses (3.12) e (3.13) da Proposição 3.1 são satisfeitas. Para a transformação no sistema de coordenadas Eulerianas (3.6) e (3.7), as funções q_1 e q_2 são dadas por (3.8); ou seja, $q_1 = \dfrac{1}{\rho} = v$ e $q_2 = u$. Assim $q_1 > 0$ pois a densidade é positiva e de (3.5)

$$\begin{aligned} \nabla q_1^T f' + \nabla q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} \\ \frac{\partial v}{\partial E} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial(-u)}{\partial v} & \frac{\partial(-u)}{\partial u} & \frac{\partial(-u)}{\partial E} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial E} \\ \frac{\partial(up)}{\partial v} & \frac{\partial(up)}{\partial u} & \frac{\partial(up)}{\partial E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial E} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_v & 0 & 0 \\ up_v & p & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = 0 \end{aligned}$$

e assim (3.13) é satisfeito. A Proposição 3.1 se aplica para mostrar que existe um par de entropia-fluxo de entropia (A, B) para cada um dos sistemas (3.5) a (3.7), satisfazendo (3.13), (3.14) e (3.15). O Corolário 2.1 então se aplica no seguinte resultado de existência para estes sistemas:

Assuma que $\overline{Br}(\overline{u})$ é uma bola fechada suficientemente pequena num espaço de fase em que a densidade é positiva. Assuma que o (vetor) dado inicial $u_0(x) - \overline{u} \in \overline{B_{s'}}(\overline{u})$ q.t.p, para algum $s' < r$ e que $\|u_0 - \overline{u}\|_2$ tem restrições apropriadas (novamente como no Corolário 2.1). Então cada um dos sistemas

(3.5) a (3.7), modificado pela adição do termo DU_{xx} como em (2.1), e com D sendo um múltiplo positivo da matriz identidade, tem uma solução global suave.

Capítulo 4

A não Suavidade na Dinâmica dos Gases

Neste último capítulo, consideraremos as equações da dinâmica dos gases com os usuais mecanismos dissipativos tomados nos cálculos (viscosidade ou condutividade térmica). Mostraremos que se a solução é de variação limitada e se o volume específico (= o inverso da densidade) é inicialmente descontínuo, então ele permanece descontínuo para o tempo positivo.

Podemos escrever as equações de dinâmica dos gases em coordenadas Lagrangeanas como segue:

$$\begin{cases} v_t - u_x = & 0 \\ u_t + p_x = & (k(v)u_x)_x \\ E_t + (up)_x = & \left\{ \dfrac{\left[\epsilon \frac{u^2}{2} + \frac{\lambda}{C_v}\left(E - \frac{u^2}{2}\right)\right]_x}{v} \right\}_x. \end{cases} \tag{4.1}$$

Aqui v, u, $p(v,e)$ e E são as mesmas variáveis como em (3.5). Assumimos que p e k são funções C^1 de seus argumentos na região $\{v > 0\}$. Os mecanismos dissipativos ϵ e λ são chamados de coeficientes de viscosidade e condutividade térmica, respectivamente, e C_v é o calor específico do volume constante. Assumimos que $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$. A função $k(v)$ é assumida positiva em $\{v > 0\}$ (na dinâmica dos gases usualmente tomamos $k(v) = v^{-1}$).

Consideremos o problema de valor inicial para (4.1), onde os dados iniciais são dados por

$$(v,u,E)(x,0) = (v_0,u_0,E_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Queremos resolver (4.1) no semi - plano superior, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, com os dados iniciais de (4.2). Como consideraremos dados descontínuos, é necessário definir precisamente nossa noção de solução.

Definição 4.1 *Uma tripla de funções $(v(x,t), u(x,t), E(x,t))$ é chamada de solução (fraca) de (4.1)-(4.2) em $t > 0$, se vale o seguinte:*

a) v, u e E estão em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$. A função v é tal que $p(v,e) \in L^1_{loc}(t \geq 0)$ e $k(v) \in L^\infty_{loc}(t \geq 0)$ (Note que em dinâmica dos gases $k(v) = v^{-1}$, $p(v,e) = (\gamma^{-1})ev^{-1}$ e é suficiente assumir que v é localmente limitada fora de uma vizinhança de zero).

b) As derivadas no sentido das distribuições, v_t, u_x e $\left[\epsilon\frac{u^2}{2} + \frac{\lambda}{C_v}\left(E - \frac{u^2}{2}\right)\right]_x$ estão em $L^1_{loc}(t > 0)$ e $v_t = u_x$ q.t.p em $t > 0$.

c) u, v e E estão em $L^1_{loc}(t > 0)$ e para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $v(x,t) > 0$.

d) Para cada $\phi \in C^1$, sendo que ϕ tem seu suporte contido num conjunto da forma $\{x_1 \leq x \leq x_2\} \times \{0 \leq t_1 \leq t \leq t_2\}$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\phi \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} u\phi_t + p\phi_x \, dxdt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} k(v)u_x\phi_x \, dxdt \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} E\phi\Big|_{t_1}^{t_2} dx \;&=\; \left\{ \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} E\phi_t + up\phi_x \, dxdt \;- \right. \\ &\left. - \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\epsilon\frac{u^2}{2} + \frac{\lambda}{C_v}\left(E - \frac{u^2}{2}\right)\right]_x}{v}\phi_x \, dxdt \right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

e) $[v(.,t), u(.,t), E(.,t)] \;\to\; [v_0(.), u_0(.), E_0(.)]$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, quando $t \searrow 0$.

Teorema 4.1 *Seja (v,u,E) uma solução de (4.1) no sentido da Definição 4.1. Suponhamos também que $v(.,t)$ é localmente limitada longe de zero e que, para cada intervalo $[a,b]$, a variação em $[a,b]$ de cada uma das funções $u(.,t)$, $v(.,t)$ e $E(.,t)$ é limitada independente de t para $t \in [0,T]$. Então se $v(.,t)$ é contínua para $0 < t \leq T$, a função inicial $v(.,0)$ também precisa ser contínua.*

Demonstração: Fixe um intervalo $[a,b]$ e tome V como sendo uma limitação para a variação de cada uma das funções $u(.,t)$, $v(.,t)$ e $E(.,t)$ em $[a,b]$ para $0 \leq t \leq T$. Sejam t_1 e t_2 tempos em $(0,T]$ e seja $\phi(x)$ uma função teste com suporte em $[a,b]$. Então temos de (4.3) que

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} k(v(x,t))u_x(x,t)\phi_x(x)\,dxdt &= -\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\phi(x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} [u(x,t)\phi_t(x) + p(v,e)(x,t)\phi_x(x)]dxdt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\phi(x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} p(v(x,t),e(x,t))\phi_x(x)\,dxdt
\end{aligned}$$

pois $\phi_t(x) = 0$. Integrando a segunda integral, do lado direito da igualdade por partes em x, vem

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} k(v(x,t))u_x(x,t)\phi_x(x)\,dxdt &= -\int_{[a,b]} [u(x,t_2) - u(x,t_1)]\phi(x)dx \; - \\
&- \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)[p(v(x,t),e(x,t))]_x\,dxdt \\
&\leq \|\phi\|_\infty \left\{ \int_{[a,b]} |u(x,t_2) - u(x,t_1)|\,dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_{[a,b]} \left[\frac{\partial p}{\partial v}v_x + \frac{\partial p}{\partial e}e_x\right]\,dxdt \right\} \\
&\leq \|\phi\|_\infty \|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^1[a,b]} + C'\|\phi\|_\infty \int_{t_1}^{t_2}\int_{[a,b]} [v_x + e_x]\,dxdt \\
&= \|\phi\|_\infty \|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^1[a,b]} + C'\|\phi\|_\infty \int_{t_1}^{t_2} [v(x,t) + e(x,t)]\big|_a^b\,dt \\
&\leq \|\phi\|_\infty \|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^1[a,b]} + 2C'\|\phi\|_\infty V(t_2 - t_1) \\
&\leq \|\phi\|_\infty \|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^1[a,b]} + C\|\phi\|_\infty |t_1 - t_2| V
\end{aligned}$$

pois $p \in C^1$ e $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Deste modo

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} k(v(x,t))u_x(x,t)\phi_x(x)\,dxdt = \|\phi\|_\infty \omega(|t_2 - t_1|), \tag{4.5}$$

onde $\omega(\delta) \to 0$ quando $\delta \to 0$. Mas da Definição 4.1 b), $k(v)v_t = k(v)u_x$ q.t.p $t > 0$. Assim (4.5) nos dá

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} k(v(x,t))v_t(x,t)\phi_x(x)\, dxdt = \|\phi\|_\infty \omega(|t_2 - t_1|). \tag{4.6}$$

Agora seja K uma primitiva de k, isto é $K' = k$. Afirmamos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} k(v(x,t))v_t(x,t)\phi_x(x)\, dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} K(v(x,t))\Big|_{t_1}^{t_2} \phi_x(x)\, dx. \tag{4.7}$$

Para provar isto, sejam J_ϵ mollifiers usuais, definimos $v_\epsilon = J_\epsilon * v$ e $K_\epsilon = K(v_\epsilon)$. Segue das propriedades dos mollifiers que $v_\epsilon \to v$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [t_1, t_2])$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}(v_\epsilon - v) \to 0$ em $L^1_{loc}(t > 0)$ pois $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [t_1, t_2])$ e $v_t \in L^1_{loc}(t > 0)$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} K\Big|_{t_1}^{t_2} \phi_x(x)\, dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} K_\epsilon\Big|_{t_1}^{t_2} \phi_x(x)\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} K_\epsilon\right) \phi_x(x)\, dtdx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} k(v_\epsilon) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} \phi_x(x)\, dtdx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} k(v_\epsilon) \left[\frac{\partial v}{\partial t} \phi_x(x)\right] dtdx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} k(v_\epsilon) \left[\frac{\partial (v_\epsilon - v)}{\partial t} \phi_x(x)\right] dtdx \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial (v_\epsilon - v)}{\partial t} \to 0$ em $L^1_{loc}(t > 0)$ e $k(v_\epsilon)$ é limitada (pois $k \in C^1$ de seus argumentos e $v_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R} \times [t_1, t_2])$ por propriedades dos mollifiers), vemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} k(v_\epsilon) \left[\frac{\partial (v_\epsilon - v)}{\partial t} \phi_x(x)\right] dtdx = 0.$$

Também

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} k(v_\epsilon) \left[\frac{\partial v}{\partial t} \phi_x(x)\right] dtdx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} k(v) \frac{\partial v}{\partial t} \phi_x(x)\, dtdx$$

desde que k é limitada (pois $k \in C^1$ de seus argumentos) e $v_\epsilon \to v$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [t_1, t_2])$. Portanto vale (4.7).

Usando (4.7) em (4.6), vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(v(x,t))\Big|_{t_1}^{t_2} \phi_x(x)\,dx = \|\phi\|_\infty \omega(|t_2 - t_1|),$$

para toda função suave ϕ com suporte em $[a,b]$. Usando a definição de função de variação limitada em $[a,b]$ obtemos:

$$\begin{aligned} Var_{[a,b]}[K(v(.,t_2)) - K(v(.,t_1))] &= \int_{-\infty}^{\infty} K(v(x,t))\Big|_{t_1}^{t_2} \phi_x(x)\,dx \\ &\leq \omega(|t_2 - t_1|) \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\lim_{t_1,t_2 \to 0} \sup_{x \in [a,b]} |K(v(x,t_2)) - K(v(x,t_1))| = 0.$$

Disto segue que a seqüência $\{K(v(x,t_k))\}$ ($t_k \to 0$ quando $k \to +\infty$) é uma seqüência de Cauchy na norma $L^\infty([a,b])$, logo convergente. Como v é contínua em $t > 0$ (por hipótese) temos que $K(v(x,t))$ é contínua e converge uniformemente em x, segue que $K(v(x,t))$ converge a uma função contínua quando $t \to 0$. Mas de e) na Definição 4.1

$$\lim_{t \to 0} K(v(.,t)) = K(v_0(.))$$

em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pela unicidade do limite, segue que $K(v_0(x))$ é uma função contínua. Suponhamos que $v_0(x)$ não é contínua num ponto $y \in \mathbb{R}$, logo existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| < \delta$ e $|v_0(x) - v_0(y)| \geq \epsilon_0$. Usando o Teorema do Valor Médio e o fato de que $K'(v) = k(v) > 0$ (logo existe $r' > 0$ tal que $K'(\xi) \geq r'$ para todo ξ no segmento $[v_0(x), v_0(y)]$) temos

$$|K(v_0(x)) - K(v_0(y))| = K'(\xi)|v_0(x) - v_0(y)| \geq r'\epsilon_0.$$

Portanto $v_0(x)$ é contínua. ∎

O Teorema 4.1 nos mostra que para soluções fracas apropriadas dos sistemas não podemos ter descontinuidades iniciais para a densidade ($\rho = \frac{1}{v}$). Se ocorrer uma descontinuidade no dado inicial para a densidade então esta descontinuidade deve persistir para $t > 0$.

Em seguida, temos algum interesse em investigar a suavidade das funções u e E. Para isto nos baseamos num teorema de Aronson e Serrin [AS], relativo a soluções das equações parabólicas com coeficientes descontínuos:

Teorema 4.2 *(Aronson e Serrin): Consideremos a equação linear*

$$u_t = [A(x,t)u_x + B(x,t)]_x,$$

onde A é limitada e mensurável no domínio limitado $Q = (0,T)\times\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $A \geq \delta > 0$ em Q e B está em $L^{p,q}(Q)$, isto é, $\left\{\int_0^T \left(\int_\Omega |B|^p\, dx\right)^{\frac{q}{p}} dt\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty$, onde $q \geq 1$, $p > 2$ e $\frac{1}{2p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$. Sob estas hipóteses, se u é uma solução fraca então u é Hölder contínua em x e uniformemente Hölder contínua em t em $Q \cap \{t \geq \epsilon > 0\}$ para $\epsilon > 0$.

Corolário 4.1 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1 são válidas e que $(u^2)_x \in L^{p,q}$, onde $q \geq 1$, $p > 2$ e $\frac{1}{2p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$. Então em $t > 0$, u e E são Hölder contínuas em x e são localmente contínuas em t.*

Demonstração: Seja $Q = (a,b) \times (0,T)$. Aplicaremos o resultado acima (Teorema de Aronson-Serrin) à segunda equação de (4.1), que escrevemos na forma

$$u_t = [k(v)u_x - p(v,e)]_x.$$

Como as funções $k(v)$ e $p(v,e)$ são limitadas em Q (pois são de classe C^1 e Q é limitado) e $k(v) \geq \delta > 0$ em Q, para algum $\delta = \delta_Q > 0$, pelo Teorema de Aronson-Serrin, u é Hölder contínua em x em (a,b) e Hölder contínua em t em $Q \cap \{t \geq \epsilon > 0\}$ para $\epsilon > 0$, ou seja, localmente.

A fim de mostrar que E é Hölder contínua em x e localmente Hölder contínua em t, consideremos a terceira equação de (4.1), na forma

$$E_t = \left\{ \frac{\lambda}{vC_v} E_x + \frac{\left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{\lambda}{2C_v}\right]}{v} (u^2)_x - up \right\}_x$$

Temos $\dfrac{\lambda}{vC_v}$ limitada e mensurável em Q (λ e C_V são constantes e v é localmente limitada pela hipótese do Teorema 4.1). Também temos $v > 0$ e $\lambda > 0$, logo $\dfrac{\lambda}{vC_v} > 0$ em Q. Portanto $A(x,t) = \dfrac{\lambda}{vC_v}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Arronson-Serrin. Temos ainda $B(x,t) = \left[\dfrac{\left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{\lambda}{2C_v}\right]}{v} (u^2)_x - up \right] \in L^{p,q}(Q)$ pois

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^T \left(\int_{[a,b]} \left| \frac{\left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{\lambda}{2C_v}\right]}{v} (u^2)_x \right|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right\}^{\frac{1}{q}} &\leq C \left\{ \int_0^T \left(\int_{[a,b]} |(u^2)_x|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

onde $C = \dfrac{\left|\frac{\epsilon}{2} - \frac{\lambda}{2C_v}\right|}{|v|}$ e usando a hipótese de $(u^2)_x \in L^{p,q}(Q)$ e

$$\left\{ \int_0^T \left(\int_{[a,b]} |up|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty$$

pelo fato de p ser de classe C^1 de seus argumentos e u ser de variação limitada em $[a,b]$. Pelo Teorema de Aronson-Serrin, E é Hölder contínua em x em (a,b) e Hölder contínua em t em $Q \cap \{t \geq \epsilon\}$, para $\epsilon > 0$, ou seja, localmente. ■

Note que se considerarmos a isentropia das equações da dinâmica dos gases:

$$v_t - u_x = 0, \qquad u_t + [p(v)]_x = [k(v)u_x]_x,$$

onde k satisfaz as mesmas hipóteses de antes (conforme Teorema 4.1) se (v,u) é uma solução no sentido da Definição 4.1, $v(.,t)$ e $u(.,t)$ são de variação limitada e $v(.,t)$ é contínua para $0 < t \leq T$ então $v(.,0)$ é contínua (consequência do Teorema 4.1) e $u(x,t)$ é contínua em $t > 0$ (consequência do Corolário 4.1).

Referências Bibliográficas

[AS] ARONSON, D. and SERRIN, J. : **Local Behavior of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations**, Arch. Rat. Mech. Anal. t. 25, 1967, 81-122.

[E] EVANS, L.C.: **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[EG] EVANS, L.C. and GARIEPY, R. F.: **Measure Theory and Fine Properties of Functions**, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[HS] HOFF, D. and SMOLLER, J.: **Solutions in the Large for Certain Nonlinear Parabolic Systems**, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.2, n^0 3, 1985, 213-235.

[H] HÖRMANDER, L. : **The Anaysis of Linear Partial Differential Operators** , Vol.1, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[LSU] LADYZENSKAJA, O. A., SOLONNIKOV, V. A. and URAL'CEVA, N. N. : **Linear and Quase-linear Equations of Parabolic**, Amer. Math. Soc. Translation, Province, 1968.

[L] LIMA, E. L.: **Curso de Análise**, Vol.2, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[Lu] LUNARDI, A.: **Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems**, Birkhäuser Verlag AG, Basel, Switzerland, 1995.

[O] OLIVEIRA, C. R.: **Introdução à Análise Funcional**, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[Sm] SMOLLER, J.: **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[S] STEIN, E. M.: **Singular Integrals and Differentiability of Functions**, Princeton University Press, United States of America, 1970.