**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# UMA VERSÃO ABSTRATA DO TEOREMA DE CAUCHY-KOWALEVSKI

DANILO DE JESUS FERREIRA

**São Carlos-SP**
**Julho de 2013**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# UMA VERSÃO ABSTRATA DO TEOREMA DE CAUCHY-KOWALEVSKI

DANILO DE JESUS FERREIRA
Orientador: RAFAEL FERNANDO BAROSTICHI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**São Carlos-SP**
**Julho de 2013**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da**
**Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F383va

Ferreira, Danilo de Jesus.
Uma versão abstrata do teorema de Cauchy-Kowalevski / Danilo de Jesus Ferreira. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
51 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Análise. 2. Cauchy-Kowalevski, Teorema de. 3. Cauchy, Problemas de. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

**Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi**
**DM – UFSCar**

**Prof. Dr. Gerson Petronilho**
**DM – UFSCar**

**Prof. Dr. Sérgio Luís Zani**
**ICMC – USP**

... o senhor Fourier era de opinião que o principal fim da Matemática era a utilidade pública e a explicação dos fenômenos naturais, mas, um filósofo como ele, deveria ter sabido que a finalidade única da ciência é a honra do espírito humano, e que deste ponto de vista, uma questão de números vale tanto quanto uma questão do sistema do mundo.

C. G. J. Jacobi, carta (em francês) a Legendre, de 2 de Julho de 1830.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, saúde e direção constante.

À minha família, pela educação, amor e incentivo.

Ao professor Rafael, pela excelente orientação e profissionalismo.

Aos professores Grilo, Elma, Hildete e Jean, pela confiança em mim.

Aos colegas e amigos da UEFS e do DM, pelo ótimo convívio neste período. Deixo aqui registrados meus agradecimentos a Alisson, Ederson, Erick, Marlon, Renan, Thales, Tallyta, e especialmente à Osmar.

Ao meu colega Nivaldo, pelas viagens à Salvador.

Aos anônimos contribuintes, e à CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nosso objetivo principal neste trabalho é apresentar uma versão abstrata do Teorema de Cauchy-Kowalevski, e utilizá-lo para resolver o problema de Cauchy periódico para a equação de Camassa-Holm.

# Abstract

Our main goal in this work is to present an abstract version of Cauchy-Kowalevski theorem and use it to solve the periodic Cauchy problem for the Camassa-Holm equation.

# Sumário

# Introdução

O Teorema de Cauchy-Kowalevski é um dos resultados clássicos da teoria de existência local para problemas de Cauchy. Ele afirma que, dada uma equação com coeficientes analíticos $F(z,(\partial_z^\alpha u)) = 0$ e uma condição inicial $u = u^0$ em $M$, sendo $M$ uma hipersuperfície não-característica, existe uma única $\tilde{u}$ analítica numa vizinhança de $M$ satisfazendo $F(z,(\partial_z^\alpha \tilde{u})) = 0$ e $\tilde{u} = u^0$ em $M$. Tendo este resultado como ponto de partida, o objetivo central deste trabalho é apresentar uma versão abstrata deste teorema seguindo as linhas do artigo [1] e, utilizando-o, resolver o problema de Cauchy periódico para a equação de Camassa-Holm.

A equação de Camassa-Holm, $\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u + 3u\partial_x u - 2\partial_x u \partial_x^2 u - u\partial_x^3 u = 0$, trata-se de uma equação não-linear unidimensional, derivada primeiramente por R. Camassa e D. Holm ([2]) como uma equação modelo para ondas de águas rasas sob a influência da gravidade, e se tornou objeto de intensivos estudos. A função $u = u(x,t)$ é padrão para a velocidade do fluido no tempo $t$ e na direção $x$. No texto, provaremos a analiticidade de suas soluções nas duas variáveis, globalmente no espaço e localmente no tempo, quando a condição inicial considerada for analítica.

O texto está dividido em quatro capítulos. No primeiro, coletamos todos os resultados básicos necessários para o entendimento dos tópicos explorados posteriormente, além de algumas notações, hoje em dia muito difundidas em Matemática. A fim de facilitar a leitura, neste capítulo não exibimos as demonstrações, contudo, referências adequadas sempre serão indicadas. O Capítulo 2 é destinado à prova do Teorema de Cauchy-Kowalevski clássico. No Capítulo 3 é introduzida a noção de escala de espaços de Banach, e neste contexto, provaremos o nosso principal resultado, o Teorema 3.1. Finalmente, no Capítulo 4 derivamos o Teorema de Cauchy-Kowalevski clássico, e resolvemos o problema de Cauchy periódico para a equação de Camassa-Holm através de uma versão holomorfa do Teorema 3.1

# Capítulo 1

# Pré-requisitos

O objetivo principal deste capítulo é estabelecer algumas notações, além de resultados básicos que serão utilizados livremente.

## 1.1 Notações e Conceitos Básicos

Iniciamos esta seção introduzindo algumas terminologias que serão utilizadas em todo o texto. Em qualquer discussão que envolva funções de $n$ variáveis, o termo *multi-índice* denotará uma $n$-upla ordenada

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

com $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+ = \{m \in \mathbb{Z}; m \geq 0\}$. Dados dois multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, dizemos que $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. A cada multi-índice $\alpha$ associamos o operador diferencial

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}},$$

sendo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a *ordem* do operador e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Algumas vezes também escreveremos $D^\alpha = i^{-|\alpha|}\partial^\alpha$. Dado o vetor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

Com as notações acima, a fórmula de Taylor para funções $f \in C^k$ torna-se

$$f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha f)(x_0) \frac{h^\alpha}{\alpha!} + r(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|^k} = 0,$$

e a *regra de Leibniz* para a derivada do produto de duas funções assume o formato

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\substack{\beta, \gamma \\ \beta + \gamma = \alpha}} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} (\partial^\beta f)(\partial^\gamma g).$$

O Teorema Binomial também possui uma importante generalização, a qual será utilizada algumas vezes e está exibida abaixo

$$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,$$

sendo $\alpha$ um multi-índice, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. A igualdade acima é conhecida como o Teorema Multinomial.

No teorema a seguir os pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ serão escritos da forma $(x, y)$ onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$.

**Teorema 1.1. (Função Implícita)**

*Dada uma função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $C^k$ com $k \geq 1$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ tal que $f(z_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $I = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ tais que $B \times I \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(z) \neq 0$ para todo $z = (x, y) \in B \times I$. Além disso, existe uma função $\xi : B \to I$ de classe $C^k$, que associa a cada $x \in B$ um único $y = \xi(x)$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$.*

Observemos que a variável $y$ no enunciado acima não possui nada de especial, exceto na simplificação (e na demonstração) do teorema. Trocando-a por qualquer outra variável $x_i$ com $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtém-se as mesmas conclusões com as devidas adaptações.

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Uma aplicação $f : U \to V$ chama-se um *difeomorfismo* entre $U$ e $V$ quando é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $f^{-1} : V \to U$ também é diferenciável. Um dentre os teoremas que desempenham papel fundamental na Análise e que faz uso deste conceito é o

**Teorema 1.2. (Aplicação Inversa)**

*Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe $C^k$ com $k \geq 1$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $x \in U$ é tal que $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(x, \delta) \subset U$ tal que $f|_B$ é um difeomorfismo de classe $C^k$ sobre um aberto $V$ contendo $f(x)$.*

As demonstrações dos dois teoremas acima podem ser encontradas em [10].

O teorema seguinte garante a existência e unicidade local de soluções para equações diferenciais ordinárias. Sua demonstração encontra-se em [15].

**Teorema 1.3. (Picard)**

*Seja $f : I \times B \to \mathbb{R}$ contínua, onde $I = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$. Suponhamos $f$ localmente lipschitziana com respeito a variável $x$ e $|f| < M$. Então existe uma única solução do problema de Cauchy*

$$x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0,$$

*em $J = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \alpha\}$ onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

Uma *imersão* do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ no espaço $\mathbb{R}^{m+n}$ é uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetiva. Uma *parametrização* de classe $C^k$ e dimensão $m$ de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é uma imersão $\varphi : V_0 \to V$ de classe $C^k$ que é, ao mesmo tempo, um homeomorfismo do aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ sobre $V$. Finalmente, um conjunto não vazio $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ chama-se uma *superfície m-dimensional* de classe $C^k$ quando para todo ponto $x_0 \in M$, existir um aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $V = U \cap M$

é a imagem de uma parametrização $\varphi : V_0 \to V$, de dimensão $m$ e classe $C^k$. O aberto $V$ é chamado uma *vizinhança parametrizada do ponto* $x_0$. Neste caso, dizemos que a superfície $M$ tem *codimensão* $n$. Estaremos interessados apenas quando $n = 1$, no qual tais superfícies recebem um nome específico e são denominadas *hipersuperfícies*.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície $m$-dimensional de classe $C^k$ e $\varphi : U_0 \to U$ uma parametrização do aberto $U \subset M$. Os pontos de $U$ são determinados por $m$ parâmetros:

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in U_0 \mapsto \varphi(x) \in U.$$

Se $V_0$ é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^m$ e $\xi : V_0 \to U_0$ é um difeomorfismo de classe $C^k$, então

$$\varphi \circ \xi : V_0 \to U$$

é ainda uma parametrização de $U$. A aplicação $\xi$ é comumente denominada uma *mudança de coordenadas*. Ainda com as notações deste paragráfo, podemos associar o *espaço tangente* a $M$ no ponto $\varphi(x)$ como sendo o espaço vetorial de dimensão $m$

$$TM_{\varphi(x)} = \varphi'(x) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \varphi'(x) \cdot e_i$, $i = 1, \ldots, m$, formam uma base de $TM_{\varphi(x)}$ chamada de *base associada a parametrização* $\varphi$. O espaço $TM_{\varphi(x)}$ independe da parametrização escolhida.

Uma aplicação $A : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ entre dois espaços métricos é dita uma *contração*, se existir uma constante $c \in [0, 1)$ tal que $d_2(A(x), A(y)) \leq c d_1(x, y)$ para todo $x, y \in X_1$.

**Teorema 1.4. (Ponto Fixo para Contrações)**

*Se $E$ é um espaço métrico completo, então toda contração $A : E \to E$ possui um único ponto $x \in E$ com $A(x) = x$.*

Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in [1, \infty)$ definimos o espaço $L^p(U)$ por

$$L^p(U) = \{f : U \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } |f|_{L^p(U)} < \infty\},$$

sendo

$$|f|^p_{L^p(U)} = \int_U |f(x)|^p dx.$$

Acima, o símbolo $dx$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. A demonstração do teorema seguinte pode ser encontrada em [6].

**Teorema 1.5.** *O espaço $L^p(U)$ é completo para todo $p \in [1, \infty)$.*

Finalizaremos esta seção com uma breve discussão de funções analíticas (holomorfas).

Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, chama-se *analítica* em $U$, quando é $C^\infty$ em $U$ e, para cada $x \in U$, existe um $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ acarreta $x + h \in U$ e

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) \cdot h^{(j)},$$

isto é, a série de Taylor converge na vizinhança de cada ponto de $U$, para o valor da aplicação $f$.

A fim de estender esta definição para funções $f : U \to E$, sendo $U \subset \mathbb{C}$ e $E$ um espaço de Banach complexo, faremos uma pequena passagem pelo Cálculo Diferencial neste contexto. Preservando as notações, diremos que $f : U \to E$ é diferenciável no ponto $x \in U$, se existir uma transformação linear contínua $T : \mathbb{C} \to E$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h),$$

com $\lim_{h \to 0} r(h)/|h| = 0$.

Na definição acima $h$ deve ser tomado suficientemente pequeno para que $x + h \in U$. A transformação $T$ é conhecida como a *derivada* de $f$ no ponto $x$ e é denotada por $f'(x)$. Quando $f$ é diferenciável em todo ponto, dizemos que ela é diferenciável, e neste caso, podemos considerar a aplicação derivada $f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{C}, E), x \mapsto f'(x)$. Se $f'$ for contínua, $f$ é dita continuamente diferenciável ou de classe $C^1$, e escrevemos $f \in C^1$. Por indução se define a $k$-ésima derivada de $f$. Supondo $f$ $(k-1)$-vezes diferenciável, a aplicação $f^{(k)} = (f^{(k-1)})' : U \to \mathcal{L}_k(\mathbb{C}, E)$ é a $k$-ésima derivada de $f$. Se $f^{(k-1)} \in C^1$ então $f$ será $k$-vezes continuamente diferenciável e escreveremos $f \in C^k$. Lembremos que $\mathcal{L}_k(\mathbb{C}, E)$ é o espaço das transformações $k$-lineares contínuas de $\mathbb{C}^k$ em $E$.

Com esta definição disponível, diremos que uma aplicação $f : U \to E$, definida no aberto $U \subset \mathbb{C}$ e assumindo seus valores no espaço de Banach $E$, é *holomorfa*, se for continuamente diferenciável. Neste caso, é possível mostrar que esta definição equivale à anterior, dada em termos da expansão de Taylor. O leitor interessado pode consultar a referência [3].

Nosso objetivo agora é definir (sucintamente) a integral de uma função contínua $f$, definida num intervalo da reta e tomando valores num espaço de Banach $E$.

Uma *partição* de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é uma coleção $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Denotamos por $|P| = \max\{t_{i+1} - t_i; 0 \leq i \leq n-1\}$ a *norma* da partição $P$. Se $f : [a, b] \to E$ é uma função contínua, $E$ um espaço de Banach e $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, definimos a soma

$$\sum(f; P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i),$$

e dizemos que um vetor $v \in E$ é a *integral* de $f$ quando

$$v = \lim_{|P| \to 0} \sum(f; P),$$

caso tal limite exista. Equivalentemente, $v$ é a integral de $f$ quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ implicar em $|v - \sum(f, P)| < \epsilon$. Quando a integral existe, a notação utilizada é $v = \int_a^b f(t)dt$ e dizemos que $f$ é integrável.

Apresentamos a seguir três resultados importantes. O primeiro caracteriza as funções analíticas (vide [14]), enquanto os outros dois estendem fatos bem conhecidos do Cálculo (vide [3]).

**Proposição 1.1.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é analítica se, e somente se, para todo $K \subset U$ compacto, existir uma constante $C_K > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha f|_{L^2(K)} \leq C_K^{|\alpha|+1} \alpha!,$$

*para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.*

**Teorema 1.6.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas (resp. holomorfas) definidas num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$ com valores num espaço de Banach $E$. Se $f_n$ convergir uniformemente para uma função $f$, então $f$ será contínua (resp. holomorfa) em $U$.*

Uma função $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ é dita de *variação limitada*, se existir uma constante $A \geq 0$ tal que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leq A,$$

para toda partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$. Dado $U \subset \mathbb{C}$, um *caminho* em $U$ é uma aplicação contínua $\gamma : [0, 1] \to U$. Um caminho em $U$ é dito *retificável* se for de variação limitada. Dados dois caminhos $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z_1$, diremos que eles são *homotópicos* se existir uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \to U$ tal que $H(s, 0) = \gamma_1(s), H(s, 1) = \gamma_2(s), H(0, t) = z_0$ e $H(1, t) = z_1$ para quaisquer $s, t \in [0, 1]$.

**Teorema 1.7. (Cauchy)**

*Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto, $E$ um espaço de Banach e $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ dois caminhos retificáveis tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Se $\gamma_1$ e $\gamma_2$ forem homotópicos, então $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ para toda função holomorfa $f : U \to E$.*

## 1.2 Os espaços $H_2(\mathbb{T})$ e $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$

Definimos o *toro unidimensional* como sendo o conjunto $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$. A *transformada de Fourier* de um elemento $f \in L^2(\mathbb{T})$ é a aplicação $\hat{} : L^2(\mathbb{T}) \to \ l^2(\mathbb{Z}), f \mapsto \hat{f}$, onde

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \ \xi \in \mathbb{Z}.$$

Lembremos que $l^2(\mathbb{Z}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}; |x|_{l^2(\mathbb{Z})} < \infty\}$, sendo

$$|x|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2.$$

**Teorema 1.8.** *A transformada de Fourier $\hat{} : L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$ é um isomorfismo linear e*

$$|f|_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} |\hat{f}|_{l^2(\mathbb{Z})},$$

*para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$. Além disso,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} e^{ix\eta} \hat{f}(\eta), \ q.t.p..$$

**Proposição 1.2.** *Seja $f$ uma função analítica em $\mathbb{T}$. Então existem constantes $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|\hat{f}(\xi)| \leq Ce^{-\delta|\xi|}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$.*

**Teorema 1.9.** *Sejam $f \in L^2(\mathbb{T}) \cap C^k(\mathbb{T})$. Se $D^k f \in L^2(\mathbb{T})$, então $(D^k f)\widehat{\ }(\xi) = \xi^k \hat{f}(\xi)$.*

Definimos o *espaço de Sobolev* $H_2(\mathbb{T})$, pondo

$$H_2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}); |f|_{H_2(\mathbb{T})} < \infty\},$$

onde

$$|f|^2_{H_2(\mathbb{T})} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^2.$$

**Teorema 1.10.** *O espaço $H_2(\mathbb{T})$ é completo.*

As demonstrações dos Teoremas 1.8, 1.9 e 1.10 podem ser encontradas em [6]. Quanto à da Proposição 1.2, veja a referência [14].

O espaço das *funções-teste* em $\mathbb{T}$ é o conjunto

$$C^\infty(\mathbb{T}) = \{\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}; \phi \textit{ é infinitamente diferenciável}\}.$$

Uma *distribuição* em $\mathbb{T}$ é um funcional linear contínuo em $C^\infty(\mathbb{T})$, e o espaço das distribuições em $\mathbb{T}$ é denotado por $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$. Uma sequência $\{u_j\} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ converge a $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ se $\langle u_j, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$ para toda $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^2_+$, definimos a derivada $D^\alpha u$ pondo $\langle D^\alpha u, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \phi\rangle, \phi \in C^\infty(\mathbb{T})$.

**Proposição 1.3.** .

*(a) Se $u_n \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$, então $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$.*

*(b) Se $u_n \to u_1$ e $u_n \to u_2$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$, então $u_1 = u_2$.*

*(c) Se $u_n \to u$ em $H_2(\mathbb{T})$, então $u_n \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$.*

A inclusão $H_2(\mathbb{T}) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ e a proposição acima terão grande utilidade na Seção 4.2. Sua demonstração (com as modificações óbvias) pode ser encontrada em [7].

## 1.3 Operadores Pseudo-Diferenciais

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $m \in \mathbb{R}$. O conjunto dos *símbolos de ordem $m$* em $\Omega$, denotado por $S^m(\Omega)$, é o espaço das funções $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tais que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$ e $K \subset \Omega$ compacto, existe uma constante $C_{(\alpha,\beta,K)} > 0$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |D^\beta_x D^\alpha_\xi p(x, \xi)| \leq C_{(\alpha,\beta,K)}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Um *operador pseudo-diferencial de ordem* $m$ em $\Omega$ é uma aplicação linear $p(x,D) : C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, $u \mapsto p(x,D)u$, dada por

$$p(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

onde $p \in S^m(\Omega)$. Na definição acima, $C_c^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \to \mathbb{C}; \phi \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(\phi)$ *é compacto*$\}$, sendo $\text{supp}(\phi)$ o suporte de $\phi$, isto é, o fecho do subconjunto $\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}$.

Se $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ ($a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$), então $p \in S^m(\Omega)$. Isto nos diz que todo operador diferencial com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$ é um operador pseudo-diferencial em $\Omega$. Também, se $p(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{m/2}$ teremos $p \in S^m(\Omega)$, e daí $p(x,D) = (1-\partial_x^2)^{-1}$ é um operador pseudo-diferencial de ordem $m$. Utilizando o Teorema 1.9 obtemos a

**Proposição 1.4.** *Se* $f \in L^2(\mathbb{T})$, *então* $((1-\partial_x^2)^{-1}f)\widehat{\ }(\xi) = (1+\xi^2)^{-1}\hat{f}(\xi)$.

# Capítulo 2

# Teoria Local de Existência

## 2.1 Equações Reais de Primeira Ordem e o Problema de Cauchy

Uma expressão da forma

$$F(x, (\partial^\alpha u))_{|\alpha|\leq k}) = 0, \tag{2.1}$$

é chamada uma *equação diferencial parcial de ordem k*, sendo $F$ uma função dada, $u : U \to \mathbb{C}$ uma função desconhecida definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $k \geq 1$ um inteiro.

Uma função $u : U \to \mathbb{C}$ é solução da equação (2.1), se para todo $x \in U$ existirem todas as derivadas parciais $\partial^\alpha u(x)$ com $|\alpha| \leq k$ e $F(x, (\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\leq k}) = 0$.

A equação (2.1) é chamada *linear* se ela possui a forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u = f(x), \tag{2.2}$$

e *quase-linear* se ela for escrita como

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|\leq k-1})\partial^\alpha u = b(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|\leq k-1}). \tag{2.3}$$

A grosso modo, uma equação é linear se ela for linear na variável $((\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k})$ e seus coeficientes $a_\alpha$ dependerem apenas de $x$. Da mesma forma, ela será quase-linear se for linear somente na variável $((\partial^\alpha u)_{|\alpha|=k})$ e seus coeficientes dependerem tanto de $x$ quanto das derivadas parciais $((\partial^\beta u)_{|\beta|\leq k-1})$. Evidentemente, a classificação das equações diferencias parciais não se resume a estes dois tipos, entretanto, como o objetivo deste capítulo é apresentar uma demonstração da versão "clássica" do Teorema de Cauchy-Kowalevski, a qual utiliza apenas fatos relativos aos tipos mencionados acima, não definiremos as demais classes. O leitor poderá encontrar inúmeras classes de equações nas referências citadas na bibliografia. Para evitar repetições desnecessárias, a sigla *edp* denotará de uma vez por todas a expressão *equação diferencial parcial.*

Associamos à *edp* (2.2) o *operador diferencial linear de ordem* $k$ em $U \subset \mathbb{R}^n$

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha, \tag{2.4}$$

e escrevemos $Lu = f$. Definimos o *símbolo principal* do operador $L$ no ponto $x \in U$ como sendo o polinômio homogêneo de grau $k$ em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\sigma_L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Dizemos que um vetor $\xi \neq 0$ é *característico* para $L$ em $x$ se $\sigma_L(x, \xi) = 0$, e o conjunto

$$C_L(x) = \{\xi \neq 0; \sigma_L(x, \xi) = 0\},$$

é conhecido como o *cone*[1]*característico* de $L$ em $x$. Convencionando-se $0^0 = 1$, facilmente se verifica que um vetor $\xi = me_i, m \neq 0$ pertence a $C_L(x)$ se, e somente se, o coeficiente da derivada $\partial_i^k$ em $L$ se anula em $x$. A próxima definição será fundamental em todo o texto. Uma hipersuperfície $M$ é chamada *característica* para $L$ em $x$, se o vetor normal $v(x)$ à $M$ em $x$ pertence a $C_L(x)$ e $M$ é dita *não-característica* se ela não for característica em qualquer ponto.

**Teorema 2.1.** *Seja $\sum_{j=1}^n a_j \partial_j u + bu = f$ uma equação linear de primeira ordem, onde $a_j, b$ e $f$ são funções reais de classe $C^1$. Suponha que $M$ é uma hipersuperfície de classe $C^1$ não-característica para a equação acima e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$. Então para toda vizinhança suficientemente pequena $\Omega \supset M$ em $\mathbb{R}^n$ existe uma única solução $u \in C^1$ de $\sum_{j=1}^n a_j \partial_j u + bu = f$ definida em $\Omega$ com $u = \varphi$ em $M$.*

*Demonstração.* De fato, seja $\sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u(x) = f(x) - b(x)u(x)$ a equação em questão sob as hipóteses do teorema, e consideremos o campo vetorial

$$A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x) - b(x)u(x)).$$

Como

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u(x) - (f(x) - b(x)u(x)) = 0,$$

é equivalente a $\langle A(x), n(x) \rangle = 0$ onde $n(x) = (\partial_1 u(x), \ldots, \partial_n u(x), -1)$, e a normal ao gráfico de $y = u(x)$ no ponto $x$ é um múltiplo de $n(x)$, a condição acima nos diz que $A(x)$ é tangente ao gráfico de $y = u(x)$ em qualquer ponto. Isto sugere que olhemos as *curvas integrais*

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(x) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = f(x) - b(x)u(x). \tag{2.5}$$

É claro que qualquer gráfico de uma função $y = u(x)$ que é a união de uma família destas curvas define uma solução do problema. Com efeito, se o ponto $p = (x, u(x)) \in \mathrm{Gr}(u)$, então existe uma curva integral $\varphi_p$ com $\varphi_p(0) = p$ e contida em $\mathrm{Gr}(u)$. Como $\varphi_p'(t) = A(\varphi_p(t))$ teremos

$$\left\langle \varphi_p'(t), (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u, -1) \right\rangle = 0,$$

[1]Um subconjunto $C$ de um espaço vetorial $E$ chama-se um *cone* quando para todo $v \in C$ e todo $t > 0$, tem-se $tv \in C$. $C_L(x)$ é um cone com vértice na origem.

e visto que $p$ foi tomado arbitrariamente concluímos que $\mathrm{Gr}(u)$ forma uma solução da equação. Reciprocamente, suponhamos que $u$ seja solução do problema. Sejam $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ e $y(t)$ soluções de (2.5). Se o gráfico de $y = u(x)$ intersecta uma curva integral de $A$ num ponto $(x_0, y_0)$, então ele conterá a curva toda. Com efeito, defina $U(t) = y(t) - u(x(t))$. Assim

$$U(0) = y(0) - u(x(0)) = y_0 - y_0 = 0,$$

pois $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}(u) \cap \{\text{traço da curva integral } \ (x(t), y(t))\}$. Por outro lado

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dy}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \partial_j u \frac{dx_j}{dt} = f - bu - \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j u = 0.$$

Como $U = 0$ é uma solução, segue do Teorema de Picard que ela será a única solução com $dU/dt = 0$ e $U(0) = 0$. Portanto $y(t) = u(x(t))$ para todo $t$, e consequentemente a curva integral encontra-se completamente no gráfico de $y = u(x)$. Como conseqüência, se dois gráficos que representam soluções se intersectarem em um ponto $p$, eles se intersectarão em toda curva integral passando por $p$. Resulta também que o gráfico de uma solução $u$ será a união de curvas integrais de $A$ estabelecendo a unicidade.

Suponhamos dada a condição inicial $u = \varphi$ na hipersuperfície $M$. Para cada $x \in M$ existe um aberto $M_x$ com $x \in M_x \subset \mathbb{R}^n$ dotado de uma parametrização $g : S_x \subset \mathbb{R}^{n-1} \to M_x$. Para cada $s = (s_1, \ldots, s_{n-1}) \in S_x$, a condição de $M$ não ser característica em $x$ equivale a

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial s_1}(s) & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial s_{n-1}}(s) & a_1(g(s)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial s_1}(s) & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial s_{n-1}}(s) & a_n(g(s)) \end{bmatrix} \neq 0,$$

onde $x = g(s)$. Para cada $s \in S_x$, consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dx_j}{dt}(s,t) = a_j(x), & \dfrac{dy}{dt}(s,t) = f(x) - b(x)u(x), \\ x_j(s,0) = g_j(s), & y(s,0) = \varphi(g(s)). \end{array}$$

Aqui $s$ é apenas um parâmetro, assim temos um sistema de equações diferenciais ordinárias na variával $t$. Pelo Teorema de Picard, existe uma única solução $(x, y)$ definida para $t$ pequeno e $(x, y)$ é uma função de classe $C^1$ nas variáveis $s$ e $t$. A condição anterior nos diz que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial s_1}(s,0) & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}}(s,0) & \dfrac{\partial x_1}{\partial t}(s,0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial s_1}(s,0) & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}}(s,0) & \dfrac{\partial x_n}{\partial t}(s,0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

O Teorema da Aplicação Inversa implica que para todo $(s, 0) \in \mathbb{R}^n$, existem abertos $A_s, B_s \subset \mathbb{R}^n$ com $(s, 0) \in A_s$ e $x(s, 0) \in B_s$ tais que $\psi : A_s \to B_s$ dada por $\psi(s, t) = x(s, t)$ é invertível, fornecendo $s$ e $t$ como funções de $x \in B_s$ com $t(x) = 0$ e $g(s(x)) = x$ quando $x \in B_s \cap M$. Com efeito, se $x \in B_s \cap M$ então $x = g(s) \Rightarrow t(x) = t(g(s)) = t(x(s,0)) = 0$ e $g(s(x)) = x(s(x),0) = x$. Definamos agora $u(x) = y(s(x), t(x))$. Claramente $u(x) = \varphi(x)$ se $x \in B_s \cap M$, pois neste caso $u(x) = y(s(x), t(x)) = y(s(x), 0) = \varphi(g(s(x))) = \varphi(x)$. Por outro lado, a regra da cadeia implica em

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j u &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial s_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial t}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\
&= 0 + \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= f - bu,
\end{aligned}$$

pois $s_k$ e $t$ são funcionalmente independentes. Assim $u$ é uma solução local para o problema. Repetindo este processo para todo ponto $x \in M$ e observando que as soluções coincidirão nos domínios comuns, "colamos"as soluções locais fornecendo uma solução global para toda hipersuperfície $M$.

Observemos que $x(s,t)$ deve sair de $M$ no mínimo para $t$ pequeno, pois caso contrário $x'(t) = A(x(t))$ nestes valores de $t$ e daí $A(x(t))$ seria tangente a $M$. $\square$

Agora retornaremos para a equação de $k$-ésima ordem:

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0, \tag{2.6}$$

com $F$ no mínimo de classe $C^1$. Se $M$ é uma hipersuperfície de classe $C^k$ e $u$ uma função $C^{k-1}$ definida numa vizinhança de $M$, os valores[2] $u, \partial_\nu u, \ldots, \partial_\nu^{k-1} u$ em $M$ são chamadas as *condições de Cauchy* de $u$ em $M$. O problema de Cauchy é resolver (2.6) quando tais condições são pré-estabelecidas.

Iremos nos restringir a uma vizinhança de um ponto dado em $M$, e desta forma assumiremos que uma mudança de coordenadas fora realizada de modo que $M$ contenha a origem, e próximo a ela, coincida com o hiperplano $x_n = 0$. Será necessário fazermos uma pequena modificação nas notações. Identificaremos o espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e denotaremos um ponto deste espaço como $(x,t)$ onde $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. As derivadas com respeito a $x$ e $t$ serão escritas respectivamente, como $\partial_x^\alpha$ onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ e $\partial_t^j$. Com estas notações o problema de Cauchy consistirá em resolver, caso seja possível, o seguinte sistema:

[2]Se $u$ é uma função diferencável numa vizinhança da hipersuperfície $M$, definimos a *derivada normal* de $u$ em $M$ pondo $\partial_\nu u = \langle \nu, \nabla u \rangle$.

$$
\begin{cases} F(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\leq k}) = 0 \\ \partial_t^j u(x,0) = \phi_j(x) \quad (0 \leq j \leq k-1). \end{cases} \tag{2.7}
$$

Começamos observando que se $u$ é uma função de classe $C^r$ com $r \geq k$, então a condição de Cauchy $\{\phi_j\}$ determina todas as derivadas $\partial_x^\alpha \partial_t^j u$ em $M$ com $j < k$ e $|\alpha| + j \leq r$, pois

$$
\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,0) = \partial_x^\alpha \phi_j(x).
$$

Portanto, a única derivada em (2.7) que é desconhecida em $M$ é $\partial_t^k u$. A fim de que o problema de Cauchy esteja bem comportado, devemos assumir que a equação $F = 0$ possa ser resolvida em função de $\partial_t^k u$. No caso linear esta condição é equivalente a dizer que a hipersuperfície é não-característica como se verifica facilmente.

No caso geral, a equação

$$
F(x,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{|\alpha|+j\leq k, j<k}, u_{0k}) = 0,
$$

não determina $u_{0k}$ de forma única como uma função de $x$ em $M$. Dizemos então que o problema de Cauchy *é não-característico* se a derivada $u_{0k}$ pode ser determinada como uma função $C^1$ da variável $x$ em $M$ de modo que

$$
F(x,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{|\alpha|+j\leq k, j<k}, u_{0k}) = 0,
$$

e

$$
\frac{\partial F}{\partial u_{0k}}(x,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{|\alpha|+j\leq k, j<k}, u_{0k}(x)) \neq 0,
$$

para todo $x$. Neste caso, podemos resolver a equação $F = 0$ em função de $u_{0k}$ através do Teorema da Função Implícita. Além disso, $u_{0k}$ será de classe $C^1$ numa vizinhança de $M$ e daí podemos reescrever a primeira equação acima como

$$
\partial_t^k u = G(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\leq k, j<k}). \tag{2.8}
$$

Assim, as condições de Cauchy $\{\phi_j\}$ juntamente com a igualdade (2.8) determinam todas as derivadas de $u$ de ordem menor ou igual a $k$ em $M$. Se $G$ for $p$-vezes diferenciável, podemos determinar as derivadas $\partial_t^{k+j} u$ em $M$ para todo $j = 1, \ldots, p$. A proposição a seguir reúne todos estes fatos.

**Proposição 2.1.** *Se $G, \phi_0, \ldots, \phi_{k-1}$ são funções analíticas, então existe no máximo uma função analítica $u$ satisfazendo (2.8) com $\partial_t^j u(x,0) = \phi_j(x)$ para $0 \leq j < k$.*

*Demonstração.* De fato, sejam $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ funções analíticas satisfazendo (2.8) tal que $\partial_t^j u_i(x,0) = \phi_j(x)$ para todo $j = 0, \ldots, k-1$ e $i = 1, 2$. Assim,

$$
\partial_t^k u_1(x,0) = \partial_t^k u_2(x,0) = G(x,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{|\alpha|+j\leq k, j<k}),
$$

e daí, $\partial_t^m u_1(x,0) = \partial_t^m u_2(x,0)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Definamos $\varphi_1$ e $\varphi_2$ pondo $\varphi_1(t) = u_1(x,t)$ e $\varphi_2(t) = u_2(x,t)$. Temos então que

$$\begin{aligned}\varphi_1(h) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\varphi_1^j(0)\cdot h^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\partial_t^j u_1(x,0)\cdot h^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\partial_t^j u_2(x,0)\cdot h^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\varphi_2^j(0)\cdot h^j = \varphi_2(h).\end{aligned}$$

Portanto, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ para todo $(x,t)$ estabelecendo a unicidade. $\square$

## 2.2 O Teorema de Cauchy-Kowalevski Clássico

Nesta seção consideraremos o problema de Cauchy

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}) = 0, \quad \partial_\nu^j u = \varphi_j \text{ em } M, \quad (0 \leq j < k)$$

onde as funções $F, \varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ e a hipersuperfície $M$ são analíticas, e procuraremos soluções definidas em uma vizinhança de algum ponto $x_0 \in M$. Podemos fazer uma mudança de coordenadas analítica de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ de modo que $x_0$ é aplicado em $(0,0)$ e uma vizinhança de $x_0 \in M$ é aplicada no hiperplano $t = 0$. Esta transformação embora mude a função $F$, não altera a analiticidade do resultado. Assumiremos a condição não-característica em sua forma analítica, isto é, que a equação $F = 0$ possa ser resolvida para $\partial_t^k u$, fornecendo-a como uma função analítica $G$ das variáveis restantes. O problema de Cauchy assume a forma

$$\begin{cases} \partial_t^k u = G(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k}) \\ \partial_t^j u(x,0) = \varphi_j(x) \quad (0 \leq j < k). \end{cases} \tag{2.9}$$

Nosso principal resultado é o seguinte teorema de existência.

**Teorema 2.2. (Cauchy-Kowalevski)**
*Nas condições acima, se $G, \varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ são analíticas numa vizinhança da origem, então existe uma vizinhança da origem na qual o problema de Cauchy (2.9) possui uma única solução analítica.*

Observamos que $G, \varphi_j$ e $u$ podem ser complexas ou até mesmo vetoriais, pois os argumentos desta seção funcionam da mesma forma para certos sistemas de equações. Antes de procedermos para a demonstração, recordaremos algumas propriedades de séries de potências em várias variáveis.

(P1) Se $f$ é analítica numa vizinhança de $x^0 \in \mathbb{R}^n$, existe $r > 0$ tal que a série de Taylor

$$\sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha,$$

converge para $f(x)$ no cubo $\Omega = \{x;\, |x_j - x_j^0| \leq r, 1 \leq j \leq n\}$. A convergência é absoluta e uniforme em subconjuntos compactos de $\Omega$, e a série pode ser diferenciada termo a termo.

(P2) Sejam $f(x) = \sum a_\alpha (x - x^0)^\alpha$ convergente numa vizinhança de $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $x$ uma função analítica de $\xi \in \mathbb{R}^n$ dada por $x = \sum b_\beta (\xi - \xi^0)^\beta$ onde $b_\beta \in \mathbb{R}^n$ e $x(\xi^0) = b_0 = x^0$. Então a função composta $F(\xi) = f(x(\xi))$ é analítica em $\xi^0$ e sua expansão em série de potências sobre $\xi^0$ é obtida substituindo $\sum_{\beta \neq 0} b_\beta (\xi - \xi^0)^\beta$ no lugar de $x - x^0$ na série $\sum a_\alpha (x - x^0)^\alpha$ e depois multiplicando os termos. Assim $F(\xi) = \sum c_\gamma (\xi - \xi^0)^\gamma$ com $c_\gamma = P_\gamma(a_\alpha\text{'}s,\ b_\beta\text{'}s)$, onde $P_\gamma$ é um polinômio nos coeficientes $a_\alpha$'$s$ e $b_\beta$'$s$ para os quais $\alpha_j \leq \gamma_j$ e $\beta_j \leq \gamma_j$ para todo $j$. Além disso, $P_\gamma$ possui coeficientes não-negativos, já que apenas a adição e a multiplicação são envolvidas na expansão.

(P3) Dados $M, r > 0$, a função
$$f(x) = \frac{Mr}{r - (x_1 + \cdots + x_n)},$$
é analítica no retângulo $A = \{x; \max|x_j| < r/n\}$, pois $x \in A$ implica em $-r/n < x_j < r/n$ para todo $j \in 1, \ldots, n$ e daí $-r < x_1 + \cdots + x_n < r$. Pela fórmula da série geométrica e o Teorema Multinomial, sua série de Taylor é
$$f(x) = M \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}} x^\alpha,$$
a qual converge absolutamente para $\max|x_j| < r/n$.

(P4) Uma série $\sum a_\alpha (x - x^0)^\alpha$ com coeficientes não-negativos majora a série $\sum b_\alpha (x - x^0)^\alpha$, se $a_\alpha \geq |b_\alpha|$ para todo $\alpha$. Neste caso, é claro que $\sum b_\alpha (x - x^0)^\alpha$ converge absolutamente sempre que $\sum a_\alpha (x - x^0)^\alpha$ convergir.

(P5) Suponha que $\sum a_\alpha x^\alpha$ seja convergente num retângulo $\{x; \max|x_j| < R\}$. Então existe uma série geométrica semelhante à exibida na propriedade (P3) acima, majorando $\sum a_\alpha x^\alpha$. De fato, fixemos $r \in (0, R)$. Pondo $x = (r, \ldots, r)$ vemos que $\sum a_\alpha r^{|\alpha|} = \sum a_\alpha x^\alpha$ converge, e daí existe $M > 0$ tal que $|a_\alpha r^{|\alpha|}| \leq M$ para todo $\alpha$. Portanto,
$$|a_\alpha| = \left| \frac{a_\alpha r^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|}} \right| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \leq \frac{M|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}}.$$
Assim, a série
$$\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{M|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}} x^\alpha = \frac{Mr}{r - (x_1 + \cdots + x_n)},$$
majora $\sum a_\alpha x^\alpha$.

Agora retornaremos ao Teorema de Cauchy-Kowalevski. A unicidade foi estabelecida na Proposição 2.1, e a demonstração da mesma nos sugere como provar a existência. O caminho é o seguinte: determinamos todas as derivadas de $u$ na origem diferenciando (2.9), e colocamos todas as derivadas na expansão de Taylor. A única dificuldade é mostrar que esta série converge. Com este objetivo, será conveniente substituir nossa equação de ordem $k$ por um sistema de primeira ordem.

**Teorema 2.3.** *O problema de Cauchy (2.9) é equivalente ao problema de Cauchy para um certo sistema quase-linear de primeira ordem*

$$\begin{cases} \partial_t Y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} A_j(x,t,Y)\partial_{x_j} Y + B(x,t,Y) \\ Y(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{2.10}$$

*no sentido que, uma solução para um problema pode ser encontrada a partir de uma solução do outro. Aqui $Y, B$ e $\Phi$ são funções vetoriais, os $A_j$'s são funções matriciais e $A_j, B$ e $\Phi$ são determinados explicitamente pelas funções em (2.9).*

*Demonstração.* O vetor $Y$ tem componentes $(y_{\alpha j})_{0\leq|\alpha|+j\leq k}$. No que segue, as derivadas $\partial_x^\alpha \partial_t^j u$ serão substituídas pelas entradas $y_{\alpha j}$ como variáveis independentes em $G$. Além disso, se $\alpha$ é um multi-índice não-nulo, $i = i(\alpha)$ e $1_i$ denotarão respectivamente, o menor número tal que $\alpha_i \neq 0$ e o multi-índice com 1 na $i$-ésima coordenada e 0 nas restantes. O sistema de primeira ordem a ser resolvido é

$$\begin{array}{rcl} (a)\;\; \partial_t y_{\alpha j} & = & y_{\alpha(j+1)} \qquad (|\alpha|+j<k), \\ (b)\;\; \partial_t y_{\alpha j} & = & \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)} \qquad (|\alpha|+j=k, j<k), \\ (c)\;\; \partial_t y_{0k} & = & \dfrac{\partial G}{\partial t} + \displaystyle\sum_{|\alpha|+j<k} \dfrac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha(j+1)} \\ & + & \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j<k}} \dfrac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)}, \end{array} \tag{2.11}$$

e as condições iniciais são

$$\begin{array}{l} (a)\;\; y_{\alpha j}(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x) \qquad (j<k), \\ (b)\;\; y_{0k}(x,0) = G(x,0,(\partial_x^\alpha \varphi_j(x))_{|\alpha|+j<k,\, j<k}). \end{array} \tag{2.12}$$

É claro que se $u$ é uma solução de (2.9), então as funções $y_{\alpha j} = \partial_x^\alpha \partial_t^j u$ satisfazem (2.11) e (2.12). Com efeito, se $u$ é uma solução de (2.9), então

$$\partial_t^k u(x,t) = G(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,t))_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k})$$

e

$$\partial_t^j u(x,0) = \varphi(x),\ (0\leq j<k).$$

Então

$$\partial_t y_{\alpha j} = \partial_t(\partial_x^\alpha \partial_t^j u) = \partial_x^\alpha \partial_t^{j+1} u = y_{\alpha(j+1)},$$

se $|\alpha|+j<k$. Para $|\alpha|+j=k$ e $j<k$, temos

$$\partial_t y_{\alpha j} = \partial_t(\partial_x^\alpha \partial_t^j u) = \partial_t(\partial_{x_i}(\partial_x^{(\alpha-1_i)})\partial_t^j u) = \partial_{x_i}(\partial_x^{(\alpha-1_i)}\partial_t^{j+1} u = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)},$$

e finalmente

$$\begin{array}{rcl} \partial_t y_{0k} & = & \partial_t(\partial_t^k u) = \partial_t(G(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\leq k, j<k}) \\ & = & \dfrac{\partial G}{\partial t} + \displaystyle\sum_{|\alpha|+j<k} \dfrac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha(j+1)} + \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j<k}} \dfrac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)}. \end{array}$$

Enquanto às condições iniciais, temos

$$y_{\alpha j}(x,0) = \partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x),\ j < k,$$

e

$$\begin{aligned} y_{0k}(x,0) &= \partial_t^k u(x,0) = G(x,0,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,0))_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k}) \\ &= G(x,0,(\partial_x^\alpha \varphi_j(x))_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k}). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se os $y_{\alpha j}$'$s$ satisfazem (2.11) e (2.12), declaramos que $u = y_{00}$ satisfaz (2.9). Primeiramente observemos que (2.11)-(a) implica na seguinte igualdade

$$y_{\alpha(j+1)} = \partial_t^l y_{\alpha j} \ \ (j+l \leq k), \tag{2.13}$$

e de (2.11)-(b) segue que

$$\partial_t y_{\alpha j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)} = \partial_{x_i}(\partial_t y_{(\alpha-1_i)j}) = \partial_t(\partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}),$$

se $|\alpha| + j = k$ e $j < k$. Assim,

$$y_{\alpha j}(x,t) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}(x,t) + c_{\alpha j}(x),$$

para alguma função $c_{\alpha j}$. Mas por (2.12)-(a),

$$y_{\alpha j}(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x) = \partial_{x_i}\partial_x^{\alpha-1_i}\varphi_j(x) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}(x,0),$$

de modo que $c_{\alpha j} = 0$, e consequentemente

$$y_{\alpha j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}, \quad (|\alpha| + j = k,\ j < k). \tag{2.14}$$

A seguir, por (2.11)-(c),(2.13) e (2.14),

$$\begin{aligned} \partial_t y_{0k} &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j<k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha(j+1)} + \sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \partial y_{(\alpha-1_i)(j+1)} \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j<k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha(j+1)} + \sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha(j+1)}} \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq k \\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha(j+1)} \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq k \\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \frac{\partial y_{\alpha j}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[G(x,t,(y_{\alpha j}))], \end{aligned}$$

e desta forma

$$y_{0k}(x,t) = G(x,t,(y_{\alpha j}(x,t))) + c_{0k}(x),$$

para alguma função $c_{0k}$. Mas pela condição (2.12)-(b),

$$y_{0k}(x,0) = G(x,0,(\partial_x^\alpha \varphi_j(x))) = G(x,0,(y_{\alpha j}(x,0))),$$

e novamente $c_{0k} = 0$, donde

$$y_{0k} = G(x,t(y_{\alpha j})_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k}). \tag{2.15}$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que

$$y_{\alpha j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}, \quad (\alpha \neq 0). \tag{2.16}$$

A igualdade em (2.16) já é válida se $|\alpha|+j=k$ e $j<k$ como mostra (2.14), nos restando analisar o caso em que $|\alpha|+j<k$. Faremos isto por indução em $l = k-(|\alpha|+j)$. Para $l=0$, o resultado é válido devido a (2.14). Mostraremos a igualdade para $l+1$ supondo a validez da mesma para $l = k-(|\alpha|+j) > 0$ . De fato,

$$\partial_t y_{\alpha j} = y_{\alpha(j+1)} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)} = \partial_t \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j},$$

onde na primeira igualdade usamos (2.11)-(a), já que $|\alpha|+j = k-l < k$, na segunda igualdade usamos a hipótese de indução, pois $|\alpha-1_i|+j+1 = k-l$, e na última usamos (2.13). Desta forma,

$$y_{\alpha j}(x,t) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}(x,t) + c_{\alpha j}(x).$$

Mas por (2.12)-(a),

$$y_{\alpha j}(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x) = \partial_{x_i}\partial_x^{\alpha-1_i}\varphi_j(x) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}(x,0).$$

Portanto $c_{\alpha j} = 0$ e (2.16) está completamente estabelecido. Aplicando (2.13) e (2.16) repetidamente concluímos que

$$y_{\alpha j} = \partial_x^\alpha \partial_t^j y_{00}. \tag{2.17}$$

Pondo $u = y_{00}$, afirmamos que $u$ satisfaz (2.9). Com efeito, por (2.15) e (2.17) temos

$$\partial_t^k u = y_{0k} = G(x,t,(y_{\alpha j})_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k}) = G(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\leq k,\, j<k}),$$

e por (2.12)-(a),

$$\partial_t^j u(x,0) = y_{0j}(x,0) = \varphi_j(x) \quad 0 \leq j \leq k-1.$$

Portanto $u = y_{00}$ é solução de (2.9). □

Precisaremos de uma outra simplificação.

**Teorema 2.4.** *O problema de Cauchy (2.10) é equivalente a outro problema da mesma forma, no qual $A_1,\ldots,A_{n-1}$ e $B$ não dependem de $t$ e $\Phi = 0$.*

*Demonstração.* Para eliminar $\Phi$ simplesmente pomos $U(x,t) = Y(x,t) - \Phi(x)$. Então $Y$ satisfaz (2.10) se, e somente se, $U$ satisfaz

$$\partial_t U = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(x,t,U)\partial_{x_i} U + \tilde{B}(x,t,U), \quad U(x,0) = 0, \tag{2.18}$$

sendo $\tilde{A}_i = A_i(x,t,U+\Phi)$ e $\tilde{B}(x,t,U) = B(x,t,U+\Phi) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x,t,U+\Phi)\partial_{x_i}\Phi$. A verificação é imediata. Para eliminar $t$ de $\tilde{A}_i$ e $\tilde{B}$ definamos $\tilde{U} = (u_0, U)$, onde $\partial_t u_0 = 1$ e $u_0(x,0) = 0$. Então $u_0(x,t) = t$, e trocando $t$ por $u_0$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{U} &= (\partial_t u_0, \partial_t U) \\
&= (1, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(x,\tilde{U})\partial_{x_i} U + \tilde{B}(x,\tilde{U})) \\
&= (0, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(x,\tilde{U})\partial_{x_i} U) + (1, \tilde{B}(x,\tilde{U})) \\
&= (0 \cdot \partial_{x_i} u_0, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(x,\tilde{U})\partial_{x_i} U) + (1, \tilde{B}(x,\tilde{U})) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (0 \cdot \partial_{x_i} u_0, \tilde{A}_i(x,\tilde{U})\partial_{x_i} U) + (1, \tilde{B}(x,\tilde{U})) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_i(x,\tilde{U}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_i} u_0 \\ \partial_{x_i} U \end{bmatrix} + (1, \tilde{B}(x,\tilde{U})) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\tilde{A}}_i(x,\tilde{U})\partial_{x_i} \tilde{U} + \tilde{\tilde{B}}(x,\tilde{U}),
\end{aligned}$$

sendo $\tilde{\tilde{A}}_i(x,\tilde{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_i(x,\tilde{U}) \end{bmatrix}$ e $\tilde{\tilde{B}}(x,\tilde{U}) = (1, \tilde{B}(x,\tilde{U}))$. Além disso, $\tilde{U}(x,0) = (0,0) = 0$. Deste modo, o sistema

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{U} = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\tilde{A}}_i(x,\tilde{U})\partial_{x_i} \tilde{U} + \tilde{\tilde{B}}(x,\tilde{U}), \\ \tilde{U}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

possui seus coeficientes $\tilde{\tilde{A}}_i$ e $\tilde{\tilde{B}}$ independentes da variável $t$. Finalmente, $U$ é solução de (2.18) se, e somente se, $\tilde{U}$ é solução de (2.19). □

As construções nos dois teoremas anteriores claramente preservam analiticidade, e portanto, reduzimos o Teorema de Cauchy-Kowalevski ao seguinte

**Teorema 2.5.** *Seja $B$ analítica com valores em $\mathbb{R}^n$ e $A_1, \ldots, A_{n-1}$ funções analíticas com valores numa matriz real de ordem $N$ definidas numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$. Então existe uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$ no qual o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x,Y)\partial_{x_i} Y + B(x,Y) \\ Y(x,0) = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

*possui uma única solução analítica.*

*Demonstração.* Temos $Y(x,t) = (y_1(x,t), \ldots, y_N(x,t))$, onde $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t \in \mathbb{R}$. Por simplicidade poremos $Y = (y_1, \ldots, y_N), B = (b_1, \ldots, b_N), A_i = (a^i_{ml})_{m,l=1}^N \in \mathcal{M}(N \times N)$. Vamos procurar soluções da forma $y_m = \sum c_m^{\alpha j} x^\alpha t^j$ $(m = 1, \ldots, N)$ de (2.20), já que $Y$ deve ser analítica. A condição de Cauchy nos diz que $c_m^{\alpha 0} = 0$ para todo $\alpha, m$. Com efeito, fixado $m \in \{1, \ldots, N\}$ temos

$$y_m(x,t) = \sum c_m^{\alpha j} x^\alpha t^j = c_m^{\alpha 0} x^\alpha + \sum_{j \neq 0} c_m^{\alpha j} x^\alpha t^j.$$

Portanto,

$$Y(x,0) = 0 \Leftrightarrow y_m(x,0) = 0 \ \forall m \Leftrightarrow c_m^{\alpha 0} x^\alpha = 0 \ \forall \alpha, m.$$

Logo devemos ter $c_m^{\alpha 0} = 0$ para todo $\alpha, m$. Para determinar $c_m^{\alpha j}$ para $j > 0$, substituimos as séries dos $y_k$'$s$ nas equações diferenciais

$$\partial_t y_m = \sum_{i,l} a^i_{ml}(x, y_1, \ldots, y_N) \partial_{x_i} y_l + b_m(x, y_1, \ldots, y_N), \tag{2.21}$$

que são as coordenadas de (2.20) como se verifica facilmente. Pela propriedade (P2), substituindo as séries dos $y_k$'$s$ nos $a^i_{m,l}$ teremos uma série de potências nas variáveis $x$ e $t$ cujos coeficientes são polinômios com coeficientes não-negativos nos $c_k^{\alpha j}$ e os coeficientes da série de Taylor de $a^i_{ml}$. Além do mais, os coeficientes dos termos em que $t$ aparece na $j$-ésima potência somente envolve os $c_k^{\alpha l}$ com $l \leq j$. O mesmo é válido para as séries obtidas de $b_m$ e de $\partial_{x_i} y_l$, e multiplicar $a^i_{ml}$ por $\partial_{x_i} y_l$ ainda preserva estas propriedades devido a fórmula do produto de duas séries.

Resumidamente, no lado direito de (2.21) obtemos uma expressão da forma

$$\sum_{\alpha j} P_m^{\alpha j}((c_k^{\beta l})_{l \leq k},\, coef.\, de\, A_i\, e\, B) x^\alpha t^j,$$

em que $P_m^{\alpha j}$ é um polinômio com coeficientes não-negativos. No lado esquerdo temos

$$\partial_t y_m = \partial_t \Big[ \sum_{\alpha j} c_m^{\alpha j} x^\alpha t^j \Big] = \sum_{\substack{\alpha, j \\ j \geq 1}} j c_m^{\alpha j} x^\alpha t^{j-1} = \sum_{\alpha, j} (j+1) c_m^{\alpha(j+1)} x^\alpha t^j.$$

Portanto,

$$c_m^{\alpha(j+1)} = (j+1)^{-1} P_m^{\alpha j}((c_k^{\beta l})_{l \leq k},\, coef.\, de\, A_i\, e\, B),$$

e desta forma, se conhecermos os $c_k^{\beta l}$ com $l \leq k$ podemos determinar o valor de $c_k^{\beta(l+1)}$. Procedendo indutivamente determinamos todos os $c_k^{\beta l}$ e mais precisamente, encontramos que

$$c_m^{\alpha j} = Q_m^{\alpha j}(coef.\, de\, A_i\, e\, B),$$

sendo $Q_m^{\alpha j}$ novamente um polinômio com coeficientes não-negativos. Para finalizar a demonstração basta mostrar que cada $y_m$ converge.

Suponhamos agora que o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{Y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(x, \tilde{Y}) \partial_{x_i} \tilde{Y} + B(x, \tilde{Y}), \\ \tilde{Y}(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

cumpra as seguintes propridades:

1. Existe uma solução analítica numa vizinhança da origem.

2. A série de Taylor dos $\tilde{A}_i$ e $\tilde{B}$ majoram as de $A_i$ e $B$.

Então a solução $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N)$ deste problema é dada por $\tilde{y}_m = \sum \tilde{c}_m^{\alpha j} x^\alpha t^j$ com

$$\tilde{c}_m^{\alpha j} = Q_m^{\alpha j}(coef.\, de\, \tilde{A}_i\, e\, \tilde{B}),$$

sendo $Q_m^{\alpha j}$ o mesmo polinômio anterior, já que o processo de construção da solução $\tilde{y}_m$ será o mesmo. Como $Q_m^{\alpha j}$ possui coeficientes não-negativos

$$|c_m^{\alpha j}| = |Q_m^{\alpha j}(coef.\, de\, A_i\, e\, B)| \leq Q_m^{\alpha j}(coef.\, de \tilde{A}_i\, e\, \tilde{B}_i) = \tilde{c}_m^{\alpha j}.$$

Observemos este fato com cuidado. Faremos isto apenas com os $\tilde{A}_i$. Como $\tilde{A}_i = \sum \tilde{a}_{i\alpha} z^\alpha$ majora $A_i = \sum a_{i\alpha} z^\alpha$, a definição nos diz que cada $\tilde{a}_{i\alpha} \geq 0$ e $\tilde{a}_{i\alpha} \geq |a_{i\alpha}|$. Da mesma forma teremos que $\tilde{b}_{i\alpha} \geq |b_{i\alpha}|$. Portanto, como os coeficientes de $Q_m^{\alpha j}$ são todos não-negativos segue que

$$|Q_m^{\alpha j}(coef.\, de\, A_i\, e\, B)| \leq Q_m^{\alpha j}(coef.\, de\, \tilde{A}_i\, e\, \tilde{B}).$$

Desta maneira a série para $\tilde{Y}$ majora a série para $Y$, e a última portanto convergirá numa vizinhança de origem. Basta agora construir um tal sistema que cumpra as condições acima. De fato, se $A_i = (a_{ml}^i)$ e $B = (b_1, \ldots, b_N)$ são analíticos para $|(x,t)| < R$ (tal $R > 0$ existe pela propriedade (P1) notando que as séries dos $A_i$ e $B$ são de Taylor), então existem $M > 0$ e $r \in (0, R)$ tais que as séries dos $a_{ml}^i$ e $b_j$ são majoradas pela série de

$$\frac{Mr}{r - (x_1 + \cdots + x_{n-1}) - (y_1 + \cdots + y_N)} = M \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}} z^\alpha,$$

sendo $z = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_N)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $p = n - 1 + N$. Logo cada coeficiente da série dos $a_{ml}^l$ e $b_j$ são tais que $|a_{ml}^i|, |b_j| \leq \frac{M|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}}$. Observe que fomos até $x_{n-1}$ porque cada $a_{ml}^i$ e $b_j$ dependem apenas das variáveis $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_N$.

Consideremos agora o seguinte problema de Cauchy: para $m = 1, \ldots, N$ definamos

$$\begin{cases} \partial_t y_m = \dfrac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^{N} y_j} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_i} y_j + 1 \right], \\ y_m(x, 0) = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Tal sistema é motivado pela igualdade

$$\partial_t y_m = \sum_{i,l} a_{ml}^i(x, y_1, \ldots, y_N) \partial_{x_i} y_l + b_m(x, y_1, \ldots, y_N).$$

Uma solução para este problema é facilmente encontrada. De fato, é suficiente resolvermos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \dfrac{Mr}{r - s - Nu} \left[ N(n-1) \partial_s u + 1 \right], \\ u(s, 0) = 0, \end{cases} \tag{2.24}$$

onde $s$ e $t$ são variáveis reais. Feito isto, pondo $y_j(x,t) = u(x_1 + \cdots + x_{n-1}, t)$ para todo $j$, teremos que $Y = (y_1, \ldots, y_N)$ satisfazerá (2.23) finalizando a demonstração. Com efeito, se $u$ satisfaz (2.24) então $y_m(x,0) = u(x_1 + \cdots + x_{n-1}, 0) = 0$ (basta por no lugar de $s$ a soma $\sum_{j=1}^{n-1} x_j$) e

$$\partial_t y_m = \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^{N} y_j}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\partial_{x_i} y_j + 1\right],$$

já que

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\partial_{x_i} y_j &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(\partial_{x_i} y_1 + \cdots + \partial_{x_i} y_N)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(\partial_{x_i} u + \cdots + \partial_{x_i} u)\\
&= N\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{x_i} u\\
&= N(\partial_{x_1} u + \cdots + \partial_{x_{n-1}} u)\\
&= N(n-1)\partial_{x_1} u\\
&= N(n-1)\partial_s u,
\end{aligned}$$

pois

$$\partial_{x_i} u = \partial_s u \cdot \partial_{x_i}(x_1 + \ldots + x_{n-1}) = \partial_s u \cdot 1 = \partial_s u,\ \forall i.$$

A teoria apresentada na Seção 2.1 nos permite resolver (2.24). Rescrevendo a equação diferencial como

$$(r - s - Nu)\partial_t u - MrN(n-1)\partial_s u = Mr,$$

primeiramente resolvemos as equações características

$$\frac{dt}{d\tau} = r - s - Nu,\ \ \frac{ds}{d\tau} = -MrN(n-1)\ \text{ e }\ \frac{du}{d\tau} = Mr,$$

com condições iniciais $t(0) = 0$, $s(0) = \sigma$ e $u(0) = 0$, obtendo $t = \frac{1}{2}MrN(n-2)\tau^2 + (r-\sigma)\tau$, $s = -MrN(n-1)\tau + \sigma$ e $u = M + \tau$. Eliminando $\sigma$ e $\tau$ temos

$$u(s,t) = \frac{r - s - \sqrt{(r-s)^2 - 2MrNnt}}{Nn}.$$

O sinal de menos na raiz é forçado pela condição $u(s,0) = 0$. Basta tomar $0 < s < r$. Claramente esta função é analítica em $s$ e $t$ numa vizinhança da origem. Para ser mais preciso, se $|s| < \frac{r}{2}$ e $|t| < \frac{r}{16MNn}$, então $(r-s)^2 - 2MrNnt > 0$ e consequentemente $u$ será analítica no conjunto $\{(s,t); |s| < \frac{r}{2} \text{ e } |t| < \frac{r}{16MNn}\}$. $\square$

A seguir, faremos algumas observações sobre este importante resultado.

1. Mostramos a existência de uma única solução na vizinhança de um ponto. Contudo, existe solução analítica numa vizinhança de qualquer ponto de $M$, e pela unicidade, quaisquer duas soluções deverão coincidir na interseção de seus domínios.

2. O Teorema de Cauchy-Kowalevski mostra a existência de uma única solução analítica, e a partir deste fato uma questão surge naturalmente: *Existe alguma solução não-analítica para o mesmo problema ?*. No caso linear a resposta é negativa e este resultado é dado pelo Teorema de Holmgren, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [9] ou em [18].

3. Para o caso linear, F. Trèves obteve uma versão deste teorema exigindo analiticidade apenas na variável $x$. Mais precisamente, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $T > 0, A_j(x,t), f(x,t)$ e $u_0(x), (j = 0, 1, \dots, n)$ são analíticas em $x \in U$ e contínuas em $t \in (-T, T)$ então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j(x,t)\partial_{x_j} u + A_0(x,t)u + f(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.25}$$

possui uma única solução $u(x,t)$ analítica em $x$ e continuamente diferenciável em $t$ para todo subconjunto $U' \times (-T', T') \subset U \times (-T, T)$, onde $U' \subset \overline{U'} \subset U$ é precompacto e $T' > 0$ é suficientemente pequeno. Além disso, $u(x,0) = u_0(x)$ se $x \in U'$. No sistema acima, os $A_j$'s são matrizes de ordem $m$ e $f, u_0, u$ são funções com valores em $\mathbb{R}^m$. Observemos que a hipótese de analiticidade não pode ser completamente descartada, pois em 1957, H. Lewy exibiu o operador $L = \partial_x + i\partial_y - 2i(x+iy)\partial_t$ definido em $\mathbb{R}^3$ com coordenadas $(x,y,t)$ e provou o seguinte

**Teorema 2.6.** *Seja $f(t)$ uma função contínua. Se existir uma função $u(x,y,t)$ de classe $C^1$ satisfazendo $Lu = f$ numa vizinhança da origem, então $f$ é analítica em $t = 0$*

Outro operador interessante é o de Grushin-Garabedian, $L = \partial_x + ix\partial_y$, definido em $\mathbb{R}^2$. Associado a ele existe um resultado análogo ao Teorema 2.6.

**Teorema 2.7.** *Sejam $D_n, n \in \mathbb{N}$, discos fechados e disjuntos no semiplano direito do $\mathbb{R}^2$ com centros $(x_n, 0), x_n > 0$ e $x_n \to 0$. Além disso, seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função par em relação a $x$, que se anula fora dos discos $D_n$ para $x > 0$ e tal que $\iint_{D_n} f(x,y)dxdy \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições, a equação $Lu = f$ não admite solução continuamente diferenciável numa vizinhança da origem.*

O problema destes dois operadores é que seus coeficientes não são reais (vide Teorema 2.1). A demonstração do Teorema 2.6 pode ser encontrada em [5] ou em [9], enquanto que a prova do Teorema 2.7 pode ser vista em [7].

# Capítulo 3

# O Teorema de Cauchy-Kowalevski Abstrato

Neste capítulo definiremos a noção de escala de espaços de Banach e provaremos uma versão abstrata do Teorema de Cauchy-Kowalevski. A demonstração se baseará no método clássico de encontrar pontos fixos.

Uma *escala decrescente de espaços de Banach* é uma coleção $\{E_s\}_{0<s\leq 1}$ de espaços de Banach complexos, cada um equipado com uma norma $|\cdot|_s$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\text{Se } 0 < s' < s \leq 1, \text{ então } E_s \subset E_{s'} \text{ e } |u|_{s'} \leq |u|_s \text{ para todo } u \in E_s.$$

Esta noção de escala terá grande utilidade na demonstração do resultado seguinte, assim como na resolução do problema de Cauchy periódico para a equação de Camassa-Holm, a qual estudaremos com certo detalhe no próximo capítulo.

Dada uma escala decrescente de espaços de Banach $\{E_s\}_{0<s\leq 1}$, sejam $T, R, C > 0$ constantes positivas, $U = [-T, T] \times \{u \in E_s; |u|_s < R\}$ e

$$\begin{array}{rccc} F: & U & \longrightarrow & E_{s'} \\ & (t,u) & \longmapsto & F(t,u), \end{array}$$

uma aplicação contínua satisfazendo para quaisquer $0 < s' < s \leq 1$ e $u, v \in E_s$ com $|u|_s < R, |v|_s < R$,

$$\sup_{|t|\leq T} |F(t,u) - F(t,v)|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'}|u-v|_s. \tag{3.1}$$

Além disso, assumiremos a existência de uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{|t|\leq T} |F(t,0)|_s \leq \frac{M}{1-s}, \tag{3.2}$$

para todo $s \in (0,1)$.

Nosso objetivo é provar a seguinte versão do Teorema de Cauchy-Kowalevski.

**Teorema 3.1.** *Sob as hipóteses (3.1) e (3.2), existe* $a \in (0,T)$ *e uma única função* $u$ *tal que para todo* $s \in (0,1)$

$$\begin{array}{rccc} u: & I_s^a & \longrightarrow & E_s \\ & t & \longmapsto & u(t), \end{array}$$

*sendo* $I_s^a = (-a(1-s), a(1-s))$, *é continuamente diferenciável e satisfaz*

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

*se* $t \in I_s^a$, *além de* $\sup_{t \in I_s^a} |u(t)|_s < R$.

O símbolo $I_s^a$ sempre denotará o intervalo acima, com a hipótese evidente de $a > 0$ e $s \in (0,1)$.

Sejam agora $s \in (0,1], T_1 > 0$ e $v : (-T_1, T_1) \to E_s$ uma função contínua. O problema

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

possui uma única solução continuamente diferenciável $u_v : (-T_1, T_1) \to E_s$ dada por

$$u_v(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau. \tag{3.4}$$

Este fato nos sugere a seguinte observação:

*A existência de* $u$ *no Teorema 3.1 equivale à existência de* $v : I_s^a \to E_s$, *contínua para todo* $s \in (0,1)$, *satisfazendo* $\sup_{t \in I_s^a} |u_v(t)|_s < R$ *e*

$$v(t) = F(t, u_v(t)), \tag{3.5}$$

*em* $I_s^a$.

A verificação deste afirmação é imediata, pois se $u$ é solução do Teorema 3.1, definindo $v(t) = u'(t)$ temos $u_v(t) = u(t)$, donde $\sup_{t \in I_s^a} |u_v(t)|_s < R$, e $v(t) = F(t, u_v(t))$. Reciprocamente, se existir $v : I_s^a \to E_s$ contínua para todo $s \in (0,1)$ satisfazendo $\sup_{t \in I_s^a} |u_v(t)|_s < R$ e (3.5) em $I_s^a$, então $u(t) = u_v(t)$ é continuamente diferenciável em $I_s^a$ para todo $s \in (0,1), \sup_{t \in I_s^a} |u(t)|_s < R, u'(t) = F(t, u(t))$ e $u(0) = 0$, isto é, $u$ é solução do Teorema 3.1. Sendo assim, é suficiente provarmos (3.5).

Faremos uma última definição. Dado $a > 0$ denotamos por $H_a$ o espaço

$$H_a = \{u : I_s^a \to E_s; u \text{ é contínua em } I_s^a \text{ para todo } s \in (0,1) \text{ e } \|u\|_a < \infty\},$$

sendo

$$\|u\|_a = \sup_{0<s<1,\ t \in I_s^a} |u(t)|_s (1-s) \Big(1 - \frac{|t|}{a(1-s)}\Big)^{1/2}. \tag{3.6}$$

A partir da completeza de cada $(E_s, |\cdot|_s)$, resulta que $(H_a, \|\cdot\|_a)$ é um espaço de Banach. Com efeito, se $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $H_a$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u_m\|_a < \epsilon/4$, sempre que $n, m \geq n_0$. Logo,

$$|u_n(t) - u_m(t)|_s (1-s) \Big(1 - \frac{|t|}{a(1-s)}\Big)^{1/2} < \epsilon/4, \ \ \forall n, m \geq n_0, t \in I_s^a, s \in (0,1). \tag{3.7}$$

Fixemos $s \in (0,1)$ e definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $u_n^\star : I_s^a \to E_s$ pondo

$$u_n^\star(t) = u_n(t)(1-s)\Big(1 - \frac{|t|}{a(1-s)}\Big)^{1/2}.$$

A condição (3.7) implica que a sequência $\{u_n^\star(t)\}$ é de Cauchy em $E_s$, e portanto converge (em $E_s$) para um elemento

$$u^\star(t) = u_t(1-s)\Big(1 - \frac{|t|}{a(1-s)}\Big)^{1/2} \in E_s.$$

Fazendo $m \to \infty$ em (3.7) obtemos

$$|u_n(t) - u_t|_s(1-s)\Big(1 - \frac{|t|}{a(1-s)}\Big)^{1/2} < \epsilon/3, \;\; \forall n \geq n_0, t \in I_s^a,$$

e daí

$$\sup_{t \in I_s^a} |u_n(t) - u_t|_s(1-s)\Big(1 - \frac{|t|}{a(1-s)}\Big)^{1/2} < \epsilon/2, \;\; \forall n \geq n_0. \tag{3.8}$$

Defina $u : I_s^a \to E_s$, pondo $u(t) = u_t$. A condição (3.8) nos diz que $u_n^\star \to u^\star$ uniformemente em $I_s^a$, e pelo Teorema 1.6 concluímos que $u^\star$ é contínua em $I_s^a$. Com maior razão, $u$ será contínua em $I_s^a$.

Como os fatos acima são válidos para todo $s \in (0,1)$, obtemos que $u$ é contínua em $I_s^a$ para todo $s \in (0,1)$ e $\|u_n - u\|_a < \epsilon$ se $n \geq n_0$. A desigualdade $\|u\|_a \leq \|u_{n_0} - u\|_a + \|u_{n_0}\|_a$ mostra que $u \in H_a$, e por conseguinte, o espaço $H_a$ é completo.

A estratégia da demonstração do Teorema 3.1 é muito simples. Ela se baseará na procura de um único ponto fixo para uma certa aplicação, o qual nos dará uma única solução para a equação (3.5). Este procedimento fará uso dos três lemas abaixo.

**Lema 3.1.** *Para todo $a > 0, u \in H_a, s \in (0,1)$ e $t \in I_s^a$ vale a seguinte desigualdade:*

$$|\tilde{u}(t)|_s \leq \left| \int_0^t |u(\tau)|_s d\tau \right| \leq 2a\|u\|_a, \tag{3.9}$$

*sendo $\tilde{u}(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$.*

Até o final deste capítulo, a notação $\tilde{u}$ sempre denotará a função acima.

*Demonstração.* Suponhamos $t > 0$. Então $|\tilde{u}(t)|_s \leq \int_0^t |u(\tau)|_s d\tau$. Utilizando a definição de $\|u\|_a$, obtemos para todo $\tau \in (0,t)$,

$$\begin{aligned}\int_0^t |u(\tau)|_s d\tau &= \int_0^t \Big[|u(\tau)|_s(1-s)\Big(1 - \frac{\tau}{a(1-s)}\Big)^{1/2}(1-s)^{-1}\Big(1 - \frac{\tau}{a(1-s)}\Big)^{-1/2}\Big] d\tau \\ &\leq \|u\|_a \int_0^t (1-s)^{-1}\Big(1 - \frac{\tau}{a(1-s)}\Big)^{-1/2} d\tau.\end{aligned}$$

Pondo $\rho = \tau/a(1-s)$ e usando o fato que $0 < t < a(1-s)$ segue-se que

$$\begin{aligned}\int_0^t |u(\tau)|_s d\tau &\leq a\|u\|_a \int_0^{t/a(1-s)} (1-\rho)^{-1/2} d\rho \\ &\leq a\|u\|_a \int_0^1 (1-\rho)^{-1/2} d\rho \\ &= 2a\|u\|_a.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\tilde{u}(t)|_s \leq \left| \int_0^t |u(\tau)|_s d\tau \right| \leq 2a\|u\|_a, \ t > 0.$$

O caso $t \leq 0$ é análogo. □

**Lema 3.2.** *Para todo $a > 0, u \in H_a, s \in (0,1)$ e $t \in I_s^a$ vale a seguinte desigualdade:*

$$\left| \int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \right| \leq \frac{8a\|u\|_a}{1-s} \Big( \frac{a(1-s)}{a(1-s) - |t|} \Big)^{1/2}, \tag{3.10}$$

*sendo $s(\tau) = \frac{1}{2}(1 + s - \frac{|\tau|}{a})$ definida em $(0,t)$ (resp. em $(t,0)$) se $t > 0$ (resp. se $t \leq 0$).*

*Demonstração.* Fixado $t > 0$, começamos observando que $s(\tau) \in (0,1)$ para todo $\tau \in (0,t)$. Com efeito,

$$s(\tau) = \frac{1}{2}(1 + s - \tau/a) < \frac{1}{2}(1+s) < 1,$$

e

$$s(\tau) = \frac{1}{2a}(a(1+s) - \tau) \geq \frac{1}{2a}(a(1+s) - t) > \frac{1}{2a}(a(1+s) - a(1-s)) = s > 0.$$

Isto permite definir $|\cdot|_{s(\tau)}$ para todo $\tau \in (0,t)$. Agora, dado $\tau \in (0,t)$ temos

$$|u(\tau)|_{s(\tau)} \leq \|u\|_a (1 - s(\tau))^{-1} \Big( 1 - \frac{\tau}{a(1 - s(\tau))} \Big)^{-1/2},$$

e daí

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau &\leq \|u\|_a \int_0^t \Big[ \frac{(1 - s(\tau))^{-1}}{s(\tau) - s} \Big( 1 - \frac{\tau}{a(1 - s(\tau))} \Big)^{-1/2} \Big] d\tau \\ &= \|u\|_a \int_0^t \Big[ \frac{1}{(s(\tau) - s)(1 - s(\tau))} \Big( 1 - \frac{\tau}{a(1 - s(\tau))} \Big)^{-1/2} \Big] d\tau. \end{aligned}$$

Como

$$(s(\tau) - s)(1 - s(\tau)) = \frac{1}{4a^2}((a(1-s))^2 - \tau^2) \ \text{ e } \ a(1 - s(\tau)) = \frac{1}{2}(a(1-s) + \tau),$$

segue-se que

$$\int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \leq 4a^2 \|u\|_a \int_0^t \Big[ \frac{1}{(a(1-s))^2 - \tau^2} \Big( 1 - \frac{2\tau}{a(1-s) + \tau} \Big)^{-1/2} \Big] d\tau.$$

Fazendo $\eta = \dfrac{\tau}{a(1-s)}$ e pequenas manipulações, teremos

$$\int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \leq \frac{4a\|u\|_a}{1-s} \int_0^{t/a(1-s)} \Big[ \frac{1}{1 - \eta^2} \Big( \frac{1+\eta}{1-\eta} \Big)^{1/2} \Big] d\eta.$$

Mas,

$$\frac{1}{1-\eta^2} \Big( \frac{1+\eta}{1-\eta} \Big)^{1/2} \leq (1-\eta)^{-3/2},$$

donde

$$\int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \leq \frac{4a\|u\|_a}{1-s} \int_0^{t/a(1-s)} \frac{1}{(1-\eta)^{3/2}} d\eta.$$

Observando que

$$\begin{aligned}\int_0^{t/a(1-s)} \frac{1}{(1-\eta)^{3/2}} d\eta &= 2\Big[\Big(1-\frac{t}{a(1-s)}\Big)^{-1/2}-1\Big] \\ &\leq 2\Big(1-\frac{t}{a(1-s)}\Big)^{-1/2},\end{aligned}$$

finalmente obtemos o resultado desejado

$$\left|\int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau)-s} d\tau\right| \leq \frac{8a\|u\|_a}{1-s}\Big(\frac{a(1-s)}{a(1-s)-|t|}\Big)^{1/2}, \quad t>0.$$

O caso $t \leq 0$ é inteiramente análogo. □

**Lema 3.3.** *Sejam $a \in (0,T), s \in (0,1), t \in I_s^a, u \in H_a, v \in H_{2a}$ tais que $\|u\|_a < \dfrac{R}{4a}$ e $\|v\|_{2a} < \dfrac{R}{8a}$. Supondo a condição (3.1), vale a seguinte desigualdade:*

$$|F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,\tilde{v}(t))|_s \leq C\left|\int_0^t \frac{|u(\tau)-v(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau)-s} d\tau\right|, \tag{3.11}$$

*sendo $s(\tau)$ qualquer função contínua em $[0,t]$ (resp. em $[t,0]$) se $t>0$ (resp. se $t \leq 0$) satisfazendo $s \leq s(\tau) \leq \frac{1}{2}(1+s-\frac{|\tau|}{a})$.*

*Demonstração.* Primeiramente, o Lema 3.1 implica que o lado esquerdo de (3.11) está bem definido. Com efeito, por definição $F : U \to E_{s'}, (t,u) \mapsto F(t,u)$ onde $T, R > 0$, satisfaz para todo $0 < s' < s \leq 1, u, v \in E_s, |u|_s < R, |v|_s < R$ a seguinte desigualdade:

$$\sup_{|t|\leq T} |F(t,u) - F(t,v)|_{s'} \leq \frac{C|u-v|_s}{s-s'},$$

com $C > 0$. Utilizando o Lema 3.1 temos

$$|\tilde{u}(t)|_s \leq 2a\|u\|_a < R \;\text{ e }\; |\tilde{v}(t)|_s \leq 4a\|v\|_{2a} < R,$$

e portanto

$$|F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,\tilde{v}(t))|_s \leq \frac{C|\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t)|_{s(\tau)}}{s(\tau)-s} < \infty,$$

para todo $\tau$ com $|\tau| \leq t$.

Agora, assumiremos sem perda de generalidade $t > 0$ (o outro caso é inteiramente análogo). Sejam $n \geq 1$ um inteiro, $t_j = \frac{jt}{n}$ e $s_j = \inf_{t_{j-1}\leq\tau\leq t_j} s(\tau)$ para $1 \leq j \leq n$. Definamos $\tilde{s}_n$ pondo $\tilde{s}_n(\tau) = s_j$ para $\tau \in [t_{j-1}, t_j)$ e $1 \leq j \leq n$. Observe que $\tilde{s}_n(\tau) \leq s(\tau)$ para $0 < \tau < t$. Além disso, claramente temos

$$\begin{aligned}F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,\tilde{v}(t)) &= \sum_{j=1}^n \Big[F\Big(t, \int_0^{t_j} u(\tau)d\tau + \int_{t_j}^t v(\tau)d\tau\Big) - F\Big(t, \int_0^{t_{j-1}} u(\tau)d\tau + \int_{t_{j-1}}^t v(\tau)d\tau\Big)\Big] \\ &= A.\end{aligned}$$

A igualdade acima está bem definida, pois, a partir do Lema 3.1 e das hipóteses sobre $\|u\|_a$ e $\|v\|_{2a}$ temos para $j = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_0^{t_j} u(\tau)d\tau + \int_{t_j}^{t} v(\tau)d\tau \Big|_{s_j} &\leq \int_0^{t_j} |u(\tau)|_{s_j} d\tau + \int_{t_j}^{t} |v(\tau)|_{s_j} d\tau \\
&\leq \int_0^{t} |u(\tau)|_{s_j} d\tau + \int_0^{t} |v(\tau)|_{s_j} d\tau \\
&\leq 2a\|u\|_a + 4a\|v\|_{2a} \\
&< R,
\end{aligned}
$$

e analogamente,

$$
\Big| \int_0^{t_{j-1}} u(\tau)d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_j} v(\tau)d\tau \Big|_{s_j} < R.
$$

Utilizando (3.1) novamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
A &\leq \sum_{j=1}^{n} \Big| F\Big(t, \int_0^{t_j} u(\tau)d\tau + \int_{t_j}^{t} v(\tau)d\tau\Big) - F\Big(t, \int_0^{t_{j-1}} u(\tau)d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t} v(\tau)d\tau\Big) \Big|_s \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{s_j - s} \Big| \Big( \int_0^{t_j} u(\tau)d\tau + \int_{t_j}^{t} v(\tau)d\tau\Big) - \Big( \int_0^{t_{j-1}} u(\tau)d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t} v(\tau)d\tau\Big) \Big|_{s_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{s_j - s} \Big| \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)d\tau - \int_{t_{j-1}}^{t_j} v(\tau)d\tau \Big|_{s_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{s_j - s} \Big| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (u(\tau) - v(\tau))d\tau \Big|_{s_j} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{s_j - s} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |u(\tau) - v(\tau)|_{s_j} d\tau \\
&= C \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|_{\tilde{s}_n(\tau)}}{\tilde{s}_n(\tau) - s} d\tau \\
&= C \int_0^{t} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|_{\tilde{s}_n(\tau)}}{\tilde{s}_n(\tau) - s} d\tau \\
&\leq C \int_0^{t} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|_{s(\tau)}}{\tilde{s}_n(\tau) - s} d\tau,
\end{aligned}
$$

pois, $\tilde{s}_n(\tau) \leq s(\tau)$ donde $|\cdot|_{\tilde{s}_n(\tau)} \leq |\cdot|_{s(\tau)}$. Finalmente, como $\tilde{s}_n(\tau)$ converge uniformemente para $s(\tau)$, resulta que

$$
A \leq C \int_0^{t} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau,
$$

e por conseguinte,

$$
\Big| F(t, \tilde{u}(t)) - F(t, \tilde{v}(t)) \Big|_s \leq C \left| \int_0^{t} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \right|.
$$

$\square$

Com estes resultados podemos exibir a

*Demonstração (do Teorema 3.1).*

**(Existência.)** Dado $b \in (0,T)$, se $u \in H_b$ com $\|u\|_b < R/4b$ definamos para $t \in I_s^b$ e $s \in (0,1)$ a função $G(u)(t) = F(t, \tilde{u}(t))$. Observe que $F$ está bem definida, pois pelo Lema 3.1 temos $|\tilde{u}(t)|_s < R$. Segue de (3.2) que $|F(t,0)|_s \le M/(1-s)$, e utilizando os Lemas 3.2 e 3.3

$$\begin{aligned}
|G(u)(t) - F(t,0)|_s &= |F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,\tilde{0}(t))|_s \\
&\le C\left|\int_0^t \frac{|u(\tau) - 0(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau)-s} d\tau\right| \\
&= C\left|\int_0^t \frac{|u(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau)-s} d\tau\right| \\
&\le \frac{8Cb\|u\|_b}{1-s}\Big(\frac{b(1-s)}{b(1-s)-|t|}\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

e utilizando a desigualdade triangular obtemos,

$$|G(u)(t)|_s \le \frac{8Cb\|u\|_b}{1-s}\Big(\frac{b(1-s)}{b(1-s)-|t|}\Big)^{1/2} + \frac{M}{1-s}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|G(u)\|_b &= \sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^b}} |G(u)(t)|_s (1-s)\Big(1 - \frac{|t|}{b(1-s)}\Big)^{1/2} \\
&\le \sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^b}} \Big[8Cb\|u\|_b\Big(\frac{b(1-s)}{b(1-s)-|t|}\Big)^{1/2} + M\Big]\Big(1 - \frac{|t|}{b(1-s)}\Big)^{1/2} \\
&\le \sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^b}} \Big[8Cb\|u\|_b\Big(\frac{b(1-s)}{b(1-s)-|t|}\Big)^{1/2}\Big(1 - \frac{|t|}{b(1-s)}\Big)^{1/2} + M\Big] \\
&= 8Cb\|u\|_b + M.
\end{aligned}$$

Em suma, vale a seguinte estimativa

$$\|G(u)\|_b \le 8Cb\|u\|_b + M. \tag{3.12}$$

Consideremos agora $u \in H_a, v \in H_{2a}$ com $a \in (0, T/2)$ tais que $\|u\|_a < R/4a$ e $\|v\|_{2a} < R/8a$. Resulta trivialmente de (3.12) que $G(u)$ e $G(v)$ estão em $H_a$. Além disso, os Lemas 3.2 e 3.3 implicam que

$$\begin{aligned}
|G(u)(t) - G(v)(t)|_s &= |F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,\tilde{v}(t))|_s \\
&\le C\left|\int_0^t \frac{|u(\tau) - v(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau)-s} d\tau\right| \\
&\le \frac{8Ca\|u-v\|_a}{1-s}\Big(\frac{a(1-s)}{a(1-s)-|t|}\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

e de (3.6) concluimos que

$$\|G(u) - G(v)\|_a \le 8Ca\|u-v\|_a. \tag{3.13}$$

Supondo

$$0 < a < \inf\left\{\frac{T}{2}, \frac{R}{16RC + 8M}\right\}, \tag{3.14}$$

definimos o conjunto $X = \{u \in H_{2a}; \|u\|_{2a} < R/8a\}$. Então $X \subset H_a$. Com efeito, se $u \in H_{2a}$ então $u$ é contínua em $I_s^{2a}$ para todo $s \in (0,1)$. Em particular, ela será contínua em $I_s^a$ para todo $s \in (0,1)$ e como

$$\begin{aligned}
\|u\|_a &= \sup_{\substack{0<s<1 \\ t\in I_s^a}} |u(t)|_s(1-s)\Big(1-\frac{|2t|}{2a(1-s)}\Big)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\substack{0<s<1 \\ t\in I_s^a}} |u(t)|_s(1-s)\Big(1-\frac{|t|}{2a(1-s)}\Big)^{1/2} \\
&\leq \|u\|_{2a},
\end{aligned}$$

segue-se que $u \in H_a$. Mais precisamente, $X \subset \{u \in H_a; \|u\|_a < R/8a\}$. Definamos $H = \overline{X}^{H_a}$ como sendo o fecho de $X$ em $H_a$. Assim $H \subset \{u \in H_a; \|u\|_a \leq R/8a\}$ é um espaço métrico completo. Provaremos a seguir que $G(H) \subset H$ e $G$ é uma contração. Começamos observando que se $u \in H$, existirá uma seqüência $\{u_n\} \in X$ tal que $\lim_n \|u_n - u\|_a = 0$. Como $u \in H_a$ e $\|u\|_a < R/4a$, resulta de (3.13) que $\|G(u_n) - G(u)\|_a \leq 8Ca\|u_n - u\|_a$, e portanto $\lim_n \|G(u_n) - G(u)\|_a = 0$. Agora, sejam $u, v \in H$ e $\{u_n\}, \{v_n\} \in X$ tais que $\lim_n \|u_n - u\|_a = 0$ e $\lim_n \|v_n - v\|_a = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $u_n \in H_a$, $\|u_n\|_a < R/4a$ e $v_n \in H_{2a}$, $\|v_n\|_{2a} < R/8a$, e portanto utilizando as condições (3.13) e (3.14), tem-se

$$\begin{aligned}
\|G(u) - G(v)\|_a &= \lim_n \|G(u_n) - G(v_n)\|_a \\
&\leq \lim_n [8Ca\|u_n - v_n\|_a] \\
&\leq \lim_n \Big[\frac{8CR}{16RC + 8M}\|u_n - v_n\|_a\Big] \\
&\leq \lim_n \Big[\frac{1}{2}\|u_n - v_n\|_a\Big] \\
&= \frac{1}{2}\|u - v\|_a.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $G$ é uma contração. Para verificar a inclusão $G(H) \subset H$ é suficiente provar que $G(X) \subset X$ pois, se $x \in H$ e $\{x_n\} \subset X$ é tal que $\lim_n \|x_n - x\|_a = 0$, então $\lim_n \|G(x_n) - G(x)\|_a = 0$, donde $G(x) \in \overline{G(X)}^{H_a}$. Assim,

$$G(H) \subset \overline{G(X)}^{H_a} \subset \overline{X}^{H_a} = H.$$

Seja então $u \in X$. Por (3.14) temos $2a < T$, e de (3.12) obtemos

$$\|G(u)\|_{2a} \leq 16Ca\|u\|_{2a} + M < 2RC + M.$$

Mas,

$$a < \frac{R}{16RC + 8M} \Leftrightarrow 2RC + M < \frac{R}{8a},$$

donde $\|G(u)\|_{2a} < R/8a$ e consequentemente $G(u) \in X$, isto é, $G(X) \subset X$. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo para contrações, existe um único $w \in H$ tal que $G(w) = w$ e daí $w(t) = F(t, \tilde{w}(t))$ verifica (3.5) demonstrando a existência de solução.

Passemos à unicidade.

**(Unicidade.)** Sejam $u$ e $v$ duas soluções do Teorema 3.1 e definamos $w = u - v$. Então $w(t) = \int_0^t \big[F(\tau, u(\tau)) - F(\tau, v(\tau))\big] d\tau$, e devido a hipótese (3.1) temos

$$|w(t)|_s \leq C \left| \int_0^t \frac{|w(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \right|, \tag{3.15}$$

sendo $s(\tau) = \frac{1}{2}(1 + s - \frac{|\tau|}{a})$. Observe que $0 < s < s(\tau) < 1$ se $\tau \in I_s^a$. Como

$$\sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^a}} |u(t)|_s < R \ e \ \sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^a}} |v(t)|_s < R,$$

resulta que $w \in H_a$, pois $\|w\|_a < 2R$. A partir de (3.15) e do Lema 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} \|w\|_a &= \sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^a}} |w(t)|_s (1 - s)\Big(1 - \frac{|t|}{a(1 - s)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \sup_{\substack{0<s<1 \\ t \in I_s^a}} \Big[C \left| \int_0^t \frac{|w(\tau)|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s} d\tau \right| (1 - s)\Big(1 - \frac{|t|}{a(1 - s)}\Big)^{1/2}\Big] \\ &\leq 8aC\|w\|_a. \end{aligned}$$

A partir da condição (3.14) concluimos que $a < 1/8C$, e portanto $w = 0$.

**Observação:** Uma versão holomorfa do Teorema 3.1 também está disponível.

**Teorema 3.2.** *Com as notações do Teorema 3.1 e $t \in B(0, T) = \{t \in \mathbb{C}; |t| < T\}$, considere o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

*Além das hipóteses (3.1) e (3.2) suporemos a seguinte condição sobre $F$:*
*($\star$) Dados $0 < s' < s < 1$, se a função $u$ for holomorfa no disco $B(0, T)$ com valores em $E_s$ e*

$$\sup_{|t|<R} |u(t)|_s < R,$$

*então $t \mapsto F(t, u(t))$ é uma função holomorfa em $B(0, R)$ com valores em $E_{s'}$.*

*Nestas condições, existe um $a \in (0, T)$ e uma única função $u(t)$, a qual para cada $s \in (0, 1)$ será holomorfa no disco $B_s^a = B(0, a(1-s))$, com valores em $E_s$ e satisfaz o problema de Cauchy (3.16).*

Neste caso, algumas observações devem ser realizadas com respeito à sua demonstração.

(1) O espaço $H_a$ agora será definido por

$$H_a = \{u : B_s^a \to E_s; u \text{ é holomorfa em } B_s^a \text{ para todo } s \in (0, 1) \text{ e } \|u\|_a < \infty\},$$

sendo

$$\|u\|_a = \sup_{t \in B_s^a,\, 0<s<1} |u(t)|_s (1 - s) \left(1 - \frac{|t|}{a(1 - s)}\right)^{1/2}.$$

Ele será completo devido ao Teorema 1.6.

(2) As integrações agora serão feitas sobre o plano complexo. Sendo cada elemento de $H_a$ uma função holomorfa, o Teorema de Cauchy nos permite realizar as integrações sobre qualquer caminho ligando a origem à $t$. Sendo assim, escolhemos o caminho "mais simples"possível, a saber, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}; \gamma(\tau) = \tau t$, $t \in \mathbb{C}$ fixo.

(3) A condição $u \in H_a$ implica que para todo $s \in (0,1)$, $u$ é uma função holomorfa em $B_s^a$, com valores em $E_s$, e consequentemente, o mesmo ocorrerá com $\tilde{u}(t) = \int_0^t u(z)dz$. Assim, a partir da hipótese $(\star)$, concluimos que $G(u)(t) = F(t, \tilde{u}(t))$ será holomorfa em $B_s^a$, com valores em $E_{s'}$, sendo $0 < s' < s < 1$. Portanto, faz sentido calcular a norma $\|G(u)\|_a$.

Feitas estas pequenas adaptações, sua demonstração seguirá praticamente o mesmos passos da exibida para o Teorema 3.1.

O estudo da regularidade analítica de soluções de problemas de Cauchy através do procedimento apresentado neste capítulo, tem suas origens em [13]. Posteriormente, tal abordagem foi intensamente desenvolvida em outros trabalhos, como por exemplo, em [1] e [17]. Na literatura sobre o assunto, o Teorema 3.1 é comumente referenciado como Teorema de Ovcyannikov.

# Capítulo 4

# Aplicações

Neste capítulo apresentaremos duas aplicações, cada uma delas com seu valor próprio. A primeira nos dirá que o Teorema 3.2 generaliza o Teorema de Cauchy-Kowalevski clássico, enquanto a segunda justifica a importância desta generalização, uma vez que o Teorema de Cauchy-Kowalevski clássico não se aplica à equação de Camassa-Holm. As referências [16] e [17] contêm muitas outras aplicações sobre o assunto.

## 4.1 O Problema de Cauchy para uma EDP Analítica Não-Linear

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_\nu^j u(x) = \varphi_j(x), \ \ x \in M, \ 0 \leq j \leq k-1, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u$ é uma função real e $F, \varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ juntamente com a hipersuperfície $M$ são analíticas. Lembremos que $\partial_\nu u$ denota a derivada normal de $u$ em $M$. Após uma mudança de coordenadas, podemos supor que $M$ contenha a origem, e próximo a ela, coincida com o hiperplano $x_n = 0$. Identificaremos o $\mathbb{R}^n$ com o produto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e denotaremos um ponto deste espaço com $(x, t), x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Escreveremos $\partial_x^\alpha, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ e $\partial_t^j$ para as derivadas com respeito a $x$ e $t$ respectivamente. Além disso, assumiremos que o problema (4.1) é não característico, isto é, a equação $F = 0$ pode ser expressada em função de $\partial_t^k u$, fornecendo-a, como uma função analítica $G$ das variáveis restantes. Desta maneira, o problema de Cauchy (4.1) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t^k u = G(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j \leq k,\, j<k}) \\ \partial_t^j u(x, 0) = \varphi_j(x), \ \ x \in M, \ 0 \leq j \leq k-1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Como feito no Capítulo 2, podemos transformar o problema (4.2) num sistema quase-linear de 1ª ordem do tipo

$$\begin{cases} \partial_t w = \Phi(x, t, w, (\partial_{x_i} w)_{1 \leq i \leq n-1}) \\ w(x, 0) = 0, \ x \in M. \end{cases} \tag{4.3}$$

Neste caso, $\Phi$ será uma função analítica num aberto contendo a origem da forma $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, sendo $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ para algum inteiro positivo $m$. Suporemos também que $w$ assuma seus valores num espaço $\mathbb{R}^p$ para algum inteiro positivo $p$.

Escolhamos $r > 0$ de modo que $\{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}); |x_j| < r\} \subset \Omega_1$, e considere para cada $s \in (0,1)$ o espaço de Banach

$$E_s = \{u : \overline{B}_s \to \mathbb{R}^p; u \text{ é contínua em } \overline{B}_s \text{ e analítica em } B_s\}, \tag{4.4}$$

equipado com a norma $|u|_s = \sup_{x \in \overline{B}_s} |u(x)|$. Na definição acima,

$$B_s = \{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}; |x_j| < sr\}.$$

Claramente $E_s \subset E_{s'}$ e $|u|_{s'} \leq |u|_s$ se $u \in E_s$ e $0 < s' < s < 1$. Agora, dados $R, T > 0$ e $s \in (0,1)$, defina $U = [-T, T] \times \{u \in E_s, |u|_s < R\}$ e considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow E_{s'} \\ (t, u) &\longmapsto F(t, u), \end{aligned}$$

onde $F(t,u)(x) = \Phi(x, t, u, (\partial_{x_i} u)_{1 \leq i \leq n-1})$. Note que $F(U) \subset E_{s'}$ se $0 < s' < s < 1$, e sendo $F$ contínua, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{|t| \leq T} |F(t, 0)|_s \leq M \leq \frac{M}{1-s},$$

para todo $s \in (0,1)$. Além disso, como $F$ é localmente lipschitziana, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{|t| \leq T} |F(t,u) - F(t,v)|_{s'} \leq C|u - v|_s \leq \frac{C}{s - s'}|u - v|_s,$$

sempre que $0 < s' < s < 1, u, v \in E_s, |u|_s < R$ e $|v|_s < R$. Com as notações acima, podemos reescrever problema de Cauchy (4.3) como

$$\begin{cases} w'(t) = F(t, w(t)) \\ w(0) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $w(t) \in E_{s'}$ e $w(t)(x) = w(x,t)$. Assim, a condição $(\star)$ do Teorema 3.2 é automaticamente verificada, e o mesmo, nos garante a existência de uma constante $a > 0$ e de uma única função $w(t)$, a qual para cada $s \in (0,1)$ será analítica no intervalo $(-a(1-s), a(1-s))$, com valores em $E_s$ e satisfaz o problema de Cauchy (4.5). Acabamos de provar (novamente) o

**Teorema 4.1. (Cauchy-Kowalevski)**

*Nas condições acima, se $G, \varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ forem analíticas numa vizinhança da origem, então existe uma vizinhança da origem na qual o problema de Cauchy (4.2) possui uma única solução analítica.*

Este fato mostra que o Teorema 3.2 realmente generaliza o Teorema de Cauchy-Kowalevski clássico, e explica a expressão "Versão Abstrata do Teorema de Cauchy-Kowalevski".

## 4.2 A Equação de Camassa-Holm

Nesta seção consideraremos o problema de Cauchy periódico

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u + 3u\partial_x u - 2\partial_x u \partial_x^2 u - u\partial_x^3 u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad (x,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.6}$$

e provaremos a analiticidade de suas soluções $u = u(x,t)$ nas duas variáveis $x$ e $t$, com $x \in \mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$ e $t$ numa vizinhança da origem, desde que a condição inicial $u_0$ seja analítica em $\mathbb{T}$. Faremos isto com a ajuda do Teorema 3.2. É importante ressaltar que o Teorema de Cauchy-Kowalevski clássico não se aplica neste caso, já que a hipersuperfície $M = \{(x,0); x \in \mathbb{T}\}$ é característica para a equação de Camassa-Holm em (4.6). A abordagem que utilizaremos é baseada no artigo [8] do A. Himonas e G. Misiolek.

O resto deste capítulo será destinado à prova do

**Teorema 4.2.** *Seja $u_0$ uma função analítica em $\mathbb{T}$. Existe um $\epsilon > 0$ e uma única solução $u$ do problema de Cauchy (4.6), analítica em $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{T}$.*

A idéia da demonstração é muito simples. Construiremos uma escala de espaços adequada a fim de aplicarmos o Teorema 3.2. Sendo assim, para cada $s \in (0,1)$, definamos

$$E_s = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{T}); |u|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{s^k |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} < \infty \right\},$$

onde $H_2(\mathbb{T})$ é o espaço de Sobolev de ordem 2 em $\mathbb{T}$. Algumas características importantes de cada espaço $E_s$ são exibidas nos lemas seguintes.

**Lema 4.1.** *Equipados com a norma $|\cdot|_s$, cada $E_s$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* De fato, se $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $E_s$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n - u_m|_s < \epsilon/3$ sempre que $m, n \geq n_0$. Logo,

$$\frac{s^k |\partial^k (u_n - u_m)|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} < \epsilon/3, \ \ \forall m, n \geq n_0, k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$, a expressão (4.7) implica que a sequência $\{\partial^k u_n\}$ é de Cauchy em $H_2(\mathbb{T})$, e portanto converge (em $H_2(\mathbb{T})$) para uma função $u^k \in H_2(\mathbb{T})$. Em particular, $u_n \to u^0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ e daí, $\partial^k u_n \to \partial^k u^0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$. Por outro lado, como $\partial^k u_n \to u^k$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$, segue-se que $u^k = \partial^k u^0$, devido à unicidade do limite. Assim, $\partial^k u_n \to \partial^k u^0$ em $H_2(\mathbb{T})$. Agora, fazendo $m \to \infty$ na expressão (4.7), resulta que

$$\frac{s^k |\partial^k (u_n - u^0)|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} < \epsilon/2, \ \ \forall n \geq n_0, k \in \mathbb{N},$$

e consequentemente $|u_n - u^0|_s < \epsilon$ se $n \geq n_0$, ou seja, $u_n \to u^0$ em $E_s$. Além disso, se $0 < s' < s \leq 1$, temos $E_s \subset E_{s'}$ com $|u|_{s'} \leq |u|_s$ sempre que $u \in E_s$. $\square$

**Lema 4.2.** *Dado $s \in (0,1)$, cada elemento do espaço $E_s$ é uma função analítica em $\mathbb{T}$.*

*Demonstração.* Também resulta das definições que todo elemento de $E_s$ é uma função analítica em $\mathbb{T}$. Com efeito, fixado $s \in (0,1)$, existe $A > 0$ tal que $|u|_s \leq A$ se $u \in E_s$. Assim, dado $k \in \mathbb{Z}_+$ temos $|\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} \leq As^{-k}k!$. Pondo $C = \max\{s^{-1}, A\}$ obtemos $|\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} \leq C^{k+1}k!$. Pelo Teorema 1.8 temos $|\partial^k u|_{L^2(\mathbb{T})} \leq |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})}$, e portanto $|\partial^k u|_{L^2(K)} \leq C^{k+1}k!$ para todo compacto $K \subset \mathbb{T}$. O resultado segue da Proposição 1.1. $\square$

Neste ponto uma questão surge naturalmente. A condição inicial analítica, $u_0$, do problema (4.6) pertence a algum espaço $E_s$? A resposta é afirmativa e trata-se do conteúdo do lema a seguir.

**Lema 4.3.** *Seja $u$ uma função analítica em $\mathbb{T}$. Então existe $\delta > 0$ tal que $u \in E_{\delta-\epsilon}$ para todo $\epsilon \in (0,\delta)$.*

*Demonstração.* A Proposição 1.2 garante a existência de constantes $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|\hat{u}(\xi)| \leq Ce^{-\delta|\xi|}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
|\partial^k u|^2_{H_2(\mathbb{T})} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} |(\partial^k u)\hat{}(\xi)|^2(1+\xi^2)^2 \\
&\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} |(\partial^k u)\hat{}(\xi)|^2(1+|\xi|)^4 \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} |\hat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2k}(1+|\xi|)^4 \\
&\leq C^2\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} e^{-2\delta|\xi|}(1+|\xi|)^4|\xi|^{2k} \\
&= C^2\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} (1+|\xi|)^4 e^{-\epsilon|\xi|}\big(|\xi|^{2k}e^{-(2\delta-\epsilon)|\xi|}\big),
\end{aligned}
$$

para todo $\epsilon > 0$.

Fixado $a > 0$, a estimativa $a^{2k}e^{-a} \leq (k!)^2 2^{2k}$ é válida para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
a^{2k}e^{-a} \leq (k!)^2 2^{2k} &\Leftrightarrow (a/2)^{2k}(k!)^{-2} \leq e^a \\
&\Leftrightarrow \Big(\frac{(a/2)^k}{k!}\Big)^2 \leq \Big(e^{a/2}\Big)^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{(a/2)^k}{k!} \leq e^{a/2}.
\end{aligned}
$$

Agora basta observar que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^k}{k!}$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$. Seja então $\epsilon \in (0,\delta)$. Utilizando a estimativa acima com $a = (2\delta-\epsilon)|\xi|, \xi \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\partial^k u|^2_{H_2(\mathbb{T})} &\leq C^2\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} (1+|\xi|)^4 e^{-\epsilon|\xi|}(k!)^2\Big(\frac{2}{2\delta-\epsilon}\Big)^{2k} \\
&= C^2(k!)^2\Big(\frac{2}{2\delta-\epsilon}\Big)^{2k}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} (1+|\xi|)^4 e^{-\epsilon|\xi|} \\
&= (AC)^2(k!)^2\Big(\frac{2}{2\delta-\epsilon}\Big)^{2k},
\end{aligned}
$$

onde $A^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}}(1+|\xi|)^4 e^{-\epsilon|\xi|} < \infty$. Portanto,

$$|\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} \leq ACk!\Big(\frac{2}{2\delta-\epsilon}\Big)^k, \ \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} &\leq ACk!\Big(\frac{1}{\delta-\epsilon/2}\Big)^k \\ &= ACk!\Big(\frac{1}{\delta-\epsilon}\Big)^k\Big(\frac{\delta-\epsilon}{\delta-\epsilon/2}\Big)^k, \end{aligned}$$

e daí,

$$\frac{1}{k!}(\delta-\epsilon)^k|\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} \leq AC\Big(\frac{\delta-\epsilon}{\delta-\epsilon/2}\Big)^k.$$

Observando que a série $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\Big(\frac{\delta-\epsilon}{\delta-\epsilon/2}\Big)^k$ converge, segue-se que

$$|u|_{\delta-\epsilon} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(\delta-\epsilon)^k|\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} \leq AC\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}(k+1)^2\Big(\frac{\delta-\epsilon}{\delta-\epsilon/2}\Big)^k < \infty.$$

Isto implica que $u \in E_{\delta-\epsilon}$ para todo $\epsilon \in (0,\delta)$. □

Redefinindo a escala $\{E_s\}_{0<s<1}$ (se necessário) pondo $E_s = E_{s\delta}$, concluimos que $u \in E_s$ para todo $s \in (0,1)$. Esta observação é importante pois, com ela à disposição, podemos assumir desde o ínicio que a condição inicial analítica do problema de Cauchy (4.6) pertenca a todo espaço $E_s$ da escala.

Outra propriedade interessante dos espaços $E_s$ é fornecida pela proposição abaixo. Ela nos diz que sob a multiplicação pontual de funções, cada $E_s$ forma uma álgebra.

**Proposição 4.1.** *Seja $s \in (0,1)$. Existe uma constante $c > 0$ independente de $s$, tal que para quaisquer $u$ e $v$ em $E_s$, tem-se $|uv|_s \leq c|u|_s|v|_s$.*

A demonstração deste resultado fará uso dos dois lemas seguintes.

**Lema 4.4.** *Se $u, v \in H_2(\mathbb{T})$, então existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $|uv|_{H_2(\mathbb{T})} \leq c_0|u|_{H_2(\mathbb{T})}|v|_{H_2(\mathbb{T})}$.*

*Demonstração.* De fato, se $u, v \in H_2(\mathbb{T})$, então

$$(uv)\hat{}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta),$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, pois,

$$\begin{aligned} (uv)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{T}} e^{-ix\xi}(uv)(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\Big[e^{-ix\xi}u(x)\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}e^{ix\eta}\hat{v}(\eta)\Big]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\hat{v}(\eta)\int_{\mathbb{T}}e^{-ix(\xi-\eta)}u(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta). \end{aligned}$$

Agora, observando que $1+\xi^2 \leq 2(1+(\xi-\eta)^2)(1+\eta^2)$, e utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
|uv|^2_{H_2(\mathbb{T})} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} |(uv)\hat{}(\xi)|^2(1+\xi^2)^2 \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)|\Big)^2(1+\xi^2)^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)|(1+\xi^2)\Big)^2 \\
&\leq \frac{1}{\pi^2}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(\xi-\eta)|(1+(\xi-\eta)^2)|\hat{v}(\eta)|(1+\eta^2)\Big)^2 \\
&\leq \frac{1}{\pi^2}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(\xi-\eta)|^2(1+(\xi-\eta)^2)^2|\hat{v}(\eta)|^2(1+\eta^2)^2 \\
&= \frac{1}{\pi^2}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\Big(|\hat{v}(\eta)|^2(1+\eta^2)^2\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(\xi-\eta)|^2(1+(\xi-\eta)^2)^2\Big) \\
&= \frac{1}{\pi^2}|u|^2_{H_2(\mathbb{T})}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}|\hat{v}(\eta)|^2(1+\eta^2)^2 \\
&= \frac{1}{\pi^2}|u|^2_{H_2(\mathbb{T})}|v|^2_{H_2(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Extraindo as raízes e pondo $c_0 = 1/\pi$ segue-se que

$$|uv|_{H_2(\mathbb{T})} \leq c_0|u|_{H_2(\mathbb{T})}|v|_{H_2(\mathbb{T})}.$$

□

**Lema 4.5.** *Para todo inteiro $k \geq 1$ tem-se*

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{(k+1)^2}{(l+1)^2(k-l+1)^2} \leq 8.$$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k}\frac{(k+1)^2}{(l+1)^2(k-l+1)^2} &\leq \sum_{l=1}^{k}\frac{(k+1)^2}{l^2(k-l+1)^2} \\
&= \sum_{l=1}^{k}(\frac{1}{l}+\frac{1}{k-l+1})^2 \\
&\leq \sum_{l=1}^{k}(\frac{2}{l^2}+\frac{2}{(k-l+1)^2}) \\
&= \sum_{l=1}^{k}(\frac{2}{l^2}+\frac{2}{l^2}) \\
&\leq 8,
\end{aligned}$$

para todo inteiro $k \geq 1$. □

*Demonstração. (da Proposição 4.1)*

Pelo Lema 4.4, existe $c_0 > 0$ tal que $|uv|_{H_2(\mathbb{T})} \leq c_0 |u|_{H_2(\mathbb{T})} |v|_{H_2(\mathbb{T})}$, para quaisquer $u, v \in H_2(\mathbb{T})$. Utilizando a regra de Leibniz

$$\begin{aligned}
|\partial^k (uv)|_{H_2(\mathbb{T})} &= \Big| \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\partial^{k-l} u)(\partial^l v) \Big|_{H_2(\mathbb{T})} \\
&\leq c_0 \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} |\partial^{k-l} u|_{H_2(\mathbb{T})} |\partial^l v|_{H_2(\mathbb{T})} \\
&= c_0 |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} |v|_{H_2(\mathbb{T})} + c_0 \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} |\partial^{k-l} u|_{H_2(\mathbb{T})} |\partial^l v|_{H_2(\mathbb{T})} \\
&\leq c_0 |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} |v|_s + c_0 \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} |\partial^{k-l} u|_{H_2(\mathbb{T})} |\partial^l v|_{H_2(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} |\partial^{k-l} u|_{H_2(\mathbb{T})} |\partial^l v|_{H_2(\mathbb{T})} &= \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \frac{s^{k-l} |\partial^{k-l} u|_{H_2(\mathbb{T})}}{(k-l)!/(k-l+1)^2} \cdot \frac{s^l |\partial^l v|_{H_2(\mathbb{T})}}{l!/(l+1)^2} \cdot \frac{l!(k-l)!}{s^k (l+1)^2 (k-l+1)^2} \\
&\leq |u|_s |v|_s \sum_{l=1}^{k} \frac{k!}{s^k (k-l+1)^2 (l+1)^2},
\end{aligned}$$

e utilizando o Lema 4.5, obtemos

$$\begin{aligned}
|uv|_s &\leq c_0 \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{s^k}{k!/(k+1)^2} \Big[ |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})} |v|_s + |u|_s |v|_s \sum_{l=1}^{k} \frac{k!}{s^k (k-l+1)^2 (l+1)^2} \Big] \\
&\leq c_0 \Big[ |u|_s |v|_s + |u|_s |v|_s \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{l=1}^{k} \frac{(k+1)^2}{(k-l+1)^2 (l+1)^2} \Big] \\
&\leq c |u|_s |v|_s.
\end{aligned}$$

sendo $c = 9c_0$. □

Nosso próximo objetivo será transformar o problema de Cauchy (4.6) num sistema equivalente. Observando que

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u + 3u\partial_x u - 2\partial_x u \partial_x^2 u - u\partial_x^3 u = 0 &\Leftrightarrow (1-\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x \big(u^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_x u)^2\big) + (1-\partial_x^2)(u\partial_x u) = 0 \\
&\Leftrightarrow \partial_t u + u\partial_x u + (1-\partial_x^2)^{-1} \partial_x \big(u^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_x u)^2\big) = 0,
\end{aligned}$$

reescrevemos o problema (4.6) na seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + (1-\partial_x^2)^{-1} \partial_x \big(u^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2\big) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.8}$$

$u_0$ analítica em $\mathbb{T}$. Pondo

$$f(x) = x^2, \quad P_1 u = -\partial_x u, \quad \text{e} \quad P_2 u = -[(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x] u,$$

a equação em (4.8) se torna

$$\partial_t u = \big(\frac{1}{2}P_1 + P_2\big) f(u) + \frac{1}{2} P_2 f(P_1 u). \tag{4.9}$$

A seguir transformaremos a equação (4.9) num sistema. Para isto, pomos

$$u_1 = u \quad \text{e} \quad u_2 = P_1 u = -\partial_x u_1.$$

Então

$$\partial_t u_1 = \big(\tfrac{1}{2}P_1 + P_2\big) f(u_1) + \tfrac{1}{2} P_2 f(u_2)$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_t u_2 &= \tfrac{1}{2} P_1^2 f(u_1) + P_1 P_2 f(u_1) + \tfrac{1}{2} P_1 P_2 f(u_2) \\
&= -\tfrac{1}{2} P_1 \partial_x (u_1^2) + P_1 P_2 f(u_1) + \tfrac{1}{2} P_1 P_2 f(u_2) \\
&= P_1(u_1 u_2) + P_1 P_2 f(u_1) + \tfrac{1}{2} P_1 P_2 f(u_2).
\end{aligned}$$

Portanto, o problema de Cauchy (4.6) é equivalente à

$$\begin{cases}
\partial_t u_1 = F_1(u_1, u_2) \\
\partial_t u_2 = F_2(u_1, u_2) \\
u_1(x,0) = u_0(x) \\
u_2(x,0) = -\partial_x u_0(x),
\end{cases} \tag{4.10}$$

sendo

$$F_1(u_1, u_2) = \big(\frac{1}{2}P_1 + P_2\big) f(u_1) + \frac{1}{2} P_2 f(u_2)$$

e

$$F_2(u_1, u_2) = P_1(u_1 u_2) + P_1 P_2 f(u_1) + \frac{1}{2} P_1 P_2 f(u_2).$$

Definindo

$$F(u_1, u_2) = (F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2)),$$

e pondo

$$|F(u_1, u_2)|_s = |F_1(u_1, u_2)|_s + |F_2(u_1, u_2)|_s,$$

podemos enunciar a

**Proposição 4.2.** *Fixado $r > 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que, dados arbitrariamente $0 < s' < s \leq 1$*

$$|F(u_1, u_2) - F(v_1, v_2)|_{s'} \leq \frac{C}{s - s'} |(u_1, u_2) - (v_1, v_2)|_s,$$

*para quaisquer $u_j, v_j$ na bola aberta $B(0, r) \subset E_s$.*

Acima, estamos utilizando a escala $\{\tilde{E}_s\}$, onde $\tilde{E}_s = E_s \times E_s$ com norma $|(a, b)|_s = |a|_s + |b|_s$ para todo $s$. Antes de provarmos a Proposição 4.2, estabeleceremos um lema técnico que fornecerá boas estimativas para os operadores $P_1$ e $P_2$.

**Lema 4.6.** *Para quaisquer $0 < s' < s < 1$, tem-se*

$$|P_1 u|_{s'} \leq \frac{1}{s - s'}|u|_s \quad \text{e} \quad |P_2 u|_s \leq |u|_s.$$

*Demonstração.* Para todo $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}
|\partial^k P_2 u|^2_{H_2(\mathbb{T})} &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (1+\xi^2)^2 |(\partial^k P_2 u)\hat{}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (1+\xi^2)^2 |\xi^k (P_2 u)\hat{}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (1+\xi^2)^2 |\xi^k \hat{u}(\xi)|^2 |\xi(1+\xi^2)^{-1}|^2 \\
&\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (1+\xi^2)^2 |(\partial^k u)\hat{}(\xi)|^2 \\
&= |\partial^k u|^2_{H_2(\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|P_2 u|_s &= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{s^k |\partial^k P_2 u|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} \\
&\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{s^k |\partial^k u|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} \\
&= |u|_s.
\end{aligned}$$

Sejam agora $0 < s' < s < 1$. Então

$$\begin{aligned}
|P_1 u|_{s'} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(s')^k |\partial^k P_1 u|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{Z}+} \frac{(s')^k |\partial^{k+1} u|_{H_2(\mathbb{T})}}{k!/(k+1)^2} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{s^{k+1} |\partial^{k+1} u|_{H_2(\mathbb{T})}}{(k+1)!/(k+2)^2} \cdot \frac{(s')^k (k+1)^3}{s^{k+1}(k+2)^2} \\
&\leq |u|_s \cdot \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(s')^k (k+1)^3}{s^{k+1}(k+2)^2}.
\end{aligned}$$

Escrevamos $s' = \lambda s$. Uma vez que

$$(k+1)\lambda^k < 1 + \lambda + \cdots + \lambda^k < \frac{1}{1-\lambda},$$

segue-se que

$$\frac{\lambda^k s^k}{s^{k+1}} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 (k+1) < \frac{1}{s - \lambda s}$$

e consequentemente

$$|P_1 u|_{s'} \leq \frac{1}{s - s'}|u|_s.$$

□

Neste ponto, estamos aptos a exibir a

*Demonstração.* (*da Proposição 4.2*)

Os termos não-lineares podem ser facilmente manuseados com a ajuda da Proposição 4.1, já que para cada $s > 0$ temos $|f(u) - f(v)|_s \leq c|u + v|_s|u - v|_s$. Esta desigualdade juntamente com o Lema 4.6, nos permitem estimar o valor de $|F(u_1, u_2) - F(v_1, v_2)|_{s'}$. De fato,

$$\begin{aligned}
|F(u_1,u_2) - F(v_1,v_2)|_{s'} &= |(F_1(u_1,u_2) - F_1(v_1,v_2), F_2(u_1,u_2) - F_2(v_1,v_2))|_{s'} \\
&= |F_1(u_1,u_2) - F_1(v_1,v_2)|_{s'} + |F_2(u_1,u_2) - F_2(v_1,v_2)|_{s'} \\
&\leq \frac{1}{2}|P_1(f(u_1) - f(v_1))|_{s'} + |P_2(f(u_1) - f(v_1))|_{s'} \\
&\quad + \frac{1}{2}|P_2(f(u_2) - f(v_2))|_{s'} + |P_1P_2(f(u_1) - f(v_1))|_{s'} \\
&\quad + \frac{1}{2}|P_1P_2(f(u_2) - f(v_2))|_{s'} + |P_1(u_1u_2 - v_1v_2)|_{s'} \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{c}{s-s'}|u_1+v_1|_s|u_1-v_1|_s + c|u_1+v_1|_{s'}|u_1-v_1|_{s'} \\
&\quad + \frac{c}{2}|u_2+v_2|_{s'}|u_2-v_2|_{s'} + \frac{c}{s-s'}|u_1+v_1|_s|u_1-v_1|_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{c}{s-s'}|u_2+v_2|_s|u_2-v_2|_s + \frac{1}{s-s'}|u_1u_2 - v_1v_2|_s \\
&\leq \frac{c}{s-s'}\left[R|u_1-v_1|_s + 2R|u_1-v_1|_s + R|u_2-v_2|_s\right] \\
&\quad + \frac{c}{s-s'}\left[2R|u_1-v_1|_s + R|u_2-v_2|_s + |u_2|_s|u_1-v_1|_s\right] \\
&\quad + \frac{c}{s-s'}|v_1|_s|u_2-v_2|_s \\
&\leq \frac{c}{s-s'}\left[6R|u_1-v_1|_s + 3R|u_2-v_2|_s\right] \\
&\leq \frac{6Rc}{s-s'}\left[|u_1-v_1|_s + |u_2-v_2|_s\right] \\
&= \frac{C}{s-s'}|(u_1,u_2) - (v_1,v_2)|_s,
\end{aligned}$$

onde $C = 6Rc$ independe de $s \in (0,1)$. Em suma,

$$|F(u_1,u_2) - F(v_1,v_2)|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'}|(u_1,u_2) - (v_1,v_2)|_s,$$

para quaisquer $u_i, v_i \in B(0,r) \subset E_s$, sendo $C > 0$ independente de $0 < s' < s \leq 1$. □

Com os resultados desta seção, o Teorema 4.2 será uma consequência imediata do Teorema 3.2. Devemos apenas verificar as condições que nos permitem aplicá-lo. O problema de Cauchy (4.10) é dado por

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = F_1(u_1,u_2) \\ \partial_t u_2 = F_2(u_1,u_2) \\ u_1(x,0) = u_0(x) \\ u_2(x,0) = -\partial_x u_0(x), \end{cases}$$

onde $u_1 = u, u_2 = -\partial_x u_1$ e $u_0$ é analítica em $\mathbb{T}$. Pondo $w = (u_1,u_2)$ e $w_0(x) = w(x,0)$, obtemos

$$\begin{cases} \partial_t w = F(w), \qquad F(w) = (F_1(w), F_2(w)) \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

Em seguida, escrevamos $v(x,t) = w(x,t) - w_0(x)$. Assim, o problema de Cauchy (4.10) é equivalente à

$$\begin{cases} \partial_t v = G(v) \\ v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

sendo $G(v(x,t)) = F(v(x,t) + w_0(x))$.

Finalmente, verifiquemos tais condições.

(1) Dados $0 < s' < s < 1$, se a função $t \mapsto v(t) \in E_s, (v(t)(x) = v(x,t))$ for analítica em $(-T,T)$, então $t \mapsto u(t) \in E_s, (u(t)(x) = u(x,t))$ também o será. Como $F$ depende apenas da variável $u$, segue-se que $F$ é analítica, e portanto, a função $t \mapsto G(v(t)) \in E_{s'}, (G(v(t))(x) = G(v(x,t)))$ será analítica em $(-T,T)$.

(2) Se $0 < s' < s \leq 1$ e $v_1, v_2 \in B(0,r) \subset E_s$, a Proposição 4.2 nos diz que

$$|G(v_1) - G(v_2)|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'}|v_1 - v_2|_s,$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $0 < s' < s \leq 1$. Com efeito, escrevendo $v_i = w_i - w_0$ e $w_i = (u_1^i, u_2^i)$ para i=1,2, temos

$$\begin{aligned} |G(v_1) - G(v_2)|_{s'} &= |F(w_1) - F(w_2)|_{s'} = |F(u_1^1, u_2^1) - F(u_1^2, u_2^2)|_{s'} \\ &\leq \frac{C}{s-s'}|(u_1^1, u_2^1) - (u_1^2, u_2^2)|_s = \frac{C}{s-s'}|w_1 - w_2|_s \\ &= \frac{C}{s-s'}|v_1 - v_2|_s. \end{aligned}$$

(3) Como $G(0)(x) = F(w_0)(x) = F(w_0(x))$ para todo $x \in \mathbb{T}$, vemos que $G(0)$ independe da variável $t$. Então, considerando $M = |G(0)|_s$ segue-se que

$$\sup_{|t|\leq T} |G(0)|_s \leq \frac{M}{1-s},$$

para todo $s \in (0,1)$.

Assim, o Teorema 3.2 garante a existência de $a \in (0,T)$, e uma única $u(t)$ tal que para cada $s \in (0,1)$, a aplicação

$$I_s^a \ni t \mapsto u(t) \in E_s, \quad u(t)(x) = u(x,t),$$

é analítica em $I_s^a = (-a(1-s), a(1-s))$ e satisfaz o problema de Cauchy (4.11). A analiticidade de $u(x,t)$ na variável $x$ é garantida por construção. Isto finaliza a demonstração. $\square$

# Referências Bibliográficas


[1] Baouendi, M.S., Goulaouic, C., *Remarks on the Abstract Form of Nonlinear Cauchy-Kovalevski Theorems*, Comm. Partial Differential Equations, 2(11), (1977), 1151-1162.

[2] Camassa, R., Holm, D., *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Lett. 71, (1993).

[3] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1969.

[4] Ebert, M.R., Santos, J.R., *Problemas de Cauchy para Operadores Diferenciais Parciais*, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[5] Folland, G.B., *Introduction to Partial Differential Equations*, 2ª ed., Princeton Academic Press, New Jersey, 1995.

[6] Folland, G.B., *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, 2ª ed., John Wiley, New York, 1999.

[7] Hounie, J., *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[8] Himonas, A.A., Misiolek, G., *Analyticity of the Cauchy problem for an integrable evolution equation*, Math. Ann. 327, (2003), 575-584.

[9] John, F., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[10] Lima, E.L., *Análise Real, Funçẽs de n Variáveis, vol 2*, 4ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[11] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[12] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, 4ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[13] Ovcyannikov, L.V., *Singular operators in Banach spaces scales*, Doklady Acad. Nauk. 162 (1965), 819-822.

[14] Rodino, L., *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*, World Scientific, Singapore, 1992.

[15] Sotomayor, J.M., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[16] Thayer, F.J., *Notes on Partial Differential Equations*, IMPA, Rio de Janeiro, 1980.

[17] Trèves, F., *An Abstract Nonlinear Cauchy-Kovalevska Theorem*, Trans. A.M.S. 150 (1970), 77-92.

[18] Trèves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1975.