

# O Princípio do Máximo de Omori-Yau e Generalizações

Felipe de Aguilar Franco

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior

9 de junho de 2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F825pm

Franco, Felipe de Aguilar.

O princípio do máximo de Omori-Yau e generalizações /  
Felipe de Aguilar Franco. -- São Carlos : UFSCar, 2014.  
122 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2014.

1. Geometria diferencial. 2. Heat Kernel. 3. Princípio do  
Máximo de Omori-Yau. 4. Boa Sombra. 5. Funções  
exaustão. I. Título.

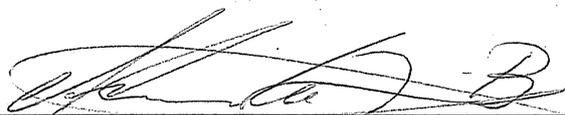
CDD: 516.36 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



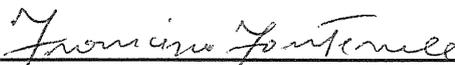
---

**Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Júnior**  
DM - UFSCar



---

**Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto**  
DM/UFSCar



---

**Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto**  
UFF



# Resumo

Neste trabalho, procuramos estabelecer um primeiro contato com a Análise Geométrica, tendo como objetivo a compreensão do Princípio da Boa Sombra de Fontenele e Xavier ([FX11]), que é uma generalização do Princípio de Omori-Yau.

Apresentaremos resultados básicos necessários para sua compreensão, além de estender o estudo para outros tópicos da Análise Geométrica, como núcleo do calor, funções exaustão e estimativas do gradiente de funções harmônicas e de subsoluções da equação do calor.

Uma vez compreendido o Princípio da Boa Sombra, visamos estendê-lo provando que a classe de variedades introduzida por Azagra e Fry em [AF10] (*second order uniformly bumpable manifolds*) também satisfaz este princípio.

# Abstract

In this work we seek to establish a first contact with Geometric Analysis, aiming the understanding of the Good Shadow Principle of Fontenele and Xavier ([FX11]), which is a generalization of the Omori-Yau Principle.

We will expose the basic results that are needed for their comprehension, and extend the study to other topics of Geometric Analysis, as the heat kernel, the existence of exhaustion functions and estimates to the gradient of harmonic functions and subsolutions of the heat equation.

Once understood the Good Shadow Principle, we intend to extend it by proving that the class of the second order uniformly bumpable manifolds, introduced by Azagra and Fry in [AF10], also satisfies this principle.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>I Pré-requisitos de geometria riemanniana</b>	<b>3</b>
<b>1 Métrica riemanniana</b>	<b>4</b>
1.1 Definição . . . . .	4
1.2 Medida riemanniana . . . . .	6
<b>2 Conexões</b>	<b>12</b>
2.1 Definição de conexão . . . . .	12
2.2 Conexões lineares . . . . .	14
2.3 Derivadas covariantes de campos tensoriais . . . . .	17
2.4 Campos vetoriais e derivadas covariantes sobre curvas . . . . .	18
2.5 Geodésicas . . . . .	20
2.6 Transporte paralelo . . . . .	21
<b>3 Geodésicas riemannianas e a aplicação exponencial</b>	<b>23</b>
3.1 Conexões riemannianas . . . . .	23
3.2 A aplicação exponencial . . . . .	25
3.3 Coordenadas normais . . . . .	28
<b>4 Geodésicas e distância</b>	<b>31</b>
4.1 Comprimento de curvas em variedades riemannianas . . . . .	31
4.2 Curvas minimizantes . . . . .	33
4.3 Geodésicas são localmente minimizantes . . . . .	37
4.4 Completude . . . . .	39

<b>5</b>	<b>Curvaturas</b>	<b>40</b>
5.1	Tensor de curvatura . . . . .	40
5.2	Curvatura de Ricci . . . . .	42
5.3	Curvatura seccional . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Campos de Jacobi</b>	<b>44</b>
6.1	Equações de Jacobi . . . . .	44
6.2	Calculando campos de Jacobi . . . . .	49
6.3	Pontos conjugados . . . . .	50
6.4	Segunda fórmula variacional . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Fórmula de Bochner-Weitzenböck</b>	<b>53</b>
7.1	Referencial geodésico . . . . .	53
7.2	Gradiente, divergente e laplaciano . . . . .	55
7.3	Fórmula de Bochner-Weitzenböck . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Tópicos de análise geométrica</b>	<b>61</b>
<b>8</b>	<b>Teoremas de comparação</b>	<b>62</b>
8.1	Teorema de Comparação da Hessiana . . . . .	62
8.2	Estimativas do gradiente de funções harmônicas . . . . .	66
8.3	Variedades com curvatura de Ricci limitada inferiormente . . . . .	74
<b>9</b>	<b>Núcleo do calor</b>	<b>81</b>
9.1	Uma expressão para o núcleo do calor em uma variedade riemanniana . . . . .	81
9.2	Construção do núcleo do calor: parametriz . . . . .	83
9.3	Construção do núcleo do calor: operadores do calor . . . . .	87
<b>10</b>	<b>Subsoluções da equação do calor</b>	<b>93</b>
10.1	Unicidade de soluções da equação do calor . . . . .	93
10.2	Estimativas para subsoluções da equação do calor . . . . .	97
10.3	Estimativas para o gradiente de soluções da equação do calor . . . . .	101
10.4	Integrais . . . . .	104
10.5	Aplicação: funções exaustão . . . . .	107
<b>11</b>	<b>O princípio da boa sombra</b>	<b>113</b>
11.1	Variedades <i>uniformly bumpable</i> . . . . .	114
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>120</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>121</b>

# Introdução

Sabemos que se  $M$  é uma variedade riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  e  $p \in M$  é um ponto de mínimo para  $f$ , então

$$|\nabla f(p)| = 0 \quad \text{e} \quad \text{Hess } f(p)(X, X) \geq 0,$$

para qualquer vetor  $X$  tangente a  $p$  (os resultados que enunciaremos também tem versões análogas no caso em que  $p$  é um ponto de máximo). Este resultado é conhecido como Princípio do Mínimo (Máximo).

Para o caso em que  $f$  não assume mínimo mas é limitada inferiormente, Omori provou em 1967 (veja [Omo67]) que se a curvatura seccional de  $M$  é limitada inferiormente, então existe uma sequência  $(p_n)$  em  $M$  satisfazendo

$$f(p_n) \rightarrow \inf_M f, \quad |\nabla f(p_n)| \rightarrow 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Hess } f(p_n) \geq 0.$$

Em 1975, Yau obteve um resultado semelhante para outra classe de variedades (veja [Yau75]). Ele mostrou que se a curvatura de Ricci de  $M$  é limitada inferiormente, então existe uma sequência  $(p_n)$  satisfazendo

$$f(p_n) \rightarrow \inf_M f, \quad |\nabla f(p_n)| \rightarrow 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \Delta f(p_n) \geq 0.$$

Estes dois resultados são conhecidos como Princípio do Mínimo (Máximo) de Omori-Yau, ou simplesmente Princípio de Omori-Yau.

Usando os Teoremas de Comparação (veja o Capítulo 8), Fontenele e Xavier obtiveram em 2011 um refinamento para o Princípio de Omori-Yau: o Princípio da Boa Sombra. Este resultado nos garante que se  $M$  tem curvatura de Ricci (resp. seccional) limitada inferiormente, então para qualquer sequência minimizante  $(p_n)$  para  $f$ , existe uma sequência  $(q_n)$ , que dizemos ser uma boa sombra de  $(p_n)$ , que satisfaz

$$d(p_n, q_n) \rightarrow 0, \quad f(q_n) \rightarrow \inf_M f, \quad |\nabla f(q_n)| \rightarrow 0$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Delta f(q_n) \geq 0 \quad \left( \text{resp.} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Hess } f(q_n) \geq 0 \right).$$

No Capítulo 11 apresentamos uma versão do Princípio da Boa Sombra para uma classe diferente de variedades riemannianas: variedades que admitem *bump functions*, “espalhadas” uniformemente em  $M$ , com suas derivadas de primeira e segunda ordem limitadas (veja a definição na Página 114). Essa classe de variedades foi introduzida por Azagra e Fry em [AF10] que a denominaram *second order uniformly bumpable*. Temos assim, que essa classe de variedades também satisfaz o Princípio de Omori-Yau.

Observamos que, *a priori*, não é possível dizer se o resultado obtido no Capítulo 11 generaliza ou não o Princípio da Boa Sombra de Fontenele e Xavier, uma vez que não se sabe precisamente quais características geométricas determinam a família das variedades *second order uniformly bumpable*. O Capítulo 11 é encerrado com uma conjectura que propõe uma solução parcial para esta questão.

A organização do texto se encontra da seguinte forma: na Parte I, apresentamos o básico da teoria da Geometria Riemanniana que será necessária para a compreensão dos resultados enunciados na Parte II.

Na Parte II, Capítulo 8, no intuito de fornecer um primeiro contato com a Análise Geométrica, são apresentados os Teoremas de Comparação da Hessiana e do Laplaciano (estes resultados são utilizados na demonstração do Princípio da Boa Sombra em [FX11]). Ainda com o mesmo objetivo, apresentamos estimativas para o gradiente de funções harmônicas.

No Capítulo 9, exibimos uma construção do núcleo do calor de variedades fechadas, utilizando o método da parametriz.

Usando resultados apresentados nos Capítulos 8 e 9, no Capítulo 10 estudamos subsoluções da equação do calor afim de compreender a demonstração do Teorema 10.14 (provado em [Tam10]); é com base neste teorema que formulamos a conjectura enunciada acima.

Finalmente, no Capítulo 11, discutiremos o Princípio da Boa Sombra.

Parte I

**Pré-requisitos de geometria  
riemanniana**

# Capítulo 1

## Métrica riemanniana

Neste capítulo introduziremos o conceito de *métrica riemanniana* e *medida riemanniana*. Assumimos o conhecimento prévio de variedades suaves, que pode ser encontrado, por exemplo, em [Lee13] e [Spi79].

### 1.1 Definição

Seja  $M$  uma variedade suave. Uma **métrica riemanniana** em  $M$  é um campo tensorial do tipo  $\binom{2}{0}$  que é simétrico (i.e.,  $g(X, Y) = g(Y, X)$ ) e positivo definido ( $g(X, X) > 0$  se  $X \neq 0$ ).

Então uma métrica riemanniana determina um produto interno em cada espaço tangente  $T_pM$ , escrito como

$$\langle X, Y \rangle = g_p(X, Y), \quad (1.1)$$

para  $X, Y \in T_pM$ . Uma variedade suave munida de uma métrica riemanniana é chamada de **variedade riemanniana**. Podemos também escrever que o par  $(M, g)$  é uma variedade riemanniana.

Como temos agora um produto interno em cada espaço tangente  $T_pM$ , podemos definir a **norma** de um vetor  $X \in T_pM$  por  $|X| = \langle X, X \rangle^{1/2}$ . Dois vetores  $X, Y \in T_pM$  são **ortogonais** se  $\langle X, Y \rangle = 0$ . Mais ainda, dizemos que vetores  $E_1, \dots, E_k \in T_pM$  são **ortonormais** se  $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ .

Seja  $(E_1, \dots, E_n)$  um referencial local em  $M$ , ou seja, cada  $E_i$  é um campo vetorial num aberto de  $M$  e para cada  $p$  neste aberto,  $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$  é uma base para  $T_pM$ . Então, se consideramos o seu correferencial dual  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , podemos escrever a métrica riemanniana localmente como

$$g = g_{ij}\varphi^i \otimes \varphi^j, \quad (1.2)$$

onde  $g_{ij}$  é dada por  $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ . Em particular, se consideramos o referencial  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$

dado pelas coordenadas, temos

$$\begin{aligned}
 g &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\
 &= \frac{1}{2} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^j \otimes dx^i) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ji} dx^j \otimes dx^i) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^j \otimes dx^i) \\
 &= g_{ij} dx^i dx^j,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

sendo que, na última igualdade, estamos usando a identidade  $\omega\eta = \frac{1}{2}\omega \otimes \eta$  (produto simétrico).

Em  $\mathbb{R}^n$  definimos a **métrica euclidiana**  $\bar{g}$  (com relação às coordenadas naturais) por

$$\bar{g} = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j. \tag{1.4}$$

Usando a notação  $\omega^2 = \omega\omega$  para o produto simétrico, temos

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2. \tag{1.5}$$

Assim, dados vetores  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\bar{g}_p(v, w) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^n v^i w^i = v \cdot w. \tag{1.6}$$

Consideremos agora uma variedade riemanniana  $(M, g)$ . Já sabemos que, para cada ponto  $p \in M$ ,  $g_p$  é um produto interno positivo-definido. Definimos então

$$\hat{g}_p : T_p M \rightarrow T_p^* M = (T_p M)^* \tag{1.7}$$

por

$$\hat{g}_p(X)(Y) = g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle. \tag{1.8}$$

Note que dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $X_1, X_2, Y \in T_p M$ , temos

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_p(\lambda X_1 + X_2)(Y) &= \langle \lambda X_1 + X_2, Y \rangle \\
 &= \lambda \langle X_1, Y \rangle + \langle X_2, Y \rangle \\
 &= \lambda \hat{g}_p(X_1)(Y) + \hat{g}_p(X_2)(Y) \\
 &= (\lambda \hat{g}_p(X_1) + \hat{g}_p(X_2))(Y).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Logo,  $\hat{g}_p$  é linear. Além disso,

$$\hat{g}_p(X) = 0 \implies \hat{g}_p(X)(X) = 0 \implies \langle X, X \rangle = 0 \implies X = 0, \tag{1.10}$$

e assim  $\widehat{g}_p$  é injetora. Como  $\dim T_p M = \dim T_p^* M$ , temos que  $\widehat{g}_p$  é um isomorfismo linear. Portanto, por meio da métrica  $g_p$ , podemos identificar o espaço tangente  $T_p M$  e o espaço cotangente  $T_p^* M$ . Estendemos este fato identificando o espaço dos campos vetoriais suaves em  $M$ , que denotaremos por  $\mathcal{T}(M)$ , e o espaço das 1-formas, que denotaremos por  $\mathcal{T}^1(M)$ . Deste modo,  $X \in \mathcal{T}(M)$  é identificado com  $\omega \in \mathcal{T}^1(M)$  se, e somente se,

$$\langle X, Y \rangle = \omega(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{T}(M). \quad (1.11)$$

Nesse caso, denotamos  $X^\flat = \omega$  e  $\omega^\sharp = X$ . Observe, por exemplo, que o campo local  $(dx^i)^\sharp$  é dado por  $(dx^i)^\sharp = g^{ij} \partial_j$ . De fato, o campo  $(dx^i)^\sharp$  é o único que satisfaz

$$\langle (dx^i)^\sharp, Y^k \partial_k \rangle = dx^i(Y^k \partial_k) = Y^i, \quad (1.12)$$

para qualquer campo local  $Y^k \partial_k$ . Mas,

$$\langle g^{ij} \partial_j, Y^k \partial_k \rangle = g^{ij} g_{jk} Y^k = \delta_{ik} Y^k = Y^i. \quad (1.13)$$

Portanto,  $(dx^i)^\sharp = g^{ij} \partial_j$ . Deste modo, dada uma 1-forma  $\omega$ , temos que  $\omega^\sharp$  tem coordenadas

$$\omega^i = g^{ij} \omega_j. \quad (1.14)$$

**Definição.** O **gradiente** de uma função  $f \in C^\infty(M)$  é o campo vetorial  $\text{grad } f = df^\sharp$ .

Ou seja,  $\text{grad } f$  é o único campo vetorial tal que

$$df(Y) = \langle \text{grad } f, Y \rangle, \quad \forall Y \in \mathcal{T}(M). \quad (1.15)$$

Pela observação feita acima, temos que o gradiente é escrito em coordenadas locais como

$$\text{grad } f = g^{ij} \partial_i f \partial_j. \quad (1.16)$$

Usaremos a notação  $\text{grad } f = \nabla f$ .

## 1.2 Medida riemanniana

Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão  $n$ . Seja  $\mathcal{B}(M)$  a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os subconjuntos abertos de  $M$ . Os elementos de  $\mathcal{B}(M)$  são chamados de **conjuntos de Borel** ou **borelianos**.

**Definição.** Dizemos que um conjunto  $E \subset M$  é **mensurável** se, para cada carta  $(U, \varphi)$  em  $M$ , o conjunto  $\varphi(U \cap E) \subset \mathbb{R}^n$  é Lebesgue mensurável.

**Proposição 1.1.** *A família de todos os conjuntos mensuráveis em  $M$  é uma  $\sigma$ -álgebra, que denotaremos por  $\Lambda(M)$ .*

*Demonstração.* Como todos os abertos de  $\mathbb{R}^n$  são Lebesgue mensuráveis, dada uma carta  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi(U \cap \emptyset) = \emptyset$  e  $\varphi(U \cap M)$  também é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , portanto  $\emptyset, M \in \Lambda(M)$ .

Seja  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Lambda(M)$  e seja  $(U, \varphi)$  uma carta em  $M$ . Então,

$$\varphi(U \cap (\cup E_i)) = \varphi(\cup (E_i \cap U)) = \cup \varphi(E_i \cap U), \quad (1.17)$$

que é Lebesgue mensurável em  $\mathbb{R}^n$ . Agora, se  $E \in \Lambda(M)$ , então

$$\varphi((M \setminus E) \cap U) = (\mathbb{R}^n \setminus \varphi(E \cap U)) \cap \varphi(U), \quad (1.18)$$

que é Lebesgue mensurável.  $\square$

**Observação.** Como todo aberto de  $M$  é mensurável, temos que  $\mathcal{B}(M) \subset \Lambda(M)$ .

Seja  $(U, \varphi)$  uma carta em  $M$  e consideremos a  $\sigma$ -álgebra formada pelos subconjuntos  $E \subset U$  que são mensuráveis, ou seja,  $E \in \Lambda(M)$ . Denotaremos esta  $\sigma$ -álgebra por  $\Lambda(U)$ . A partir da medida de Lebesgue  $\tilde{\lambda}$  em  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir uma medida  $\lambda$  em  $U$  da seguinte forma: dado  $E \in \Lambda(U)$ , definimos

$$\lambda(E) := \tilde{\lambda}(\varphi(E)). \quad (1.19)$$

A medida  $\lambda$  será chamada **medida de Lebesgue** em  $U$ .

**Teorema 1.2.** *Seja  $(M, g)$  uma  $n$ -variedade riemanniana. Existe uma única medida  $\nu$  em  $\Lambda(M)$  tal que, um qualquer carta  $U$ ,*

$$d\nu = \sqrt{\det g} d\lambda, \quad (1.20)$$

onde  $g = (g_{ij})$  é a matriz da métrica  $g$  em  $U$ , e  $\lambda$  é a medida de Lebesgue em  $U$ .

Além disso, a medida  $\nu$  é completa,  $\nu(K) < \infty$  para qualquer compacto  $K \subset M$ ,  $\nu(\Omega) > 0$  para qualquer aberto não vazio  $\Omega \subset M$ , e  $\nu$  é regular no seguinte sentido: para qualquer conjunto  $A \subset \Lambda(M)$ ,

$$\nu(A) = \sup \{\nu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\} \quad (1.21)$$

e

$$\nu(A) = \inf \{\nu(\Omega) : A \subset \Omega, \Omega \text{ aberto}\}. \quad (1.22)$$

**Lema 1.3.** *Sejam  $(U, (x^i))$  e  $(V, (y^j))$  dois sistemas de coordenadas em  $M$ . Denotemos por  $g^x$  e  $g^y$  as matrizes de  $g$  com relação às coordenadas  $(U, (x^i))$  e  $(V, (y^j))$ , respectivamente. Seja  $J = (J_i^k)_{i,k=1,\dots,n}$  a matriz jacobiana da mudança de variáveis  $y = y(x)$  definida em  $U \cap V$  por*

$$J_i^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad (1.23)$$

sendo  $k$  o índice das linhas e  $i$  o índice das colunas. Então, temos a seguinte identidade em

$U \cap V$ :

$$g^x = J^\top g^y J, \quad (1.24)$$

onde  $J^\top$  é a matriz transposta da jacobiana.

*Demonstração.* Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} = J_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}. \quad (1.25)$$

Logo,

$$\begin{aligned} g^x_{ij} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= J_i^k J_j^\ell \left\langle \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^\ell} \right\rangle \\ &= J_i^k g^y_{k\ell} J_j^\ell \\ &= \left( J^\top g^y J \right)_{ij}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

□

*Demonstração do Teorema.* Note que (1.20) é válida para toda carta  $U$  em  $M$  se, e somente se,

$$\nu(A) = \int_A \sqrt{\det g} d\lambda, \quad \forall A \subset U, \text{ mensurável.} \quad (1.27)$$

Sabemos que (veja [Fol99]), como  $\sqrt{\det g}$  é uma função contínua e positiva, a identidade (1.27) define uma medida  $\nu$  na  $\sigma$ -álgebra  $\Lambda(U)$  dos conjuntos mensuráveis em  $U$ . Mostraremos que a medida  $\nu$  definida em cada carta, pode ser unicamente estendida a  $\Lambda(M)$ .

**Afirmção 1.4.** *Se  $U$  e  $V$  são cartas em  $M$  e  $A$  é um conjunto mensurável em  $U \cap V$ , então  $\nu(A)$  definida por (1.27) tem o mesmo valor em ambas as cartas.*

*Demonstração da Afirmção.* Sejam  $(x^i)$  e  $(y^j)$  sistemas de coordenadas em  $U$  e  $V$ , respectivamente. Denotemos por  $g^x$  e  $g^y$  as matrizes de  $g$  nas coordenadas  $(x^i)$  e  $(y^j)$ , respectivamente. Seja  $A \subset W := U \cap V$  um conjunto mensurável. Por (1.24), temos

$$\det g^x = (\det J)^2 \det g^y. \quad (1.28)$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, se  $f$  é uma função mensurável não-negativa em  $W$ , então

$$\int_W f dy = \int_W f |\det J| dx, \quad (1.29)$$

onde  $dx$  e  $dy$  são as medidas de Lebesgue em  $U$  e  $V$ , respectivamente. Aplicando isto para a função não-negativa  $f := \xi_A \sqrt{\det g^y}$  (onde  $\xi_A$  é a função característica de  $A$ ) e usando (1.28),

obtemos

$$\int_A \sqrt{\det g^y} dy = \int_A \sqrt{\det g^y} |\det J| dx = \int_A \sqrt{\det g^x} dx, \quad (1.30)$$

o que demonstra a afirmação.  $\square$

Provemos agora a unicidade da medida  $\nu$ . Lembremos que toda variedade suave admite uma cobertura  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  por cartas relativamente compactas tais que cada compacto  $\bar{U}_i$  está contido em uma carta. Tomemos tal cobertura para  $M$ .

Dado um conjunto mensurável  $A$  de  $M$ , definimos uma seqüência de conjuntos  $A_i \subset U_i$ , por

$$A_1 = A \cap U_1, \quad A_2 = A \cap U_2 \setminus U_1, \quad \dots, \quad A_i = A \cap U_i \setminus U_1 \setminus \dots \setminus U_{i-1}, \dots \quad (1.31)$$

Deste modo,  $A$  é a união disjunta dos conjuntos  $A_i$ . Logo, para qualquer extensão de  $\nu$ , devemos ter

$$\nu(A) = \sum_i \nu(A_i). \quad (1.32)$$

No entanto, o valor  $\nu(A_i)$  é unicamente determinado, visto que  $A_i$  está contido na carta  $U_i$ . Portanto,  $\nu(A)$  está unicamente definido.

Para provar a existência de  $\nu$ , usamos a mesma construção. Dado um conjunto mensurável  $A$ , quebramos  $A$  como união enumerável de conjuntos  $A_i$ , como feito anteriormente, de modo que cada  $A_i$  esteja contido em uma carta, e definimos  $\nu(A)$  usando (1.20) e (1.32). Mostremos que, definida assim,  $\nu$  é uma medida, ou seja,  $\nu$  é  $\sigma$ -aditiva. Seja  $\{A^k\}$  uma seqüência de conjuntos mensuráveis em  $M$  e seja

$$A = \coprod_k A^k, \quad (1.33)$$

onde  $\coprod$  denota que a união é disjunta. Definindo os conjuntos  $A_i^k$  como em (1.31), obtemos

$$A_i = \coprod_k A_i^k. \quad (1.34)$$

Como  $\nu$  é  $\sigma$ -aditiva em cada carta  $U_i$ , temos

$$\nu(A_i) = \sum_k \nu(A_i^k). \quad (1.35)$$

Somando em  $i$ , obtemos

$$\nu(A) = \sum_i \nu(A_i) = \sum_i \sum_k \nu(A_i^k) = \sum_k \sum_i \nu(A_i^k) = \sum_k \nu(A^k), \quad (1.36)$$

o que demonstra a existência de  $\nu$ .

Mostremos que a medida  $\nu$  é completa, i.e., mostremos que todo conjunto  $N$  contido num conjunto de medida nula  $A$  é mensurável. Para isso, definimos  $N_i$  e  $A_i$  como em (1.31); clara-

mente, teremos  $N_i \subset A_i$ . Como  $\nu(A_i) = 0$ , usando (1.27) em  $U_i$  e o fato de  $\sqrt{\det g} > 0$ , temos que  $\lambda(A_i) = 0$ . Então, como a medida de Lebesgue é completa, concluímos que  $N_i$  é mensurável e, assim,  $N$  é mensurável.

Dado um conjunto compacto  $K \subset M$ , podemos cobri-lo por um número finito de cartas  $U_i$  e então  $K$  é união finita de conjuntos  $K_i = K \cap U_i$ . Usando (1.27) nas cartas que contém  $\bar{U}_i$  e o fato da função  $\sqrt{\det g}$  ser limitada em  $\bar{U}_i$ , temos que  $\nu(K_i) < \infty$  e concluímos que  $\nu(K) < \infty$ .

Dado um conjunto aberto  $\Omega \subset M$ , temos que  $\Omega$  contém uma carta  $U$ . Usado (1.27), obtemos

$$\nu(\Omega) \geq \nu(U) = \int_U \sqrt{\det g} \, d\lambda > 0, \quad (1.37)$$

visto que  $\sqrt{\det g} > 0$ .

Mostremos agora que  $\nu$  é regular, ou seja, satisfaz (1.21) e (1.22). Seja  $A$  um subconjunto relativamente compacto e mensurável de  $M$ . Então, existe uma família finita de cartas  $\{U_i\}_{i=1}^m$  que cobre  $\bar{A}$ . Podemos assumir que cada conjunto  $\bar{U}_i$  é compacto e está contido em uma carta  $V_i$ . Pela regularidade da medida de Lebesgue (em cada carta), cada conjunto  $A = A \cap U_i$  pode ser aproximado por um conjunto compacto  $K_i \subset A_i$  tal que  $\lambda(A_i \setminus K_i) < \varepsilon_i$  onde  $\lambda_i$  é a medida de Lebesgue na carta  $V_i$  e  $\varepsilon_i > 0$  é um número real dado. Sejam  $C_i = \sup_{U_i} \sqrt{\det g}$ ,  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ ; observemos que

$$\nu(A \setminus K) \leq \sum_{i=1}^m \nu(A_i \setminus K_i) \leq \sum_{i=1}^m C_i \varepsilon_i. \quad (1.38)$$

Como cada  $\varepsilon_i$  pode ser tomado arbitrariamente pequeno, o lado direito da expressão acima pode ser tomado arbitrariamente pequeno, o que prova (1.21) no caso em que  $A$  é relativamente compacto. Agora, se  $A$  é um subconjunto mensurável qualquer de  $M$ , então tomemos uma exaustão por compactos  $\{\Omega_k\}$  de  $M$  e apliquemos o argumento anterior para  $A_k = A \cap \Omega_k$ . Seja  $K_k$  um subconjunto compacto de  $A_k$  tal que  $\nu(A_k \setminus K_k) \leq \varepsilon_k$ , onde  $(\varepsilon_k)$  é uma sequência tal que  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Então temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(K_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \nu(A), \quad (1.39)$$

o que prova (1.21).

Finalmente, provemos que  $\nu$  satisfaz (1.22). Seja  $\{U_i\}$  uma família enumerável de cartas que cobrem  $M$  tal que cada  $\bar{U}_i$  está contida em uma carta  $V_i$ , e tal que cada  $\bar{V}_i$  está por sua vez contida em outra carta. Pela regularidade da medida de Lebesgue, o conjunto  $A_i = A \cap U_i$  pode ser aproximado por um conjunto aberto  $\Omega_i \supset A_i$  de modo que  $\Omega_i \subset V_i$  e  $\lambda_i(\Omega \setminus A_i) < \varepsilon_i$ , onde  $\lambda_i$  é a medida de Lebesgue em  $V_i$  e  $\varepsilon_i > 0$  é um número dado. Tomando  $C_i = \sup_{V_i} \sqrt{\det g}$  e

$\Omega = \bigcup \Omega_i$ , obtemos como anteriormente

$$\nu(\Omega \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varepsilon_i. \quad (1.40)$$

Como o lado direito pode ser tomado arbitrariamente pequeno pela escolha dos  $\varepsilon_i$ , obtemos (1.22), o que encerra a demonstração do teorema.  $\square$

**Proposição 1.5.** *Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e*

$$\int_M f \varphi \, d\nu = 0, \quad (1.41)$$

para toda função  $\varphi \in C_0^\infty(M)$ , então  $f \equiv 0$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $f(x_0) \neq 0$  para algum  $x_0 \in M$ , digamos  $f(x_0) > 0$ . Então, pela continuidade,  $f$  é positiva em uma vizinhança  $\Omega$  de  $x_0$ . Seja  $\varphi$  uma *bump function* em  $M$  tal que  $\varphi \equiv 1$  em uma vizinhança de  $x_0$  e  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ . Como  $\nu(U) > 0$ , segue que

$$\int_M f \varphi \, d\nu = \int_\Omega f \varphi \, d\nu \geq \int_U f \, d\nu > 0, \quad (1.42)$$

o que contradiz a hipótese.  $\square$

# Capítulo 2

## Conexões

Neste capítulo, introduziremos o conceito de conexão em uma variedade suave, que pode ser entendida como uma derivada de campos vetoriais e é independente de coordenadas.

Começaremos definindo o que é uma *conexão* (ou *derivada covariante*) em uma variedade suave  $M$  (não necessariamente munida de uma métrica riemanniana) associada a um fibrado vetorial  $E$  de  $M$ . Depois disso, focaremos nosso estudo no caso que nos interessa: o caso em o fibrado  $E$  é simplesmente o fibrado tangente  $TM$ . Neste caso, a conexão será chamada de *conexão linear* — que é a derivada de um campo vetorial na direção de outro. Veremos que cada conexão linear em  $M$  é definida pelos *símbolos de Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$ . Nesse caso a conexão linear não é única, como veremos na Proposição 2.6.

Feito isso, restringiremos as conexões lineares à campos vetoriais sobre curvas suaves, o que nos permitirá definir a *aceleração* de uma curva em  $M$  e definir curvas especiais, as *geodésicas*, que são curvas onde a aceleração é zero. Tais curvas generalizam o conceito de retas (em um espaço euclidiano, uma curva é uma reta se, e somente se, sua aceleração é zero). Nesse sentido, temos também que as geodésicas são as curvas que minimizam — para pontos próximos — a distância.

### 2.1 Definição de conexão

Lembremos que um **fibrado vetorial (de dimensão  $k$ )** sobre  $M$  é uma variedade suave  $E$  juntamente com uma função suave e sobrejetora  $\pi : E \rightarrow M$  satisfazendo: cada fibra  $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$  é um espaço vetorial real de dimensão  $k$ , e  $E$  é localmente trivilizável, i.e., cada ponto  $p \in M$  tem uma vizinhança  $U$  em  $M$  de modo que, nesta vizinhança,  $E$  é difeomorfo a  $U \times \mathbb{R}^k$ . Uma **seção do fibrado**  $E$  é uma função suave  $\varphi : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \varphi = \text{id}_M$ , ou seja,  $\varphi$  leva cada ponto  $p$  na sua fibra  $E_p$ . Denotemos por  $\mathcal{E}(M)$  o conjunto de todas as seções de  $E$ . Uma **conexão** é uma função

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M),$$

cujos valor em  $(X, Y)$  será denotado por  $\nabla_X Y$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

C1.  $\nabla_X Y$  é linear sobre  $C^\infty(M)$  em  $X$ , i.e.,

$$\nabla_{fX_1+X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

C2.  $\nabla_X Y$  é linear sobre  $\mathbb{R}$  em  $Y$ :

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

C3. Para qualquer  $f \in C^\infty(M)$ , vale a regra do produto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Chamamos  $\nabla_X Y$  de **derivada covariante de  $Y$  na direção de  $X$** .

**Proposição 2.1.** *Seja  $\nabla$  uma conexão em um fibrado  $\pi : E \rightarrow M$ . Se  $X \in \mathcal{T}(M)$ ,  $Y \in \mathcal{E}(M)$  e  $p \in M$ , então  $\nabla_X Y|_p$  depende apenas dos valores de  $X$  e  $Y$  em uma vizinhança de  $p$ . Ou seja, se  $X = \tilde{X}$  e  $Y = \tilde{Y}$  em alguma vizinhança de  $p$ , então  $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$ .*

*Demonstração.* Consideremos primeiramente  $Y$ . Trocando  $Y$  por  $Y - \tilde{Y}$ , temos que é suficiente provar que se  $Y$  zera em uma vizinhança  $U$  de  $p$ , então  $\nabla_X Y|_p = 0$ .

Suponhamos então que  $Y$  zera em uma vizinhança  $U$  de  $p$ . Tomemos uma *bump function*  $\varphi \in C^\infty(M)$  com suporte em  $U$  e tal que  $\varphi(p) = 1$ . Temos então que  $\varphi Y \equiv 0$  em  $M$ . Logo,

$$\nabla_X(\varphi Y) = \nabla_X(0 \cdot \varphi Y) = 0\nabla_X(\varphi Y) = 0. \quad (2.1)$$

Assim, dado  $X \in \mathcal{T}(M)$ , a regra do produto nos dá

$$0 = \nabla_X(\varphi Y) = (X\varphi)Y + \varphi(\nabla_X Y). \quad (2.2)$$

Mas  $(X\varphi)Y \equiv 0$  em  $M$ , pois

$$[(X\varphi)Y]_p = (X\varphi)(p)Y|_p = X_p(\varphi)Y|_p = \begin{cases} 0 \text{ em } U \text{ (pois } Y \equiv 0 \text{ em } U) \\ 0 \text{ fora de } U \text{ (pois } \text{supp } \varphi \subset U) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Agora mostraremos o mesmo para  $X$ . Suponhamos que  $X$  zera em uma vizinhança  $U$  de  $p$ . Seja  $\varphi$  uma *bump function* com suporte em  $U$  e tal que  $\varphi(p) = 1$ . Assim,  $\varphi X \equiv 0$  em  $M$  e então

$$\nabla_{\varphi X} Y = \nabla_{0 \cdot \varphi X} Y = 0 \cdot \nabla_{\varphi X} Y = 0. \quad (2.4)$$

Portanto,

$$0 = \nabla_{\varphi X} Y = \varphi \nabla_X Y \implies \varphi(p) \nabla_X Y|_p = 0 \implies \nabla_X Y|_p = 0, \quad (2.5)$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

**Proposição 2.2.** *Com a notação da Proposição 2.1,  $\nabla_X Y|_p$  depende apenas dos valores de  $Y$  em uma vizinhança de  $p$  e do valor de  $X$  em  $p$ .*

*Demonstração.* Pela linearidade, é suficiente provar que  $\nabla_X Y|_p = 0$  se  $X_p = 0$ . Tomemos uma carta  $(U, (x^i))$  em torno de  $p$  e escrevemos  $X = X^i \partial_i$  em  $U$  com  $X^i(p) = 0$ . Então, para qualquer  $Y \in \mathcal{E}(M)$ , temos

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{X^i \partial_i} Y|_p = X^i(p) \nabla_{\partial_i} Y|_p = 0,$$

sendo que a primeira igualdade acima é válida pois, pela Proposição 2.1, o valor de  $\nabla_X Y|_p$  só depende do seu valor em  $U$ .  $\square$

Por conta da Proposição 2.2, podemos definir a seguinte notação:  $\nabla_{X_p} Y := \nabla_X Y|_p$ . Podemos pensar  $\nabla_X Y|_p$  como sendo a derivada direcional de  $Y$  em  $p$  na direção de  $X_p$ .

**Proposição 2.3.** *O vetor  $\nabla_{X_p} Y$  depende apenas do valor de  $Y$  sobre qualquer curva tangente a  $X_p$ . Ou seja, dada uma curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  satisfazendo  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ , se  $Y$  e  $\tilde{Y}$  são campos vetoriais que coincidem sobre  $\gamma$ , então  $\nabla_{X_p} Y = \nabla_{X_p} \tilde{Y}$ .*

## 2.2 Conexões lineares

Nesta seção consideraremos o caso particular em que as seções então definidas sobre o fibrado tangente  $TM$ . Uma **conexão linear** é uma conexão em  $TM$ , i.e., uma função

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

satisfazendo as propriedades C1-C3.

Seja  $(E_i)$  um referencial local para  $TM$  em um aberto  $U \subset M$ . Sendo assim, para quaisquer índices  $i$  e  $j$  podemos escrever

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k, \tag{2.6}$$

o que define  $n^3$  funções  $\Gamma_{ij}^k$  em  $U$ , chamadas **símbolos de Christoffel** de  $\nabla$  com respeito ao referencial dado. A proposição que segue nos mostra que a ação da conexão  $\nabla$  em  $U$  é completamente determinada pelo seus símbolos de Christoffel.

**Proposição 2.4.** *Seja  $\nabla$  uma conexão linear e sejam  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  escritos com relação a um referencial local como  $X = X^i E_i$  e  $Y = Y^j E_j$ . Então,*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k. \tag{2.7}$$

*Demonstração.* Basta fazermos a conta, usando os axiomas C1 e C3:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) \\
&= (XY^j)E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\
&= (XY^j)E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\
&= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

e o resultado segue reindexando a soma.  $\square$

**Exemplo 2.5.** Em  $\mathbb{R}^n$ , definimos a **conexão euclidiana** por

$$\bar{\nabla}_X (Y^j \partial_j) := (XY^j) \partial_j. \tag{2.9}$$

Ou seja,  $\bar{\nabla}_X Y$  é o campo vetorial cujas componentes são as derivadas direcionais das componentes de  $Y$  na direção de  $X$ .

De fato,  $\bar{\nabla}$  é uma conexão linear, pois satisfaz os aximas C1, C2 e C3 que definem uma conexão:

C1. Para quaisquer  $X_1, X_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$  e qualquer  $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{fX_1 + X_2} (Y^j \partial_j) &= ((fX_1 + X_2)Y^j) \partial_j \\
&= ((fX_1)Y^j) \partial_j + (X_2 Y^j) \partial_j \\
&= f \bar{\nabla}_{X_1} (Y^j \partial_j) + \bar{\nabla}_{X_2} (Y^j \partial_j).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

C2. Para quaisquer campos  $Y_1 = Y_1^j \partial_j$  e  $Y_2 = Y_2^j \partial_j$  em  $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$  e qualquer  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X (aY_1^j \partial_j + Y_2^j \partial_j) &= \bar{\nabla}_X ((aY_1^j + Y_2^j) \partial_j) \\
&= (X(aY_1^j + Y_2^j)) \partial_j \\
&= a((XY_1^j) \partial_j) + (XY_2^j) \partial_j \\
&= a \bar{\nabla}_X (Y_1^j \partial_j) + \bar{\nabla}_X (Y_2^j \partial_j).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

C3. Para qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X (f(Y^j \partial_j)) &= \bar{\nabla}_X ((fY^j) \partial_j) \\
&= (X(fY^j)) \partial_j \\
&= ((fX)Y^j + (Y^j X)f) \partial_j \\
&= ((fX)Y^j) \partial_j + ((Y^j X)f) \partial_j \\
&= \bar{\nabla}_{fX} (Y^j \partial_j) + (Xf)Y^j \partial_j \\
&= f \bar{\nabla}_X (Y^j \partial_j) + (Xf)Y^j \partial_j.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Além disso, os símbolos de Christoffel nas coordenadas usuais são todos zero, visto que

$$\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j = (\partial_i(1)) \partial_j = 0, \quad (2.13)$$

onde  $1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  está denotando a função constante igual a 1.

**Proposição 2.6.** *Suponhamos que  $M$  é uma variedade que pode ser parametrizada por uma única carta. Então existe uma correspondência biunívoca entre as conexões lineares em  $M$  e as escolhas de  $n^3$  funções suaves  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  em  $M$ , pela regra*

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k. \quad (2.14)$$

*Demonstração.* Observemos que (2.14) é a equação (2.7) no caso em que  $E_i = \partial_i$  é o referencial coordenada. Então, para cada conexão, as funções  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  definidas em (2.6) satisfazem (2.14).

Por outro lado, dadas  $n^3$  funções suaves  $\{\Gamma_{ij}^k\}$ , definimos  $\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$  pela expressão (2.14). Notemos que se  $X$  e  $Y$  são suaves, então o lado direito de (2.14) é suave e assim  $\nabla_X Y \in \mathcal{T}(M)$ . Além disso, é fácil verificar que tal função é linear sobre  $C^\infty(M)$  em  $X$  e linear sobre  $\mathbb{R}$  em  $Y$ . Resta mostrar que satisfaz a regra do produto C3:

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY) &= ((X^i \partial_i) f Y^k + X^i f Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k \\ &= (f((X^i \partial_i) Y^k) + Y^k((X^i \partial_i) f) + f X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k \\ &= f((X^i \partial_i) Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k + ((Y^k(X^i \partial_i) f) \partial_k \\ &= f \nabla_X Y + (Xf)Y. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto,  $\nabla$  é uma conexão. □

**Proposição 2.7.** *Toda variedade riemanniana admite uma conexão linear.*

*Demonstração.* Tomemos uma cobertura  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  por domínios de cartas. Pela Proposição 2.6, temos que existe uma conexão  $\nabla^\alpha$  em cada  $U_\alpha$ .

Tomemos uma partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}$  subordinada a  $\{U_\alpha\}$ . Definimos

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha \nabla_X^\alpha Y. \quad (2.16)$$

Claramente, tal função é suave, linear sobre  $\mathbb{R}$  em  $Y$  e linear sobre  $C^\infty(M)$  em  $X$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY) &= \sum_{\alpha} \varphi_\alpha \nabla_X^\alpha(fY) \\ &= \sum_{\alpha} \varphi_\alpha ((Xf)Y + f \nabla_X^\alpha Y) \\ &= (Xf)Y + f \sum_{\alpha} \varphi_\alpha \nabla_X^\alpha Y \\ &= (Xf)Y + f \nabla_X Y, \end{aligned} \quad (2.17)$$

e portanto satisfaz a regra do produto C3.  $\square$

### 2.3 Derivadas covariantes de campos tensoriais

Na seção anterior, vimos que através da conexão linear, podemos calcular a derivada covariante de campos vetoriais. Veremos agora que cada conexão linear em  $M$  induz conexões em todos os fibrados tensoriais sobre  $M$ , e podemos então calcular a derivada covariante de quaisquer campos tensoriais.

**Teorema 2.8.** *Seja  $\nabla$  uma conexão linear em  $M$ . Existe uma única conexão linear em cada fibrado tensorial  $T_l^k M$ , também denotada por  $\nabla$ , satisfazendo as seguintes condições:*

(a) *Em  $TM$ ,  $\nabla$  coincide com a conexão já definida.*

(b) *Em  $T^0M$ ,  $\nabla$  é a derivada usual de funções:*

$$\nabla_X f = Xf. \quad (2.18)$$

(c)  *$\nabla$  satisfaz a seguinte regra do produto:*

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G). \quad (2.19)$$

(d) *Se “tr” denota o traço em qualquer par de índices, então*

$$\nabla_X(\text{tr}Y) = \text{tr}(\nabla_X Y). \quad (2.20)$$

Além disso, esta conexão satisfaz as seguintes propriedades:

(i) *Dado um campo covetorial  $\omega$  e um campo vetorial  $Y$ , temos*

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle. \quad (2.21)$$

(ii) *Dados  $F \in \mathcal{T}_\ell^k(M)$ , campos vetoriais  $Y_i$  e 1-formas  $\omega^j$ , temos*

$$\begin{aligned} (\nabla_X F) \left( \omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k \right) &= X \left( F \left( \omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k \right) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\ell} F \left( \omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k F \left( \omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

**Proposição 2.9.** *Se  $\nabla$  é uma conexão linear em  $M$  e  $F \in \mathcal{J}_\ell^k(M)$ , a função*

$$\nabla F : \mathcal{J}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{J}^1(M) \times \mathcal{J}(M) \times \cdots \times \mathcal{J}(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad (2.23)$$

dada por

$$\nabla F \left( \omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k \right) = \nabla_X F \left( \omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k \right), \quad (2.24)$$

define um campo  $\binom{k+1}{\ell}$ -tensorial.

O campo tensorial  $\nabla F$  é chamado de **derivada covariante total** de  $F$ . Notemos que se  $u \in C^\infty(M)$ , então  $\nabla u \in \mathcal{J}^1(M)$  é a 1-forma  $du$ , pois

$$\langle \nabla u, X \rangle = \nabla_X u = Xu = \langle du, X \rangle. \quad (2.25)$$

O 2-tensor  $\nabla^2 u = \nabla(\nabla u)$  é chamado de **hessiana covariante** de  $u$ , que denotaremos por  $\text{Hess } u$ .

**Proposição 2.10.** *Se  $u \in C^\infty(M)$  e  $X, Y \in \mathcal{J}(M)$ , então*

$$\text{Hess } u(X, Y) = Y(Xu) - (\nabla_Y X)u. \quad (2.26)$$

## 2.4 Campos vetoriais e derivadas covariantes sobre curvas

Uma **curva** em uma variedade  $M$  é uma função suave  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , onde  $I$  é um intervalo. Se  $I$  é fechado e limitado, dizemos que  $\gamma$  é um **segmento de curva**.

Dada uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , dado um instante  $t_0 \in I$ , a **velocidade** de  $\gamma$  no instante  $t_0$  é o vetor

$$\dot{\gamma}(t_0) = \gamma_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) \quad (2.27)$$

Como a velocidade de  $\gamma$  no instante  $t \in I$  é um vetor tangente a  $\gamma(t)$ , podemos considerar sua ação sobre funções  $f \in C^\infty(M)$ , que é dada por

$$\dot{\gamma}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t). \quad (2.28)$$

Dadas coordenadas em  $M$ , se escrevermos  $\gamma$  localmente como  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ , então

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t)\partial_i, \quad (2.29)$$

sendo que, como de costume, o ponto sempre denota a derivada usual com respeito a variável  $t$ .

**Definição.** Um **campo vetorial sobre uma curva**  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma função suave  $V : I \rightarrow TM$  tal que  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$  para todo  $t \in I$ . O conjunto de todos os campos suaves sobre uma curva  $\gamma$  será denotado por  $\mathcal{J}(\gamma)$ .

Temos como primeiro exemplo de campo vetorial sobre uma curva, o campo velocidade: dada uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , definimos  $V : I \rightarrow TM$  por

$$V(t) = \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M. \quad (2.30)$$

Como  $V(t) = \dot{\gamma}^i(t)\partial_i$ , temos que  $V$  é suave e, portanto,  $V$  é um campo sobre a curva  $\gamma$ .

**Exemplo 2.11.** Seja  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$  e seja  $N(t) = J\dot{\gamma}(t)$ , onde  $J$  é a rotação de  $\pi/2$  no sentido anti-horário. Em componentes,  $N(t) = (-\dot{\gamma}^2(t), \dot{\gamma}^1(t))$ ; então  $N$  é suave e é um campo sobre  $\gamma$ .

**Exemplo 2.12.** Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva e seja  $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$  um campo vetorial em  $M$ . Para cada  $t \in I$ , definimos  $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$ . Claramente,  $V$  é um campo sobre  $\gamma$ .

**Definição.** Dizemos que um campo  $V$  sobre uma curva é **estendível** se existe um campo vetorial  $\tilde{V}$  definido numa vizinhança da imagem de  $\gamma$  tal que  $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$  para todo  $t \in I$ .

Notemos que nem todo campo sobre curvas é estendível. Por exemplo, se  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  mas  $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$ , então o campo  $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$  não é estendível. A proposição que segue estende o conceito de derivada covariante para campos sobre curvas.

**Proposição 2.13.** *Seja  $\nabla$  é uma conexão linear em  $M$ . Para cada curva  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $\nabla$  determina um único operador*

$$D_t : \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

*DC1. Linearidade sobre  $\mathbb{R}$ :*

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

*DC2. Regra do produto:*

$$D_t(fV) = fV + fD_tV, \quad \forall f \in C^\infty(I). \quad (2.32)$$

*DC3. Se  $V$  é estendível, então para qualquer extensão  $\tilde{V}$  de  $V$ ,*

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}. \quad (2.33)$$

Para cada  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ ,  $D_tV$  é chamado de **derivada covariante de  $V$  sobre  $\gamma$** .

*Demonstração.* (Unicidade) Suponhamos que  $D_t$  é um tal operador e seja  $t_0 \in I$ . Usando argumentos anteriores (vide Demonstração da Proposição 2.1), temos que  $D_tV$  em  $t_0$  depende apenas dos valores de  $V$  em qualquer intervalo  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  contendo  $t_0$ . (Se  $I$  tem um extremo, estendemos  $\gamma$  a um intervalo aberto um pouco maior, provamos a proposição para este caso, e restringimos de volta a  $I$ ).

Tomamos coordenadas em uma vizinhança de  $\gamma(t_0)$  e escrevemos localmente

$$V(t) = V^j(t)\partial_j.$$

Então, pelas propriedades que definem  $D_t$  (e usando que o campo  $\partial_j$  é estendível), temos

$$\begin{aligned} D_t V(t_0) &= \dot{V}^j(t_0)\partial_j + V^j\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}\partial_j \\ &= \left( \dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \partial_k. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Portanto, se tal operador existe, ele é único.

(Existência) Suponhamos que o conjunto  $\gamma(I)$  está contido em um única carta. Então podemos definir  $D_t V$  pela expressão (2.34); definido assim, este operador satisfaz DC1-DC3.

Para o caso geral, tomemos um cobertura de  $\gamma(I)$  por cartas. Podemos então definir  $D_t V$  em cada carta pela expressão (2.34). Pela unicidade, temos que estas várias definições coincidem na interseção de quaisquer duas cartas.  $\square$

## 2.5 Geodésicas

Seja  $M$  uma variedade com uma conexão linear  $\nabla$  e seja  $\gamma$  uma curva em  $M$ . A **aceleração** de  $\gamma$  é o campo vetorial  $D_t\dot{\gamma}$  sobre  $\gamma$ . Uma curva  $\gamma$  é uma **geodésica** com respeito à  $\nabla$  se sua aceleração é zero, i.e.,  $D_t\dot{\gamma} \equiv 0$ .

**Teorema 2.14.** *Seja  $M$  uma variedade e seja  $\nabla$  uma conexão em  $M$ . Para cada  $p \in M$ , cada  $V \in T_p M$  e cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo  $t_0$  e uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  satisfazendo  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = V$ . Quaisquer duas geodésicas coincidem na interseção de seus domínios.*

Segue do Teorema 2.14 que para cada  $p \in M$  e cada  $V \in T_p M$ , existe uma única **geodésica maximal** (que não pode ser estendida a um intervalo maior)  $\gamma : I \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V$ , definida em algum intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . De fato, basta tomarmos  $I$  como sendo a união de todos os intervalos abertos onde temos uma tal geodésica definida e observarmos que todas elas coincidem na interseção dos seus domínios.

Tal geodésica maximal é chamada de **geodésica com ponto inicial  $p$  e velocidade inicial  $V$** , e é denotada por  $\gamma_V$ .

*Demonstração.* Tomemos uma carta  $(U, (x^i))$  contendo  $p$ . Da equação (2.34), uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica se, e somente se, suas componentes  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  satisfam a equação

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0 \quad (2.35)$$

Escrevendo  $v^i = \dot{x}^i$ , transformamos a equação anterior no sistema de primeira ordem com o dobro

de variáveis

$$\begin{aligned}\dot{x}^k(t) &= v^k(t) \\ \dot{v}^k(t) &= -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t))\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDOs de primeira ordem, para qualquer  $(p, V) \in U \times \mathbb{R}^n$ , existe  $\varepsilon > 0$  e uma única solução  $\eta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  para esse sistema, satisfazendo a condição inicial  $\eta(t_0) = (p, V)$ . Escrevendo as componentes de  $\eta$  como  $\eta(t) = (x^i(t), v^i(t))$ , temos que a curva  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  em  $U$  satisfaz a existência.

Provemos agora a unicidade. Suponhamos que  $\gamma, \sigma : I \rightarrow M$  são geodésicas definidas em um intervalo aberto com  $\gamma(t_0) = \eta(t_0)$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{\sigma}(t_0)$ . Pela parte de unicidade do teorema de EDO mencionado, elas coincidem numa vizinhança de  $t_0$ . Seja  $\beta$  o supremo dos números  $b$  tais que  $\gamma$  e  $\sigma$  coincidem em  $[t_0, b]$ . Se  $\beta \in I$ , então  $\gamma(\beta) = \sigma(\beta)$  e  $\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\sigma}(\beta)$  e aplicando a unicidade local em uma vizinhança de  $\beta$ , concluímos que  $\gamma$  e  $\sigma$  coincidem num intervalo um pouco maior, o que é uma contradição. Repetindo este argumento a esquerda de  $t_0$ , concluímos a demonstração.  $\square$

## 2.6 Transporte paralelo

Seja  $M$  uma variedade com uma conexão  $\nabla$ . Um campo vetorial  $V$  sobre uma curva  $\gamma$  é **paralelo sobre**  $\gamma$  com respeito a  $\nabla$  se  $D_t V \equiv 0$ . Tomemos, e.g., como curva uma geodésica. Então, o campo vetorial velocidade é paralelo sobre esta curva.

De modo geral, dizemos que campo vetorial  $V$  sobre  $M$  é **paralelo** se este é paralelo sobre toda curva em  $M$ . Observe que, pela Proposição 2.2, temos que um campo vetorial  $V \in \mathcal{T}(M)$  é paralelo se, e somente se,  $\nabla_X V \equiv 0$  para qualquer campo vetorial  $X$  em  $M$ .

**Teorema 2.15** (Transporte paralelo). *Dada uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $t_0 \in I$  e  $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ , existe um único campo vetorial paralelo  $V$  sobre  $\gamma$  tal que  $V(t_0) = V_0$ .*

O campo vetorial obtido é chamado de **transporte paralelo** de  $V_0$  sobre  $\gamma$ . Para provarmos a existência e unicidade de traslação paralela, precisaremos do seguinte resultado sobre EDOs:

**Teorema 2.16.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e, para  $1 \leq j, k \leq n$ , sejam  $A_j^k : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves. Então, o PVI*

$$\begin{cases} \dot{V}^k(t) = A_j^k(t)V^j(t) \\ V^k(t_0) = B^k \end{cases} \quad (2.36)$$

*tem uma única solução em todo  $I$  para todo  $t_0 \in I$  e todo vetor inicial  $(B^1, \dots, B^n)$ .*

*Demonstração do teorema do transporte paralelo.* Suponhamos que a imagem  $\gamma(I)$  está contida em uma única carta. Então, usando a equação (2.34), temos que  $V$  é um campo paralelo sobre  $\gamma$  se, e somente se,

$$\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.37)$$

Temos aqui um sistema linear de EDOs para  $(V^1(t), \dots, V^n(t))$ . Assim, o Teorema 2.16 nos garante a existência e unicidade de uma solução definida em todo  $I$  para qualquer condição inicial  $V(t_0) = V_0$ .

Agora, suponhamos que o conjunto  $\gamma(I)$  não é coberto por uma única carta. Seja  $\beta$  o supremo dos  $b > t_0$  tais que existe um único transporte paralelo em  $[t_0, b]$ . Claramente,  $\beta > t_0$  pois para  $b$  suficientemente próximo de  $t_0$ ,  $\gamma[t_0, b]$  está contido em uma única carta e o argumento acima se aplica.

Deste modo, um único transporte paralelo  $V$  existe em  $[t_0, \beta]$ . Se  $\beta \in I$ , tomamos coordenadas em um aberto contendo  $\gamma(\beta - \delta, \beta + \delta)$  para algum  $\delta > 0$  (assumindo que  $\gamma$  pode ser estendida a um intervalo aberto se necessário). Logo, existe um único campo vetorial paralelo  $\tilde{V}$  em  $(\beta - \delta, \beta + \delta)$  satisfazendo a condição inicial  $\tilde{V}(\beta - \delta/2) = V(\beta - \delta/2)$ . Pela unicidade,  $V = \tilde{V}$  onde seus domínios coincidem, portanto  $\tilde{V}$  é uma extensão de  $V$  por  $\beta$ , o que é uma contradição.  $\square$

Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma curva e  $t_0, t_1 \in I$ , o transporte paralelo define um operador

$$P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

por  $P_{t_0 t_1}V_0 = V(t_1)$ , onde  $V$  é o transporte paralelo de  $V_0$  sobre  $\gamma$ . Além disso, a função  $P_{t_0 t_1}$  é um isomorfismo linear entre  $T_{\gamma(t_0)}M$  e  $T_{\gamma(t_1)}M$ .

## Capítulo 3

# Geodésicas riemannianas e a aplicação exponencial

Vimos na seção anterior que, em geral, existem várias conexões lineares sobre uma variedade suave. Neste capítulo, veremos que se  $M$  é uma variedade riemanniana, então existe uma conexão especial em  $M$ , chamada de *conexão riemanniana* ou *conexão de Levi-Civita*, que está associada com a métrica de  $M$  e é única em certo sentido.

Como vimos anteriormente, associada a conexão riemanniana temos as geodésicas, nesse caso chamadas de *geodésicas riemannianas*. Usando a métrica riemanniana de  $M$ , podemos definir a *velocidade* de uma curva; concluiremos que as geodésicas riemannianas têm velocidade constante (como esperado).

As geodésicas riemannianas nos permitem definir a *aplicação exponencial*, que guarda informações sobre o “comportamento” geral das geodésicas e sobre a topologia de  $M$ . Por fim, definiremos coordenadas em  $M$  que preservam as geodésicas radiais, as *coordenadas normais*.

### 3.1 Conexões riemannianas

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma subvariedade mergulhada. Sabemos que todo campo vetorial sobre  $M$  pode ser estendido suavemente para um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos uma função

$$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

por

$$\nabla_X^\top Y := \pi^\top (\bar{\nabla}_X Y), \quad (3.1)$$

onde  $X$  e  $Y$  são estendidos arbitrariamente para  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\nabla}$  é a conexão euclidiana em  $\mathbb{R}^n$  e, para cada  $p \in M$ ,  $\pi^\top : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  é a projeção ortogonal.

**Proposição 3.1.** *O operador  $\nabla^\top$  está bem definido e é uma conexão em  $M$ .*

*Demonstração.* Como o valor de  $\bar{\nabla}_X Y$  num ponto  $p \in M$  depende apenas de  $X_p$ , temos que

$\nabla_X^\top Y$  não depende da escolha do campo vetorial que estende  $X$ . Por outro lado, temos que o valor de  $\bar{\nabla}_X Y$  em  $p$  depende apenas dos valores de  $Y$  em uma curva cujo ponto inicial é  $p$  e o vetor tangente inicial é  $X_p$ .

Tomando uma curva inteiramente contido em  $M$ , temos que  $\nabla_X^\top Y$  depende apenas do campo vetorial original  $Y \in \mathcal{T}(M)$ . Logo,  $\nabla^\top$  está bem definido. Além disso, escrevendo em termos de um referencial ortonormal adaptado, temos que  $\nabla^\top$  é suave.

Diretamente de sua definição, temos que  $\nabla_X^\top Y$  é linear sobre  $C^\infty(M)$  em  $X$  e linear sobre  $\mathbb{R}$  em  $Y$ ; resta mosrarmos que ele satisfaz a regra do produto.

Seja  $f \in C^\infty(M)$  e consideremos um estensão suave (também denotada por  $f$ ) arbitrária a  $\mathbb{R}^n$ . Calculando sobre  $M$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^\top(fY) &= \pi^\top(\bar{\nabla}_X(fY)) \\ &= (Xf)\pi^\top Y + f\pi^\top(\bar{\nabla}_X Y) \\ &= (Xf)Y + f\nabla_X^\top Y, \end{aligned} \quad (3.2)$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

Seja  $g$  uma métrica riemanniana numa variedade  $M$ . Dizemos que uma conexão linear  $\nabla$  em  $M$  é **compatível** com  $g$  se satisfaz a regra do produto

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M). \quad (3.3)$$

Note que a conexão eclidiana é riemanniana, i.e., é compatível com métrica euclidiana. De fato, temos

$$\bar{\nabla}_X \langle Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle = X \left( \sum_i Y^i Z^i \right) = \sum_i (Y^i X Z^i + Z^i X Y^i) \quad (3.4)$$

e usando que a métrica é euclidiana, ou seja,  $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle &= \langle (XY^j)\partial_j, Z^i\partial_i \rangle + \langle Y^j\partial_j, (XZ^i)\partial_i \rangle \\ &= X \left( \sum_i Y^i Z^i \right) = \sum_i (Y^i X Z^i + Z^i X Y^i) \\ &= \bar{\nabla}_X \langle Y, Z \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Proposição 3.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a)  $\nabla$  é compatível com  $g$ .

(b) Se  $V$  e  $W$  são campos vetoriais sobre uma curva  $p$ ,

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle. \quad (3.6)$$

A condição de compatibilidade da métrica não é suficiente para nos garantir a unicidade da conexão, i.e., em geral não existe apenas uma conexão em  $M$  que é compatível com a métrica. Impondo mais uma propriedade à conexão, temos a unicidade desejada: dizemos que a conexão  $\nabla$  é **simétrica** se ela satisfaz a equação

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (3.7)$$

Temos, e.g., que a conexão tangente em uma variedade mergulhada  $M \subset \mathbb{R}^n$ , definida anteriormente, é simétrica.

O seguinte teorema nos diz que se exigirmos a compatibilidade com a métrica e a simetria, a conexão obtida é única.

**Teorema 3.3.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana. Existe uma única conexão  $\nabla$  em  $M$  que é compatível com  $g$  e é simétrica.*

Tal conexão é chamada de **conexão riemanniana** ou **conexão de Levi-Civita** de  $g$ . Geodésicas com respeito a conexão riemanniana são chamadas de **geodésicas riemannianas**.

**Definição.** Se  $\gamma$  é uma curva em uma variedade riemanniana, a **velocidade** de  $\gamma$  no instante  $t$  é o comprimento do vetor velocidade  $|\dot{\gamma}(t)|$ . Dizemos que  $\gamma$  é uma curva de **comprimento constante** se  $|\dot{\gamma}(t)|$  não depende de  $t$ .

**Proposição 3.4.** *Geodésicas riemannianas tem velocidade constante.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma geodésica riemanniana. Como o campo  $\dot{\gamma}$  é paralelo sobre  $\gamma$ , seu comprimento  $|\dot{\gamma}| = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}$  é constante pela Proposição 3.2.  $\square$

## 3.2 A aplicação exponencial

Começamos definindo um subconjunto  $\mathcal{E} \subset TM$ , chamado **domínio para a aplicação exponencial**, por

$$\mathcal{E} := \{V \in TM : \gamma_V \text{ está definido num intervalo contendo } [0, 1]\}. \quad (3.8)$$

A **aplicação exponencial**  $\exp : \mathcal{E} \rightarrow M$  é definida por

$$\exp(V) := \gamma_V(1). \quad (3.9)$$

Para cada  $p \in M$ , a **aplicação exponencial restrita** é a restrição de  $\exp$  ao conjunto  $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_p M$ .

**Proposição 3.5.** *Para qualquer  $V \in TM$  e quaisquer  $c, t \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct), \quad (3.10)$$

sempre que ambos os lados estão definidos.

*Demonstração.* Notemos primeiramente que é suficiente mostrar que  $\gamma_{cV}(t)$  existe, pois o lado direito pode ser obtido trocando  $V$  por  $cV$ ,  $t$  por  $ct$  e  $c$  por  $1/c$ .

Suponhamos que o domínio de  $\gamma_V$  é um intervalo aberto  $\mathbb{R}$ . Por simplicidade, escrevemos  $\gamma = \gamma_V$ , e definimos uma curva  $\tilde{\gamma}$  por  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(ct)$ , definida em  $c^{-1}I = \{t : ct \in I\}$ . Mostraremos que  $\tilde{\gamma}$  é uma geodésica por  $p$  com velocidade  $cV$ ; logo pela unicidade  $\tilde{\gamma} = \gamma_{cV}$ .

Primeiramente,  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = p$ . Escrevendo localmente  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ , pela regra de cadeia temos

$$\dot{\tilde{\gamma}}^i(t) = \frac{d}{dt}\gamma^i(ct) = c\dot{\gamma}^i(ct). \quad (3.11)$$

Em particular, segue que  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = c\dot{\gamma}(0) = cV$ . Sejam  $D_t$  e  $\tilde{D}_t$  os operadores derivada covariante sobre  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$ , respectivamente. Usando a regra da cadeia novamente, temos

$$\begin{aligned} \tilde{D}_t \dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \left( \frac{d}{dt} \dot{\tilde{\gamma}}^k + \Gamma_{ij}^k(\tilde{\gamma}(t)) \dot{\tilde{\gamma}}^i(t) \dot{\tilde{\gamma}}^j(t) \right) \partial_k \\ &= \left( c^2 \dot{\gamma}^k(ct) + c^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma(ct)) \dot{\gamma}^i(ct) \dot{\gamma}^j(ct) \right) \partial_k \\ &= c^2 D_t \dot{\gamma}(ct) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Então  $\tilde{\gamma}$  é uma geodésica e  $\tilde{\gamma} = \gamma_{cV}$ . □

**Proposição 3.6.** *São válidas as seguintes afirmações:*

(a)  $\mathcal{E}$  é um subconjunto aberto de  $TM$  contendo a seção nula e cada conjunto  $\mathcal{E}_p$  é estrelado com respeito a  $0$ .

(b) Para cada  $V \in TM$ , a geodésica  $\gamma_V$  é dada por

$$\gamma_V(t) = \exp(tV), \quad (3.13)$$

para todo  $t$  tal que o lado direito está bem definido.

(c) A aplicação exponencial é suave.

*Demonstração.* Pela Proposição 3.5 (tomando  $t = 1$ ), temos que

$$\exp(cV) = \gamma_{cV}(1) = \gamma_V(c), \quad (3.14)$$

quando ambos os lados estão bem definidos; com isso temos (b). Além disso, se  $V \in \mathcal{E}_p$ , temos que  $\gamma_V$  está bem definido pelo menos em  $[0, 1]$ . Então, para  $0 \leq t \leq 1$ , a Proposição 3.5 nos diz que o valor

$$\exp(tV) = \gamma_{tV}(1) = \gamma_V(t) \quad (3.15)$$

está definido. Logo  $\mathcal{E}_p$  é estrelado.

Resta mostrar que  $\mathcal{E}$  é aberto e  $\exp$  é suave.

Sejam  $(x^i)$  coordenadas locais em um aberto  $\mathcal{U} \subset M$ , e sejam  $(x^i, v^i)$  as coordenadas usuais em  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM$ . Seja  $G$  o campo vetorial em  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  dado por

$$G_{(x,v)} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - v^i v^j \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial v^k}. \quad (3.16)$$

As curvas integrais de  $G$  satisfazem o sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x}^k(t) &= v^k(t) \\ \dot{v}^k(t) &= -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Este é exatamente o sistema de primeira ordem equivalente ao da equação geodésica sob a substituição  $v^k = \dot{x}^k$ . Assim, as curvas integrais de  $G$  em  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  são levadas em geodésicas pela projeção  $\pi : TM \rightarrow M$  ( $\pi(x(t), v(t)) = x(t)$ ). Reciprocamente, qualquer geodésica  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  se levanta a uma curva integral em  $G$  se escolhermos  $v^i(t) = \dot{x}^i(t)$ .

**Afirmção 3.7.** *O campo  $G$  se estende a um campo vetorial global (i.e., definido em  $M$ ), chamado **campo vetorial geodésico**.*

**Afirmção 3.8.** *Dada  $f \in C^\infty(TM)$ ,  $G$  age em  $f$  por*

$$Gf(p, V) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma_V(t), \dot{\gamma}_V(t)). \quad (3.18)$$

Visto que a expressão (3.18) não depende de coordenadas, temos que as várias definições de  $G$  dadas por (3.16) coincidem nos diferentes sistemas de coordenadas. Logo, a segunda afirmação implica a primeira.

Demonstremos agora a Afirmção 2. Escrevemos as componentes da geodésica  $\gamma_V(t)$  como  $x^i(t)$  e as coordenadas do seu campo vetorial velocidade por  $v^i(t) = \dot{x}^i(t)$ . Usando a regra da cadeia e a equação geodésica (3.17), o lado direito de (3.18) fica

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial f}{\partial x^k}(x(t), v(t))\dot{x}^k(t) + \frac{\partial f}{\partial v^k}(x(t), v(t))\dot{v}^k(t) \right] \Big|_{t=0} &= \frac{\partial f}{\partial x^k}(p, V)V^k - \frac{\partial f}{\partial v^k}(p, V)V^i V^j \Gamma_{ij}^k(p) \\ &= Gf(p, V). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Um resultado sobre fluxo global de campos vetoriais nos dá que existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{O}$  de  $\{0\} \times TM$  em  $\mathbb{R} \times TM$  e uma função suave  $\theta : \mathcal{O} \rightarrow TM$  tal que cada curva  $\theta_{(p,V)}(t) = \theta(t, (p, V))$  é uma curva integral de  $G$  começando em  $(p, V)$ , definida num intervalo aberto contendo  $\mathcal{O}$ .

Agora, suponhamos que  $(p, V) \in \mathcal{E}$ . Logo,  $\gamma_V$  está definida pelo menos em  $[0, 1]$  e portanto o mesmo ocorre com a curva integral de  $G$  começando em  $(p, V) \in TM$ . Como  $(1, (p, V)) \in \mathcal{O}$ , existe uma vizinhança de  $(1, (p, V))$  em  $\mathbb{R} \times TM$  onde o fluxo em  $G$  está definido. Em particular, existe uma vizinhança de  $(p, V)$  onde o fluxo existe para  $t \in [0, 1]$  e, portanto, onde a aplicação  $\exp$  está bem definida. Logo,  $\mathcal{E}$  é aberto.

Finalmente, como as geodésicas são projeções de curvas integrais em  $G$ , segue que a aplicação exponencial pode ser escrita como

$$\exp(V) = \gamma_V(1) = \pi \circ \theta(1, (p, V)), \quad (3.20)$$

sempre que está definida. Portanto  $\exp$  é suave.  $\square$

### 3.3 Coordenadas normais

Para cada  $p \in M$ , a aplicação  $\exp_p$  leva um subconjunto aberto  $\mathcal{E}_p$  de  $T_pM$  em  $M$ .

**Proposição 3.9.** *Dado  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  da origem em  $T_pM$  e uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  em  $M$  tal que  $\exp_p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* Mostraremos que  $(\exp_p)_*$  é invertível em 0 e o resultado seguirá diretamente do Teorema da Função inversa. Usaremos a identificação  $T_0(T_pM) = T_pM$  e, sob esta identificação, mostraremos que  $(\exp_p)_* : T_0(T_pM) = T_pM \rightarrow T_pM$  é a identidade.

Para calcularmos  $(\exp_p)_*V$  para um vetor arbitrário  $V \in T_pM$ , devemos tomar uma curva  $\tau$  em  $T_pM$  com ponto inicial 0 e vetor tangente inicial  $V$ , e calcular o vetor tangente inicial da curva  $\exp_p \circ \tau$ . Tomemos  $\tau(t) = tV$ . Então,

$$(\exp_p)_*V = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp_p \circ \tau)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tV) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_V(t) = V, \quad (3.21)$$

e portanto  $(\exp_p)_*$  é invertível em 0.  $\square$

Toda vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  que é a imagem difeomorfa sob  $\exp_p$  de um aberto estrelado contendo  $0 \in T_pM$ , como na proposição anterior, é chamada de **vizinhança normal** de  $p$ . Podemos então considerar a maior vizinhança normal de  $p$ , que será a imagem por  $\exp_p$  do maior aberto estrelado contendo  $0 \in T_pM$  onde  $\exp_p$  é um difeomorfismo; tal vizinhança normal é chamada de **vizinhança normal maximal** de  $p$ .

Se  $\varepsilon > 0$  é tal que  $\exp_p$  é um difeomorfismo na bola  $B_\varepsilon(0) \in T_pM$ , então o conjunto  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  é chamada de **bola geodésica** em  $M$ . Se  $\overline{B}_\varepsilon(0)$  está contido em um aberto  $\mathcal{V} \subset T_pM$  onde  $\exp_p$  é um difeomorfismo, então a imagem  $\exp_p(\overline{B}_\varepsilon(0))$  é chamada de **bola geodésica fechada** e a imagem  $\exp_p(\partial \overline{B}_\varepsilon(0))$  é chamada de **esfera geodésica**.

Dada uma base ortonormal  $\{E_i\}$  para  $T_pM$ , temos um isomorfismo  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$  dado por  $E(x^1, \dots, x^n) = x^i E_i$ . Se  $\mathcal{U}$  é uma vizinhança normal de  $p$ , podemos obter uma carta

$$\varphi := E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.22)$$

Qualquer carta dessa forma é chamada **sistema de coordenadas normais (riemannianas)** centradas em  $p$ .

**Observação.** Dado  $p \in M$ , existe uma correspondência biunívoca entre os sistemas de coordenadas normais e as bases ortonormais em  $p$ .

Dada um sistema de coordenadas normal em  $p$ , definimos a **função distância radial** por

$$r(x) := \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.23)$$

e o **campo vetorial radial unitário**  $\partial/\partial r$  por

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.24)$$

Note que

$$\begin{aligned} \partial_j \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{1/2} &= \frac{1}{2} \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{-1/2} \partial_j \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{-1/2} \sum_i 2x^i \partial_j x^i \\ &= \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{-1/2} x^j \end{aligned} \quad (3.25)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial r} r(x) = 1 \quad (3.26)$$

Observemos ainda que no espaço euclidiano,  $r(x)$  é a distância até a origem e  $\partial/\partial r$  é o campo vetorial unitário tangente as retas pela origem.

**Proposição 3.10.** *Seja  $(\mathcal{U}, (x^i))$  um sistema de coordenadas normais centrado em  $p$ .*

(a) *Dado  $V = V^i \partial_i \in T_p M$ , a geodésica  $\gamma_V$  com ponto inicial  $p$  e velocidade inicial  $V$  é representada nas coordenadas normais pelo segmento de reta radial*

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n) \quad (3.27)$$

*para os valores de  $t$  tais que  $\gamma_V(t) \in \mathcal{U}$ .*

(b) *As coordenadas normais de  $p$  são  $(0, \dots, 0)$ .*

(c) *As componentes da métrica em  $p$  são  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .*

(d) *Qualquer bola euclidiana  $\{x : r(x) < \varepsilon\}$  contida em  $\mathcal{U}$  é uma bola geodésica em  $M$ .*

(e) *Em qualquer ponto  $q \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$ ,  $\partial/\partial r$  é o vetor velocidade da geodésica com velocidade unitária ligando  $p$  e  $q$ , e portanto tem comprimento unitário com respeito a  $g$ .*

(f) *As derivadas parciais de  $g_{ij}$  e os símbolos de Christoffel zeram em  $p$ .*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [O'N83].

# Capítulo 4

## Geodésicas e distância

### 4.1 Comprimento de curvas em variedades riemannianas

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é um segmento de curva, definimos o **comprimento** de  $\gamma$  por

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt. \quad (4.1)$$

Em alguns casos, para enfatizar a dependência da métrica riemanniana escreve-se  $L_g$  no lugar de  $L$ .

Uma **reparametrização** de  $\gamma$  é um segmento de curva da forma  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , onde  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é um difeomorfismo suave. Diremos que  $\tilde{\gamma}$  é uma **reparametrização positiva (negativa)** de  $\gamma$  se preserva (inverte) orientação.

**Proposição 4.1.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva. Para qualquer reparametrização  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$ ,  $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ . Ou seja, o comprimento de uma curva não depende de sua parametrização.*

Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma curva suave tal que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma **curva regular**. Observemos que, como  $\dot{\gamma}(t)$  é o *pushforward*  $\gamma_*(d/dt)$ , uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma imersão de  $I$  em  $M$ . Como primeiro exemplo, lembremos que uma geodésica tem velocidade constante e não nula, portanto é uma curva regular.

Na sequência definiremos o comprimento de *curvas admissíveis* (curvas regulares por partes), o que nos permitirá definir uma distância em  $M$ . Uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é chamada de **curva admissível** se existe uma subdivisão  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  de  $[a, b]$  tal que  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  é uma curva regular para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . É conveniente assumirmos que a curva trivial  $\gamma : \{a\} \rightarrow M$ ,  $\gamma(a) = p$ , é uma curva regular.

Sendo contínua e regular por partes, a curva admissível  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é suave em cada intervalo  $(a_{i-1}, a_i)$  e os limites laterais

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(a_i^-) &:= \lim_{t \nearrow a_i} \dot{\gamma}(t); \\ \dot{\gamma}(a_i^+) &:= \lim_{t \searrow a_i} \dot{\gamma}(t), \end{aligned}$$

devem existir (e podem ser diferentes).

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva admissível e  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  é uma subdivisão de  $[a, b]$  como acima, definimos o comprimento de  $\gamma$  simplesmente como sendo a soma dos comprimentos de cada segmento de curva suave  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ , i.e.,

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^k L\left(\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}\right). \quad (4.2)$$

Uma reparametrização de uma curva admissível  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva admissível  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , onde  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é um homeomorfismo cuja restrição a cada intervalo  $[c_{i-1}, c_i]$  é um difeomorfismo suave, para alguma subdivisão finita  $c = c_0 < c_1 < \dots < c_k = d$  de  $[c, d]$ . Notemos que a Proposição 4.1 também é válida para curvas admissíveis, i.e., o comprimento de uma curva admissível independe de reparametrização.

Podemos ainda definir uma função  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada **função comprimento de arco** de  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , por

$$s(t) := L(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du. \quad (4.3)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que  $s$  é suave, sempre que  $\gamma$  é suave. Além disso,  $\dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$ .

**Proposição 4.2.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva admissível e seja  $\ell = L(\gamma)$ .*

- (a) *Existe uma única reparametrização positiva  $\tilde{\gamma} : [0, \ell] \rightarrow M$  de  $\gamma$  tal que  $\tilde{\gamma}$  é uma curva de velocidade unitária em cada intervalo onde é regular.*
- (b) *Se  $\tilde{\gamma}$  é uma curva com velocidade unitária definida num intervalo da forma  $[0, \ell]$ , então o comprimento de arco da curva  $\gamma$  é  $s(t) = t$ . Neste caso, dizemos que  $\gamma$  está **parametrizada pelo comprimento de arco** (p.p.c.a.).*

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva admissível e  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  é uma subdivisão de  $[a, b]$  como anteriormnete. Uma função contínua  $V : [a, b] \rightarrow TM$  tal que  $V_t \in T_{\gamma(t)}M$  para todo  $t$  é chamada de **campo vetorial suave por partes sobre  $\gamma$**  se existe uma subdivisão finita  $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_m = b$  (possivelmente mais fina) de  $[a, b]$ , tal que  $V$  é suave em cada intervalo  $[\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]$ .

**Observação.** Dado um vetor  $V_a \in T_{\gamma(a)}M$ , temos que  $V_a$  possui um único transporte paralelo suave por partes sobre  $\gamma$ . De fato, basta definirmos o transporte paralelo da  $V_a$  no primeiro segmento suave de  $\gamma$  até  $\gamma(a_1)$ , depois o transporte paralelo de  $V_{a_1}$  no segundo segmento suave até  $\gamma(a_2)$  e assim por diante. Tal transporte paralelo será suave sempre que  $\gamma$  é suave.

Suponhamos agora que  $M$  é uma variedade riemanniana conexa. Se  $p$  e  $q$  são quaisquer dois pontos em  $M$ , então existe pelo menos uma curva suave por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  ligando  $p$  e  $q$ . De fato, como toda variedade conexa é conexa por caminhos, existe um caminho contínuo  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  (não necessariamente suave) que liga  $p$  e  $q$ . Por compacidade, existe uma

subdivisão finita de  $[a, b]$  de modo que a imagem  $\sigma([a_{i-1}, a_i])$  está contida em uma única carta, para cada  $i$ . Podemos então substituir cada um desses segmentos por curvas suaves, obtendo uma curva admissível  $\gamma$  ligando  $p$  e  $q$ . Podemos então definir a **distância riemanniana**  $d(p, q)$  entre  $p$  e  $q$  por

$$d(p, q) = \inf \{L(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva admissível ligando } p \text{ e } q\}. \quad (4.4)$$

Está claro que  $d(p, q) \geq 0$  e  $d(p, p) = 0$ . Além disso, se  $r \in M$  é um terceiro ponto, então para qualquer  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher curvas admissíveis  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$  ligando  $p$  e  $q$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow M$  ligando  $q$  e  $r$  de modo que

$$L(\gamma_1) - d(p, q) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad L(\gamma_2) - d(q, r) < \varepsilon. \quad (4.5)$$

Se definirmos então  $\gamma : [a, c] \rightarrow M$  como sendo  $\gamma_1$  em  $[a, b]$  e  $\gamma_2$  em  $[b, c]$ , teremos que  $\gamma$  é uma curva admissível ligando  $p$  e  $r$ , satisfazendo

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d(p, q) + d(q, r) + 2\varepsilon. \quad (4.6)$$

Como essa desigualdade é válida para todo  $\varepsilon > 0$ , concluímos que

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r). \quad (4.7)$$

Logo, para provarmos que a função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que definimos é uma métrica em  $M$ , resta provarmos que  $d(p, q) > 0$  se  $p \neq q$ , o que será feito na demonstração do próximo teorema.

**Teorema 4.3.** *Se  $M$  é uma variedade riemanniana conexa, a função  $d$  definida acima é de fato uma distância em  $M$ . Além disso, a topologia induzida em  $M$  por  $d$  coincide com a topologia de variedade de  $M$ .*

## 4.2 Curvas minimizantes

Dizemos que uma curva admissível  $\gamma$  é **minimizante** se  $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$  para qualquer outra curva admissível  $\tilde{\gamma}$ . Ou seja,  $\gamma$  é minimizante se, e somente se,  $L(\gamma)$  é igual a distância riemanniana entre seus extremos. O objetivo desta seção é provar que toda curva minimizante é uma geodésica. Começamos introduzindo o conceito de *famílias admissíveis*.

Uma **família admissível** de curvas é uma função contínua  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  que é suave em cada retângulo da forma  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ , para alguma subdivisão  $a = a_0 < \dots < a_k = b$ , e tal que  $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$  é uma curva admissível para cada  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Um **campo vetorial** sobre uma família admissível  $\Gamma$  é uma função contínua  $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$  tal que  $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M$  para cada  $(s, t)$ , e tal que  $V|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]}$  é suave para alguma subdivisão (possivelmente mais fina)  $a = \tilde{a}_0 < \dots < \tilde{a}_m = b$ .

Dada uma família admissível  $\Gamma$ , temos duas famílias de curvas associadas a  $\Gamma$ : as curvas

$\Gamma_s : [a, b] \rightarrow M$  dadas por  $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ , que chamaremos de **curvas principais**, e as curvas  $\Gamma^{(t)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  definidas por  $\Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s, t)$ , que chamaremos de **curvas transversais**. Note que as curvas transversais são suaves, enquanto as curvas principais são, em geral, apenas suaves por partes. Se  $\Gamma$  é suave, os vetores velocidade destas duas famílias de curvas são exemplos de campos vetoriais sobre  $\Gamma$ , que denotaremos por

$$\partial_t \Gamma(s, t) := \frac{d}{dt} \Gamma_s(t) \quad \text{e} \quad \partial_s \Gamma(s, t) := \frac{d}{dt} \Gamma^{(t)}(s). \quad (4.8)$$

Na verdade, o campo  $\partial_s \Gamma$  é sempre contínuo em todo  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$ . De fato, seu valor no segmento  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{a_i\}$  depende apenas dos valores de  $\Gamma$  neste segmento, visto que as derivadas são tomadas apenas com relação a variável  $s$ . Por outro lado, este campo é contínuo (na verdade suave) em um dos sub-retângulos  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  e  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$ , e então os limites laterais devem ser iguais. Portanto,  $\partial_s \Gamma$  é sempre um campo vetorial suave sobre  $\Gamma$ . O mesmo não ocorre para  $\partial_t \Gamma$  que, em geral, não é contínuo em  $t = a_i$ .

Dado um campo vetorial  $V$  sobre  $\Gamma$ , podemos calcular a derivada covariante de  $V$  sobre as curvas principais (pelo menos nos pontos em que estas são suaves) ou sobre as curvas transversais. Denotaremos os campos vetoriais resultantes por  $D_t V$  e  $D_s V$ , respectivamente.

**Lema 4.4** (Lema de Simetria). *Seja  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  uma família admissível de curvas em uma variedade riemanniana  $M$ . Em cada retângulo  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  onde  $\Gamma$  é suave,*

$$D_s \partial_t \Gamma = D_t \partial_s \Gamma. \quad (4.9)$$

*Demonstração.* Como esta é uma questão local, devemos considerar coordenadas  $(x^i)$  em torno de um ponto qualquer  $\Gamma(s_0, t_0)$ . Escrevendo as componentes de  $\Gamma$  em coordenadas como  $\Gamma(s, t) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$ , temos

$$\partial_s \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t} \partial_k \quad \text{e} \quad \partial_t \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k. \quad (4.10)$$

Logo, usando (2.34), obtemos

$$D_s \partial_t \Gamma = \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k, \quad (4.11)$$

e

$$D_t \partial_s \Gamma = \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \Gamma_{ji}^k \right) \partial_k. \quad (4.12)$$

Trocando os índices  $i$  e  $j$  na segunda equação e usando as condições de simetria  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  (que segue da equação (3.7)), vemos que as expressões acima são iguais.  $\square$

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva admissível, definimos uma **variação** de  $\gamma$  como sendo uma família admissível  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\Gamma_0(t)$ , para todo  $t$ . Dizemos que  $\Gamma$  é uma **variação própria** ou uma **variação que mantém os extremos fixados** se  $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$  e

$\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ , para todo  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Se  $\Gamma$  é uma variação de  $\gamma$ , o **campo variacional** de  $\Gamma$  é o campo vetorial  $V(t) = \partial_s \Gamma(0, t)$  sobre  $\gamma$ . Um campo vetorial  $V$  sobre  $\gamma$  é **próprio** se  $V(a) = V(b) = 0$ . Note que o campo variacional de uma variação é própria é próprio.

**Proposição 4.5.** *Se  $\gamma$  é uma curva admissível e  $V$  é um campo vetorial sobre  $\gamma$ , então  $V$  é o campo variacional de alguma variação de  $\gamma$ . Se o campo  $V$  é próprio, então a variação pode ser tomada própria.*

**Proposição 4.6** (Primeira fórmula variacional). *Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva admissível de velocidade unitária,  $\Gamma$  uma variação própria de  $\gamma$  e  $V$  seu campo variacional. Então*

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle, \quad (4.13)$$

onde  $a = a_0 < \dots < a_k = b$  é uma subdivisão tal que  $\gamma$  é suave em cada intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$  e  $\Delta_i \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(a_i^+) - \dot{\gamma}(a_i^-)$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\partial_t \Gamma| dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle^{1/2} dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Então

$$\frac{d}{ds} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]}) = \frac{d}{ds} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle^{1/2} dt, \quad (4.15)$$

mas como em cada subintervalo  $[a_{i-1}, a_i]$  o integrando do lado direito é suave e o domínio de integração é compacto, podemos derivar sob o sinal da integral. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial s} \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle^{1/2} \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2} \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle^{-1/2} 2 \langle D_s \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|\partial_t \Gamma|} \langle D_t \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle dt, \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo que, na última linha, usamos o Lema 4.4. Calculando em  $s = 0$  e lembrando que  $\partial_s \Gamma(0, t) = V(t)$  e  $\partial_t \Gamma(0, t) = \dot{\gamma}$  (e como  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco,

$|\dot{\gamma}| = 1)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L \left( \Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]} \right) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, \dot{\gamma} \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left( \frac{d}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle - \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle \right) dt \\ &= \langle V(a_i), \dot{\gamma}(a_i^-) \rangle - \langle V(a_{i-1}), \dot{\gamma}(a_{i+1}^+) \rangle - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Somando sobre  $i$  e lembrando que  $V(a_0) = V(a_k) = 0$ , visto que  $\Gamma$  é uma variação própria, obtemos o desejado.  $\square$

**Teorema 4.7.** *Toda curva minimizante é uma geodésica quando parametrizada pelo comprimento de arco.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva minimizante com velocidade unitária e seja  $a = a_0 < \dots < a_k = b$  uma subdivisão tomada de modo que  $\gamma$  é suave em cada intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ . Se  $\Gamma$  é uma variação própria de  $\gamma$ , temos que

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = 0. \quad (4.18)$$

Logo, pela primeira fórmula variacional, para qualquer campo variacional  $V$  de uma variação própria  $\Gamma$ , o lado direito de (4.13) é igual a zero. Pela Proposição 4.5, temos que, na verdade, isso ocorre para qualquer campo vetorial próprio sobre  $\gamma$ .

Usando isto, mostremos primeiramente que  $D_t \dot{\gamma} = 0$  em cada subintervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ . Basta considerarmos uma *bump function*  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\varphi > 0$  em  $(a_{i-1}, a_i)$  e  $\varphi = 0$  caso contrário. Assim,  $V = \varphi D_t \dot{\gamma}$  é um campo vetorial próprio sobre  $\gamma$  e então

$$0 = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle = - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi |D_t \dot{\gamma}|^2 dt. \quad (4.19)$$

Como a função  $\varphi |D_t \dot{\gamma}|^2$  é não negativa, concluímos que  $D_t \dot{\gamma} = 0$  em cada subintervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ .

Agora, precisamos provar que  $\Delta_i \dot{\gamma} = 0$ , concluindo que  $\gamma$  é suave. Para isso, fixado  $1 \leq i \leq k-1$ , consideremos um campo vetorial próprio sobre  $\gamma$  tal que  $V(a_i) = \Delta_i \dot{\gamma}$  e  $V(a_j) = 0$  para todo  $j \neq i$  (para criarmos um tal campo, basta usarmos transpote paralelo e uma *bump function*). Temos então

$$0 = - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle = - \langle \Delta_i \dot{\gamma}, \Delta_i \dot{\gamma} \rangle. \quad (4.20)$$

Portanto,  $|\Delta_i \dot{\gamma}|^2 = 0$  e  $\gamma$  é suave.  $\square$

**Corolário 4.8.** *Uma curva admissível parametrizada pelo comprimento de arco é um ponto*

*crítico para  $L$  se, e somente se, é uma geodésica.*

*Demonstração.* Pela demonstração do teorema anterior, temos que se  $\gamma$  é um ponto crítico de  $L$ , então  $\gamma$  é uma geodésica. Reciprocamente, se  $\gamma$  é uma geodésica, temos que  $D_t\dot{\gamma} = 0$  e, como  $\gamma$  é suave,  $\Delta_t\dot{\gamma} = 0$ . Portanto, o lado direito da equação (4.13) zera.  $\square$

### 4.3 Geodésicas são localmente minimizantes

Nesta seção, obteremos uma recíproca para o Teorema 4.7, mostrando que as geodésicas são localmente minimizantes.

**Lema 4.9** (Lema de Gauss). *Seja  $\mathcal{U}$  uma bola geodésica centrada em  $p \in M$ . O campo vetorial radial unitário  $\partial/\partial r$  é ortogonal (com respeito a  $g$ ) às esferas geodésicas em  $\mathcal{U}$ .*

**Corolário 4.10.** *Sejam  $(x^i)$  coordenadas normais em uma bola geodésica  $\mathcal{U}$  centrada em  $p \in M$ , e seja  $r$  a função distância radial (definida em (3.23)). Então  $\text{grad } r = \partial/\partial r$  em  $\mathcal{U} \setminus \{p\}$ .*

*Demonstração.* Precisamos provar que, para qualquer  $q \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$  e qualquer  $Y \in T_qM$ ,

$$dr(Y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle. \quad (4.21)$$

A esfera geodésica  $\exp_p(\partial B_R(0))$  que passa por  $p$  é determinada em coordenadas normais pela equação  $r = R$ . Como, pelo Lema de Gauss,  $\partial/\partial r$  é ortogonal a esta esfera, podemos decompor  $Y$  como  $\alpha\partial/\partial r + X$  para alguma constante  $\alpha$  e algum vetor  $X$  tangente a esfera. Observe que, fazendo o cálculo em coordenadas, obtemos  $dr(\partial/\partial r) = 1$ , e como  $X$  é tangente a um conjunto de nível de  $r$ , temos também que  $dr(X) = 0$ . Temos assim que

$$dr(Y) = dr\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r} + X\right) = \alpha dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + dr(X) = \alpha. \quad (4.22)$$

Por outro lado, pela Proposição 3.10,  $\partial/\partial r$  é um vetor unitário. Logo,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha\frac{\partial}{\partial r} + X \right\rangle = \alpha + \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \right\rangle = \alpha, \quad (4.23)$$

onde usamos o Lema de Gauss, que nos diz que  $\partial/\partial r$  é ortogonal a  $X$ .  $\square$

**Proposição 4.11.** *Suponhamos que  $p$  e  $q$  estão contidos em uma bola geodésica centrada em  $p$ . Então a geodésica radial que parte de  $p$  e chega em  $q$  é a única curva minimizante (a menos de reparametrização) ligando  $p$  e  $q$  em  $M$ .*

*Demonstração.* Tomemos  $\varepsilon > 0$  de modo que  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  é uma bola geodésica contendo  $q$ . Seja  $\gamma : [0, R] \rightarrow M$  a geodésica radial ligando  $p$  e  $q$ , parametrizada pelo comprimento de arco; então podemos escrever  $\gamma(t) = \exp_p(tV)$  para algum vetor unitário  $V \in T_pM$ . Deste

modo,  $L(\gamma) = R$  e precisamos mostrar que qualquer outra curva admissível ligando  $p$  e  $q$  tem comprimento estritamente maior que  $R$ . Seja  $S_R = \exp_p(\partial B_R(0))$  a esfera geodésica de raio  $R$ .

Seja então  $\sigma : [0, b] \rightarrow M$  uma tal curva, que assumiremos sem perda de generalidade que está parametrizada pelo comprimento de arco. Seja  $a_0 \in [0, b]$  o último instante de tempo que  $\gamma(t) = p$  e  $b_0 \in [0, b]$  o primeiro instante depois de  $a_0$  que  $\gamma(t) \in S_R$ . Para qualquer  $t \in (a_0, b_0]$ , podemos decompor  $\dot{\sigma}(t)$  como

$$\dot{\sigma}(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} + X(t), \quad (4.24)$$

onde  $X(t)$  é um vetor tangente a esfera geodésica que passa por  $\sigma(t)$ . Pelo Lema de Gauss, temos que

$$|\dot{\sigma}(t)|^2 = \alpha(t)^2 + |X(t)|^2 \geq \alpha(t)^2. \quad (4.25)$$

Além disso, pelo Corolário 4.10,  $\alpha(t) = \langle \partial/\partial r, \dot{\sigma}(t) \rangle = dr(\dot{\sigma}(t))$ . Logo,

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\geq L\left(\sigma|_{[a_0, b_0]}\right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} |\dot{\sigma}(t)| dt \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \alpha(t) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} dr(\dot{\sigma}(t)) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \frac{d}{dt} r(\sigma(t)) dt \\ &= r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) \\ &= R = L(\gamma). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Segue que  $\gamma$  é uma curva minimizante. Provemos agora a unicidade.

Suponhamos que  $L(\sigma) = R$ . Então, ambas as desigualdades em (4.26) são igualdades. Como estamos supondo que  $\sigma$  tem velocidade unitária, a primeira igualdade implica que  $a_0 = 0$  e  $b_0 = b = R$ . A segunda igualdade implica que  $X(t) \equiv 0$  e  $\alpha(t) > 0$ , então  $\dot{\sigma}$  é um múltiplo positivo de  $\partial/\partial r$ . Como  $\sigma$  tem velocidade unitária, temos que  $\dot{\sigma}(t) = \partial/\partial r$ . Portanto,  $\sigma$  e  $\gamma$  são curvas integrais de  $\partial/\partial r$  passando por  $q$  em  $t = R$  e assim  $\sigma = \gamma$ .  $\square$

**Corolário 4.12.** *Em qualquer bola geodésica centrada em  $p \in M$ , a função distância radial  $r(x)$  definida em (3.23) é igual a distância riemanniana entre  $p$  e  $x$ .*

Deste modo, se  $\mathcal{U} = \exp_p(B_R(0))$  é uma bola geodésica em torno de  $p$ , pelo Corolário 4.12, temos que  $\mathcal{U}$  é igual a bola métrica de raio  $R$  centrada em  $p$ . Segue também que a esfera geodésica de raio  $R$  é o conjunto de pontos cuja distância até  $p$  é exatamente  $R$ . Então usaremos a seguinte notação:  $B_R(p)$

**Teorema 4.13.** *Toda geodésica riemanniana é localmente minimizante.*

## 4.4 Completude

Dizemos que uma variedade riemanniana é **geodesicamente completa** se toda geodésica maximal está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.14** (Hopf-Rinow). *Uma variedade riemanniana conexa é geodesicamente completa se, e somente se, é completa como espaço métrico.*

Sendo assim, diremos apenas que uma variedade riemanniana conexa é **completa** para indicar que ela é completa em qualquer um dos sentidos equivalentes discutidos no Teorema de Hopf-Rinow.

**Corolário 4.15.** *Se  $M$  é uma variedade riemanniana, então são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Se existe  $p \in M$  tal que  $\exp_p$  está definida em todo  $T_pM$ , então  $M$  é completa.*
2.  *$M$  é completa se, e somente se, dados dois pontos em  $M$  existe uma geodésica minimizante ligando ambos.*
3. *Se  $M$  é compacta, então  $M$  é geodesicamente completa.*

# Capítulo 5

## Curvaturas

### 5.1 Tensor de curvatura

Seja  $M$  uma variedade riemanniana e seja  $\nabla$  a conexão riemanniana em  $M$ . A função  $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$  definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (5.1)$$

é chamada de **endomorfismo de curvatura**. Observe que se  $M = \mathbb{R}^n$  com a métrica usual, então  $R(X, Y)Z = 0$ . De fato, lembremos que nas coordenadas naturais de  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $\bar{\nabla}_X Y = (XY^i) \partial_i$  é a conexão euclidiana. Logo, se  $(\bar{\nabla}_Y Z)^i$  denota a  $i$ -ésima função coordenada de  $\bar{\nabla}_Y Z$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \left( X (\bar{\nabla}_Y Z)^i \right) \partial_i \\ &= (X (Y Z^i)) \partial_i \\ &= (XY Z^i) \partial_i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Analogamente,  $\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = (Y X Z^i) \partial_i$  e então

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= (XY Z^i - YX Z^i) \partial_i \\ &= ([X, Y] Z^i) \partial_i \\ &= \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, \end{aligned} \quad (5.3)$$

e segue que  $R(X, Y)Z = 0$ . Sendo assim, podemos pensar que  $R$  mede o quanto  $M$  deixa de ser euclidiano.

**Proposição 5.1.** *O endomorfismo de curvatura é um campo  $\binom{3}{1}$ -tensorial.*

*Demonstração.* Devemos provar que  $R$  é multilinear sobre  $C^\infty(M)$ . Dada  $f \in C^\infty(M)$ , notemos

primeiramente que para qualquer  $g \in C^\infty(M)$ ,

$$[X, fY]g = X(fY)g - (fY)Xg = fXYg + YgXf - fYXg = f[X, Y]g + (Xf)Y. \quad (5.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(X, fY)Z &= \nabla_X \nabla_{fY} Z - \nabla_{fY} \nabla_X Z - \nabla_{[X, fY]} Z \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z) - f \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X, Y] + (Xf)Y} Z \\ &= (Xf) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_X \nabla_Y Z \\ &\quad - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z - (Xf) \nabla_Y Z \\ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned} \quad (5.5)$$

e  $R$  é linear sobre  $C^\infty(M)$  na segunda entrada. Para provarmos o mesmo para a primeira entrada, basta notarmos que  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$  e assim

$$R(fX, Y)Z = -R(Y, fX)Z = -fR(Y, X)Z = fR(X, Y)Z. \quad (5.6)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X, Y]} fZ \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf)Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + (Xf)Z) \\ &\quad - (f \nabla_{[X, Y]} Z + ([X, Y]f)Z) \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned} \quad (5.7)$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

Sendo um campo tensorial do tipo  $\binom{3}{1}$ , podemos escrever  $R$  em coordenadas como

$$R = R_{ijk}{}^\ell dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_\ell, \quad (5.8)$$

onde os coeficientes  $R_{ijk}{}^\ell$  são dados por

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^\ell \partial_\ell. \quad (5.9)$$

Ou seja,  $R$  é identificado com o tensor

$$R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, dx^\ell) = dx^\ell (R(\partial_i, \partial_j)\partial_k) = dx^\ell (R_{ijk}{}^m \partial_m) = R_{ijk}{}^\ell. \quad (5.10)$$

**Definição.** O **tensor de curvatura** é o campo  $\binom{4}{0}$ -tensorial  $Rm = R^\flat$ , obtido do  $\binom{3}{1}$ -tensor  $R$  descendo o último índice.

Logo, o tensor de curvatura  $Rm$  é dado por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad (5.11)$$

e em coordenadas locais

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^\ell, \quad (5.12)$$

onde  $R_{ijkl} = g_{\ell m} R_{ijk}{}^m$ .

**Proposição 5.2** (Simetrias do tensor de curvatura). *Para quaisquer campos vetoriais  $W, X, Y$  e  $Z$ :*

- (a)  $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(X, W, Y, Z)$ ;
- (b)  $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(W, X, Z, Y)$ ;
- (c)  $Rm(W, X, Y, Z) = Rm(Y, Z, W, X)$ ;
- (d)  $Rm(W, X, Y, Z) + Rm(X, Y, W, Z) + Rm(Y, W, X, Z) = 0$ .

## 5.2 Curvatura de Ricci

Até o momento definimos o endomorfismo de curvatura e o tensor de curvatura que são, respectivamente, campos tensoriais do tipo  $\binom{3}{1}$  e  $\binom{4}{0}$ . Nesta seção, “simplificaremos” tais definições obtendo um tensor que “resume” as informações contidas nestes tensores.

A **curvatura de Ricci** ou **tensor de Ricci**, denotado por  $\text{Ric}$ , é um 2-tensor covariante definido como sendo o traço do endomorfismo de curvatura tomado com relação ao primeiro e último índices, ou seja,  $\text{Ric}$  é o tensor com componentes

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = g^{km} R_{kijm}. \quad (5.13)$$

Note que  $\text{Ric}$  é dada em coordenadas locais por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, X)Y, E_i \rangle, \quad (5.14)$$

visto que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(E_i, E_\ell) &= \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, E_j)E_\ell, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R_{ij\ell}{}^k E_k, E_i \rangle \\ &= R_{kij}{}^k. \end{aligned} \quad (5.15)$$

### 5.3 Curvatura seccional

Dados vetores  $X, Y \in T_pM$ , definimos

$$K(X, Y) := \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \quad (5.16)$$

**Proposição 5.3.** *Seja  $\Pi$  um subespaço vetorial de dimensão 2 de  $T_pM$  e sejam  $X, Y \in \Pi$  vetores linearmente independentes. Então  $K(X, Y)$  não depende da escolha de  $X$  e  $Y$ .*

Seja  $p \in M$ . Dado um subespaço  $\Pi$  de  $T_pM$  de dimensão 2 e uma base  $\{X, Y\}$  de  $\Pi$ , o número real  $K(\Pi) := K(X, Y)$  é chamado de **curvatura seccional** de  $\Pi$  em  $p$ . Pela proposição anterior, a curvatura seccional está bem definida.

**Lema 5.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial com  $\dim V \geq 2$ . Suponhamos que são dados dois tensores 4-covariantes (aplicações trilineares)  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 : V \times V \times V \rightarrow V$ , ambos satisfazendo as condições de simetria satisfeitas pelo tensor de curvatura (Proposição 5.2). Se para qualquer par de vetores linearmente independentes  $X, Y \in V$ ,*

$$\frac{\mathcal{R}_1(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{\mathcal{R}_2(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

então  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ .

**Proposição 5.5.** *Suponhamos que  $(M, g)$  é uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante  $C$ . Então o endomorfismo curvatura é dado pela expressão*

$$R(X, Y)Z = C(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Em termos de qualquer base, temos

$$R_{ijkl} = C(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

*Demonstração.* Consideremos o  $\binom{4}{0}$ -tensor dado por

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = C(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle W, Z \rangle \langle Y, X \rangle). \quad (5.17)$$

É fácil ver que  $\tilde{R}$  satisfaz as condições de simetria da Proposição 5.2. Como, por hipótese, a curvatura seccional de  $M$  é constante igual a  $C$ , para quaisquer campos  $X$  e  $Y$  em  $M$ ,

$$R(X, Y, Y, X) = C(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = C\tilde{R}(X, Y, Y, X). \quad (5.18)$$

Segue do Lema 5.4 que  $R = C\tilde{R}$ . □

# Capítulo 6

## Campos de Jacobi

### 6.1 Equações de Jacobi

Suponhamos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é um segmento geodésico, e  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  é uma variação de  $\gamma$ . Dizemos que  $\Gamma$  é uma **variação por geodésicas** se cada uma das curvas  $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$  também é um segmento geodésico (notemos que nesse caso temos, em particular, que  $\Gamma$  é suave).

Escrevamos  $T(s, t) = \partial_t \Gamma(s, t)$  e  $S(s, t) = \partial_s \Gamma(s, t)$ . A equação geodésica nos diz que

$$D_t T \equiv 0, \quad (6.1)$$

para qualquer par  $(s, t)$ . Como, para cada  $t \in [a, b]$  fixado,  $D_t T$  é ainda um campo sobre as “curvas verticais”  $\Gamma^{(t)}$ , podemos considerar a derivada covariante da expressão acima obtendo

$$D_s D_t T \equiv 0. \quad (6.2)$$

**Proposição 6.1.** *Se  $\Gamma$  é uma família admissível suave de curvas e  $V$  é um campo vetorial sobre  $\Gamma$ , então*

$$D_s D_t V - D_t D_s V = R(S, T)V. \quad (6.3)$$

*Demonstração.* Notemos que esta afirmação é local, logo basta calcularmos em coordenadas locais. Localmente, escrevemos  $V(s, t) = V^i(s, t)\partial_i$  e calculamos

$$D_t V = D_t (V^i(s, t)\partial_i) = \left( \frac{\partial}{\partial t} V^i(s, t) \right) \partial_i + V^i(s, t) D_t \partial_i. \quad (6.4)$$

Logo,

$$D_s D_t V = \left( \frac{\partial^2 V^i(s, t)}{\partial s \partial t} \right) \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t \partial_i + V^i D_s D_t \partial_i. \quad (6.5)$$

Trocando  $t \leftrightarrow s$  calculamos  $D_t D_s V$  e subtraindo, obtemos

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i (D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i). \quad (6.6)$$

Agora, se escrevemos as funções coordenadas de  $\Gamma$  como  $x^j(s, t)$ , então

$$S = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k \quad \text{e} \quad T = \frac{\partial x^j}{\partial t} \partial_j. \quad (6.7)$$

Podemos ver os campos  $\partial_i$  como campos sobre as geodésicas horizontais  $\Gamma_s$  (campos trivialmente estendíveis), logo

$$D_t \partial_i = \nabla_{\dot{\Gamma}_s} \partial_i = \nabla_T \partial_i = \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i \quad (6.8)$$

e como  $\nabla_{\partial_j} \partial_i$  também é estendível,

$$\begin{aligned} D_s D_t \partial_i &= D_s \left( \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial x^j}{\partial t} D_s \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\dot{\Gamma}^{(t)}} \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_S \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Trocando  $s \leftrightarrow t$ ,  $j \leftrightarrow k$  e subtraindo, obtemos

$$\begin{aligned} D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i &= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} (\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i) \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} R(\partial_k, \partial_j) \partial_i \\ &= R(S, T) \partial_i. \end{aligned} \quad (6.10)$$

□

**Teorema 6.2** (Equação de Jacobi). *Seja  $\gamma$  uma geodésica e  $V$  um campo vetorial sobre  $\gamma$ . Se  $V$  é um campo variacional de uma variação de  $\gamma$  por geodésicas, então  $V$  satisfaz a equação*

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} = 0. \quad (6.11)$$

*Demonstração.* Sejam  $S$  e  $T$  como anteriormente. Pela proposição anterior, temos

$$\begin{aligned} 0 &= D_s D_t T \\ &= D_t D_s T + R(S, T) T \\ &= D_t D_t S + R(S, T) T, \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde a última igualdade segue do Lema 4.4. Calculando em  $s = 0$ , onde  $S(0, t) = V(t)$  e  $T(0, t) = \dot{\gamma}(t)$ , concluímos a demonstração.  $\square$

Um campo vetorial sobre uma geodésica que satisfaz a equação (6.11) é chamado de **campo de Jacobi**. A próxima proposição é a recíproca do Teorema 6.2.

**Proposição 6.3.** *Todo campo de Jacobi sobre uma geodésica  $\gamma$  é um campo variacional de uma variação de  $\gamma$  por geodésicas.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica e seja  $V : [a, b] \rightarrow TM$  um campo de Jacobi sobre  $\gamma$ . Consideremos a variação  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  dada por

$$\Gamma(s, t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t). \quad (6.13)$$

Então,  $\Gamma$  é uma variação de  $\gamma$ , pois  $\Gamma(0, t) = \exp_{\gamma(t)} 0 = \gamma(t)$ . Além disso,  $\Gamma$  é uma variação por geodésicas, pois para cada  $s$  fixado,

$$\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t) \quad (6.14)$$

é uma geodésica. Como,

$$\partial_s \Gamma(0, t) = \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(0) = V(t), \quad (6.15)$$

temos que  $V$  é o campo variacional da variação  $\Gamma$ .  $\square$

**Teorema 6.4** (Existência e unicidade de campos de Jacobi). *Sejam  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica,  $a \in I$  e  $p = \gamma(a)$ . Para quaisquer vetores  $X$  e  $Y$  em  $T_p M$ , existe um único campo de Jacobi  $J$  sobre  $\gamma$  satisfazendo as condições iniciais:*

$$J(a) = X \quad e \quad D_t J(a) = Y. \quad (6.16)$$

*Demonstração.* Seja  $\{E_i\}$  base ortonormal de  $T_p M$ . Usando transporte paralelo, estendemos esta base a um campo ortonormal sobre  $\gamma$ . Escrevendo  $J(t) = J^i(t)E_i$  e  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t)E_i$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= D_t^2 J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \\ &= D_t^2 (J^i(t)E_i) + R\left(J^j(t)E_j, \dot{\gamma}^k(t)E_k\right)\dot{\gamma}^\ell(t)E_\ell \\ &= D_t \left( \dot{J}^i(t)E_i + J^i(t)D_t E_i \right) + R_{jkl}{}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^\ell E_i \\ &= \ddot{J}^i E_i + \dot{J}^i D_t E_i + R_{jkl}{}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^\ell E_i \\ &= \left( \ddot{J}^i + R_{jkl}{}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^\ell \right) E_i. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Logo, encontrar um campo de Jacobi  $J$  sobre  $\gamma$  é equivalente a encontrar  $n$  (dimensão de  $M$ )

funções  $J^i : I \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem o sistema linear de segunda ordem:

$$\ddot{J}^i + R_{jkl}{}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^\ell = 0. \quad (6.18)$$

Fazendo a substituição usual  $V^i = \dot{J}^i$ , tal sistema é convertido num sistema linear de primeira ordem para  $2n$  incógnitas  $\{J^i, V^i\}$ . O Teorema 2.16 garante a existência e unicidade de uma solução definida em todo o intervalo  $I$ , satisfazendo as condições iniciais  $J^i(a) = X^i$ ,  $V^i(a) = Y^i$ .  $\square$

**Corolário 6.5.** *Sobre qualquer geodésica  $\gamma$ , o conjunto dos campos de Jacobi é um subespaço vetorial de  $\mathcal{T}(\gamma)$  de dimensão  $2n$ .*

*Demonstração.* Seja  $p = \gamma(a)$  um ponto de  $\gamma$ . Consideremos a função que sai do conjunto dos campos de Jacobi sobre  $\gamma$  e chega em  $T_p M \oplus T_p M$  que leva  $J$  em  $(J(a), D_t J(a))$ . Pela proposição anterior, temos que esta aplicação é um isomorfismo linear.  $\square$

**Exemplo 6.6.** Sobre qualquer geodésica, sempre existem os seguinte campos de Jacobi triviais:

1. O campo  $J_0(t) = \dot{\gamma}(t)$ , sobre a geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ . Este campo é de Jacobi, pois  $D_t \dot{\gamma} = 0$  (visto que  $\gamma$  é uma geodésica) e  $R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$ , pois  $R$  é um tensor antissimétrico. Além disso, este campo satisfaz as condições iniciais

$$J_0(0) = \dot{\gamma}(0) \quad \text{e} \quad D_t J_0(0) = 0. \quad (6.19)$$

2. Do mesmo modo, temos o campo  $J_1(t) = t\dot{\gamma}(t)$ , que é um campo de Jacobi, pois

$$D_t J_1(t) = D_t t\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t) + tD_t \cdot \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t) \implies D_t^2 J_1 = D_t \dot{\gamma} = 0, \quad (6.20)$$

e

$$R(J_1, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = tR(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \quad (6.21)$$

Além disso, esse campo satisfaz as condições iniciais

$$J_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad D_t J_1(0) = \dot{\gamma}(0). \quad (6.22)$$

Notemos que  $J_0$  é o campo variacional da variação  $\Gamma(s, t) = \gamma(s+t)$ , e  $J_1$  é o campo variacional da variação  $\Gamma(s, t) = \gamma(e^s t)$ . De fato, para  $\Gamma(s, t) = \gamma(s+t)$ ,

$$\partial_s \Gamma(0, t) = \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(0) = \frac{d}{ds} \gamma(s+t)|_{s=0} = \dot{\gamma}(s+t)|_{s=0} = \dot{\gamma}(t) = J_0(t), \quad (6.23)$$

e para  $\Gamma(s, t) = \gamma(e^s t)$ ,

$$\partial_s \Gamma(0, t) = \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(0) = \frac{d}{ds} \gamma(e^s t) \Big|_{s=0} = t e^{st} \dot{\gamma}(e^s t) \Big|_{s=0} = t \dot{\gamma}(t) = J_1(t). \quad (6.24)$$

Afim de separar tais campos de Jacobi triviais de outros casos mais interessantes, temos a seguinte definição:

**Definição.** Um campo vetorial **tangencial** sobre a curva  $\gamma$  é um campo vetorial  $V$  tal que  $V(t)$  é um múltiplo de  $\dot{\gamma}(t)$  para todo  $t$ , e um campo vetorial **normal** é um campo  $V$  tal que  $V(t) \perp \dot{\gamma}(t)$  para todo  $t$ .

Os campos de Jacobi triviais do exemplo anterior são exemplos de campos de vetoriais tangenciais.

**Proposição 6.7.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica e  $a \in I$ .*

1. *Um campo de Jacobi sobre  $\gamma$  é normal se, e somente se,*

$$J(a) \perp \dot{\gamma}(a) \quad \text{e} \quad D_t J(a) \perp \dot{\gamma}(a). \quad (6.25)$$

2. *Qualquer campo de Jacobi ortogonal a  $\dot{\gamma}$  em dois pontos é normal.*

*Demonstração.* Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle J, \dot{\gamma} \rangle &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \langle J, \dot{\gamma} \rangle \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\langle D_t J, \dot{\gamma} \rangle + \langle J, D_t \dot{\gamma} \rangle) \\ &= \langle D_t^2 J, \dot{\gamma} \rangle \\ &= -\langle R(J, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \\ &= -\text{Rm}(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

pelas simetrias do tensor de curvatura Proposição 5.2. Logo, a função  $f(t) = \langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$  é uma função afim de  $t$ . Notemos ainda que  $f(a) = \langle J(a), \dot{\gamma}(a) \rangle$  e  $\dot{f}(a) = \langle D_t J(a), \dot{\gamma}(a) \rangle$ . Então  $J(a)$  e  $D_t J(a)$  são ortogonais a  $\dot{\gamma}(a)$  se, e somente se,  $f$  e sua derivada zeram em  $a$ , o que ocorre se, e somente se,  $f \equiv 0$ . Analogamente, se  $J$  é ortogonal a  $\dot{\gamma}$  em dois pontos, então  $f$  zera em dois pontos e portanto  $f \equiv 0$ .  $\square$

**Proposição 6.8.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica.*

1. *O espaço dos campos de Jacobi normais sobre  $\gamma$  é um subespaço de dimensão  $2n - 2$  de  $\mathcal{T}(\gamma)$ ;*
2. *O espaço dos campos de Jacobi tangenciais sobre  $\gamma$  é um subespaço de dimensão 2 de  $\mathcal{T}(\gamma)$ .*

**Corolário 6.9.** *Cada campo de Jacobi se decompõe unicamente como soma de um campo de Jacobi tangencial e um campo de Jacobi normal.*

## 6.2 Calculando campos de Jacobi

Nesta seção, calcularemos o campo de Jacobi nas coordenadas normais.

**Proposição 6.10.** *Sejam  $p \in M$  e  $(x^i)$  um sistema normal de coordenadas em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$ , e seja  $\gamma$  uma geodésica radial partindo de  $p$ . Para qualquer  $W = W^i \partial_i \in T_p M$ , o campo de Jacobi  $J$  sobre  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  e  $D_t J(0) = W$  é dado com relação as coordenadas normais por*

$$J(t) = tW^i \partial_i. \quad (6.27)$$

*Demonstração.* Primeiramente, notemos que se o campo  $J$  é definido por (6.27), então  $J(0) = 0$  e

$$D_t J(t) = D_t (tW^i \partial_i) = W^i \partial_i + tW^i D_t \partial_i \implies D_t J(0) = W^i \partial_i = W. \quad (6.28)$$

Pelo Teorema 6.4, resta mostrar que  $J$  é, de fato, um campo de Jacobi. Seja  $V = \dot{\gamma}(0) \in T_p M$ . Escrevendo  $V = V^i \partial_i$  temos, pela Proposição 3.10, que  $\gamma$  é dada nas coordenadas normais pela fórmula

$$\gamma(t) = (tV^1, \dots, tV^n). \quad (6.29)$$

Agora, consideremos a seguinte variação  $\Gamma$  dada em coordenadas por

$$\Gamma(s, t) = (t(V^1 + sW^1), \dots, t(V^n + sW^n)). \quad (6.30)$$

Usando novamente a Proposição 3.10, vemos que  $\Gamma$  é uma variação de  $\gamma$  por geodésicas. Logo, pelo Teorema 6.2,  $\partial_s \Gamma(0, t)$  é um campo de Jacobi. Mas,

$$\partial_s \Gamma(0, t) = tW^i \partial_i = J(t), \quad (6.31)$$

o que encerra a prova. □

Para variedades com curvatura constante, temos a seguinte fórmula explícita para  $J$ .

**Teorema 6.11.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante  $K$  e seja  $\gamma$  uma geodésica com velocidade unitária em  $M$ . Os campos de Jacobi normais sobre  $\gamma$  que zeram em  $t = 0$  são exatamente os campos vetoriais*

$$J(t) = u(t)E(t), \quad (6.32)$$

onde  $E$  é um campo vetorial normal paralelo sobre  $\gamma$  e a função  $u(t)$  é dada por

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} t), & K > 0 \\ t, & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} t), & K < 0 \end{cases}. \quad (6.33)$$

*Demonstração.* Como  $g$  tem curvatura constante igual a  $K$ , pela Proposição 5.5, o endomorfismo de curvatura é dado por

$$R(X, Y)Z = K (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y). \quad (6.34)$$

Temos então que um campo de Jacobi normal sobre  $\gamma$  satisfaz:

$$0 = D_t^2 J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = D_t^2 J + K (\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle J - \langle J, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}) = D_t^2 J + KJ, \quad (6.35)$$

visto que  $|\dot{\gamma}| = 1$  e  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$ . Temos então que, nesse caso, a segunda derivada covariante de  $J$  é um múltiplo de  $J$ . Sendo assim, é razoável tentar contruir uma solução tomando um campo vetorial normal  $E$  sobre  $\gamma$  e tomando  $J(t) = u(t)E(t)$  para alguma função  $u$  a ser determinada. Temos então que tal campo  $J$  satisfaz a equação de Jacobi se, e somente, se

$$\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0. \quad (6.36)$$

Da EDO, sabemos que as soluções desta equação que satisfazem  $u(0) = 0$  são múltiplos das funções dadas em (6.33).  $\square$

### 6.3 Pontos conjugados

Seja  $\gamma$  um segmento geodésico ligando pontos  $p, q \in M$ . Dizemos que  $q$  é **conjugado a  $p$  sobre  $\gamma$**  se existe um campo de Jacobi sobre  $\gamma$  que zera em  $p$  e  $q$  mas não é identicamente nulo. A **ordem** ou **multiplicidade** dessa conjugação é a dimensão do espaço dos campos de Jacobi que zeram em  $p$  e  $q$ .

**Proposição 6.12.** *Suponhamos que  $p \in M$ ,  $V \in T_p M$  e  $q = \exp_p V$ . Então  $\exp_p$  é um difeomorfismo local em uma vizinhança de  $V$  se, e somente se,  $q$  não é conjugado a  $p$  sobre a geodésica  $\gamma(t) = \exp_p tV$ ,  $t \in [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema da Função Inversa,  $\exp_p$  é um difeomorfismo local em uma vizinhança da  $V$  se, e somente se,  $(\exp_p)_*$  é um isomorfismo em  $V$  e, claramente, isso ocorre se, e somente se,  $(\exp_p)_*$  é injetora em  $V$ .

Identificando  $T_V(T_p M)$  com  $T_p M$ , podemos calcular o *pushforward*  $(\exp_p)_*$  em  $V$  como segue:

$$(\exp_p)_* W = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(V + sW). \quad (6.37)$$

Para realizar tal cálculo, definimos uma variação de  $\gamma$  por geodésicas pela expressão

$$\Gamma_W(s, t) = \exp_p t(V + sW). \quad (6.38)$$

O campo variacional  $J_W(t) = \partial_s \Gamma_W(0, t)$  é um campo de Jacobi sobre  $\gamma$  e

$$J_W(1) = (\exp_p)_* W. \quad (6.39)$$

Como  $W \in T_p M$  é arbitrário, existe um espaço de dimensão  $n$  de tais campo de Jacobi e então esses são todos os campos de Jacobi que zeram em  $p$ .

Logo,  $(\exp_p)_*$  não é um isomorfismo em  $V$  quando existe um vetor  $W$  tal que  $(\exp_p)_* W = 0$ , o que ocorre exatamente quando existe um campo de Jacobi  $J_W$  sobre  $\gamma$  com  $J_W(0) = J_W(q) = 0$ .  $\square$

**Proposição 6.13.** *Seja  $J$  um campo de Jacobi sobre uma geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ . Então*

$$\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle D_t(0), \dot{\gamma}(0) \rangle t + \langle J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle, \quad \forall t \in [0, a]. \quad (6.40)$$

*Demonstração.* Pela equação de Jacobi

$$D_t \langle D_t J, \dot{\gamma} \rangle = \langle D_t^2 J, \dot{\gamma} \rangle = -\langle R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0. \quad (6.41)$$

Portanto,  $\langle D_t J, \dot{\gamma} \rangle = \langle D_t J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle$ . Além disso,

$$D_t \langle J, \dot{\gamma} \rangle = \langle D_t J, \dot{\gamma} \rangle = \langle D_t J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle. \quad (6.42)$$

Integrando a última equação em  $t$ , obtemos

$$\langle J, \dot{\gamma} \rangle = \langle D_t J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle t + \langle D_t J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle, \quad (6.43)$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

**Corolário 6.14.** *Se existem  $t_1, t_2 \in [0, a]$ ,  $t_1 \neq t_2$ , tais que  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle(t_1) = \langle J, \dot{\gamma} \rangle(t_2)$ , então  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle$  não depende de  $t$ . Em particular, se  $J(0) = J(a) = 0$ , então  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle \equiv 0$ .*

**Proposição 6.15.** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica e sejam  $X \in T_{\gamma(0)} M$  e  $Y \in T_{\gamma(a)} M$ . Se  $\gamma(a)$  não é conjugado  $\gamma(0)$  sobre  $\gamma$ , então existe um único campo de Jacobi  $J$  sobre  $\gamma$  com  $J(0) = X$  e  $J(a) = Y$ .*

## 6.4 Segunda fórmula variacional

Anteriormente introduzimos a Primeira Fórmula Variacional, usando a ideia de que se uma curva  $\gamma$  é minimizante, então a derivada do funcional de comprimento deve zerar em  $\gamma$ . Nesta seção, usaremos o seguinte para obter a *Segunda Fórmula Variacional*: se  $\gamma$  é minimizante, então a segunda derivada deve ser não negativa em  $\gamma$ .

**Teorema 6.16** (Segunda fórmula variacional). *Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica com velocidade unitária,  $\Gamma$  uma variação própria de  $\gamma$  e  $V$  seu campo variacional. Então*

$$\frac{d^2}{ds^2} L(\Gamma_s) = \int_a^b \left( |D_t V^\perp|^2 - Rm(V^\perp, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V^\perp) \right) dt, \quad (6.44)$$

onde  $V^\perp$  é a componente normal de  $V$ .

Definimos uma forma bilinear  $I$ , chamada de **forma índice**, definida no espaço dos campos vetoriais próprios sobre  $\gamma$  por

$$I(V, W) = \int_a^b (\langle D_t V, D_t W \rangle - Rm(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, W)) dt. \quad (6.45)$$

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [dC92].

**Lema 6.17** (Lema do Índice). *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica ligando  $p = \gamma(0)$  e  $q = \gamma(a)$  sem pontos conjugados a  $p$ . Seja  $J$  um campo de Jacobi sobre  $\gamma$  com  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$ , e seja  $V$  um campo suave por partes sobre  $\gamma$  com  $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = 0$ . Suponha que  $J(0) = V(0) = 0$  e que  $J(t_0) = V(t_0)$  para algum  $t_0 \in (0, a]$ . Então*

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V), \quad (6.46)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se,  $V = J$  em  $[0, t_0]$ .

# Capítulo 7

## Fórmula de Bochner-Weitzenböck

### 7.1 Referencial geodésico

Nesta seção provaremos a existência de um referencial geodésico numa variedade riemanniana  $M$ . Tal referencial será usado para dar representações locais mais simples para o gradiente, o divergente e o laplaciano, que usaremos para provar a Fórmula de Bochner-Weitzenböck.

**Teorema 7.1** (Referencial geodésico). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana de dimensão  $n$  e seja  $p \in M$ . Dada uma base ortonormal  $X_1, \dots, X_n$  de  $T_pM$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset M$  de  $p$  e  $n$  campos vetoriais  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{T}(\mathcal{U})$  satisfazendo:*

1. Os campos  $E_1, \dots, E_n$  são ortonormais em cada ponto de  $\mathcal{U}$ ;
2.  $E_1(p) = X_1, \dots, E_n(p) = X_n$ .
3. Em  $p$ ,  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ , para quaisquer índices  $i$  e  $j$ .

O referencial local  $(E_1, \dots, E_n)$  dado pelo teorema anterior é chamado de **referencial geodésico**.

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  e  $((x^i), \mathcal{U})$  um sistema normal de coordenadas em  $p$ . Usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt no referencial coordenado  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ , construiremos um referencial ortonormal em  $\mathcal{U}$ . Definimos, para  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$V_1 = \partial_1, V_2 = \partial_2 - \frac{\langle \partial_2, V_1 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle} V_1, \dots, V_k = \partial_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \partial_k, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j, \quad (7.1)$$

e

$$E_k = \frac{V_k}{|V_k|}. \quad (7.2)$$

Então  $(E_1, \dots, E_n)$  é um referencial ortonormal em  $\mathcal{U}$ . A demonstração segue das três afirmações que seguem:

**Afirmção 7.2.** Se  $\nabla_{\partial_i} V_k|_p = 0$ , então  $\nabla_{\partial_i} \frac{V_k}{|V_k|} \Big|_p = 0$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} \frac{V_k}{|V_k|} &= \frac{1}{|V_k|} \nabla_{\partial_i} V_k + \left( \partial_i \frac{1}{|V_k|} \right) V_k \\ &= \frac{1}{|V_k|} \nabla_{\partial_i} V_k - \frac{1}{2} \langle V_k, V_k \rangle^{-\frac{3}{2}} (\partial_i \langle V_k, V_k \rangle) \\ &= \frac{1}{|V_k|} \nabla_{\partial_i} V_k - \frac{1}{2} \langle V_k, V_k \rangle^{-\frac{3}{2}} (\langle \nabla_{\partial_i} V_k, V_k \rangle + \langle V_k, \nabla_{\partial_i} V_k \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

**Afirmção 7.3.** Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ . Se  $\nabla_{\partial_i} X|_p = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $\nabla_{E_i} X|_p = 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Escrevendo  $E_i = E^j \partial_j$ , temos

$$\nabla_{E_i} X|_p = \nabla_{E^j \partial_j} X|_p = E^j \nabla_{\partial_j} X|_p = 0. \quad (7.4)$$

**Afirmção 7.4.**  $\nabla_{\partial_i} V_k|_p = 0$ , para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

A prova desta afirmação segue por indução finita: para  $k = 1$  temos

$$\nabla_{\partial_i} V_1|_p = \nabla_{\partial_i} V_1|_p = \nabla_{\partial_i} \partial_1|_p = 0. \quad (7.5)$$

Agora suponhamos que  $\nabla_{\partial_i} V_j|_p = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $k < n$ . Então, no ponto  $p$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} V_{k+1} &= \nabla_{\partial_i} \left( \partial_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j \right) \\ &= \nabla_{\partial_i} \partial_{k+1} - \nabla_{\partial_i} \left( \sum_{j=1}^k \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j \right) \\ &= -\nabla_{\partial_i} \left( \sum_{j=1}^k \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j \right) \\ &= -\sum_{j=1}^k \nabla_{\partial_i} \left( \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Mas, para  $j \in \{1, \dots, k\}$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} \left( \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j \right) &= \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} \nabla_{\partial_i} V_j + \partial_i \left( \frac{\langle \partial_{k+1}, V_j \rangle}{\langle V_j, V_j \rangle} V_j \right) \\ &= \left( \frac{1}{\langle V_j, V_j \rangle} \partial_i \langle \partial_{k+1}, V_j \rangle + \langle \partial_{k+1}, V_j \rangle \partial_i \left( \frac{1}{\langle V_j, V_j \rangle} \right) \right) V_j \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

o que demonstra a última afirmação e encerra a demonstração do teorema.  $\square$

## 7.2 Gradiente, divergente e laplaciano

Na Seção 1.1 definimos o gradiente  $\nabla f$  de uma função  $f \in C^\infty(M)$ . Listaremos algumas propriedades do gradiente.

**Proposição 7.5.** *Dadas funções  $f, g \in C^\infty(M)$  e uma função  $j : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave no aberto  $A \subset \mathbb{R}$ , temos*

1.  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ ;
2.  $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$ ;
3.  $\nabla(j \circ f) = (j' \circ f) \cdot \nabla f$ .

*Demonstração.* Nesta prova, usaremos que dados campos vetoriais  $X$  e  $Z$ , se  $\langle X, Y \rangle = \langle Z, Y \rangle$  para qualquer campo  $Y$ , então  $X = Z$ . Temos,

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + g), Y \rangle &= d(f + g)(Y) \\ &= df(Y) + dg(Y) \\ &= \langle \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla g, Y \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, Y \rangle; \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f \cdot g), Y \rangle &= d(f \cdot g)(Y) \\ &= f dg(Y) + g df(Y) \\ &= f \langle \nabla g, Y \rangle + g \langle \nabla f, Y \rangle \\ &= \langle f \nabla g + g \nabla f, Y \rangle; \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla(j \circ f), Y \rangle &= d(j \circ f)(Y) \\ &= (j' \circ f) \cdot df(Y) \\ &= (j' \circ f) \langle \nabla f, Y \rangle \\ &= \langle (j' \circ f) \nabla f, Y \rangle, \end{aligned} \tag{7.10}$$

como queríamos.  $\square$

Lembremos, vide página 18, que a hessiana de uma função  $f$  é o tensor  $\text{Hess } f : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por  $\text{Hess } f(X, Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f$ . Seguem algumas propriedades da hessiana.

**Proposição 7.6.** *Dadas funções  $f, g \in C^\infty(M)$  e uma função  $j : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave no aberto  $A \subset \mathbb{R}$ , temos*

1.  $\text{Hess}(f + g) = \text{Hess } f + \text{Hess } g$ ;
2.  $\text{Hess } f(X, Y) = \text{Hess } f(Y, X)$ ;
3.  $\text{Hess}(f \cdot g)(X, Y) = (Xf)(Yg) + (Xg)(Yf) + f \text{Hess } g(X, Y) + g \text{Hess } f(X, Y)$ ;
4.  $\text{Hess}(j \circ f)(X, Y) = (Xf)(Yf)j'' \circ f + j' \circ f \text{Hess } f(X, Y)$ .

Definimos agora o operador **divergência**  $\text{div} : \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  por

$$\text{div}X = \text{tr}(Z \mapsto \nabla_Z X). \quad (7.11)$$

Então, se  $(E_1, \dots, E_n)$  é um referencial local em  $M$ , podemos escrever

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \quad (7.12)$$

**Proposição 7.7.** *Dados campos  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  e uma função  $f \in C^\infty(M)$ . temos*

1.  $\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y$ ;
2.  $\text{div}(fX) = f \text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$ .

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto de  $M$  e seja  $(E_1, \dots, E_n)$  um referencial geodésico em torno  $p$ .

1. Usando a representação local (7.12), temos

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \text{tr}(Z \mapsto \nabla_Z(X + Y)) \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i}(X + Y), E_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i}X + \nabla_{E_i}Y, E_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i}X, E_i \rangle + \sum_i \langle \nabla_{E_i}Y, E_i \rangle \\ &= \text{tr}(Z \mapsto \nabla_Z X) + \text{tr}(Z \mapsto \nabla_Z Y) \\ &= \text{div}X + \text{div}Y. \end{aligned} \quad (7.13)$$

2. Escrevendo  $X = X^i E_i$  e  $Y = Y^j E_j$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \text{div}(fX) &= \text{tr}(Z \mapsto \nabla_Z(fX)) \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} fX, E_i \rangle \\ &= f \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle + \sum_i \langle (E_i f)X, E_i \rangle \\ &= f \text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle, \end{aligned} \quad (7.14)$$

e concluimos a demonstração.  $\square$

Dada uma função  $f \in C^\infty(M)$ , definimos o **laplaciano** de  $f$  como sendo a função

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \quad (7.15)$$

Dizemos que  $f \in C^\infty(M)$  é **harmônica** se  $\Delta f = 0$ .

**Proposição 7.8.** *Dadas funções  $f, g \in C^\infty(M)$  e uma função  $j : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave no aberto  $A \subset \mathbb{R}$ , temos*

1.  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$ ;
2.  $\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ ;
3.  $\Delta(j \circ f) = (j' \circ f) \cdot \Delta f + (j'' \circ f) \cdot |\nabla f|^2$ .

*Demonstração.* Usaremos as propriedades já conhecidas sobre o gradiente e a divergência:

$$\begin{aligned} \Delta(f + g) &= \operatorname{div}(\nabla(f + g)) \\ &= \operatorname{div}(\nabla f + \nabla g) \\ &= \operatorname{div} \nabla f + \operatorname{div} \nabla g \\ &= \Delta f + \Delta g; \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) &= \operatorname{div}(\nabla(f \cdot g)) \\ &= \operatorname{div}(f\nabla g + g\nabla f) \\ &= \operatorname{div}(f\nabla g) + \operatorname{div}(g\nabla f) \\ &= f \operatorname{div} \nabla g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \operatorname{div} \nabla f + \langle \nabla g, \nabla f \rangle \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle; \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta(j \circ f) &= \operatorname{div}(\nabla(j \circ f)) \\ &= \operatorname{div}((j' \circ f) \cdot \nabla f) \\ &= (j' \circ f) \operatorname{div} \nabla f + \langle \nabla(j' \circ f), \nabla f \rangle \\ &= (j' \circ f) \cdot \Delta f + (j'' \circ f) \cdot |\nabla f|^2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

e está provado.  $\square$

**Proposição 7.9.** *Se  $(E_1, \dots, E_n)$  é um referencial geodésico em um aberto  $\mathcal{U} \subset M$ , então em*

U temos

$$\begin{aligned}\nabla f &= \sum_{i=1}^n (E_i f) E_i; \\ \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n E_i f_i; \\ \Delta f &= \sum_{i=1}^n E_i (E_i f) = \operatorname{tr} \operatorname{Hess} (f).\end{aligned}$$

### 7.3 Fórmula de Bochner-Weitzenböck

**Proposição 7.10** (Fórmula de Bochner-Weitzenböck). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana. Se  $f \in C^3(M)$ , então*

$$\frac{1}{2} \Delta (|\nabla f|^2) = |\operatorname{Hess} f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (7.19)$$

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  um ponto fixado e seja  $(E_1, \dots, E_n)$  um referencial geodésico (vide Teorema 7.1) em torno de  $p$ . Usando a Proposição 7.9, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \Delta (|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2} \sum_i E_i E_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_i E_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_i E_i \operatorname{Hess} f(E_i, \nabla f) \\ &= \sum_i E_i \operatorname{Hess} f(\nabla f, E_i) \quad (\text{hessiana é simétrica}) \\ &= \sum_i E_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, E_i \rangle \\ &= \sum_i [\langle \nabla_{E_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, E_i \rangle + \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla_{E_i} E_i \rangle] \quad (\text{compatibilidade da conexão}) \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, E_i \rangle \\ &= \sum_i \langle R(E_i, \nabla f) \nabla f, E_i \rangle + \sum_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \sum_i \langle \nabla_{[E_i, \nabla f]} \nabla f, E_i \rangle\end{aligned} \quad (7.20)$$

O primeiro termo desta soma é, por definição,  $\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ . Para o segundo termo, temos que

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle &= \sum_i \nabla f \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{\nabla f} E_i \rangle \\ &= \nabla f \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle \quad (\text{a última soma zero em } p),\end{aligned} \quad (7.21)$$

e além disso, em  $p$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_i E_i(E_i f) \\
&= \sum_i [\langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla f \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i} \nabla f \rangle] \\
&= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Logo, o segundo termo em  $p$  é dado por

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle &= \nabla f(\Delta f) \\
&= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Para o terceiro termo, temos

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{[E_i, \nabla f]} \nabla f, E_i \rangle &= \sum_i \text{Hess } f([E_i, \nabla f], E_i) \\
&= \sum_i \text{Hess } f(\nabla_{E_i} \nabla f - \nabla_{\nabla f} E_i, E_i) \\
&= \sum_i \text{Hess } f(\nabla_{E_i} \nabla f, E_i) - \sum_i \text{Hess } f(\nabla_{\nabla f} E_i, E_i) \\
&= \sum_i \text{Hess } f(\nabla_{E_i} \nabla f, E_i) \quad (\text{em } p) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f \rangle.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Agora, com relação ao referencial geodésico, temos que  $\nabla f = \sum_j (E_j f) E_j$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} \nabla f &= \nabla_{E_i} \sum_j (E_j f) E_j \\
&= \sum_j \nabla_{E_i} [(E_j f) E_j] \quad (\text{linearidade sobre } \mathbb{R}) \\
&= \sum_j [(E_j f) \nabla_{E_i} E_j + (E_i E_j f) E_j] \quad (\text{regra do produto}) \\
&= \sum_j (E_i E_j f) E_j \quad (\text{em } p).
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f \rangle &= \left\langle \sum_j (E_i E_j f) E_j, \sum_k (E_i E_k f) E_k \right\rangle \\
&= \sum_j \sum_k \langle (E_i E_j f) E_j, (E_i E_k f) E_k \rangle \\
&= \sum_j \sum_k (E_i E_j f) (E_i E_k f) \langle E_j, E_k \rangle \\
&= \sum_j \sum_k (E_i E_j f) (E_i E_k f) \delta_{jk} \\
&= \sum_j (E_i E_j f)^2.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Portanto, no ponto  $p$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{[E_i, \nabla f]} \nabla f, E_i \rangle &= \sum_i \sum_j (E_i E_j f)^2 \\
&= |\text{Hess } f|^2,
\end{aligned} \tag{7.27}$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

**Corolário 7.11.** *Suponhamos que estamos nas condições da Proposição 7.10. Suponhamos ainda que  $\text{Ric}(M) \geq 0$ ,  $|\nabla f| = 1$  e  $\Delta f = 0$ . Então  $\nabla f$  é um campo vetorial paralelo.*

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto de  $M$  e seja  $(\mathcal{U}, (x^i))$  um sistema normal de coordenadas centrado em  $p$ . Pela Fórmula de Bochner-Weitzenböck (usando  $\Delta f = 0$ ), temos

$$0 = \frac{1}{2} \Delta (|\nabla f|^2) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq |\text{Hess } f|^2. \tag{7.28}$$

Como, em  $p$ ,  $|\text{Hess } f|^2 = \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j f)^2$ , concluímos que para quaisquer índices  $i$  e  $j$ ,  $\partial_i \partial_j f = 0$ . Portanto,  $\nabla(\nabla f) = 0$  e, por definição,  $\nabla f$  é um campo paralelo.  $\square$

## Parte II

# Tópicos de análise geométrica

# Capítulo 8

## Teoremas de comparação

Neste capítulo, seguindo [SY94], provaremos Teorema de Comparação da Hessiana, obtaremos estimativas para o gradiente de funções harmônicas e exibiremos um certo tipo de função exaustão que, de certo modo, é “equivalente” a função distância.

### 8.1 Teorema de Comparação da Hessiana

Lembremos alguns fatos que introduzimos na Parte I e que usaremos neste capítulo. Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa. Dado  $p \in M$ , consideremos a aplicação exponencial  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ , definida em  $T_p M$  pois  $M$  é completa.

Seja  $S_p = \{X \in T_p M : \|X\| = 1\}$  a esfera unitária em  $T_p M$ ; para cada  $X \in S_p$ , existe no máximo um *cut point* na geodésica  $\exp_p(tX)$ ,  $t > 0$ . Se  $\exp_p(t_0 X) = q$  é um *cut point* de  $p$ , definimos  $\mu(X) := d(p, q)$  (distância riemanniana entre  $p$  e  $q$ ); se a geodésica  $\exp_p(tX)$ ,  $t > 0$ , não possui *cut point*, definimos  $\mu(X) := \infty$ . Consideremos o conjunto

$$E_p = \{tX : 0 \leq t < \mu(X), X \in S_p\}. \quad (8.1)$$

#### Proposição 8.1.

1.  $\exp_p : E_p \rightarrow \exp_p(E_p)$  é um difeomorfismo.
2.  $\text{Cut}(p) = \partial \exp_p(E_p)$ .
3.  $\text{Cut}(p)$  tem medida  $n$ -dimensional zero.
4.  $M = \exp_p(E_p) \cup \text{Cut}(p)$ .
5.  $\exp_p : E_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$  é um sistema maximal de coordenadas normais em  $p$ .

Seja  $f \in C^2(M)$ . Redefiniremos a hessiana de  $f$  (esta definição é equivalente a anterior) da seguinte forma: Sejam  $X, Y \in T_x M$ ; estendendo  $X$  e  $Y$  a campo vetoriais suaves  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ , respectivamente, em uma vizinhança de  $x$ , definimos:

$$\text{Hess } f(X, Y) = (\tilde{X}\tilde{Y}f)(x) - (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}f)(x), \quad (8.2)$$

onde  $\nabla$  denota a conexão riemanniana em  $M$ . Pode-se verificar que tal definição não depende das extensões  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ .

Seja  $p \in M$ . Para  $x \in M \setminus \text{Cut}(p)$ , seja  $\sigma$  a geodésica minimizante ligando  $p$  e  $x$ , parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $\sigma(0) = p$  e  $\sigma(r) = x$  ( $r$  é a distância radial). Seja  $X$  um vetor em  $T_x M$  tal que  $\langle X, \partial/\partial r \rangle(x) = 0$ . Como  $x$  não é um ponto conjugado de  $p$ , podemos estender  $X$  a um campo de Jacobi  $\tilde{X}$  sobre  $\sigma$ , que satisfaz  $\tilde{X}(\sigma(0)) = 0$ ,  $\tilde{X}(\sigma(r)) = X$ . Além disso, tal campo satisfaz  $[\tilde{X}, \partial/\partial r] = 0$ . Temos então que se  $\hat{X}$  é uma extensão de  $\tilde{X}$  definida na vizinhança normal de  $p$   $M \setminus \text{Cut } p$ , então

$$\begin{aligned} \hat{X}\hat{X}\rho - (\nabla_{\hat{X}}\hat{X})\rho &= \hat{X}\langle \hat{X}, \nabla\rho \rangle - \langle \nabla_{\hat{X}}\hat{X}, \nabla\rho \rangle \\ &= \hat{X}\left\langle \hat{X}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\hat{X}}\hat{X}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\hat{X}}\hat{X}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \hat{X}, \nabla_{\hat{X}}\frac{\partial}{\partial r} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\hat{X}}\hat{X}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{X}, \nabla_{\hat{X}}\frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right\rangle, \end{aligned} \quad (8.3)$$

onde  $\hat{X}$  é uma extensão do campo de Jacobi  $\tilde{X}$  à vizinhança normal de  $p$ , e na última igualdade usamos  $[\tilde{X}, \partial/\partial r] = 0$ . Portanto

$$\text{Hess } \rho(X, X) = \left\langle \hat{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right\rangle(x). \quad (8.4)$$

Notemos ainda que  $\left\langle \hat{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right\rangle(\sigma(0)) = 0$ , pois  $\hat{X}(\sigma(0)) = \tilde{X}(\sigma(0)) = 0$  e assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \text{Hess } \rho(X, X) &= \int_0^r \frac{d}{dt} \left( \left\langle \hat{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right\rangle \circ \sigma \right) dt \\ &= \int_0^r \frac{d}{dt} \left\langle \hat{X} \circ \sigma, \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right) \circ \sigma \right\rangle dt \quad (\hat{X} \circ \sigma \text{ é campo sobre } \sigma) \\ &= \int_0^r \left( \left\langle D_t(\hat{X} \circ \sigma), \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right) \circ \sigma \right\rangle + \left\langle \hat{X} \circ \sigma, D_t \left( \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right) \circ \sigma \right) \right\rangle \right) dt \\ &= \int_0^r \left( \left| \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right) \circ \sigma \right|^2 + \left\langle \hat{X} \circ \sigma, \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\hat{X} \right) \circ \sigma \right\rangle \right) dt, \end{aligned} \quad (8.5)$$

sendo que a última igualdade é válida pois

$$\begin{aligned} D_t(\widehat{X} \circ \sigma)(t) &= \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \widehat{X} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \Big|_{\sigma(t)} \widehat{X} \\ &= \left[ \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{X} \right) \circ \sigma \right] (t) \end{aligned} \quad (8.6)$$

e

$$\begin{aligned} D_t \left[ \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{X} \right) \circ \sigma \right] (t) &= \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{X} \right) \\ &= \left[ \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{X} \right) \circ \sigma \right] (t). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Como  $\widetilde{X}$  é um campo de Jacobi, ou seja, satisfaz

$$D_t^2 \widetilde{X} + R(\widetilde{X}, \dot{\sigma}) \dot{\sigma} = 0, \quad (8.8)$$

onde  $R(\cdot, \cdot)$  é a curvatura riemanniana de  $M$  (endomorfismo de curvatura), temos que o campo  $\widehat{X}$  satisfaz (sobre os pontos da curva  $\sigma$ )

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{X} + R \left( \widehat{X}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} = 0. \quad (8.9)$$

Concluimos que

$$\text{Hess } \rho(X, X) = \int_0^r \left( \left| \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{X} \right) \circ \sigma \right|^2 - \left\langle R \left( \widehat{X}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r}, \widehat{X} \right\rangle \circ \sigma \right) dt. \quad (8.10)$$

**Observação.** O lado direito da equação (8.10) é a forma índice  $I_0^r(\widetilde{X})$  para um campo vetorial  $\widetilde{X}$  sobre  $\sigma$ .

**Teorema 8.2** (Teorema de Comparação da Hessiana). *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas  $n$ -variedades riemannianas completas. Suponhamos que  $\gamma_i : [0, a] \rightarrow M_i$ , ( $i = 1, 2$ ), são duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco e  $\gamma_i$  não intersecta o cut locus de  $\gamma_i(0)$ . Seja  $\rho_i$  a função distância até o ponto  $\gamma_i(0)$  em  $M_i$  e seja  $K_i$  a curvatura seccional de  $M_i$ . Suponhamos ainda que em  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$ ,  $0 \leq t \leq a$ , temos*

$$K_1(X_1, \dot{\gamma}_1) \geq K_2(X_2, \dot{\gamma}_2), \quad (8.11)$$

onde  $X_i$  é um vetor unitário em  $T_{\gamma_i(t)}M_i$  perpendicular a  $\dot{\gamma}_i$ . Então,

$$\text{Hess } \rho_1(X_1, X_1) \leq \text{Hess } \rho_2(X_2, X_2), \quad (8.12)$$

onde  $X_i \in T_{\gamma_i(a)}M_i$  com  $\langle X_i, \dot{\gamma}_i \rangle(\gamma_i(a)) = 0$  e  $|X_i| = 1$ .

*Demonstração.* Como a imagem de  $\gamma_i$  não intersecta  $\text{Cut}(\gamma_i(0))$ ,  $\gamma_i$  está contida na vizinhança

normal maximal de  $\gamma_i(0)$ . Sejam  $(E_1^1, \dots, E_n^1)$  e  $(E_1^2, \dots, E_n^2)$  dois referenciais ortonormais sobre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente (i.e., para cada instante  $t$ ,  $\{E_1^i(t), \dots, E_n^i(t)\}$  é uma base ortonormal para  $T_{\gamma_i(t)}M$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ), com

$$E_n^1 = \dot{\gamma}_1 \quad \text{e} \quad E_n^2 = \dot{\gamma}_2. \quad (8.13)$$

Para  $i \in \{1, 2\}$ , consideremos o campo de Jacobi  $\tilde{X}_i$  sobre  $\gamma_i$  que satisfaz  $\tilde{X}_i(\gamma_i(0)) = 0$  e  $\tilde{X}_i(\gamma_i(a)) = X_i$ . Consideremos então uma extensão  $\hat{X}_i$  do campo  $\tilde{X}_i$  definida numa vizinhança de  $\gamma_i(0)$ . Da equação (8.10), temos (no ponto  $\gamma_i(a)$ )

$$\text{Hess } \rho_i(X_i, X_i) = \int_0^a \left( \left| (\nabla_{\dot{\gamma}_i} \hat{X}_i) \circ \gamma_i \right|^2 - \left\langle R_i \left( \hat{X}_i \circ \gamma_i, \dot{\gamma}_i \right) \dot{\gamma}_i, \hat{X}_i \circ \gamma_i \right\rangle \right) dt, \quad (8.14)$$

Como  $\langle X_i, \dot{\gamma}_i \rangle = 0$ ,  $\hat{X}_i$  é perpendicular a  $E_n^i$  em cada ponto de  $\gamma_i$  (Corolário 6.14). Deste modo, o campo de Jacobi  $\tilde{X}_2$  pode ser escrito como

$$\tilde{X}_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j E_j^2, \quad \lambda_j \in C^\infty [0, a]. \quad (8.15)$$

Tomemos  $\{E_j^1\}$  de modo que

$$X_1 = \tilde{X}_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(a) E_j^1(\gamma_1(a)). \quad (8.16)$$

Definimos então um campo vetorial sobre  $\gamma_1$  por

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j E_j^1. \quad (8.17)$$

Assim,  $Z(0) = \tilde{X}_1(0)$  e  $Z(a) = \tilde{X}_1(a)$ . Além disso,  $|Z| = |\tilde{X}_2|$  e

$$\left| \nabla_{\dot{\gamma}_2} \hat{X}_2 \right| = \left| \sum \lambda_j'(t) E_j^2 \right| = \left| \sum \lambda_j'(t) E_j^1 \right| = |\nabla_{\dot{\gamma}_1} Z|. \quad (8.18)$$

Nestas condições temos, pelo Lema do Índice (Lema 6.17), que  $I_0^a(\tilde{X}_1) \leq I_0^a(Z)$  e então

$$\begin{aligned} \text{Hess } \rho_1(X_1, X_1) &= I_0^a(\tilde{X}_1) \leq I_0^a(Z) \\ &= \int_0^a \left( \left| (\nabla_{\dot{\gamma}_1} Z) \circ \gamma_1 \right|^2 - \left\langle R(Z \circ \gamma_1, \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_1, Z \circ \gamma_1 \right\rangle \right) dt \\ &= \int_0^a \left( \left| (\nabla_{\dot{\gamma}_2} \hat{X}_2) \circ \gamma_2 \right|^2 - K_1(Z \circ \gamma_1, \dot{\gamma}_1) \right) dt \\ &\leq \int_0^a \left( \left| (\nabla_{\dot{\gamma}_2} \hat{X}_2) \circ \gamma_2 \right|^2 - K_2(\hat{X}_2 \circ \gamma_2, \dot{\gamma}_2) \right) dt \\ &= I_0^a(\tilde{X}_2) = \text{Hess } \rho_2(X_2, X_2), \end{aligned} \quad (8.19)$$

e o teorema está demonstrado.  $\square$

O seguinte teorema é um resultado análogo ao anterior para o caso em que a curvatura de Ricci de  $M$  é limitada inferiormente.

**Teorema 8.3** (Teorema de Comparação do Laplaciano). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)k^2$ , onde  $k \geq 0$ . Seja  $N$  um espaço forma com curvatura seccional constante igual a  $-k^2$ . Sejam  $\rho_M$  e  $\rho_N$  as funções distância (a um ponto fixado) em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Se  $x \in M$  e  $\rho_M$  é diferenciável em  $x$ , então para qualquer  $y \in N$  com  $\rho_N(y) = \rho_M(x)$ ,*

$$\Delta \rho_M(x) \leq \Delta \rho_N(y). \quad (8.20)$$

Deste modo, calculando o laplaciano da função distância no espaço forma, temos que se  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)k$ , então

$$\Delta \rho \leq \frac{n-1}{\rho} \left(1 + \sqrt{k} \rho\right) \quad (8.21)$$

no sentido das distribuições.

## 8.2 Estimativas do gradiente de funções harmônicas

**Teorema 8.4.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa de dimensão  $n$ ,  $n \geq 2$ , com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , onde  $K \geq 0$  é uma constante. Suponhamos que  $u$  é uma função harmônica positiva em  $M$  e que  $B_a(x)$  é uma bola geodésica em  $M$ . Então,*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \left( \frac{1 + a\sqrt{K}}{a} \right) \quad \text{em } B_{\frac{a}{2}}(x), \quad (8.22)$$

onde  $C_n$  é uma constante positiva que depende apenas de  $n$ .

*Demonstração.* Dado  $p \in M$ , pela Proposição 7.10, temos que no ponto  $p$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (|\nabla u|^2) &= |\text{Hess } u|^2 + \langle \nabla u, \nabla (\Delta u) \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ &\geq |\text{Hess } u|^2 - (n-1)K |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Consideremos agora um sistema normal de coordenadas  $(x^i, \mathcal{U})$  centrado em  $p$  satisfazendo

$$\partial_1 u(p) = |\nabla u|(p) \quad \text{e} \quad \partial_i u(p) = 0 \quad \text{para } i \geq 2. \quad (8.24)$$

Seja  $(E_1, \dots, E_n)$  um referencial geodésico em torno de  $p$  (vide Teorema 7.1) tal que  $E_i|_p = \partial_i|_p$

para cada índice  $i$ . Usando a Proposição 7.9, temos em  $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
 E_j (|\nabla u|) &= E_j \left( \sqrt{\sum_i (E_i u)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_i (E_i u)^2}} \left( E_j \sum_i (E_i u)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\nabla u|} \left( \sum_i E_j (E_i u)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\nabla u|} \left( \sum_i 2 [(E_j E_i u) E_i u] \right) \\
 &= \frac{1}{|\nabla u|} \sum_i (E_j E_i u) E_i u.
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Assim, em  $p$

$$E_j (|\nabla u|) = \partial_j (|\nabla u|) = \partial_j \partial_1 u, \tag{8.26}$$

e então

$$\begin{aligned}
 |\nabla (|\nabla u|)|^2 &= \sum_j (\partial_j |\nabla u|)^2 \\
 &= \sum_j (\partial_j \partial_1 u)^2.
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

Mas,

$$\Delta (|\nabla u|^2) = 2 |\nabla u| \Delta (|\nabla u|) + 2 |\nabla (|\nabla u|)|^2. \tag{8.28}$$

Combinando (8.23), (8.27) e (8.28), temos

$$|\text{Hess } u|^2 - (n-1)K |\nabla u|^2 \leq |\nabla u| \Delta (|\nabla u|) + \sum_j (\partial_j \partial_1 u)^2. \tag{8.29}$$

Então, como  $|\text{Hess } u|^2 = \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j u)^2$ ,

$$\begin{aligned}
 |\nabla u| \Delta (|\nabla u|) + (n-1)K |\nabla u|^2 &\geq \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j u)^2 - \sum_j (\partial_j \partial_1 u)^2 \\
 &\geq \sum_{i \neq 1} (\partial_i \partial_1 u)^2 + \sum_{i \neq 1} (\partial_i \partial_i u)^2 \\
 &\geq \sum_{i \neq 1} (\partial_i \partial_1 u)^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i \neq 1} \partial_i \partial_i u \right)^2.
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Como, em  $p$ ,  $\Delta u = \sum \partial_i \partial_i u = 0$ , temos que  $(\partial_1 \partial_1 u)^2 = (\sum_{i \neq 1} \partial_i \partial_i u)^2$ . Segue de (8.27) e da

desigualdade acima que

$$|\nabla u| \Delta(|\nabla u|) + (n-1)K|\nabla u|^2 \geq \frac{1}{n-1} |\nabla(|\nabla u|)|^2. \quad (8.31)$$

Agora, seja  $\phi = \frac{|\nabla u|}{u}$ . Queremos uma estimativa inferior para  $\phi$ . Temos,

$$\nabla \phi = \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2}. \quad (8.32)$$

Como  $|\nabla u| = \phi u$  temos, por (8.31), que em qualquer ponto onde  $\nabla u \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(|\nabla u|) &= u\Delta\phi + \phi\Delta u + 2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle \\ &= u\Delta\phi + 2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{\Delta(|\nabla u|)}{u} - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &= \frac{|\nabla u|\Delta(|\nabla u|)}{|\nabla u|u} - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &\geq \frac{1}{|\nabla u|u} \left( \frac{1}{n-1} |\nabla(|\nabla u|)|^2 - (n-1)K|\nabla u|^2 \right) - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &= \frac{1}{(n-1)|\nabla u|u} |\nabla(|\nabla u|)|^2 - (n-1)K\phi - \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Tomando  $\varepsilon = 2/(n-1) > 0$ , segue de (8.32) que

$$\begin{aligned} \frac{2\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} &= \frac{(2-\varepsilon)\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} + \frac{\varepsilon\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &= (2-\varepsilon) \frac{\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} + \varepsilon \frac{\langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle}{u^2} - \varepsilon \frac{|\nabla u|^3}{u^3} \\ &\leq (2-\varepsilon) \frac{\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} + \varepsilon \frac{|\nabla(|\nabla u|)| |\nabla u|}{u^2} - \varepsilon\phi^3. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{|\nabla|\nabla u|| |\nabla u|}{u^2} &= \varepsilon \frac{|\nabla|\nabla u||}{(|\nabla u|u)^{1/2}} \cdot \frac{|\nabla u|^{3/2}}{u^{3/2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|u} + \frac{|\nabla u|^3}{u^3} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|u} + \phi^3 \right). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Usando (8.35) e (8.36), obtemos

$$\Delta\phi \geq -(n-1)K\phi - \left( 2 - \frac{2}{n-1} \right) \frac{\langle \nabla\phi, \nabla u \rangle}{u} + \frac{1}{n-1} \phi^3. \quad (8.37)$$

Consideremos agora a função  $F : B_a(x) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(y) = (a^2 - \rho^2)\phi(y) = (a^2 - \rho^2)\frac{|\nabla u|}{u}(y),$$

onde  $\rho(y) = d(y, x)$ . Como  $F|_{\partial B_a(x)} = 0$ , se  $\nabla u \neq 0$  (em  $B_a(x)$ ), então  $F$  deve atingir seu máximo em algum ponto  $x_0 \in B_a(x)$ . Suponhamos que  $x_0$  não é um *cut point* de  $x$ . Então  $F$  é suave numa vizinhança de  $x$  e, pelo princípio do máximo

$$\nabla F(x_0) = 0, \quad (8.38)$$

$$\Delta F(x_0) \leq 0. \quad (8.39)$$

Por (8.38) e (8.39), temos em  $x_0$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \rho^2}{a^2 - \rho^2} &= \frac{\nabla \phi}{\phi}, \\ -\frac{\Delta \rho^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{2\langle \nabla \rho^2, \nabla \phi \rangle}{(a^2 - \rho^2)\phi} &\leq 0. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Segue que

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{\Delta \rho^2}{(a^2 - \rho^2)} - \frac{2|\nabla \rho^2|^2}{(a^2 - \rho^2)^2} \leq 0. \quad (8.41)$$

Notemos que

$$|\nabla \rho^2| = 2\rho |\nabla \rho| = 2\rho, \quad (8.42)$$

e por (8.21), temos

$$\begin{aligned} \Delta \rho^2 &= 2\rho |\nabla \rho|^2 \\ &= 2 + 2\rho \Delta \rho \\ &\leq 2 + 2(n-1) \left(1 + \sqrt{K} \rho\right) \\ &\leq C \left(1 + \sqrt{K} \rho\right), \end{aligned} \quad (8.43)$$

onde  $C$  é uma constante que depende apenas de  $n$ . Usando a desigualdade anterior e as equações (8.37) e (8.41), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{C(1 + \sqrt{K} \rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2} \\ &\geq -(n-1)K - \left(2 - \frac{2}{n-1}\right) \frac{\langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{\phi u} + \frac{1}{n-1} \phi^2 - \frac{C(1 + \sqrt{K} \rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Temos ainda, por (8.40),

$$\frac{\langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{\phi u} = \frac{2\rho \langle \nabla \rho \cdot \nabla u \rangle}{(a^2 - \rho^2)u} \leq \frac{2\rho}{a^2 - \rho^2} \phi. \quad (8.45)$$

Substituindo em (8.44) e usando  $F = (a^2 - \rho^2)\phi$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq -(n-1)K - \left(2 - \frac{1}{n-1}\right) \frac{2\rho}{a^2 - \rho^2} \phi + \frac{1}{n-1} \phi^2 - \frac{C(1 + \sqrt{k}\rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2} \\ \implies 0 &\geq -(n-1)K(a^2 - \rho^2)^2 - \left(2 - \frac{2}{n-1}\right) 2\rho(a^2 - \rho^2)\phi \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \phi^2(a^2 - \rho^2)^2 - C(1 + \sqrt{K}\rho)(a^2 - \rho^2) - 8\rho^2 \\ &= \frac{1}{n-1} F^2 - \frac{4(n-2)}{n-1} \rho F - C(1 + \sqrt{K}\rho)(a^2 - \rho^2) - 8\rho^2 - (n-1)K(a^2 - \rho^2)^2 \\ &\geq \frac{1}{n-1} F^2 - 2C_1 a F - C(1 + \sqrt{K}\rho)a^2 - 8a^2 - (n-1)Ka^4 \\ &\geq \frac{1}{n-1} F^2 - 2C_1 a F - C_2(1 + \sqrt{K}a)^2 a^2, \end{aligned} \quad (8.46)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que dependem apenas de  $n$ . Daí,

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \sup_{y \in B_a(x)} F(y) \\ &\leq (n-1) \left[ C_1 a + \sqrt{C_1^2 a^2 + \frac{C_2}{n-1} a^2 (1 + \sqrt{K}a)^2} \right] \\ &\leq C'_n a (1 + \sqrt{K}a). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Então, na bola  $B_{\frac{a}{2}}(x)$ , temos

$$\frac{3a^2}{4} \sup_{B_{\frac{a}{2}}(x)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C'_n a (1 + \sqrt{K}a), \quad (8.48)$$

i.e.,

$$\sup_{B_{\frac{a}{2}}(x)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n a \left( \frac{1 + \sqrt{K}a}{a} \right), \quad (8.49)$$

onde  $C_n$  é uma constante que depende apenas de  $n$ . O teorema está demonstrado para o caso em que  $x_0$  não é um *cut point* de  $x$ .

Suponhamos agora que o ponto de máximo  $x_0$  de  $F$  é um *cut point* de  $x$ . Seja  $\sigma$  a geodésica minimizante ligando  $x$  e  $x_0$ . Seja  $\varepsilon > 0$  pequeno e seja  $\bar{x}$  outro ponto de  $\text{Im } \sigma$  com  $d(\bar{x}, x) < \varepsilon$ . Notemos que, em  $\text{Im } \sigma$ , não existem pontos conjugados a  $\bar{x}$ , então existe uma vizinhança regular  $N_{\bar{x}}$  da geodésica  $\sigma$  que não contém pontos conjugados de  $\bar{x}$ . Seja  $\rho_{\bar{x}}(y) = d(y, \bar{x})$ . Pela

desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}\rho_{\bar{x}}(y) + \varepsilon &\geq \rho(y), \\ \rho_{\bar{x}}(x_0) + \varepsilon &= \rho(x_0).\end{aligned}\tag{8.50}$$

Consideremos a função  $\bar{F}$  dada por

$$\bar{F}(y) = \left[ a^2 - (\rho_{\bar{x}}(y) + \varepsilon)^2 \right] \frac{|\nabla u|}{u}.\tag{8.51}$$

Por (8.50), temos

$$\bar{F}(y) \leq F(y) \quad \text{e} \quad \bar{F}(x_0) = F(x_0).\tag{8.52}$$

Deste modo,  $x_0$  também é ponto de máximo para  $\bar{F}$ . Como  $\rho$  é suave numa vizinhança de  $x_0$ , aplicamos o princípio do máximo para obter a estimativa para  $\bar{F}$ . Tomando os limites  $\bar{x} \rightarrow x$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos (8.22).  $\square$

**Corolário 8.5.** *Em uma variedade riemanniana completa  $M$  como curvatura de Ricci não negativa, não existem funções harmônicas positivas não-constantas.*

*Demonstração.* Notemos que se a variedade  $M$  é compacta, então este resultado é verdadeiro mesmo sem nenhuma hipótese sobre a curvatura de Ricci (pois funções harmônicas não constantas não assumem máximo ou mínimo interiores). Suponhamos então que  $M$  não é compacta. Como, por hipótese,  $\text{Ric}(M) \geq 0$ , temos que (8.22) é válida com  $K = 0$ . Tomando o limite  $a \rightarrow +\infty$ , obtemos  $|\nabla u| = 0$ . Portanto, qualquer função harmônica positiva em  $M$  é constante.  $\square$

**Corolário 8.6.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ . Suponhamos que  $B_a$  é uma bola geodésica de raio  $a$  em  $M$  e que  $u$  é uma função harmônica em  $B_a$ . Então,*

$$\sup_{B_{\frac{a}{2}}} |\nabla u| \leq C_n \left( \frac{1 + \sqrt{K} a}{a} \right) \sup_{B_a} |u|,\tag{8.53}$$

para alguma constante positiva  $C_n$  que depende apenas de  $n$ .

*Demonstração.* Seja  $A := \sup_{B_a} |u|$ . Então  $v := u + A + \varepsilon > 0$ . Além disso,  $v$  é uma função harmônica positiva, podemos aplicar o Teorema 8.4 para  $v$ , obtendo

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\frac{a}{2}}} |\nabla u| &= \sup_{B_{\frac{a}{2}}} |\nabla v| \\ &\leq C_n \left( \frac{1 + \sqrt{K} a}{a} \right) \sup_{B_{\frac{a}{2}}} (u + A + \varepsilon) \\ &\leq C_n \left( \frac{1 + \sqrt{K} a}{a} \right) \left( 2 \sup_{B_a} |u| + \varepsilon \right).\end{aligned}\tag{8.54}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos a demonstração.  $\square$

**Corolário 8.7.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e não-compacta satisfazendo  $\text{Ric}(M) \geq K$ . Se  $u$  é uma função harmônica positiva em  $M$ , então*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C(n, \sqrt{K}). \quad (8.55)$$

*Demonstração.* Basta aplicarmos o Teorema 8.4 com  $a \geq 1$ .  $\square$

**Teorema 8.8.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ . Suponhamos que  $u > 0$  é uma solução de  $\Delta u = \lambda u$  em  $M$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva. Então,*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C(n, K, \lambda). \quad (8.56)$$

*Demonstração.* Para provar este resultado usaremos a mesma técnica usada para demonstrar o Teorema 8.4. Dado  $p \in M$ , temos que no ponto  $p$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (|\nabla u|^2) &= |\text{Hess } u|^2 + \langle \nabla u, \nabla (\Delta u) \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ &= |\text{Hess } u|^2 + \langle \nabla u, \nabla (\lambda u) \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ &= |\text{Hess } u|^2 + \lambda \langle \nabla u, \nabla u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ &= |\text{Hess } u|^2 + \lambda |\nabla u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ &\geq |\text{Hess } u|^2 + (\lambda - (n-1)K) |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Consideremos agora um sistema normal de coordenadas  $((x^i), \mathcal{U})$  centrado em  $p$  satisfazendo

$$\partial_1 u(p) = |\nabla u|(p) \quad \text{e} \quad \partial_i u(p) = 0, \quad \forall i \geq 2. \quad (8.58)$$

Seja  $(E_1, \dots, E_n)$  um referencial geodésico definido em  $\mathcal{U}$  tal que  $E_i|_p = \partial_i|_p$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  (Teorema 7.1). Temos em  $\mathcal{U}$ :

$$E_j(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u|} \sum_i (E_j E_i) E_i u; \quad (8.59)$$

logo, em  $p$  (daqui pra frente as funções são todas calculadas no ponto  $p$ ),

$$E_j(|\nabla u|) = \partial_j(|\nabla u|) = \partial_j \partial_1 u, \quad (8.60)$$

o que implica que

$$|\nabla(\nabla u)|^2 = \sum_j (\partial_j \partial_1 u)^2. \quad (8.61)$$

Combinando (8.60), (8.61) e (8.28), temos

$$|\text{Hess } u|^2 - ((n-1)K - \lambda) |\nabla u|^2 \leq |\nabla u| \Delta (|\nabla u|) + \sum_j (\partial_j \partial_1 u)^2. \quad (8.62)$$

Segue que, repetindo o argumento em (8.30), temos

$$|\nabla u| \Delta (|\nabla u|) + ((n-1)K - \lambda) |\nabla u|^2 \geq \sum_{i \neq 1} (\partial_i \partial_1 u)^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i \neq 1} \partial_i \partial_1 u \right)^2. \quad (8.63)$$

Como, em  $p$ ,  $\Delta u = \sum \partial_i \partial_i u = \lambda u$ , segue que  $\left( \sum_{i \neq 1} \partial_i \partial_1 u \right)^2 = (\partial_1 \partial_1 u + \lambda u)^2$ . Daí, usando o fato de  $\lambda > 0$  e  $u > 0$

$$\begin{aligned} |\nabla u| \Delta (|\nabla u|) + ((n-1)K - \lambda) |\nabla u|^2 &\geq \sum_{i \neq 1} (\partial_i \partial_1 u)^2 + \frac{1}{n-1} (\partial_1 \partial_1 u + \lambda u)^2 \\ &\geq \sum_{i \neq 1} (\partial_i \partial_1 u)^2 + \frac{1}{n-1} (\partial_1 \partial_1 u)^2 \\ &\geq \frac{1}{n-1} |\nabla (|\nabla u|)|^2. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Agora, definimos  $\phi = \frac{|\nabla u|}{u}$ . Como anteriormente, queremos uma estimativa inferior para  $\phi$ . Temos

$$\nabla \phi = \frac{\nabla |\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u| \nabla u}{u^2}. \quad (8.65)$$

Como  $|\nabla u| = \phi u$ , temos que em qualquer ponto onde  $\nabla u \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta (|\nabla u|) &= u \Delta \phi + \phi \Delta u + 2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle \\ &= u \Delta \phi + \phi (\lambda u) + 2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \Delta \left( \frac{|\nabla u|}{u} \right) = \frac{\Delta (|\nabla u|)}{u} - \lambda \phi - \frac{2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &= \frac{|\nabla u| \Delta (|\nabla u|)}{|\nabla u| u} - \lambda \phi - \frac{2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &\geq \frac{1}{|\nabla u| u} \left( \frac{1}{n-1} |\nabla (|\nabla u|)|^2 - ((n-1)K - \lambda) |\nabla u|^2 \right) - \lambda \phi - \frac{2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &= \frac{1}{(n-1) |\nabla u| u} |\nabla (|\nabla u|)|^2 - ((n-1)K - \lambda) \phi - \lambda \phi - \frac{2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{u} \\ &= \frac{1}{(n-1) |\nabla u| u} |\nabla (|\nabla u|)|^2 - (n-1)K \phi - \frac{2 \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle}{u}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Note que a desigualdade acima é a mesma da desigualdade (8.34). Além disso, o que segue de

(8.34) não utiliza o fato de  $u$  ser harmônica. Portanto, agora basta repetirmos os argumentos da demonstração do Teorema 8.4.  $\square$

### 8.3 Variedades com curvatura de Ricci limitada inferiormente

**Teorema 8.9.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ . Dado  $p \in M$ , existe uma constante  $C = C(n, K)$  tal que*

$$\text{Vol } B_x(1) \geq e^{-C\rho(x)} \text{Vol } B_p(1), \quad \forall x \in M, \quad (8.68)$$

onde  $\rho(x) = d(x, p)$ .

*Demonstração.* Seja  $x$  um ponto de  $M$  e seja  $\sigma$  a distância até  $x$ , i.e.,  $\sigma(y) = d(x, y)$ . Denotemos por  $B_x(t)$  a bola geodésica de centro  $x$  e raio  $t$ . Afirmamos que a função

$$F(t) = t^{-n} e^{-Ct} \text{Vol } B_x(t) \quad (8.69)$$

é decrescente para  $t \geq 0$ , onde  $C$  é uma constante com  $C \geq (n-1)\sqrt{K}$ .

De fato, como  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , temos por (8.21) que, em  $M \setminus (\text{Cut}(x) \cup \{x\})$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^2 &= 2\sigma\Delta\sigma + 2\langle\nabla\sigma, \nabla\sigma\rangle \\ &= 2\sigma\Delta\sigma + 2 \\ &\leq 2\sigma\left(\frac{n-1}{\sigma}(1 + \sqrt{K}\sigma)\right) + 2 \\ &= 2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Como  $\text{Cut}(x) \cup \{x\}$  é um conjunto de medida nula, temos que  $\Delta\sigma^2 \leq 2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma$  no sentido das distribuições. Ou seja, dada  $\varphi \in C_0^\infty(M)$ , temos

$$\int_M (\Delta\sigma^2) \varphi \leq \int_M \left(2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma\right) \varphi. \quad (8.71)$$

Tomemos uma sequência de conjuntos compactos  $(\Omega_k)$  de modo que:  $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ , para todo  $k$ , e  $\cup \Omega_k = B_x(t)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $\varphi_k \in C_0^\infty(M)$  tal que  $\Omega_k \subset \text{supp } \varphi_k$ ,  $\varphi_k = 1$  em  $\Omega_k$  e  $\varphi_k = 0$  em  $M \setminus B_x(t)$ . Tais funções tem, de fato, suporte compacto pois  $M$  é uma variedade completa e  $\overline{B_x(t)}$  é fechado e limitado. Por (8.71), temos

$$\begin{aligned} \int_M (\Delta\sigma^2) \varphi_k &\leq \int_M \left(2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma\right) \varphi_k \\ \implies \int_{B_x(t)} (\Delta\sigma^2) \varphi_k &\leq \int_{B_x(t)} \left(2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma\right) \varphi_k. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Além disso, em  $B_x(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma^2) \varphi_k &\rightarrow \Delta\sigma^2 \quad \text{q.t.p.}, \\ \left(2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma\right) \varphi_k &\rightarrow 2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma \quad \text{q.t.p.} \end{aligned} \quad (8.73)$$

e  $2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma$  é uma função positiva em  $B_x(t)$  tal que

$$\left|(\Delta\sigma^2) \varphi_k\right| \leq \left|\left(2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma\right) \varphi_k\right| \leq 2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma \quad \text{q.t.p.}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (8.74)$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 \leq \int_{B_x(t)} 2n + 2(n-1)\sqrt{K}\sigma. \quad (8.75)$$

Portanto,

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 \leq 2n \text{Vol } B_x(t) + 2(n-1)\sqrt{K} \int_{B_x(t)} \sigma. \quad (8.76)$$

Por outro lado, usando a identidade de Green

$$\int_M u \Delta v \, dV_g + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV_g = \int_{\partial M} u N v \, dV_{\tilde{g}}, \quad (8.77)$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 &= \int_{\partial B_x(t)} N \sigma^2 \\ &= \int_{\partial B_x(t)} \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 \quad (\text{Lema de Gauss}) \\ &= \int_{\partial B_x(t)} 2\sigma \frac{\partial}{\partial r} \sigma \\ &= \int_{\partial B_x(t)} 2t \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \nabla \sigma \right\rangle \\ &= \int_{\partial B_x(t)} 2t \langle \nabla \sigma, \nabla \sigma \rangle \\ &= 2t \text{Vol } \partial B_x(t) \\ &= 2t \left. \frac{\partial \text{Vol } B_x(s)}{\partial s} \right|_{s=t} \end{aligned} \quad (8.78)$$

Se  $V(t) = \text{Vol } B_x(t)$ , por (8.71), temos que

$$\begin{aligned} 2tV'(t) &\leq 2nV(t) + 2(n-1)\sqrt{K} \int_{B_x(t)} \sigma \\ &\leq 2nV(t) + 2(n-1)\sqrt{K} tV(t). \end{aligned} \quad (8.79)$$

Então, para  $C \geq (n-1)\sqrt{K}$ , temos que

$$tV' \leq nV + CtV, \quad (8.80)$$

o que é equivalente a

$$\frac{d}{dt} (t^{-n} e^{-Ct} V(t)) \leq 0, \quad (8.81)$$

e provamos assim a afirmação. Então, se  $t \geq 1$ , temos que  $F(1) \geq F(t)$ , i.e.,

$$e^{-C} \text{Vol } B_x(1) \geq t^{-n} e^{-Ct} \text{Vol } B_x(t). \quad (8.82)$$

Tomando então  $t = d(x, p) + 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} e^{-C} \text{Vol } B_x(1) &\geq (\rho(x) + 1)^{-n} e^{-C(\rho(x)+1)} \text{Vol } B_x(\rho(x) + 1) \\ &\geq e^{-C(\rho(x)+1)} \text{Vol } B_x(\rho(x) + 1) \\ &\geq e^{-C(\rho(x)+1)} \text{Vol } B_p(1), \end{aligned} \quad (8.83)$$

onde na última desigualdade acima usamos  $B_p(1) \subset B_x(1 + \rho(x))$ . Portanto,

$$\text{Vol } B_x(1) \leq e^{-C\rho(x)} \text{Vol } B_p(1), \quad (8.84)$$

o que demonstra o teorema.  $\square$

**Teorema 8.10.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq -K$ , onde  $K \geq 0$  é constante. Então existe uma função própria  $f \in C^\infty(M)$  tal que*

$$|\nabla f| \leq C, \quad f \geq C\rho \quad e \quad |\Delta f| \leq C, \quad (8.85)$$

onde  $C$  é uma constante e  $\rho$  é a função distância a um ponto fixado de  $M$ .

*Demonstração.* A demonstração será realizada em 3 passos.

Passo 1. Seja  $p \in M$  e  $\rho(x) = d(x, p)$ . Denotaremos a bola geodésica com centro em  $p$  e raio  $R$  por  $B_R$ . Para  $R > 1$ , resolvemos em  $B_R \setminus B_1$  o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta h_R &= \lambda h_R \quad \text{em } B_R \setminus B_1, \\ h_R|_{\partial B_1} &= 1, \\ h_R|_{\partial B_R} &= 0, \end{cases} \quad (8.86)$$

onde  $\lambda$  é uma constante a ser determinada depois. Da teoria de equações elípticas de segunda ordem, sabemos que existe uma solução  $h_R$  para o problema (8.86). Além disso, pelo princípio do máximo, esta solução satisfaz

$$0 < h_R(x) < 1, \quad \forall x \in B_R \setminus B_1. \quad (8.87)$$

Suponhamos que  $R_2 > R_1 > 1$ . Então, a função  $v = h_{R_2} - h_{R_1}$ , satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v &= \lambda v \text{ em } B_{R_1} \setminus B_1, \\ v|_{\partial B_1} &= 0, \\ v|_{\partial B_{R_1}} &= h_{R_2}|_{\partial B_{R_1}}, \end{cases} \quad (8.88)$$

pois

$$\begin{aligned} \Delta(h_{R_2} - h_{R_1}) &= \Delta h_{R_2} - \Delta h_{R_1} = \lambda(h_{R_2} - h_{R_1}), \\ h_{R_2}|_{\partial B_1} &= 0, \quad h_{R_1}|_{\partial B_1} = 1 \quad \text{e} \quad h_{R_1}|_{\partial B_{R_1}} = 0. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Novamente pelo princípio do máximo, temos que  $v = h_{R_2} - h_{R_1} > 0$  em  $B_{R_1} \setminus B_1$ . Assim, para cada  $x \in M$ , a família  $\{h_R(x)\}$  é crescente e limitada superiormente. Segue que o limite

$$h(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} h_R(x) \quad (8.90)$$

existe.

Seja  $(R_i)$  uma sequência de números reais,  $R_i > 1$ , com  $R_i \rightarrow \infty$  e seja  $\Omega_i = B_{R_i} \setminus B_1$ . Como  $h_R$  é uniformemente limitada ( $0 \leq h_R \leq 1$ ), temos pela estimativa de Schauder para  $h_R$  com  $R \geq R_i + 1$  que, para cada inteiro positivo  $k$ ,

$$\|h_R\|_{C^k(\overline{\Omega_i})} \leq C(k, i). \quad (8.91)$$

Portanto, tomando uma subsequência diagonal, podemos mostrar que existe uma sequência  $(h_{R_i})$  que converge em  $C^k(\overline{\Omega_i})$  para  $h$  em  $\overline{\Omega_i}$ . Segue que  $h \in C^\infty(M)$  e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta h = \lambda h \text{ em } M \\ h|_{\partial B_1} = 1 \\ 0 < h < 1 \text{ em } M \setminus \overline{B_1} \end{cases}. \quad (8.92)$$

Passo 2. Provaremos agora que  $h(x) = O(e^{-C\rho(x)})$  quanto  $\rho \rightarrow \infty$  (provaremos que  $h(x) \leq \tilde{C}e^{-C\rho(x)}$  para uma constante  $\tilde{C} > 0$  e  $x$  suficientemente distante de  $p$ .)

Seja  $C > 0$  uma constante. Usando a fórmula de integral por partes

$$\int_M \langle \nabla u, X \rangle = - \int_M u \operatorname{div} X + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle, \quad (8.93)$$

onde  $N$  é o campo vetorial unitário normal a  $\partial M$ , temos

$$\int_{B_R \setminus \overline{B_1}} \langle \nabla (e^{C\rho} h_R), \nabla h_R \rangle = - \int_{B_R \setminus \overline{B_1}} e^{C\rho} h_R \operatorname{div} (\nabla h_R) + \int_{\partial(B_R \setminus \overline{B_1})} e^{C\rho} h_R \langle \nabla h_R, N \rangle. \quad (8.94)$$

Então, lembrado que  $h_R|_{\partial B_R} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R \Delta h_R &= \int_{\partial B_1} e^{C\rho} h_R \left\langle \nabla h_R, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle - \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} \langle \nabla (e^{C\rho} h_R), \nabla h_R \rangle \\
 &= e^C \int_{\partial B_1} \frac{\partial}{\partial r} h_R - \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} \langle e^{C\rho} \nabla h_R + C e^{C\rho} h_R \nabla \rho, \nabla h_R \rangle \\
 &= e^C \int_{\partial B_1} \frac{\partial}{\partial r} h_R - \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R |\nabla h_R|^2 \\
 &\quad - C \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R \langle \nabla h_R, \nabla \rho \rangle.
 \end{aligned} \tag{8.95}$$

Tomando  $R$  suficientemente grande (e.g.  $R \geq 2$ ), temos por (8.91) que a primeira integral do lado direito é uniformemente limitada por uma constante  $\tilde{C} > 0$ . Portanto, como  $\Delta h_R = \lambda h_R$ , temos que

$$\lambda \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R^2 \leq \tilde{C} - \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R |\nabla h_R|^2 - C \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R \langle \nabla h_R, \nabla \rho \rangle. \tag{8.96}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que  $|\langle \nabla h_R, \nabla \rho \rangle| \leq |\nabla h_R| \cdot |\nabla \rho|$ ; além disso  $|\nabla \rho| = 1$ , assim

$$\lambda \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R^2 \leq \tilde{C} + C \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R |\nabla h_R| - \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R |\nabla h_R|^2. \tag{8.97}$$

Como

$$\left( \frac{C}{2} h_R - |\nabla h_R| \right)^2 \geq 0 \implies C h_R |\nabla h_R| \leq \frac{C^2}{4} h_R^2 + |\nabla h_R|^2, \tag{8.98}$$

temos que

$$\lambda \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R^2 \leq \tilde{C} + \frac{C^2}{4} \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R^2, \tag{8.99}$$

ou seja,

$$\left( \lambda - \frac{C^2}{4} \right) \int_{B_R \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R^2 \leq \tilde{C}. \tag{8.100}$$

Suponhamos então que  $\lambda \geq \frac{C^2}{4} + 1$ . Tomando o limite  $R \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\int_{M \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h_R^2 \leq \tilde{C}. \tag{8.101}$$

Agora, fixemos  $x \in M \setminus \bar{B}_2$  e seja  $y \in B_x(1)$ , onde  $B_x(1)$  é a bola geodésica de centro  $x$  e raio 1. Dado  $z \in M$ , temos pela desigualdade triangular que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies d(y, z) \geq d(x, z) - 1, \tag{8.102}$$

então,

$$\rho(y) \geq \rho(x) - 1. \tag{8.103}$$

Como  $B_x(1) \subset M \setminus \bar{B}_1$ , temos por (8.101) que

$$\tilde{C} \geq \int_{M \setminus \bar{B}_1} e^{C\rho} h^2 \geq \int_{B_x(1)} e^{C\rho} h^2 \geq e^{C(\rho(x)-1)} \int_{B_x(1)} h^2. \quad (8.104)$$

Segue que

$$\int_{B_x(1)} h^2 \leq \tilde{C} e^{-C(\rho(x)-1)}. \quad (8.105)$$

**Observação.** Em geral,  $B_R$  não é um domínio suave. O que precisamos fazer é substituir  $B_R$  por um domínio suave  $D_R$  tal que  $D_R \subset B_{R+1} \setminus B_R$ . A demonstração segue exatamente da mesma forma.

Notemos que

$$|\nabla(\log \circ h)| = \left| \frac{\nabla h}{h} \right| = \frac{|\nabla h|}{h} \quad (8.106)$$

Assim, pelo Teorema 8.8, temos que

$$|\nabla(\log \circ h)| \leq C \left( n, \sqrt{K}, \lambda \right). \quad (8.107)$$

Agora, seja  $\sigma : [0, \ell] \rightarrow M$  uma geodésica p.p.c.a. com  $\sigma(0) = y$  e  $\sigma(\ell) = x$ . Pelo Teorema do Valor Médio (podemos aplicá-lo, visto que  $\log \circ h \circ \sigma$  é uma função real  $[0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ ), temos que existe  $\xi \in [0, \ell]$  tal que

$$(\log \circ h \circ \sigma)(\ell) - (\log \circ h \circ \sigma)(0) \leq (\log \circ h \circ \sigma)'(\xi)(\ell - 0). \quad (8.108)$$

Mas,

$$(\log \circ h \circ \sigma)'(\xi) = \langle \nabla(\log \circ h)(\sigma(\xi)), \dot{\sigma}(\xi) \rangle, \quad (8.109)$$

e assim,

$$\begin{aligned} |(\log \circ h \circ \sigma)(\ell) - (\log \circ h \circ \sigma)(0)| &\leq |\langle \nabla(\log \circ h)(\sigma(\xi)), \dot{\sigma}(\xi) \rangle| \cdot \ell \\ &\leq |\nabla(\log \circ h)(\sigma(\xi))| \cdot |\dot{\sigma}(\xi)| \cdot \ell \\ &\leq |\nabla(\log \circ h)(\sigma(\xi))| \\ &\leq C \left( n, \sqrt{K}, \lambda \right). \end{aligned} \quad (8.110)$$

Portanto,

$$|(\log \circ h)(x) - (\log \circ h)(y)| \leq C \left( n, \sqrt{K}, \lambda \right). \quad (8.111)$$

Segue que

$$h(y) \geq C_1 h(x), \quad \text{onde } C_1 = \exp \left[ -C \left( n, \sqrt{K}, \lambda \right) \right]. \quad (8.112)$$

Por (8.105), temos

$$C_1 \text{Vol } B_x(1) \cdot h(x)^2 \leq \tilde{C} e^{-C(\rho(x)-1)}. \quad (8.113)$$

Pelo Teorema 8.9, existe  $C_2 > 0$  ( $C_2(n, K, \text{Vol } B_p(1))$ ) tal que

$$\text{Vol } B_x(1) \geq e^{-C_2\rho(x)}. \quad (8.114)$$

Devemos então escolher uma constante  $C > C_2$  e então (8.113) implica que  $h(x) = O(e^{-C_3\rho(x)})$ , onde  $C_3 = \frac{1}{2}(C - C_2)$ .

Passo 4. Seja

$$f(x) = (1 - \eta(x)) \log h(x) + \eta(x), \quad (8.115)$$

onde  $\eta \in C^\infty(M)$  é uma *bump function* tal que  $\eta(x) = 1$  em  $\overline{B_1}$ ,  $\eta(x) = 0$  em  $M \setminus B_2$  e  $0 < \eta(x) < 1$  para  $x \in B_2 \setminus B_1$ . Então,  $f$  é justamente a função que procuramos, pois:

a. Como  $h \leq Ae^{-C_3\rho}$ , para  $\rho(x) > 2$ ,

$$f(x) = -\log h(x) \geq C_3\rho(x) - \log A, \quad (8.116)$$

o que implica que  $f$  é própria.

b. Temos que  $|\nabla f| = |\nabla(\log \circ h)| \leq C$  para  $\rho > 2$ , enquanto que para  $\rho \leq 2$ ,  $|\nabla f|$  é claramente limitada. Também temos

$$\nabla f = -\frac{\Delta h}{h} + |\nabla(\log \circ h)|^2 = -\lambda + |\nabla(\log \circ h)|^2, \quad (8.117)$$

para  $\rho(x) > 2$ . Segue que  $|\Delta f| \leq C$  em  $M$ .

Isto encerra a demonstração. □

# Capítulo 9

## Núcleo do calor

Neste capítulo, exibiremos uma construção do *núcleo do calor* de uma variedade compacta e sem bordo (uma variedade fechada). Para tal construção seguimos [Ros97]. A construção do núcleo do calor para uma variedade não compacta pode ser encontrada em [Cha84].

### 9.1 Uma expressão para o núcleo do calor em uma variedade riemanniana

Suponhamos que  $(M, g)$  é uma variedade riemanniana compacta e sem bordo. Nesse caso,  $\Delta$  é um operador auto-adjunto em  $L^2(M)$  e seus autovalores formam uma sequência infinita

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \rightarrow +\infty.$$

Além disso, temos uma base ortonormal  $\{\phi_i\}$  de  $L^2(M)$  satisfazendo  $\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i$ . Lembremos que, como  $L^2(M)$  é um espaço de Hilbert como o produto interno

$$(f, g) = \int_M fg dV_g, \tag{9.1}$$

é válida neste espaço a identidade de Parseval: se  $\{e_\alpha\}$  é uma base ortonormal de um espaço de Hilbert  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , dados vetores  $x = x^\alpha e_\alpha$  e  $y = y^\alpha e_\alpha$ , então

$$\langle x, y \rangle = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha \rangle \langle y, e_\alpha \rangle = \sum_\alpha x^\alpha y^\alpha. \tag{9.2}$$

No que segue, o conjunto  $\mathbb{R}_+$  denota o conjunto dos reais não negativos  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  e  $\mathbb{R}_+^*$  denota o conjunto dos reais positivos  $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Proposição 9.1.** *Suponhamos que exista uma função  $e(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$  satisfazendo*

$$(\partial_t + \Delta_y) e(t, x, y) = 0; \tag{9.3}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M e(t, x, y) f(y) dV_g(y) = f(x), \quad (9.4)$$

para qualquer função  $f \in L^2(M)$ . Então é válida a convergência pontual

$$e(t, x, y) = \sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y). \quad (9.5)$$

Além disso,  $e(t, x, y)$  é o núcleo do calor.

*Demonstração.* Seja  $\{\phi_i\}$  a base ortonormal de  $L^2(M)$  formada por autovetores do laplaciano, como feito anteriormente. Sendo assim, fixados  $t$  e  $x$ , podemos escrever  $e(t, x, \cdot) = \sum f_i(t, x) \phi_i(\cdot)$ , onde  $f_i(t, x) = \int_M e(t, x, y) \phi_i(y) dV_g(y)$ . Logo, (usando aqui o fato de  $M$  ser uma variedade compacta)

$$\begin{aligned} \partial_t f_i(t, x) &= \partial_t \int_M e(t, x, y) \phi_i(y) dV_g(y) \\ &= \int_M \partial_t e(t, x, y) \phi_i(y) dV_g(y) \\ &= - \int_M [\Delta_y e(t, x, y)] \phi_i(y) dV_g(y) \\ &= - \int_M e(t, x, y) \Delta_y \phi_i(y) dV_g(y) \\ &= -\lambda_i \int_M e(t, x, y) \phi_i(y) dV_g(y) \\ &= -\lambda_i f_i(t, x). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Então,

$$f_i(t, x) = k_i(x) e^{-\lambda_i t}. \quad (9.7)$$

Mas, dada uma função arbitrária  $g \in L^2(M)$ , escrita com relação a base como  $g = \sum a_i \phi_i$ , temos

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) g(y) dV_g(y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \sum_i e^{-\lambda_i t} k_i(x) \phi_i(y) \sum_j a_j \phi_j(y) dV_g(y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_i e^{-\lambda_i t} k_i(x) a_i \\ &= \sum_i k_i(x) a_i. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que  $k_i(x) = \phi_i(x)$  e

$$e(t, x, y) = \sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y). \quad (9.8)$$

Tal igualdade é válida em  $L^2(M)$  na variável  $y$  para  $t$  e  $x$  fixados. Segue que existe uma sequência de números naturais  $i_k \rightarrow +\infty$  tal que

$$\sum_{i=0}^{i_k} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y) \rightarrow e(t, x, y) \quad (9.9)$$

pontualmente para quaisquer  $t$  e  $x$  e q.t.p. em  $y$ . Mostremos que tal convergência é, de fato, é pontual para todo  $y$ . Pela identidade de Parseval, temos

$$\begin{aligned} \langle e(t/2, x, \cdot), e(t/2, x', \cdot) \rangle &= \sum_i e^{-\frac{\lambda_i t}{2}} \phi_i(x) e^{-\frac{\lambda_i t}{2}} \phi_i(x') \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(x'). \end{aligned}$$

Portanto,  $\sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(x')$  converge pontualmente com limite contínuo em  $t$ ,  $x$  e  $x'$  e concluímos o desejado.  $\square$

## 9.2 Construção do núcleo do calor: parametriz

Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana fechada (compacta e sem bordo). Consideremos a seguinte vizinhança da diagonal em  $M \times M$ :

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M : y \in B_\varepsilon(x)\} \quad (9.10)$$

Seja  $G \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times U_\varepsilon)$  a função dada por

$$G(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r(x,y)^2}{4t}}. \quad (9.11)$$

Note que  $G$  é o núcleo do calor que encontramos em  $\mathbb{R}^n$ . Agora, dado  $k \in \mathbb{Z}_+$ , definimos outra função  $S_k \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times U_\varepsilon)$  por

$$S_k(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r(x,y)^2}{4t}} \left( u_0(x, y) + \cdots + u_k(x, y) t^k \right), \quad (9.12)$$

para funções  $u_i \in C^\infty(U_\varepsilon)$  que, por enquanto, podem ser consideradas desconhecidas. Temos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = G \cdot \left( \left( -\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) \left( u_0 + \cdots + u_k t^k \right) + \left( u_1 + 2u_2 t + \cdots + k u_k t^{k-1} \right) \right), \quad (9.13)$$

e, pela Proposição 7.8,

$$\Delta_y S = (\Delta G) \left( u_0 + \cdots + u_k t^k \right) - 2 \left\langle \nabla G, \nabla \left( u_0 + \cdots + u_k t^k \right) + G \Delta \left( u_0 + \cdots + u_k t^k \right) \right\rangle. \quad (9.14)$$

Usando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \Delta G &= -\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \frac{\partial G}{\partial r} \left( \frac{1}{\det(\exp_p)_*} \frac{\partial}{\partial r} \det(\exp_p)_* + \frac{n-1}{r} \right) \\ &= \left( \frac{n}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} \right) G + \frac{r}{2t} \frac{D'}{D} G, \end{aligned} \quad (9.15)$$

onde  $D = \det(\exp_p)_*$  e  $D' = \partial_r D$ . Pelo Lema de Gauss,

$$\left\langle \nabla G, \nabla (u_0 + \cdots + u_k t^k) \right\rangle = -\frac{r}{2t} \left( \frac{\partial}{\partial r} u_0 + \cdots + t^k \frac{\partial}{\partial r} u_k \right) G. \quad (9.16)$$

Combinando as equações acima, obtemos

$$(\partial_t + \Delta_y) S_k = G \cdot \left( u_1 + \cdots + k t^{k-1} u_k + \frac{r}{2t} \frac{D'}{D} \left( u_0 + \cdots + u_k t^k \right) \right) \quad (9.17)$$

$$+ \frac{r}{t} \left( \frac{\partial}{\partial r} u_0 + \cdots + t^k \frac{\partial}{\partial r} u_k \right) + \Delta_y u_0 + \cdots + t^k \Delta_y u_k. \quad (9.18)$$

Escolheremos as funções  $u_i$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$ , de modo que  $S_k$  seja solução da equação

$$(\partial_t + \Delta) S = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r(x,y)^2}{4t}} t^k \Delta_y u_k(x, y). \quad (9.19)$$

Faremos isso zerando os coeficientes que acompanham  $t^i$ , para  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Então, temos que resolver

$$r \frac{\partial}{\partial r} u_0 + \frac{r}{2} \frac{D'}{D} u_0 = 0 \quad (9.20)$$

e

$$r \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) + \Delta_y u_{i-1} = 0, \text{ para } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (9.21)$$

Podemos reescrever (9.20) como

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln u_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \ln D, \quad (9.22)$$

e então  $u_0 = k D^{-\frac{1}{2}}$ , onde  $k = k(\theta)$ . Como queremos que  $u_0$  esteja definida pra  $r = 0$ , temos que  $k$  deve ser uma constante. Escolhendo  $k = 1$ , obtemos

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{D(\exp_x^{-1}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\exp_x)_*(\exp_x^{-1}(y))}}, \quad (9.23)$$

em particular,

$$u_0(x, x) = 1. \quad (9.24)$$

Resolvendo (9.21), obtemos

$$u_i(x, y) = -r(x, y)^{-i} D^{-\frac{1}{2}}(y) \int_0^r D^{\frac{1}{2}}(x(s)) \Delta_y u_{i-1}(x(s), y) s^{i-1} ds. \quad (9.25)$$

Assim definidas as funções  $u_i$ , temos que a equação (9.19) é satisfeita. Além disso, um argumento de indução nos mostra que  $u_i \in C^\infty(U_\varepsilon)$ .

Seja  $\eta \in C^\infty(M \times M)$  uma *bump function* tal que  $\eta(x, y) \in [0, 1]$ ,  $\eta = 0$  em  $(M \times M) \setminus U_\varepsilon$  e  $\eta = 1$  em  $U_{\varepsilon/2}$ . Definimos então  $H_k = \eta S_k \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$ .

**Definição.** Uma **parametriz** para o operador do calor  $\partial_t + \Delta_y$  é uma função  $H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$  que satisfaz

(a)  $(\partial_t + \Delta_y)H \in C^0(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$ ;

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_M H(t, x, y) f(y) dV_g(y) = f(x)$ .

**Lema 9.2.** *Se  $k > n/2$ , então  $H_k$  é uma parametriz. Além disso, se  $k > \ell + n/2$ , então  $(\partial_t + \Delta_y)H_k \in C^\ell(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $(\partial_t + \Delta_y)H_k$  admite uma extensão contínua para  $t = 0$ . Notemos primeiramente que  $H_k = 0$  em  $\mathbb{R}_+^* \times ((M \times M) \setminus U_\varepsilon)$ , então  $(\partial_t + \Delta_y)H_k$  se estende trivialmente nesse caso. Em  $\mathbb{R}_+^* \times U_{\varepsilon/2}$ , temos

$$(\partial_t + \Delta_y)H_k = (\partial_t + \Delta_y)S_k = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} t^k e^{-\frac{r^2}{4t}} \Delta_y u_k. \quad (9.26)$$

Seja  $(t_n, x_n, y_n)$  uma sequência em  $\mathbb{R}_+^* \times U_{\varepsilon/2}$  convergindo para  $(0, x, y)$ . Temos que,

$$(\partial_t + \Delta_y)S_k(t_n, x_n, y_n) = (4\pi t_n)^{-\frac{n}{2}} t_n^k e^{-\frac{r(x_n, y_n)^2}{4t_n}} \Delta_y u_k(x_n, y_n) \quad (9.27)$$

Como a variedade  $M$  é compacta, temos que  $r(x_n, y_n)$  é limitado; sendo assim, o pior dos casos é quando  $r(x_n, y_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mas, nesse caso, temos

$$(\partial_t + \Delta_y)S_k(t_n, x_n, y_n) = \frac{t_n^{k-\frac{n}{2}} \Delta_y u_k(x_n, y_n)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \rightarrow 0, \quad (9.28)$$

pois  $k > n/2$ .

Agora, em  $U_\varepsilon \setminus U_{\varepsilon/2}$ , temos

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + \Delta_y) H_k &= \partial_t H_k + \Delta_y H_k \\
 &= \partial_t(\eta S_k) + \Delta_y(\eta S_k) \\
 &= \eta \partial_t S_k + (\Delta_y \eta) S_k - 2 \langle \nabla \eta, \nabla S_k \rangle + \eta \Delta_y S_k \\
 &= \eta (\partial_t + \Delta_y) S_k - 2 \langle \nabla \eta, \nabla S_k \rangle + (\Delta_y \eta) S_k \\
 &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \phi(t, x, y),
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

para alguma função  $\phi(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$  com no máximo um polo de ordem  $t^{-1}$  em  $t = 0$ . Como  $r > \varepsilon/2$ , temos que o termo  $e^{-r^2/4t}$  nunca se anula. Logo, dada uma sequência  $(t_n, x_n, y_n) \rightarrow (0, x, y)$  temos que  $(\partial_t + \Delta_y) H_k(t, x, y) \rightarrow 0$ . Com isso, mostramos que podemos estender continuamente  $(\partial_t + \Delta_y) H_k$  a  $\mathbb{R}_+ \times M \times M$  definido  $(\partial_t + \Delta_y) H_k(0, x, y) = 0$  para quaisquer pontos  $x$  e  $y$  de  $M$ .

Para a parte (b), precisamos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) \left( u_0(x, y) + \dots + u_k(x, y) t^k \right) f(y) dV_g(y) = f(x). \tag{9.30}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dV_g(y) &= \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{B_{\varepsilon/2}(x)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dV_g(y) \\
 &= + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{M \setminus B_{\varepsilon/2}(x)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dV_g(y).
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

Notemos que, como  $r > 0$  em  $M \setminus B_{\varepsilon/2}(x)$ , temos que o último termo na expressão anterior é zero. Usando o sistema normal de coordenadas em  $x$  e lembrado que  $\eta = 1$  em  $B_{\varepsilon/2}(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{\varepsilon/2}(x)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dV_g(y) &= \\
 &= \int_{B_{\varepsilon/2}(0) \subset T_x M \cong \mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r(0,v)^2}{4t}} u_i(x, \exp_x v) f(\exp_x v) D(v) dv^1 \dots dv^n \\
 &= \int_{T_x M \cong \mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r(0,v)^2}{4t}} u_i(x, \exp_x v) f(\exp_x v) D(v) dv^1 \dots dv^n,
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

sendo que, na última integral, estendemos  $u_i$  como sendo zero fora de  $B_{\varepsilon/2}(x)$ . Em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$  é o núcleo do calor, logo quando  $t \rightarrow 0$  a última integral converge para

$$u_i(x, \exp_x 0) f(\exp_x 0) D(0) = u_i(x, x) f(x). \tag{9.33}$$

Como  $u_0(x, x) = 1$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_0(x, y) f(y) dV_g(y) = f(x) \quad (9.34)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dV_g(y) = 0, \quad (9.35)$$

para  $i > 0$ , o que encerra a demonstração.  $\square$

### 9.3 Construção do núcleo do calor: operadores do calor

Sejam  $X$  e  $Y$  operadores em um espaço de Hilbert de funções  $\mathcal{H}$  denso em  $L^2(M)$ . Suponhamos que  $X$  e  $Y$  têm operadores de calor bem definidos  $e^{-tX}$  e  $e^{-tY}$ , i.e., um semigrupo ( $e^{-t_1 X} e^{-t_2 X} = e^{-(t_1+t_2)X}$ ) de operadores limitados e auto-adjuntos satisfazendo

- $(\partial_t + X)e^{-tX} f = 0$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-tX} f = f$ .

(e o mesmo é válido para  $Y$ ). No que segue nesta seção, denotaremos frequentemente  $e^{-tX} f$  apenas por  $e^{-tX}$ .

**Proposição 9.3** (Fórmula de Duhamel). *Se  $e^{-t(X+Y)}$  existe, temos*

$$e^{-t(X+Y)} = e^{-tX} - \int_0^t e^{-(t-s)(X+Y)} Y e^{-sX} ds. \quad (9.36)$$

*Demonstração.* O operador  $e^{-tX}$  é injetor e auto-adjunto, portanto é sobrejetor; denotaremos sua inversa por  $e^{tX}$ . Seja  $B(t) = e^{-t(X+Y)} e^{tX}$ ; temos

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt}(t) &= e^{-t(X+Y)} (-(X+Y)) e^{tX} + e^{-t(X+Y)} e^{tX} X \\ &= -e^{-t(X+Y)} Y e^{tX}, \end{aligned} \quad (9.37)$$

visto que  $e^{tX} X = X e^{tX}$ . Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$e^{-t(X+Y)} e^{tX} - \text{Id} = - \int_0^t e^{-s(X+Y)} Y e^{sX} ds, \quad (9.38)$$

daí

$$\begin{aligned} e^{-t(X+Y)} - e^{-tX} &= - \int_0^t e^{-s(X+Y)} Y e^{(s-t)X} ds \\ &= - \int_0^t e^{-(t-s)(X+Y)} Y e^{-sX} ds, \end{aligned} \quad (9.39)$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Dados dois operadores  $A(t)$  e  $B(t)$  em nosso espaço de Hilbert, definimos a convolução destes por

$$A * B = \int_0^t A(t-s)B(s)ds. \quad (9.40)$$

Com isso, a fórmula de Duhamel pode ser escrita na seguinte forma:

$$e^{-t(X+Y)} = e^{-tX} - e^{-t(X+Y)} * (Ye^{-tX}). \quad (9.41)$$

Denotemos a convolução de  $\lambda$ -termos  $A * \dots * A$  por  $A^{*\lambda}$  e  $A^{*1} = A$ .

**Corolário 9.4.** *Temos que*

$$e^{-t(X+Y)} = e^{-tX} + \sum_{j=1}^n (-1)^j b_j + (-1)^{n+1} r_{n+1}, \quad (9.42)$$

onde

$$b_n = e^{tX} * (Ye^{-tX})^{*n} \quad (9.43)$$

e

$$r_n = e^{-t(X+Y)} * (Ye^{-tX})^{*n}. \quad (9.44)$$

*Demonstração.* A demonstração segue por indução. Para  $n = 0$ , o corolário é simplesmente a fórmula de Duhamel com  $b_0 = 0$ . Suponhamos que a afirmação seja válida pra  $n - 1$ , i.e.,

$$e^{-t(X+Y)} = e^{-tX} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j b_j + (-1)^n r_n$$

Aplicando a fórmula de Duhamel no termo  $e^{-t(X+Y)}$  de  $r_n$ , obtemos

$$\begin{aligned} r_n &= \left( e^{-tX} - e^{-t(X+Y)} * (Ye^{-tX}) \right) * (Ye^{-tX})^{*n} \\ &= b_n - r_{n+1}, \end{aligned}$$

e o corolário está demonstrado. □

Dados operadores  $X$  e  $Y$ , pelo corolário anterior, temos que se existe  $e^{-t(X+Y)}$  existe e  $r_{n+1} \rightarrow 0$ , então podemos encontrar o operador do calor de  $X + Y$  a partir do operador do calor de  $X$ , pois

$$e^{-t(X+Y)} = e^{-tX} + e^{-tX} * \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda (Ye^{-tX})^{*\lambda}. \quad (9.45)$$

Seja  $A(t)$  um operador em  $\mathcal{H}$  com núcleo  $H(t, x, y) = H_k(t, x, y)$ , i.e.,

$$(A(t)f)(x) = \int_M H(t, x, y)f(y) dV_g(y). \quad (9.46)$$

Assumimos que  $A(t)$  é como um operador de calor, ou seja, existe um operador  $X$  em  $L^2(M)$  tal que  $(\partial_t + X)A(t) = 0$ . Então,

$$e^{-tX} = A(t) \quad \text{e} \quad (\partial_t + X)H = 0. \quad (9.47)$$

Seja  $Y = \Delta_y - X$  e  $K = (\partial_t + \Delta_y)H$ .

Notemos que se  $B(t)$  é um operador com núcleo  $B(t, x, y)$ , o núcleo do operador  $A * B$  é dado por

$$\int_0^t \int_M H(\theta, x, q)B(t - \theta, q, y) dV_g(q)d\theta, \quad (9.48)$$

pois, denotando  $dV_g(q)$  e  $dV_g(y)$  simplesmente por  $dq$  e  $dy$ , temos

$$\begin{aligned} & \int_M \left[ \int_0^t \int_M H(\theta, x, q)B(t - \theta, q, y)dq d\theta \right] f(y)dy \\ &= \int_0^t \int_M H(\theta, x, q) \left[ \int_M B(t - \theta, q, y)f(y)dy \right] dq d\theta \\ &= \int_0^t \int_M H(\theta, x, q) [B(t - \theta)f](q)dq d\theta \\ &= \int_0^t [A(\theta)B(t - \theta)f](x)d\theta \\ &= [(A * B)(t)f](x). \end{aligned}$$

Podemos reinterpretar (9.45), obtendo

$$\begin{aligned} e(t, x, y) &= H(t, x, y) + \left[ H * \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda ((\Delta - X)H)^{* \lambda} \right] (t, x, y) \\ &= H(t, x, y) + \left[ H * \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda ((\partial_t + \Delta)H)^{* \lambda} \right] (t, x, y) \\ &= H(t, x, y) + \left[ H * \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda K^{* \lambda} \right] (t, x, y). \end{aligned}$$

Para o que segue, dadas funções  $A, B \in C^0(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$ , definimos  $A * B \in C^0(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$  por

$$(A * B)(t, x, y) = \int_0^t \int_M A(\theta, x, q)B(t - \theta, q, y) dV(q)d\theta \quad (9.49)$$

**Lema 9.5.** *Seja  $K_k = (\partial_t + \Delta_t)H_k$ . Então*

$$Q_k = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda} \quad (9.50)$$

existe e pertence a  $C^\ell(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$ , se  $k > \ell + n/2$ . Além disso, dado  $T > 0$ , existe uma constante  $C = C(T)$  tal que

$$|Q_k(t, x, y)| \leq C \cdot t^{k-\frac{n}{2}}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (9.51)$$

*Demonstração.* Escrevendo  $K_k = (\partial_t + \Delta_y)(\eta S_k)$  e derivando como feito na demonstração do Lema 9.2, obtemos

$$|K_k| \leq A(T)t^{k-\frac{n}{2}} \leq A(T)T^{k-\frac{n}{2}} = B, \quad (9.52)$$

para constantes  $A(T)$  e  $B$ , visto que  $|K_k|$  não explode quanto  $t \rightarrow \infty$ , pois  $\nabla \eta$  e  $\Delta \eta$  têm suporte limitado fora de diagonal  $M \times M$ . Afirmamos que

$$\left| K_k^{*\lambda}(t, x, y) \right| \leq \frac{AB^{\lambda-1}V^{\lambda-1}t^{k-\frac{n}{2}+\lambda-1}}{\left(k - \frac{n}{2} + 1\right) \left(k - \frac{n}{2} + 2\right) \cdots \left(k - \frac{n}{2} + \lambda - 1\right)}, \quad (9.53)$$

onde  $V = \text{Vol}(M)$ . Pela equação (9.52), a afirmação é válida para  $\lambda = 1$ , basta escolher  $A(T)$  apropriado. Assumindo que a afirmação é válida para  $\lambda - 1$ , temos

$$\begin{aligned} \left| K_k^{*\lambda} \right| &\leq \int_0^t \int_M \left| K_k^{*(\lambda-1)}(\theta, x, q) \right| \cdot |K_k(t-\theta, q, y)| \, dV(q) d\theta \\ &\leq \int_0^t \int_M \frac{AB^{\lambda-2}V^{\lambda-2}\theta^{k-\frac{n}{2}+\lambda-2}}{\left(k - \frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(k - \frac{n}{2} + \lambda - 2\right)} \\ &= \frac{AB^{\lambda-1}V^{\lambda-2}V}{\left(k - \frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(k - \frac{n}{2} + \lambda - 2\right)} \int_0^t \theta^{k-\frac{n}{2}+\lambda-2} \, d\theta, \end{aligned} \quad (9.54)$$

o que prova a afirmação.

Agora, notemos que o lado direito da equação (9.53) é limitado por uma constante vezes

$$\frac{(BVt)^{\lambda-1}t^{k-\frac{n}{2}}}{\left(k - \frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(k - \frac{n}{2} + \lambda - 2\right)}. \quad (9.55)$$

Aplicando o teste da razão, temos que  $\sum_{\lambda=1}^{+\infty} |K_k^{*\lambda}|$  converge. Logo,  $\sum_{\lambda=1}^{+\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda}$  converge para uma função contínua em  $t, x$  e  $y$ , se  $k > n/2$ . Além disso, a estimativa (9.55) também implica que  $|Q_k| \leq C t^{k-\frac{n}{2}}$  para alguma constante  $C$ . Estimando as derivadas de  $K_k^{*\lambda}$  podemos provar que  $Q_k \in C^\ell$  se  $k > \ell + n/2$ .  $\square$

**Lema 9.6.** *São válidas as afirmações:*

(i) Se  $P \in C^\ell(\mathbb{R}_+ \times M \times M)$ , então  $P * H_k \in C^\ell(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$  se  $k > \ell + n/2$ .

(ii)  $(\partial_t + \Delta_y)(P * H_k) = P + P * H_k$ , se  $k > 2 + n/2$ .

*Demonstração.* (i) Lembremos que, pelo Lema 9.2,  $H_k$  é uma parametriz. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow \theta} \int_M P(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) dV(q) &= \lim_{s \searrow 0} \int_M P(\theta, x, q) H_k(s, q, y) dV(q) \\ &= P(\theta, x, y) \end{aligned} \quad (9.56)$$

Então, a função

$$F(t, \theta) = \int_M P(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) dV(q) \quad (9.57)$$

é de classe  $C^\ell$  em  $\mathbb{R}_+^* \times M \times M$  e é limitada em  $\mathbb{R}_+ \times M \times M$ . Portanto,

$$(P * H_k)(t, x, y) = \lim_{s \searrow 0} \int_s^t F(t, \theta) d\theta \quad (9.58)$$

é de classe  $C^\ell$  em  $\mathbb{R}_+ \times M \times M$ .

(ii) Da Análise Real, temos a seguinte regra, chamada de regra de Liebniz:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x, \lambda) dx = f(g(\lambda), \lambda) g'(\lambda) + \int_{t_0}^{g(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx. \quad (9.59)$$

Usando então a regra de Liebniz, temos

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Delta_y)(P * H_k)(t, x, y) &= (\partial_t + \Delta_y) \partial_t \int_0^t \int_M P(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) dV(q) d\theta \\ &= \lim_{s \nearrow t} \int_M P(s, x, q) H_k(t - s, q, y) dV(q) \\ &\quad + \int_0^t \int_M P(\theta, x, q) \cdot \partial_t H_k(t - \theta, q, y) dV(q) d\theta \\ &\quad + \int_0^t \int_M P(\theta, x, q) \cdot \Delta_y H_k(t - \theta, q, y) dV(q) d\theta \\ &= P(t, x, y) \\ &\quad + \int_0^t \int_M P(\theta, x, q) \cdot (\partial_t + \Delta_y) H_k(t - \theta, q, y) dV(q) d\theta \\ &= (P + P * K_k)(t, x, y), \end{aligned} \quad (9.60)$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

Encerramos a construção do núcleo do calor com o seguinte teorema:

**Teorema 9.7.** *Seja*

$$e(t, x, y) = H_k(t, x, y) - (Q_k * H_k)(t, x, y). \quad (9.61)$$

Então  $e \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$ , não depende de  $k$  se  $k > 2 + n/2$  e é o núcleo do calor em  $M$ .

*Demonstração.* Como por hipótese  $k > 2 + n/2$ , pelo Lema 9.6, temos que  $e(t, x, y)$  é de classe  $C^2$  (podemos então realizar os cálculos que seguem). Ainda pelo Lema 9.6, temos

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + \Delta_y) e(t, x, y) &= (\partial_t + \Delta_y) (H_k - Q_k * H_k) \\
 &= K_k - Q_k - Q_k * K_k \\
 &= K_k - \sum_{\lambda=1}^{+\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda+1} - \sum_{\lambda=1}^{+\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda} * K_k \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.62}$$

Também temos que,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) f(y) dV(y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \int_M H_k(t, x, y) f(y) dV(y) \right. \\
 &\quad \left. - \int_M (Q_k * H_k)(t, x, y) f(y) dV(y) \right) \\
 &= f(x) - \lim_{t \rightarrow 0} \int_M (Q_k * H_k)(t, x, y) f(y) dV(y).
 \end{aligned} \tag{9.63}$$

Agora, pela equação (9.51), temos que  $R_j := Q_k / (t^{k-(n/2)})$  é limitado para  $t$  num intervalo finito; então pelo Lema 9.2, temos para  $k > n/2$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M (Q_k * H_k)(t, x, y) f(y) dV(y) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{k-\frac{n}{2}} \int_M (R_k * H_k)(t, x, y) f(y) dV(y) = 0. \tag{9.64}$$

Então  $e(t, x, y)$  é o núcleo do calor e, pela unicidade do núcleo do calor deve ser independente de  $k$ . Além disso,  $H_k - Q_k * H_k$  é de classe  $C^{k-(n/2)}$  em  $\mathbb{R}_+^* \times M \times M$  para todo  $k$ ; portanto  $e(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$ .  $\square$

# Capítulo 10

## Subsoluções da equação do calor

### 10.1 Unicidade de soluções da equação do calor

Apresentaremos nesta seção um teorema que se encontra em [KL], cuja técnica usada em sua demonstração será frequentemente usada no que segue. Este teorema nos diz que, sob certas condições, as soluções  $L^\infty$  da equação do calor em uma variedade dependem apenas das condições iniciais.

**Teorema 10.1** ([KL]). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Se existe um ponto  $p \in M$  e uma constante  $C$  tal que toda bola geodésica de raio  $R$  centrada em  $p$  satisfaz*

$$V_p(R) \leq e^{CR^2}, \quad (10.1)$$

então qualquer solução fraca  $F \in L^\infty(M)$  da equação do calor

$$\Delta F(x, t) - \partial_t F(x, t) = 0 \quad (10.2)$$

é unicamente determinada pela condição inicial

$$F(x, 0) = F_0(x). \quad (10.3)$$

*Demonstração.* Mostraremos que  $F(x, t) \equiv 0$  se  $F(x, 0) \equiv 0$ , o que é suficiente, pois se  $F_1$  e  $F_2$  são duas soluções da equação do calor com condição inicial  $F_0$ , então  $F_1 - F_2$  é solução da equação do calor com condição inicial constante igual a 0.

Seja  $\rho$  a função distância até  $p$  em  $M$ . Dado  $T > 0$ , definimos a função  $g : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(y, s) := \frac{-\rho^2(y)}{4(2T - s)}. \quad (10.4)$$

Notemos que, sendo  $\nabla$  o gradiente em  $M$  (na primeira coordenada),

$$\begin{aligned} |\nabla g(y, s)|^2 &= \left| \nabla \left( \frac{-\rho^2(y)}{4(2T-s)} \right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{2\rho(y)\nabla\rho(y)}{4(2T-s)} \right|^2 \\ &= \frac{\rho(y)^2}{4(2T-s)^2}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

onde usamos que  $|\nabla\rho| = 1$ . Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial s} g(y, s) = \frac{-\rho^2(y)}{4} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2T-s} \right) = -\frac{\rho(y)^2}{4(2T-s)^2}. \quad (10.6)$$

Logo,

$$|\nabla g|^2 + \frac{\partial}{\partial s} g \equiv 0. \quad (10.7)$$

Dado  $R > 0$ , consideremos uma *bump function*  $\phi_R : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\phi_R(y) = \begin{cases} 0, & \text{fora de } B_p(R + \varepsilon) \\ 1, & \text{em } B_p(R) \end{cases}, \quad (10.8)$$

com  $0 \leq \phi_R \leq 1$  e  $|\nabla\phi_R| \leq \frac{3}{\varepsilon}$ , (aqui  $B_p(R)$  denota a bola geodésica de centro  $p$  e raio  $R$ ). Como  $F$  é uma solução fraca de (10.3), temos que para  $0 \leq \tau \leq T$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F \Delta F - \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F \frac{\partial}{\partial s} F \\ &\stackrel{1}{=} - \int_0^\tau \int_M \langle \nabla(\phi_R^2 e^g F), \nabla F \rangle - \int_M \int_0^\tau \phi_R^2 e^g F \frac{\partial}{\partial s} F \end{aligned} \quad (10.9)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \nabla(\phi_R^2 e^g F) &= e^g F \nabla\phi_R^2 + \phi_R^2 \nabla(e^g F) \\ &= 2\phi_R e^g F \nabla\phi_R + \phi_R^2 (e^g \nabla F + F \nabla e^g) \\ &= 2\phi_R e^g F \nabla\phi_R + \phi_R^2 e^g \nabla F + \phi_R^2 F \nabla e^g, \end{aligned} \quad (10.10)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_M \langle \nabla(\phi_R^2 e^g F), \nabla F \rangle &= 2 \int_0^\tau \int_M \phi_R e^g \langle \nabla\phi_R, \nabla F \rangle \\ &\quad + \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g |\nabla F|^2 \\ &\quad + \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 F \langle \nabla e^g, \nabla F \rangle. \end{aligned} \quad (10.11)$$

---

<sup>1</sup>Como  $\phi_R^2 e^g F$  é uma função de suporte compacto, podemos usar a Fórmula de Green.

Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (e^g F) &= e^g \frac{\partial}{\partial s} F + F \frac{\partial}{\partial s} e^g \\ &= e^g \frac{\partial}{\partial s} F + F e^g \frac{\partial}{\partial s} g, \end{aligned} \quad (10.12)$$

e então

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F \frac{\partial}{\partial s} F &= \int_M \int_0^\tau \phi_R^2 e^g F \frac{\partial}{\partial s} F \\ &= \int_M \phi_R^2 \int_0^\tau e^g F \frac{\partial}{\partial s} F \\ &= \int_M \phi_R^2 \left[ \frac{1}{2} e^g F^2 \Big|_0^\tau - \frac{1}{2} \int_0^\tau F^2 e^g \frac{\partial}{\partial s} g \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_0^\tau - \frac{1}{2} \int_M \int_0^\tau \phi_R^2 F^2 e^g \frac{\partial}{\partial s} g \\ &= \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=\tau} - \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_M \int_0^\tau \phi_R^2 e^g F^2 \frac{\partial}{\partial s} g \\ &\stackrel{2}{=} \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=\tau} - \frac{1}{2} \int_M \int_0^\tau \phi_R^2 e^g F^2 \frac{\partial}{\partial s} g. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Usando (10.9), (10.11) e (10.13), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g |\nabla F|^2 - 2 \int_0^\tau \int_M \phi_R e^g F \langle \nabla \phi_R, \nabla F \rangle \\ &\quad - \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F \langle \nabla g, \nabla F \rangle - \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=\tau} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \frac{\partial}{\partial s} g. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F \langle \nabla g, \nabla F \rangle \right| &\leq \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F |\langle \nabla g, \nabla F \rangle| \\ &\leq \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F |\nabla g| |\nabla F|. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Mas

$$0 \leq (F |\nabla g| - |\nabla F|)^2 = F^2 |\nabla g|^2 - 2F |\nabla g| |\nabla F| + |\nabla F|^2, \quad (10.16)$$

e então

$$\left| \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F \langle \nabla g, \nabla F \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F^2 |\nabla g|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g |\nabla F|^2. \quad (10.17)$$

---

<sup>2</sup>Pois  $F(y, 0) \equiv 0$ .

Da mesma forma temos<sup>3</sup>

$$\left| \int_0^\tau \int_M \phi_R e^g F \langle \nabla \phi, \nabla F \rangle \right| \leq \frac{1}{4} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g |\nabla F|^2 + \int_0^\tau \int_M e^g F^2 |\nabla \phi_R|^2. \quad (10.18)$$

Assim, de (10.14), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \int_0^\tau \int_M e^g F^2 |\nabla \phi_R|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F^2 |\nabla g|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \frac{\partial}{\partial s} g \\ &\stackrel{4}{=} 2 \int_0^\tau \int_M e^g F^2 |\nabla \phi_R|^2 - \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=\tau} \end{aligned} \quad (10.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B_p(R)} e^g F^2 \Big|_{s=\tau} &\leq \int_M \phi_R^2 e^g F^2 \Big|_{s=\tau} \\ &\leq 4 \int_0^\tau \int_M e^g F^2 |\nabla \phi_R|^2 \\ &= 4 \int_0^\tau \int_{A_p(R+\varepsilon, R)} e^g F^2 |\nabla \phi_R|^2 \\ &\stackrel{5}{\leq} \frac{36}{\varepsilon^2} \int_0^\tau \int_{A_p(R+\varepsilon, R)} e^g F^2, \end{aligned} \quad (10.20)$$

onde  $A_p(R + \varepsilon, R) = B_p(R + \varepsilon) \setminus \overline{B_p(R)}$ . Além disso, pela definição da função  $g$ , temos

$$e^g \Big|_{B_p(\sqrt{T/4}) \times [0, T]} \geq \exp\left(-\frac{1}{16}\right) \quad (10.21)$$

e

$$e^g \Big|_{A_p(R+\varepsilon, R) \times [0, T]} \leq \exp\left(-\frac{R^2}{8T}\right). \quad (10.22)$$

Tomando  $R > \sqrt{T/4}$ , e usando (10.20), (10.21) e (10.22), obtemos

$$\exp\left(-\frac{1}{16}\right) \int_{B_p(\sqrt{T/4})} F^2(y, \tau) dy \leq \frac{36}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{R^2}{8T}\right) \int_0^\tau \int_{A_p(R+\varepsilon, R)} F^2(y, s) dy ds, \quad (10.23)$$

para todo  $0 \leq \tau \leq T$ . Deste modo,

$$\int_0^T \int_{B_p(\sqrt{T/4})} F^2(y, s) dy ds \leq \frac{36}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{1}{16} - \frac{R^2}{8T}\right) \cdot T \int_0^T \int_{A_p(R+\varepsilon, R)} F^2(y, s) dy ds. \quad (10.24)$$

<sup>3</sup>Nesse caso, usamos que  $0 \leq (\phi_R |\nabla F| - 2F |\nabla \phi_R|)^2 \implies \phi_R F |\nabla F| |\nabla \phi| \leq \frac{1}{4} \phi_R^2 |\nabla F|^2 + F^2 |\nabla \phi_R|^2$ .

<sup>4</sup>Por (10.7).

<sup>5</sup>Pois  $|\nabla \phi_R| \leq 3/\varepsilon$ .

Por outro lado, o método de iteração de Moser nos diz que

$$|F(p, T)|^2 \leq C(p, T)T^{-(\frac{n+2}{2})} \int_0^T \int_{B_p(\sqrt{T/4})} F^2(y, s) dy ds, \quad (10.25)$$

onde  $C(p, T)$  é uma constante que depende de  $p$  e  $T$  (depende da constante de Sobolev na bola geodésica  $B_p(\sqrt{T})$ ). Combinando (10.24) e (10.25), obtemos

$$\begin{aligned} |F(p, T)|^2 &\leq C(p, T)T^{-(\frac{n+2}{2})} \int_0^T \int_{B_p(\sqrt{T/4})} F^2(y, s) dy ds \\ &\leq C(p, T)T^{-\frac{n}{2}} \frac{36}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{1}{16} - \frac{R^2}{8T}\right) \int_0^T \int_{A_p(R+\varepsilon, R)} F^2(y, s) dy ds. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Seja  $\|F\|_{\infty, R}$  o máximo da função  $F$  em  $A_p(R + \varepsilon, R) \times [0, T]$  (que depende de  $R$ ). Então,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{A_p(R+\varepsilon, R)} F^2(y, s) dy ds &\leq \int_0^T \|F\|_{\infty, R}^2 (V_p(R + \varepsilon) - V_p(R)) \\ &\leq \|F\|_{\infty, R}^2 (V_p(R + \varepsilon) - V_p(R)) T \\ &\leq \|F\|_{\infty, R}^2 V_p(R + \varepsilon) T. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |F(p, T)|^2 &\leq C(p, T)T^{(-\frac{n}{2}+1)} \frac{36}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{1}{16} - \frac{R^2}{8T}\right) \|F\|_{\infty, R}^2 V_p(R + \varepsilon) \\ &\leq C(p, T)T^{(-\frac{n}{2}+1)} \frac{36}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{1}{16} - \frac{R^2}{8T} + C(R + \varepsilon)\right)^2 \|F\|_{\infty, R}^2. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Segue que, tomando  $T < \frac{1}{8C}$  (com alguma hipótese de crescimento sobre  $F$ , como no espaço de Schwartz), concluimos que

$$F(p, T) = 0. \quad (10.29)$$

Como a condição de crescimento de volume do enunciado é independente do ponto  $p$ , temos

$$F(p, T) = 0, \quad (10.30)$$

para todo  $p \in M$  e  $0 < T \leq \frac{1}{8C}$ . Usando a propriedade de semigrupo das solução da equação do calor, concluimos que  $F(p, t) \equiv 0$ .  $\square$

## 10.2 Estimativas para subsoluções da equação do calor

Usando argumento análogo ao encontrado na demonstração do Teorema 10.1, derivaremos alguns resultados sobre subsoluções positivas da equação do calor. Provaremos que, se  $F(x, t)$  é uma subsolução da equação do calor em uma variedade  $M$ , onde colocaremos algumas restrições,

e  $F(x, 0)$  é limitado para todo  $x$  em  $M$ , então  $F(x, t)$  também será limitada para instantes  $t$  em um intervalo  $[0, t_0]$ .

**Teorema 10.2** ([NT04]). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e não-compacta. Suponhamos que  $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que*

$$\left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) F(x, t) \geq 0, \quad \text{sempre que } F(x, t) \geq 0. \quad (10.31)$$

Suponhamos ainda que existem  $a > 0$  e  $T > 0$  tais que

$$\int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) F_+^2(x, s) dx ds < \infty, \quad (10.32)$$

onde  $\rho$  é a função distância a um ponto fixado  $p \in M$ . Se  $F(x, 0) \leq 0$  para todo  $x \in M$ , então  $F(x, t) \leq 0$  para todo  $(x, t) \in M \times [0, T]$ .

*Demonstração.* Como na demonstração do Teorema 10.1, definamos

$$g(y, s) = \frac{-\rho^2(y)}{4(2T-s)}, \quad 0 \leq s \leq T. \quad (10.33)$$

Já vimos que tal função satisfaz  $|\nabla g|^2 + \partial_s g \equiv 0$ . Para cada  $R > 0$ , definamos uma *bump function*  $\phi_R : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\phi_R(y) = \begin{cases} 1, & \text{em } B_p(R) \\ 0, & \text{fora de } B_p(2R) \end{cases} \quad (10.34)$$

Por hipótese, dado  $0 < \tau \leq T$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \Delta F - \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \frac{\partial}{\partial s} F \\ &= \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \Delta F_+ - \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \frac{\partial}{\partial s} F_+. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \Delta F_+ &= - \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g \langle \nabla F_+, \nabla F_+ \rangle \\ &\quad - \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \langle \nabla g, \nabla F_+ \rangle \\ &\quad - 2 \int_0^\tau \int_M \phi_R e^g F_+ \langle \nabla \phi_R, \nabla F_+ \rangle \\ &\leq 2 \int_0^\tau \int_M e^g F_+^2 |\nabla \phi_R|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+^2 |\nabla g|^2 \end{aligned} \quad (10.36)$$

e

$$- \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+ \frac{\partial}{\partial s} F_+ = - \frac{1}{2} \int_M \phi_R^2 e^g F_+^2 \Big|_0^\tau + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_M \phi_R^2 e^g F_+^2 \frac{\partial}{\partial s} g. \quad (10.37)$$

Logo,

$$\int_M \phi_R^2 e^g F_+^2|_0^\tau \leq 4 \int_0^\tau \int_M e^g F_+^2 |\nabla \phi_R|^2. \quad (10.38)$$

Como, por hipótese  $F(x, 0) \leq 0$  para todo  $x \in M$ , temos que  $F_+(x, 0) \equiv 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_M \phi_R^2 e^g F_+^2|_{s=\tau} &\leq \frac{36}{R^2} \int_0^\tau \int_M e^g F_+^2 \\ &= \frac{36}{R^2} \int_0^\tau \int_M e^{g(x,t)} F_+^2(x,t) dx dt \\ &= \frac{36}{R^2} \int_0^\tau \int_M \exp\left(\frac{-\rho^2(x)}{4(2T-t)}\right) F_+^2(x,t) dx dt \\ &\leq \frac{36}{R^2} \int_0^\tau \int_M \exp\left(\frac{-\rho^2(x)}{8T}\right) F_+^2(x,t) dx dt. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Tomando  $T < \frac{1}{8a}$ , temos que o lado direito converge para zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Portanto,  $F_+^2(x, t) = 0$  para todo  $(x, t) \in M \times [0, T]$  e concluimos assim que  $F(x, t) \leq 0$  para todo  $(x, t) \in M \times [0, T]$ .  $\square$

**Corolário 10.3.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e não-compata. Suponhamos que  $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma subsolução não-negativa da equação do calor, i.e.,*

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) F \geq 0 \quad e \quad F \geq 0. \quad (10.40)$$

Suponhamos ainda que

$$\int_M e^{-\rho^2} < \infty. \quad (10.41)$$

e que existem  $a > 0$  e  $T > 0$  tais que

$$\int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) F^2(x, s) dx ds < \infty, \quad (10.42)$$

onde  $\rho$  é a função distância a um ponto fixado  $p \in M$ . Com essas hipóteses, se  $F(x, 0) \leq C$  para todo  $x \in M$ , então  $F(x, t) \leq C$  para quaisquer  $(x, t) \in M \times [0, T]$ .

*Demonstração.* Definamos  $G(x, t) = F(x, t) - C$ . Então

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) G(x, t) = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) \geq 0. \quad (10.43)$$

Além disso, como  $G_+^2 \leq G^2$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) G_+^2(x, t) \, dxdt &\leq \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) G^2(x, t) \, dxdt \\
 &= \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) [F^2(x, t) \\
 &\quad - 2CF(x, t) + C^2] \, dxdt \\
 &\leq \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) F^2(x, t) \, dxdt \\
 &\quad + C^2 \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) \, dxdt \\
 &< \infty.
 \end{aligned} \tag{10.44}$$

Como  $F(x, 0) \leq C$  para todo  $x \in M$ , temos que  $G(x, 0) \leq 0$  para todo  $x \in M$ . Logo, pelo Teorema 10.2, temos que  $G(x, t) \leq 0$  para quaisquer  $(x, t) \in M \times [0, T]$ , o que implica que  $F(x, t) < C$  para todo par  $(x, t) \in M \times [0, T]$ .  $\square$

**Corolário 10.4.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e não-compacta tal que, para algum  $p \in M$ ,*

$$\int_M e^{-\rho^2} < \infty, \tag{10.45}$$

onde  $\rho$  é a função distância a  $p$ . Seja  $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma subsolução não-negativa da equação do calor, i.e.,

$$\left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) F \geq 0 \quad e \quad F \geq 0, \tag{10.46}$$

e suponhamos que existem  $a > 0$  e  $T > 0$  tais que

$$\int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) F^2(x, s) \, dxds < \infty. \tag{10.47}$$

Com essas hipóteses, se existe uma função harmônica não-negativa  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $F(x, 0) \leq u(x)$  para todo  $x \in M$  e

$$\int_M \exp(-a\rho^2(x)) u^2(x) \, dx < \infty, \tag{10.48}$$

então  $F(x, t) \leq u(x)$  para quaisquer  $(x, t) \in M \times [0, T]$ .

*Demonstração.* Basta definir  $G(x, t) = F(x, t) - u(x)$  e prosseguir como na demonstração do corolário anterior.  $\square$

### 10.3 Estimativas para o gradiente de soluções da equação do calor

**Proposição 10.5.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e não-compacta satisfazendo  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , para alguma constante  $K > 0$ . Seja  $F \geq 0$  tal que  $(\Delta - \partial_t)F = 0$ . Então a função*

$$G(x, t) = \exp\left(- (n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|(x, t), \quad (10.49)$$

onde  $\tilde{K} = K + \frac{1}{n-1}$ , satisfaz:

$$(i) \quad (\Delta - \partial_t)G^2(x, t) \geq 0 ;$$

$$(ii) \quad (\Delta - \partial_t)G(x, t) \geq 0.$$

*Demonstração.* Temos,

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|^2\right) &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \Delta |\nabla F|^2 \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|^2\right). \end{aligned} \quad (10.50)$$

Mas, usando a Fórmula de Bochner-Weitzenböck (Proposição 7.10),

$$\begin{aligned} \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \Delta |\nabla F|^2 &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \times \\ &\quad \left[2|\text{Hess } F|^2 + 2\text{Ric}(\nabla F, \nabla F) + 2\langle \nabla \Delta F, \nabla F \rangle\right]. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Temos também,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|^2\right) &= 2(n-1)\tilde{K} \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|^2 \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial t} |\nabla F|^2\right) \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right), \end{aligned} \quad (10.52)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} |\nabla F|^2\right) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla F(x, t), \nabla F(x, t) \rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \nabla F(x, t), \nabla F(x, t) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \nabla \frac{\partial}{\partial t} F(x, t), \nabla F(x, t) \right\rangle \\ &= 2 \langle \nabla \Delta F(x, t), \nabla F(x, t) \rangle \end{aligned} \quad (10.53)$$

Então, usando  $\text{Ric}(\nabla F, \nabla F) \geq -(n-1)K|\nabla F|^2$  e lembrando que  $\tilde{K} = K + \frac{1}{n-1}$ ,

$$\begin{aligned}
 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) G^2 &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 + 2\text{Ric}(\nabla F, \nabla F) + 2\langle \nabla \Delta F, \nabla F \rangle\right] \\
 &\quad + 2(n-1)\tilde{K} \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|^2 - \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2\langle \nabla \Delta F, \nabla F \rangle\right] \\
 &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 + 2\text{Ric}(\nabla F, \nabla F) + 2(n-1)\tilde{K}|\nabla F|^2\right] \\
 &\geq \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 - 2(n-1)K|\nabla F|^2 + 2(n-1)\tilde{K}|\nabla F|^2\right] \\
 &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 + 2|\nabla F|^2\right] \\
 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

Portanto,  $(\Delta - \partial_t) G^2 \geq 0$ , e com isso provamos (i). Para provar (ii), notemos que

$$2G(x, t)(\Delta - \partial_t)G(x, t) = (\Delta - \partial_t)G^2(x, t) - 2|\nabla G|^2(x, t). \tag{10.55}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G^2(x, t) &= \Delta G^2(x, t) - \partial_t G^2(x, t) \\
 &= 2G\Delta G + 2\langle \nabla G, \nabla G \rangle - 2G\partial_t G \\
 &= 2G(\Delta - \partial_t)G + 2|\nabla G|^2.
 \end{aligned} \tag{10.56}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 |\nabla G|^2(x, t) &= \langle \nabla G(x, t), \nabla G(x, t) \rangle \\
 &= \left\langle \exp(-(n-1)\tilde{K}t)\nabla F(x, t), \exp(-(n-1)\tilde{K}t)\nabla F(x, t) \right\rangle \\
 &= \exp(-2(n-1)\tilde{K}t) \langle \nabla F(x, t), \nabla F(x, t) \rangle \\
 &= \exp(-2(n-1)\tilde{K}t) |\nabla F|^2(x, t).
 \end{aligned} \tag{10.57}$$

Então, usando (10.54) e o fato de  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 2G(\Delta - \partial_t)G &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 + 2\text{Ric}(\nabla F, \nabla F) + \right. \\
 &\quad \left. + 2(n-1)\tilde{K}|\nabla F|^2\right] - 2\exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) |\nabla F|^2 \\
 &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 + 2\text{Ric}(\nabla F, \nabla F) + \right. \\
 &\quad \left. + 2(n-1)\tilde{K}|\nabla F|^2 - 2|\nabla F|^2\right] \\
 &\geq \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2 - 2(n-1)K|\nabla F|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2(n-1)\tilde{K}|F|^2 - 2|\nabla F|^2\right] \\
 &= \exp\left(-2(n-1)\tilde{K}t\right) \left[2|\text{Hess } F|^2\right] \\
 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{10.58}$$

Concluimos que  $2G(\Delta - \partial_t)G \geq 0$  e, como  $G \geq 0$ ,

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)G(x, t) \geq 0, \tag{10.59}$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

**Corolário 10.6.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e não-compacta satisfazendo  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , para alguma constante  $K > 0$ . Seja  $u \in C^\infty(M)$  uma função tal que  $|\nabla u| \leq C$ , para alguma constante  $C > 0$ . Seja  $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a solução da equação do calor com condição inicial  $u$  e suponhamos que  $F$  satisfaz a seguinte condição: existem  $a > 0$  e  $T > 0$  tais que*

$$\int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) |\nabla F|^2(x, s) dx ds < \infty. \tag{10.60}$$

Então existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$|\nabla F|(x, t) \leq C_1, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, T]. \tag{10.61}$$

*Demonstração.* Defina  $G(x, t) = \exp(-(n-1)\tilde{K}t)|\nabla F|^2(x, t)$ , onde  $\tilde{K} = K + \frac{1}{n-1}$ . Pela Proposição 10.5, temos que  $(\Delta - \partial_t)G(x, t) \geq 0$ . Além disso, como

$$G^2(x, t) \leq \exp(-2(n-1)\tilde{K}T)|\nabla F|^2(x, t), \tag{10.62}$$

para  $0 \leq t \leq T$  e todo  $x \in M$ , temos por hipótese que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) G^2(x, t) dx ds &\leq \exp(-2(n-1)\tilde{K}T) \times \\ &\times \int_0^T \int_M \exp(-a\rho^2(x)) |\nabla F|^2(x, s) dx ds \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Então, como  $G(x, 0) = |\nabla F|(x, 0) = |\nabla u|(x) \leq C$  para todo  $x \in M$ , pelo Corolário 10.3, temos que  $G(x, t) \leq C$  para todo par  $(x, t) \in M \times [0, T]$ . Segue que

$$\exp(-(n-1)\tilde{K}T) |\nabla F|(x, t) \leq C, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, T]. \quad (10.64)$$

Portanto, tomando  $C_1 = C \exp(-(n-1)\tilde{K}T)$  concluímos a demonstração.  $\square$

## 10.4 Integrais

Lembremos que se  $\mathcal{S}_K$  é a função definida por

$$\mathcal{S}_K(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \sin(\sqrt{K}t), & K > 0 \\ t, & K = 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) \sinh(\sqrt{-K}t), & K < 0 \end{cases}, \quad (10.65)$$

então se  $M_K$  é um espaço forma  $n$ -dimensional simplesmente conexo com curvatura constante  $K$ , e  $\bar{A}(r)$  denota a área do bordo da bola  $\partial\bar{B}(r)$  (bola de raio  $r$  com centro em um ponto qualquer de  $M_K$ ), temos que

$$\bar{A}(r) = \alpha_{n-1} \mathcal{S}_K^{n-1}(r), \quad (10.66)$$

onde  $\alpha_{n-1}$  é a área da esfera canônica  $S^{n-1}$ .

No que segue, usaremos os seguintes teoremas de comparação

**Teorema 10.7** ([Li12]). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade completa com  $\text{Ric}(M) \geq (n-1)K$ . Suponhamos que  $M_K$  é um espaço forma simplesmente conexo de dimensão  $n$  com curvatura seccional constante  $K$ . Seja  $A_p(r)$  a área do bordo da bola geodésica  $B_p(r)$  em  $M$  e  $\bar{A}(r)$  a área do bordo da bola  $\bar{B}(r)$  em  $M_K$ . Então, para quaisquer  $0 \leq r_1 \leq r_2 < \infty$ ,*

$$A_p(r_1)\bar{A}(r_2) \geq A_p(r_2)\bar{A}(r_1). \quad (10.67)$$

*Em particular, existe uma constante  $C$  tal que*

$$A_p(r) \leq C\bar{A}(r), \quad \forall r \geq 0. \quad (10.68)$$

**Teorema 10.8** (Teorema de Comparação do Volume de Bishop). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade*

riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq (n-1)K$ , para alguma constante  $K$ . Então, para qualquer  $x \in M$  e qualquer  $R > 0$ , a razão

$$\frac{\text{Vol}(B_x(R))}{V(K, R)}, \quad (10.69)$$

onde  $V(K, R)$  é o volume da bola geodésica de raio  $R$  no espaço forma  $M_K$ , é não-crescente em  $R$ . Em particular

$$\text{Vol}(B_x(R)) \leq V(K, R). \quad (10.70)$$

**Corolário 10.9.** Se  $R_1 > R_2 > 0$ , então

$$\frac{\text{Vol}(B_x(R_1))}{\text{Vol}(B_x(R_2))} \leq \frac{V(K, R_1)}{V(K, R_2)} \quad (10.71)$$

Usando estes teoremas, queremos provar que se uma variedade  $M$  tem sua curvatura de Ricci limitada inferiormente, então

$$\int_M e^{-\rho^2} < \infty, \quad (10.72)$$

onde  $\rho$  é a distância a um ponto fixado  $p \in M$ . Mais do que isso, provaremos também que se  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio em  $\rho$ , a integral  $\int_M e^{-\rho^2} F$  também é finita. Para isso, começamos com os seguintes lemas:

**Lema 10.10.** Para qualquer  $a > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sinh^a(t) dt < \infty. \quad (10.73)$$

*Demonstração.* Como

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad (10.74)$$

e  $e^t - e^{-t} \leq e^t$ , temos que

$$\sinh^a(t) \leq \frac{e^{at}}{2^a}. \quad (10.75)$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sinh^a(t) dt &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{e^{at}}{2^a} dt \\ &= \frac{1}{2^a} \int_0^{+\infty} e^{-t^2+at} dt \\ &= \frac{1}{2^a} \int_0^{2a} e^{-t^2+at} dt + \frac{1}{2^a} \int_{2a}^{+\infty} e^{-t^2+at} dt \\ &\leq \frac{6}{2^a} \int_0^{2a} e^{-t^2+at} dt + \frac{1}{2^a} \int_{2a}^{+\infty} e^{-at} dt \\ &< \infty \end{aligned} \quad (10.76)$$

□

**Lema 10.11.** *Se  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio, então*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} p(t) dt < \infty. \quad (10.77)$$

*Demonstração.* Note que basta provarmos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt < \infty \quad (10.78)$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Usando integral por partes, obtemos a expressão

$$\int e^t t^k = \left[ \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \frac{k!}{\ell!} t^\ell \right] e^t + C. \quad (10.79)$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt = -(-1)^k k! + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \frac{k!}{\ell!} t^\ell \right] e^t, \quad (10.80)$$

e usando a regra de l'Hôpital, obtemos o desejado. □

**Proposição 10.12.** *Se  $M$  é uma variedade riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , para alguma constante  $K > 0$ , então*

$$\int_M e^{-\rho^2} < \infty, \quad (10.81)$$

onde  $\rho$  é a função distância até um ponto qualquer fixado  $p \in M$ .

*Demonstração.* Temos,

$$\begin{aligned} \int_M e^{-\rho^2(x)} dV(x) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{\partial B_p(t)} e^{-t^2} dA \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left( \int_{\partial B_p(t)} dA \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} A_p(t) dt. \end{aligned} \quad (10.82)$$

Mas existe uma constante  $C_1 > 0$  que só depende de  $n$  e  $K$  tal que  $A_p(t) \leq C_1 \bar{A}(t)$ , para todo

---

<sup>6</sup>Para  $t \geq 0$ , temos  $-t^2 + at \leq -at \iff -t^2 \leq -2at \iff t \geq 2a$

$0 \leq t \leq \infty$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \int_M e^{-\rho^2(x)} dV(x) &\leq C_1 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \bar{A}(t) dt \\
 &= C_1 \alpha_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathcal{S}_{-K}^{n-1}(t) dt \\
 &\leq C_2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sinh^{n-1}(\sqrt{K}t) dt \\
 &< \infty,
 \end{aligned} \tag{10.83}$$

onde a última desigualdade segue do Lema 10.10.  $\square$

**Proposição 10.13.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa com  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$ , para alguma constante  $K > 0$ . Seja  $\rho$  a função distância a um ponto fixado  $p \in M$  e seja  $P : M \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio em  $\rho$ , i.e.,*

$$P(x) = a_0 + a_1\rho(x) + a_2\rho^2(x) + \cdots + a_m\rho^m(x), \tag{10.84}$$

então,

$$\int_M e^{-\rho^2(x)} P(x) dV(x) < \infty. \tag{10.85}$$

*Demonstração.* Como na demonstração da Proposição 10.12, temos

$$\begin{aligned}
 \int_M e^{-\rho^2(x)} P(x) dV(x) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{\partial B_p(t)} e^{-t^2} \tilde{P}(t) dA \right) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \tilde{P}(t) A_p(t) dt \\
 &\leq C_1 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \tilde{P}(t) \sinh^{n-1}(\sqrt{K}t) dt,
 \end{aligned} \tag{10.86}$$

onde  $\tilde{P}$  é o polinômio real  $\tilde{P}(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m$ . Logo, usando os Lemas 10.10 e 10.11, concluímos que a última integral acima é finita.  $\square$

## 10.5 Aplicação: funções exaustão

O objetivo nesta seção é provar o seguinte teorema, que nos garante a existência de um certo tipo de função exaustão (resultado semelhante ao Teorema 8.10).

**Teorema 10.14** ([Tam10]). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e não compacta com curvatura seccional limitada por  $K$ . Então existe  $F \in C^\infty(M)$  tal que*

$$C^{-1}(1 + \rho) \leq F \leq C(1 + \rho), \quad |\nabla F| \leq C \quad e \quad |\text{Hess } F| \leq C, \tag{10.87}$$

onde  $C > 0$  é uma constante que depende apenas de  $n$  e  $K$  e  $\rho$  é a distância a um ponto fixado de  $M$ .

Para demonstrar este resultado, estudaremos as soluções da equação do calor que possuem condição inicial “próxima” da função distância  $\rho$  e com gradiente limitado.

Primeiramente, notemos que função distância  $\rho$  do enunciado é lipschitziana com constante de Lipschitz 1, e vejamos o seguinte resultado:

**Teorema 10.15** (Proposition 2.1, [GW79]). *O conjunto das funções  $C^\infty f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|\nabla f| < B$  em  $M$  é denso no conjunto de todas as funções contínuas em  $M$  que são localmente lipschitzianas em  $M$  com constante de lipschitz menor que  $B$ .*

O Teorema 10.15 nos garante a existência uma função suave  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|\nabla u|(x) \leq 2$  e  $|u(x) - \rho(x)| \leq 1$  para todo  $x \in M$ . Seja  $H(x, y, t)$  o núcleo do calor de  $M$  e seja

$$F(x, t) := \int_M H(x, y, t)u(y)dy, \quad (10.88)$$

ou seja,  $F(x, t)$  é solução da equação do calor com condição inicial  $u$ . Seja  $x \in M$  um ponto fixado e seja  $d(x, y)$  a distância em  $M$ . Usando  $|\nabla u| \leq 2$ , o Teorema do Valor Médio e que

$$\int_M H(x, y, t)dy = 1, \quad (10.89)$$

visto que a curvatura de Ricci de  $M$  é limitada inferiormente (veja [Yau78]), temos

$$\begin{aligned} |F(x, t) - u(x)| &= \left| \int_M H(x, y, t)u(y)dy - u(x) \right| \\ &= \left| \int_M H(x, y, t)u(y)dy - u(x) \int_M H(x, y, t)dy \right| \\ &= \left| \int_M H(x, y, t)(u(y) - u(x))dy \right| \\ &\leq \int_M H(x, y, t)|u(y) - u(x)| dy \\ &\leq 2 \int_M H(x, y, t)d(x, y)dy \\ &= I + II, \end{aligned} \quad (10.90)$$

onde

$$I = 2 \int_{B_x(1)} H(x, y, t)dy \leq 2, \quad (10.91)$$

$$II = 2 \int_{M \setminus B_x(1)} H(x, y, t)d(x, y)dy.$$

Para limitar  $II$  usamos a seguinte estimativa para o núcleo do calor:

**Teorema 10.16** (Corollary 3.1, [LY86]). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade riemanniana completa e sem bordo. Se a curvatura de Ricci de  $M$  é limitada inferiormente por  $-K$ , para alguma constante  $K \geq 0$ , então para qualquer  $1 < \alpha < 2$  e qualquer  $0 < \varepsilon < 1$ , o núcleo do calor satisfaz*

$$H(x, y, t) \leq C_1(\varepsilon)^\alpha V_x^{-1/2}(\sqrt{t}) V_y^{-1/2}(\sqrt{t}) \exp \left[ C_2 \varepsilon(\alpha - 1)^{-1} K t - \frac{d(x, y)^2}{(4 + \varepsilon)t} \right]. \quad (10.92)$$

A constante  $C_2$  depende apenas de  $n$  e  $C_1(\varepsilon)$  depende de  $\varepsilon$  com  $C_1(\varepsilon) \rightarrow \infty$  quanto  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Segue que, para  $t \leq 1$ ,

$$H(x, y, t) \leq C_1 V_x^{-1/2}(\sqrt{t}) V_y^{-1/2}(\sqrt{t}) \exp \left[ -\frac{d(x, y)^2}{5t} \right], \quad (10.93)$$

onde  $C_1$  é uma constante positiva que depende apenas de  $n$  e  $K$  e  $V_y(s)$  é o volume da bola geodésica  $B_y(s)$  de raio  $s$  e centro  $y$ . No que segue, usaremos que  $t \leq 1$ .

Pelo Teorema de Comparação de Volume de Bishop, temos

$$\frac{V_y(d(x, y) + \sqrt{t})}{V_y(\sqrt{t})} \leq \frac{V(-K, d(x, y) + \sqrt{t})}{V(-K, \sqrt{t})}. \quad (10.94)$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_x(\sqrt{t}) &\leq V_y(d(x, y) + \sqrt{t}) \\ &\leq V_y(\sqrt{t}) C_2 t^{-\frac{n}{2}} \exp \left( C_3 (d(x, y) + \sqrt{t}) \right), \end{aligned} \quad (10.95)$$

onde  $C_2$  e  $C_3$  são constantes positivas que dependem apenas de  $n$  e  $K$ . Assim,

$$V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \leq C_2^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \exp \left( \frac{C_3}{2} (d(x, y) + \sqrt{t}) \right) \quad (10.96)$$

Segue que

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &\leq C_4 t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \exp \left( -\frac{d(x, y)^2}{5t} + \frac{C_3}{2} (d(x, y) + \sqrt{t}) \right) \\ &= C_4 t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-1}(\sqrt{t}) \exp \left( -\frac{d(x, y)^2}{5t} + \frac{C_3}{2} (d(x, y) + \sqrt{t}) \right) \\ &\leq C_4 t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-1}(\sqrt{t}) \exp \left( -\frac{d(x, y)^2}{5t} + \frac{C_3}{2} d(x, y) \right), \end{aligned} \quad (10.97)$$

onde  $C_4$  é uma constante que depende apenas de  $n$  e  $K$ . Provaremos agora a seguinte afirmação:

**Afirmção 10.17.** *Se  $t \leq \min\{1, (10C_3)^{-1}\}$  e  $s > 1$ , então*

$$\exp \left( -\frac{s^2}{5t} + \frac{1}{2} C_3 s \right) \leq \exp \left( -\frac{s^2}{10t} \right) \quad (10.98)$$

*Demonstração.* Temos

$$\exp\left(-\frac{s^2}{5t} + \frac{1}{2}C_3s\right) = \exp\left(-\frac{s}{10t}(2s - 5C_3t)\right). \quad (10.99)$$

Usando  $t \leq \frac{1}{10C_3}$  ( $-t \geq -\frac{1}{10C_3}$ ) e  $s > 1$ , temos

$$2s - 5C_3t > 2s - \frac{5C_3}{10C_3} = 2s - \frac{1}{2} = s + \left(s - \frac{1}{2}\right) \geq s, \quad (10.100)$$

o que encerra a prova da afirmação.  $\square$

Suponhamos que  $t \leq \min\{1, (10C_3)^{-1}\}$ . Pela afirmação feita,

$$H(x, y, t) \leq C_4 t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-1}(\sqrt{t}) \exp\left(-\frac{d(x, y)^2}{10t}\right). \quad (10.101)$$

Então,

$$\begin{aligned} II &\leq C_4 t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-1}(\sqrt{t}) \int_1^\infty A_x(s) \exp\left(-\frac{s^2}{10t}\right) ds \\ &\leq C_5 t^{-\frac{n}{4}} V_x^{-1}(\sqrt{t}) \int_1^\infty \frac{s}{t} V_x(s) \exp\left(-\frac{s^2}{10t}\right) ds \\ &\leq C_6 \int_1^\infty \frac{s}{t} \cdot \left(\frac{s^2}{t}\right)^{\frac{3}{4}n} \exp\left(-\frac{s^2}{10t} + C_7 \frac{s}{\sqrt{t}}\right) ds \\ &\leq C_8, \end{aligned} \quad (10.102)$$

onde  $A_x(s)$  é a área de  $\partial B_x(s)$  e  $C_6$ - $C_8$  são constante que dependem apenas de  $n$  e  $K$ . Segue de (10.90), (10.91) e (10.102) que existem constantes  $0 < t_0 \leq 1$  e  $C_9 > 0$  que dependem apenas de  $n$  e  $K$  tais que

$$|F(x, t) - u(x)| \leq C_9, \quad \forall 0 < t \leq t_0. \quad (10.103)$$

Assim, para  $0 < t \leq t_0$ ,

$$\rho(x) - C_9 - 1 \leq F(x, t) \leq \rho(x) + C_9 + 1. \quad (10.104)$$

Com isso, provamos o seguinte resultado:

**Proposição 10.18.** *Suponhamos que  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$  e seja  $u \in C^\infty(M)$  tal que*

$$|u(x) - \rho(x)| \leq C_1 \quad e \quad |\nabla u|(x) \leq C_1 \quad \forall x \in M, \quad (10.105)$$

onde  $\rho$  é a distância até um ponto fixado  $o \in M$ . Se

$$F(x, t) := \int_M H(x, y, t)u(y) dy, \quad (10.106)$$

então, existe  $t_0 > 0$  e uma constante  $C = C(n, K) > 0$  tal que

$$C^{-1}(1 + \rho(x)) \leq |F(x, t)| \leq C(1 + \rho(x)), \quad \forall x \in M, \forall t \in [0, t_0]. \quad (10.107)$$

Agora, pelo Corolário 10.6, para obtermos alguma limitação sobre o gradiente de  $F$ , basta provarmos que  $F$  satisfaz (10.60) para algum  $a > 0$ . De fato, se definirmos  $g$  como em (10.4) e  $\phi_R$  como em (10.8) (agora tomando as bolas com centro em  $o$ ), e fazendo argumento análogo ao utilizado para obter (10.14), obtemos

$$\int_0^{t_0} \int_M \phi_R^2 e^g |\nabla F|^2 \leq \int_0^{t_0} \int_M e^g F^2 |\nabla \phi_R|^2 + \int_M \phi_R^2 e^g F^2|_{s=\tau} + \int_M \phi_R^2 e^g F^2|_{s=0}, \quad (10.108)$$

o que implica que

$$\int_0^{t_0} \int_{B_o(R)} e^g |\nabla F|^2 \leq \int_0^{t_0} \int_M e^g F^2 + \int_M e^g F^2|_{s=\tau} + \int_M e^g u^2, \quad (10.109)$$

para todo  $R > 0$ . Lembrado que  $|u(x) - \rho(x)| \leq 1$  e usando (10.107) juntamente com a Proposição 10.13, concluímos que o lado direito da desigualdade acima é finito. Logo,

$$\int_0^{t_0} \int_M e^g |\nabla F|^2 < \infty, \quad (10.110)$$

e  $F$  satisfaz (10.60). Portanto,  $|\nabla F|(x, t)$  é limitado por uma constante para todo  $x \in M$  e todo  $t \in [0, t_0]$ , provando assim, o seguinte resultado parcial:

**Proposição 10.19.** *Suponhamos que  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)K$  e seja  $u \in C^\infty(M)$  tal que*

$$|u(x) - \rho(x)| \leq C_1 \quad e \quad |\nabla u|(x) \leq C_1 \quad \forall x \in M, \quad (10.111)$$

onde  $\rho$  é a distância até um ponto fixado  $o \in M$ . Se

$$F(x, t) := \int_M H(x, y, t)u(y) dy, \quad (10.112)$$

então, existe  $t_0 > 0$  e uma constante  $C = C(n, K) > 0$  tal que

$$|\nabla F|(x, t) \leq C, \quad \forall x \in M, \quad \forall t \in [0, t_0]. \quad (10.113)$$

Note que, até o momento, não usamos a hipótese de  $M$  ter curvatura seccional limitada superiormente; tal hipótese será necessária para obtermos uma limitação para a hessiana de  $F$ . Dado um ponto  $q$  em  $M$ , se  $p \in M$  é um ponto conjugado de  $q$ , então

$$d(p, q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K}}, \quad (10.114)$$

(vide Teorema II.6.3., [Cha06]). Temos assim que, se tomarmos  $R < \pi/\sqrt{K}$ ,  $\exp_q$  é será difeo-

morfismo local em  $\widehat{B}_0(R) \subset T_q M$  para cada  $q \in M$  (veja Proposição 10.11 [Lee97] e Proposição 3.5 Chap. 5 [dC92]). Denotemos por  $g$  a métrica em  $M$  e consideremos em  $\widehat{B}_0(R)$  a métrica  $\widehat{g} = (\exp_q)^*(g)$ , i.e.,

$$\widehat{g}(X, Y) = g\left((\exp_q)_* X, (\exp_q)_* Y\right). \quad (10.115)$$

Defina,

$$\widehat{F}(y, t) = F(\exp_q(y), t) - u(q). \quad (10.116)$$

Então,

$$\left| \text{Hess } \widehat{F}(0, t) \right|_{\widehat{g}} = |\text{Hess } F(q, t)|_g, \quad (10.117)$$

logo, para estimar a hessiana de  $F$  é suficiente estimar  $|\text{Hess } \widehat{F}(0, t)|_{\widehat{g}}$ .

Notemos que  $\widehat{F}$  satisfaz a equação do calor em  $\widehat{B}_0(R)$ ,  $|\widehat{F}| \leq C_{10}$  em  $\widehat{B}_0(R) \times [0, t_0]$  para alguma constante  $C_{10} > 0$  que depende apenas de  $n$  e  $K$ . Como a curvatura de  $\widehat{g}$  é limitada superiormente, e o raio de injetividade na origem com respeito a  $\widehat{g}$  é limitado inferiormente por  $\pi/\sqrt{K}$ , existe  $R_0 > 0$  que depende apenas de  $n$  e  $K$  de modo que existem coordenadas harmônicas em  $\widehat{B}_0(R_0)$  (veja [Jos84]). Nessas coordenadas, a norma  $C^{1, \frac{2}{3}}$  do tensor  $\widehat{g}_{ij}$  satisfaz

$$|\widehat{g}_{ij}|_{1, \frac{2}{3}} \leq C_{11}, \quad (10.118)$$

onde  $C_{11} > 0$  é uma constante que depende apenas de  $n$  e  $K$ , e  $g_{ij}$  é equivalente a métrica euclidiana por um fator que depende apenas de  $n$  e  $K$ . Nessas coordenadas, temos

$$\widehat{g}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \widehat{F} + \frac{1}{\sqrt{\widehat{g}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{\widehat{g}} \widehat{g}^{ij} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \widehat{F} = 0. \quad (10.119)$$

Assim,  $\widehat{F}_{x_i x_j}(0)$  é limitado por uma constante que depende apenas de  $n$  e  $K$  pela Estimativa de Schauder. Logo, temos a limitação da hessiana de  $\widehat{F}$  em 0.

# Capítulo 11

## O princípio da boa sombra

Nesse capítulo,  $M$  será sempre uma variedade completa. Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  que assume mínimo em um ponto  $p \in M$ , então  $|\nabla f(p)| = 0$  e  $\text{Hess } f(p)(X, X) \geq 0$  para todo  $X \in T_p M$ . No caso em que  $M$  é uma variedade compacta, tal ponto de mínimo sempre existe. No entanto, se  $M$  não é compacta, tal ponto pode não existir mesmo quando  $\inf_M f > -\infty$ .

Para o caso em que  $M$  não é compacta, Omori provou em [Omo67] o seguinte resultado:

**Teorema 11.1** (Omori). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana com curvatura seccional limitada inferiormente. Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  que é limitada inferiormente, então existe uma sequência  $(p_n)$  em  $M$  satisfazendo*

$$f(p_n) \rightarrow \inf_M f, \quad |\nabla f(p_n)| \rightarrow 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Hess } f(p_n) \geq 0. \quad (11.1)$$

A condição  $\liminf \text{Hess } f(p_n) \geq 0$  significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{Hess } f(p_n)(X, X) > -\varepsilon |X|^2, \quad \forall X \in T_p M, \quad n > n_0. \quad (11.2)$$

Mais tarde, Yau provou em [Yau75] uma versão do teorema acima para o caso em que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente.

**Teorema 11.2** (Yau). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  que é limitada inferiormente, então existe uma sequência  $(p_n)$  em  $M$  satisfazendo*

$$f(p_n) \rightarrow \inf_M f, \quad |\nabla f(p_n)| \rightarrow 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \Delta f(p_n) \geq 0. \quad (11.3)$$

Os dois teoremas acima são conhecidos como Princípio do Máximo (Mínimo) de Omori-Yau. Em [FX11], Fontenele e Xavier provaram a seguinte generalização do Princípio de Omori-Yau:

**Teorema 11.3** (Princípio da Boa Sombra). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana com curvatura de Ricci (resp. seccional) limitada inferiormente. Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  que*

é limitada inferiormente, então dada uma sequência minimizante  $(p_n)$  (ou seja  $f(p_n) \rightarrow \inf_M f$ ), existe uma sequência  $(q_n)$  em  $M$  satisfazendo

$$d(p_n, q_n) \rightarrow 0, \quad f(q_n) \rightarrow \inf_M f, \quad |\nabla f(q_n)| \rightarrow 0 \quad (11.4)$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Delta f(q_n) \geq 0 \quad \left( \text{resp. } \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Hess } f(q_n) \geq 0 \right). \quad (11.5)$$

A sequência  $(q_n)$  obtida no teorema acima é chamada de **boa sombra** da sequência  $(p_n)$ . Dizemos ainda que a variedade  $M$  satisfaz o **princípio da boa sombra**, se dada uma função  $f \in C^2(M)$  limitada inferiormente, toda sequência minimizante  $(p_n)$  admite uma boa sombra  $(q_n)$ .

## 11.1 Variedades *uniformly bumpable*

Em [AF10], Azagra e Fry, definiram a seguinte classe de variedades riemannianas:

**Definição.** Dizemos que uma variedade riemanniana é **second order uniformly bumpable** se existem  $C > 1$  (possivelmente grande) e  $c > 0$  (pequeno) tais que para todo  $p \in M$  e  $\delta \in (0, c)$  existe uma função  $\phi : M \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^2$  satisfazendo:

- (a)  $\phi(p) = 1$ ,
- (b)  $\phi(x) = 0$  if  $d(x, p) \geq \delta$ ,
- (c)  $\sup_{x \in M} |\nabla \phi(x)| \leq C/\delta$ ,
- (d)  $\sup_{x \in M} |\text{Hess } \phi(x)| \leq C/\delta^2$ .

**Observação.** Note que se  $M$  é *second order uniformly bumpable*, então para quaisquer  $p \in M$  e  $\delta \in (0, c)$ , existe uma função  $\phi : M \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo:

- (a')  $\phi(p) = 0$ ,
- (b')  $\phi(x) = 1$  if  $d(x, p) \geq \delta$ ,
- (c')  $\sup_{x \in M} |\nabla \phi(x)| \leq C/\delta$ ,
- (d')  $\sup_{x \in M} |\text{Hess } \phi(x)| \leq C/\delta^2$ .

Seguindo a demonstração do Princípio da Boa Sombra em [FX11], obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 11.4.** *Se  $M$  é second order uniformly bumpable e  $f \in C^2(M)$  é uma função tal que  $\inf_M f > -\infty$ , então toda sequência minimizante para  $f$  admite uma boa sombra (com relação à hessiana).*

*Demonstração.* Como  $M$  é second order uniformly bumpable, existem constante  $C > 1$  e  $c > 0$  de modo que para todo  $p \in M$  e  $0 < \delta < c$ , existe uma função  $\phi$  de classe  $C^2$  satisfazendo (a')-(d') da observação acima. Seja  $(p_n)$  uma sequência minimizante para  $f$ . Suponhamos que  $f(p_n) - \inf_M f < c$  para todo  $n$ . Defina

$$r_n = f(p_n) - \inf_M f \quad \text{and} \quad \varepsilon_n = r_n^{1/3}. \quad (11.6)$$

Para cada  $n$ , seja  $\phi_n : M \rightarrow [0, 1]$  uma função  $C^2$  satisfazendo (a')-(d') para  $p = p_n$  e  $\delta = \varepsilon_n$ . Considere a função:

$$f_n(x) = f(x) + \varepsilon_n^3 \phi_n(x), \quad \forall x \in M, \quad (11.7)$$

que é de classe  $C^2$  para cada  $n$ . Note que se  $x \notin \bar{B}(p_n, \varepsilon_n)$ , então

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f(x) + \varepsilon_n^3 \phi_n(x) \\ &\geq f(x) + \varepsilon_n^3 \\ &= f(x) + r_n \\ &= f(x) + f(p_n) - \inf_M f \\ &\geq f(p_n) = f_n(p_n). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Segue que  $\inf_M f_n$  é atingido, e se definimos  $q_n$  como um ponto tal que  $f_n(q_n) = \inf_M f_n$ , então  $d(q_n, p_n) \leq \varepsilon_n$  e  $d(q_n, p_n) \rightarrow 0$ . Além disso,

$$f(p_n) = f_n(p_n) \geq f_n(q_n) = f(q_n) + \varepsilon_n^3 \phi_n(q_n) \geq f(q_n). \quad (11.9)$$

Logo,  $f(q_n) \leq f(p_n)$  e a sequência  $(q_n)$  também é minimizante para  $f$ . Usando que  $q_n$  é um mínimo para  $f_n$  obtemos

$$0 = \nabla f_n(q_n) = \nabla f(q_n) + \varepsilon_n^3 \nabla \phi_n(q_n), \quad (11.10)$$

então

$$|\nabla f(q_n)| \leq \varepsilon_n^3 |\nabla \phi_n(q_n)| \leq \varepsilon_n^2 C. \quad (11.11)$$

Usando este fato novamente,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Hess } f_n(q_n)(X, X) \\ &= \text{Hess } f(q_n)(X, X) + \varepsilon_n^3 \text{Hess } \phi_n(q_n)(X, X) \\ &\leq \text{Hess } f(q_n)(X, X) + \varepsilon_n^3 \frac{C}{\varepsilon_n^2} \\ &= \text{Hess } f(q_n)(X, X) + \varepsilon_n C, \end{aligned} \quad (11.12)$$

que implica que

$$\text{Hess } f(q_n)(X, X) \geq -\varepsilon_n C. \quad (11.13)$$

De (11.11) e (11.13) nós concluimos que  $|\nabla f(q_n)| \rightarrow 0$  e  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Hess } f(q_n) \geq 0$ , como desejado.  $\square$

Em particular, toda variedade *second order uniformly bumpable* satisfaz o Princípio de Omori-Yau. Além disso, observando a demonstração do teorema anterior, temos as seguintes generalizações:

**Teorema 11.5.** *Suponhamos que  $M$  satisfaz a seguinte condição: existem  $C > 1$  e  $c > 0$  e um número natural  $k$  tais que para quaisquer  $p \in M$  e  $\delta \in (0, c)$ , existe uma função  $\phi : M \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^2$  tal que*

$$(i) \quad \phi(p) = 1,$$

$$(ii) \quad \phi(x) = 0 \text{ if } d(x, p) \geq \delta,$$

$$(iii) \quad \sup_{x \in M} |\nabla \phi(x)| \leq C/\delta^k,$$

$$(iv) \quad \sup_{x \in M} |\text{Hess } \phi(x)| \leq C/\delta^{k+1}.$$

Seja  $f \in C^2(M)$  tal que  $\inf_M f > -\infty$ . Então toda sequência minimizante para  $f$  admite uma boa sombra (com relação à hessiana).

*Demonstração.* Primeiramente, observemos novamente que podemos supor, sem perda de generalidade, que para cada  $p \in M$  e  $\delta \in (0, c)$ , a função  $\phi$  da hipótese satisfaz:

$$(i') \quad \phi(p) = 0,$$

$$(ii') \quad \phi(x) = 1 \text{ if } d(x, p) \geq \delta,$$

$$(iii') \quad \sup_{x \in M} |\nabla \phi(x)| \leq C/\delta^k,$$

$$(iv') \quad \sup_{x \in M} |\text{Hess } \phi(x)| \leq C/\delta^{k+1}.$$

Seja  $(p_n)$  uma sequência em  $M$  com  $f(p_n) \rightarrow \inf_M f$ , e suponha que  $f(p_n) - \inf_M f < c$  para todo  $n$ . Defina

$$r_n = f(p_n) - \inf_M f, \quad \varepsilon_n = r_n^{1/(k+2)}, \quad (11.14)$$

e seja  $\phi_n : M \rightarrow [0, 1]$  uma função de classe  $C^2$  satisfazendo (i')-(iv') para  $p = p_n$  e  $\delta = \varepsilon_n$ . Agora, só precisamos considerar a função  $C^2$

$$f_n(x) = f(x) + \varepsilon_n^{k+2} \phi_n(x), \quad (11.15)$$

e o resultado segue como na prova do Teorema 11.4.  $\square$

**Teorema 11.6.** *Suponhamos que  $M$  satisfaz a seguinte condição: existem  $C > 1$  e  $c > 0$  e um número natural  $k$  tais que para quaisquer  $p \in M$  e  $\delta \in (0, c)$ , existe uma função  $\phi : M \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^2$  tal que*

$$(i) \phi(p) = 1,$$

$$(ii) \phi(x) = 0 \text{ if } d(x, p) \geq \delta,$$

$$(iii) \sup_{x \in M} |\nabla \phi(x)| \leq C/\delta^k,$$

$$(iv) \text{Hess } \phi(x)(X, X) \leq \frac{C}{\delta^{k+1}} |X|.$$

Seja  $f \in C^2(M)$  tal que  $\inf_M f > -\infty$ . Então toda sequência minimizante para  $f$  admite uma boa sombra (com relação à hessiana).

*Demonstração.* A demonstração é exatamente igual a do teorema anterior. □

Em [AF10], Azagra e Fry demonstraram que toda variedade com curvatura seccional limitada (inferiormente e superiormente), raio de injetividade positivo e uniformemente localmente convexa é *second order uniformly bumpable*.

A ideia de definir tal classe de variedades começou no artigo [AFLM05], onde é definido o conceito de variedades *uniformly bumpable*. Posteriormente, em [AFLMR07], vemos que toda variedade riemanniana (de dimensão finita) é *uniformly bumpable*, sendo que a demonstração dessa afirmação segue diretamente do fato de que podemos aproximar uniformemente funções lipschitzianas, em variedades riemannianas, por funções que tem gradiente limitado (veja [GW79]). No sentido de estabelecer uma possível continuação deste trabalho, observa-se que a partir da análise de tal demonstração, podemos formular a seguinte conjectura:

**Conjectura.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa. Se existe uma constante  $C > 0$  tal que para cada ponto  $p \in M$  existe uma função  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  tal que*

$$1. C^{-1}(1 + \rho(x)) \leq \phi(x) \leq C(1 + \rho(x));$$

$$2. |\nabla \phi| \leq C;$$

$$3. |\text{Hess } \phi| \leq C,$$

onde  $\rho$  é a função distância até  $p$ , então  $M$  é *second order uniformly bumpable*.

Pelo Teorema 10.14, se esta conjectura se mostrar verdadeira, teremos que toda variedade com curvatura seccional limitada é *second order uniformly bumpable*. Assim, pelo Teorema 11.4 teríamos que toda variedade que obedece as condições enunciadas na conjectura satisfaz o Princípio da Boa Sombra e, conseqüentemente, o Princípio de Omori-Yau.

# Referências Bibliográficas

- [AF10] D. Azagra and R. Fry. A second order smooth variational principle on Riemannian manifolds. *Canad. J. Math.*, 62(2):241–260, 2010.
- [AFLM05] D.l Azagra, J. Ferrera, and F. López-Mesas. Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 220(2):304–361, 2005.
- [AFLMR07] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas, and Y. Rangel. Smooth approximation of Lipschitz functions on Riemannian manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, 326(2):1370–1378, 2007.
- [Cha84] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [Cha06] I. Chavel. *Riemannian geometry*, volume 98 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2006. A modern introduction.
- [dC92] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [FX11] F. Fontenele and F. Xavier. Good shadows, dynamics and convex hulls of complete submanifolds. *Asian J. Math.*, 15(1):9–31, 2011.
- [GHL04] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GW79] R. E. Greene and H. Wu.  $C^\infty$  approximations of convex, subharmonic, and pluri-subharmonic functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 12(1):47–84, 1979.

- [Jos84] J. Jost. *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, volume 4 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1984.
- [KL] L. Karp and P. Li. The heat equation on complete Riemannian manifolds. (*unpublished*). <http://math.uci.edu/~pli/heat.pdf>.
- [Lee97] J. M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [Lee13] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [Li12] P. Li. *Geometric analysis*, volume 134 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [LY86] P. Li and S.-T. Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.*, 156(3-4):153–201, 1986.
- [NT04] L. Ni and L.-F. Tam. Kähler-Ricci flow and the Poincaré-Lelong equation. *Comm. Anal. Geom.*, 12(1-2):111–141, 2004.
- [Omo67] H. Omori. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 19:205–214, 1967.
- [O’N83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1983. With applications to relativity.
- [Ros97] S. Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian manifold*, volume 31 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. An introduction to analysis on manifolds.
- [Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [SY94] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on differential geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994.
- [Tam10] L.-F. Tam. Exhaustion functions on complete manifolds. In *Recent advances in geometric analysis*, volume 11 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 211–215. Int. Press, Somerville, MA, 2010.
- [Yau75] S.-T. Yau. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:201–228, 1975.

- [Yau78] S.-T. Yau. On the heat kernel of a complete Riemannian manifold. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 57(2):191–201, 1978.

# Índice Remissivo

- Aceleração, 20
- Aplicação exponencial, 25
- Boa sombra, 114
- Campo
  - variacional, 35
- Campo vetorial
  - paralelo, 21
  - sobre uma curva, 18
  - sobre uma família admissível, 33
- Conexão, 12
  - euclidiana, 15
  - riemanniana, 25
  - simétrica, 25
- Curva
  - admissível, 31
  - minimizante, 33
  - regular, 31
- Curvatura
  - de Ricci, 42
  - seccional, 43
- Derivada covariante, 13, 19
  - total, 18
- Distância riemanniana, 33
- Divergência, 56
- Endomorfismo de curvatura, 40
- Família admissível, 33
- Forma índice, 52
- Função
  - comprimento de arco, 32
  - harmônica, 57
- Geodésica, 20
  - maximal, 20
  - riemanniana, 25
- Geodésicamente completa, 39
- Gradiente, 6
- Hessiana
  - covariante, 18
- Laplaciano, 57
- Métrica
  - euclidiana, 5
  - riemanniana, 4
- Norma, 4
- Princípio
  - da boa sombra, 114
  - de Omori-Yau, 113
- Referencial local, 4
- Símbolo de Christoffel, 14
- Tensor
  - de curvatura, 41
  - de Ricci, 42
- Transporte paralelo, 21
- Variação
  - de uma curva, 34
  - própria de uma curva, 34
- Variedade
  - completa, 39
  - riemanniana, 4
- Velocidade de uma curva, 18

Vetores

ortogonais, 4

ortonormais, 4

Vizinhança normal, 28