UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marinez Bronzatti

As hipersuperfíces de Sbrana-Cartan

São Carlos - SP
Janeiro de 2013

O presente trabalho teve suporte financeiro da Capes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

As hipersuperfícies de Sbrana-Cartan

Marinez Bronzatti
Orientador: Prof Dr. Ruy Tojeiro
Bolsista Capes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Janeiro de 2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

B869hs

Bronzatti, Marinez.
As hipersuperfíces de Sbrana-Cartan / Marinez Bronzatti. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
63 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática. 2. Geometria. I. Título.

CDD: 510 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ruy Tojeiro Figueiredo Junior
DM - UFSCar

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
DM - UFSCar

Fernando Manfio

Prof. Dr. Fernando Manfio
ICMC - USP

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pois sem Ele nada conseguiria.

Aos meus pais e a todos meus familiares que sempre me apoiam e incetivam.

Ao Professor Ruy Tojeiro, pela excelente orientação.

Aos Professores Fernando Manfio e Guillermo Antonio Lobos Villagra por aceitarem o convite de compor a banca examinadora e pelas críticas e sugestões ao trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

A todos os meus amigos, em especial a amiga e colega Larissa Terres que perdeu sua vida na boate Kiss em Santa Maria no dia 27-01-2013.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a terminar essa dissertação.

Resumo

Neste trabalho, baseado nos artigos [5] e [6], apresentamos a classificação das hipersuperfícies do espaço Euclidiano que admitem deformações isométricas não triviais, chamadas de hipersuperfícies de Sbrana-Cartan, por meio da parametrização de Gauss.

Abstract

In this work, based on the papers [5] and [6], we present the classification of Euclidean hypersurfaces that admit nontrivial isometric deformations, called Sbrana -Cartan hypersurfaces, by means of the Gauss parameterization.

Sumário

Introdução

Uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície de Sbrana-Cartan* se M^n é uma variedade Riemanniana que não possui pontos de curvatura seccional nula e existe uma imersão $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que não é congruente a f em nenhum subconjunto aberto $U \subset M^n$.

O estudo de hipersuperfícies de Sbrana-Cartan foi feito no início do século passado por Sbrana [10] e Cartan [2] baseado em trabalhos anteriores de Biannchi [1] e Schur [11]. Essas hipersuperfícies têm posto dois, isto é, duas curvaturas principais não nulas em todos os pontos, e podem ser divididas em quatro classes distintas. A primeira delas consiste das hipersuperfícies *regradas*, isto é, aquelas que possuem uma folheação de codimensão um por subconjuntos abertos de subespaços afins. Outra classe é formada pelas hipersuperfícies que são produtos de fatores Euclidianos por superfícies em $\mathbb{R}^3$ ou por cones sobre superfícies na esfera $\mathbb{S}^3$, as quais são denominadas, respectivamente, por hipersuperfíces dos tipos (I) e (II).

O principal resultado na teoria de Sbrana-Cartan, ao qual o presente trabalho é dedicado, é a descrição das duas classes restantes por meio da chamada *parametrização de Gauss*. Nossa abordagem é baseada nos artigos [5] e [6].

A dissertação é dividida em dois capítulos. No primeiro, discutimos os pré-requisitos necessários à classificação das hipersuperfícies de Sbrana-Cartan. Em particular, estabelecemos fatos básicos da teoria de subvariedades restrita ao caso de hipersuperfícies, definimos a distribuição de nulidade relativa de uma imersão isométrica e o correspondente tensor de decomposição. Caracterizamos as hipersuperfícies dos tipos (I) e (II) em termos da estrutura do tensor de decomposição e introduzimos a parametrização de Gauss de uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de posto constante.

No Capítulo 2, apresentamos a classificação das hipersuperfícies de Sbrana-Cartan que não são regradas e nem dos tipos (I) e (II), a qual é dividida em quatro lemas distintos, demonstrados nas seções finais. A classificação é baseada na parametrização de Gauss, a qual permite recuperar uma hipersuperfície de posto constante de $\mathbb{R}^{n+1}$ a partir de sua função suporte e de sua imagem pela aplicação de Gauss na esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. As superfícies de $\mathbb{S}^n$ que aparecem como aplicações de Gauss de hipersuperfícies de Sbrana-Cartan são estudadas na primeira seção desse capítulo.

Capítulo

1

Pré-requisitos

Neste capítulo, discutimos os pré-requisitos necessários à classificação das hipersuperfícies de Sbrana-Cartan. Na primeira seção, introduzimos a segunda forma fundamental de uma imersão isométrica, por meio das fórmulas de Gauss e Weingarten, e obtemos as equações de Gauss e Codazzi. Enunciamos o teorema fundamental das hipersuperfícies, o qual assegura que essas equações são suficientes para determinar unicamente uma hipersuperfície do espaço euclidiano, a menos de movimento rígido do espaço ambiente. Definimos a distribuição de nulidade relativa de uma imersão isométrica e o seu tensor de decomposição associado. Caracterizamos as hipersuperfícies dos tipos (I) e (II) como aquelas para as quais o tensor de decomposição possui as duas estruturas mais simples possíveis. Introduzimos a parametrização de Gauss de uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de posto constante. Finalmente, descrevemos condições necessárias e suficientes para que um tensor em uma variedade Riemanniana com distribuição totalmente geodésica seja projetável com respeito à aplicação quociente no espaço de folhas.

1.1 Equações básicas de uma hipersuperfície

Sejam M^n e $\tilde{M}^m$ variedades diferenciáveis com dimensões n e m, respectivamente. Dizemos que a aplicação diferenciável $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão se a diferencial $f_* : T_xM \to T_{f(x)}M$ é injetiva para todo $x \in M^n$. O número $p = m-n$

é chamado de *codimensão* de f. Em particular, f é uma *hipersuperfície* se $p = 1$.

Uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^m$ entre variedades Riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{M}}$ é dita ser uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle f_* X, f_* Y \rangle_{\tilde{M}}$$

para todos X, Y em TM. Se $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão, denotamos por f^*TM o fibrado induzido sobre M^n, cuja fibra no ponto $x \in M^n$ é $T_{f(x)}\tilde{M}$.

A conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de M^m induz naturalmente uma única conexão $\hat{\nabla}$ em $f^*T\tilde{M}$ tal que $\hat{\nabla}_X(Z \circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X} Z$, para quaisquer $x \in M^n$ e X e $Z \in T\tilde{M}$. Daqui por diante identificaremos $\hat{\nabla}$ com $\tilde{\nabla}$.

Dados campos vetoriais $X, Y \in TM$, temos a decomposição ortogonal

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T + (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\perp$$

nas componentes tangente e normal com respeito a f. É fácil verificar que a expressão

$$\nabla_X Y = f_*^{-1} (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T$$

define uma conexão simétrica e compatível com a métrica em TM, logo coincide com a conexão de Levi-Civita de M^n.

Denotamos por $N^f M$ o fibrado normal de f. Esse é o fibrado vetorial cuja fibra em $x \in M^n$ é o complemento ortogonal $(f_* T_x M)^\perp$ de $f_* T_x M$ em $T_{f(x)}\tilde{M}$.

A aplicação $\alpha : TM \times TM \to N^f M$ definida por

$$\alpha(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\perp$$

é chamada de *segunda forma fundamental* de f. Dessa forma, podemos escrever

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

conhecida como *fórmula de Gauss.*

O operador de forma A_ξ de f em $x \in M^n$ com respeito a $\xi \in N_xM$ é definido por

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$. Assim, dados os campos de vetores $X, Y \in TM$ e $\xi \in N^fM$, temos

$$\langle \tilde{\nabla}_X \xi, f_*Y\rangle = -\langle \xi, \tilde{\nabla}_X f_*Y\rangle = -\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = -\langle A_\xi X, Y\rangle.$$

Logo, a componente tangente de $\tilde{\nabla}_X\xi$ é $-f_*A_\xi X$. A componente normal $\nabla^\perp_X\xi := (\tilde{\nabla}_X\xi)^\perp$ define uma conexão compatível em N^fM, chamada *conexão normal* de f. Temos então

$$\tilde{\nabla}_X\xi = -f_*A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi,$$

conhecida como a *fórmula de Weingarten.*

Para uma hipersuperfície $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, o campo normal unitário ξ é localmente único a menos de sinal. Podemos fixá-lo e dessa forma escrevemos A o operador de forma A_ξ. Então, a fórmula de Gauss fica

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle\xi$$

e a fórmula de Weingarten se reduz a

$$\tilde{\nabla}_X\xi = -f_*AX.$$

Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície orientável então ξ está globalmente definido em M^n. Podemos então definir a aplicação de Gauss

$$\phi : M^n \to \mathbb{S}^n$$

de f, tomando valores na esfera unitária, cujo valor em $x \in M^n$ é o transporte paralelo de $\xi_x \in N_xM$ para a origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Já que os subespaços f_*T_xM e $T_{\phi(x)}\mathbb{S}^n$ possuem $\phi(x) = \xi_x$ como vetor normal, podemos identificá-los por translação e interpretar a diferencial da aplicação de Gauss $\phi_*(x)$ em x como uma aplicação linear de T_xM sobre f_*T_xM. Assim, segue da fórmula de Weingarten que

$$\phi_*(x) = -f_*A_{\xi_x}.$$

O *tensor curvatura*, denotado por R, de uma variedade Rimanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in TM$ uma aplicação

$$R(X,Y) : TM \to TM$$

dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{1.1}$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, podemos deduzir as equações de compatibilidade de uma hipersuperfície $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, em que M^n e $\tilde{M}^{n+1}$ são variedades Riemannianas com tensores de curvatura R e $\tilde{R}$, respectivamente. Dados $X, Y, Z \in TM$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X\nabla_Y Z + \tilde{\nabla}_X\alpha(Y,Z) \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z &= \tilde{\nabla}_Y\nabla_X Z + \tilde{\nabla}_Y\alpha(X,Z) \\ &= \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y. \end{aligned} \tag{1.3}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z &= \nabla_{[X,Y]} + \alpha([X,Y],Z) \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z). \end{aligned} \tag{1.4}$$

De (1.2), (1.3) e (1.4) obtemos a *equação de Gauss*

$$R(X,Y,Z) = (\tilde{R}(X,Y,Z))^T + (AX \wedge AY)Z,$$

em que

$$(X \wedge Y)Z := \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

De forma equivalente,

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle - \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in TM$. Em termos das curvaturas seccionais, escrevemos

$$K(X,Y) = \tilde{K}(X,Y) + \langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle^2.$$

De modo análogo obtemos a *equação de Codazzi*

$$(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y,$$

em que

$$(\nabla_Y A)X = \nabla_Y AX - A\nabla_Y X.$$

Se $\tilde{M}^{n+1}$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, as equações de Gauss e Codazzi reduzem-se, respectivamente, a

$$R(X,Y)Z = (AX \wedge AY)Z \tag{1.5}$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y. \tag{1.6}$$

As *curvaturas principais* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ de f em x com respeito ao campo normal unitário ξ_x são definidas como os autovalores do operador de forma

A. Cada autovetor unitário de A é chamado de uma *direção principal* de f em x.

Dada uma base ortonormal $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de direções principais de f em $x \in M^n$, a equação de Gauss fica

$$K(X_i, X_j) = \tilde{K}(X_i, X_j) + \lambda_i \lambda_j,$$

ou, se $\tilde{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$,

$$K(X_i, X_j) = \lambda_i \lambda_j$$

com $i = j = 1, ...n$.

1.1.1 O Teorema fundamental de hipersuperfícies

Dadas uma variedade Riemanniana orientada $\tilde{M}^{n+1}$ e hipersuperfícies $f, g : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, existe uma isometria bem-definida de fibrados vetoriais

$$\phi : N^f M \to N^g M.$$

De fato, fixada uma orientação de $\tilde{M}^{n+1}$, para cada $x \in M^n$ tome uma base ordenada $\{X_1, ...X_n\}$ de T_xM e um vetor normal unitário $\xi_x \in N^f_x M$ tais que $\{f_* X_1, ...f_* X_n, \xi_x\}$ está positivamente orientada em $N^f_{f(x)}\tilde{M}$. Então, existe um único vetor normal unitário $\eta_x \in N^g_x M$ tal que a base ordenada $g_* X_1, ...g_* X_n, \eta_x$ está positivamente orientada em $N^g_{g(x)}\tilde{M}$. Assim, é suficiente definir $\phi : N^f M \to N^g M$ como a aplicação entre fibrados que leva ξ_x em η_x para cada $x \in T_xM$. Claramente, ϕ e $-\phi$ são as únicas tais isometrias.

Uma demonstração do teorema a seguir encontra-se em [7].

Teorema 1.1.1. *(i) Existência: Sejam M^n uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e A uma seção simétrica de $Hom(TM, TM)$ satisfazendo (1.5) e (1.6). Então, existem uma imersão isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ e um campo de vetores normais unitários ξ tais que A coincide com o operador forma A_ξ de f com respeito a ξ.*

(ii) Unicidade: Sejam $f, g : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ imersões isométricas de uma variedade Riemanniana. Suponha que

$$\phi \circ \alpha_f = \alpha_g$$

para uma das isometrias $\phi : N^f M \to N^g M$. Então existe uma isometria $\tau : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\tau \circ f = g$ e $\tau_*|_{N^f M} = \phi$.

1.2 A distribuição de nulidade relativa

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m$ entre variedades Riemannianas, o subespaço de *nulidade relativa* $\Delta(x)$ de f em x como o núcleo da segunda forma fundamental em x, isto é,

$$\Delta(x) = \{X \in T_x M; \alpha(X, Y) = 0, \text{ para todo } Y \in T_x M\}.$$

A dimensão $\nu(x)$ de $\Delta(x)$ é chamada *o índice de nulidade relativa* de f em x. O número $n - \nu(x)$ é chamado de *posto* de f em x. A imersão f é *totalmente geodésica* em x se $\alpha_f = 0$, ou seja, $\nu(x) = n$.

Proposição 1.2.1. *Seja $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ imersão isométrica, então valem as seguintes afirmações:*

(i) A distribuição de nulidade relativa $x \to \Delta(x)$ é diferenciável em cada subconjunto aberto U em que ν é constante.

(ii) Se $\tilde{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c e $U \subset M^n$ é um subconjunto aberto em que ν é constante, então Δ é uma distribuição totalmente geodésica (logo, integrável) em M^n e a restrição de f a cada folha é totalmente geodésica.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\Delta^\perp(x) = A(T_x M)$. Assim, se $x_0 \in U$ é tal que $\nu(x_0) = k$, existem $X_1, ..., X_{n-k} \in T_{x_0} M$ tais que

$$\Delta(x_0)^\perp = span\{A_{\xi_i} X_j\}_{1 \leq j \leq n-k}.$$

Considere as extensões locais de $X_1, ..., X_{n-k}$. Por continuidade, o conjunto de vetores $\{A_{x_i}X_j\}$, $1 \leq j \leq n-k$, é linearmente independente em uma vizinhança $V \subset U$ de x_0. Isto implica que $\Delta(x_0)^{\perp}$ e, portanto, Δ é uma distribuição diferenciável no aberto U contendo x_0. Agora, provaremos a afirmação (ii). Dados $X, Y \in \Delta$ e $Z \in TM$ temos

$$\langle A(\nabla_X Y), Z\rangle = \langle \nabla_X Y, AZ\rangle = X\langle Y, AZ\rangle - \langle Y, \nabla_X AZ\rangle = \langle Y, (\nabla_X A)Z\rangle.$$

Usando a equação de Codazzi, obtemos

$$\langle A(\nabla_X Y), Z\rangle = \langle Y, (\nabla_Z A)X\rangle = \langle Y, \nabla_Z AX - A(\nabla_Z X)\rangle = 0,$$

logo $\nabla_X Y \in \Delta$. Isto mostra que Δ é totalmente geodésica. Por fim, para quaisquer $X, Y \in \Delta$ temos

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y) = f_* \nabla_X Y \in f_* \Delta.$$

Portanto, a restrição de f a cada folha de Δ é totalmente geodésica.

□

1.2.1 O tensor de decomposição

Sejam M^n uma variedade Riemanniana e D uma distribuição totalmente geodésica em um subconjunto aberto $U \subset M^n$. Definimos uma distribuição $D^{\perp}$ em U tomando, para cada $x \in U$, o complemento ortogonal $\Delta_x^{\perp}$ de D_x em T_xM. Associamos a cada $T \in D$ um operador $C_T : D^{\perp} \to D^{\perp}$ definido por

$$C_T X = -P(\nabla_X T)$$

em que $P : TU \to D^{\perp}$ é a projeção ortogonal.

A aplicação $C : D \times D^{\perp} \to D^{\perp}$ é um tensor. De fato, sejam $T \in D$ e $X \in D^{\perp}$. Assim,

$$C\left(hT, X\right) = C_{hT}X = -P(\nabla_X hT) = -(P(X(h)) + h\nabla_X T) = hC_T X = hC(T, X)$$

e

$$C\left(T, hX\right) = C_T hX = -P(\nabla_h XT) = -P(h\nabla_X T) = hC_T X = hC\left(T, X\right),$$

em que $h \in C^{\infty}\left(U\right)$. O tensor C é chamado *tensor de decomposição* de D.

Dada uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, com índice de nulidade relativa constante $\nu = k$, estabelecemos no lema seguinte algumas propriedades do tensor de decomposição associado à sua distribuição de nulidade relativa Δ. Dado $X \in TM$, escrevemos $X = X^v + X^h$, com $X^v \in \Delta$ e $X^h \in \Delta^{\perp}$.

Lema 1.2.2. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica com índice de nulidade relativa constante $\nu = k$ e C o tensor de decomposição associado a sua distribuição de nulidade relativa Δ. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) $\nabla_T C_{T'} = C_{T'} C_T + C_{\nabla_T T'}$, *para todos T e $T' \in \Delta$.*

(ii) $\left(\overset{h}{\nabla}_X\, C_T\right) Y - \left(\overset{h}{\nabla}_Y\, C_T\right) X = C_{\left(\overset{v}{\nabla}_X T\right)} Y - C_{\left(\overset{v}{\nabla}_Y T\right)} X$, *para quaisquer X, $Y \in \Delta^{\perp}$.*

Demonstração. Começamos demonstrando a afirmação (i). Dado $X \in \Delta^{\perp}$ temos,

$$\begin{aligned} \left(\nabla_T C_{T'}\right) X &= \nabla_T C_{T'} X - C_{T'} \nabla_T X \\ &= -\nabla_T \overset{h}{\nabla}_X T' - C_{T'} \nabla_T X. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como Δ é totalmente geodésica e $\overset{h}{\nabla}_X T' \in \Delta^{\perp}$, ou seja, $\overset{v}{\nabla}_T \overset{h}{\nabla}_X T' = 0$. Ainda, temos $\overset{h}{\nabla}_T \overset{v}{\nabla}_X T' = 0$.

Assim,

$$(\nabla_T C_{T'})\, X = -\overset{h}{\nabla}_T \nabla_X T' - C_{T'} \nabla_T X. \tag{1.8}$$

Agora, pela equação de Gauss temos

$$\nabla_T \nabla_X T' - \nabla_X \nabla_T T' - \nabla_{[T,X]} T' = R(T,X)T' = (AT \wedge AX)T' = 0.$$

Além disso, como Δ é totalmente geodésica temos $\overset{h}{\nabla}_{[T,X]^v} T' = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} -\overset{h}{\nabla}_T \nabla_X T' &= C_{\nabla_T T'} X - \left(\overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_T X} T' - \overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_X T} T' \right) \\ &= C_{\nabla_T T'} X + C'_T \nabla_T X + C_{T'} C_T X. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Substituindo (1.9) em (1.8) obtemos

$$\nabla_T C_{T'} = C_{T'} C_T + C_{\nabla_T T'}.$$

Por fim, verificamos a afirmação (ii) do lema. Sejam $X,\, Y \in \Delta^\perp$ e $T \in \Delta$. Temos que

$$\begin{aligned} \left(\overset{h}{\nabla}_X C_T \right) Y &= \overset{h}{\nabla}_X C_T T - C_T \overset{h}{\nabla}_X Y \\ &= -\overset{h}{\nabla}_X \overset{h}{\nabla}_X T - C_T \overset{h}{\nabla}_X Y \\ &= -\overset{h}{\nabla}_X \nabla_Y T + \overset{h}{\nabla}_X \overset{v}{\nabla}_Y T + \overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_X Y} T \\ &= -\overset{h}{\nabla}_X \nabla_Y T - C_{\overset{v}{\nabla}_Y T} Y + \overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_X Y} T \end{aligned}$$

e

$$\left(\overset{h}{\nabla}_Y C_T \right) X = -\overset{h}{\nabla}_Y \nabla_X T - C_{\overset{v}{\nabla}_X T} Y + \overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_Y X} T.$$

Logo,

$$\left(\overset{h}{\nabla}_X C_T\right)Y - \left(\overset{h}{\nabla}_Y C_T\right)X = -\overset{h}{\nabla}_X \nabla_Y T - C_{\overset{v}{\nabla}_Y T}X + \overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_X Y} T$$
$$+\overset{h}{\nabla}_Y \nabla_X T + C_{\overset{v}{\nabla}_X T}Y - \overset{h}{\nabla}_{\overset{h}{\nabla}_Y X} T \tag{1.10}$$

e, portanto,

$$\left(\overset{h}{\nabla}_X C_T\right)Y - \left(\overset{h}{\nabla}_Y C_T\right)X = -\overset{h}{R}(X,Y)T - \overset{h}{\nabla}_{[X,Y]^v} T - C_{\overset{v}{\nabla}_Y T}X + C_{\overset{v}{\nabla}_X T}Y.$$

Como $R(X,Y)T = 0$ e $\overset{h}{\nabla}_{[X,Y]^v} T = 0$, obtemos

$$\left(\overset{h}{\nabla}_X C_T\right)Y - \left(\overset{h}{\nabla}_Y C_T\right)X = C_{\overset{v}{\nabla}_X T}Y - C_{\overset{v}{\nabla}_Y T}X.$$

□

1.3 Hipersuperfícies dos tipos I e II

Nesta seção caracterizamos as hipersuperfícies $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa constante para as quais o tensor de decomposição C associado à distribuição de nulidade relativa Δ possui uma das estruturas mais simples possíveis, a saber $C = 0$ e $C(\Delta) \subset \operatorname{span}\{I\}$. Tais hipersuperfícies serão denominadas de *hipersuperfícies dos tipos I e II*, respectivamente.

Lema 1.3.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica com índice de nulidade relativa $\nu = k$ constante. Então,*

(i) Se $C = 0$, existem, para cada $p \in M^n$, uma vizinhança V de p e uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k+1}$ tais que V é isométrica a um produto $U \times L^{n-k}$, com $U \subset \mathbb{R}^k$ aberto, e $f = i \times g$, em que $g : L^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k+1}$ é uma imersão isométrica e $i : U \to \mathbb{R}^k$ é a inclusão.

(ii) Se existe $T \in \Delta$ unitário tal que $cokerC = span\{T\}$ e $C_T = \mu I$, com μ não nulo, existem, para cada ponto $p \in M^n$, uma vizinhança V de p e uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+2}$ tais que V é isométrica a um produto $U \times L^{n-k+1}$, com $U \subset \mathbb{R}^{k-1}$ aberto, e $f = i \times g$, em que $g : L^{n-k+1} \to \mathbb{R}^{n-k+2}$ é o cone sobre uma hipersuperfície L^{n-k} de $\mathbb{S}^{n-k+1}$.

Demonstração. (i) Mostremos inicialmente que $f_*\Delta$ é um sub-fibrado paralelo de $f_*T\mathbb{R}^{n+1}$. De fato, dados $Z \in TM$ e $T \in \Delta$ temos

$$\tilde{\nabla}_Z f_* T = f_* \nabla_Z T + \alpha(Z,T) = -f_* C_T Z + \alpha(Z,T) = 0,$$

uma vez que $C = 0$ e $T \in \Delta$. Portanto, $f_*\Delta$ é um subespaço constante $\mathbb{R}^k$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, Δ é um sub-fibrado paralelo de TM. Pelo Teorema de Rham, para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança V de p isométrica a um produto $U^k \times L^{n-k}$, de modo que as fibras do primeiro fator correspondem às folhas de Δ. Portanto, podemos supor que U seja um aberto de $\mathbb{R}^k$. Além disso,

$$\operatorname{span}\left\{f_*(q)X : q = (q_1, q_2) \in V = U^k \times L^{n-k} \text{ e } X \in TU(q_1) = \mathbb{R}^k\right\},$$

e, portanto,

$$\operatorname{span}\left\{f_*(q)X : q = (q_1, q_2) \in M^n = U^k \times L^{n-k} \text{ e } X \in TL^{n-k}(q_2) = \mathbb{R}^{n-k+1}\right\},$$

em que $\mathbb{R}^{n-k+1}$ denota o complemento ortogonal de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Consequentemente, denotando por $P_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^k$ e $P_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n-k+1}$ as projeções ortogonais, temos

$$(P_2 \circ f)_* X = 0 \text{ se } X \in TU \text{ e } (P_1 \circ f)_* Y = 0 \text{ se } Y \in TL^{n-k}.$$

Assim, a aplicação $P_2 \circ f$ depende apenas de L^{n-k}, enquanto $P_1 \circ f$ depende somente de U e é uma isometria local de U em $\mathbb{R}^k$, a qual podemos supor que seja a aplicação de inclusão. Concluímos que $f = i \times g$, em que $g : L^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k+1}$ é uma imersão isométrica.

(ii) Observamos inicialmente que f_*kerC é um sub-fibrados paralelo de $f_*T\mathbb{R}^{n+1}$. De fato, dados $Z \in TM$ e $T \in$ kerC temos

$$\tilde{\nabla}_Z f_* T = f_* \nabla_Z T + \alpha(Z,T) = -f_* C_T Z \alpha(Z,T) = 0,$$

uma vez que $C_T = 0$ e $T \in \Delta$.

Argumentando como em (i) concluímos que existem, para cada $p \in M^n$, uma vizinhança V de p e uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+2}$ tais que V é isométrica a um produto $U \times L^{n-k+1}$, com $U \subset \mathbb{R}^{k-1}$ aberto, e $f = i \times g$, em que $g : L^{n-k+1} \to \mathbb{R}^{n-k+2}$ é uma imersão isométrica. Resta mostrar que g é o cone sobre uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n-k+1}$.

Como a distribuição gerada pelo campo T é a distribuição de nulidade relativa de g, segue que as imagens por g das curvas integrais de T são retas em $\mathbb{R}^{n-k+2}$. Resta demonstrar que tais retas passam todas por um mesmo ponto. Para isso, mostraremos que

$$\tilde{\nabla}_T (f + \frac{1}{\mu} T) = 0 \text{ e } \tilde{\nabla}_X (f + \frac{1}{\mu} T) = 0, \text{ para quaisquer } X \in \Delta^{\perp}.$$

Pela afirmação (ii) do Lema 1.3.1, para quaisquer $X, Y \in \Delta^{\perp}$ temos

$$(\overset{h}{\nabla}_X \, C_T) Y = (\overset{h}{\nabla}_Y \, C_T) X.$$

O primeiro membro da equação anterior é

$$
\begin{aligned}
\overset{h}{\nabla}_X \mu Y - C_T(\overset{h}{\nabla}_X Y) &= \mu \overset{h}{\nabla}_X Y + X(\mu)Y - \mu \overset{h}{\nabla}_X Y \\
&= \overset{h}{\nabla}_Y \mu X - C_T(\overset{h}{\nabla}_Y X) \\
&= \mu \overset{h}{\nabla}_Y X + Y(\mu)X - \mu(\overset{h}{\nabla}_Y X) \\
&= Y(\mu)X.
\end{aligned}
$$

Analogamente, o segundo membro é igual a $X(\mu)Y$. Logo, tomando X e Y linearmente independentes, obtemos

$$X(\mu) = 0 \tag{1.11}$$

para qualquer $X \in \Delta^{\perp}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T(f + \frac{1}{\mu}T) &= f_*X + \frac{1}{\mu}\tilde{\nabla}_X f_*T \\
&= f_*X + \frac{1}{\mu}(f_*\nabla_X T + \alpha(X,T)) \\
&= f_*X - \frac{1}{\mu}f_*C_T X \\
&= f_*X - \frac{1}{\mu}f_*\mu X = 0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pela afirmação (i) do Lema 1.3.1 temos

$$\nabla_T C_T = C_T^2 + C_{\nabla_T T} + C_{\nabla_T T} = C_T^2.$$

Como

$$
\begin{aligned}
(\nabla_T C_T)X &= \nabla_T \mu X - C_T(\nabla_T X) \\
&= \mu\nabla_T X + T(\mu)X - \mu\nabla_T X \\
&= T(\mu)X
\end{aligned}
$$

e

$$C_T^2 X = \mu^2 X,$$

para todo $X \in \Delta^\perp$, obtemos que $T(\mu) = \mu^2$, logo

$$T\left(\frac{1}{\mu}\right) = -1.$$

Portanto,

$$\tilde{\nabla}_T(f + \frac{1}{\mu}T) = f_*T + \frac{1}{\mu}\tilde{\nabla}_T f_*T + T\left(\frac{1}{\mu}\right) f_*T = 0.$$

$\square$

1.4 A parametrização de Gauss

Nesta seção, descreveremos uma parametrização local de hipersuperfícies cujo índice de nulidade relativa ν é constante k, conhecida como a *parametrização de Gauss*.

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável com aplicação de Gauss

$$\eta : M^n \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Suponha que a segunda forma fundamental $A = A_\eta$ tenha posto constante $n - k$. Definimos em M^n uma relação de equivalência segundo a qual os pontos x, y são equivalentes se, e somente se, pertencem à mesma folha de nulidade relativa. Denotamos por $L^{n-k} = \frac{M^n}{\Delta}$ o espaço quociente das folhas de nulidade relativa e por $\pi : M^n \to \frac{M^n}{\Delta}$ a projeção canônica. Admitiremos que $\frac{M^n}{\Delta}$ satisfaça a condição de Hausdorff. Neste caso, $\frac{M^n}{\Delta}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n - k$.

A aplicação de Gauss é constante ao longo das folhas totalmente geodésicas da distribuição de nulidade relativa $\Delta = \ker A$, pois

$$\eta_* X = \tilde{\nabla}_X \eta = -f_* AX = 0$$

para qualquer $X \in \Delta$. Assim, η induz uma aplicação $h : L^{n-k} \to \mathbb{S}^n$ dada por

$$h(\bar{x}) = \eta(x),$$

em que $\bar{x} = \pi(x)$, ou seja,

$$h \circ \pi = \eta.$$

Note que

$$h_*(\pi(x))\pi_* X = (h \circ \pi)_* X = \eta_*(x) X = -f_* AX.$$

Logo, se $\pi_* X \in \ker h_*(\pi(x))$, temos que $X \in \Delta$. Como $\pi_*|\Delta = 0$, então $\pi_* X = 0$, isto é, $h_*(\pi(x))$ é injetora. Já que, para todo $X \in \Delta$,

$$X\langle f, \eta\rangle = \langle f_* X, \eta\rangle + \langle f, \eta_* X\rangle = 0,$$

a função suporte $\langle f, \eta\rangle$ também é constante ao longo das folhas de Δ. Portanto, define uma aplicação $\gamma \in C^\infty(L^{n-k})$ tal que

$$\gamma \circ \pi = \langle f, \eta\rangle.$$

Denotemos por Λ o fibrado normal de h, cujas fibras têm dimensão k. Dado $x \in M^n$, podemos identificar, pelo transporte paralelo em $\mathbb{R}^{n+1}$, a fibra $\Lambda(\bar{x})$ com $f_*\Delta(x)$, em que $\pi(x) = \bar{x} \in L^{n-k}$. De fato, dado $T \in \Delta(x)$ temos

$$\langle h_*(\bar{x})\pi_* X, f_* T\rangle = -\langle f_* AX, f_* T\rangle = -\langle AX, T\rangle = -\langle X, AT\rangle = 0.$$

Logo, $f_*\Delta(x)$ coincide com o complemento ortogonal $\Lambda(\bar{x})$ de $h_* T_{\bar{x}} L^{n-k}$ em $T_{h(\bar{x})}\mathbb{S}^n$, ou seja, em $\mathbb{R}^{n+1}$ temos

$$(f_*\Delta(x))^\perp = h_* T_{\bar{x}} L^{n-k} \oplus ger\{h(\bar{x})\}. \tag{1.12}$$

Dada uma *seção transversal* $\xi : L^{n-k} \to M^n$ à submersão $\pi : M^n \to$

L^{n-k}, isto é, $\pi \circ \xi = id$, estendemos $\eta_{|\xi(L^{n-k})}$ a um difeomorfismo φ_ξ de M^n em uma vizinhança da seção nula de Λ. Isso é feito transportando paralelamente a folha que passa por $x \in M^n$ sobre a fibra $\Lambda(\bar{x})$ de tal modo que $\xi(\bar{x})$ é levado em zero. Explicitamente,

$$\varphi_\xi(x) = (\bar{x}, f(x) - f(\xi(\bar{x}))), \tag{1.13}$$

com $\pi(x) = \bar{x}$. Denotando por ψ_ξ a inversa de φ_ξ, temos

$$f(\psi_\xi(\bar{x}, v)) = f(\xi(\bar{x})) + v. \tag{1.14}$$

Existe uma seção transversal natural ξ definida de modo que $\xi(\bar{x})$ é o único ponto na folha $F(\bar{x}) = f(\pi^{-1}(\bar{x}))$ mais próximo da origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $f(\xi(\bar{x}))$ é o único ponto em $F(\bar{x})$ tal que $f(\xi(\bar{x})) \in (f_*\Delta(x))^\perp$. Segue de (1.12) que $f(\xi(\bar{x}))$ pertence a $h_*T_{\bar{x}}L^{n-k} \oplus ger\{h(\bar{x})\}$. A componente de $f(\xi(\bar{x}))$ na direção de $h(\bar{x}) = \eta(\xi(\bar{x}))$ é

$$\langle f(\xi(\bar{x})), \eta(\xi(\bar{x}))\rangle \eta(\xi(\bar{x})) = \gamma(\bar{x})h(\bar{x}).$$

Determinaremos, agora, a componente de $f(\xi(\bar{x}))$ em $h_*T_{\bar{x}}L^{n-k}$. Dado $\bar{Z} = \pi_*Z \in T_{\bar{x}}L^{n-k}$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle f(\xi(\bar{x})), h_*\bar{Z}\rangle &= \langle f(\xi(\bar{x})), (h \circ \pi)_*Z\rangle \\
&= \langle f(\xi(\bar{x})), \eta_*Z\rangle \\
&= Z\langle f, \eta\rangle \\
&= Z(\gamma \circ \pi) \\
&= \bar{Z}(\gamma) \\
&= \langle \nabla'\gamma, \bar{Z}\rangle' \\
&= \langle h_*\nabla'\gamma, h_*\bar{Z}\rangle,
\end{aligned}$$

em que $\langle , \rangle'$ é a métrica em L^{n-k} induzida po h e $\nabla'\gamma$ é o gradiente de γ com respeito a $\langle , \rangle'$. Portanto, a componente de $f(\xi(\bar{x}))$ em $h_* T_{\bar{x}} L^{n-k}$ é $h_* \nabla' \gamma$. Assim,

$$f(\xi(\bar{x})) = \gamma(\bar{x}) h(\bar{x}) + h_* \nabla' \gamma(\bar{x}). \tag{1.15}$$

Substituindo (1.15) em (1.13), obtemos que

$$f(\psi(\bar{x}, w)) = \gamma(\bar{x}) h(\bar{x}) + h_* \nabla' \gamma(\bar{x}) + w, \tag{1.16}$$

chamada de *parametrização de Gauss* de f. Resumindo, demostramos a afirmação recíproca do seguinte

Teorema 1.4.1. *Seja $h : L^{n-k} \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $\gamma \in C^\infty(L^{n-k})$. Então, no subconjunto aberto de pontos regulares,*

$$\psi : \Lambda \to \mathbb{R}^{n+1}$$

definida no fibrado normal de h por

$$\psi(\bar{x}, w) = \gamma(\bar{x}) h(\bar{x}) + h_* \nabla \gamma(\bar{x}) + w$$

define uma hipersuperfície imersa de posto $n-k$. Reciprocamente, toda hipersuperfície de posto $n-k$ pode ser obtida assim, pelo menos localmente.

Antes de demonstrar a afirmação direta do teorema introduziremos algumas notações. Sejam $\bar{x} \in L^{n-k}$ e $w \in \Lambda(\bar{x})$. O *subespaço vertical* de $T_{(\bar{x},w)}\Lambda$, denotado por $\mathcal{V}(\bar{x}, w)$, é o subespaço tangente em $(\bar{x}, w)$ à fibra $\Lambda(\bar{x})$, o qual pode ser identificado com a própria fibra $\Lambda(\bar{x})$.

Definimos o *subespaço horizontal* de $T_{(\bar{x},w)}\Lambda$, denotado por $\mathcal{H}(\bar{x}, w)$, como segue. Dada uma curva diferenciável $\alpha : I \to L^{n-k}$ tal que $\alpha(0) = \bar{x}$ e $\alpha'(0) = v \in T_{\bar{x}} L^{n-k}$, consideremos o campo paralelo $\tilde{w}$ ao longo de α tal que $\tilde{w}(0) = w$.

Então $\beta_v(t) = (\alpha(t), \tilde{w}(t))$ é uma curva diferenciável em Λ. Definimos

$$\mathcal{H}(\bar{x}, w) := span\{\beta_v'(0); v \in T_{\bar{x}}L^{n-k}\}.$$

Denotamos ainda por $\tilde{\nabla}$ e $\tilde{\alpha}_h$, respectivamente, a conexão de $\mathbb{R}^{n+1}$ e a segunda forma fundamental de h em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Com as notações acima, para quaisquer $\bar{x} \in L^{n-k}$, $w \in \Lambda(\bar{x})$ e $v \in T_{\bar{x}}L^{n-k}$ temos

$$\begin{aligned}
\psi_*(\bar{x}, w)v^h = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\psi(\beta_v(t))) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\gamma(\alpha(t)h(\alpha(t))) + h_*(\alpha(t))\nabla'\gamma + \beta_v(t) \\
&= v(\gamma)h + \gamma h_* v + \tilde{\nabla}_v h_* \nabla'\gamma + \tilde{\nabla}_v \tilde{w} \\
&= v(\gamma)h + \gamma h_* v + h_* \nabla_v \nabla'\gamma + \tilde{\alpha}_h(v, \nabla'\gamma) \\
&\quad - h_* A_w v + \nabla_v^{\perp} \tilde{w} \\
&= v(\gamma)h + \gamma h_* v + h_* \nabla_v \nabla'\gamma + \alpha_h(v, \nabla'\gamma) \\
&\quad - \langle h_* v, h_* \nabla'\gamma \rangle h - h_* A_w v \\
&= \langle v, \nabla'\gamma \rangle h + \gamma h_* v + h_* Hess_\gamma(v) + \alpha_h(v, \nabla\gamma') \\
&\quad - \langle v, \nabla\gamma' \rangle h - h_* A_w v \\
&= h_*(Hess_\gamma - A_w + \gamma I)v + \alpha_h(v, \nabla'\gamma) \\
&= h_* P v + \alpha_h(v, \nabla'\gamma).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Assim, no subconjunto dos pontos regulares de ψ, a aplicação $G : \Lambda \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$G(\bar{x}, w) = h(\bar{x})$$

define uma aplicação de Gauss para ψ. Temos

$$-\psi_* A_G^{\psi} w = \tilde{\nabla}_w G = G_* w = 0,$$

logo $\mathcal{V}(\bar{x},w) \subset \Delta_\psi(\bar{x},w)$, para todo $(\bar{x},w) \in \Lambda$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} -\psi_* A^\psi_G v^h = \tilde{\nabla}_{v^h} G =& G_* v^h \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} G(\beta_v(t)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} G(\alpha(t), \tilde{w}) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (h(\alpha(t)) = h_* v, \end{aligned}$$

logo $A^\psi_G|_{\mathcal{H}(\bar{x},w)}$ é injetiva. Portanto, $\Delta_\psi(\bar{x},w) = \mathcal{V}(\bar{x},w)$, logo ψ tem posto $n-k$. $\square$

1.5 Tensores Projetáveis

Dada uma submersão $\pi : M \to L$ entre variedades Riemannianas diferenciáveis, dizemos que um tensor D em M é projetável com respeito a π se existe um tensor $\bar{D}$ em L tal que

$$\bar{D} \circ \pi_* = \pi_* \circ D.$$

Um campo de vetores X em M é dito ser projetável com respeito a π se é π-relacionado com um campo de vetores em L, isto é, existe um campo de vetores $\bar{X}$ em L tal que

$$\pi_* X = \bar{X} \circ \pi.$$

Lema 1.5.1. *Sejam $\pi : M \to L$ uma submersão entre variedades Riemannianas e D um tensor em M. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) O tensor D é projetável com respeito a π.

(b) Para quaisquer $\bar{x} \in L$, $x, y \in \pi^{-1}(\bar{x})$, $v \in T_xM$ e $w \in T_yM$ com $\pi_* v = \pi_* w$ temos que $\pi_* Dv = \pi_* Dw$.

Demonstração. Suponha que D seja projetável. Se $\pi_* v = \pi_* w$, então $\bar{D}\pi_* v = \bar{D}\pi_* w$, o que implica $\pi_* Dv = \pi_* Dw$. Reciprocamente, definimos $\bar{D}$ em L por $\bar{D}\pi_* v = \pi_* Dw$.

Note que $\bar{D}$ está bem definido por (b). Portanto, D é projetável com respeito a π. $\square$

Proposição 1.5.2. *Sejam $\pi : M^n \to L$ submersão entre variedades Riemannianas diferenciáveis e D um tensor em M^n que leva vetores horizontais e verticais, respectivamente, em vetores horizontais e verticais. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) D é projetável com respeito a π.

(ii) DX é um campo de vetores projetável em M^n para qualquer campo de vetores X projetável em M^n.

Demonstração. Suponha que D seja um tensor projetável, isto é, que exista um tensor $\bar{D}$ em L tal que $\bar{D} \circ \pi_* = \pi_* \circ D$. Dado um campo de vetores projetável X em M, seja $\bar{X}$ o campo de vetores em $\bar{L}$ tal que

$$\pi_* X = \bar{X} \circ \pi.$$

Então,

$$\pi_* DX = \bar{D} \circ \pi_* X = \bar{D} \circ \bar{X} \circ \pi.$$

Logo, DX é projetável. Mostremos, agora, que (ii) implica (i). Para isso, mostraremos que se não vale (b) do Lema 1.5.1 então a afirmação (ii) não é válida, ou seja, existe um campo de vetores X tal que DX não é projetável. De fato, se (b) não vale, existem $\bar{x} \in L, x, y \in \pi^{-1}(\bar{x}), v \in T_x M$ e $w \in T_y M$ tais que $\pi_* v = \pi_* w$ e $\pi_* Dv \neq \pi_* Dw$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que v e w sejam horizontais. Caso contrário, usando o fato que D leva vetores horizontais e verticais, respectivamente, em vetores horizontais e verticais, a afirmação continua válida para as componentes horizontais e verticais de v e w. Sejam $\bar{v} = \pi_* v = \pi_* w$ e $\bar{X}$ um campo em L tal que $\bar{X}(\bar{x}) = \bar{v}$. Seja X o levantamento horizontal de $\bar{X}$. Em particular, $X(x) = v$ e $X(y) = w$. Como $\pi_* DX(x) = \pi_* Dv \neq \pi_* Dw = \pi_* DX(y)$, temos que DX não é projetável. $\square$

Proposição 1.5.3. *Sejam Δ uma distribuição integrável em uma variedade diferenciável M, $L = \frac{M}{\Delta}$ o espaço quociente das folhas de Δ e $\pi : M \to L$ a projeção. Então, um campo de vetores X em M é projetável se, e somente se, $[X, T] \in \Delta$, para cada $T \in \Delta$.*

Demonstração. Suponha que X seja projetável. Então, existe um campo de vetores Z em L tal que $\pi_* X = Z \circ \pi$. Portanto, para cada $T \in \Delta$, temos

$$\pi_* [X, T] = [\pi_* X, \pi_* T] = [Z, 0] \circ \pi.$$

Logo $[X, T] \in \Delta$. Para demonstrar a recíproca, isto é, para mostrar que X é projetável, mostremos que para cada folha F de Δ, a aplicação $\psi : F \to T_q L$, com $q = \pi(F)$, dada por $\psi(p) = \pi_*(p) X_p$ é constante. Dado $p \in F$ e $v \in T_P F$, escolha $T \in \Delta$ com $T(p) = v$ e seja g_t o fluxo de T. Por hipótese, e como $\pi \circ g_t = \pi$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \pi_*[X,T](p) &= \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}(\pi_* X(g_t(p)) - \pi_* g_{t*} X(p)) \\ &= \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}(\pi_* X(g_t(p)) - \pi_* X(p)) = \psi_*(p) v. \end{aligned}$$

□

Dada uma variedade riemanniana M que admite uma folheação por folhas totalmente geodésicas, o seguinte corolário determina condições necessárias e suficientes, em termos do tensor decomposição, para que um campo de vetores seja projetável com respeito à aplicação $\pi : M \to L$, em que $L = \frac{M}{\Delta}$.

Corolário 1.5.4. *Seja Δ uma distribuição totalmente geodésica em uma variedade riemanniana M e $L = \frac{M}{\Delta}$ o espaço quociente das folhas de Δ. Então, o campo de vetores $X \in \Delta^{\perp}$ é projetável com respeito à aplicação $\pi : M \to L$ se, e somente se,*

$$\nabla_T X + C_T X = 0,$$

para todo $T \in \Delta$.

Demonstração. Pela Proposição 1.5.3 temos que $X \in \Delta^{\perp}$ é projetável se, e somente se,

$$[X, T] \in \Delta,$$

para todo $T \in \Delta$. Temos

$$\begin{aligned} [X, T] &= \nabla_X T - \nabla_T X \\ &= (\nabla_X T)_{\Delta} + (\nabla_X T)_{\Delta^{\perp}} - \nabla_T X \\ &= (\nabla_X T)_{\Delta} - C_T X - \nabla_T X. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Como Δ é totalmente geodésica, temos que $\nabla_T X \in \Delta^{\perp}$. Portanto, $[X, T] \in \Delta$ se, e somente se,

$$C_T X + \nabla_T X = 0.$$

□

O próximo corolário determina condições necessárias e suficientes para que um tensor em uma variedade Riemanniana com uma distribuição totalmente geodésica Δ, que leva vetores horizontais e verticais, respectivamente, em vetores horizontais e verticais, seja projetável com respeito à aplicação $\pi : M \to L = \frac{M}{\Delta}$.

Corolário 1.5.5. *Seja Δ uma distribuição totalmente geodésica em uma variedade Riemanniana M e seja $L = \frac{M}{\Delta}$ o espaço quociente das folhas de Δ. Seja D um tensor em M que leva vetores horizontais e verticais, respectivamente, em vetores horizontais e verticais. Então D é projetável com respeito à aplicação $\pi : M \to L$ se, e somente se,*

$$\nabla_T D = [D, C_T],$$

para todo $T \in \Delta$.

Demonstração. Temos que

$$(\nabla_T D - [D, C_T]) X = \nabla_T D X + C_T D X + D (\nabla_T X + C_T X). \tag{1.19}$$

Suponhamos que D seja projetável. Então, para qualquer campo projetável X, temos que DX é também projetável pelo Lema 1.5.2. Portanto, decorre de (1.19) que

$$(\nabla_T D - [D, C_T])X = 0,$$

para qualquer campo projetável X. Como $\nabla_T D - [D, C_T]$ é um tensor, concluímos que $\nabla_T D - [D, C_T] = 0$. Portanto,

$$\nabla_T D = [D, C_T] .$$

Reciprocamente, se $\nabla_T D = [D, C_T]$, então, por (1.19) e pelo corolário 1.5.4, temos DX projetável quando X é projetável. Logo, pelo Lema 1.5.2, temos que D é projetável. $\square$

Capítulo

2

Hipersuperfícies de Sbrana-Cartan

Uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície de Sbrana-Cartan* se M^n é uma variedade Riemanniana que não possui pontos de curvatura seccional nula e existe uma imersão $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que não é congruente a f em nenhum subconjunto aberto $U \subset M^n$.

Neste capítulo, descreveremos localmente todas as hipersuperfícies de Sbrana-Cartan através da parametrização de Gauss. Começamos introduzindo, na primeira seção, uma classe de superfícies na esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que, como veremos aparecem como aplicações de Gauss de hipersuperfíces de Sbrana-Cartan.

2.1 Superfícies de primeira e segunda espécie

Inicialmente introduzimos os conceitos de superfícies hiperbólicas e elípticas e discutimos suas propriedades básicas.

2.1.1 Superfícies hiperbólicas

Uma superfície $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ é *hiperbólica* se existe um tensor J em L^2 satisfazendo $J^2 = I$ e

$$\alpha_h(JX, Y) = \alpha_h(X, JY) \tag{2.1}$$

para quaisquer $X, Y \in TL^2$, em que α_h denota a segunda forma fundamental de h.

Para obter uma formulação equivalente da definição de superfícies hiperbólicas, recordemos algumas definições. Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $h \in C^\infty(M^n)$. A *hessiana* de h é definida como uma seção simétrica de $T^*M \otimes T^*M$ por

$$\mathrm{Hess}h(X,Y) = (\nabla_X dh)Y = Xdh(Y) - dh(\nabla_X Y) = XY(h) - \nabla_X Y(h),$$

para quaisquer $X, Y \in TM$. Equivalentemente,

$$\mathrm{Hess}h(x)(X,Y) = \langle \nabla_X \mathrm{grad}h, Y \rangle$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$, em que $\mathrm{grad}h$ é o *gradiente* de h dado por

$$\langle \mathrm{grad}h(x), X \rangle = X(h),$$

com $X \in T_xM$.

Proposição 2.1.1. *Seja $h : L^2 \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície e J um tensor em L^2. Então a condição (2.1) é satisfeita se, e só se, a igualdade*

$$\left(Hess_{h_v} + h_v I\right) J = J^t \left(Hess_{h_v} + h_v I\right)$$

vale para a função altura $h_v = \langle h, v \rangle$ de h com respeito a qualquer $v \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Denotaremos por ∇' a $\langle , \rangle'$, respectivamente, a conexão e a métrica da $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$. Sejam $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ a inclusão, α e $\tilde{\alpha}$ as segundas formas fundamentais de h e $i \circ h$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{h_v}(X,Y) &= (\nabla_X dh_v)\, Y \\
&= X\,(dh_v(Y)) - \nabla'_X Y\,(h_v) \\
&= X\,\langle i_* h_* Y, v\rangle - \langle i_* h_* \nabla'_X Y, v\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X i_* h_* Y - i_* h_* \nabla'_X Y, v\rangle \\
&= \langle \tilde{\alpha}(X,Y), v\rangle \\
&= \langle \alpha(X,Y) - \langle X,Y\rangle (i\circ h), v\rangle \\
&= \langle \alpha(X,Y), v\rangle - \langle X,Y\rangle h_v.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \alpha(X,Y), v\rangle = \mathrm{Hess} h_v(X,Y) + \langle X,Y\rangle h_v = \langle (\mathrm{Hess} h_v + h_v I)X, Y\rangle, \tag{2.2}$$

logo

$$\langle \alpha(JX,Y) + \alpha(X,JY), v\rangle = \langle (((\mathrm{Hess} h_v + h_v I)J + (J^t \mathrm{Hess} h_v + h_v I))X, Y\rangle.$$

□

Dada uma superfíce $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$, dizemos que um sistema de coordenadas (u,v) em L^2 é *real conjugado* se seus campos coordenados $\{\partial_u, \partial_v\}$ são tais que

$$\alpha_h(\partial_u, \partial_v) = 0. \tag{2.3}$$

Lema 2.1.2. *Seja $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ superfíce hiperbólica. Então existe localmente um sistema de coordenadas real conjugado (u,v) em L^2. Reciprocamente, se existe um sistema de coordenadas real conjugado (u,v) em L^2 então h é hiperbólica.*

Demonstração. Seja J um tensor em L^2 tal que $J^2 = I$ e $\alpha_h(JX,Y) = \alpha_h(X,JY)$ para quaisquer $X, Y \in TL^2$. Seja $\{X,Y\}$ um referencial formado por autovetores de J associado aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Então existe localmente um sistema de coordenadas (u,v) em L^2 tal que os campos coordenados ∂_u e ∂_v são colineares com X e Y, respectivamente. Então,

$$\alpha_h(\partial_u,\partial_v)=\alpha_h(J\partial_u,\partial_v)=\alpha_h(\partial_u,J\partial_v)=-\alpha_h(\partial_u,\partial_v),$$

logo $\alpha_h(\partial_u,\partial_v)=0$. Reciprocamente, se existe um sistema de coordenadas (u,v) em L^2 tal que (2.3) é satisfeita então o tensor J em L^2 é tal que $J\partial_u=\partial_u$ e $J\partial_v=-\partial_v$, satisfaz $J^2=I$ e $\alpha_h(JX,Y)=\alpha_h(X,JY)$ para quaisquer $X,Y\in TL^2$. Logo h é hiperbólica com respeito a J. $\square$

Proposição 2.1.3. *Um sistema de coordenadas (u,v) em uma superfície $h:L^2\to\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ é um sistema real conjugado se, e só se, $Q\left(h_v\right)=0$, para todo $v\in\mathbb{R}^{n+1}$, em que*

$$Q\left(\theta\right):=Hess_\theta\left(\partial_u,\partial_v\right)+F\theta \tag{2.4}$$

com $F=\left\langle\partial_u,\partial_v\right\rangle'$.

Demonstração. Decorre de (2.2) que

$$Q\left(h_v\right)=\langle\alpha_h(\partial_u,\partial_v),v\rangle,$$

e a afirmação segue. $\square$

Proposição 2.1.4. *Seja $h:L^2\to\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície hiperbólica com respeito a um tensor J em L^2 com $J^2=I$ e seja (u,v) um sistema de coordenadas real conjugado em L^2 tal que os campos coordenados ∂_u e ∂_v são autovetores de J associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Dada $\gamma\in C^\infty(L^2)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $(Hess_\gamma+\gamma I)J=J^t(Hess_\gamma+\gamma I)$.

(ii) $Q(\gamma)=0$, *em que Q é dado por (2.4).*

Demonstração. Considere a forma bilinear em L^2 dada por

$$H_\gamma(X,Y) = \mathrm{Hess}_\gamma(X,Y) + \langle X,Y\rangle'\gamma$$

para quaisquer $X, Y \in TL^2$. Então (i) é equivalente a

$$H_\gamma(JX,Y) = H_\gamma(X,JY)$$

para quaisquer $X, Y \in TL^2$. Por sua vez, esta equação é equivalente a

$$H_\gamma(J\partial_u, \partial_v) = H_\gamma(\partial_u, J\partial_v),$$

a qual se reduz a

$$H_\gamma(\partial_u, \partial_v) = 0,$$

ou seja, $Q(\gamma) = 0$. □

Se $h : L^2 \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície hiperbólica e $\gamma \in C^\infty(L^2)$ satisfaz uma (e, portanto, ambas) as condições da proposição anterior, dizemos que *o par (h,γ) é hiperbólico.*

2.1.2 Superfícies elípticas

Dadas uma superfície $h : L^2 \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e um tensor J em TL^2. Denotamos por $J^{\mathbb{C}} : TL^2 \otimes \mathbb{C} \to TL^2 \otimes \mathbb{C}$ o operador obtido pela complexificação de J, ou seja,

$$J(u + iv) = Ju + iJv.$$

Denotamos ainda por $\alpha^{\mathbb{C}} : TL^2 \otimes \mathbb{C} \times TL^2 \otimes \mathbb{C} \to N^hL \otimes \mathbb{C}$ a complexificação bilinear da segunda forma fundamental α de h, ou seja,

$$\alpha^{\mathbb{C}}(X + iY, Z + iW) = \alpha(X,Z) - \alpha(Y,W) + i(\alpha(Y,Z) + \alpha(X,W)).$$

Uma superfície $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ é *elíptica* se existe um tensor J em L^2 satisfazendo $J^2 = -I$ e

$$\alpha_h\,(JX, Y) = \alpha_h\,(X, JY)$$

para quaisquer $X, Y \in TL^2$.

Dizemos que um sistema de coordenadas (u, v) em L^2 é *complexo conjugado* se seus campos coordenados $\{\partial_u, \partial_v\}$ são tais que

$$\alpha^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = 0, \tag{2.5}$$

em que $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$ e $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$.

Lema 2.1.5. *Seja $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ uma superfície elíptica. Então, existe localmente um sistema de coordenadas complexo conjugado (u, v) em L^2. Reciprocamente, se existe um sistema de coordenadas complexo conjugado (u, v) em L^2 então h é elíptica.*

Demonstração. Seja J um tensor em L^2 tal que $J^2 = -I$ e $\alpha_h(JX, Y) = \alpha_h(X, JY)$ para quaisquer $X, Y \in TL^2$. Seja $\{X, Y\}$ um referencial em L^2 tal que $JX = Y$ e $JY = -X$. Equivalentemente, $Z = X - iY$ e $\bar{Z} = X + iY$ são autovetores de $J^{\mathbb{C}}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente. Afirmamos que existe localmente um sistema de coordenadas (u, v) em L^2 tal que $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$ e $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$ são autovetores de $J^{\mathbb{C}}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente. Então

$$i\alpha_h^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \alpha_h^{\mathbb{C}}(J^{\mathbb{C}}\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \alpha_h^{\mathbb{C}}(\partial_z, J^{\mathbb{C}}\partial_{\bar{z}}) = -i\alpha_h^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}),$$

o que implica que (u, v) é um sistema de coordenadas complexo conjugado em L^2.

Para demonstrar a afirmação, basta provar que existe uma função $\gamma = \alpha + i\beta : L^2 \to \mathbb{C}$

$$[\alpha X + \beta Y, \alpha Y - \beta X] = 0. \tag{2.6}$$

De fato, isto implica que existe localmente um sistema de coordenadas (u, v) em L^2 tal que $\partial_u = \alpha X + \beta Y$ e $\partial_v = \alpha Y - \beta X$, e é fácil ver que $J\partial_u = \partial_v$ e $J\partial_v = -\partial_u$, ou seja, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$ e $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$ são autovetores de $J^{\mathbb{C}}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente.

Temos

$$[\alpha X + \beta Y, \alpha Y - \beta X] = \nabla_{(\alpha X + \beta Y)}(\alpha Y - \beta X) - \nabla_{(\alpha Y - \beta X)}(\alpha X + \beta Y),$$

logo (2.6) é equivalente a

$$\nabla_{(\alpha X + \beta Y)}(\alpha Y - \beta X) = \nabla_{(\alpha Y - \beta X)}(\alpha X + \beta Y).$$

Um cálculo simples mostra que esta última equação reduz-se a

$$\begin{aligned}&((-\alpha X(\beta) + \beta X(\alpha)) - (\beta Y(\beta) + \alpha Y(\alpha)))X \\ &+ ((\alpha X(\alpha) + \beta X(\beta)) + (\beta Y(\alpha) - \alpha Y(\beta)))Y + (\alpha^2 + \beta^2)\,[X, Y] = 0.\end{aligned}$$

Escrevendo $[X, Y] = fX + gY$, $\alpha = \rho\cos\theta$ e $\beta = \rho\sin\theta$, a equação acima transforma-se no sistema

$$\begin{cases} \rho^2 X(\theta) + \frac{1}{2}Y(\rho^2) = \rho^2 f \\ \rho^2 Y(\theta) - \frac{1}{2}X(\rho^2) = \rho^2 g, \end{cases}$$

ou equivalentemente, pondo $h = 2\theta$ e $\nu = \log\rho^2$, ao sistema

$$\begin{cases} X(h) + Y(\nu) = 2f \\ -X(\nu) + Y(h) = 2g. \end{cases} \tag{2.7}$$

Das equações acima obtemos, respectivamente, que

$$XY(\nu) = -XX(h) + 2X(f)$$

e

$$YX(\nu) = YY(h) - 2Y(g),$$

enquanto

$$[X, Y](\nu) = fX(\nu) + gY(\nu) = f(Y(h) - 2g) + g(2f - X(h)).$$

Assim, visto como um sistema de equações para ν, a condição de integrabilidade

$$XY(\nu) - YX(\nu) = [X, Y](\nu)$$

fica

$$XX(h) + YY(h) + 2Y(g) + fY(h) - gX(h) = 2X(f) + 2Y(g).$$

Se (x, y) são coordenadas locais em L^2 tais que $\partial_x = aX$ e $\partial_y = bY$, um cálculo longo mas simples mostra que a equação acima reduz-se à equação diferencial elíptica de segunda ordem

$$ab(a^2h_{xx} + b^2h_{yy}) + a^2(ba_x - ab_x)h_x + b^2(ab_x - ba_x)h_y = \varphi, \tag{2.8}$$

em que

$$\varphi = 2ab(-ba_{xy} + ab_{xy}) + 2b^2a_xa_y + 2a^2b_xb_y.$$

Cada solução de (2.8) (veja Teorema 4 na página 303 de [8]) dá origem a uma solução (h, ν) do sistema (2.7).

Reciprocamente, se existe um sistema de coordenadas (u, v) em L^2 tal que (2.5) é satisfeita então o tensor J em L^2 tal que $J\partial_u = \partial_v$ e $J\partial_v = -\partial_u$ satisfaz $J^2 = -I$ e $\alpha_h(JX, Y) = \alpha_h(X, JY)$ para quaisquer $X, Y \in TL^2$. Logo h é elíptica com respeito a J. $\square$

Analogamente, à Proposição 2.1.3 temos a seguinte

Proposição 2.1.6. *Um sistema de coordenadas (u, v) em uma superfície $h : L^2 \to$*

$\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um sistema complexo conjugado se, e só se, $Q(h_v) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, em que

$$Q(\theta) := Hess_\theta(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) + F\theta \tag{2.9}$$

sendo $F = \langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle^{\mathbb{C}}$ e $\langle\ ,\ \rangle^{\mathbb{C}}$ a extensão bilinear complexa da métrica induzida por h.

2.1.3 Superfícies de primeira e segunda espécie do tipo real

Seja $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ uma superfície hiperbólica, e suponhamos que (u, v) seja um sistema global de coordenadas real conjugado em L^2. Sejam Γ^1 e Γ^2 os símbolos de Christoffel dados por

$$\nabla'_{\partial_u}\partial_v = \Gamma^1\partial_u + \Gamma^2\partial_v, \tag{2.10}$$

em que ∇' é a conexão de Levi-Civita da métrica induzida em L^2 por h. Consideremos o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \tau_u = 2\Gamma^2\tau(1-\tau) \\ \tau_v = 2\Gamma^1(1-\tau) \end{cases}. \tag{2.11}$$

Derivando as equações acima com respeito a v e a u, respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} \tau_{uv} = 2\Gamma^2_v\tau + 2\Gamma^2\tau_v - 2\Gamma^2_v\tau^2 - 4\Gamma^2\tau\tau_v, \\ \tau_{vu} = 2\Gamma^1_v - 2\Gamma^1_v\tau - 2\Gamma^1\tau_u. \end{cases}$$

Substituindo τ_v e τ_u dadas por 2.11 temos

$$\begin{cases} \tau_{uv} = 2\Gamma^2_v\tau + 2\Gamma^2\left(2\Gamma^1(1-\tau)\right) - 2\Gamma^2_v\tau^2 - 4\Gamma^2\tau\left(2\Gamma^1(1-\tau)\right), \\ \tau_{vu} = 2\Gamma^1_v - 2\Gamma^1_v\tau - 2\Gamma^1\left(2\Gamma^2\tau(1-\tau)\right). \end{cases}$$

Segue pela condição de integrabilidade $\tau_{uv} = \tau_{vu}$ que

$$\left(\Gamma_v^2 - 2\Gamma^1\Gamma^2\right)\tau - \Gamma_u^1 + 2\Gamma^1\Gamma^2 = 0. \tag{2.12}$$

Definição 2.1.7. *Dizemos que $\{h, (u, v)\}$ é de primeira espécie se (2.12) é trivialmente satisfeita, isto é,*

$$\Gamma_u^1 = \Gamma_v^2 = 2\Gamma^1\Gamma^2.$$

Se h não é de primeira espécie e

$$\tau = \frac{\Gamma_u^1 - 2\Gamma^1\Gamma^2}{\Gamma_v^2 - 2\Gamma^1\Gamma^2}$$

é uma solução positiva do sistema de equações diferencias parciais (2.11) dizemos que h é de segunda espécie.

2.1.4 Superfícies de primeira e segunda espécie do tipo complexo

Seja $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ uma superfície elíptica, e suponhamos que (u, v) seja um sistema global de coordenadas complexo conjugado em L^2. Estendendo a conexão de Levi-Civita ∇' $\mathbb{C}$-bilinearmente, podemos definir o símbolo de Christoffel $\Gamma = \Gamma(z, \bar{z})$ por

$$\nabla'_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} = \Gamma\partial_z + \bar{\Gamma}\partial_{\bar{z}}.$$

Considere a equação diferencial complexa

$$\rho_{\bar{z}} + \Gamma(\rho - \bar{\rho}) = 0, \tag{2.13}$$

com

$$\rho \cdot \bar{\rho} = 1. \tag{2.14}$$

De (2.14) e (2.13) obtemos

$$\rho_z = \rho^2\bar{\Gamma}(\bar{\rho} - \rho). \tag{2.15}$$

Agora, derivando (2.13) em relação a z e utilizando (2.15) e (2.13) temos

$$\rho_{\bar{z}z} = (\Gamma_z - \Gamma\bar{\Gamma} - \rho^2\Gamma\bar{\Gamma})(\bar{\rho} - \rho). \tag{2.16}$$

Por outro lado, derivando (2.15) em relação a $\bar{z}$ e utilizando (2.13), (2.15) e também (2.14) obtemos

$$\rho_{z\bar{z}} = (\rho^2\bar{\Gamma}_{\bar{z}} - 3\rho^2\Gamma\bar{\Gamma} + \Gamma\bar{\Gamma})(\rho - \bar{\rho}). \tag{2.17}$$

De de (2.16) e (2.17) e $\rho_{z\bar{z}} = \rho_{\bar{z}z}$ obtemos

$$\Gamma_z - \Gamma\bar{\Gamma} - \rho^2\Gamma\bar{\Gamma} = \rho^2\bar{\Gamma}_{\bar{z}} - 3\rho^2\Gamma\bar{\Gamma} + \Gamma\bar{\Gamma}$$

ou, equivalentemente

$$\Gamma_z - 2\Gamma\bar{\Gamma} = \rho^2(\bar{\Gamma}_{\bar{z}} - 2\Gamma\bar{\Gamma}). \tag{2.18}$$

Multiplicando (2.18) por $\bar{\rho}$ e usando (2.14) uma vez mais, obtemos

$$\bar{\rho}(\Gamma_z - 2\Gamma\bar{\Gamma}) = \rho(\bar{\Gamma}_{\bar{z}} - 2\Gamma\bar{\Gamma}). \tag{2.19}$$

Observando que $\bar{\Gamma}_{\bar{z}} = \bar{\Gamma}_z$, vemos que o lado direito de (2.19) é o conjugado do esquerdo, donde resulta

$$Im(\bar{\rho}(\Gamma_z - 2\Gamma\bar{\Gamma})) = 0. \tag{2.20}$$

Definição 2.1.8. *Dizemos que $\{h, (u, v)\}$ é de primeira espécie quando a condição de integrabilidade*

$$Im(\bar{\rho}(\Gamma_z - 2\Gamma\bar{\Gamma})) = 0 \tag{2.21}$$

de (2.13) é trivialmente satisfeita, isto é,

$$\Gamma_z = \bar{\Gamma}_{\bar{z}} = 2\|\Gamma\|^2. \tag{2.22}$$

Dizemos que h de segunda espécie se não é de primeira espécie e (2.13) tem uma única solução determinada por (2.21).

2.2 O teorema principal

Nesta seção, apresentamos a demonstração do principal resultado deste trabalho, a saber, a descrição local, através da parametrização de Gauss, das hipersuperfícies $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de Sbrana-Cartan que não são regradas nem dos tipos (I) e (II).

Teorema 2.2.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Sbrana-Cartan que não seja dos tipos (I) e (II) e nem regrada em nenhum subconjunto aberto de M^n . Então, em cada componente conexa de um subconjunto aberto e denso de M^n, f é parametrizada pela parametrização de Gauss por um par hiperbólico ou elíptico (h, γ), em que h é de primeira ou segunda espécie do tipo real ou complexo. Reciprocamente, toda hipersuperfície simplesmente conexa f, parametrizada através da parametrização de Gauss por um par (h, γ) satisfazendo as condições acima, é uma hipersuperfície de Sbrana-Cartan cujas deformações isométricas são do mesmo tipo.*

O ponto de partida da demonstração do Teorema 2.2.1 é a seguinte

Proposição 2.2.2. *Toda hipersuperfície de Sbrana-Cartan $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tem posto dois e qualquer de suas deformações isométricas possui a mesma distribuição de nulidade relativa.*

O restante da demonstração do Teorema 2.2.1 será dividido em três etapas principais. Na primeira etapa, mostraremos que dada uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de posto dois que não seja regrada e nem dos tipos (I) e (II) em nenhum subconjunto aberto de M^n, a existência de uma imersão isométrica $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ não congruente a f em nenhum aberto de M^n é equivalente à existência de um tensor em M^n que satisfaz certas condições provenientes das equações de Gauss e Codazzi.

Dizemos que uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de posto dois, com distribuição de nulidade relativa Δ, é hiperbólica (respectivamente, parabólica e elíptica) quando existe um tensor $J : \Delta^\perp \to \Delta^\perp$ satisfazendo $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = 0$ e $J^2 = -I$) e

$$\alpha(JX, Y) = \alpha(X, JY),$$

para quaisquer $X, Y \in TM$, ou equivalentemente,

$$AJ = J^t A.$$

Proposição 2.2.3. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de posto dois, com distribuição de nulidade relativa Δ, que não seja regrada e nem dos tipos (I) e (II) em nenhum subconjunto aberto de M^n. Suponha que exista uma imersão isométrica $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que não seja congruente a f em nenhum subconjunto aberto de M^n. Então, em um subconjunto aberto denso U de M^n, a hipersuperfície f é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor $J : \Delta^\perp \to \Delta^\perp$ com $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = -I$) e existe um único tensor $D \in Hom(\Delta^\perp, \Delta^\perp)$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $D \neq I$ *e* $D \in span\{I, J\}$,

(ii) $[D, C_T] = 0,$ *para todo* $T \in \Delta$,

(iii) $\nabla_T D = 0$ *para todo* $T \in \Delta$

(iv) , $\det D = 1$,

(v) $AD = D^t A$,

(vi) $(\nabla_X AD)\, Y - (\nabla_Y AD)\, X = 0$, *para todos* $X, Y \in \Delta^\perp$.

Reciprocamente, se M^n é simplesmente conexa e D é um tensor satisfazendo as condições acima, então existe uma imersão isométrica $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que tem Δ como sua distribuição de nulidade relativa e não é congruente a f em nenhum aberto de M^n.

Na segunda etapa, provaremos que a existência de um tensor D como na Proposição 2.2.3 pode ser expressa de modo mais simples na variedade quociente $L^2 = \frac{M^n}{\Delta}$.

Proposição 2.2.4. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de posto dois, parametrizada através da parametrização de Gauss por um par (h, γ). Seja $\pi : M^n \to L^2$ a projeção e ∇' a conexão de Levi-Civita em L^2 para a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ induzida por h. Se f é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor $J : \Delta^\perp \to \Delta^\perp$ com $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = -I$) e D é um tensor em M^n satisfazendo todas as condições da Proposição 2.2.3, então existem um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $\bar{J}^2 = I$ (respectivamente, $\bar{J}^2 = -I$)e um único tensor $\bar{D} \in span\big\{I, \bar{J}\big\}$ tal que o par (h, γ) é hiperbólico (respectivamente, elíptico) com respeito a $\bar{J}$,*

$$\bar{J} \circ \pi_* = \pi_* \circ J \quad e \quad \bar{D} \circ \pi_* = \pi_* \circ D. \tag{2.23}$$

Além disso, $\bar{D}$ satisfaz:

(a) $\det \bar{D} = 1$

(b) $\big(\nabla'_{\bar{X}} \bar{D}\big) \bar{Y} - \big(\nabla'_{\bar{Y}} \bar{D}\big) \bar{X} = 0$, *para todos* $\bar{X}, \bar{Y} \in TL^2$.

Reciprocamente, se $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ e $\gamma \in C^\infty(L^2)$ são tais que o par (h, γ) é hiperbólico (respectivamente, elíptico) com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = -I$), então a hipersuperfície f é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor J satisfazendo (2.23), e um tensor $\bar{D}$ em L^2 satisfazendo (a) *e* (b) *determina um único tensor D em M^n satisfazendo as condições da Proposição 2.2.3.*

Na terceira etapa, caracterizaremos os pares hiperbólicos (respectivamente, elípticos) $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ para as quais exista um tensor $\bar{D}$ em L^2 satisfazendo as condições da Proposição 2.2.4.

Proposição 2.2.5. *As seguintes afirmações a respeito de uma superfície $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ são equivalentes:*

(i) Se h é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = -I$), e existe um tensor $\bar{D} \in span\left\{I, \bar{J}\right\}$ satisfazendo (a) e (b) da Proposição 2.2.4.

(ii) h é de primeira ou segunda espécie do tipo real (respectivamente, do tipo complexo).

2.2.1 Demonstração da Proposição 2.2.2

A Proposição 2.2.2 será demonstrada como consequência de dois lemas a seguir.

Lema 2.2.6. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Então*

(i) posto $f(x) \leq 1$ se, e somente se, o tensor curvatura R de M^n é identicamente nulo em x.

(ii) $\Delta(x)$ coincide com o subespaço de nulidade $\Gamma(x)$ do tensor curvatura, dado por

$$\Gamma(x) = \{X \in T_xM : R(X, Y) = 0 \textit{ para todo } Y \in T_xM\},$$

desde que posto$f(x) \geq 2$.

Demonstração. (i) Pela equação de Gauss, temos $R = 0$ em x se, e somente se, $AX \wedge AY = 0$ para quaisquer $X, Y \in T_xM$, ou seja, se, somente se, AX e AY são linearmente dependentes para quaisquer $X, Y \in T_xM$, o que ocorre, se, e somente se, posto $f(x) \leq 1$.
(ii) A equação de Gauss implica $\Delta(x) \subset \Gamma(x)$. Suponhamos que exista $0 \neq X \in \Gamma(x) \cap \Delta^{\perp}(x)$. Se $Y \in T_xM$ é arbitrário, então a equação de Gauss implica que $AX \wedge AY = R(X, Y) = 0$, logo AY é colinear com $AX \neq 0$. Logo posto $f(x) = 1$. □

Lema 2.2.7. *Sejam $f, g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ imersões isométricas. Se posto$f(x) \geq 3$ então os operadores forma de f e g em x coincidem a menos de sinal.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.6, os subespaços de nulidade relativa $\Delta(x)$ e $\bar{\Delta}(x)$ de f e g, respectivamente, em x, coincidem com o subespaço de nulidade $\Gamma(x)$ do tensor curvatura. Decorre das equações de Gauss de f e g que

$$AX \wedge AY = \bar{A}X \wedge \bar{A}Y \tag{2.24}$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$, em que A e $\bar{A}$ denotam os operadores de forma de f e g, respectivamente. Dado $X \in \Delta^{\perp}(x)$, afirmamos que AX e $\bar{A}X$ são linearmente dependentes. Suponhamos o contrário, isto é, que $AX \wedge \bar{A}X \neq 0$. Como posto$f(x) \geq 3$, existe $Y \in \Delta^{\perp}(x)$ tal que AX, $\bar{A}X$ e AY são linearmente independentes, e, portanto, $AX \wedge AY \wedge \bar{A}X \neq 0$. Por (2.24) temos que $AX \wedge AY = \bar{A}X \wedge \bar{A}Y$ logo

$$AX \wedge AY \wedge \bar{A}X = \bar{A}X \wedge \bar{A}Y \wedge \bar{A}X = 0$$

uma contradição. Em particular, existe uma base ortonormal $\{X_1, ..., X_r\}$ de $\Delta^{\perp}(x)$ formada por autovetores de A e $\bar{A}$. Denotando por $\lambda_1, ..., \lambda_r$ os autovalores correspondentes de A e por $c_1\lambda_1, ..., c_r\lambda_r$ os de $\bar{A}$, a equação (2.24) implica que $c_ic_j = 1$ para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq r$. Como $r \geq 3$, isto implica que $c_1 = ... = c_r = 1$ ou $c_1 = ... = c_r = -1$, ou seja, $\bar{A} = A$ ou $\bar{A} = -A$. □

Demonstração da Proposição 2.2.2. Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Sbrana-Cartan. Como M^n não tem pontos de curvatura nula, posto$f(x) \geq 2$ para todo $x \in M^n$ pelo Lema 2.2.6-(i). Se posto$f(x) \geq 3$ em algum ponto $x \in M^n$, então o mesmo vale em uma vizinhança aberta U de x. Logo, se $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é outra imersão isométrica, então, para cada escolha apropriada dos campos normais unitários de f e g, temos que os operadores de forma A e $\bar{A}$ de f e g, respectivamente, coincidem em U pelo Lema 2.2.6, logo $f|_U$ e $g|_U$ são congruentes pelo Teorema fundamental das hipersuperfícies, uma contradição. A afirmação de que qualquer deformação isométrica de f tem mesma distribuição de nulidade relativa decorre de Lema 2.2.6-(ii). □

2.2.2 Demonstração da Proposição 2.2.3

Definimos $D : \Delta^\perp \to \Delta^\perp$ por

$$D = A^{-1}A^g,$$

em que A^g é o operador de forma de g, o qual, assim como A é considerado restrito a $\Delta^\perp$. Como g não é congruente a f em nenhum subconjunto aberto de M^n, temos que $D \neq I$ em um subconjunto denso de M^n pelo Teorema fundamental das hipersuperfícies.

Dados $T \in \Delta$ e $X \in \Delta^\perp$, temos pela equação de Codazzi que

$$(\nabla_T A)\, X = -A\,(\nabla_X T) = AC_T X,$$

logo

$$\nabla_T A = AC_T. \tag{2.25}$$

Em particular, temos que AC_T é simétrico , ou seja,

$$AC_T = C_T^t A.$$

Analogamente, $A^g = AD$ satisfaz

$$\nabla_T A^g = A^g C_T,$$

logo

$$\nabla_T AD = ADC_T \tag{2.26}$$

e $A^g C_T = C_T^t A^g$. Portanto,

$$ADC_T = C_T^t AD = AC_T D,$$

ou seja, $A[D, C_T] = 0$ e, portanto, (ii) segue. Note ainda que

$$AC_T D = (\nabla_T A)\, D = \nabla_T (AD) - A\,(\nabla_T D)\,. \tag{2.27}$$

De (2.26) e (2.27), decorre que

$$A\,(\nabla_T D) = ADC_T - AC_T D = A[D, C_T] = 0,$$

o que implica (iii). Agora, pela equação de Gauss de f e g, temos

$$detA = K(\Delta^{\perp}) = detA^{g} = detAD = detAdetD$$

o que prova (iv).

Observe agora que a forma canônica de Jordan do operador D tem uma das formas

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

conforme D possua dois autovalores reais distintos λ_1 e λ_2, um único autovalor real λ com multiplicidade dois, ou dois autovalores complexos conjugados $a \pm ib$, respectivamente. Em todos os casos, temos que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $D = aJ + bI$, em que $J^2 = \epsilon I$, com $\epsilon = 1, 0$ ou -1, respectivamente. Além disso, J está unicamente determinado se $\epsilon = 0$ e é único a menos de sinal nos demais casos.

Considere agora o subespaço S formado por todos os operadores de $\Delta^{\perp}$ que comutam com D, ou equivalentemente, com J. É fácil ver que S coincide com $\operatorname{span}\{I, J\}$. Decorre de (ii) que $C\,(\Delta) \subset S$. Como f não é dos tipos (I) e (II) em nenhum subconjunto aberto de M^n por hipótese, decorre do Lema 1.3.1 que $C\,(\Delta)$ não está contido em $\operatorname{span}\{I\}$. Concluímos que $C\,(\Delta) = S$.

Decorre de (v) que

$$AJ = J^t A.$$

Mostraremos a seguir que o caso $J^2 = 0$ não pode ocorrer em nenhum aberto de M^n. Portanto, f é hiperbólica ou elíptica em um subconjunto aberto e denso de M^n.

Lema 2.2.8. *Se $J^2 = 0$ em um subconjunto aberto U de M^n então $f|_U$ é regrada.*

Demonstração. Seja $\{X, Y\}$ um referencial ortonormal de $\Delta^\perp$ em U tal que

$$JY = 0 \quad \text{e} \quad JX = \lambda Y,$$

em que $\lambda \in C^\infty(U)$ não se anula. Como AD, e, portanto, AJ é simétrico, temos que

$$\lambda\langle AY, Y\rangle = \langle AJX, Y\rangle = \langle X, AJY\rangle = 0,$$

logo

$$\langle AY, Y\rangle = 0. \tag{2.28}$$

Similarmente concluímos que

$$\langle A^g Y, Y\rangle = 0. \tag{2.29}$$

Sejam $\lambda_1 = \langle AX, X\rangle$, $\mu = \langle AX, Y\rangle$, $\beta_1 = \langle A^g X, X\rangle$ e $\beta_2 = \langle A^g X, Y\rangle$, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A^g = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

com respeito ao referencial $\{X, Y\}$. Segue da equação de Gauss que

$$-\mu^2 = \langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle^2 = \langle A^g X, X\rangle\langle A^g Y, Y\rangle - \langle A^g X, Y\rangle^2 = -\beta_2^2.$$

Logo, podemos supor (trocando a orientação do campo normal a g, se necessário) que $\beta_2 = \mu$. Escrevendo, $\theta = \beta_1 - \lambda_1$, a matriz de A^g fica

$$A^g = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \theta & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} \mu X = A^g Y = ADY &= \langle ADY, X\rangle + \langle ADY, Y\rangle \\ &= \langle DY, AX\rangle X + \langle DY, AY\rangle Y \\ &= \langle DY, \lambda_1 X + \mu Y\rangle X + \langle DY, \mu X\rangle Y, \end{aligned}$$

Segue que $\langle DY, X\rangle = 0$ e $\langle DY, Y\rangle = 1$, logo

$$DY = Y. \tag{2.30}$$

Além disso, $D \neq I$, temos que θ não se anula em U.

Agora, demonstraremos que a distribuição

$$L(x) := \{Y(x)\} \oplus \Delta(x) \text{ com } x \in U,$$

é totalmente geodésica. Como $C(\Delta) \subset \{I, J\}$ e $JY = 0$, temos que

$$\langle C_T Y, X\rangle = 0$$

para todo $T \in \Delta$. Logo,

$$\langle \nabla_Y T, X\rangle = -\langle C_T Y, X\rangle = 0. \tag{2.31}$$

Por outro lado, como $\nabla_T D = 0$ pelo item (iii), temos que

$$0 = (\nabla_T D)\, Y = \nabla_T DY - D\left(\nabla_T Y\right) = \nabla_T Y - D\left(\nabla_T Y\right),$$

ou seja,

$$D\left(\nabla_T Y\right) = \nabla_T Y.$$

Como $D \neq I$ e $\langle \nabla_T Y, Y \rangle = 0$, concluímos de (2.30) que

$$\nabla_T Y = 0. \tag{2.32}$$

Temos que

$$\nabla_X AY = \nabla_X \mu X = \mu \nabla_X X + X\left(\mu\right) X$$

e

$$\nabla_Y AX = \nabla_Y (\lambda_1 X + \mu Y) = \lambda_1 \nabla_Y X + Y\left(\lambda_1\right) X + Y(\mu) Y.$$

Substituindo as expressões acima na equação de Codazzi

$$\nabla_X AY - A(\nabla_X Y) = \nabla_Y AX - A(\nabla_Y X)$$

e tomando o produto interno com Y obtemos

$$\mu \left\langle \nabla_X X, Y \right\rangle - \left\langle A\left(\nabla_X Y\right), Y \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \nabla_Y X, Y \right\rangle + Y\left(\mu\right) - \left\langle A\left(\nabla_Y X\right), Y \right\rangle. \tag{2.33}$$

Por outro lado,

$$\langle A(\nabla_X Y), Y \rangle = -\mu \langle \nabla_X X, Y \rangle,$$

enquanto

$$\left\langle A\left(\nabla_Y X\right), Y \right\rangle = 0$$

por (2.33). Logo

$$Y\left(\mu\right) - \lambda_1 \left\langle \nabla_Y Y, X \right\rangle - 2\mu \left\langle \nabla_X X, Y \right\rangle = 0. \tag{2.34}$$

Analogamente, aplicando a equação de Codazzi para A^g concluímos

$$Y(\mu) - (\lambda_1 + \theta)\langle \nabla_Y Y, X\rangle - 2\mu \langle \nabla_X X, Y\rangle = 0. \tag{2.35}$$

Assim, por (2.34) e (2.35) obtemos que

$$\langle \nabla_Y Y, X\rangle = 0. \tag{2.36}$$

Concluímos de (2.31), (2.32),(2.36) e do fato que $\Delta(x)$ é totalmente geodésica que L é totalmente geodésica em U.

Agora, como $\langle AY, Y\rangle = 0$ e Δ é totalmente geodésica, então, $\alpha_f|_{L\times L} = 0$, logo a restrição de f a cada folha de L é totalmente geodésica. Portanto, $f|_U$ é regrada. $\square$

Para demonstrar a afirmação recíproca, seja D um tensor em M^n satisfazendo as condições da Proposição 2.2.3. Mostraremos que $\tilde{A} = AD$ é um tensor simétrico que satisfaz as equações de Gauss e Codazzi para uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$. O fato de que $\tilde{A}$ é simétrico decorre (v). Como $\ker\tilde{A}(x) = \Delta(x) = \Gamma(x)$ para todo $x \in M^n$, a equação de Gauss

$$R(X,Y) = \tilde{A}X \wedge \tilde{A}Y$$

é satisfeita se $X \in \Delta$ ou $Y \in \Delta$. Por outro lado, se $\{X, Y\}$ é uma base de $\Delta^\perp$, então a equação de Gauss para f e o fato de que $\det D = 1$ implicam

$$R(X,Y) = AX \wedge AY = \det A\ X \wedge Y = \det AD\ X \wedge Y = \tilde{A}X \wedge \tilde{A}Y.$$

Por fim, verificamos que $\tilde{A}$ satisfaz a equação de Codazzi

$$\nabla_X \tilde{A}Y - \tilde{A}(\nabla_X Y) = \nabla_Y \tilde{A}X - \tilde{A}(\nabla_Y X).$$

Primeiramente, se $\{X, Y\}$ é uma base de $\Delta^{\perp}$, isso decorre de (vi). Para $X, Y \in \Delta$, isso é uma consequência do fato que Δ é totalmente geodésica e $\tilde{A}|_{\Delta} = 0$, o que implica que ambos os membros da equação acima se anulam. Finalmente, se $T \in \Delta$ e $X \in \Delta^{\perp}$, a equação acima (com $Y = T$) reduz-se a

$$\nabla_T AD = ADC_T. \tag{2.37}$$

Por (1.19), temos que

$$(\nabla_T AD) - (ADC_T) = (\nabla_T A - AC_T)\, D + A\,(\nabla_T D - [D, C_T])\,,$$

logo (2.37) decorre de (ii), (iii) e do fato que $\nabla_T A = AC_T$, o que decorre da equação de Codazzi para f. A conclusão segue agora pelo Teorema fundamental das hipersuperfícies.

2.2.3 Demonstração da Proposição 2.2.4

Pelo Corolário 1.5.5, o fato que

$$\nabla_T D = [D, C_T] = 0 \;\; \text{para todo } T \in \Delta$$

implicam que D é um tensor projetável, isto é, existe um tensor $\bar{D}$ em L^2 tal que

$$\pi_* \circ D = \bar{D} \circ \pi_*. \tag{2.38}$$

Em particular, da condição (iv) da Proposição 2.2.3 segue que $\det \bar{D} = 1$. Por outro lado, pela condição (i) temos que $D \in span\,\{I, J\}$. Assim, se f é hiperbólica (respectivamente, elíptica), o tensor D tem dois autovalores distintos (respectivamente, dois autovalores complexos conjugados), logo o mesmo vale para $\bar{D}$ por (2.38). Portanto, existe um único (a menos de sinal) tensor $\bar{J}$ em L^2 tal que $\bar{J}^2 = I$ (respectivamente, $\bar{J}^2 = -I$) e $\bar{D} \in span\left\{I, \bar{J}\right\}$. Seja $\hat{J} : \Delta^{\perp} \to \Delta^{\perp}$ o levantamento horizontal de $\bar{J}$, isto é, para $X \in \Delta^{\perp}(x)$, $\hat{J}X$ é o único vetor em $\Delta^{\perp}(x)$ tal que

$$\pi_* \hat{J}X = \bar{J}\pi_* X.$$

Em particular, temos $\hat{J}^2 = I$ (respectivamente, $\hat{J}^2 = -I$). Afirmamos que $\hat{J}$ coincide com $\hat{J}$, a menos de sinal. Escreva $\hat{J} = \alpha I + \beta \bar{D}$, com $\alpha, \beta \in C^{\infty}(L^2)$. Então

$$\pi_* \circ \hat{J} = \bar{J} \circ \pi_* = (\alpha \circ \pi) I \circ \pi_* + (\beta \circ \pi) \bar{D} \circ \pi_* = \pi_*((\alpha \circ \pi) I + (\beta \circ \pi) D),$$

logo $\hat{J} = \alpha I + \beta D$. Portanto, $D \in span\{I, \hat{J}\}$. Como J é o único (a menos de sinal) tensor em $\Delta^{\perp}$ tal que $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = -I$) e $D \in span\,\{I, J\}$, a afirmação segue.

Verifiquemos que $\bar{D}$ é um tensor de Codazzi em L^2, ou seja, $\bar{D}$ satisfaz a condição no item (b). Sejam $X, Y \in \Delta^{\perp}$. Como $h \circ \pi = \eta$, temos

$$f_* AX = -\eta_* X = -h_* \pi_* X \quad \text{e} \quad f_* ADX = -h_* \pi_* DX = -h_* \bar{D} \pi_* X. \tag{2.39}$$

Pela fórmula de Gauss de f e por (2.39) temos que

$$\begin{aligned} f_* \nabla_X ADY &= \tilde{\nabla}_X f_* ADY - \langle AX, ADY \rangle \eta \\ &= -\tilde{\nabla} h_* \bar{D} \pi_* Y - \left\langle h_* \pi_* X, h_* \bar{D} \pi_* Y \right\rangle h \circ \pi \\ &= -h_* \nabla'_{\pi_* X} \bar{D} \pi_* Y - \alpha_h \left(\pi_* X, \bar{D} \pi_* Y \right) + \left\langle \pi_* X, \bar{D} \pi_* Y \right\rangle h \circ \pi \\ &\quad - \left\langle \pi_* X, \bar{D} \pi_* Y \right\rangle h \circ \pi \\ &= -h_* \nabla'_{\pi_* X} \bar{D} \pi_* Y - \alpha_h \left(\pi_* X, \bar{D} \pi_* Y \right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Analogamente,

$$f_* \nabla_Y ADX = -h_* \nabla'_{\pi_* Y} \bar{D} \pi_* X - \alpha_h \left(\pi_* Y, \bar{D} \pi_* X \right). \tag{2.41}$$

Usando a condição (v) da Proposição 2.2.3, obtemos

$$-h_*\nabla'_{\pi_*X}\bar{D}\pi_*Y-\alpha_h\left(\pi_*X,\bar{D}\pi_*Y\right)=-h_*\nabla'_{\pi_*Y}\bar{D}\pi_*X-\alpha_h\left(\pi_*Y,\bar{D}\pi_*X\right). \quad (2.42)$$

Em particular, a condição (b) é satisfeita. Além disso, também de (2.42) obtemos

$$\alpha_h\left(\bar{D}\pi_*X,\pi_*Y\right)=\alpha_h\left(\pi_*X,\bar{D}\pi_*Y\right), \quad (2.43)$$

logo

$$\alpha_h\left(\bar{J}\pi_*X,\pi_*Y\right)=\alpha_h\left(\pi_*X,\bar{J}\pi_*Y\right), \quad (2.44)$$

ou seja, h é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a $\bar{J}$.

Para concluir que o par (h,γ) é hiperbólico (respectivamente, elíptico) com respeito a $\bar{J}$ resta demonstrar que

$$(\mathrm{Hess}_\gamma+\gamma I)\,\bar{J}=\bar{J}^t\,(\mathrm{Hess}_\gamma+\gamma I). \quad (2.45)$$

Sejam $\hat{\pi}:T_h^\perp L^2\to L^2$ a projeção canônica e

$$\Phi:U\subset T_h^\perp L^2\to M^n$$

um difeomorfismo local de uma vizinhança U da seção nula do fibrado normal de h tal que

$$\pi\circ\Phi=\hat{\pi} \quad \text{e} \quad \psi(x,w):=f\circ\Phi(x,w)=\gamma h+h_*\nabla\gamma+w.$$

Afirmamos que, para cada vetor horizontal $X\in T_{(x,w)}\left(T_h^\perp L^2\right)$,

$$\psi_*X=h_*P\hat{\pi}_*X+\alpha_h(\hat{\pi}_*X,\nabla\gamma) \quad (2.46)$$

em que P é o endomorfismo de TL^2 dado por

$$P = \mathrm{Hess}_\gamma + \gamma I - B_w, \tag{2.47}$$

com B_w operador forma de h na direção de w. De fato, seja $\alpha : I \to L^2$ curva diferenciável tal que

$$\alpha(0) = x \quad \text{ e } \quad \alpha'(0) = \hat{\pi}_* X.$$

Dado $w \in T_h^\perp L^2$, seja $\tilde{w}$ um campo paralelo ao longo de α, tal que $\tilde{w}(0) = w$. Então

$$\bar{w}(t) = (\alpha(t), \tilde{w}(t))$$

uma curva em $T_h^\perp L^2$, com $\bar{w}(0) = (x, w)$ e $\bar{w}'(0) = X$. Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten de h obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_* X &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\psi(\bar{w}(t))X) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\gamma(\alpha(t)h(\alpha(t))) + (h_*(\alpha(t))\nabla\gamma) \\
&\quad + \bar{w}(t) \\
&= \hat{\pi}_* X(h)h + \gamma h_* \hat{\pi}_* X + \tilde{\nabla}_{\hat{\pi}_* X} h_* \nabla\gamma + \tilde{\nabla}_{\hat{\pi}_* X}\bar{w}(t) \\
&= \hat{\pi}_* X(h)h + \gamma h_* \hat{\pi}_* X + h_* \tilde{\nabla}_{\hat{\pi}_* X}\nabla\gamma + \tilde{\alpha}_h(\hat{\pi}_* X, \nabla\gamma) \\
&\quad - h_* B_w \hat{\pi}_* X + \nabla^\perp_{\hat{\pi}_* X}\tilde{w} \\
&= \hat{\pi}_* X(h)h + \gamma h_* \hat{\pi}_* X + h_* \mathrm{Hess}_\gamma \hat{\pi}_* X + \alpha_h(\hat{\pi}_* X, \nabla\gamma) \\
&\quad - \langle h_* \hat{\pi}_* X, h_* \nabla\gamma\rangle h - h_* B_w \hat{\pi}_* X \\
&= \langle \hat{\pi}_* X, \nabla\gamma\rangle h + \gamma h_* \hat{\pi}_* X + h_* \mathrm{Hess}_\gamma \hat{\pi}_* X + \alpha_h(\hat{\pi}_* X, \nabla\gamma) \\
&\quad - \langle \hat{\pi}_* X, \nabla\gamma\rangle h - h_* B_w \hat{\pi}_* X \\
&= h_*(\mathrm{Hess}_\gamma - B_w + \gamma I)\hat{\pi}_* X + \alpha_h(\hat{\pi}_* X, \nabla\gamma),
\end{aligned} \tag{2.48}$$

o que mostra (2.46). De (2.39) e (2.46) obtemos

$$\begin{aligned}
-\langle AD\Phi_*X, \Phi_*Y\rangle &= -\langle f_*AD\Phi_*X, f_*\Phi_*Y\rangle \\
&= -\left\langle -h_*\bar{D}\pi_*\Phi_*X, h_*P\pi_*\Phi_*X + \alpha_h(\pi_*\Phi_*X, \nabla\gamma)\right\rangle \\
&= \left\langle h_*\bar{D}\pi_*\Phi_*X, h_*P\pi_*\Phi_*Y\right\rangle \qquad (2.49)\\
&= \left\langle \bar{D}\hat{\pi}_*X, P\hat{\pi}_*Y\right\rangle' \\
&= \left\langle \hat{\pi}_*X, \bar{D}^tP\hat{\pi}_*Y\right\rangle'
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\left\langle D^tA\Phi_*X, \Phi_*Y\right\rangle &= -\left\langle f_*D^tA\Phi_*X, f_*\Phi_*Y\right\rangle \\
&= -\left\langle -h_*\bar{D}^t\pi_*\Phi_*X, h_*P\pi_*\Phi_*X + \alpha_h(\pi_*\Phi_*X, \nabla\gamma)\right\rangle \\
&= \left\langle h_*\bar{D}^t\pi_*\Phi_*X, h_*P\pi_*\Phi_*Y\right\rangle \qquad (2.50)\\
&= \left\langle \bar{D}^t\hat{\pi}_*X, P\hat{\pi}_*Y\right\rangle' \\
&= \left\langle \hat{\pi}_*X, \bar{D}P\hat{\pi}_*Y\right\rangle'.
\end{aligned}$$

Como $AD = D^tA$ pelo condição (v) da Proposição 2.2.3, obtemos de (2.49) e (2.50) que

$$P\bar{D} = \bar{D}^tP,$$

e, portanto,

$$P\bar{J} = \bar{J}^tP.$$

Como $B_w\bar{D} = \bar{D}^tB_w$ por (2.44), concluímos que (2.45) é satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que $h : L^2 \to \mathbb{S}^n$ e $\gamma \in C^\infty(L^2)$ sejam um par (h,γ) hiperbólico (respectivamente, elíptico) com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $\bar{J}^2 = I$ (respectivamente, $\bar{J}^2 = -I$), e que $\bar{D}$ seja um tensor em L^2 satisfazendo (a) e (b).

Para cada $x \in M^n$ e $X \in \Delta^\perp$, definimos o tensor D em M^n como o levantamento horizontal de $\bar{D}$, isto é, para cada $X \in \Delta^\perp$, DX é o único vetor em

$\Delta^{\perp}(x)$ tal que

$$\pi_* DX = \bar{D}\pi_* X.$$

De modo análogo, definimos o tensor J em $\Delta^{\perp}$ como o levantamento horizontal do tensor $\bar{J}$.

Demonstraremos que D em M^n satisfaz as condições da Proposição 2.2.3 e f é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a J. A condição (iv) é claramente satisfeita, uma vez que $\det\bar{D} = 1$. Como o par (h, γ) é hiperbólico (respectivamente, elíptico) com respeito a $\bar{J}$, para cada $w \in T_h^{\perp}L^2$, temos

$$B_w\bar{J} = \bar{J}^t B_w, \tag{2.51}$$

em que B_w é o operador forma de h na direção de w, e

$$(\mathrm{Hess}_\gamma + \gamma I)\bar{J} = \bar{J}^t(\mathrm{Hess}_\gamma + \gamma I).$$

Daí, por (2.51) temos $P\bar{J} = \bar{J}^t P$, em que $P = \mathrm{Hess}_\gamma + \gamma I - B_w$, logo

$$P\bar{D} = \bar{D}^t P.$$

Portanto, por (2.49) e (2.50) obtemos que

$$AD = D^t A$$

o que mostra a condição (v).

Como h é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a $\bar{J}$ e $\bar{D} \in span\{I, \bar{J}\}$, temos que

$$\alpha_h(\bar{D}X, Y) = \alpha_h(X, \bar{D}Y)$$

para quaisquer $X, Y \in TL^2$. Usando ainda que $\bar{D}$ satisfaz a condição (b), de (2.40) e (2.41) decorre que (vi) é satisfeita. Além disso, como $D \in span\{I, J\}$, $D \neq I$ e $AD = D^tA$, concluímos que $AJ = J^tA$, ou seja, h é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a J.

De $C(\Delta) \subset span\{I, J\}$ e $D \in span\{I, J\}$ obtemos que $[C_T, D] = 0$, para qualquer $T \in \Delta$. Por outro lado, como D é projetável, pelo Corolário 1.5.5 temos que

$$\nabla_T D = [C_T, D]. \tag{2.52}$$

Portanto, $\nabla_T D = 0$, ou seja, a condição (iii) é satisfeita.

2.2.4 Demonstração da Proposição 2.2.5

Consideremos separadamente os casos hiperbólico elíptico.

- **Caso hiperbólico**

Suponhamos que h seja hiperbólica com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $\bar{J}^2 = I$ e que exista um tensor $\bar{D} \in \text{span}\{I, \bar{J}\}$ satisfazendo (a) e (b) da Proposição 2.2.4 Pelo Lema 2.1.2 existem coordenadas reais conjugadas (u, v) em L^2 tais que os campos coordenados $\{\partial_u, \partial_v\}$ são autovetores de $\bar{J}$. Como $\bar{D} \in \text{span}\{I, \bar{J}\}$ e $\det\bar{J} = 1$, existe $\theta \in C^\infty(L^2)$ tal que

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\theta} \end{pmatrix}$$

em relação à base $\{\partial_u, \partial_v\}$ formada pelos campos coordenados. Observemos que a equação (b) da Proposição 2.2.4 pode ser escrita como

$$\nabla'_{\partial_u} \bar{D}\partial_v = \nabla'_{\partial_v} \bar{D}\partial_u.$$

Defina $\tau=\theta^2$. Afirmamos que

$$\nabla'_{\partial_u}\bar{D}\partial_v=\nabla'_{\partial_v}\bar{D}\partial_u \Leftrightarrow \begin{cases}\tau_v & =2\Gamma^1\left(1-\tau\right)\\ \tau_u & =2\Gamma^2\tau\left(1-\tau\right)\end{cases}. \tag{2.53}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\nabla'_{\partial_u}\bar{D}\partial_v-\nabla'_{\partial_v}\bar{D}\partial_u &= \nabla'_{\partial_u}\frac{1}{\theta}\partial_v-\nabla'_{\partial_v}\theta\partial_u\\ &= \frac{1}{\theta}\nabla'_{\partial_u}\partial_v+\left(\frac{1}{\theta}\right)_u\partial_v-\left(\theta\nabla'_{\partial_v}\partial_u+\theta_v\nabla'_{\partial_v}\partial_u\right)\\ &= \frac{1}{\theta}\left(\Gamma^1\partial_u+\Gamma^2\partial_v\right)+\left(\frac{1}{\theta}\right)_u\partial_v-\theta\left(\Gamma^1\partial_u+\Gamma^2\partial_v\right)-\theta_v\partial_u\\ &= \left(\frac{1}{\theta}\Gamma^1-\theta\Gamma^1-\theta_v\right)\partial_u+\left(\frac{1}{\theta}\Gamma^2-\theta\Gamma^2+\left(\frac{1}{\theta}\right)_u\right)\partial_v.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla'_{\partial_u}\bar{D}\partial_v-\nabla'_{\partial_v}\bar{D}\partial_u=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\frac{1}{\theta}-\theta)\Gamma^1-\theta_v=0\\ (\frac{1}{\theta}-\theta)\Gamma^2+\left(\frac{1}{\theta}\right)_u=0\end{cases}. \tag{2.54}$$

Multiplicando ambas as equações de (2.54) por 2θ obtemos

$$2\theta_v\theta=2\Gamma^1\left(1-\theta^2\right) \tag{2.55}$$

e

$$2\theta\theta_u=2\Gamma^2\theta^2\left(1-\theta^2\right). \tag{2.56}$$

Logo, pondo $\tau=\theta^2$, as equações (2.55) e (2.56) ficam

$$\begin{cases}\tau_v & =2\Gamma^1\left(1-\tau\right)\\ \tau_u & =2\Gamma^2\tau\left(1-\tau\right)\end{cases} \tag{2.57}$$

Assim, $\tau=\theta^2$ é uma solução positiva do sistema de equações diferenciais parciais (2.53). Portanto, h é uma superfície de primeira ou segunda espécie do tipo real.

Reciprocamente, se h é de primeira ou segunda espécie do tipo real, então h é hiperbólica com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 definido por $\bar{J}\partial_u = \partial_u$ e $\bar{J}\partial_v = -\partial_v$. Seja τ uma solução positiva do sistema de equações diferenciais (2.11) diferente da solução trivial $\tau = 1$. Definimos $\bar{D} \in Hom(TL^2, TL^2)$ de modo que

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\theta}, \end{pmatrix}$$

com $\tau = \theta^2$, com relação à base $\{\partial_u, \partial_v\}$ formada pelos campos coordenados. Como vimos na demonstração da afirmação direta, o fato de τ ser uma solução do sistema de equações (2.11) implica que

$$\nabla'_{\partial_u} \bar{D}\partial_v = \nabla'_{\partial_v} \bar{D}\partial_u$$

e, portanto, $\bar{D}$ satisfaz (a) e (b) da Proposição 2.2.4.

- **Caso elíptico**

Suponhamos, agora, que h seja elíptica com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $\bar{J}^2 = -I$ e que exista um tensor $\bar{D} \in \operatorname{span}\left\{I, \bar{J}\right\}$ satisfazendo (a) e (b) da Proposição 2.2.4. Pelo Lema 2.1.5 existem coordenadas complexas conjugadas $(z, \bar{z})$ de L^2 tais que

$$\bar{D}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \bar{\theta} \end{pmatrix},$$

com respeito à base $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$. Pela equação (b) da Proposição 2.2.4 temos que

$$\nabla'_{\partial_z} \bar{D}^{\mathbb{C}}\partial_{\bar{z}} - \nabla'_{\partial_{\bar{z}}} \bar{D}^{\mathbb{C}}\partial_z = 0. \tag{2.58}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\partial_z}\bar{D}^{\mathbb{C}}\partial_{\bar{z}} - \nabla'_{\partial_{\bar{z}}}\bar{D}^{\mathbb{C}}\partial_z &= \nabla'_{\partial_z}\bar{\theta}\partial_{\bar{z}} - \nabla'_{\partial_{\bar{z}}}\theta\partial_z \\
&= \bar{\theta}\nabla'_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} + \bar{\theta}_z\partial_{\bar{z}} - \theta\nabla'_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z - \theta_{\bar{z}}\partial_z \\
&= \bar{\theta}\left(\Gamma\partial_z + \bar{\Gamma}\partial_{\bar{z}}\right) + \bar{\theta}_z\partial_{\bar{z}} - \theta\left(\Gamma\partial_z + \bar{\Gamma}\partial_{\bar{z}}\right) - \theta_{\bar{z}}\partial_z \\
&= \left(\bar{\theta}\Gamma - \theta\Gamma - \theta_{\bar{z}}\right)\partial_z + \left(\bar{\theta}\bar{\Gamma} + \bar{\theta}_z - \theta\bar{\Gamma}\right)\partial_{\bar{z}}
\end{aligned}$$

logo, (2.58) é equivalente a

$$\bar{\theta}\Gamma - \theta\Gamma - \theta_{\bar{z}} = 0, \tag{2.59}$$

ou seja,

$$\theta_{\bar{z}} + \Gamma(\theta - \bar{\theta}) = 0.$$

Portanto, h é de primeira ou segunda espécie do tipo complexo.

Reciprocamente, se h é de primeira ou segunda espécie do tipo complexo, então h é elíptica com respeito ao tensor $\bar{J}$ definido em L^2 por

$$\bar{J}\partial_u = \partial_v \text{ e } \bar{J}\partial_v = -\partial_u,$$

ou equivalentemente,

$$\bar{J}^{\mathbb{C}}\partial_z = i\partial_z \text{ e } \bar{J}^{\mathbb{C}}\partial_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}}.$$

Seja ρ uma solução de (2.13). Definimos $\bar{D} \in Hom(TL^2, TL^2)$ de modo que

$$\bar{D}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$$

com relação à base $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$. Como vimos na demonstração da afirmação direta, o fato de ρ ser uma solução de (2.13) implica que

$$\nabla'_{\partial_z}\bar{D}^{\mathbb{C}}\partial_{\bar{z}} = \nabla'_{\partial_{\bar{z}}}\bar{D}^{\mathbb{C}}\partial_z,$$

e, portanto, $\bar{D}$ satisfaz (a) e (b) da Proposição 2.2.4.

2.2.5 Demonstração do Teorema 2.2.1

Seja f uma hipersuperfície de Sbrana-Cartan que não seja regrada nem dos tipos (I) e (II) em nenhum subconjunto aberto de M^n. Então f tem posto dois pela Proposição 2.2.2, logo a Proposição 2.2.3 implica que existe um subconjunto aberto U de M^n no qual f é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor $J : \Delta^\perp \to \Delta^\perp$ com $J^2 = I$ (respectivamente, $J^2 = -I$) e existe um tensor $D \in Hom(TL^2, TL^2)$ satisfazendo as condições de (i) a (vi). Parametrizando f por um par (h, γ) através da parametrização de Gauss, segue da Proposição 2.2.2 que existem um tensor $\bar{J} \in L^2$ com $\bar{J}^2 = I$ (respectivamente, $\bar{J}^2 = -I$) e um único tensor $\bar{D} \in \text{span}\left\{I, \bar{J}\right\}$ tal que o par (h, γ) é hiperbólico (respectivamente, elíptico) com respeito a $\bar{J}$ e as condições (a) e (b) da Proposição 2.2.4 são satisfeitas. Finalmente, decorre da Proposição 2.2.5 que a superfície h é de primeira ou segunda espécie do tipo real (respectivamente, complexo).

Reciprocamente, suponha que $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ seja uma hipersuperfície simplesmente conexa parametrizada através da parametrização de Gauss por um par hiperbólico (respectivamente, elíptico) (h, γ), em que h é de primeira ou segunda espécie do tipo real (respectivamente, complexo). Pela Proposição 2.2.5, a superfície h é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor $\bar{J}$ em L^2 com $\bar{J}^2 = I$ (respectivamente, $\bar{J}^2 = -I$), e existe $\bar{D} \in \text{span}\left\{I, \bar{J}\right\}$ satisfazendo (a) e (b) da Proposição 2.2.4. Esta última implica então que a hipersuperfície f é hiperbólica (respectivamente, elíptica) com respeito a um tensor $\bar{J}$ satisfazendo (2.23), e que $\bar{D}$ determina um único tensor D em M^n satisfazendo as condições da Proposição 2.2.3. Finalmente, pela Proposição 2.2.3 existe uma imersão isométrica $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com a mesma distribuição de nulidade relativa de f, e que não é congruente a f em nenhum subconjunto aberto de M^n. Logo f é uma hipersuperfície de Sbrana-Cartan e suas deformações isométricas são do mesmo tipo.

Referências Bibliográficas

[1] Bianchi, L., *Sulle varietà a tre dimensioni dformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni.* Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, serie III, t.XIII (1905), pp. 261-323.

[2] Cartan, E., *La déformation des hupersurfaces déformabeles dans l'espace euclidien réel à n dimensions.* Bull. Soc. Math. France, vol 44 (1916), pp.65-99.

[3] Dajczer, M. and Gromoll, D., *Gauss parametrization and rididity aspects of submanifolds.* J. Differential Geometry, vol22 (1985), pp. 1-12.

[4] Dajczer, M. and Gromoll, D. *Rigidity of complete Euclidean hypersurfaces* . J. Differential Geometry, vol 31 (1990), pp. 401-416.

[5] Dajczer, M., Florit, L., Tojeiro , R. *On deformable hypersurfaces in space forms.* Ann. Mat. Pura Appl., vol 147 (1998), pp. 361-590.

[6] Dajczer, M., Florit, L., Tojeiro, R. *Euclidean hupersurfaces with genuine deformations in codimension two.* Manuscripta Mathematica, (2012).

[7] Dajczer, M., Antonucci, G., Lima-Filho, P., Tojeiro, R. *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathmatics Lecture Series 13, Published or Persih, Inc, Houston, 1990.

[8] Evans, L. *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics 19, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1998.

[9] Nölker, S. *Isometric immersion of warped productos.* Diff. Geom. Appl. vol. 06 (1996), pp. 31-50.

[10] Sbrana, V. *Sulla varietá ad n-1 dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni.* Rend. Circ. Mat. Palermo, vol 27 (1909),pp. 1-45.

[11] Schur, F. *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Paumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume.* Math. Ann, vol 28 (1886), pp.343-353.