UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TÓPICOS SOBRE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS COMPLEXAS

Joel Rogelio Portada Coacalle

São Carlos
2015

TÓPICOS SOBRE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS COMPLEXAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOEL ROGELIO PORTADA COACALLE

TÓPICOS SOBRE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS COMPLEXAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie**

São Carlos - SP
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

P839tf

Portada Coacalle, Joel Rogelio.
Tópicos sobre funções de várias variáveis complexas / Joel Rogelio Portada Coacalle. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
94 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Funções de várias variáveis complexas. 2. Funções holomórficas. 3. Cauchy-Riemann, Equações de. I. Título.

CDD: 515.94 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SAO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Joel Rogelio Portada Coacalle, realizada em 27/03/2015:

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
FFCLRP/USP

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e saúde. Ao meu orientador Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie pelos ensinamentos, pela sua disponibilidade, apoio e confiança que gentilmente me mostrou na elaboração deste trabalho. Aos meus familiares que estiverem sempre presentes me apoiando e dando força para continuar nesta etapa da minha vida. Aos meus amigos e colegas pelo apoio e ajuda. A Capes, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Este dissetação apresenta resultados clásicos sobre funções holomorfas tanto em uma quanto em várias variáveis complexas. São tratados algums principais resultados sobre representações integrais de funções holomorfas, aproximação mediante funções holomomorfas, o operador de Cauchy-Riemman assim como a sua equação homogénea e não homogénea associada, resultados sobre funções subharmônicas, e o problema de continuação analítica. Quanto a representação integral de funções holomorfas apresentamos a formula integral de Cauchy assim como alguns resultados imediatos, tais como a representação em série de potencias, as estimativas de Cauchy e o importante principio do máximo para funções holomorfas, tanto como para uma e varias variáveis complexas. Quanto a aproximação apresentamos aqui o Teorema de Runge, assim como aqueles que resultam da sua aplicação no âmbito das funções meromorfas tais como o Teorema de Mittag-Leffler e o Teorema de Weierstrass. Detalhamos propriedades de funções subharmônicas, tanto do ponto de vista clássico como generalizado. Quanto a problemas de continuação analítica tratamos aqui no âmbito de varias variáveis complexas o Teorema de extensão de Hartogs, algumas propriedades geométricas sobre domínios de holomorfia onde provamos um caso especial de extensão analítica chamado Teorema de Bochner. O caso especial de um domínio de Reinhardt, e algumas propriedades é apresentado sobre os conceitos de plurisubharmonicidade e pseudoconvexidade.

ABSTRACT

This work shows classical results of analysis of holomorphic functions of both one and several complex variables. Are treated as main topics results on integral representations of holomorphic functions, approximation by holomomorfas functions, the Cauchy-Riemman operator and its homogeneous and non homogeneous equation associated, results on functions subharmonics, and the problem of analytic continuation. As the integral representation of holomorphic functions present the Cauchy Integral Formula well as the immediate results of this as are the representation in series of powers, estimates of Cauchy and the most important of the principle for holomorphic functions, these results as much as for one and several complex variables. As the approach we present here the Runge theorem, as well as those resulting from its application in the context of meromorphic functions that are Mittag-Leffler's theorem and the Weierstrass theorem. Subharmonic functions are handled here putting out two main properties and some others that can be seen even in a generalized sense. As for analytic continuation of problems discussed here in the context of several complex variables Hartog the Extension Theorem, some geometric properties of holomorphy domains where we prove a special case where analytical extension called Bochner's theorem, the special case of a domain named Domain Reinhardt, and some properties on the concepts of plurisubharmonicidade and pseudoconvexidade.

Sumário

1 Introdução

O objetivo do presente trabalho, é estudar alguns dos importantes teoremas clássicos no estudo de funções de variáveis complexas relacionados com aproximação, existência e resolução de soluções para o operador de Cauchy Riemman, assim como alguns casos de continuação analítica e comportamento geométrico de domínios de holomorfia, fazendo uso na maior parte do trabalho só de ferramentas básicas de análise.

Começamos introduzindo a formula integral de Cauchy que é a identidade pilar sobre a qual se apoiam as principais propriedades de funções holomorfas tais como a representação de uma função em série potências, estimativas sobre as derivadas da função holomorfa e o principio do máximo. E resulta disto perguntar-se se é possível gerar funções analíticas a través de tal representação integral. De fato é possível mostrar que representações integrais mais gerais deste tipo geram funções analíticas sobre determinados conjuntos abertos, isto é podem-se gerar soluções da equação $\overline{\partial}u = 0$, mais aí surge outra pergunta, então será que é possível resolver também a equação $\overline{\partial}u = \varphi$ sendo φ uma função com determinada regularidade. Podemos perguntar se a regularidade das soluções desta equação não homogénea é a mesma da função φ ou se as soluções mantêm se suportadas no suporte da função φ.

Outros dos problemas que consideramos no início do trabalho partem de uma observação sobre o fato de que sendo f uma função inteira, isto é , uma função holomorfa definida sobre $\mathbb{C}$, é possível representar ela mediante uma série de potências que converge uniformemente sobre todo disco fechado centrado na origem à f, então assim surge a pergunta: Se Ω é um conjunto aberto e f é uma função holomorfa definida no conjunto aberto Ω então, f pode ser aproximada uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω por funções analíticas definidas sobre uma vizinhança do $\overline{\Omega}$?. Como resposta a esta pergunta surge o teorema de Runge, o qual dá condições topológicas e geométricas sobre tais conjuntos para afirmar tal resultado. Como aplicação de este resultado é possível resolver a equação particular $\overline{\partial}u = \varphi$ sendo φ uma função de classe C^∞ convertendo o problema num problema de aproximação. Como outras aplicações do teorema de Runge seguem os teoremas de Mittag-Leffler e Weierstrass que resolvem problemas de existência de funções meromorfas com polos e zeros devidamente dispostos.

Apresentamos também resultados de considerável importância sobre funções subharmônicas, que são de fato resultados de carácter técnico na hora de estudar propriedades sobre a analiticidade de funções holomorfas de varias variáveis complexas e sobre o conceito de pseudoconvexidade de domínios contidos em $\mathbb{C}^n$.

De forma análoga ao estudo de funções holomorfas de uma variável complexa, definem-se as funções holomorfas de varias variáveis complexas como soluções continuamente diferenciáveis da equação $\overline{\partial}u = 0$ onde agora

$$\overline{\partial}u = \sum \partial u/\partial\overline{z_j}d\overline{z}_j,$$

assim u é holomorfa se é continuamente diferenciável e satisfaz as equações de Cauchy-

Riemman em cada variável. Logo resulta natural fazer as mesmas perguntas que fizemos acima no caso de uma variável complexa. Mas por outro lado uma outra pergunta surge independentemente de estas, na qual tenta-se afirmar a analiticidade de uma função a partir da analiticidade separadamente em cada variável. Como resposta a esta pergunta a qual dá uma resposta afirmativa surge o Teorema de Hartogs, o qual faz uso de uma representação integral de funções holomorfas análoga ao caso de uma variável complexa. Cabe destacar que este é um fenómeno exclusivamente das funções holomorfas de várias variáveis complexas, pois é fácil mostrar contra exemplos de funções reais onde não acontece isto.

Propriedades como a representação de funções analíticas em série potências, estimativas sobre as derivadas da função holomorfa, o principio do máximo e a resolubilidade da equação não homogénea $\overline{\partial} u = \varphi$ sendo φ ao menos de classe C^1 e com suporte compacto, são adotadas de forma análoga ao caso de uma variável.

No estudo de funções analíticas de uma variável complexa encontra-se o problema de estender uma função analítica à um domínio maior, o que as vezes podem ser feito fazendo uso do raio de convergência de uma expansão em série de potências da função. E de fato é trivial que existem funções analíticas num conjunto aberto conexo Ω tal que não poden ser continuadas analiticamente à um ponto $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, por exemplo a função $z \mapsto 1/(z-a)$. Mais isto ja não é mais verdade para funções analíticas de mais de uma variável. Este fenómeno é conhecido como o fenómeno de Hartogs. Agora é natural se perguntar sobre que outras hipóteses sobre o conjunto Ω, é possível fazer esta continuação analítica, e mais ainda sobre que outros conjuntos não é possível fazer isto. Um resultado que responde isto para subconjuntos abertos em $\mathbb{C}$ é um corolário do teorema de Weierstrass, o qual menciona que, para todo subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe uma função analítica definida em Ω que não pode ser continuada analiticamente a traves de nenhum ponto da fronteira dele, e é neste sentido que definimos um domínio de holomorfia como sendo um subconjunto em $\mathbb{C}^n$ com esta propriedade. Agora neste sentido resulta imediato se perguntar, se a propriedade de ser domínio de holomorfia repousa só sobre características já sejam geométricas ou não da fronteira de dito conjunto.

Desde que a representação em séries de potências de uma função analítica possibilita a extensão analítica de funções é natural estudar como primeiro caso os domínios de convergência de séries de potências para conseguir uma forma de estender funções analiticamente, e são as propriedades geométricas sobre conceitos de convexidade as que ressaltam deste tipo de domínios. Tais propriedades geométricas permitem introduzir um tipo de conjunto chamado Domínio de Reinhardt e tenta-se responder sobre que condições este tipo de conjuntos corresponde a domínios de convergência de alguma série de potências.

Com respeito aos domínios de holomorfia, o caminho para iniciar o estúdio é definindo o conceito de envoltória holomorfa de conjuntos compactos. Primeiros resultados caracterizam os domínios de holomorfia mediante este conceito, assim como responder a anterior pergunta feita sobre Domínios de Reinhardt.

Seguindo com o estúdio de continuidade analítica, tratamos aqui o Teorema de Bochner, o qual menciona que toda função holomorfa u definida sobre um conjunto aberto tubular conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ com $n \geq 2$, isto significa que Ω é do tipo $\{z \ : \ \mathrm{Re}(z) \in \omega\}$ sendo $\omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, estende-se analiticamente a uma função holomorfa definida na envoltória convexa de Ω. E deste importante teorema podemos como caso particular implicar o Teorema de extensão de Hartogs. (De fato, consideremos K un conjunto compacto contido em $\mathbb{C}^n$ e f uma função analítica no conjunto $\mathbb{C}^n \setminus K$, e veja que em particular a função f é analítica no conjunto $\mathbb{C}^n \setminus (P(K) + i\mathbb{R}^n)$ onde $P(K)$ denota a projeção ortogonal de K na parte real $\mathbb{R}^n + i\{0\}$ de $\mathbb{C}^n$, logo do Teorema de Bochner, obtemos que f pode-se estender analiticamente a uma função inteira.)

Para obter mais informação sobre domínios de holomorfia e as caraterísticas geométricas da fronteira destes domínios, introduzimos os conceitos de Plurisubharmonicidade e Pseudoconvexidade, os quais nos permitem afirmar, que de fato a propriedade de domínio de holomorfia é uma propriedade local que depende só dos pontos na fronteira do domínio e, mais ainda, que é possível caracterizar os domínios de holomorfia com fronteira de classe C^2 em termos da forma de Levi.

2 Propriedades elementares de funções de una Variável Complexa

Seja u uma função de valor complexo em $C^1(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto no plano complexo $\mathbb{C}$ que identificaremos com $\mathbb{R}^2$. Se as coordenadas reais são denotadas por x e y e escrevemos $z = x + iy$ então temos que $2x = z + \overline{z}$, 2iy=$z - \overline{z}$. Com isto a diferencial de u pode ser expressado como combinação linear de dz e $d\overline{z}$ a saber

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z}, \tag{1}$$

onde usamos as notações

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2}$$

As vezes denotaremos $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}$ por $\overline{\partial}u$.

Definição 2.0.1. *Uma função $u \in C^1$ é chamada de analítica (ou holomorfa) em Ω se satisfaz a equação de Cauchy Riemann $\overline{\partial}u = 0$em Ω, ou equivalentemente quando du é proporcional a dz. Quando uma função é analítica denotaremos $\partial u/\partial z$ por u'; assim podemos escrever $du = u'dz$ no caso que u seja analítica. Denotaremos também o conjunto de todas as funções analíticas como $A(\Omega)$.*

Veja que se $u = R + iI$ sendo R e I funções de valor real definidas em $\mathbb{C}$, a equação de Cauchy-Riemann é equivalente as equações $\partial R/\partial x = \partial I/\partial y$, $\partial R/\partial y = -\partial I/\partial x$.

Por exemplo, se n é um inteiro, desde que $d(z^n) = nz^{n-1}dz$ (para $z \neq 0$ quando $n > 0$), o monômio z^n é uma função analítica. Assim também o polinômio $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ é uma função analítica. Outro exemplo importante é a função exponencial definida por $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, pois $d(e^z) = e^z \; dz$.

Veja que o operador $\partial/\partial\overline{z}$ é linear, com isto obtemos que as combinações lineares com coeficientes complexos de funções analíticas é analítica. Também podemos obter da regra do produto para $d(uv)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uv)}{\partial z}dz + \frac{\partial(uv)}{\partial \overline{z}}d\overline{z} &= d(uv) = vdu + udv = \\ &= \left(v\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz + \left(v\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + u\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}\right)d\overline{z}, \end{aligned}$$

a regra do produto para os operadores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial\overline{z}$.

Se u é uma função analítica em Ω e v outra função analítica definida num conjunto aberto contendo a imagem de u, então a função $z \longmapsto v \circ u\ (z)$, onde $\circ$ denota a composição de funções, é analítica em Ω, pois da regra da cadeia obtemos que

$$d(v \circ u(z)) = dv(u(z))\; du = v'(u(z))\; u'\; dz \tag{3}$$

e ainda satisfaz a regra da cadeia para o operador $\partial/\partial z$, como $\partial v/\partial z = (\partial v/\partial u)(\partial u/\partial z)$.

Considerando $z \longmapsto u(z)$ como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, se u é uma função analítica então a matriz Jacobiana de $u = (R, I)$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \partial R/\partial x & \partial R/\partial y \\ \partial I/\partial x & \partial I/\partial y \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $\partial R/\partial x\ \partial I/\partial y - \partial R/\partial y\ \partial I/\partial x$. De (2) e da equação de Cauchy Riemann obtemos que $\partial u/\partial x = \partial u/\partial z$ e assim $\partial R/\partial x = \mathrm{Re}\,(\partial u/\partial z)$, $\partial I/\partial x = \mathrm{Im}\,(\partial u/\partial z)$. Logo

$$\partial R/\partial x\ \partial I/\partial y - \partial R/\partial y\ \partial I/\partial x = (\mathrm{Re}\,(\partial u/\partial z))^2 + (\mathrm{Im}\,(\partial u/\partial z))^2$$

e com isto o determinante do Jacobiano é $|u'(z)|$. Agora se $u'(z_0) \neq 0$ o Teorema da Função Implícita implica que u é um difeomorfismo de uma vizinhança de z_0 numa vizinhaça de $u(z_0)$. Se v é tal que $u \circ v(w) = w$, segue da regra da cadeia que $u'(v(w))dv = dw$, isto é, dv é proporcional a dw e portanto é uma função analítica de w, e ainda $\partial z(w)/\partial w = 1/u'(z(w))$. Logo podemos afirmar que se u é analítica tal que u' não se anula em $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto então u é uma função aberta em Ω, isto é, leva abertos de $\mathbb{C}$ em abertos de $\mathbb{C}$.

2.1 Formula integral de Cauchy e suas aplicações

Seja Ω um aberto limitado tal que a sua fronteira $\partial\Omega$ consta de uma quantidade finita de curvas de Jordan de classe C^1, $u = (R, I)$ uma função de classe C^1 numa vizinhança aberta de $\overline{\Omega}$. Então do Teorema de Green podemos obter que

$$\int_{\partial\Omega} udz = \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz. \tag{4}$$

De fato

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} udz &= \int_{\partial\Omega} (R + iI)(dx + idy) \\
&= \int_{\partial\Omega} R\ dx + (-I)dy \quad + i \int_{\partial\Omega} I\ dx + R\ dy \\
&= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial(-I)}{\partial x} - \frac{\partial R}{y} \right) dx \wedge dy + i \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial(R)}{\partial x} - \frac{\partial I}{y} \right) dx \wedge dy \\
&= \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial(-I)}{\partial x} - \frac{\partial R}{y} \right) + i \left(\frac{\partial(R)}{\partial x} - \frac{\partial I}{y} \right) \right\} dx \wedge dy \\
&= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} + i\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} + i\frac{\partial I}{\partial y} \right) \right\} 2idx \wedge dy \\
&= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} \right) (dx - idy) \wedge (dx + idy) \\
&= \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz.
\end{aligned}$$

Usamos aqui a orientação padrão no plano de $\partial\Omega$ (para mais detalhes consultar [11]). Veja que se u é analítica, da equação de Cauchy Riemann obtemos que $\int_{\partial\Omega} udz = 0$. Mais ainda obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 (Fórmula Integral de Cauchy não-homogênea)**.** *Se u é de classe C^1 numa vizinhança de $\overline{\omega}$ então*

$$u(\zeta) = (2\pi i)^{-1}\left\{\int_{\partial\omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}dz + \iint_{\omega}\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}dz\wedge d\overline{z}\right\}, \qquad \forall\zeta\in\omega. \tag{5}$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ tal que o fecho do disco $D(\zeta,\varepsilon)$ de centro z e raio ε esteja contido em Ω. Seja $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus\overline{D}(\zeta,\varepsilon)$. Desde que $z-\zeta$ não se anula quando $z\in\Omega_\varepsilon$, a função $z\mapsto 1/(z-\zeta)$ é holomorfa em Ω_ε.

Aplicando (4) para a função $u(z)/(z-\zeta)$ e desde que $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega\cup\partial\overline{D}(\zeta,\varepsilon)$ obtemos que

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}d\overline{z}\wedge dz &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{u(z)}{z-\zeta}dz\\ &= \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}dz - \int_{\partial D(\zeta,\varepsilon)}\frac{u(z)}{z-\zeta}dz\\ &= \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}dz - \int_0^{2\pi}u(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})id\theta. \end{aligned}\tag{6}$$

Como

$$\iint_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}d\overline{z}\wedge dz = \iint_{\Omega}\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}d\overline{z}\wedge dz - \iint_{D(\zeta,\varepsilon)}\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}d\overline{z}\wedge dz$$

e

$$\begin{aligned}\left|\iint_{D(\zeta,\varepsilon)}\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}d\overline{z}\wedge dz\right| &\le \frac{1}{i}\iint_{D(\zeta,\varepsilon)}\left|\frac{\partial u/\partial\overline{z}}{z-\zeta}\right|d\overline{z}\wedge dz\\ &\le \frac{C}{i}\iint_{D(\zeta,\varepsilon)}\left|\frac{1}{z-\zeta}\right|d\overline{z}\wedge dz\\ &= 2C\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon}r^{-1}rdrd\theta = 4\pi C\varepsilon\end{aligned}$$

para todo ε suficientemente pequeno e qualquer constante $C > \sup_D|\partial u/\partial\overline{z}|$, aquí D é um disco fechado de raio positivo contendo ζ; assim temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{D(\zeta,\varepsilon)}\partial u/\partial\overline{z}(z-\zeta)^{-1}d\overline{z}\wedge dz = 0.$$

Alem disso, se fixamos D' um disco fechado de raio r_0 positivo com centro em ζ então u é uniformemente continua sobre D', logo temos que para $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $\xi_1,\xi_2\in D'$ e $|\xi_1-\xi_2| < \varepsilon_0$ então $|u(\xi_1)-u(\xi_2)| < \delta$. Então

$$\left|\int_0^{2\pi}u(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})id\theta - 2\pi i u(\zeta)\right| \le \int_0^{2\pi}|u(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})-u(\zeta)|d\theta < 2\pi\delta$$

para todo $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, r_0\}$, portanto podemos afirmar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}u(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})id\theta = 2\pi i u(\zeta). \tag{7}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ na igualdade (6) obtemos a fórmula desejada. $\square$

Deste teorema, obtemos, no caso em que u seja uma função analítica em Ω, a conhecida formula de Cauchy para discos:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(z)}{z-\zeta} dz \tag{8}$$

onde D é um disco aberto contendo $\zeta \in \Omega$ tal que o seu fecho esteja contida em Ω.

Reciprocamente; o seguinte teorema afirma que a função u definida por

$$u(\zeta) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz,$$

sendo f uma função contínua em ∂D, é analítica em $\mathbb{C} \setminus \partial D$.

Teorema 2.1.2. *Se μ é uma medida com suporte compacto em $\mathbb{C}$, a integral*

$$u(\zeta) = \int (z-\zeta)^{-1} d\mu(z)$$

define uma função analítica de classe C^∞ fora do suporte de μ. Em quaisquer conjunto aberto ω onde $d\mu = (2\pi i)^{-1} \varphi dz \wedge d\overline{z}$ para algum $\varphi \in C^k(\omega)$, temos $u \in C^k(\omega)$ e $\partial u / \partial \overline{z} = \varphi$ se $k \geq 1$.

Prova. Dado que $1/(z-\zeta)$ é uma função de classe C^∞ nas variáveis (z, ζ) quando z pertence ao suporte K de μ e $\zeta \in \complement K$, então u é uma função de classe C^∞; e derivar sobre o sinal de integração (isto pelo Teorema da Convergência Dominada) e como $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{1}{(z-\zeta)} = 0$ quando $\zeta \neq z$ obtemos que u é analítica.

Provemos agora a segunda afirmação. Primeiro suponhamos que $\omega = \mathbb{R}^2$. Fazendo uma mudança de variáveis, podemos escrever

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\varphi(\zeta - z)}{z} dz \wedge d\overline{z}. \tag{9}$$

Veja que, se $B(0, N)$ é uma bola de centro na origen e raio $N > 0$ temos que

$$\iint_{B(0,N)} \frac{1}{|x+iy|} dxdy = 2\pi \int_0^N \frac{r}{r} dr < +\infty$$

então a função $1/|z|$ é integrável sobre quaisquer conjunto compacto.

Logo podemos derivar sobre o sinal da integral em (9) ao menos k vezes, e ainda a integral se manterá continua. Assim $u \in C^k$ e a sua derivada em relação a $\overline{\zeta}$ ficará

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}} &= -\frac{1}{2\pi i} \int\int \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} \varphi(\zeta - z) \frac{1}{z} dz \wedge d\overline{z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \varphi(\zeta - z) \frac{1}{z} dz \wedge d\overline{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}} \frac{1}{(z-\zeta)} dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Se D é um disco que contem o suporte de φ, obtemos do Teorema 2.1.1 que

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial D}\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}dz + \int\int_D \frac{\partial\varphi/\partial\bar{z}}{z-\zeta}dz\wedge d\bar{z}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint\frac{\partial\varphi/\partial\bar{z}}{z-\zeta}dz\wedge d\bar{z}. \qquad (11)\end{aligned}$$

De (10) e (11) temos que $\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}} = \varphi$.

No caso geral, se $z_0 \in \omega$, podemos escolher um conjunto aberto limitado $V \subset \omega$ e uma função $\phi \in C_0^k(\omega)$ tal que seja igual a 1 numa vizinhança de V. Veja que se $\mu_1 = \phi\mu$ e $\mu_2 = (1-\phi)\mu$ e

$$u_0(\zeta) = \int \frac{1}{z-\zeta}d\mu_j(z) \quad , \qquad j = 1,2$$

então $u = u_1 + u_2$. Dado que $\mu_1 = \frac{1}{2\pi i}\phi\varphi dz\wedge d\bar{z}$ e $\phi\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^2)$ temos do primeiro caso que $\frac{\partial\mu_1}{\partial\bar{\zeta}} = \phi\varphi$. E desde que μ_2 anula-se em V, segue que $u = u_1$ em V, e logo assim $u \in C^k$ e $\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}} = \varphi$ em V. Desde que z_0 foi escolhido arbitrariamente, temos que $u \in C^k(\omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}} = \varphi$ em ω. □

Corolário 2.1.3. *Todo $u \in A(\Omega)$ está em $C^\infty(\Omega)$. Assim $u' \in A(\Omega)$ se $u \in A(\Omega)$.*

Prova. Segue da expressão u na formula (8), e do fato que:

$$\frac{\partial^k u(\zeta)}{\partial\zeta^k} = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{u(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}dz, \qquad k \in \mathbb{N},$$

onde D é um disco aberto contendo ζ e tal que seu fecho esta contido em Ω, logo o corolário segue do teorema anterior. □

Ainda, podemos obter mais informação das derivadas das funções analíticas como segue.

Teorema 2.1.4. *Para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ e toda vizinhança aberta $\omega \subset \Omega$ de K existem constantes C_j, $j = 0, 1, ...$, tal que*

$$\sup_{z\in K}\left|u^{(j)}(z)\right| \le C_j \left\|u\right\|_{L^1(\omega)} \qquad u \in A(\Omega),$$

onde $u^{(j)} = \partial^j u/\partial z^j$

Prova. Escolhemos $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de K. Se $u \in A(\Omega)$, temos que

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\psi + u\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = u\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}$$

Aplicando o Teorema 2.1.1 à função ψu sobre uma vizinhança do suporte de ψ contida em ω, obtemos que:

$$(\psi u)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{u(z)\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}$$

Desde que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de K obtemos que

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{u(z)\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}, \qquad \forall \zeta \in K.$$

Veja que a integração acima acontece no suporte de $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)$ que é compacto e que de fato é disjunto de K. A função $z-\zeta$ é limitada inferiormente por uma constante M_K quando $\zeta \in K$ e z esta no suporte de $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$. Então fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada podemos integrar sobre o sinal da integral e obter:

$$\frac{\partial^j u(\zeta)}{\partial z^j} = \frac{j!}{2\pi i} \iint \frac{u(z)\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)}{(z-\zeta)^{j+1}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^j u(\zeta)}{\partial z^j} \right| &= \frac{j!}{2\pi} \left| \iint \frac{u(z)\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)}{(z-\zeta)^{j+1}} dz \wedge d\bar{z} \right| \\ &\leq \frac{2}{2\pi} \frac{j!}{M_K} \sup_{\operatorname{supp} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right| \iint_{\operatorname{supp} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}} |u| \, dxdy \\ &\leq C_{K,j} \int \int_{\omega} |u| \, dxdy, \end{aligned}$$

onde $C_{K,j}$ é uma constante que depende só de K e j, e $\operatorname{supp}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$ denota o suporte de $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$. □

Corolário 2.1.5. *Se $u_n \in A(\Omega)$ e $u_n \to u$ quando $n \to \infty$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, segue que $u \in A(\Omega)$.*

Prova. Seja $K \subset \Omega$ um subconjunto compacto contido em Ω e ω uma vizinhança de K tal que $\overline{\omega} \subset\subset \Omega$. Fazendo uso do Teorema 2.1.4 as funções analíticas $u_n - u_m$ seguem a seguinte desigualdade

$$\sup_{\zeta \in K} |u_n'(\zeta) - u_m'(\zeta)| \leq C_1 \|u_n - u_m\|_{L^1(\omega)} . \tag{12}$$

Como $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\overline{\omega}$, então para $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que se $n, m > 0$ então $|u_n'(z) - u_m'(z)| \leq \varepsilon$, $\forall z \in \overline{\omega}$. Logo

$$\|u_n - u_m\|_{L^1(\omega)} \leq \varepsilon \int_{\omega} dxdy. \tag{13}$$

Assim de (12) e (13) obtemos que u_n' é uniformemente de Cauchy em K, logo u_n' converge uniformemente em K. Da arbitrariedade de $K \subset \Omega$ obtemos que u_n' converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

Por outro lado, como $\partial u_n/\partial \overline{z} = 0$, para todo n, obtemos que $\partial u_n/\partial x = (\partial u_n/\partial z + \partial u_n/\partial \overline{z})$ e $\partial u_n/\partial y = i\,(\partial u_n/\partial z - \partial u_n/\partial \overline{z})$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos em Ω.

Dado que u_n converge uniformemente sobre subconjuntos compactos à função u, obtemos que u é diferenciável e mais ainda $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}$ logo da analiticidade de u_n obtemos que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ são continuas, isto é $u \in C^1(\Omega)$. Também

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{1}{i}\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Então u é analítica em Ω. □

Corolário 2.1.6. *(Stieltjes-Vitali) Se $u_n \in A(\Omega)$ e a sequência $|u_n|$ é uniformemente limitada sobre todo subconjunto compacto de Ω, existe uma subsequência u_{n_j} convergindo uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Ω para uma função $u \in A(\Omega)$.*

Prova. Seja K um conjunto compacto de Ω e ω uma vizinhança relativamente compacta em Ω de K. Do Teorema 2.1.4 obtemos que

$$\sup_K \left|\frac{\partial u_j}{\partial z}\right| \leq C\|u_j\|_{L^1(\omega)} \tag{14}$$

para alguma constante C, para todo $j \in \mathbb{N}$. E desde que por hipótese a sequência $\{|u_j|\}$ é uniformemente limitada e ω é relativamente compacto em Ω, obtemos da desigualdade 14 que a sequência $\{|\partial u_j/\partial z|\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em K. Desde que K é arbitrário podemos afirmar que a sequência $\{|\partial u_j/\partial z|\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada sobre quaisquer conjunto compacto de Ω. Segue da Desigualdade do Valor Médio que a sequência de funções $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente continua sobre subconjuntos compactos de Ω.

Logo do Teorema de Arzela-Ascoli, obtemos que para subconjuntos compactos de Ω existem subsequências de $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que convergem uniformemente em tais conjuntos compactos. Agora, usemos o método da diagonal para encontrar uma subsequência de $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que converge sobre todo subconjunto compacto de Ω. Isto é, consideremos uma sequência de conjuntos compactos encaixados $K_1, K_2, ..., K_n, ...$ tal que $\cup_j K_j = \Omega$. Se $\{u_{s_1}\}_{s\in\mathbb{N}}$ é a subsequência de $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre K_1, consideremos para K_2 uma subsequência $\{u_{s_2}\}_{s\in\mathbb{N}}$ tal que converge uniformemente em K_2; da mesma forma fazemos para $K_3, K_4, ...$ analogamente; para por fim considerar a sequência $\{u_{s_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$. Observe que ela converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$. Se $u(z) = \lim_{s\to\infty} u_{s_s}(z)$ temos do Corolário 2.1.5 que $u \in A(\Omega)$. □

Corolário 2.1.7. *A soma de uma série de potência*

$$u(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \tag{15}$$

é analítica no disco de convergência.

Prova. Suponhamos que o disco de convergência da série é $D(0, R)$ e seja $0 < r < R$. Logo $r = r + i\,0 \in D(0, R)$ e assim a série $\sum_{i=0}^{\infty} a_n r^n$ é absolutamente convergente. Desde que:

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_n \zeta^n \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_n|\, r^n \tag{16}$$

para todo $\zeta \in \overline{D(0,r)}$, obtemos do critério de Weierstrass que a série $\sum_{i=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ converge uniformemente em $\overline{D(0,r)}$, e isto para quaisquer $0 < r < R$. Desde que $\cup_{0<r<R} \overline{D(0,r)} = D(0, R)$ obtemos que a série (15) converge uniformemente em todo conjunto compacto contido em $D(0, R)$. Logo do Corolário 2.1.5 , obtemos que a série (15) define uma função analítica em $D(0, R)$. □

De forma recíproca a este último resultado, o seguinte teorema afirma que toda função analítica num disco, é aproximada uniformemente por polinômios analíticos.

Teorema 2.1.8. *Se u é analítica em $\Omega = \{z; |z| < r\}$, temos*

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(0) z^n / n!$$

com convergência uniforme sobre todo subconjunto compacto de Ω.

Prova. Seja $0 < r_1 < r_2 < r$. Fazendo $\Omega = D(0, r_2)$ no Teorema 2.1.1 obtemos em particular para todo $z \in D(0, r_1)$ que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_2} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{17}$$

Por outro lado, desde que

$$\left| \sum_{j=l}^{m} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} \right| \leq \sum_{j=l}^{m} \frac{|z|^j}{|\zeta|^{j+1}} \leq \frac{1}{r_2} \sum_{j=l}^{m} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^j \tag{18}$$

e $r_1/r_2 < 1$ obtemos que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}}$$

é uniformemente de Cauchy e assim do critério de Weierstrass converge uniformemente em $\partial D(0, r_2)$. Alem disso

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} = \frac{1}{\zeta - z}. \tag{19}$$

Segue de (18), que podemos integrar termo a termo a série em (19), como segue:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_2} u(\zeta) \sum_{j=0}^{\infty} z^j \zeta^{-j-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_{|\zeta|=r_2} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta. \tag{20}$$

Mas

$$\frac{j!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_2} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta = u^{(j)}(0),$$

e então

$$u(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^{(j)}(0) z_j}{j!}.$$

□

Corolário 2.1.9. *(A unicidade da continuação analítica) Se* $u \in A(\Omega)$ *e há alguns pontos* z *em* Ω *onde*

$$u^{(k)}(z) = 0, \text{ para todo } k \geq 0, \tag{21}$$

segue que $u = 0$ *em* Ω *se* Ω *é conexo.*

Prova. Suponhamos Ω seja conexo, e exista $z \in \Omega$ tal que $u^{(k)}(z) = 0$, para todo $k \geq 0$. É fácil ver que o conjunto

$$Z = \{\zeta \in \Omega \ : \ u^{(k)}(\zeta) = 0, \quad k = 0, 1, ...\}$$

é fechado. Se $\zeta \in Z \subset \Omega$ existe então $r > 0$ tal que $D(\zeta, r) \subset \Omega$. Logo do Teorema 2.1.8, para todo $\xi \in D(\zeta, r)$ temos que

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^{(j)}(\zeta)(\xi - \zeta)^j}{j!} = 0$$

isto é, $u \equiv 0$ em $D(\zeta, r)$; portanto $u^{(j)}(\xi) = 0$ para $\xi \in D(\zeta, r)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo Z é aberto. Desde que Ω é conexo e $z \in Z$ temos que $Z = \Omega$. Logo $u(\zeta) = u^{(0)}(\zeta) = 0$ para todo $\zeta \in \Omega$. □

Corolário 2.1.10. *Se* u *é analítica no disco* $\Omega = \{z; |z| < r\}$ *e se* u *não é identicamente 0, podemos escrever de uma única maneira na forma*

$$u(z) = z^n v(z),$$

onde n *é um inteiro* ≥ 0 *e* $v \in A(\Omega)$, $v(0) \neq 0$ *(o qual significa que* $1/v$ *é também analítica numa vizinhança de 0)*

Prova. Se u não é identicamente nulo em $D(0, r)$ então, do Corolário 2.1.9, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u^{(k)}(0) \neq 0$. Seja k_0 o mínimo inteiro tal que $u^{(k_0)}(0) = 0$. Logo do Teorema 2.1.8, obtemos que

$$u(z) = \sum_{j=k_0}^{\infty} u^{(j)}(0) z^j / j! = z^{k_0} \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j+k_0)}(0) z^j / (j + k_0)! \tag{22}$$

e se definimos v como a série na direita desta última igualdade, então v é analítica em $D(0, r)$ e assim $u(z) = z^{k_0} v(z)$. Além disso $v(0) \neq 0$. □

A continuação segue uma importante consequência da representação de uma função analítica pela Fórmula Integral de Cauchy assim como a sua consequência chamada principio do máximo para funções analíticas.

Teorema 2.1.11. *Se u é analítica em $\Omega = \{z; |z - z_0| < r\}$ e se $|u(z)| \leq |u(z_0)|$ quando $z \in \Omega$, então u é constante em Ω.*

Prova. Se $u(z_0) = 0$, então obviamente por hipótese $u(z) = 0, \forall z \in D(z_0, r)$. Suponhamos $u(z_0) \neq 0$, então de (5) obtemos que

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{u(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(z_0 + \rho e^{i\theta}) r i e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

para $\rho \in (0, r)$. Logo

$$\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{u(z_0 + \rho e^{i\theta})}{u(z_0)} \right) d\theta = 0 \tag{23}$$

então

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \left(1 - \frac{u(z_0 + \rho e^{i\theta})}{u(z_0)} \right) d\theta = 0 \tag{24}$$

Mas desde que $\left| \frac{u(z)}{u(z_0)} \right| \leq 1$ para $z \in D(z_0, r)$ então $\mathrm{Re} \left(\frac{u(z)}{u(z_0)} \right) \leq 1$; logo $\mathrm{Re} \left(1 - \frac{u(z)}{u(z_0)} \right) \geq 0$.

Portanto de (24) obtemos que $\mathrm{Re} \left(1 - \frac{u(z_0 + \rho e^{i\theta})}{u(z_0)} \right) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ e ainda para todo $\rho \in [0, r)$. Logo $\mathrm{Re} \left(\frac{u(z)}{u(z_0)} \right) = 1$, para todo $z \in D(z_0, r)$. Ainda

$$1 = \mathrm{Re} \left(\frac{u(z)}{u(z_0)} \right) \leq \left| \frac{u(z)}{u(z_0)} \right| \leq 1$$

Então $\left| \frac{u(z)}{u(z_0)} \right| = 1$, para todo $z \in D(0, R)$. Logo $\mathrm{Im} \left(\frac{u(z)}{u(z_0)} \right) = 0$, assim $\frac{u(z)}{u(z_0)} = 1$, isto é $u(z) = u(z_0)$, para todo $z \in D(z_0, r)$. $\square$

Corolário 2.1.12. *(Principio do Máximo). Seja Ω limitado e $u \in C(\bar{\Omega})$ analítica em Ω. Então o máximo de $|u|$ em Ω é atingida na fronteira.*

Prova. Se $z_0 \in \Omega$ tal que $|u(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}} |u(z)|$ o qual existe desde que $\overline{\Omega}$ é compacto e por hipótese u é contínua em $\overline{\Omega}$. Se z_0 pertence a $\partial\Omega$ então a afirmação é verdade. Se $z_0 \in Int\, \Omega$, então existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Do Teorema 2.1.11, tem-se que u é constante em $D(z_0, r)$, mais ainda $u(z) = u(z_0)$ em $D(z_0, r)$. Logo a derivada k-ésima da função $u - u(z_0)$ no ponto z_0 é igual a zero , para todo $k = 0, 1, 2, ...$ Logo, do corolário

2.1.9 obtemos que $u(z) = u(z_0)$ na componente conexa Ω_{z_0} de z_0 em Ω. Da continuidade de u em $\overline{\Omega}$, em particular em $\overline{\Omega}_{z_0}$ obtemos que $u(z) = u(z_0)$ para todo $z \in \overline{\Omega}_{z_0}$. Logo em particular $u(\zeta) = \max_{z\in\overline{\Omega}} |u(z)|$, para todo $\zeta \in \overline{\Omega}_{z_0}$, e em particular num ponto da fronteira de Ω. □

2.2 O Teorema de Runge

Observamos do Teorema 2.1.8, que uma função que é analítica num disco D pode ser aproximada uniformemente por polinômios analíticos sobre discos fechados contidos em D, em particular toda função que é inteira pode ser aproximada por polinômios analíticos sobre cada subconjunto compacto. O Teorema de Runge apresenta uma condição topológica sobre subconjuntos compactos de abertos para os quais é possível aproximar funções analíticas uniformemente.

Teorema 2.2.1. *(Runge) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $K \subset \mathbb{C}$ compacto. As seguintes condições sobre K são equivalentes:*

(a) *Toda função que é analítica numa vizinhança de K pode se aproximar uniformemente sobre K por funções em $A(\Omega)$.*

(b) *O conjunto aberto $\Omega \setminus K$ não tem componente conexa relativamente compacto em Ω.*

(c) *Para todo $z \in \Omega \setminus K$ existe uma função $f \in A(\Omega)$ tal que*

$$|f(z)| > \sup_K |f|$$

Prova. $(c) \Rightarrow (b)$. Suponha que a afirmação (b) não seja verdade, isto é existe uma componente conexa O contida em $\Omega \setminus K$ tal que $\overline{O} \subset \Omega$ é compacta. Afirmo que $\partial O \subset K$. De fato, seja $a \in \partial O$, $a \notin K$ e D um disco aberto centrado em a com $D \subset \Omega \setminus K$ (o qual existe desde que $\Omega \setminus K$ é aberto). Dado que $a \in \partial O$, temos que $D \cap O \neq \phi$. Consequentemente, $D \cup O$ é conexo desde que ambos são conexos e tem interseção não vazia, e também $D \cup O \subset \Omega \setminus K$. Desde que O é uma componente conexa de $\Omega \setminus K$, segue que $D \subset O$, e logo assim a pertence ao interior de O. Contradição pois $a \in \partial O$. Logo $\partial O \subset K$.

Do principio do maximo obtemos que

$$\sup_{\overline{O}} |f| \leq \sup_K |f|, \qquad \forall f \in A(\Omega) \tag{25}$$

o que contradiz a hipótese (c).

$(a) \Rightarrow (b)$ Suponhamos que (b) não seja verdade. Então existe uma componente conexa O relativamente compacta em $\Omega \setminus K$ e ainda, como feito acima, (25) é satisfeita. Veja que se f é analítica numa vizinhança de K, podemos escolher, por hipótese, uma sequência

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Omega)$ tal que converge uniformemente em K à função f. Assim de (25) tem-se que:

$$\sup_{\overline{O}} |f_n - f_m| \leq \sup_{K} |f_n - f_m|$$

então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge uniformemente sobre $\overline{O}$. Seja F a função limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\overline{O}$, logo F é continua em $\overline{O}$ e do Corolário 2.1.5, F é analítica em O.

Ainda $F = f$ em ∂O, pois $\partial O \subset K$. Portanto, em particular para a função $f(z) = 1/(z-\zeta)$, com $\zeta \in O$, existirá F analítica em O e continua em $\overline{O}$ tal que $(z-\zeta)F(z) = 1$ para todo $z \in \partial O$. Desde que $1 - (z-\zeta)F(z)$ é uma função analítica em O e continua em ∂O, segue do principio do máximo que $1 - (z-\zeta)F(z) = 0$ em O. Mas não existe função analítica F alguma tal que satisfaça a igualdade anterior para $z = \zeta$. Portanto (b) é valida.

$(b) \Rightarrow (a)$. A prova que faremos agora, faz uso do Teorema de Hahn-Banach. Aplicando este resultado ao espaço normado $C(K)$ de funções contínuas em K munido da norma $||\,.\,|| = \sup_K |\,.\,|$, obtemos que o conjunto E de funções em $A(\Omega)$ (restritos a K) é denso no conjunto G de funções analíticas definidas em alguma vizinhança aberta de K (restritas a K) se, e somente se, todo funcional linear contínua λ definida sobre $C(K)$ que é zero em E, também é zero em G. Suponhamos então λ como acima seja zero em E. Do Teorema de Representação de Riesz podemos escrever

$$\lambda(f) = \int f d\mu \quad , \qquad f \in C(K)$$

onde μ é uma medida definida sobre K. Seja

$$\varphi(\zeta) = \int \frac{1}{z-\zeta} d\mu(z) \qquad \zeta \in \complement K.$$

Do Teorema 2.1.2, φ é analítica em $\complement K$, e quando $\zeta \in \complement\Omega$, temos que

$$\varphi^{(k)}(\zeta) = k! \int \frac{1}{(z-\zeta)^{k+1}} d\mu(z) = 0, \tag{26}$$

para todo k, pois a função $z \longmapsto (z-\zeta)^{-k-1}$ é analítica em Ω se $\zeta \in \complement\Omega$. Assim pelo Corolário 2.1.9, $\varphi \equiv 0$ em toda componente de $\complement K$ que interseta à $\complement\Omega$. Desde que $\int z^n d\mu(z) = 0$ para todo n e

$$\frac{1}{z-\zeta} = -\frac{1}{\zeta\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}},$$

onde a série de potências converge uniformemente sobre K se $|\zeta| > \sup_K |z|$, também obtemos que $\varphi = 0$ em toda componente não limitada de $\complement K$. Seja agora O uma componente de $\complement K$ limitada. Se O tem um ponto que não pertence a Ω então de (26) obtemos que $\varphi \equiv 0$ em O. Afirmo que O não esta contido em Ω. De fato, suponhamos que $O \subset \Omega$; desde que ∂O esta contido em K (faça como (c) $\Longrightarrow$ (b)), obtemos que $\overline{O} \subset \Omega$, mais ainda, O debería ser uma componente de $\Omega \setminus K$ (pois não existe nenhum componente maior de $\complement K$, em particular de $\Omega \setminus K$, contendo O); logo $\overline{O}$ é compacto contido em Ω, mas isto contradiz a hipótese, logo existe um elemento em O que não pertence a Ω. Assim, como feito acima $\varphi \equiv 0$ em O. Concluímos que $\varphi = 0$ em $\complement K$.

Escolhemos uma função $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, onde ω é uma vizinhança de K em que f é analítica, e ainda $\psi = 1$ sobre uma vizinhança ω_0 de K. Então se $z \in K$ temos que

$$\begin{aligned} f(z) = \psi(z)f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\iint_\omega \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\omega\setminus\omega_0} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \end{aligned}$$

desde que $\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}} = 0$ em ω_0; mudando o ordem de integração tem-se que

$$\int f(z)d\mu(z) = -\frac{1}{2\pi i}\iint_{\omega\setminus\omega_0} f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = 0.$$

Isto é $\lambda(f|_K) = 0$. Logo E é denso em G, e assim a firmação (a) é provada.

$(b) \Rightarrow (c)$ Seja $z \in \Omega \setminus K$. Consideremos $r > 0$ tal que $D(z,r) \subset \Omega \setminus K$.

Dado que $D(z,r) \subset \Omega \setminus K$, então $D(z,r)$ esta totalmente contida em alguma componente de $\Omega \setminus K$. Pela hipóteses (b) o componente D que contem $D(z,r)$ não é relativamente compacta em Ω, assim, $D \setminus \overline{D}(z,r)$, também não será relativamente compacta em $\Omega \setminus K$, pois de ser assim, então $(D \setminus \overline{D}(z,r)) \cup \overline{D}(z,r) = D$ seria relativamente compacta.

Logo $D(z,r) \cup K$ também satisfaz (b). Desde que $(b) \Rightarrow (a)$, temos que para a função analítica que é 0 numa vizinhança de K e 1 numa vizinhança de $\overline{D}(z,r)$ poderia ser aproximado uniformemente por uma sequência de funções analíticas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$.

Com isto, para n suficientemente grande teríamos que $\sup_K |f_n| < 1/2$ e $|f_n(z) - 1| < 1/2$. Assim em particular,

$$|f_n(z)| > \sup_K |f_n|.$$

$\square$

Veja que como na prova $(c) \Rightarrow (b)$ podemos provar que se O é uma componente aberta de $\complement K$ então $\partial O \subset K$. No que segue iremos usar isto nas provas nos seguintes teoremas.

Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e $K \subset \Omega$ conjunto compacto. Definimos a envoltória analítica de K em Ω, que denotamos por $\widehat{K}_\Omega$, ao conjunto

$$\widehat{K}_\Omega = \left\{ z \;:\; z \in \Omega, |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in A(\Omega) \right\}.$$

Sempre que não houver perigo de confusão denotaremos $\widehat{K}_\Omega$ simplesmente por $\widehat{K}$. Veja que se $\zeta \in \complement\Omega$, então a função $f(z) = \frac{1}{z-\zeta} \in A(\Omega)$ e assim para todo $z \in \widehat{K}$ teria-se que

$$d(\zeta, K) = \min_{\xi\in K} |\xi - \zeta| \leq |z - \zeta|$$

e assim $d(K,\complement\Omega) \leq d(\widehat{K},\complement\Omega)$, logo $d(K,\complement\Omega) = d(\widehat{K},\complement\Omega)$ desde que $\widehat{K} \supset K$.

Desde que a envoltória convexa geométrica K_{convex} de K é dada como

$$K_{convex} = \{\xi t + (1-t)\zeta \ \ ; t \in [0,1]\,, (\xi,\zeta) \in K \times K\}$$

é a imagem de uma função continua, temos que K_{convex} é compacto. Logo se $z_0 \notin K_{convex}$ existe $\omega \in K_{convex}$ tal que $0 < d(z_0, K_{convex}) = d(z_0,\omega) = |z_0 - \omega|$. Considerando o vetor $a = \frac{z_0-\omega}{|z_0-\omega|}$, obtemos que a rotação $T_{\overline{a}}(z) = \overline{a}z$ é tal que $0 < d(z_0,\omega) = |z_0-\omega| = T_{\overline{a}}(z_0) \in \mathbb{R} + i\,\{0\}$ e $\mathrm{Re}(T_{\overline{a}}(\zeta)) \leq 0$ para todo $\zeta \in K_{convex}$. Logo

$$e^{\overline{a}\zeta} = e^{\mathrm{Re}(T_{\overline{a}}(\zeta))} < e^{T_{\overline{a}}(z_0)} = e^{\overline{a}z_0},$$

para todo $\zeta \in K$. Isto é $z_0 \notin \widehat{K}$, com isto provamos que $\widehat{K} \subset K_{convex}$.

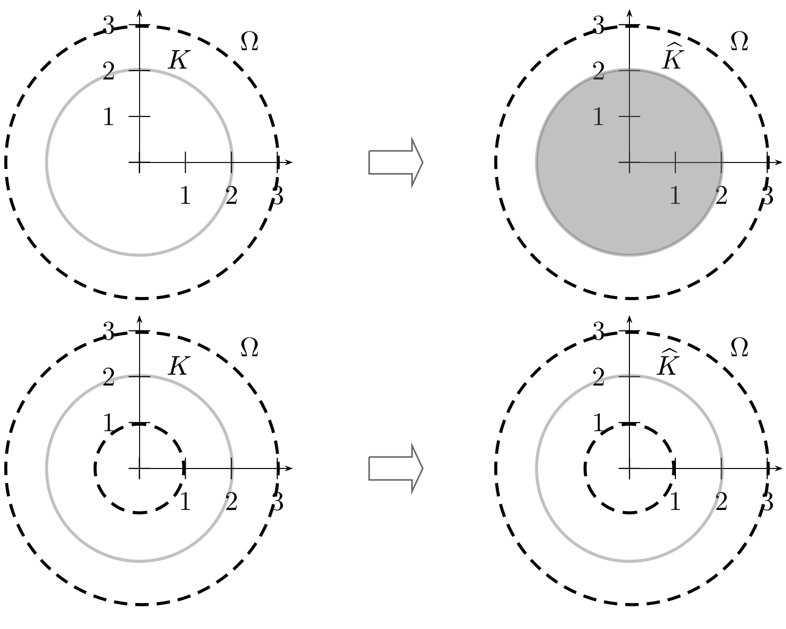
É claro que se $K \subset L$, então $\widehat{K} \subset \widehat{L}$; portanto $\widehat{K} \subset \widehat{\widehat{K}}$. Mas veja que se $z \in \widehat{\widehat{K}}$, tem-se que

$$|f(z)| \leq \sup_{\widehat{K}} |f|\,,\ \forall f \in A(\Omega),$$

e desde que $\sup_{\widehat{K}} |f| \leq \sup_K |f|$ obtemos que $|f(z)| \leq \sup_K |f|$, logo $z \in \widehat{K}$. Assim obtemos que $\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.

Por outro lado $\widehat{K}$ é compacto desde que K é compacto pois para todo $z \in \widehat{K}$ temos que $|z| \leq \sup_{\zeta\in K} |\zeta| \leq cte$.

Por exemplo, se Ω é o disco aberto $D(0,3)$ de centro na origem e raio 3 e $K = \partial D(0,2)$ então do Principio do Máximo e como $\widehat{K} \subset K_{convex}$ obtemos que $\widehat{K} = \overline{D(0,2)}$. Mas veja que se $\Omega = D(0,3) \setminus \overline{D(0,1)}$, então como $d(K,\complement\Omega) = d(\widehat{K},\complement\Omega)$ temos que $K = \partial D(0,2) = \widehat{K}$.



Veja que $\widehat{K}$ é um conjunto compacto que contem K e que satisfaz a hipótese (c) do Teorema de Runge. Mas ainda a hipótese (c) do Teorema de Runge, é equivalente a dizer que $K = \widehat{K}$. Logo podemos escolher uma sequência crescente $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_j \subset ...$ de subconjuntos compactos de Ω tal que $K_j = \widehat{K_j}$ e tal que todo subconjunto compacto de Ω esteja contido em algum K_j, de fato, considere os conjuntos

$$K_j = \left\{ z \in \Omega \ : \ |z_j| \leq j, d(z, \complement\Omega) \geq 1/j \right\}.$$

Desde que $\widehat{K}_j \subset (K_j)_{convex}$ e $K_j \subset B(0,j)$, temos que $\widehat{K}_j \subset B(0,j)$, e se $z \in \widehat{K}_j$, do fato que $d(z_j, \complement\Omega) = d(\widehat{K}_j, \complement\Omega)$ temos que

$$d(z, \complement\Omega) \geq d(\widehat{K}_j, \complement\Omega) = d(K, \complement\Omega) \geq 1/j$$

temos $\widehat{K}_j \subset \left\{ z \in \Omega \ : \ d(z, \complement\Omega) \geq 1/j \right\}$. Portanto $\widehat{K}_j \subset K_j$, e assim $\widehat{K}_j = K_j$.

Teorema 2.2.2. *$\widehat{K}_\Omega$ é a união de K e as componentes de $\Omega \setminus K$ que são relativamente compactas em Ω.*

Prova. Seja O uma componente de $\Omega \setminus K$ que é relativamente compacta em Ω. Então $\partial O \subset K$, e assim do principio do máximo tem-se que

$$|f(\zeta)| \leq \sup_{\partial O} |f| \leq \sup_{K} |f|, \qquad \forall f \in A(\Omega)$$

para $\zeta \in O$, portanto $O \subset \widehat{K}$.

Seja K_1 a união de K e todas as componentes relativamente compactas em Ω, contidas em $\Omega \setminus K$, então do anterior, $K_1 \subset \widehat{K}$. Veja que $\Omega \setminus K_1$ é aberto, pois é a união de componentes abertas de $\Omega \setminus K$. Logo K_1 é fechado, e como $K_1 \subset \widehat{K}$, então K_1 é compacto. Agora da definição de K_1 tem-se que $\Omega \setminus K_1$, não contem componentes relativamente compactas em Ω, assim K_1 satisfaz a condição (b) do teorema de Runge, logo $K_1 = \widehat{K}_1$ mas $K \subset K_1$, então $\widehat{K} \subset \widehat{K}_1 = K_1$ e portanto $\widehat{K} = K_1$. □

Teorema 2.2.3. *Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2$ conjuntos abertos em $\mathbb{C}$. As seguintes condições são equivalentes*

(a) *Toda função em $A(\Omega_1)$ pode ser aproximada por funções em $A(\Omega_2)$, uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Ω_1.*

(b) *Se $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = L \cup F$ onde F é fechado em Ω_2 e L é compacto, $F \cap L = \phi$, se segue que $L = \phi$.*

(c_1) *Para todo conjunto compacto $K \subset \Omega_1$ tem-se que $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$.*

(c_2) *Para todo conjunto compacto$K \subset \Omega_1$, tem-se que $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}_{\Omega_1}$.*

(c_3) *Para todo conjunto compacto$K \subset \Omega_1$, o conjunto $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ é compacto.*

Prova. $(a) \Rightarrow (c_2)$ Desde que, se $f \in A(\Omega_2)$, em particular tem-se $f \in A(\Omega_1)$, então $\widehat{K}_{\Omega_1} \subset \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Se $z \in \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$, então para todo $f \in A(\Omega_2)$ tem-se que:

$$|f(z)| \leq \sup_K |f|$$

E se $g \in A(\Omega_1)$, então por hipotese tem-se que para $K \cup \{z\}$, existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Omega_2)$ tal que $f_n \to g$ uniformemente em $K \cup \{z\}$, logo, para cada n tem-se que

$$|f_n(z)| \leq \sup_K |f_n| \leq \sup_K |f_n - g| + \sup_K |g|\,.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos que

$$|g(z)| \leq \sup_K |g|$$

então $z \in \widehat{K}_{\Omega_1}$, logo $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}_{\Omega_1}$.

$(c_2) \Rightarrow (c_3)$ Óbvio.

$(c_3) \Rightarrow (a)$ Seja $f \in A(\Omega_1)$ e K compacto contido em Ω_1. Por hipótese temos que $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ é compacto, e também $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \complement\Omega_1$ é compacto pois esta contido em $\widehat{K}_{\Omega_2}$ e $\complement\Omega_1$ é fechado, logo existe uma vizinhança V de $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \complement\Omega_1$ contida em Ω_2 tal que $V \cap \Omega_1 = \phi$.

Defina $\widehat{f}$ como sendo igual a f em Ω_1 e 1 em V. Do teorema de Runge, para $\widehat{K}_{\Omega_2} \subset \Omega_2$, existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Omega_2)$ tal que converge uniformemente a $\widehat{f}$ em $\widehat{K}_{\Omega_2}$. Em particular $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f em $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Logo $f_n \to f$ uniformemente em $K \subset \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$, isto prova (a).

Com isto ultimo provamos que as afirmações $(a), (c_2)$ e (c_3) são equivalentes.

$(a) \Rightarrow (c_1)$ Afirmo que $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \complement\Omega_1 = \phi$. De fato, suponhamos que exista $z \in \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \complement\Omega_1$. Desde que (a) e (c_3) são equivalentes, na prova anterior podemos considerar $0 = f \in A(\Omega_1)$, logo para n suficientemente grande teria-se que $|f_n(z) - 1| < 1/2$ e $|f_n(\zeta) - 0| < 1/2$ para todo $\zeta \in \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Então $|f_n(z)| > \sup_K |f_n|$ e assim $z \notin \widehat{K}_{\Omega_2}$, mas isto é uma contradição, então $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \complement\Omega_1 = \phi$ e assim $\widehat{K}_{\Omega_2} \subset \Omega_1$.

Logo desde que (a) é equivalente a (c_2) temos que:

$$\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}_{\Omega_1}.$$

Desde que (c_1) implica obviamente (c_2) temos agora que as afirmações $(a), (c_1), (c_2)$ e (c_3) são equivalentes.

Provemos agora que $(c_1) \Rightarrow (b)$. Seja ω um subconjunto aberto relativamente compacto em Ω_2 tal que $L \subset \omega$, e $\overline{\omega} \cap F = \phi$, o qual existe desde que L é compacto e F é fechado em Ω_2.

Dado que ω é relativamente compacto em Ω_2, temos que $\overline{\omega} \subset \Omega_2$ e também $\partial\omega \cap F = \phi$ desde que $\overline{\omega} \cap F = \phi$, e obviamente $\partial\omega \cap L = \phi$, pois $L \subset \omega$. Então $\partial\omega \subset \Omega_2 \setminus (F \cup L)$, logo $\partial\omega \subset \Omega_1$, pois $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = F \cup L$.

Desde que $\partial\omega$ é compacta, do principio do máximo temos que $\widehat{(\partial\omega)}_{\Omega_2} \supset \omega$. Então $\widehat{(\partial\omega)}_{\Omega_2} \supset L$, pois $\omega \supset L$. Mas de (c_1), $\widehat{(\partial\omega)}_{\Omega_2} = \widehat{(\partial\omega)}_{\Omega_1}$, então $L \subset \widehat{(\partial\omega)}_{\Omega_1} \subset \Omega_1$, logo $L = \phi$ pois por hipótese $L \cap \Omega_1 = \phi$.

$(b) \Rightarrow (c_1)$ Seja $K \subset \Omega_1$ compacto, e O uma componente de $\Omega_2 \backslash K$ relativamente compacta em Ω_2. Dado que $\partial O \subset K \subset \Omega_1$, tem-se que se

$$L = \overline{O} \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = (\partial O \cup O) \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = O \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$$

então L é compacto.

Alem disso se $F = \complement O \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$ então F é fechado em Ω_2. $F \cup L = (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$. Logo de (b) tem-se que $L = \phi$ e assim $O \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = \phi$, então $O \subset \Omega_1$, e ainda $\overline{O} \subset \Omega_1$.

Do Teorema 2.2.2, temos que $\widehat{K}_{\Omega_2} \subset \widehat{K}_{\Omega_1}$ pois O ainda é relativamente compacta em Ω_1. Dado que a inclusão $\widehat{K}_{\Omega_1} \subset \widehat{K}_{\Omega_2}$ é satisfeita pois $\Omega_1 \subset \Omega_2$, temos que $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$ $\square$

2.3 O Teorema de Mittag Leffler

Seja $z \in \mathbb{C}$ e A_z o conjunto de classes de equivalência de funções analíticas numa vizinhança de z com a relação de equivalência $\sim$ dada por

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g$$

numa vizinhança de z.

Se $f \in A(\Omega)$, denotamos por f_z a classe de equivalência onde f pertence. Definindo em A_z as funções $f_z + g_z := (f+g)_z$, $f_z \cdot g_z := (f \cdot g)_z$, podemos observar que elas estão bem definidas, isto é, não dependem da escolha de f, g e além disso A_z torna-se um anel comutativo. Mais ainda se $f_z, g_z \in A_z$ tais que $f_z \neq 0 \neq g_z$, então do Corolário 2.1.10 obtemos que $f(\zeta) = (\zeta - z)^n F(\zeta)$, $g(\zeta) = (\zeta - z)^m G(\zeta)$ numa vizinhança de z onde n, m são inteiros ≥ 0 e F, G são funções analíticas numa vizinhança de z, tais que $F(z) \neq 0 \neq G(z)$, logo $(fg)(\zeta) = (\zeta - z)^{n+m}(FG)(\zeta)$, assim $fg \not\equiv 0$ numa vizinhança de z pois $FG(z) \neq 0$ e assim simplesmente por continuidade, $FG \not\equiv 0$ em alguma vizinhança de z. Dado que $(fg)_z \neq 0$. Com isto, vemos que em A_z não existem divisores de zero.

Logo podemos formar o corpo quociente de A_z, que denotamos por M_z, isto é, M_z é o conjunto de classes de equivalência em $A_z \times (A_z \setminus \{0_z\})$, siendo 0_z a classe da função 0, com a relação $\approx$ dado por

$$(f_z, g_z) \approx (F_z, G_z) \Leftrightarrow f_z G_z = g_z F_z \tag{27}$$

e se denotamos f_z/g_z como a classe de equivalência de (f_z, g_z), M_z torna-se um corpo com as operações $f_z/g_z + F_z/G_z = (fG + gF)_z/(gG)_z$, $(f_z/g_z) \cdot (F_z/G_z) = (fF)_z/(gG)_z$.

Definição 2.3.1. *Uma função meromorfa* φ *num conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *é uma função*

$$\varphi : \Omega \to \bigcup_{z \in \Omega} M_z$$

tal que, para cada $z \in \Omega$, $\varphi(z) \in M_z$, *e existem, uma vizinhança* ω *de* z, *funções* $f, g \in A(\omega)$ *tais que* $\varphi(\zeta) = f_\zeta / g_\zeta$ *para todo* $\zeta \in \omega$.

Denotaremos por $M(\Omega)$ ao conjunto de todas as funções meromorfas em Ω.

Em particular, se $F \in A(\Omega)$, então a aplicação $z \to F_z$ define uma função meromorfa em Ω. E se $F, G \in A(\Omega)$ tais que $F \neq G$, então existirá $\zeta \in \Omega$ tal que $F(\zeta) \neq G(\zeta)$ e assim $F_\zeta \neq G_\zeta$. Logo podemos identificar $A(\Omega)$ como um subconjunto do $M(\Omega)$.

Usaremos por conveniência a notação φ_z em vez de $\varphi(z)$ que φ fosse uma função meromorfa.

Veja que o conjunto das funções meromorfas num conjunto Ω, junto com as operações $(\varphi + \psi)(z) = \varphi_z + \psi_z$, $(\varphi \cdot \psi)(z) = \varphi_z \cdot \psi_z$ forma um anel comutativo com identidade.

E se Ω é conexo e $\varphi \neq 0 \in M(\Omega)$ então existe $\zeta_0 \in \Omega$ tal que $\varphi_{\zeta_0} \neq 0$. Afirmo que nestas condições $\varphi_z \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. De fato, seja $Z = \{z \in \Omega \ : \ \varphi_z = 0_z\}$, e $z \in Z$, para $r > 0$ suficientemente pequeno $\varphi_z = f_\zeta / g_\zeta$ com $\zeta \in D(z, r)$ para $f, g \in A(D(z, r))$, logo $f_z = 0_z$ isto é $f \equiv 0$ em $D(z, r)$, portanto $\varphi_\zeta = 0_\zeta$ para $\zeta \in D(z, r)$, com isto Z é aberto. Se $z \in \Omega \setminus Z$, então $\varphi_z \neq 0_z$, e se $\varphi_\zeta = f_\zeta / g_\zeta$, com $\zeta \in D(z, r)$ para $r > 0$ suficientemente pequeno, então $0_z \neq f_z / g_z$, logo $f_z \neq 0_z$ pois de ser assim teríamos que $f \equiv 0$ em $D(z, r)$ e assim em particular $f_\zeta / g_\zeta = 0_\zeta$ para $\zeta \in D(z, r)$; do Corolário 2.1.10 temos que $f(\zeta) = (z - \zeta)^n F(\zeta)$ com $F(z) \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, logo $f_\zeta / g_\zeta = (z - \zeta)^n F_\zeta / g_\zeta \neq 0_\zeta$ para $\zeta \in D(z, r)$. Logo $\Omega \setminus Z$ é aberto, isto é Z é fechado. Desde que $\zeta_0 \in \Omega \setminus Z$ temos que $\Omega \setminus Z = \Omega$, isto é $\varphi_z \neq 0_z$ para todo $z \in \Omega$. Então se $\varphi_\zeta = f_\zeta / g_\zeta$ teria-se que $f_\zeta \neq 0_\zeta$ para todo $\zeta \in \Omega$. Com isto fica bem definida a aplicação $\zeta \to 1/\varphi_\zeta$ onde $1/\varphi_\zeta$ denota g_ζ / f_ζ quando $\varphi_\zeta = f_\zeta / g_\zeta$. Observe que para $z \in \Omega$ tem-se que $\varphi_z \cdot 1/\varphi_z = 1_z$. Chamamos a aplicação $1/\varphi : z \longmapsto 1/\varphi_z$ a inversa da função meromorfa φ no conjunto conexo Ω.

De forma geral, se $\varphi \in M(\Omega)$ não for identicamente nula em toda componente conexa de Ω, existe a função $1/\varphi \in M(\Omega)$ tal que $\varphi \cdot 1/\varphi = 1 \in M(\Omega)$.

Para todo $q \in M_\zeta$ podemos atribuir a ele um valor $q(\zeta)$ em ζ, como segue

- Se $q = 0_\zeta$ então $q(\zeta) = 0$
- Se $q \neq 0_\zeta$ e se $q = f_\zeta / g_\zeta$ com f e g funções analíticas numa vizinhança de ζ, e $g_\zeta \neq 0_\zeta$, obtemos que $f_\zeta \neq 0_\zeta$. Logo do Corolário 2.1.10 podemos escrever $f(z) = (z - \zeta)^n f_1(z)$, $g(z) = (z - \zeta)^m g_1(z)$ numa vizinhança de ζ, onde f_1, g_1 são analíticas numa vizinhança de ζ e $f_1(\zeta) \cdot g_1(\zeta) \neq 0$. Veja que $n - m$ e $f_1(\zeta)/g_1(\zeta)$ depende só de q e não de f e g (isto decorre de (27)). Logo definimos

$$q(\zeta) = \begin{cases} \infty & \text{se } n < m \\ f_1(\zeta)/g_1(\zeta) & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n > m \end{cases}$$

Veja que se $\varphi \in M(\Omega)$, então o conjunto $\{z \ : \ \varphi_z(z) = \infty\}$ é discreto. De fato, seja $z \in \Omega$ tal que $\varphi_z(z) = \infty$ desde que, como feito acima, $\varphi_\zeta = f_\zeta/g_\zeta$ numa vizinhança de z, e assim da definição de função meromorfa $\varphi_\zeta(\zeta) = f(\zeta)/g(\zeta)$ numa vizinhança de z, mas $f(\zeta) \neq 0 \neq g(\zeta)$ para todo $\zeta \neq z$ numa vizinhança de z, logo $\varphi_\zeta(\zeta) = f(\zeta)/g(\zeta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para todo $\zeta \neq z$ numa vizinhança de z.

Logo se $\varphi \in M(\Omega)$, obtemos que a aplicação

$$F : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$z \longmapsto \varphi_z(z)$$

que quando $F(z) \neq \infty$, F escreve-se como a divisão de duas funções que não se anulam, ou zero, numa vizinhança de z, então F é analítica no complemento do conjunto discreto $D = \{z \ : \ \varphi_z(z) = \infty\}$. Da mesma forma, podemos ver que o mapeo $1/F : z \longmapsto 1/\varphi_z(z)$ é analítica numa vizinhança de D (aqui fazemos $1/\infty = 0$). Observe que esta função F é uma função meromorfa no sentido clássico.

Logo veja que se F é uma função com estas propriedades (isto é uma função meromorfa no sentido clássico) então a aplicação $\varphi : \Omega \to \bigcup_{z\in\Omega} M_z$ definida por $\varphi_z = F_z$ com $z \neq D$, $\varphi_z = 1/(1/F)_z$ se $z \in D$, é uma função meromorfa, e ainda $\varphi_z(z) = F(z)$ para todo $z \in \Omega$. Com isto a correspondência entre funções meromorfas no sentido clássico e funções meromorfas definidas como na Definição 2.3.1 é biunívoca. Dizemos que os pontos z onde $F(z) = \infty$ são polos de F. No que segue não faremos distinção alguma entre φ e F.

Teorema 2.3.2. *Se F é uma função meromorfa numa vizinhança de ζ, então existe uma vizinhança de ζ, onde*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k (z - \zeta)^{-k} + G(z)$$

com constantes A_k e uma função analítica G, e esta representação é única. Se $F_\zeta \neq 0$, existe também uma única representação, da forma

$$F(z) = (z - \zeta)^n G(z)$$

onde $G(\zeta) \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$. Se $n > 0$, temos um zero de ordem n em ζ, se $n < 0$, temos um polo de ordem $-n$ em ζ.

Prova. Suponhamos F seja analítica fora de um conjunto discreto D e $1/F$ analítica numa vizinhança de D. Se $\zeta \notin D$, então a afirmação é óbvia. Se $\zeta \in D$ então $1/F$ é analítica num disco aberto B de centro ζ.

Desde que $1/F$ não é identicamente nula em B, pois D é um conjunto discreto, obtemos do corolário 2.1.10 que existem $n \in \mathbb{N}$ e $G \in A(B)$ com $G(z) \neq 0$ para $z \in B$, tal que

$$\frac{1}{F(z)} = (z-\zeta)^n G(z)$$

logo para $z \in D \setminus \{\zeta\}$ tem-se que

$$F(z) = \frac{1}{(z-\zeta)^n G(\zeta)}$$

Desde que $H = 1/G$ é analítica em B, uma expansão em série de potências de H centrada em ζ obtemos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{(z-\zeta)^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{H^{(j)}(0)}{j!}(z-\zeta)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{H^{(j)}(0)}{j!}(z-\zeta)^{n-j} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^{(n+k)}(0)}{(n+k)!}(z-\zeta)^k \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.3. *Seja z_j, $j = 1, 2, ...,$ uma sequência discreta de pontos diferentes no conjunto aberto Ω, e f_j meromorfa numa vizinhança de z_j. Então Existe uma função meromorfa f em Ω tal que f é analítica fora dos pontos z_j e $f - f_j$ analítica numa vizinhança de z_j, para cada j.*

Prova. Em vista do Teorema 2.3.2 é suficiente assumir que

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} A_{jk}(z-z_j)^{-k}$$

Como feito anteriormente, escolhemos uma sequência crescente de conjuntos compactos $K_1 \subset K_2 \subset ...$ tal que $\widehat{K}_j = K_j$ e $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Desde que a sequência $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é discreta em Ω, existe só quantidades finitas de pontos z_j que estão contida nos conjuntos compactos K_l para $l \in \mathbb{N}$, assim podemos assumir que a sequência de conjuntos compactos escolhida é tal que $z_k \in K_j$ para $k \geq j$. Desde que f, é analítica numa vizinhança de K_j, do Teorema de Runge podemos escolher $u_j \in A(\Omega)$ tal que

$$|f_j(z) - u_j(z)| < 2^{-j} \qquad \text{para } z \in K_j$$

Veja que a série

$$\sum_{j \geq l} (f_j(z) - u_j(z))$$

converge uniformemente sobre o conjunto compacto K_l, e assim converge a uma função analítica no interior de K_l, e isto para quaisquer $l = 1, 2, ...,$ logo a função

$$f(z) = \sum_{j<l} (f_j(z) - u_j(z)) + \sum_{j \geq l} (f_j(z) - u_j(z))$$

é uma função meromorfa no interior de K_l, para todo $l = 1, 2, \ldots$. Ainda mais $f - f_l$ é analítica em $K_{l_0} \setminus \{z_l\}$, para algum l_0 tal que $z_l \in K_{l_0}$, pois em

$$\sum_{j<l_0}(f_j(z) - u_j(z)) + u_{l_0} + \sum_{j>l_0}(f_j(z) - u_j(z))$$

a primeira soma finita é analítica em $\Omega \setminus \{z_l\}$ e a outra série infinita converge para uma função analítica no interior de K_{l_0+1}. $\square$

Uma outra formulação do Teorema de Mittag-Leffler é a seguinte:

Teorema 2.3.4. *Seja $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j$ onde o Ω_j é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$. Se $f_j \in M(\Omega_j)$ e $f_j - f_k \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$ para todo j e k, então pode-se encontrar $f \in M(\Omega)$ tal que $f - f_j \in A(\Omega_j)$ para todo j.*

Antes de fazer a prova, veja que se este teorema é válido, então o resultado do Teorema de Mittag-Leffler é imediato.

Prova do Teorema 2.3.4. Sejam $D_j \subset \Omega_j$ o conjunto de polos de f_j em Ω_j. Primeiro, veja que $D_j \setminus D_k \subset D_j \setminus \Omega_k$; de fato, se existir $z \in D_j \setminus D_k$ tal que $z \notin D_j \setminus \Omega_k$, então $z \in \Omega_j \cap \Omega_k$ e $z \in D_j \setminus D_k$ e portanto f_j tem um polo em z e f_k é analítico numa vizinhança de z, então $f_j - f_k \in M(\Omega_j \cap \Omega_k)$ sendo z um polo, mais isto é uma contradição com a hipótese; logo $D_j \setminus D_k \subset D_j \setminus \Omega_k$. Assim $D_j \setminus D_k = D_j \setminus \Omega_k$. De modo análogo podemos provar que

$$D_j \setminus (\cup_{k<j}\Omega_k) = D_j \setminus (\cup_{k<j}D_k) \tag{28}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Consideremos agora os seguintes conjuntos $D'_1 = D_1$, $D'_j = D_j \setminus (\cup_{k<j}\Omega_k)$, para $j = 2, 3, \ldots$, $\Omega'_1 = \Omega_1$, $\Omega'_j = \Omega_j \setminus (\cup_{k<j}\Omega_k)$ para $j = 2, 3, \ldots$; e veja que a familia de conjuntos D'_j são disjuntos dois a dois e são subconjuntos discretos em Ω'_j que também são disjuntos dois a dois. É fácil ver que a união $\cup_j D'_j$ é discreta no conjunto $\cup_j \Omega'_j$, e $\cup_j \Omega'_j = \cup_j \Omega_j$. Por outro lado, veja que

$$D'_1 \cup D'_2 = D_1 \cup (D_2 \setminus \Omega_1) = D_1 \cup (D_2 \setminus D_1) = D_1 \cup D_2.$$

Logo por indução e desde que (28) é valido obtemos que $\cup_{j=1}^m D'_j = \cup_{j=1}^m D_j$ para todo $m = 1, 2, \ldots$. Assim $\cup_{j=1}^\infty D'_j = \cup_{j=1}^\infty D_j$. Logo agora o resultado decorre do Teorema de Mittag-Leffler. $\square$

Com isto, mostramos que este último teorema é equivalente ao Teorema de Mittag-Leffler. Outro resultado equivalente é o seguinte resultado sobre existência de soluções de uma equação diferencial:

Teorema 2.3.5. *Para todo $f \in C^\infty(\Omega)$, a equação $\partial u/\partial\overline{z} = f$ tem uma solução $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Antes de iniciar a prova, observe que o Teorema 2.1.2 resolve a equação no caso f tiver suporte compacto.

Prova. Escolhemos uma sequência de conjuntos compactos $K_j \subset \Omega$ com $\widehat{K}_j = K_j$ tal que todo subconjunto compacto de Ω esteja contido em algum K_j. Seja $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_j \equiv 1$ numa vizinhança de K_j e $\phi_1 = \psi_1$, $\phi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$ quando $j > 1$. Então $\phi_j \equiv 0$ numa vizinhança de K_{j-1}, e se $z \in K_{j_0} \subset \Omega$ para algum $j_0 \in \mathbb{N}$, então $\phi_j(z) = 0$, para todo $j > j_0 + 1$, e assim

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) &= \sum_{j<j_0+1} \phi_j(z) = \psi_1(z) + (\psi_2 - \psi_1)(z) + ... + (\psi_{j_0} - \psi_{j_0-1})(z) = \\ &= \psi_{j_0}(z) = 1.\end{aligned}$$

Assim $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j = 1$ em Ω. Do Teorema 2.1.2 existe $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\partial u_j/\partial \overline{z} = \phi_j f$. Logo u_j é analítica numa vizinhança de K_{j-1}. Do Teorema de Runge podemos escolher $v_j \in A(\Omega)$ tal que $|u_j - v_j| < 2^{-j}$ em K_{j-1}, e portanto em particular a desigualdade é satisfeita em K_l para $l < j - 1$.

Agora para $l \in 1, 2, ...$ temos que a série

$$\sum_{l+1}^{\infty} (u_j - v_j) \tag{29}$$

converge uniformemente em K_l, e desde que u_j e v_j em particular são analíticas numa vizinhança de K_l sendo $j \geq l + 1$. Logo a série (29) converge a uma função analítica no interior de K_l, e isto para todo $l \in 1, 2, ...$ Logo a série

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j), \tag{30}$$

converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Ω e ainda obtemos que u é a suma de uma função analítica no interior de K_l e outra função em $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, logo u é de classe C^∞ no interior de K_l, e isto outra vez para todo $l \in 1, 2, ...$ Com isto u é de classe C^∞ em Ω.

Ao derivar termo a termo em (30) e desde que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial(u_j - v_j)}{\partial \overline{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} f\phi_j,$$

obtemos que $\partial u/\partial \overline{z} = f$. $\square$

O seguinte teorema é um resultado intermediário para garantir a equivalência entre o Teorema 2.3.5 e o Teorema de Mittag-Leffler.

Teorema 2.3.6. *Sejam* $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ *e* $g_{jk} \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$ *para* $j, k = 1, 2, ...$ *que satisfazem as seguintes condições*

$$g_{jk} = -g_{kj}, \quad g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0 \ \text{em } \Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l \ \text{ para todo } \ j, k, l \tag{31}$$

Então, existem $g_j \in A(\Omega_j)$ *tal que*

$$g_{jk} = g_k - g_j, \ \text{ em } \Omega_j \cap \Omega_k \ \text{ para todo } \ j, k. \tag{32}$$

Antes de iniciar a prova deste teorema, veja como este teorema implica no Teorema 2.3.4. De fato, seguindo a notação do Teorema 2.3.4 definimos $g_{jk} = f_j - f_k$ em $\Omega_j \cap \Omega_k$. Então a condição (31) é imediatamente satisfeita. Logo do Teorema 2.3.6 pode se obter funções $g_j \in A(\Omega_j)$ tais que

$$f_j - f_k = g_{jk} = g_k - g_j \text{ em } \Omega_j \cap \Omega_k \text{ para todo } j, k \tag{33}$$

Logo $f_j + g_j = f_k + g_k$ em $\Omega_j \cap \Omega_k$. Isto permite afirmar que a aplicação $f : \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f_j(z) + g_j(z)$ se $z \in \Omega_j$, fica bem definida e ainda pertence a $M(\cup_j \Omega_j)$ e é talque $f - f_j = g_j \in A(\Omega_j)$. E com isto fica provado o Teorema 2.3.4.

Prova do Teorema 2.3.6. Seja $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma partiçao da unidade subordinada ao cobrimento $\cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ de Ω. Logo

(i) $\varphi_\nu \in C_0^\infty(\Omega_j)$ para algum j. Podemos denotar j como sendo j_ν no caso $\operatorname{supp} \varphi_\nu \subset \Omega_j$.

(ii) Todos exceto um número finito de φ_ν anulan-se num subconjuto compacto de Ω.

(iii) $\sum \varphi_\nu = 1$.

Seja $\zeta \in \Omega_k$ então existe uma vizinhança B de ζ em Ω_k tal que todos os φ_ν anulan-se exceto uma quantidade finita deles. Logo $\zeta \in \operatorname{supp} \varphi_\nu \subset \Omega_\nu$ para $\nu \in I$ com I finito. Com isto a função $g_{i_\nu k}$ esta definida en ζ, e em todo ponto de B.

Do anterior, a função

$$h_k(\zeta) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \varphi_\nu g_{i_\nu k}(\zeta)$$

esta bem definida (considerando $\varphi_\nu g_{i_\nu k} \equiv 0$ fora de Ω_{i_ν}), e é de classe $C^\infty(\Omega_k)$ por ser escrito como soma finita de elementos desta classe numa vizinhança de ζ contida em Ω_k.

Veja que

$$h_k - h_j = \sum \varphi_\nu (g_{i_\nu k} - g_{i_\nu j}) = \sum \varphi_\nu g_{jk} = g_{jk} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}$$

em $\Omega_j \cap \Omega_k$. Logo a função ψ definida em Ω; dada por $\psi(z) = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}}(z)$ se $z \in \Omega_k$, esta bem definida, e alem disso $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

O Teorema 2.3.5 garante a existencia de uma solução $u \in C^\infty(\Omega)$ da equação $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -\psi$. Defina então as funções $g_k = h_k + u$ em Ω_k para $k = 1, 2, \ldots$.

Assim, $g_k \in C^\infty(\Omega_k)$, $g_k - g_j = h_k - h_j = g_{jk}$ em $\Omega_j \cap \Omega_k$, e

$$\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \psi - \psi = 0$$

em Ω_k; então $g_k \in A(\Omega_k)$ e tem a propriedade requerida. □

2.4 O teorema de Weierstrass

Apresentamos aqui o Teorema de Weierstrass, o qual afirma que podemos garantir a existência de funções meromorfas com zeros e polos de ordens dadas localizados em pontos de uma sequência discreta. A demonstração deste teorema apresenta o caminho para construir este tipo de funções e este procedimento é de grande importância pois será imitado na hora de construir funções com propriedades semelhantes na seção sobre domínio de holomorfia no capítulo seguinte, mais precisamente no Teorema 3.5.5.

Teorema 2.4.1. *Seja $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência discreta de pontos distintos no conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{C}$, e sejam n_j inteiros arbitrários. Então existe uma função meromorfa f em Ω tal que f é analítica e diferente de zero exceto nos pontos z_j e $f(z)(z-z_j)^{-n_j}$ é analítica e diferente de zero numa vizinhança de z_j para todo j.*

Prova. Sejam subconjuntos compactos K_j de Ω para $j = 1, 2, ...$ como na prova do Teorema 2.3.3, de tal forma que K_1 contenha algum z_j. Desde que $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência descrita em Ω, obtemos que cada subconjunto K_j existem só uma quantidade finita de pontos z_j. Logo podemos para cada j escolher funções racionais f_j tais que os zeros e polos desejados com sua ordem respetiva.

Para $j = 1$ podemos escolher uma função racional f tal que tenha zeros e polos com os respetivos ordens desejados em K_2. Portanto podemos escrever que:

$$f/f_1 = c\prod(z-w_\nu)^{m_\nu}$$

sendo c uma constante, o produto finito com $w_\nu \in \complement K_1 \cap K_2$, e m_ν inteiros. Agora para cada w_ν podemos escolher $w'_\nu \in \Omega\setminus K_2$ na mesma componente de $\Omega\setminus K_1$ onde w_ν pertence, o qual existe desde que $\Omega\setminus K_1$ nao tem componentes relativamente compactas em $\Omega\setminus K_2$ e em particular toda componente de $\Omega\setminus K_1$ interseta com $\Omega\setminus K_2$.

Logo a função $f_2 = f\prod(z-w'_\nu)^{m_\nu}$ tem os zeros e os polos em K_2, alem disso

$$\log\left(\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right) = \log c + \sum_\nu m_\nu \log\left(\frac{z-w_\nu}{z-w'_\nu}\right)$$

pode der definida unicamente como uma função analítica numa vizinhança de K_1 desde que w_ν e w'_ν estão na mesma componente de $\complement K_1$. Assim podemos do teorema de Runge, escolher uma função $g_1 \in A(\Omega)$ tal que

$$|\log(f_2/f_1) - g_1| < \log(1+\varepsilon_1) \quad \text{em} \quad K_1$$

sendo $\varepsilon_1 > 0$. Logo

$$\left|\frac{f_2}{f_1}e^{g_1} - 1\right| < \varepsilon_1 \quad \text{em} \quad K_1.$$

Assim de modo análogo, podemos para uma sequência números $0 < \varepsilon_j$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j < \infty$, definir indutivamente, funções $f_1, f_2, ..., g_1, g_2, ...$ tais que

$$\left|\frac{f_{j+1}}{f_j}e^{g_j} - 1\right| < \varepsilon_j \quad \text{em} \quad K_j \tag{34}$$

Deste último segue que

$$\lim_{J\to+\infty} f_{J+1}\prod_{j=1}^{J} e^{g_j} = f_1\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{f_{j+1}}{f_j}e^{g_j}\right)$$

define uma função meromorfa em Ω com as propriedades desejadas, desde que por (34) o produto

$$\prod_{j=j_0}^{\infty}\left(\frac{f_{j+1}}{f_j}e^{g_j}\right)$$

converge uniformemente no conjunto compacto K_{j_0}, e assim é analítica no interior de K_{j_0}, e isto para todo j_0. $\square$

Corolário 2.4.2. *Toda função meromorfa em Ω pode se escrever na forma f/g onde f e g são analíticas em Ω.*

Prova. Seja $F \in M(\Omega)$, com polos nos pontos z_j de ordens n_j. Do Teorema 2.4.1 podemos encontrar uma função g analítica com polos em z_j de ordens n_j. Logo a função definida por $f = Fg$ é analítica em Ω. Assim $F = f/g$. $\square$

Corolário 2.4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Existe uma função $f \in A(\Omega)$ que não pode ser estendida analiticamente à um conjunto maior do que Ω, nem mesmo à uma função meromorfa.*

Prova. Indexemos todos os pontos em Ω que tenham coordenadas racionais para formar uma sequência $z_1, z_2, ...$ tal que todo ponto seja indexado uma quantidade infinita de vezes, e seja $r_j = d(z_j, \complement\Omega)$. Escolhamos agora uma sequência de subconjuntos compactos $K_j \subset \Omega$ tal que todo subconjunto compacto de Ω esteja contido em algum K_j; e escolhamos também para cada j um ponto $w_j \in \complement K_j$ tal que $|w_j - z_j| < r_j$. Veja que a sequência de pontos w_j é discreta em Ω, de fato pois de não ser assim existiria uma subsequência de pontos $\{w_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que esteja contido em algum K_{j_0}, mas isto é uma contradição pois em particular para algum índice $j_k > j_0$ suficientemente grande deveria se ter que $w_{j_k} \in \complement K_{j_0}$. Logo do Teorema 2.4.1 podemos encontrar $f \in A(\Omega)$ tal que tenha zeros só em cada ponto w_j para $j \in \mathbb{N}$. Se $a \in \Omega$ tem coordenadas racionais e $r = d(a, \complement\Omega)$, então o disco $D = \{z : |z - a| < r\}$ contem uma quantidade infinita de pontos w_j desde que a é indexado infinitas vezes, assim poderíamos obter uma subsequência de pontos de $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que converge a um ponto da fronteira de Ω. Assim f não pode ser continuada a uma função meromorfa numa vizinhança aberta do disco $\overline{D}$, pois os zeros de uma função meromorfa que não é identicamente zero são isolados. Logo f não pode ser continuada à uma função meromorfa definida num conjunto que contem propriamente à Ω. $\square$

2.5 Funções Subharmônicas

Chamamos a uma função h de classe C^2 de função harmônica num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se $\Delta h = 4\partial^2 h/\partial z\partial\overline{z} = 0$ em Ω.

Definição 2.5.1. *Uma função u definida num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e com valores em $[-\infty, +\infty)$ é chamada de subharmônica se:*

(a) u é uma função semicontínua superiormente em Ω, isto é, o conjunto $\{z \;:\; u(z) < c\}$ é aberto para todo $c \in \mathbb{R}$.

(b) Para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ e quaisquer função contínua h sobre K, harmônica no interior de K e $\geq u$ na fronteira de K, tem-se que $u \leq h$ em K.

Lembremos que quando uma função semicontínua não atinge o valor $+\infty$, então tal função é limitada superiormente em subconjuntos compactos. Logo, se u é subharmônica então ela é limitada superiormente em conjuntos compactos. Então se na definição consideramos tal função harmônica como a função constante $\sup_{\partial K} u$, então $u(z) \leq \sup_{\partial K} u$ para todo $z \in \partial K$, então $\sup_K u(z) \leq \sup_{\partial K} u \leq \sup_K u$ e assim u atinge seus valores máximos na fronteira de K. Isto é satisfaz o principio do máximo em conjuntos compactos.

Teorema 2.5.2. *Se u é subharmônica e s é um numero real positivo, então su é subharmônica. Se u_α, $\alpha \in A$, é uma família de funções subharmônicas, então $u = \sup_\alpha u_\alpha$ é subharmônica se $u < +\infty$ e u é semi-continua superiormente, que é sempre no caso A seja finito. Se $u_1, u_2, ...$ é uma sequência decrescente de funções subharmônicas, então $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ é sempre subharmônica.*

Prova. Para a segunda afirmação, sejam h e K como na definição, então $u_j \leq h \;\forall j$ em ∂K, então $u_j \leq h$ em $K \;\forall j$ pois cada uma é subharmônica, logo $u \leq h$ em K. Provemos agora a última afirmação. Dado que

$$\{z \;:\; u(z) < c\} = \{z \;:\; u_1(z) < c \;\vee\; u_2 < c \vee ...\} = \bigcup_j \{z \;:\; u_j(z) < c\}$$

que é aberto pois cada uma delas é aberto. Sejam h e K como na definição, $\varepsilon > 0$ e $B_j = \{z \;:\; z \in \partial K,\; u_j(z) \geq h(z) + \varepsilon\}$. então $u(z) \leq h(z)$ para todo $z \in \partial K$. B_j é compacto para todo j e $B_{j+1} \subset B_j$. Afirmo que se j é suficientemente grande, então B_j é vazio, pois de não ser assim, existiria um ponto z_0 em ∂K tal que $u_j(z_0) \geq h(z_0) + \varepsilon$ para todo j, e então $u(z_0) > h(z_0)$, contradição. Logo $u_j(z) < h(z) + \varepsilon$ para $j \geq N_0$ e algum N_0 suficientemente grande; e assim $u_j(z) < h(z) + \varepsilon$ para $z \in K$ e $j \geq N_0$. Considerando $j \geq N_0$, dado que o lado esquerdo desta ultima desigualdade é uma função harmônica, tem-se que $u_j(z) \leq h(z) + \varepsilon$ para $z \in K$. Portanto $u(z) \leq h(z)$ em K. □

O seguinte teorema apresenta uma caraterização das funções subharmônicas, além de garantir que a subharmonicidade é uma propriedade local.

Teorema 2.5.3. *Seja u definido en Ω com valores em $[-\infty, +\infty)$ e assuma que $u$seja semicontinua superiormente. Então, cada uma das seguintes condições são necessárias e suficientes para que u seja subharmônica.*

(i) Se D é um disco fechado contido em Ω e f uma polinômio analítico tal que $u \leq \mathrm{Re} f$ em ∂D, então $u \leq \mathrm{Re} f$ em D.

(ii) Se $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \ : \ d(z, \complement\Omega) > \delta\}$, *então tem se que*

$$2\pi u(z) \int d\mu(r) \leq \int_0^{2\pi} \int u(z + re^{i\theta}) d\theta d\mu(r), \qquad \textit{para } z \in \Omega_\delta \tag{35}$$

para toda medida positiva $d\mu$ *no intervalo* $[0, \delta]$

(iii) Para todo $\delta > 0$ *e todo* $z \in \Omega_\delta$ *existe uma medida positiva* $d\mu$ *com suporte em* $[0, \delta]$, *tal que* $d\mu$ *tenha massa fora da origem, (isto é, o suporte de* μ *não está contido em* $\{0\}$*), e (35) é valido.*

Veja que as integrações antes mencionadas estão bem definidas desde que u é semicontinua e não atinge o valor $+\infty$, e assim a integral da parte positiva da função é finita.

Prova. A Definição 2.5.1 implica imediatamente (i). Também é trivial que (ii) implique (iii). Então mostremos que (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) implique que u é subharmônica.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Seja $z \in \Omega_\delta$, $0 < r \leq \delta$ e $D = \{\zeta \ : \ |\zeta - z| \leq r\}$. Se $\varphi(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta}$ é um polinômio trigonométrico real ($\overline{a_k} = a_{-k}$), tal que $u(z + re^{i\theta}) \leq \varphi(\theta)$, então podemos afirmar que

$$u(z) \leq a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta. \tag{36}$$

De fato, pois se $f(\zeta) = \sum_{k=0}^{N} a_k (\zeta - z)^k / r^k$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} f(z + re^{i\theta}) &= (\frac{f + \overline{f}}{2})(z + re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{N} \overline{a_k} e^{-ik\theta} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{ik\theta} + \sum_{k=-N}^{-1} a_k e^{ik\theta} = \varphi(\theta) \end{aligned}$$

Logo da hipótese (i) tem se que $u \leq \mathrm{Re} f$ em D; em particular $u(z) \leq \mathrm{Re} f(z) = a_0$. Agora, no caso ϕ seja uma função continua em ∂D, tal que $u(z + re^{i\theta}) \leq \phi(\theta)$, podemos para todo $\varepsilon > 0$, encontrar um polinômio trigonométrico φ definido em $[0, 2\pi]$ tal que $\phi \leq \varphi \leq \phi + \varepsilon$, pois o conjunto dos polinômios trigonométricos é denso no conjunto das funções continuas no circulo unitário. Logo

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \phi(\theta) d\theta + \varepsilon$$

Como ε é arbitrário, obtemos a desigualdade (36) substituindo φ por ϕ. Dado que a integral de uma função semicontinua superiormente, pode ser considerada como o ínfimo das integrais de funções continuas que o superam, temos que

$$\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = \inf \left\{ \int_0^{2\pi} \phi(\theta) d\theta \ : \ u(\zeta) \leq \phi(\zeta), \zeta \in \partial D \right\}$$

logo de (36) temos que

$$u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta$$

integrando ambos lados com a medida $d\mu(r)$ obtemos o resultado.

$(iii) \Rightarrow$ u subharmônica. Sejam K e h como na definição de funções subharmônicas. Seja M o supremo da função $v = u - h$ em K. Se $M > 0$ então o conjunto $F = \{z \, : \, v(z) = M\}$ é um conjunto compacto no interior do conjunto K pois v é semicontínua superiormente. Se z_0 é um ponto em F tal que minimiza a distância de F à ∂K. Se $0 < r \le \delta$, e δ é menor que a distância de z_0 à ∂K, então o circulo $\{z \, : \, |z - z_0| = r\}$ contem pontos onde $v(z) < M$, e de fato pela semicontinuidade superior de v a desigualdade é satisfeita em todo um arco do circulo. Isto implica que

$$\iint_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})d\theta d\mu(r) < M2\pi \int d\mu(r) = v(z_0)2\pi \int d\mu(r)$$

sendo $d\mu$ um medida com as propriedades mencionadas em (iii).

Dado que (35) é satisfeita com o signo igual no caso de funções harmônicas, temos que:

$$\iint_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})d\theta d\mu(r) < u(z_0)2\pi \int d\mu(r)$$

que é uma contradição. Então $M \le 0$ e portanto, $u \le h$ em K. □

Observação 2.5.4. *Veja que na demonstração (iii) $\Rightarrow$ u subharmônica, bastava supor a seguinte afirmação:*

(iv) Para cada $z \in \Omega_\delta$ existe uma medida $d\mu_z$ com suporte em $[0, \delta]$ tal que $d\mu_z$ tenha massa fora da origem.

E esta ultima, é diretamente implicada pela afirmação (iii). Então podemos adicionar a afirmação (iv) ao teorema anterior.

Corolário 2.5.5. *Se u_1, u_2 são funções subharmônicas, então $u_1 + u_2$ é subharmônica.*

Prova. Dado que a soma de funções semicontinuas é semicontinua, o resultado decorre da linearidade da integral na desigualdade (35). □

Corolário 2.5.6. *Uma função u definida num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é subharmônica se todo ponto em Ω tem uma vizinhança onde u é subharmônica.*

Prova. Segue da afirmação (iv) na Observação 2.5.4 □

Corolário 2.5.7. *Se $f \in A(\Omega)$, segue-se que $\log|f|$ é subharmônica em Ω.*

Prova. Seja D um disco fechado contido em Ω e g um polinômio analítico tal que $log|f(z)| \leq \mathrm{Re} g(z)$ para todo z em ∂D. Mas esta ultima desigualdade é equivalente á

$$|f(z)e^{-g(z)}| \leq 1 \tag{37}$$

pois $e^{\mathrm{Re} g(z)} = |e^{g(z)}|$, do principio do máximo, a desigualdade (37) é valida em D, logo o resultado segue de (i) no teorema (2.5.3). □

Teorema 2.5.8. *Se ϕ é uma função convexa crescente sobre $\mathbb{R}$, tal que $\phi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \phi(x)$. Então $\phi \circ u$ é uma função subharmônica, se u é subharmônica.*

Prova. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) + k(x - x_0).$$

Então

$$\phi(u(z + re^{i\theta})) \geq \phi(x_0) + k(u(z + re^{i\theta}) - x_0)$$

e assim

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u(z + re^{i\theta}))d\theta \geq \phi(x_0) + k\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta - x_0\right).$$

Fazendo $x_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$ obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u(z + re^{i\theta}))d\theta \geq \phi\left(\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta\right).$$

Dado que u é subharmônica e ϕ crescente, temos por último que:

$$\phi(u(z)) \leq \phi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u(z + re^{i\theta}))d\theta$$

A semicontinuidade decorre do fato de ϕ ser continua. □

O Corolário 2.5.7 e o teorema anterior, implica o fato que $|f|$ é subharmônica se f é analítica.

Corolário 2.5.9. *Sejam $u_1, u_2 \geq 0$ e assuma que $\log u_j$ é subharmônica em Ω, $j = 1, 2$ $(\log 0 = -\infty)$. Então $\log(u_1 + u_2)$é subharmônica em Ω.*

Prova. Seja $\overline{D} \subset \Omega$ um disco fechado, e f um polinômio analítico, tal que $\log(u_1 + u_2) \leq \text{Re}f$ em ∂D, mas dado que $e^{\text{Re}f} = |e^f|$, então a anterior desigualdade é equivalente à

$$(u_1 + u_2)|e^{-f}| \leq 1 \tag{38}$$

em ∂D. Por hipótese e do teorema anterior, $\log u_j - \text{Re}f$ é subharmônica em Ω, então $e^{\log u_j - \text{Re}f} = u_j|e^{-f}|$ é subharmônica em Ω. Logo $(u_1 + u_2)|e^{-f}|$ é subharmônica. Então a desigualdade (38) é satisfeita em todo D pois a função constante é uma função harmônica, e isto prova o corolário. □

O seguinte teorema, menciona a integrabilidade da funções subharmônicas, não identicamente $-\infty$ em conjuntos compactos do domínio.

Teorema 2.5.10. *Seja u subharmônica no conjunto aberto Ω e $u \not\equiv -\infty$ em toda componente de Ω. Então u é integrável sobre todo conjunto compacto de Ω (escrevemos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$) que implica que $u > -\infty$ em quase todo ponto.*

Prova. Suponha Ω conexo. Sejam os conjuntos

$$\begin{aligned} E &= \{z \in \Omega \ : \ u \text{ é integrável em alguma vizinhança de } z\} \\ P &= \{z \in \Omega \ : \ u(z) = -\infty\} \end{aligned}$$

Afirmo que $\Omega \setminus P \subset E$. De fato, se $z \in \Omega \setminus P$, então $u(z) > -\infty$, e existe para z um disco D tal que $\overline{D} \subset \Omega$ e de (35) temos que

$$\int_D u(\zeta) d\lambda(\zeta) > -\infty$$

com $d\lambda$ a medida de Lebesgue. E dado que a função é semicontinua superiormente então ela é limitada superiormente em $\overline{D}$ por uma constante, portanto a integral das partes positiva e negativa da função u são finitas, isto é, u é integrável em D. Logo $z \in E$.

Observe que E é aberto em Ω. Mostremos que $\Omega \setminus E$ também é aberto. Seja $z_0 \in \Omega \setminus E$, então $u(z_0) = -\infty$. Seja $r > 0$ tal que o disco de raio $2r$ e de centro z_0, $D(z_0, 2r)$, esteja contido em Ω. Afirmo que $D(z_0, r) \subset P$, pois se existir $\zeta \in D(z_0, r)$ tal que $\zeta \notin P$ então $u(\zeta) > -\infty$; da subharmonicidade de u, do fato que $D(\zeta, r) \subset \Omega$ e de (35) temos que u é integrável em $D(\zeta, r)$ que contem z_0, que é uma contradição pois $z_0 \in \Omega \setminus E$.

Por hipótese, temos que $u \not\equiv -\infty$, e assim $E \neq \phi$. Logo $E = \Omega$ por ser conexo. Seja $K \subset \Omega$ é compacto. Logo para todo $z \in K$ existe uma vizinhança V_z de z tal que u é integrável. Da compacidade de K temos que existe uma quantidade finita de pontos $z_1, ..., z_m$ em K tal que $K \subset \cup_{j=1}^m V_{z_j}$. Assim

$$\int_K |u| d\lambda \leq \sum_{j=1}^m \int_{V_{z_j}} |u| d\lambda < \infty.$$

Se Ω não for conexo, e $K \subset \Omega$ é compacto então, existe uma quantidade finita de componentes $O_1, ..., O_l$ tal que $K \subset \cup_{j=1}^{l} O_j$. Se $K_j = K \cap O_j$, então K_j é compacto, e assim do anterior

$$\int_K |u| d\lambda = \sum_{j=1}^{l} \int_{K_j} |u| d\lambda < \infty.$$

Logo $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. □

Teorema 2.5.11. *Se u é uma função subharmônica em Ω e não $-\infty$ identicamente em alguma componente de Ω, então tem se que*

$$\int u \Delta v d\lambda \geq 0 \quad se \quad v \in C_0^2(\Omega), \quad e \ v \geq 0 \tag{39}$$

Prova. Da subharmonicidade de u tem se que

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta$$

Seja $v \in C_0^2(\Omega)$ e $v \geq 0$. Temos que

$$v(z)u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) v(z) d\theta$$

logo

$$0 \leq \left[\int u(z) \left\{ \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} v(z - re^{i\theta}) d\theta - 2\pi v(z) \right\} d\lambda(z) \right] \tag{40}$$

para $r > 0$. Por fazer uma expansão em série de Taylor de v centrada em z obtemos que:

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{\pi r^2} & \int_0^{2\pi} (v(z - re^{i\theta}) - v(z)) d\theta = \\
= & \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial v(z)}{\partial z} re^{i\theta} - \frac{\partial v(z)}{\partial \overline{z}} re^{-i\theta} + \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \frac{r^2 e^{2i\theta}}{2} + \frac{\partial^2 v(z)}{\partial \overline{z}^2} \frac{r^2 e^{-2i\theta}}{2} + \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z \partial \overline{z}} r^2 \right) d\theta + \\
+ & \frac{4o(r^2)}{r^2} \\
= & \frac{2}{\pi} 2\pi \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{4o(r^2)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{2 \int_0^{2\pi} (v(z - re^{i\theta}) - v(z)) d\theta}{\pi r^2} = 4 \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z \partial \overline{z}},$$

e por fazer $r \to 0^+$ em (40) e do Teorema da Convergência Dominada, obtemos a desigualdade desejada:

$$0 \leq \int u(z) 4 \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z \partial \overline{z}} d\lambda(z) = \int u(z) \Delta d\lambda(z).$$

□

Observe que no teorema anterior, no caso $u \in C^2(\Omega)$, integrando por partes observamos que

$$\int u\Delta v d\lambda = \int \Delta u v d\lambda.$$

Logo a desigualdade em (39) implica diretamente que $\Delta u \geq 0$.

Teorema 2.5.12. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e assuma que*

$$\int u\Delta v d\lambda \geq 0$$

com $v \in C^2_0(\Omega)$ e $v \geq 0$ então existe uma única função U subharmônica em Ω, tal que $U = u$ q.t.p. Se φ é integrável não negativa e dependendo só de $|z|$ com $\operatorname{supp}\varphi$ contido em $B(0,1)$ então tem se que para todo $z \in \Omega$

$$U(z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int u(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)}$$

Prova. Primeiro, veja que se V é uma função subharmônica, e φ é como no enunciado do teorema com $\operatorname{supp}\varphi$ contido no disco unitário, então

$$V(z) = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\int V(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)} \tag{41}$$

onde $\overline{\lim}$ denota limite superior. De fato, da semicontinuidade superior de V em z, temos que para $\varepsilon > 0$, existe $l > 0$ tal que se $|w - z| < l$ então $V(w) \leq V(z) + \varepsilon$ em particular se $|\delta| < l$ então $V(z - \delta\zeta) \leq V(z) + \varepsilon$ para $\zeta \in B(0,1)$, e assim

$$\int V(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \leq (V(z) + \varepsilon) \int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta),$$

logo, pela definição de $\overline{\lim}$ temos que

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\int V(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)} \leq V(z),$$

de (ii) no Teorema 2.5.3 obtemos que

$$V(z) \int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \leq \int V(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)$$

para todo δ suficientemente pequeno. Logo

$$V(z) \leq \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\int V(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)},$$

onde $\underline{\lim}$ denota limite ínfimo. Como $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$ obtemos a igualdade (41).

Agora provemos o resultado no caso que $u \in C^2(\Omega)$. Do Teorema 2.5.11, obtemos que $\Delta u \geq 0$. Então se $r > 0$

$$0 \leq \int \Delta u(z + re^{i\theta})d\theta = \int (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2})u(z + re^{i\theta})d\theta \tag{42}$$

Veja que $\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(z + re^{i\theta})d\theta = 0$, e se $M(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$ então de (42)

$$0 \leq M''(r) + M'(r)/r,$$

para todo $r > 0$, logo $0 \leq (rM'(r))'$. Isto indica que $rM'(r)$ é crescente para todo $r > 0$. Dado que $M'(r)$ é limitado para todo $r > 0$ numa vizinhança de 0, então $rM'(r) \to 0$ quando $r \to 0$ então $0 \leq rM'(r)$, para $r \geq 0$. Com isto mostramos que $M'(r) \geq 0$, e assim M é crescente. Logo $M(0) \leq M(r)$, e portanto u é subharmônica.

No caso geral, seja $\varphi \in C_0^\infty(C)$ como no enunciado do teorema com suporte no disco unitário. Então para cada $\delta > 0$ definimos em $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \ : \ d(z, \complement\Omega) > \delta\}$

$$\begin{aligned} u_\delta(z) &= \int u(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) / \int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \\ &= \frac{1}{\delta^2}\int u(\zeta)\varphi(\frac{z-\zeta}{\delta})d\lambda(\zeta) / \int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

obtemos que $u_\delta \in C^\infty(\Omega_\delta)$.

Além do mais, se $v \in C_0^2(\Omega)$ com $v \geq 0$ então:

$$\begin{aligned} \left(\int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)\right)\int u_\delta(z)\Delta v(z)d\lambda(z) &= \int \left(\int u(z - \delta\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)\right)\Delta v(z)d\lambda(z) \\ &= \int \left(\int u(z - \delta\zeta)\Delta v(z)d\lambda(z)\right)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \\ &= \int \left(\int u(w)\Delta v(w + \delta\zeta)d\lambda(w)\right)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \geq 0 \end{aligned}$$

logo $\Delta u_\delta \geq 0$, e do anterior, obtemos que u_δ é subharmônica.

Seja K conjunto compacto em Ω, então existe δ_0 suficientemente pequeno tal que $K \subset \Omega_\delta$ para $\delta < \delta_0$.

No caso u seja continua, então se $\varepsilon > 0$ temos da continuidade uniforme de u em K que existe δ suficientemente pequeno, ainda menor que δ_0, tal que:

$$\begin{aligned} |u_\delta(z) - u(z)| &= \left|\int (u(z - \delta\zeta) - u(z))\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)\right| / \int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \\ &\leq \int |u(z - \delta\zeta) - u(z)|\,\varphi(\zeta)d\lambda(z) / \int \varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Então $\|u_\delta - u\|_{L^1(K)} < \varepsilon C$, com $C = C(K)$ constante, para δ suficientemente pequeno. Com isto $u_\delta \to u$ em norma L^1 sobre subconjuntos compactos de Ω quando $\delta \to 0$.

Em geral, dado que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, para K existe uma função continua v numa vizinhança de K tal que $\|u - v\|_{L^1(K)} < \varepsilon$, então

$$\|u_\delta - u\|_{L^1(K)} \leq \|u_\delta - v_\delta\|_{L^1(K)} + \|v_\delta - v\|_{L^1(K)} + \|v - u\|_{L^1(K)}$$

onde v_δ é definido analogamente a u_δ com v em vez de u. Logo para δ suficientemente pequeno e do caso anterior aplicado a v, temos que $\|u_\delta - u\|_{L^1(K)} \leq 3\varepsilon C$, onde $C = C(K)$, e assim também $u_\delta \to u$ na norma L^1 sobre subconjuntos compactos quando $\delta \to 0$.

Por outro lado, dado que a função $r \to (1/2\pi)\int_0^{2\pi} u_\delta(z + re^{i\theta})d\theta$ é crescente, então se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$ são suficientemente pequenos, temos que

$$\begin{aligned}
\int u_\delta(z - \varepsilon\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) &= \int u_\delta(z + \varepsilon\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int u_\delta(z + \varepsilon re^{i\theta})\varphi(r)rdrd\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int u_\delta(z + \varepsilon' re^{i\theta})\varphi(r)rdrd\theta \\
&= \int u_\delta(z + \varepsilon'\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta) \\
&= \int u_\delta(z - \varepsilon'\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta)
\end{aligned}$$

Desta desigualdade, fazendo $\delta \searrow 0$ e desde $u_\delta \to u$ na norma L^1 sobre subconjuntos compactos quando $\delta \searrow 0$ obtemos que $u_\varepsilon(z) \leq u'_\varepsilon(z)$, quando $\varepsilon \leq \varepsilon'$ e são suficientemente pequenos. Logo, se definimos

$$U(z) \doteq \lim_{\delta \to 0} u_\delta,$$

do Teorema 2.5.2 temos que U é subharmônica, e desde que $u_\delta \to u$ na norma L^1 sobre subconjuntos compactos quando $\delta \to 0$, então $U = u$ em quase todo ponto de Ω. □

Terminamos esta sessão, provando o seguinte resultado de carácter técnico (conhecido como Lema de Hartogs), que servirá de ajuda na hora de provar o Teorema de analiticidade separada de Hartogs.

Teorema 2.5.13. *Seja $\{v_k\}$ uma sequência de funções subharmônicas em Ω que são uniformemente limitadas por acima em todo subconjunto compacto de Ω, e assuma que $\limsup_{j\to+\infty} v_j(z) \leq C$ para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, pode se encontrar k_0 tal que*

$$v_j(z) \leq C + \varepsilon, \ \forall z \in K, \ j > k_0.$$

Prova. Seja $K \in \Omega$ compacto. Desde que Ω pode ser substituída por um subconjunto aberto relativamente compacto arbitrário contendo K, podemos assumir sem perda de generalidade que $v_k \leq 0$ em Ω, para todo k. Seja $r > 0$ tal que $K \subset \Omega_{3r} = \{z \in \Omega \ : \ d(z, \complement\Omega) > 3r\}$. De (ii) no Teorema 2.5.3, para todo $z \in K$ temos que:

$$\pi r^2 v_k(z) \leq \int_{B(z,r)} v_k(\zeta)d\lambda(\zeta).$$

Agora dado que $-v_k$ é semicontinua inferiormente e não negativa temos do Lema de Fatou que :

$$\int_{B(z,r)} \liminf(-v_k) d\lambda(\zeta) \leq \liminf \int_{B(z,r)} -v_k(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

Então

$$\limsup \int_{B(z,r)} v_k(\zeta) d\lambda(\zeta) \leq \int_{B(z,r)} \limsup v_k(\zeta) d\lambda(\zeta) \leq \pi r^2 C$$

para todo $z \in K$.

Pela definição de lim sup, tem-se que para $\varepsilon > 0$, $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ com $k_0 = k_0(z)$ tal que

$$\int_{B(z,r)} v_k(\zeta) d\lambda(\zeta) \leq \pi r^2 (C + \frac{\varepsilon}{2}), \qquad \forall k > k_0.$$

Seja $0 < \delta < r$. Então para todo $w \in B(z, \delta)$ tem-se que

$$\pi(r+\delta)^2 v_k(w) \leq \int_{B(w,r+\delta)} v_k(\zeta) d\lambda(\zeta) \leq \int_{B(z,r)} v_k(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

pois $v_k \leq 0$ e $B(z,r) \subset B(w, r+\delta)$. Para $k > k_0$ temos que $v_k(w) \leq (C + \frac{\varepsilon}{2})(\frac{r}{r+\delta})^2$ para $w \in B(z,\delta)$. Veja que se $C + \varepsilon \geq 0$ não temos nada que provar; neste caso supomos $C + \varepsilon < 0$. Dado que a função $\delta \longmapsto (\frac{r}{r+\delta})^2$ é decrescente para $\delta \in [0, +\infty)$, então $\delta \longmapsto (\frac{r}{r+\delta})^2 (C + \frac{\varepsilon}{2})$ é crescente para $\delta \in [0, +\infty)$ e portanto, existe δ_0 suficientemente pequeno, alem mais do que r, tal que $(\frac{r}{r+\delta_0})^2 (C + \frac{\varepsilon}{2}) \leq C + \varepsilon$.

Logo $v_k(w) \leq C + \varepsilon$, para $w \in B(z, \delta_0)$ e $k \geq k_0$.

Com isto provamos que para todo $z \in K$ existem $\delta_0 = \delta_0(z)$ e $k_0 = k_0(z)$ tal que $v_k(w) \leq C + \varepsilon$, para $w \in B(z, \delta_0)$ e $k \geq k_0$. Agora como as bolas $B(z, \delta_0(z))$ geram uma cobertura aberta de K obtemos do Teorema de Borel-Lebesgue que existe uma quantidade finita de pontos $z_1, ..., z_n$ em K tais que as bolas $B(z_j, \delta_0(z_j))$ cobrem K, então de considerar $k_0' = \max\{k_1, ..., k_n\}$ obtemos que $v_k(w) \leq C + \varepsilon$ para todo $w \in K$ e $k \geq k_0'$. $\square$

3 Propriedades elementares de funções de varias variáveis complexas

3.1 Preliminares

Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$ e $u \in C^1(\Omega)$ uma função de valor complexo. Identificamos $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$. Denotando as coordenadas reais por x_l para $l = 1, ..., 2n$ e as coordenadas complexas por $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$ para $j = 1, ..., n$.

Fazendo uso da notação:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - i\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + i\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right)$$

podemos expressar de forma análoga como no caso de uma variável complexa, du como combinação linear das diferenciais dz_j e $d\overline{z}_j$ como segue:

$$du = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j. \tag{43}$$

Denotamos

$$\partial u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j \quad \text{e} \quad \overline{\partial} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$$

a formula (43) fica

$$du = \partial u + \overline{\partial} u.$$

As formas diferenciais que são combinações lineares das diferenciais dz_j são chamadas formas do tipo $(1, 0)$ e aquelas que são combinações lineares das diferenciais $d\overline{z}_j$ são chamadas formas do tipo $(0, 1)$. Com isto ∂u (respectivamente $\overline{\partial} u$) é a componente de du do tipo $(1, 0)$ (respectivamente $(0, 1)$).

Definição 3.1.1. *Uma função $u \in C^1(\Omega)$ é dita ser analítica (ou holomorfa) em Ω se du é do tipo (1,0), isto é $\overline{\partial} u = 0$. O conjunto das funções analíticas em Ω é denotado por $A(\Omega)$.*

Com isto, as funções analíticas ficam definidas como soluções do sistema sobredeterminado pelas equações de Cauchy Riemann $\overline{\partial} u = 0$.

Veja que se $\overline{\partial} u = 0$, então $\partial u / \partial \overline{z}_j$ para todo $j = 1, ..., n$, e se $u = R + iI$, então obtemos as Equações de Cauchy-

$$\frac{\partial R}{\partial x_{2j-1}} = \frac{\partial I}{\partial x_{2j}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial x_{2j}} = -\frac{\partial I}{\partial x_{2j-1}}.$$

Como ∂ e $\overline{\partial}$ são operadores lineares, tem-se que para quaisquer $f, g \in C^1(\Omega)$

$$\overline{\partial}(fg) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j = \sum_{j=1}^{n} g \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j + \sum_{j=1}^{n} f \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$$

e podemos afirmar que $A(\Omega)$ é um anel.

Sejam $u:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^\nu$ com $u=(u_1,...,u_\nu)$, sendo u_j analítica para $j=1,...,\nu$, e $v\in C^1(W)$ onde W é um aberto contendo a imagem de u. A função $u^*v:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ definida por $u^*v(z)=v(u(z))$ é de classe C^1. Logo

$$d(u^*v)=\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial v}{\partial u_j}du_j+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial v}{\partial \overline{u}_j}d\overline{u}_j.$$

Dado que du_j é do tipo $(1,0)$ para $j=1,...,\nu$, então $\partial u_j/\partial\overline{z}_k=0$ para $k=1,...,n$ e equivalentemente pelas Equações de Cauchy-Riemann temos que $\partial\overline{u}_j/\partial z_k=0$ para $k=1,...,n$, logo assim $d\overline{u}_j$ é do tipo (0,1) para $j=1,...,\nu$. Logo

$$\partial(u^*v)=\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial v}{\partial u_j}du_j \qquad \text{e} \qquad \overline{\partial}(u^*v)=\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial v}{\partial \overline{u}_j}d\overline{u}_j.$$

Deste último afirmamos que u^*v é analítico se v é analítico. Logo a decomposição de d nos operadores ∂,$\overline{\partial}$ e a noção de analiticidade fica invariante sobre aplicações analíticas.

Teorema 3.1.2. *Sejam $f_k(w,z)$ com $k=1,...,n$ funções analíticas nas variáveis $(w,z)=(w_1,...,w_m,z_1,...,z_n)$ numa vizinhança do ponto (w_0,z_0) em $\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$, e assuma que $f_k(w^0,z^0)=0$ para $k=1,...,m$ e que $det(\partial f_k/\partial w_j)_{k,j=1}^m\neq 0$ em (w^0,z^0). Então as equações $f_k(w,z)=0$ para $k=1,...,m$ tem uma única solução analítica determinada $w(z)$ numa vizinhança de z^0, tal que $w(z^0)=w^0$.*

Prova. Podemos considerar o sistema de m equações $f_k(w,z)=0$ para $k=1,...,m$, como sendo um sistema de $2m$ equações dadas por $\mathrm{Re}(f_k)(w,z)=0$ e $\mathrm{Im}(f_k)(w,z)=0$. Com isto, a função $F:\mathbb{R}^{2m}\times\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow\mathbb{R}^{2m}$ dada por $F:=(\mathrm{Re}f_1,...,\mathrm{Re}f_m,\mathrm{Im}f_1,...,\mathrm{Im}f_m)$, cumpre que $F(w^0,z^0)=(0,0)$.

Por outro lado se $det(\partial f_j/\partial w_j)_{j,k=1}^m\neq 0$ então o sistema

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial w_j}\right)_{j,k=1}^m X=0 \tag{44}$$

com $X=(z_1,...,z_m)=(x_1,....,x_{2m})\in\mathbb{R}^{2n}$ tem uma única solução $X=0$. Se $w=(w_1,...,w_m)=(y_1,...,y_{2m})$, tem-se que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial w_j}z_j &= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial \mathrm{Re}f_k}{\partial y_{2j-1}}x_{2j-1}+\frac{\partial \mathrm{Re}f_k}{\partial y_{2j}}x_{2j},\frac{\partial \mathrm{Im}f_k}{\partial y_{2j-1}}x_{2j-1}+\frac{\partial \mathrm{Im}f_k}{\partial y_{2j}}x_{2j}\right)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{2m}\frac{\partial \mathrm{Re}f_k}{\partial y_j}x_j,\sum_{j=1}^{2m}\frac{\partial \mathrm{Im}f_k}{\partial y_{2j}}x_{2j}\right).\end{aligned}$$

Portanto desta ultima podemos afirmar que o sistema $(\partial f_k/\partial w_j)_{j,k=1}^m X = 0$ é equivalente ao sistema $\frac{\partial F(w,z)}{\partial w} X = 0$. Dado que o sistema (44) tem única solução $X = 0$, então concluímos que $det(\frac{\partial F(w,z)}{\partial w}) \neq 0$. Aplicando o Teorema da função implícita na função F obtemos a primeira afirmação.

Para provar a analiticidade dos w_j, basta observar que desde que w_j satisfaz as equações $f(w,z) = 0$, então $df = 0$ e logo assim o sistema de equações para dw_j

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial w_j} dw_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} dz_j = 0, \qquad k = 1, 2, ..., m$$

permite obter soluções dw_j como combinações lineares de $dz_1, dz_2, ..., dz_n$. $\square$

Veja que o teorema anterior implica também que, aplicações analíticas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, tem localmente inversas analíticas quando o Jacobiano no sentido complexo $(\partial f_k/\partial w_j)_{j,k=1}^m$ é diferente de zero.

Agora estendemos a definição dos operadores ∂ e $\bar{\partial}$ para formas diferenciais arbitrarias.

Definição 3.1.3. *Uma forma diferencial é chamada do tipo (p,q) se ela pode se escrever como*

$$\sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

onde $I = (i_1, ..., i_p)$ e $J = (j_1, ..., j_q)$ são multi-índices, isto é sequências de índices entre 1 e n e $dz^I \wedge d\bar{z}^J$ denota $dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{j_q}$.

Toda forma diferencial, pode-se escrever em uma, e só uma, soma de formas de tipo (p,q) com $0 \leq p, q \geq n$. Se f é do tipo (p,q) então a diferencial exterior de f

$$df = \sum df_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

pode se escrever como $df = \partial f + \bar{\partial} f$ onde

$$\partial f = \sum_{I,J} \partial f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J \qquad \text{e} \qquad \bar{\partial} f = \sum_{I,J} \bar{\partial} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

são do tipo $(p+1,q)$ e $(p,q+1)$ respetivamente.

Desde que

$$0 = d^2 f = \partial^2 f + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) f + \bar{\partial}^2 f$$

sendo todos os termos na direita de tipos diferentes, obtemos que

$$\partial^2 f = 0, \quad (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) = 0, \quad \bar{\partial}^2 f = 0.$$

Portanto, se considerarmos a equação

$$\bar{\partial} u = f \tag{45}$$

onde f é do tipo $(p, q+1)$, obtemos que $\bar{\partial} f = 0$ e uma condição necessária sobre f para a existência de alguma solução.

3.2 A Integral de Cauchy em polidiscos

Um conjunto $D \subset \mathbb{C}^n$ é chamado de polidisco se existir discos $D_1, ..., D_n \subset \mathbb{C}$ tais que $D = D_1 \times ... \times D_n$. Chamamos de fronteira distinguida de D e denotamos por $\partial_0 D$ ao conjunto $\prod_{i=1}^n \partial D_i$.

O seguinte resultado, afirma que quando uma função é analítica separadamente (isto significa que é analítica em cada variável quando as outras são devidamente fixadas) e contínua, então ela é analítica, além disso ela satisfaz a fórmula integral de Cauchy em polidiscos análoga ao caso de uma variável. Dentro de pouco veremos que a condição de continuidade na hipótese pode ser retirada, sendo este resultado conhecido como o Teorema de analiticidade separada de Hartogs.

Teorema 3.2.1. *Seja D um polidisco em $\mathbb{C}^n$, e u uma função continua em $\overline{D}$ e tal que em D é analítica em cada variável z_j separadamente quando as outras são devidamente fixadas. Então temos que*

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{u(\zeta_1, ..., \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)...(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1...d\zeta_n. \tag{46}$$

Com isto, $u \in C^\infty(D)$ e de fato u é analítica em D.

Prova. Seja $D = D_1 \times ... \times D_n$ e $z = (z_1, ..., z_n) \in D$. Fixando $z_2, z_3, ..., z_n$ temos pela hipóteses que

$$u(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{u(\zeta_1, z_2, ..., z_n)}{(\zeta_1 - z_1)} d\zeta_1. \tag{47}$$

E também, fixando $\zeta_1 \in D_1$, $z_3 \in D_3$, ... , $z_n \in D_n$ temos que

$$u(\zeta_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{u(\zeta_1, \zeta_2, ..., z_n)}{(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_2 \tag{48}$$

para todo $z_2 \in D_2$. Dado que a função u é continua em $\bar{D}$ a formula (48) também é satisfeita para $\zeta_1 \in \partial D_1$.

Logo, de (47) temos que

$$u(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial D_1} \int_{\partial D_2} \frac{u(\zeta_1, \zeta_2, ..., z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_2 d\zeta_1.$$

Fazendo isto $n-2$ vezes mais, obtemos (46). Por outro lado, dado que função $(z_1, ..., z_n) \mapsto ((\zeta_1 - z_1)...(\zeta_n - z_n))^{-1}$ é uma função de classe $C^\infty(D)$ quando $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \partial_0 D$ obtemos que $u \in C^\infty(D)$ e portanto assim u é analítica. $\square$

Do Teorema 3.2.1, se $u \in A(D)$ e continua em $\overline{D}$ também podemos obter que

$$\partial^\alpha u(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{u(\zeta_1, ..., \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1 + 1}...(\zeta_n - z_n)^{\alpha_n + 1}} d\zeta_1...d\zeta_n, \tag{49}$$

e assim desta podemos afirmar que:

Corolário 3.2.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é aberto e $u \in A(\Omega)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$ e toda derivada dela é analítica em Ω.*

Teorema 3.2.3. *Para todo compacto $K \subset \Omega$ e toda vizinhança aberta $W \subset \Omega$ de K, existe para todo multi-índice α uma constante C_α tal que*

$$\sup_K |\partial^\alpha u| \leq C_\alpha ||u||_{L^1(W)} \qquad \textit{para todo } u \in A(\Omega). \tag{50}$$

Prova. Seja $K \subset\subset W \subset \Omega$. Para todo ponto $z = (z_1, ..., z_n) \in K$ existe um polidisco $D = D_1 \times ... \times D_n$ tal que $z \in D$ e $\overline{D} \subset W$. Se $u \in A(\Omega)$, então pelo Teorema 2.1.4

$$\begin{aligned}
\sup_{\bar{D}} |\partial^\alpha u| &= \sup_{(z_1,...,z_{n-1}) \in \bar{D}_1 \times ... \times \bar{D}_{n-1}} \; \sup_{z_n \in \bar{D}_n} \left| \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}} \left(\partial^{(\alpha_{n-1},...,\alpha_1)} u\right) \right| \\
&\leq \sup_{(z_1,...,z_{n-1}) \in \bar{D}_1 \times ... \times \bar{D}_{n-1}} M_n \left\| \partial^{(\alpha_{n-1},...,\alpha_1)} u \right\|_{L^1(D'_n)} \\
&= M_n \sup_{(z_1,...,z_{n-1}) \in \bar{D}_1 \times ... \times \bar{D}_{n-1}} \int_{D'_2} \left| \partial^{(\alpha_{n-1},...,\alpha_1)} u \right| \\
&\leq M_n \int_{D'_n} \sup_{(z_1,...,z_{n-1}) \in \bar{D}_1 \times ... \times \bar{D}_{n-1}} \left| \partial^{(\alpha_{n-1},...,\alpha_1)} u \right| \\
&\;\vdots \\
&\leq M_n M_{n-1} ... M_1 \int_{D'_1} \int_{D'_2} ... \int_{D'_n} |u| \\
&= M_n M_{n-1} ... M_1 \|u\|_{L^1(D'_1 \times ... \times D'_n)} \\
&\leq M_n M_{n-1} ... M_1 \|u\|_{L^1(W)}
\end{aligned}$$

para algumas constantes M_1,...,M_n e um polidisco $D'_1 \times ... \times D'_n$ que contem o polidisco $\bar{D}_1 \times ... \times \bar{D}_n$ e está contido em W. Com isto podemos afirmar, para um polidisco $D \subset\subset W$, a existência de uma constante M_D tal que a desigualdade é satisfeita. Dado que K é compacto, existe uma coleção finita de polidiscos $D1, ..., Dn \subset\subset W$ tais que cobre K. Considerando $C_\alpha = \max\{M_{D1}, ..., M_{Dn}\}$ obtemos a desigualdade requerida. □

Teorema 3.2.4. *Se $u_k \in A(\Omega)$ e $u_k \to u$ quando $k \to \infty$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, então $u \in A(\Omega)$.*

Prova. Seja K um subconjunto compacto de Ω e ω um subconjunto aberto relativamente compacto de Ω que contem K, do Teorema 3.2.3 temos que existe $M > 0$ tal que:

$$\sup_K \left| \frac{\partial u_m}{\partial z_j} - \frac{\partial u_n}{\partial z_j} \right| \leq M \int_\omega |u_m - u_n| \, d\lambda \tag{51}$$

Dado que $\{u_j\}$ converge uniformemente em $\overline{\omega}$ temos que $\{\partial u_m / \partial z_j\}$ converge uniformemente em K. Dado que K é arbitrário, então $\{\partial u_m / \partial z_j\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Agora $\partial u_m/\partial \overline{z}_j \equiv 0$, portanto $\partial u_m/\partial x_{2j-1}$ e $\partial u_m/\partial x_{2j}$ convergem uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Com isto a função limite u é diferenciável de classe C^1 em Ω e $\partial u(z)/\partial \overline{z}_j = \lim_{n\to+\infty} \partial u_m(z)/\partial \overline{z}_j = 0$ para todo $z \in \Omega$. Logo $u \in A(\Omega)$. □

Teorema 3.2.5. *Se $u_k \in A(\Omega)$ e a sequência $|u_k|$ é uniformemente limitado sobre todo subconjunto compacto de Ω, então existe uma subsequência u_{k_j} convergindo uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Ω a uma função de $A(\Omega)$.*

Prova. Seja $K \subset\subset \Omega$, e ω uma vizinhança de K relativamente compacta de Ω. Do Teorema 3.2.3 existe $M > 0$ tal que

$$\sup_K \left|\frac{\partial u_j}{\partial z_l}\right| \leq M \int_\omega |u_j| d\lambda \leq M \sup_\omega |u_j| \int_\omega d\lambda. \tag{52}$$

Da hipótese, obtemos que $\{\partial u_j/\partial z_l\}_{j\in\mathbb{N}}$ também é uniformemente limitada em compactos para todo j. Desde que $\partial u_j/\partial \overline{z}_l \equiv 0$ para todo j, então as sequências $\{\partial u_j/\partial x_{2l-1}\}$ e $\{\partial u_j/\partial x_{2l}\}_{j\in\mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas em compactos de Ω, isto para todo $l = 1, 2, ..., n$. Logo a sequência é equicontinua em Ω. Podemos implicar então do Teorema de Arzela-Ascolí (aplicando tal teorema em conjuntos compactos encaixados e o método da diagonal usado no Corolário 2.1.6), temos que existe uma subsequência de funções $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. O resultado segue do Teorema 3.2.4. □

Consideremos agora expansões em série de potências de funções que são analíticas em polidiscos. Diremos que a série

$$\sum_\alpha a_\alpha(z) \tag{53}$$

converge normalmente num conjunto aberto Ω quando $\sum_\alpha \sup_K |a_\alpha(z)|$ converge para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$. Isto implica de fato que a série (53) existe e seja independente da ordem da soma, e assim pelo Corolário 3.2.4 a soma é analítica se todo a_α é analítica.

Teorema 3.2.6. *Se u é analítica no polidisco $D = \{z \ : \ |z_j| < r_j, j = 1, ..., n\}$, então tem se que*

$$u(z) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha \partial^\alpha u(0)}{\alpha!}, \forall \qquad z \in D$$

com convergência normal.

Prova. Sejam $0 < r'_j < r_j$, $D'_j = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r'_j\}$ para, $j = 1, 2, ..., n$, e $D' = \prod_{j=1}^n D'_j$.

Do Teorema 3.2.1 temos para z no interior de D':

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 D'} \frac{u(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)...(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1...d\zeta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 D'} \frac{u(\zeta_1,...,\zeta_n)}{\zeta_1(1 - z_1/\zeta_1)...\zeta_n(1 - z_n/\zeta_n)} d\zeta_1...d\zeta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 D'} \frac{u(\zeta_1,...,\zeta_n)}{\zeta_1...\zeta_n}\sum_\alpha \left(\frac{z}{\zeta}\right)^\alpha d\zeta_1...d\zeta_n. \end{aligned}$$

Desde que o somatório no integrando converge normalmente quando z pertence ao interior de D' e $\zeta \in \partial_0 D'$, da integração termo a termo tem-se que

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_\alpha \int_{\partial_0 D'} \frac{u(\zeta_1,...,\zeta_n)}{\zeta_1...\zeta_n}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^\alpha d\zeta_1...d\zeta_n \\ &= \sum_{(\alpha_1,...,\alpha_n)} \left(\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 D'} \frac{u(\zeta_1,...,\zeta_n)}{\zeta_1^{\alpha_1+1}...\zeta_n^{\alpha_n+1}} d\zeta_1...d\zeta_n\right) z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

cujo somatório resultante também converge normalmente quando $\zeta \in \partial_0 D'$ e z no interior de D'. Logo da equação (49), tem-se que

$$u(z) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!} z^\alpha \tag{54}$$

para todo z no interior de D'. Desde que os r_j' foram escolhidos arbitrariamente entre 0 e r_j temos que a igualdade (54) é satisfeita para todo z em D. □

Deste último teorema podemos ver que se $u \in A(\Omega)$ e $\partial^\alpha u = 0$ num ponto de Ω para todo multiindice α, então $u \equiv 0$ se Ω for conexo. Resultado que é conhecido como o Teorema da unicidade da continuidade analítica.

Teorema 3.2.7 (Desigualdade de Cauchy). *Se u é analítica e $|u| \leq M$ no polidisco $\{z\ :\ |z_j| < r_j, j = 1,...,n\}$, então*

$$|\partial^\alpha u(0)| \leq M\alpha! r^{-\alpha}.$$

Prova. Seja $t \in]0,1[$ e $D' = \{z\ :\ |z_j| < tr_j, j = 1,...,n\}$. Da equação (49) temos que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u(0)| &= \left|\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi} \frac{u(tr_1e^{i\theta_1},...,tr_ne^{i\theta_n})}{(tr_1e^{i\theta_1})^{\alpha_1+1}...(tr_1e^{i\theta_1})^{\alpha_n+1}} itr_1e^{i\theta_1}...itr_ne^{i\theta_n}d\theta_1...d\theta_n\right| \\ &\leq \frac{\alpha! M t^{-|\alpha|}(r)^{-\alpha}}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi} d\theta_1...d\theta_n = \\ &= \alpha! M t^{-|\alpha|}(r)^{-\alpha} \end{aligned}$$

para todo t em $]0,1[$. Fazendo $t \nearrow 1$ obtemos o resultado. □

Podemos ver destes dois últimos teoremas que se $f \in A(\mathbb{C}^n)$ é limitada, então f é uma função constante, pois todas as derivadas num ponto quaisquer seriam zero. O resultado análogo ao Principio do Máximo vale também para funções analíticas de varias variáveis.

Teorema 3.2.8 (Teorema de analiticidade separada de Hartogs). *Se u é uma função de valor complexo definida num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e u é uma função analitica em cada variável z_j quando as outras são arbitrariamente fixadas, então u é analítica em Ω.*

Dado que a afirmação é puramente local, então será suficiente provar o resultado em polidiscos.

Lema 3.2.9. *Se u é uma função de valor complexo satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2.8 no polidisco $\Omega = \{z \ : \ |z_j| < r_j, j = 1, ..., n\}$ e limitada em Ω, então a função é analítica em Ω.*

Prova. Pelo Teorema 3.2.1 é suficiente mostrar que u é continua em Ω. Seja $|u| \leq M$ em Ω e $z, \zeta \in \Omega$. Desde que

$$u(z) - u(\zeta) = \sum_{j=1}^{n}(u(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, z_j, z_{j+1}, ..., z_n) - u(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, \zeta_j, z_{j+1}, ..., z_n)), \tag{55}$$

e a função $v_j : \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ dada por

$$v_j(\xi) = \frac{1}{2M}\left(u\left(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, \frac{r_j(r_j\xi - \zeta_j)}{r_j + \xi\overline{\zeta_j}}, z_{j+1}, ..., z_n\right) - u(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, \zeta_j, z_{j+1}, ..., z_n)\right)$$

é analítica e tal que $|v_j| \leq 1$ em $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ e $v_j(0) = 0$ então do Lema de Schwartz temos que $|v_j(\xi)| \leq |\xi|$ para todo $\xi \in \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Portanto

$$\left|\frac{u(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, z_j, z_{j+1}, ..., z_n) - u(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, \zeta_j, z_{j+1}, ..., z_n)}{2M}\right| \leq \left|\frac{r_j(\zeta_j - z_j)}{r_j^2 - z_j\overline{\zeta_j}}\right| = r_j\frac{|\zeta_j - z_j|}{|r_j^2 - z_j\overline{\zeta_j}|} \tag{56}$$

e assim

$$|u(z) - u(\zeta)| \leq 2M\sum_{j=1}^{n} r_j\frac{|\zeta_j - z_j|}{|r_j^2 - z_j\overline{\zeta_j}|}. \tag{57}$$

Então $\lim_{z\to\zeta} |u(z) - u(\zeta)| = 0$. Logo u é continua em $\zeta \in \Omega$ □

No que segue, assumiremos que o Teorema 3.2.8 é verificado para funções como $n - 1$ variáveis (veja que esta afirmação é trivial quando n=1).

Lema 3.2.10. *Seja u uma função de valor complexo satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2.8 num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e $D = \prod_1^n D_j$ um polidisco fechado con inteiror não vazio contido em Ω. Então existem discos $D_j' \subset D_j$, para $j = 1, ..., n$ com raio positivo e $D_n' = D_n$ tal que u é limitado em $D' = \prod_1^n D_j'$, e assim analítico no interior de D'.*

Prova. Consideremos os seguintes conjuntos

$$E_M = \left\{ z' \ : \ z' \in \prod_{i=1}^{n-1} D_j e |u(z', z_n)| \leq M, z_n \in D_n \right\}$$

e veja que ele é a interseção de conjuntos fechados, pois pela hipóteses feita antes de enunciar o teorema, u é analítica em $\prod_{i=1}^{n-1} D_j$ quando z_n é fixada em D_n e portanto continua em $\prod_{i=1}^{n-1} D_j$ quando z_n é fixada em D_n.

Dado que $\cup_{M=1}^{\infty} E_M = \prod_{j=1}^{n-1} D_j$ e $\prod_{j=1}^{n-1} D_j$ possui interior distinto do vazio, segue do Teorema de Baire, que existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que E_{M_0} é um fechado com interior não vazio. Logo existe um polidisco $\prod_{i=1}^{n-1} D'_j \subset E_{M_0}$ com raio positivo tal que para $z' \in \prod_{j=1}^{n-1} D'_j$, tenha-se que $|u(z', z_n)| \leq M_0$ e isto para todo $z_n \in D_n$. Considerando $D'_n = D_n$ temos que $|u|$ é limitada em $\prod_{j=1}^{n} D'_j$, logo do Lema 3.2.9 u é analítica em $\prod_{j=1}^{n} D'_j$. □

Lema 3.2.11. *Seja u uma função de valor complexo no polidisco $D = \{z \ : \ |z_j - z_j^0| < R, \ j = 1, ..., n\}$ e assuma que u é analítica em $z' = (z_1, ..., z_{n-1})$ se z_n é fixado e que u é analítico e limitado em $D' = \{z \ : \ |z_j - z_j^0| < r, j = 1, ..., n-1, |z_n - z_n^0| < R\}$ para algum $r > 0$. Então u é analítico em D.*

Prova. Suponhamos por simplicidade que $z_j^0, = 0$ para todo $j = 1, ..., n$. Sejam $0 < R_1 < R_2 < R$ e denotemos para $s > 0$ e $l \in \mathbb{N}$, $D(0, s) = \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ |\xi| < R\}$ e $D^l(0, s) = \prod_{j=1}^{l} D(0, s)$. Da analiticidade de u nas $n-1$ primeiras variáveis em $D^{n-1}(0, R)$ quando z_n é fixado em $D(0, R)$, obtemos que a série

$$u(z', z_n) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha u(0, z_n)(z')^\alpha}{\alpha!} \tag{58}$$

converge normalmente na variável z' em $D^{n-1}(0, R_2)$ para cada z_n fixado em $D(0, R)$. Com isto, se chamamos $a_\alpha(z_n) = \frac{\partial^\alpha u(0, z_n)}{\alpha!}$, então $\sup_{D^{n-1}(0, R_2)} |a_\alpha(z_n)(z')^\alpha| \to 0$ quando $|\alpha| \to +\infty$ para cada z_n fixado em $D(0, R)$. Logo $|a_\alpha(z_n)| \, R_2^{|\alpha|} \to 0$ quando $|\alpha| \to +\infty$ para cada z_n tal que $|z_n| < R$.

Dado que por hipótese u é analítica em $D^{n-1}(0, r) \times D(0, R)$ para algum $r > 0$, então em particular u é analítica nas $n-1$ primeiras variáveis em $D^{n-1}(0, r)$ quando z_n é fixado em $D(0, R)$, logo das estimativas de Cauchy temos que

$$|a_\alpha(z_n)| = |\frac{\partial^\alpha u(0, z_n)}{\alpha!}| \leq \sup_{\zeta \in D^{n-1}(0, r)} |\partial^\alpha u(\zeta, z_n)| \, \frac{\alpha!}{\alpha!} r^{-|\alpha|}$$

para cada $z_n \in D(0, R)$.

Dado que por hipótese, também $a_\alpha(z_n)$ é holomorfa na variável $z_n \in D(0, R)$ (fixando as $n-1$ primeiras variáveis no domínio $D^{n-1}(0, r) \times D(0, R)$ em $0 \in D^{n-1}(0, r)$) então temos que a função definida $D(0, R)$ dada por $z_n \mapsto \frac{1}{|\alpha|} \log |a_\alpha(z_n)|$ é subharmônica para todo multi-índice α, e veja que:

- A sequência $\left\{\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)|\right\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ é uniformemente limitada em $D(0,R)$ pois para todo $z_n \in D(0,R)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)| &\leq \frac{1}{|\alpha|}\log(Mr^{-|\alpha|}) = \frac{1}{|\alpha|}(\log M - |\alpha|\log r) = \\ &= \frac{1}{|\alpha|}\log M - \log r\end{aligned}$$

e $\frac{1}{|\alpha|}\log M$ é menor o igual a uma constante quando α é suficientemente grande.

- Desde que $\left|a_\alpha(z_n)R_2^{|\alpha|}\right| \to 0$ quando $|\alpha| \to +\infty$ para $z_n \in D(0,R)$ temos que para $|\alpha|$ suficientemente grande $|a_\alpha(z_n)|\,R_2^{|\alpha|} < 1$, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)| &= \frac{1}{|\alpha|}\log\left|\frac{a_\alpha(z_n)R_2^{|\alpha|}}{R_2^{|\alpha|}}\right| = \\ &= \frac{1}{|\alpha|}\log\left(\left|a_\alpha(z_n)R_2^{|\alpha|}\right|\right) + \frac{1}{|\alpha|}\log\left(\frac{1}{R_2^{|\alpha|}}\right) \leq \frac{1}{|\alpha|}\log\left(\frac{1}{R_2^{|\alpha|}}\right) = \\ &= \log\left(\frac{1}{R_2}\right)\end{aligned}$$

e assim $\overline{\lim}_{|\alpha|\to+\infty}\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)| \leq \log\left(\frac{1}{R_2}\right)$.

Logo, do Lema de Hartogs (Teorema 2.5.13) temos que, para $|\alpha|$ suficientemente grande

$$\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)| \leq \log\left(\frac{1}{R_1}\right),$$

isto é $|a_\alpha(z_n)|\,R_1^{|\alpha|} \leq 1$ para todo $|z_n| \leq R_1$, para $|\alpha|$ suficientemente grande. Com isto

$$\sup_{D^n_(0,R_1)}\left|a_\alpha(z_n)\,(z')^\alpha\right| = \sup_{D(0,R_1)}|a_\alpha(z_n)|\,R_1^{|\alpha|} \leq 1$$

para todo $R_1 < R$, e $|\alpha|$ suficientemente grande.

Logo a série $\sum_\alpha a_\alpha(z_n)\,(z')^\alpha$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos no interior do polidisco $D^n(0,R_1)$, para todo $R_1 < R$. Logo converge normalmente em $D^n(0,R)$. Com isto e do Teorema 3.2.4 $u(z', z_n)$ é analítica em $D^n(0,R)$ pois cada termo da série é analítico. □

Prova do teorema de analiticidade separada de Hartogs. Supondo que o teorema é verdade para $n-1$ variáveis; os dois lemas anteriores são verdadeiros, então para $\zeta = (\zeta_1,...,\zeta_n) \in \Omega$; escolhamos $R > 0$ tal que o polidisco $\prod_{i=1}^n \overline{D(0,2R)}$ esteja contido em Ω.

Do Lema 3.2.10 existe $z_0 = (z_1^0, ..., z_{n-1}^0, \zeta_n) \in \prod_{j=1}^n D(\zeta_j, R)$ tal que u é analítica em $\left(\prod_{j=1}^{n-1} D(z_j^0, r)\right) \times D(\zeta_n, R)$, para algum $0 < r < R$. Mas ainda u satisfaz as hipóteses do teorema em $\prod_{j=1}^{n-1} D(z_j^0, R) \times D(\zeta_n, R)$. Do Lema 3.2.11 u é analítica em $\prod_{j=1}^{n-1} D(z_j^0, R) \times D(\zeta_n, R)$ e veja que ζ pertence a este conjunto. Logo u é analítica numa vizinhança de ζ. $\square$

3.3 Equações não homogêneas de Cauchy-Riemann num polidisco

Teorema 3.3.1. *Seja $f_j \in C_0^m(\mathbb{C}^n)$, $j = 1, ..., n$, onde $m > 0$, $n > 1$ e assuma que*

$$\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}$$

para todo $j, k = 1, 2, ..., n$. Então existe $u \in C_0^m(\mathbb{C}^n)$ que satisfaz a equação

$$\overline{\partial} u = \sum_{j=1}^{n} f_j d\overline{z}_j$$

Prova. Defina

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1(\zeta, z_2, ..., z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \tag{59}$$

que está bem definida desde que $\int \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} < +\infty$. Veja que $u(z) = 0$ se $|z_2|, ..., |z_n|$, é suficientemente grande, e ainda $u(\zeta) = 0$ numa vizinhança de z. Alem disso, da definição de u, podemos escrever

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \zeta^{-1} f_1(\zeta - z_1, z_2, ..., z_n) d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \tag{60}$$

e assim $u \in C^m(\mathbb{C}^n)$. Também

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(z)}{\partial \overline{z}_k} &= -\frac{1}{2\pi i} \int \zeta^{-1} \frac{\partial f_1(\zeta - z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial \overline{z}_k} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int \zeta^{-1} \frac{\partial f_k(\zeta - z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial \overline{z}_1} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int \zeta^{-1} \frac{\partial f_k(\zeta - z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial \overline{\zeta}} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int (\zeta - z_1)^{-1} \frac{\partial f_k(\zeta, z_2, ..., z_n)}{\partial \overline{\zeta}} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.
\end{aligned}$$

Do Teorema 2.1.1 temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(z)}{\partial \overline{z}_k} &= f_k(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{D(0,R)} (\zeta - z_1)^{-1} f_k(\zeta, z_2, ..., z_n) d\zeta \\
&= f_k(z),
\end{aligned}$$

sendo $R > 0$ suficientemente grande. Logo, $\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}_k} = 0$ para $k = 1, 2, ..., n$, fora de um disco de raio suficientemente grande. Logo u é analítico fora de um disco de raio suficientemente grande. Desde que $u(z) = 0$ para $|z_2|, ..., |z_n|$ suficientemente grande, temos do Principio de Continuação Analítica que $u \equiv 0$ fora de um disco de raio suficientemente grande. Isto é $\operatorname{supp} u$ é compacto. □

O seguinte teorema, é conhecido como Teorema de extensão de Hartogs, do qual pode se afirmar o seguinte fato importante, que toda singularidade isolada duma função analítica de n variáveis complexas (com $n > 1$) é sempre removível. O qual é uma propriedade exclusiva de funções analíticas com mais de uma variável complexa, pois um contra exemplo imediato ao caso de uma variável é dada pela função $1/z$ que de fato é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mas não pode ser continuada analiticamente em nenhuma vizinhança da origem; de fato, pois se la fosse continuada analiticamente numa vizinhança da origem, digamos num disco $D(0, R)$ de centro na origem e raio $R > 0$ então em particular ela deveria ser continua em $\overline{D(0, R)}$ e assim limitada neste conjunto. Por outro lado, veja que a função $1/z$ é limitada por $1/R$ no complementar de $\overline{D(0, R)}$, resultado assim limitada em todo $\mathbb{C}$, logo do teorema de Liouville obteríamos que $1/z$ é constante, mais isto é uma contradição.

Teorema 3.3.2. *[Teorema de extensão de Hartogs] Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto, K compacto tal que $\Omega \setminus K$ é conexo. Se $u \in A(\Omega \setminus K)$ então existe $U \in A(\Omega)$ tal que $U|_{\Omega \setminus K} \equiv u$.*

Prova. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de K. Definamos $u_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $u_0 = (1 - \varphi)u$ em $\Omega \setminus K$ e $u_0 \equiv 0$ em K, então $u_0 \in C^\infty(\Omega)$.

Definamos agora $f = -u\overline{\partial}\varphi$ em $\Omega \setminus K$ e $f \equiv 0$ em $K \cup \complement\Omega$. Logo f é uma forma do tipo $(0, 1)$ de classe C^∞ e tem suporte contido no suporte em Ω pois $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp}(\overline{\partial}\varphi) \subset \operatorname{supp} \varphi$. Alem disso é obvio que $\overline{\partial} f = 0$ em $\Omega \setminus K$ e $\overline{\partial} f = 0$ em $K \cup \complement\Omega$. Logo a função $\overline{\partial} v = f$, por o Teorema 3.3.1 tem solução v com suporte compacto, e que em particular se O é uma componente conexa não limitada do $\complement \operatorname{supp} \varphi$; então $O \cap \complement(\operatorname{supp} v) \neq \phi$.

Desde que $\overline{\partial} v = -u\overline{\partial}\varphi$ então v é analítica fora do $\operatorname{supp} \varphi$ em particular v é analítica em O, logo $v \equiv 0$ em O. Em particular $v \equiv 0$ num disco D contido em $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$, que é distinto do vazio pois $\phi \neq \Omega \setminus \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} f$.

Seja agora $U = u_0 - v$. Então $U \in C^\infty(\Omega)$. Alem disso $\overline{\partial} U = \overline{\partial} u_0 - \overline{\partial} v = -u\overline{\partial}\varphi - \overline{\partial} v = f - \overline{\partial} v = 0$ em Ω, e $u_0 = U$ em D. Logo $(1 - \varphi)u = U$ em D. De considerar D suficientemente pequeno e perto de $\partial\Omega$ então $u = U$ em D. Pela continuidade analítica, temos que $u = U$ em $\Omega \setminus K$ pois esta é conexa. □

3.4 Séries de potências e Domínios de Reinhardt

No sentido de estudar conjuntos abertos onde é possível estender toda funções analítica definidas nela a um conjunto maior de forma análoga ao resultado do Teorema de extensão de Hartogs, introduzimos aqui os domínios de séries de potencias e os domínios de Reinhardt.

$$\sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha \tag{61}$$

Definimos o domínio de convergência D da série (61) como o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}^n$ tal que a série converge absolutamente em todo ponto de uma vizinhança de z. isto é:

$$D = \bigcup_{r>0} \left\{ z \in \mathbb{C}^n \ : \ \sum_{\alpha} |a_\alpha w^\alpha| < +\infty, |w - z| < r \right\}.$$

Denotamos por B o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $|a_\alpha z^\alpha| \leq C$ para todo multi-índice α e alguma constante C. Isto é

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \ : \ \sup_{\alpha} |a_\alpha z^\alpha| < C, \text{ para alguma constante } C > 0 \right\}.$$

Observe que D está contido no interior de B.

Lema 3.4.1 (Lema de Abel)**.** *Se $w \in B$, então a série (61) converge normalmente em $\{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_j| < |w_j|, j = 1, ..., n\}$.*

Prova. Seja $w \in B$, então existe $C > 0$ tal que $|a_\alpha w^\alpha| \leq C$. Seja também $L_k = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_j| \leq k_j |w_j|, \ j = 1, ..., n\}$, com $k_j > 1$ para $j = 1, ..., n$. Se $z \in L_k$ então

$$|a_\alpha z^\alpha| \leq k^\alpha |a_\alpha w^\alpha| \leq k^\alpha C$$

sendo $k^\alpha = (k_1, ..., k_n)^\alpha = k_1^{\alpha_1}, ..., k_n^{\alpha_n}$. Desde que

$$\sum_{\alpha} k^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - k_j} \right) < \infty$$

então

$$\sum_{\alpha} \sup_{L_k} |a_\alpha z^\alpha| \leq C \sum_{\alpha} k^\alpha < \infty$$

para quaisquer $k = (k_1, ..., k_n)$ com $0 < k_j < 1$, $j = 1, ..., n$. Logo a série converge normalmente em $\{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_j| < |w_j|, \ j = 1, ..., n\}$. $\square$

Teorema 3.4.2. *Se D e B são como acima então D é igual ao interior do conjunto B alem do mais a série de potências (61) converge normalmente em D e a soma é analítica.*

Prova. Denotemos por $B(\xi, r)$ uma bola aberta de centro $\xi \in \mathbb{C}^n$ e raio $r > 0$. Seja ζ um ponto do interior de B, então existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola $B(\zeta, 2\varepsilon)$ esteja contida em B. Seja $w \in \overline{B(\zeta, \varepsilon)}$ tal que $|w| = |\zeta| + \varepsilon$. Veja que $w \in B$, e do lema anterior temos que a série (61) converge normalmente em $\{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |z| < |w|\}$, em particular em $B(\zeta, \varepsilon)$. $\square$

Teorema 3.4.3. *Seja $D^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : \ \left(e^{\xi_1}, ..., e^{\xi_n}\right) \in D\}$. Então D^* é um conjunto aberto convexo em $\mathbb{R}^n$. Se $\zeta \in D^*$, e $\eta \in \mathbb{R}^n$ cumpre que $|\eta_j| \leq |\zeta_j|$ então $\eta \in D^*$. E $z \in D$ se, e somente se, $|z_j| \leq e^{\xi_j}$, para algum $\xi \in D^*$.*

Prova. Denotemos $e^{(\xi)} = (e^{\xi_1}, ..., e^{\xi_n})$ para $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $S^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : \ e^{(\xi)} \in S\}$ para um subconjunto S de $\mathbb{C}^n$.

Afirmo que $D^* = Int(B^*)$. De fato, se $\xi \in Int(B^*)$, então existem $r_j > 0$ com $j = 1, ..., n$ tais que $(\xi_1 + r_1, ..., \xi_n + r_n) \in B^*$, então $e^{\xi + r} \in B$ sendo $r = (r_1, ..., r_n)$. Desde que $e^{\xi_j} < e^{\xi_j + r_j}$ para $j = 1, ..., n$, do Lema de Abel tem-se que $e^{\xi} \in IntB$, logo do Teorema 3.4.2 temos que $e^{\xi} \in D$, isto é, $\xi \in D^*$. Então $Int(B^*) \subset D^*$. Se $\xi \in D^*$, então $e^{(\xi)} \in Int(B)$. Dado que todas as coordenadas de $e^{(\xi)}$ tem parte imaginaria zero e são positivos, existe uma vizinhança $V' \subset \mathbb{R}^n$ de $e^{(\xi)}$ tal que $V' + i\{0\} \subset B$ e todo elemento de V' tenha coordenadas positivas. Logo, se $(t_1, ..., t_n) \in V'$ então $(e^{\ln t_1}, ..., e^{\ln t_n}) = (t_1, ..., t_n) \in B$. Seja $W' = \{(\ln t_1, ..., \ln t_n) \ : \ (t_1, ..., t_n) \in V\}$. Logo W' é aberto em $\mathbb{R}^n$, $W' \subset B^*$ e $(\xi_1, ..., \xi_n) = (\ln(e^{\xi_1}), ..., \ln(e^{\xi_n})) \in W'$. Então $(\xi_1, ..., \xi_n) \in Int(B^*)$. Isto é $D^* \subset Int(B^*)$. Assim provamos que $D^* = IntB^*$.

Sejam $\xi, \eta \in B^*$, então $e^{(\xi)}, e^{(\eta)} \in B$, isto é $|a_\alpha (e^{(\xi)})^\alpha| < C$ e $|a_\alpha (e^{(\eta)})^\alpha| < C$ para alguma constante $C > 0$. Se $0 < \lambda < 1$ então

$$(|a_\alpha| \exp(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j))^\lambda < C^\lambda$$

$$(|a_\alpha| \exp(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j))^{(1-\lambda)} < C^{(1-\lambda)},$$

logo

$$|a_\alpha| (e^{(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)})^\alpha = |a_\alpha| \exp(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda \xi_j + (1-\lambda)\eta_j)) < C.$$

Portanto $e^{(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)} \in B$, assim $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in B^*$. Logo D^* é convexo.

Seja $\xi \in D^* = Int(B^*)$. Se $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\eta_j \leq \xi_j$ para $j = 1, .., n$, então $e^{\eta_j} \leq e^{\xi_j}$ para todo $j = 1, ..., n$. Desde que $\xi \in Int(B^*)$ e $(Int(B))^* = D^* = Int(B^*)$ temos que $e^{(\xi)} \in Int(B)$, do Lema 3.4.1 obtemos que $e^{(\eta)} \in Int(B)$, logo $\eta \in (Int(B))^*$.

Se z é tal que existe $\xi \in D^*$ e $|z_j| \leq e^{\xi_j}$ para $j = 1, ..., n$. Desde que $\xi \in (Int(B))^*$, então $e^{(\xi)} \in Int(B)$. Do Lema 3.4.1 temos que $z \in Int(B) = D$. De forma recíproca, se $z \in D$, então existe uma polidisco $D = D(z_1, 2r) \times ... \times D(z_n, 2r)$ tal que a série converge absolutamente em todo ponto dele, para algum $r > 0$. Considere então $\xi_j = \ln|z_j| + r$ e veja que $|z_j| \leq e^{\xi_j}$, e $\xi \in D = Int(B)$. Logo $e^{(\xi)} = (Int(B))^* = D^*$. $\square$

Definição 3.4.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é aberto, então dizemos que Ω é um domínio de Reinhardt se para todo $z \in \Omega$, tem-se que $(e^{i\theta_1} z_1, ..., e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega$ para todo $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Veja que se Ω é um domínio de Reinhardt, com as notações do Teorema 3.4.3, e se

$$\log||\Omega|| = \{(\log|\zeta_1|, ..., \log|\zeta_n|) \in \mathbb{R}^n \ : \ (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \Omega \ , \ |\zeta_j| > 0 \text{ para j=1,..,n}\}$$

então $\Omega^* = \log||\Omega||$. De fato, se $(x_1, ..., x_n) \in \log||\Omega||$ então $(\log|\zeta_1|, ..., \log|\zeta_n|) = (x_1, ..., x_n)$ para algum $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \Omega$ tal que $|\zeta_j| > 0$ para $j = 1, .., n$, assim $(e^{x_1}, ..., e^{x_n}) = (|\zeta_1|, ..., |\zeta_n|)$, como Ω é um domínio de Reinhardt temos que $(|\zeta_1|, ..., |\zeta_n|) \in \Omega$, logo $(x_1, ..., x_n) \in \Omega^*$. Por outro lado, se $(y_1, ..., y_n) \in \Omega^*$ então $(e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \in \Omega$, mas $(y_1, ..., y_n) = (\log(e^{y_1}), ..., \log(e^{y_n}))$ então $(y_1, ..., y_n) \in \log||\Omega||$.

Teorema 3.4.5. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio de Reinhardt conexo contendo o origem e $f \in A(\Omega)$, então existe uma (e só uma) série de potências tal que*

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$$

que converge normalmente em Ω.

Prova. Nesta prova consideraremos a norma e a distância euclidiana. Seja $\varepsilon > 0$ e $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \ : \ d(\varepsilon, \complement\Omega) > \varepsilon|z|\}$. Então $0 \in \Omega_\varepsilon$, $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\alpha$ se $\alpha \leq \varepsilon$. Também Ω_ε é um domínio de Reinhardt, de fato, se $z \in \Omega_\varepsilon$ e $d(z, \complement\Omega) < +\infty$, então a bola $B(z, d(z, \complement\Omega))$ de centro z e raio $d(z, \complement\Omega)$ esta contido em Ω, agora desde que Ω é domínio de Reinhardt, então a bola $B((e^{i\theta_1}z_1, ..., e^{i\theta_n}z_n), d(z, \complement\Omega))$ também esta contida em Ω, logo $d((e^{i\theta_1}z_1, ..., e^{i\theta_n}z_n), \complement\Omega) \geq d(z, \complement\Omega)$ e assim $d((e^{i\theta_1}z_1, ..., e^{i\theta_n}z_n), \complement\Omega) > \varepsilon|z| = \varepsilon|(e^{i\theta_1}z_1, ..., e^{i\theta_n}z_n)|$ para quaisquer $(\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$; se $d(z, \complement\Omega) = \infty$ é trivial que $(e^{i\theta_1}z_1, ..., e^{i\theta_n}z_n) \in \Omega_\varepsilon$, para quaisquer $(\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Seja Ω'_ε a componente de Ω_ε que contem 0, logo $\Omega'_\varepsilon \subset \Omega'_\alpha$ se $\alpha \leq \varepsilon$. Desde que Ω'_ε cresce quando ε decresce à 0 e desde que todo $z \in \Omega$ pode ser enlaçado a origem mediante um caminho poligonal contido em Ω, pois Ω é um aberto conexo, temos que $\Omega = \cup_{\varepsilon>0}\Omega'_\varepsilon$. Para $\varepsilon > 0$ definimos a função $g : \Omega'_\varepsilon \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 T_\varepsilon} f(t_1z_1, ..., t_nz_n)(t_1 - 1)^{-1}...(t_n - 1)^{-1}dt_1...dt_n$$

onde T_ε é o polidisco $\{t \in \mathbb{C}^n \ : \ |t_j| \leq 1 + \varepsilon, j = 1, ..., n\}$. Veja que se $z \in \Omega'_\varepsilon$, então o ponto $(1 + \varepsilon)z \in \Omega$ pois

$$|z - (1 + \varepsilon)z| = \varepsilon|z| < d(z, \complement\Omega),$$

e desde que Ω é um domínio de Reinhardt, temos que $(e^{i\theta_1}(1 + \varepsilon)z_1, ..., e^{i\theta_n}(1 + \varepsilon)z_n)$ também está em Ω para $(\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, em particular $(t_1z_1, ...t_nz_n) \in \Omega$ para $(t_1, ..., t_n) \in T_\varepsilon$. Portanto a integral e assim g está bem definida. Derivando sobre o signal da integral, do Teorema 3.2.1 tem-se que g é analítica em Ω'_ε. Agora se $|z|$ é tão pequeno que $(t_1z_1, ..., t_nz_n) \in \Omega$ para $t \in T_\varepsilon$ (por exemplo, z pertence a um polidisco de centro na origem, contido em Ω'_ε), obtemos do Teorema 3.2.1 que $f(z) = g(z)$, e desde que Ω'_ε é conexo segue do principio da continuação analítica que $f = g$ em Ω'_ε.

Desde que a série $\sum_\alpha (t_1)^{-\alpha_1-1}...(t_n)^{-\alpha_n-1}$ converge normalmente em $\partial_0 T_\varepsilon$ e

$$\sum_\alpha (t_1)^{-\alpha_1-1}...(t_n)^{-\alpha_n-1} = \frac{1}{t_1-1}...\frac{1}{t_n-1},$$

temos que

$$f(z) = \sum_\alpha (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 T_\varepsilon} f(t_1 z_1, ..., t_n z_n) t_1^{-\alpha_1-1}...t_n^{-\alpha_n-1} dt_1...dt_n \tag{62}$$

para todo $z \in \Omega'_\varepsilon$. Veja agora, que se K é um conjunto compacto contido em Ω'_ε, então o conjunto $K' = \{(t_1 z_1, ..., t_n z_n) \; : \; (t_1, ...t_n) \in \partial_0 T_\varepsilon, \quad (z_1, ..., z_n) \in K\}$ é compacto contido em Ω. Logo

$$\sup_K \left| (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 T_\varepsilon} f(t_1 z_1, ..., t_n z_n) t_1^{-\alpha_1-1}...t_n^{-\alpha_n-1} dt_1...dt_n \right| \leq \frac{\sup_{K'} |f|}{(1+\varepsilon)^{|\alpha|+n}},$$

e assim a série anterior converge normalmente em Ω'_ε.

Desde que cada termo na suma em (62), chamemos

$$f_\alpha(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 T_\varepsilon} f(t_1 z_1, ..., t_n z_n) t_1^{-\alpha_1-1}...t_n^{-\alpha_n-1} dt_1...dt_n$$

é igual a $z^\alpha \partial^\alpha f(0)/\alpha!$ em algum polidisco contendo o origem, temos que esta igualdade é satisfeita em todo o conjunto conexo Ω'_ε pois f_α também é analítico em Ω'_ε (por derivação sobre o sinal do integral e Teorema 3.2.1).

A unicidade da série segue de fazer a diferenciação termo a termo, o qual pode se fazer do fato de ter convergência normal em Ω, e do que $a_\alpha = \partial^\alpha f(0)/\alpha!$. □

Definição 3.4.6. *Um domínio de Reinhardt Ω é chamado logaritmicamente convexo se ele tem as propriedades do Teorema 3.4.3, isto é, Ω debe satisfazer :*

(i) $\Omega^* = \{(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n \; : \; (e^{\xi_1}, ..., e^{\xi_n}) \in \Omega\}$ *é convexo.*

(ii) Se $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $|\eta_j| \leq |\zeta_j|$ *com* $j = 1, ..., n$ *para algum* $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \Omega^*$ *então* $\eta \in \Omega^*$.

(iii) $(z_1, ..., z_n) \in \Omega$ *se, e somente se,* $|z_j| \leq e^{\xi_j}$ *com* $j = 1, ..., n$ *para algum* $(\xi_1, .., \xi_n) \in \Omega^*$.

Equivalentemente, pelo visto imediatamente depois da Definição 3.4.4 um domínio de Reinhardt Ω é logaritmicamente convexo se satisfaz:

(i) $\log ||\Omega||$ é convexo.

(ii) Se $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ e $|\eta_j| \leq |\zeta_j|$ com $j = 1, ..., n$ para algum $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \log ||\Omega||$ então $\eta \in \log ||\Omega||$.

(iii) $z = (z_1, ..., z_n) \in \Omega$ se, e somente se, $\log |z_j| \leq \xi_j$ com $j = 1, ..., n$ para algum $(\xi_1, .., \xi_n) \in \log ||\Omega||$ (consideramos aqui $\log 0 = -\infty$).

É claro que o interior da interseção de domínios de Reinhardt é um domínio de Reinhardt. Agora se $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de domínios de Reinhardt logaritmicamente convexos, e Ω é o interior de $\cap_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$, é possível mostrar que também Ω é um domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo. Logo para todo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pode se encontrar um menor Domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo que contem ele (basta considerar a interseção de todos aqueles que o contem, e trivialmente $\mathbb{C}^n$ é um deles).

Teorema 3.4.7. *Seja Ω um domínio de Reinhardt conexo contendo a origem, e seja $\tilde{\Omega}$ o menor domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo que contem Ω. Então toda função em $A(\Omega)$ pode ser estendida a uma função em $A(\tilde{\Omega})$.*

Prova. Se $f \in A(\Omega)$, então do Teorema 3.4.5 temos que

$$f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$$

para todo $z \in \Omega$. Seja D o domínio de convergência desta série. Dado que D é um Domínio de Reinhardt logaritmicamente convexo e contem Ω temos que se $\tilde{\Omega}$ é o menor domínio de Reinhardt que contem Ω então $D \supset \tilde{\Omega}$. Considerando $F(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ temos que F é uma função analítica em D e em particular em $\tilde{\Omega}$, e $F = f$ em Ω. □

Na seguinte seção, veremos que o conjunto $\tilde{\Omega}$ neste último teorema é de fato o domínio de convergência de uma série de potencias e que existe uma função analítica em $\tilde{\Omega}$ tal que não pode ser estendida analiticamente além de $\tilde{\Omega}$.

Por exemplo para $\varepsilon < 1$, seja

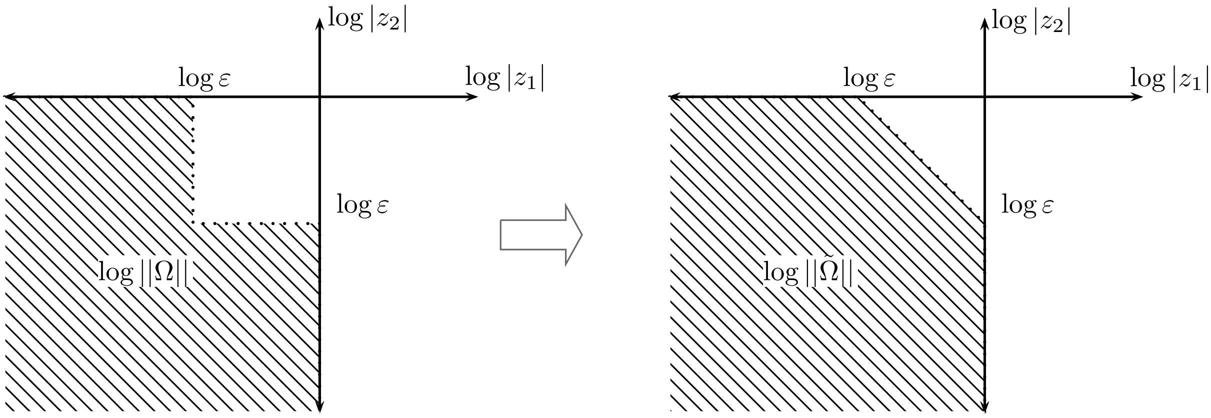
$$\begin{aligned}\Omega &= \{z \in \mathbb{C}^2 \ : \ \max\{|z_1|, |z_2|\} < 1, \ \min\{|z_1|, |z_2|\} < \varepsilon\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1| < \varepsilon, \ |z_2| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1| < 1, \ |z_2| < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Veja que Ω é um domínio de Reinhardt, então

$$\log ||\Omega|| = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < \log \varepsilon, \ y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, \ y < \log \varepsilon\}.$$

Assim, $\log ||\tilde{\Omega}|| = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, \ y < 0, \ x + y < \log \varepsilon\}$. Logo

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ \log |z_1| < 0, \ \log |z_2| < 0, \ \log |z_1| + \log |z_2| < \log \varepsilon\} \\ &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 1, \ |z_1 z_2| < \varepsilon\} \\ &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ \max\{|z_1|, \ |z_2|, \ |z_1 z_2|/\varepsilon\} < 1\}\end{aligned}$$



3.5 Domínio de holomorfia

No Teorema de extensão de Hartogs e o Teorema 3.4.7 observamos alguns conjuntos abertos tais que todo $u \in A(\Omega)$ pode ser estendido analiticamente a uma função analítica definida num conjunto que contem Ω. Agora estudamos aqueles conjuntos onde onde este fenómeno não acontece.

Definição 3.5.1. *Um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é chamado de domínio de holomorfia se não existem conjuntos abertos Ω_1 e Ω_2 em $\mathbb{C}^n$ tais que*

(a) $\phi \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$

(b) Ω_2 *é um conjunto conexo não contido em* Ω*.*

(c) Para todo $u \in A(\Omega)$ existe uma função $u_2 \in A(\Omega_2)$ (necessariamente único) tal que $u_2 = u$ em (Ω_1).

Em termos gerais, a definição menciona que não existe parte da fronteira de Ω pela qual todo elemento em $A(\Omega)$ poderia ser continuada analiticamente. Por exemplo, do Teorema de extensão de Hartogs podemos afirmar que se $B(0,R)$ denota uma bola de centro na origem e raio $R > 0$ contida em $\mathbb{C}^n$, então o conjunto $B(0,R) \setminus \overline{B(0,R/2)}$ não é um domínio de holomorfia quando $n > 1$. Por outro lado, do Corolário 2.4.3 podemos afirmar que todo conjunto aberto contido em $\mathbb{C}$ é um domínio de holomorfia. Desde que a existência de uma função definida em Ω de tal forma que não admita uma extensão analítica por alguma parte da fronteira de Ω garante a propriedade de Ω ser um domínio de holomorfia, começamos por estudar condições que fazem possível construir esta função. Sendo este o sentido, é o Corolário 2.4.3 e o Teorema de Weierstrass os quais permitem dar nossos primeiros passos na construção de funções com tal propriedade. Começamos então definindo a envoltória analitica (ou holomorfa) de conjuntos compactos contidos em abertos de $\mathbb{C}$.

Definição 3.5.2. *Se K é um subconjunto compacto de Ω, definimos a envoltória analitica de K a qual denotamos por $\widehat{K}_\Omega$, como sendo*

$$\widehat{K}_\Omega = \left\{ z \ : \ z \in \Omega, |f(z)| \leq \sup_K |f| \ \text{ se } f \in A(\Omega) \right\}.$$

Veja que:

- $K \subset \widehat{K}_\Omega$

- Seja K_{convex} a envoltória convexa geométrica de K. Afirmo que $K_{convex} \supset \widehat{K}_\Omega$. De fato, seja $z_0 \notin K_{convex}$, então existe uma aplicação afim $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(z_0) > \varphi(z)\ \forall z \in K$.

  Logo $\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(z_i - \xi_i) + \sum_{i=1}^n \overline{\lambda}_i(\overline{z}_i - \overline{\xi_i})$ para alguns $\xi, \lambda \in \mathbb{C}^n$ isto é $\varphi(z) = \langle z - \xi, \lambda\rangle + \overline{\langle z - \xi, \lambda\rangle}$.

  Então $\varphi(z) = 2\mathrm{Re}(g(z))$, com $g(z) = \langle z - \xi, \lambda\rangle$, veja que g é analítico (por ser linear).

  Assim e^g também é analítico em Ω mas
$$\left|e^{g(z_0)}\right| = e^{\mathrm{Re}(g(z_0))} = e^{\frac{\varphi(z_0)}{2}} > e^{\frac{\varphi(z)}{2}} = e^{\mathrm{Re}(g(z))} = \left|e^{g(z)}\right|.$$

  Isto é $\forall z \in K$, logo $z_0 \notin \widehat{K}_\Omega$.

  Com isto $\complement K_{convex} \subset \complement \widehat{K}_\Omega$ ou equivalentemente $\widehat{K}_\Omega \subset K_{convex}$.

- K é limitado $\Leftrightarrow f_1 = \pi_1, ..., f_n = \pi_n$ são limitadas em $K \Leftrightarrow f_1 = \pi_1, ..., f_n = \pi_n$ são limitadas em $\widehat{K}_\Omega \Leftrightarrow \widehat{K}_\Omega$ é limitado.

- $\widehat{K}_\Omega$ é fechado em Ω pois
$$\widehat{K}_\Omega = \bigcap_{f \in A(\Omega)} \left\{z \ : \ |f(z)| \le \sup_K |f|\right\}$$

- Diferentemente ao caso do plano, onde toda envoltória analítica de um conjunto compacto é compacto, em geral $\widehat{K}_\Omega$ não precisa ser um subconjunto compacto contido em Ω. Por exemplo se $n > 1$ e consideramos o conjunto aberto $\Omega = B(0,R) \setminus \overline{B(0,R/2)} \subset \mathbb{C}^n$ e $K = \partial B(0, 2R/3)$, observamos que se f é uma função analitica qualquer neste conjunto Ω então do Teorema de extensão de Hartogs f pode ser estendida analiticamente ao conjunto $\Omega' = B(0,R)$ e assim pelo Principio do Máximo obtemos que $f(z) \le \sup_K |f(z)|$ para todo $z \in \overline{B(0,2R/3)}$ assim $\widehat{K}_{\Omega'} = \overline{B(0,2R/3)}$ mas $\widehat{K}_\Omega = \overline{B(0,2R/3)} \setminus \overline{B(0,R/2)}$ que não é um conjunto compacto contido em Ω.

Seja D um polidisco aberto com centro na origem, definimos
$$\Delta_\Omega^D(z) = \sup\{r \ : \ \{z\} + rD \subset \Omega\}$$

Lema 3.5.3. *Seja $f \in A(\Omega)$ e assuma que $|f(z)| \le \Delta_\Omega^D(z)$, para todo $z \in K$, e seja $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$. Se $u \in A(\Omega)$ então a série de potências de u centrada em ζ,*
$$\sum_\alpha \frac{\partial^\alpha u(\zeta)}{\alpha!}(z - \zeta)^\alpha$$
converge quando z pertence ao polidisco $\{\zeta\} + |f(\zeta)|\, D$.

Prova. Seja $D = \{z \ : \ |z_j| < r_j, j = 1, ..., n\}$, e $0 < t < 1$.

Se $A = \{z \ : \ |z_j - w_j| \leq tr_j \, |f(w)| \, , j = 1, ..., n$ para algum $w \in K\}$ então:

- $A \subset \Omega$, de fato seja $z \in A$ então $|z_j - w_j| \leq tr \, |f(w)| \leq tr_j \Delta_\Omega^D(w)$
  $\Rightarrow z_j \in B(w_j, tr_j \Delta_\Omega^D(w)) = \{w_j\} + t\Delta_\Omega^D(w) \, \{\zeta_j \ : \ |\zeta_j| < r_j\} \, , \ \forall j$
  $\Rightarrow z \in \{w\} + t\Delta_\Omega^D(w)D \subset \Omega$ sendo $0 < t < 1$
  $\Rightarrow z \in \Omega$

- A é limitado. Em efeito, seja $z \in A$, então

$$\begin{aligned} |z_j| &\leq |z_j - w_j| + |w_j| \leq tr_j \, |f(w)| + |w_j| & (63) \\ &\leq tr_j \sup_K |f| + R & (64) \end{aligned}$$

  para algum $w \in K$ e com $R > 0$ tal que $K \subset B(0, R)$. Então A é limitado.

- A é fechado, em efeito pois

$$A = \left\{ z \ : \ \sup_{w \in K} \inf_{1 \leq j \leq n} (r_j t |f(w)| - |z_j - w_j|) \geq 0 \right\}$$

  .

Portanto A é compacto, então $|u(z)| \leq M$, $\forall z \in A$ e algum $M > 0$.

Por outro lado, se $w \in K$, então da desigualdade de Cauchy no polidisco $D(w_1, tr_1 \, |f(w)|) \times ... \times D(w_n, tr_n \, |f(w)|)$ tem-se que

$$|\partial^\alpha u(w)| \leq \frac{M\alpha!}{(tr_1 \, |f(w)|)^{\alpha_1} ... (tr_n \, |f(w)|)^{\alpha_n}} = \frac{M\alpha!}{t^{|\alpha|} r^\alpha \, |f(w)|^{|\alpha|}}$$

e então

$$|\partial^\alpha u(w)| \, |f(w)|^{|\alpha|} \, t^{|\alpha|} r^\alpha \leq M\alpha!$$

para todo $0 < t < 1$. Logo

$$|\partial^\alpha u(w)| \, |f(w)|^{|\alpha|} \, r^\alpha \leq M\alpha!. \tag{65}$$

Dado que $(\partial^\alpha u) f^{|\alpha|}$, é analítica, então a desigualdade também é satisfeita para todo $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$.

Logo se $z \in \{\zeta\} + |f(\zeta)| \, D$, com $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$, então

$$\left| \frac{(z - \zeta)^\alpha \partial^\alpha u(\zeta)}{\alpha!} \right| \leq \frac{r^\alpha \, |f(\zeta)|^{|\alpha|} \, |\partial^\alpha u(\zeta)|}{\alpha!} \leq M,$$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$. Logo a série
$$\sum_\alpha \frac{\partial^\alpha u(\zeta)(z-\zeta)^\alpha}{\alpha!}$$
converge $\forall\ z \in \{\zeta\} + |f(\zeta)|\, D$ $\square$

Observemos que do Lema 3.5.3, se Ω é domínio de holomorfia, então o conjunto $\{\zeta\} + |f(\zeta)|D$ teria que estar contido em Ω para todo $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$. De fato, se $(\{\zeta\}+|f(\zeta)|D)\backslash\Omega \neq \phi$, então podemos considerar como o conjunto Ω_2 na definição de domínio de holomorfia o conjunto conexo $\{\zeta\} + |f(\zeta)|D$ e como o conjunto $\Omega_1 = (\{\zeta\} + |f(\zeta)|D) \cap \Omega$. Então se $u \in A(\Omega)$ a série $\sum_\alpha (z-\zeta)^\alpha \partial^\alpha u/\alpha!$ converge a uma função analítica U no polidisco Ω_2, e se z encontrasse perto de ζ (por exemplo numa bola com raio pequeno tal que esteja contida em Ω) então a série é igual a u, logo $u = U$ em Ω_1 pois Ω_1 é conexo. Contradição pois Ω é um domínio de holomorfia.

Seja $\delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ uma função continua, tal que $\delta > 0$ exceto não na origem e
$$\delta(tz) = |t|\, \delta(z),\ t \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}^n.$$
Definimos
$$\delta(z, \complement\Omega) = \inf_{w \in \complement\Omega} \delta(z-w),$$
e chamamos de função distância δ do ponto z ao complementar de Ω. Afirmo que a função $\delta(z, \complement\Omega)$ é uma função continua de z. De fato, suponhamos $\mathbb{C}^n \setminus \Omega \neq \phi$. Se ρ é tal que $\inf_{|z|=1} \delta(z) \geq \rho > 0$ então
$$\delta(z) = |z|\delta\left(\frac{z}{|z|}\right) \geq |z|\rho, \quad \text{para todo } |z| \geq 1 \tag{66}$$
Isto é $\delta(z) \to +\infty$ quando $|z| \to +\infty$. Podemos escolher para $z \in \Omega$, $R > 0$ suficientemente grande tal que $\overline{D(z,R)} \cap \partial\Omega \neq \phi$, e assim de (66)
$$\delta(z, \complement\Omega) = \delta(z, \overline{D(z,R)} \cap \complement\Omega) = \inf_{w \in \overline{D(z,R)} \cap \complement\Omega} \delta(z-w).$$

Desde que $\overline{D(z,R)} \cap \complement\Omega$ é compacto, segue que $\delta(z, \complement\Omega)$ é contínua em z. No caso $\Omega = \mathbb{C}^n$ é obvio.

Teorema 3.5.4. *Se Ω é um domínio de holomorfia, e $f \in A(\Omega)$ tal que*
$$|f(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega)$$
para todo $z \in K$, onde K é um conjunto compacto contido em Ω. Segue que
$$|f(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega) \tag{67}$$
para toda $z \in \widehat{K}_\Omega$. Em particular se f é uma constante temos que
$$\inf_{z \in K,\ w \in \complement\Omega} \delta(z-w) = \inf_{z \in \widehat{K}_\Omega,\ w \in \complement\Omega} \delta(z-w).$$

Prova. Denotemos $B_{r,z} = \{z + aw \ : \ |a| < r, \delta(w) \leq 1\} = \{v \ : \ \delta(v - z) < r\}$ para $r > 0$ e $z \in \mathbb{C}^n$. Logo

$$\begin{aligned} \delta(z, \complement\Omega) &= \sup\{r \in \mathbb{R} \ : \ B_{r,z} \subset \Omega\} && (68) \\ &= \inf_{\delta(w)<1} \delta_w(z, \complement\Omega) && (69) \end{aligned}$$

onde $\delta_w(z, \complement\Omega) = \sup\{r \in \mathbb{R} \ : \ z + aw \in \Omega \text{ se } |a| < r\}$.

Suponhamos inicialmente que, se $D = \{w \ : \ \delta(w) \leq 1\}$ é um polidisco. Afirmo que $\delta(z, \complement\Omega) \leq \Delta_\Omega^D(z) = \sup\{r \ : \ \{z\} + rD \subset \Omega\}$. De fato, de (68) se $B_{r,z} \subset \Omega$ então em particular o conjunto $\{z + tw \ : \ r > t > 0, \ t \in \mathbb{R}, \ w \in D\} = \{z\} + rD$ esta contido em Ω; logo $r \leq \Delta_\Omega^D(z)$, e isto para todo $r > 0$ tal que $B_{r,z} \subset \Omega$. Logo $\delta(z, \complement\Omega) \leq \Delta_\Omega^D(z)$.

Da hipótese temos que

$$|f(\zeta)| \leq \Delta_\Omega^D(\zeta)$$

para todo $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$. Do Lema 3.5.3, toda expansão em série de potências de elementos de $A(\Omega)$ centradas em $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$ converge em $\{\zeta\} + |f(\zeta)|D$. E assim converge em $\{\zeta\} + |af(\zeta)|D$ para todo $a \in \{t \in \mathbb{C} \ : \ |t| \leq 1\}$. Dado que Ω é domínio de holomorfia todos os conjuntos deste tipo devem estar contidas em Ω.

Logo, da igualdade (68) temos que $|f(\zeta)| = |af(\zeta)| \leq \delta(\zeta, \complement\Omega)$ para todo $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$.

Em geral, da igualdade (69), é suficiente mostrar a desigualdade (67) para δ_w, para $w \in \{\xi \in \mathbb{C}^n \ : \ \delta(\xi) \leq 1\}$.

Mas veja que se

$$\delta_{(1,0,\dots,0)}(R(z), \complement R(\Omega)) \geq |f(z)| \qquad (70)$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$ e quaisquer rotação seguida de uma dilatação R com $R^{-1}(1, 0, ..., 0) \in \{\xi \ : \ \delta(\xi) \leq 1\}$, então teria-se que: Se $w \in \{\xi \ : \ \delta(\xi) \leq 1\}$ e R_{w_0} é uma rotação seguida de uma dilatação tal que $R_{w_0}(w_0) = (1, 0, ..., 0)$ então

$$\begin{aligned} \delta_{w_0}(z, \complement\Omega) &= \sup\{r \ : \ z + aw_0 \in \Omega, |a| < r\} \\ &= \sup\{r \ : \ R_{w_0}(z) + aR(w_0) \in R(\Omega), |a| < r\} \\ &= \sup\{r \ : \ R_{w_0}(z) + a(1, 0, ..., 0) \in R(\Omega), |a| < r\} \\ &= \delta_{(1,0,\dots,0)}(R(z), R(\Omega)) \geq |f(z)| \end{aligned}$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$. Com isto, é suficiente provar a desigualdade (70).

Seja R uma rotação seguida de uma dilatação R tal que $R^{-1}(1, 0, ..., 0) \in \{w \ : \ \delta(w) \leq 1\}$. Pela hipótese e pela desigualdade (69) temos que

$$|f(z)| \leq \delta_{R^{-1}(1,0,\dots,0)}(z, \complement\Omega)$$

para todo $z \in K$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \delta_{R^{-1}(1,0,\dots,0)}(z, \complement\Omega) &= \sup\{r \ : \ z + aR^{-1}(1, 0, ..., 0) \in \Omega, |a| < r\} \\ &= \sup\{r \ : \ R(z) + a(1, 0, ..., 0) \in R(\Omega), |a| < r\} \\ &= \delta_{(1,0,\dots,0)}(R(z), \complement R(\Omega)). \end{aligned}$$

Então $|f(z)| \leq \delta_{(1,0,...,0)}(R(z), \complement R(\Omega))$ para todo $z \in K$.

Consideremos os conjuntos $D^s = \{z \ : \ |z_1| \leq 1, |z_j| \leq (1/s), j = 2, ..., n\}$ para $s \in \mathbb{N}$, e veja que $\Delta_{R(\Omega)}^{D^s}(R(z))$ acresce quando s acresce, $\Delta_{R(\Omega)}^{D^s}(R(z)) \leq \delta_{(1,0,...,0)}(R(z), \complement R(\Omega))$ e $\Delta_{R(\Omega)}^{D^s}(R(z))$ converge para $\delta_{(1,0,...,0)}(R(z), \complement R(\Omega))$ para todo $z \in \Omega$. Logo $\Delta_{\Omega}^{D^s}(z) \nearrow \delta_{(1,0,...,0)}(z, \complement\Omega)$ quando $s \nearrow +\infty$. Com isto para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e s suficientemente grande tem se por o teorema de Dini que

$$|f(z)| \leq (1+\varepsilon)\Delta_{R(\Omega)}^{D_s}(R(z))$$

para todo $z \in K$.

Dado que

$$\begin{aligned}
\Delta_{R(\Omega)}^{D_s}(R(z)) &= \sup\{r \ : \ \{R(z)\} + rD_s \subset R(\Omega)\} \\
&= \sup\{r \ : \ \{z\} + rR^{-1}D_s \subset \Omega\} \\
&= \Delta_{\Omega}^{R^{-1}(D_s)}(z)
\end{aligned}$$

então

$$|f(z)| \leq (1+\varepsilon)\Delta_{\Omega}^{R^{-1}(D_s)}(z)$$

para todo $z \in K$. E desde que $R^{-1}(D_s)$ é ainda um polidisco, temos do Lema 3.5.3 que

$$|f(z)| \leq (1+\varepsilon)\Delta_{\Omega}^{R^{-1}(D_s)}(z)$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$, ou também

$$|f(z)| \leq (1+\varepsilon)\Delta_{R(\Omega)}^{D_s}(R(z)).$$

Logo

$$|f(z)| \leq (1+\varepsilon)\delta_{(1,0,...,0)}(R(z), \complement R(\Omega))$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$. Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ obtemos a desigualdade desejada (70).

Por ultimo, veja que se a função constante igual à $\inf_{\zeta \in K} \delta(\zeta, \complement\Omega)$ satisfaz a desigualdade na hipótese pois

$$\inf_{\zeta \in K} \delta(\zeta, \complement\Omega) \leq \delta(z, \complement\Omega)$$

para todo $z \in K$. Logo do que já foi mostrado neste teorema, temos que

$$\inf_{\zeta \in K} \delta(\zeta, \complement\Omega) \leq \delta(z, \complement\Omega)$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$. Logo

$$\inf_{\zeta \in K} \delta(\zeta, \complement\Omega) \leq \inf_{\zeta \in \widehat{K}_\Omega} \delta(z, \complement\Omega).$$

Portanto esta ultima desigualdade implica

$$\inf_{\zeta \in K} \delta(\zeta, \complement\Omega) = \inf_{\zeta \in \widehat{K}_\Omega} \delta(z, \complement\Omega).$$

$\square$

Agora daremos uma caracterização dos domínios de holomorfia, com o seguinte teorema.

Teorema 3.5.5. *Se Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Ω *é um domínio de holomorfia.*

(ii) *Se* $K \subset\subset \Omega$, *segue que* $\widehat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$, *e com as notações do Teorema 3.5.4 temos que*

$$\sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)} = \sup_{z \in \widehat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)}$$

para todo $f \in A(\Omega)$.

(iii) *Se* $K \subset\subset \Omega$ *então* $\widehat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$.

(iv) *Existe uma função* $f \in A(\Omega)$ *que não pode ser continuada analiticamente alem de* Ω. *Isto é não existem* Ω_1, Ω_2 *como na definição de domínio de holomorfia e* $f_2 \in A(\Omega_2)$ *tal que* $f = f_2$ *em* Ω_1.

Prova. A implicação $(iv) \Rightarrow (i)$ segue da definição de domínio de holomorfia. A implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$ é óbvia.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Considerando a função distância δ como sendo a distância euclidiana, do Teorema 3.5.4 obtemos que $\inf_{z \in K} \delta(z, \complement\Omega) = \inf_{z \in \widehat{K}_\Omega} \delta(z, \complement\Omega)$, mas desde que se K é um conjunto compacto contido em Ω temos que $\inf_{z \in \widehat{K}_\Omega} \delta(z, \complement\Omega) > 0$, e assim $\widehat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$.

Se δ é qualquer função distância, desde que $\widehat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$ então $\delta(z, \complement\Omega) > 0$ para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$ (pois se $\delta(z, \complement\Omega) = 0$ para algum z no compacto $\widehat{K}_\Omega$, da continuidade de δ então existiria $z_0 \in \complement\Omega$ tal que $\delta(z - z_0) = 0$, logo $z = z_0 \in \complement\Omega$, contradição). Seja $C = \sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)}$. Se $C = +\infty$, obviamente a igualdade é satisfeita pois

$$\sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)} \leq \sup_{z \in \widehat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)}.$$

Se $C < +\infty$, então a função $F = f/C$ é analítica, e desde que

$$|F(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega)$$

para todo $z \in K$, temos do Teorema 3.5.4 que

$$|F(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega)$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$. Logo

$$\frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)} \leq C = \sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)}$$

para todo $z \in \widehat{K}_\Omega$, isto é

$$\sup_{z\in\widehat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)} \leq \sup_{z\in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)}.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Seja M um conjunto denso numerável de Ω, $D = \{z \ : \ |z_j| < 1, j = 1, ..., n\}$, e denotemos por D_ζ para cada $\zeta \in \Omega$ o maior polidisco da forma $\{\zeta\} + rD$ contido em Ω. Seja $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos em M, contendo todo ponto de M infinitas vezes.

Afirmação A: É suficiente construir uma função f tal que não pode ser continuada analiticamente a uma vizinhança de $\overline{D_\zeta}$, para quaisquer $\zeta \in M$.

De fato, se $\zeta \in M$ então $\overline{D_\zeta} \cap \partial\Omega \neq \phi$ (se $\partial\Omega = \phi$ a afirmação (iv) segue trivialmente). Se $\zeta \in \partial\Omega$, para todo $r > 0$ existe da densidade de M em Ω um ponto $\xi \in M$ tal que $\overline{D_\xi}$ está contido na bola $B(\zeta, r)$ de centro em ζ e raio r (com a norma do máximo). Em efeito, da densidade de M existe $\xi \in M$ tal que $\xi \in B(\zeta, r/2)$; se $r_\xi = \sup\{s \ : \ B(\xi, s) \subset \Omega\}$, afirmo que $r_\xi \leq r/2$ pois caso contrário, dado que $|\xi - \zeta| < r/2$ então $\zeta \in B(\xi, r_\xi) \subset \Omega$. Mas isto é uma contradição, pois $\zeta \in \partial\Omega$; logo $\overline{D_\xi} = \overline{B(\xi, r_\xi)} \subset B(\zeta, r)$. Suponha agora que (iv) é falso, então para a função f da afirmação A existem Ω_1, Ω_2 e $f_2 \in A(\Omega_2)$ como na afirmação (iv) tal que $f_2 = f$ em Ω_1; portanto se O é uma componente conexa de $\Omega_2 \cap \Omega$ que contenha um ponto de Ω_1; então $f_2 = f$ em O. Se $\zeta \in \partial\Omega \cap \partial O$, existem $r > 0$ tal que $B(\zeta, r) \subset \Omega_2$ e do anterior acima existe $\xi \in M$ tal que $\overline{D_\xi} \subset B(\zeta, r)$. Logo f_2 estende f além de $\overline{D_\xi} \subset \Omega_2$, contradição com a afirmação A.

Agora construímos a função f da afirmação A. Seja $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em M, tais que contem todo ponto de M infinitas vezes, também consideremos uma sequência de subconjuntos compactos $K_1 \subset K_2 \subset ...$ tal que quaisquer subconjunto compacto de Ω esteja contido em algum deles. Desde que $\widehat{K}_j = \widehat{(K_j)}_\Omega$ é compacto em Ω podemos encontrar $z_j \in D_{\zeta_j} \setminus \widehat{K}_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Da definição de $\widehat{K}_j$ temos que existe $f_j \in A(\Omega)$ tal que $f_j(z_j) = 1$ e $\sup_{K_j} |f_j| < 1$. Podemos assumir que $\sup_{K_j} |f_j| < \frac{1}{2^j}$. Podemos também redefinir f_j de tal forma que não seja identicamente 1 em toda componente de Ω. Dado que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j \sup_{K_j} |-f_j| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^j} < +\infty$$

temos que o produto

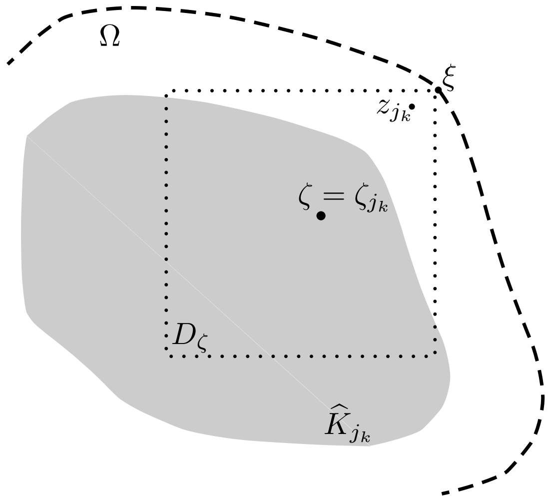
$$\prod_{j=1}^{+\infty} (1 - f_j)^j$$

converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, e definindo

$$f = \lim_{m\to+\infty} \prod_{j=1}^{m} (1 - f_j)^j$$

temos que f é analítica em Ω. Veja que f não é identicamente nula e para todo $l \in \mathbb{N}$, z_l é um zero de f de ordem ao menos l; isto é, as derivadas $\partial^\alpha f(z_l) = 0$ para todo $|\alpha| < l$.

Se $\zeta \in M$, seja $I = \{j \in \mathbb{N} \ : \ \zeta_j = \zeta$ para algum $\zeta_j \in \{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{N}}\}$. Pela construção da sequência $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ temos que $z_j \in D_\zeta$ para todo $j \in I$, e desde que $\overline{D_\zeta}$ é compacto existe uma subsequência $\{z_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{z_j\}_{j\in I}$ tal que converge em $\overline{D_\zeta}$ e mais especificamente a um ponto ξ em $\partial D_\zeta \cap \partial\Omega$.



Se existir uma função F analítica numa vizinhança de $\overline{D_\zeta}$ que estenda f, tería-se que

$$\partial^\alpha F(z_{j_k}) = \partial^\alpha f(z_{j_k}) = 0$$

para todo j_k e todo $|\alpha| < j_k$. Então $\partial^\alpha F(\xi) = 0$ para todo α. Logo $F \equiv 0$ numa vizinhança de ξ, e assim ser identicamente zero em D_ζ, logo $f \equiv 0$ em D_ζ, que é uma contradição. Portanto a função f não pode ser estendida analiticamente a uma vizinhança de D_ζ, para todo $\zeta \in M$. Isto finaliza a prova. □

Corolário 3.5.6. *Se Ω é convexo no sentido geométrico então Ω é um domínio de holomorfia.*

Prova. Seja $K \subset \Omega$. A função $h : \Omega \times \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ dada por $h(z,w,t) = zt + (1-t)w$ é continua, além disso, desde que Ω é convexo a imagem da função h esta contida em Ω. Como K é compacto então $h(K \times K \times [0,1]) = K_{convex}$ é compacto. Desde que $\widehat{K}_\Omega \subset K_{convex}$ e assim $\overline{\widehat{K}_\Omega} \subset K_{convex}$, obtemos que $d(\overline{\widehat{K}_\Omega}, \complement\Omega) \geq d(K_{convex}, \complement\Omega) > 0$ portanto $\widehat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$. □

Corolário 3.5.7. *Se Ω_α é um domínio de holomorfia para todo α num conjunto de índices A, então o interior Ω de $\cap_A \Omega_\alpha$ é um domínio de holomorfia.*

Prova. Seja K um conjunto compacto contido em Ω. Então $\widehat{K}_\Omega \subset \widehat{K}_{\Omega_\alpha}$ para todo α, do Teorema 3.5.4 e desde que $\complement\Omega_\alpha \subset \complement\Omega$, tem-se que

$$d(\widehat{K}_\Omega, \complement\Omega_\alpha) \geq d(\widehat{K}_{\Omega_\alpha}, \complement\Omega_\alpha) = d(K, \complement\Omega_\alpha) \geq d(K, \complement\Omega) > 0.$$

Logo da mesma forma $d(\overline{\widehat{K}_\Omega}, \complement\Omega_\alpha) > 0$. Agora se $\zeta \in \overline{\widehat{K}_\Omega}$, então $d(\zeta, \complement\Omega_\alpha) \geq d(K, \complement\Omega)$ para todo α. Portanto a bola $B(\zeta, d(K, \complement\Omega)) \subset \Omega_\alpha$ para todo α, e isto implica que $B(\zeta, d(K, \complement\Omega)) \subset \cap_{\alpha\in A}\Omega_\alpha$, logo ζ é um ponto interior de $\cap_{\alpha\in A}\Omega_\alpha$, isto é $\zeta \in \Omega$. Logo $\overline{\widehat{K}_\Omega} \subset \Omega$. □

Corolário 3.5.8. *Seja Ω um domínio de Reinhardt conexo contendo a origem, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Ω é um domínio de convergência de uma série de potências.*

(ii) *Ω é domínio de holomorfia*

(iii) *$\Omega^* = \{\xi \ : \ (e^{\xi_1}, ..., e^{\xi_n}) \in \Omega\}$ é aberto convexo em $\mathbb{R}^n$, e se $\xi \in \Omega^*$ então $\eta \in \Omega^*$ se $\eta_j \leq \xi_j$ para $j = 1, ..., n$. Alem disso, $z \in \Omega$ se e somente se $|z_j| \leq e^{\xi_j}$ para todo $j = 1, ..., n$ e algum $\xi \in \Omega^*$*

Prova. A implicação $(i) \Rightarrow (iii)$ segue do Teorema 3.4.3. $(ii) \Rightarrow (i)$. Do Teorema 3.4.5, para todo $f \in A(\Omega)$ existe uma série de potências centrada na origem que converge normalmente em Ω à função f. Então Ω está contida em todo domínio de convergência das séries associadas as funções em $A(\Omega)$. Dado que Ω é domínio de holomorfia, então existe $g \in A(\Omega)$ tal que não pode ser estendida além de Ω. Seja D o domínio de convergência da série de potências centrada na origem associada à função g. Do anterior $\Omega \subset D$. Afirmo que $D \setminus \Omega = \phi$ (isto é $D \subset \Omega$), pois caso contrário, se consideramos $\Omega_2 = D$ e $\Omega_1 = \Omega$ e a função $f = g$, como na definição de domínio de holomorfia teríamos uma contradição. Logo $D = \Omega$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Sejam K um conjunto compacto contido em Ω, e P um conjunto finito de Ω tal que

$$K \subset \cup_{\zeta\in P}\{z \ : \ |z_j| \leq |\zeta_j|, \quad j = 1, ..., n\}$$

e tal que nenhum $|\zeta_j|$ é zero se $\zeta \in P$.

Seja $z \in \overline{\widehat{K}_\Omega}$ e considere (só por simplificar a notação) que $z_1, z_2, ..., z_j \neq 0$ e $z_{j+1} = ... = z_n = 0$. Então temos para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_j)$ e da definição de $\widehat{K}_\Omega$ que

$$0 < |z_1^{\alpha_1}...z_j^{\alpha_j}| \leq \sup_{\zeta\in K}|\zeta_1^{\alpha_1}...\zeta_j^{\alpha_j}| \leq \sup_{\zeta\in P}|\zeta_1^{\alpha_1}...\zeta_j^{\alpha_j}|.$$

Sejam $\lambda_t = \alpha_t/(\sum_k \alpha_k)$ para $t = 1, ..., j$. Logo

$$\sum_{t=1}^{j}\lambda_t \log|z_t| \leq \sup_{\zeta\in P}\left\{\sum_{t=1}^{j}\lambda_t \log|\zeta_t|\right\}.$$

Da arbitrariedade de α, temos que $\lambda_1, ..., \lambda_j$ podem ser quaisquer números racionais tais que a soma deles é 1. Então a última desigualdade também é satisfeita para números reais não negativos λ_t cuja suma é 1.

Desde que P é compacto então

$$\sum_{t=1}^{j} \lambda_t \log |z_t| \leq \sum_{t=1}^{j} \lambda_t \log |\zeta_t|$$

para algum $\zeta \in P$. Com isto temos que $\log |z_t| \leq \log |\zeta_t|$ para todo $t = 1, ..., j$, e assim $|z_t| \leq |\zeta_t|$ para todo $t = 1, ..., j$. Desde que $\zeta \in \Omega$ por hipóteses temos que existe $\xi \in \Omega^*$ tal que $|\zeta_t| \leq e^{\xi_t}$ para $t = 1, ..., n$. Agora, é óbvio que $|z_t| = 0 \leq e^{\xi_t}$ para todo $t = j + 1, ..., n$; logo temos que $|z_t| \leq |\zeta_t| \leq e^{\xi_t}$ para todo $t = 1, ..., n$, portanto $z \in \Omega$. Isto é $\widehat{K}_\Omega \subset \Omega$. $\square$

Assim do Teorema 3.4.7 e deste último obtemos que toda função analítica definida num domínio de Reinhardt conexo contendo a origem, admite uma extensão analítica num domínio de holomorfia que contem o primeiro e que é também um domínio de Reinhardt. Seguimos agora com outro resultado ainda mais geral sobre extensão analítica sobre domínios tubulares chamado o Teorema de Bochner.

Definição 3.5.9. *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aberto é chamado um tubo se existe um conjunto aberto $\omega \subset \mathbb{R}^n$, chamado base de Ω, tal que $\Omega = \{z \ : \ \mathrm{Re}(z) \in \omega\}$. Neste caso chamamos Ω como o tubo de base ω.*

Denotemos por $T(\omega)$ o tubo cuja base é ω e $ch(\Omega)$ a envoltória convexa geométrica do conjunto Ω. Veja que se Ω é um tubo de base ω então $ch(\Omega)$ é um tubo com base $ch(\omega)$.

Lema 3.5.10 (Lema do Tubo)**.** *Seja*

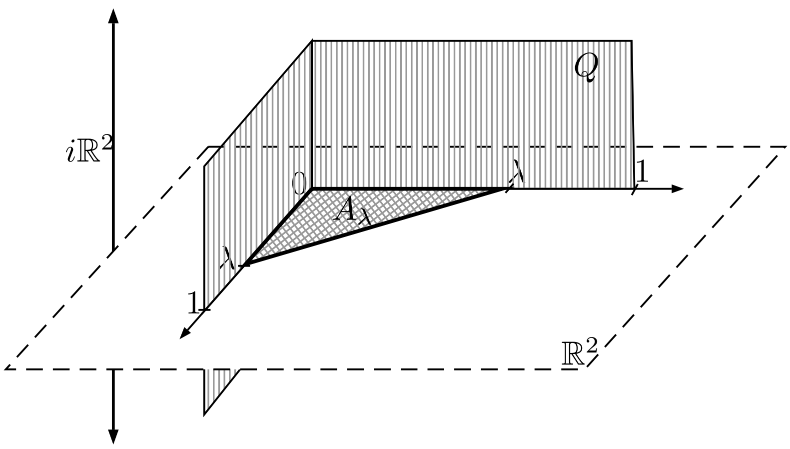
$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x_1, 0, ..., 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(0, x_2, 0, ..., 0) : 0 \leq x_2 \leq 1\}, \\ A_\lambda &= \{(x_1, x_2, 0, ..., 0) \ : \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq \lambda\}, \end{aligned}$$

e B uma vizinhança de A_1 em $\mathbb{R}^n$ e $\Omega = T_B$. Para todo $\lambda \in [0, 1[$, existe $M = M(\lambda) > 0$ tal que se

$$Q = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z) \in \Gamma, |\mathrm{Im}(z)| \leq M\}$$

então $\widehat{Q}_\Omega \supset A_\lambda$. Em particular $(\widehat{Q + iy})_\Omega \supset A_\lambda + iy$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

No caso $n = 2$ poderia se perceber intuitivamente o conjunto Q na seguinte figura:



Prova. Seja $S_\varepsilon = S'_\varepsilon \cap T_{A_1}$ com

$$S'_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 - \varepsilon(z_1^2 + z_2^2) = 1 - \varepsilon, z_3 = ... = z_n = 0 \right\}.$$

Denotemos $\|f\|_L = \sup_L |f|$ para $L \subset \mathbb{C}^n$ compacto e f uma função continua em L.

Afirmação :

$$\|f\|_{S_\varepsilon} = \|f\|_{S_\varepsilon \cap T_\Gamma} \qquad \text{para todo } f \in A(\Omega).$$

Primeiro faremos algumas observações.

- Se $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, 0, ..., 0) \in S_\varepsilon$, então

$$x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - \varepsilon, \quad 0 \le x_1, \quad 0 \le x_2, \quad x_1 + x_2 \le 1 \quad (71)$$

  em particular $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, assim $y_1^2 + y_2^2 \le 1/\varepsilon$, portanto S_ε é compacto.

- $(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0) \in S_\varepsilon$, e se $(x_1, x_2, 0, ..., 0) \in S_\varepsilon$ e diferente de aqueles, teria se que $x_1 + x_2 < 1$. Pois no caso de ter $0 < x_1 < 1$ e $\le x_2 \le 1$ então de (71) temos que

$$x_1 + x_2 + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) + \varepsilon = 1 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) < 1 + \varepsilon(x_1 + x_2) < 1 + \varepsilon$$

  e portanto $x_1 + x_2 < 1$. O outro caso é mostrado da mesma forma.

- Se $(z_1, z_2, 0, ..., 0) \in S_\varepsilon$, então

$$\frac{\partial}{\partial z_1}(z_1 + z_2 - \varepsilon(z_1^2 + z_2^2)) = 1 - 2\varepsilon z_1,$$

  portanto se $\varepsilon < 1/2$, temos que $\mathrm{Re}(1 - 2\varepsilon z_1) = 1 - 2\varepsilon x_1 > 0$. Logo do teorema da função implícita temos que z_1 pode se escrever como função analítica de z_2. E de modo análogo z_2 pode se escrever como função analítica de z_1.

Suponhamos agora que, se $f \in A(\Omega)$ admite o seu valor máximo no conjunto S_ε num ponto $(\zeta_1, \zeta_2, 0, ..., 0) \in S_\varepsilon \setminus T_\Gamma$, então

$$|f(\zeta_1, \zeta_2, 0, ..., 0)| \ge |f(z_1, z_2, 0, ..., 0)|, \qquad \text{para todo } (z_1, z_2, 0, ..., 0) \in S_\varepsilon.$$

Dado que $(\zeta_1, \zeta_2, 0, ..., 0) \notin T_\Gamma$, então $(\mathrm{Re}(\zeta_1), \mathrm{Re}(\zeta_2), 0, ..., 0) \notin \Gamma$ isto é $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ e $\mathrm{Re}(z_2) > 0$, em particular $(1, 0) \neq (\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2)) \neq (0, 1)$. Logo da segunda observação feita temos que $\mathrm{Re}(\zeta_1) + \mathrm{Re}(\zeta_2) < 1$, e portanto $(\zeta_1, \zeta_2, 0, ..., 0)$ pertence ao interior de S_ε relativo a S'_ε. Então existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}$ de ζ_1 onde $z_2 = g(z_1)$ com g analítica em V. Dado que a função $f(z_1, g(z_1), 0, ..., 0)$ é uma função analítica de z_1 e em particular tem-se que

$$|f(\zeta_1, g(\zeta_1), 0, ..., 0)| \ge |f(z_1, g(z_1), 0, ..., 0)|, \qquad \text{para todo } z_1 \in V,$$

então $f(.,g(.),0,...,0)$ é constante em V. Isto é, f é constante em $\{Graf(g)\}\times\{0\},...,\times\{0\}\subset S_\varepsilon$, e assim na sua componente conexa. Portanto f atinge o seu valor máximo também num ponto da fronteira de S_ε.

Logo

$$\|f\|_{S_\varepsilon} = \|f\|_{S_\varepsilon\cap T_\Gamma}.$$

Sejam os conjuntos

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon &= \{z = x+iy\in\mathbb{C}^n \ : \ x\in\Gamma, y_1^2+y_2^2\le 1/\varepsilon, y_3=...=y_n=0\}\\
k_\varepsilon &= \{(x_1,x_2,0,...,0)\in\mathbb{R}^n \ : \ 0\le x_1, 0\le x_2, x_1+x_2-\varepsilon(x_1^2+x_2^2)\le 1-\varepsilon\}\\
k_\varepsilon^{=} &= \{(x_1,x_2,0,...,0)\in\mathbb{R}^n \ : \ 0\le x_1, 0\le x_2, x_1+x_2-\varepsilon(x_1^2+x_2^2)= 1-\varepsilon\}
\end{aligned}$$

e veja que $k_\varepsilon^{=}\subset S_\varepsilon$ e $S_\varepsilon\cap T_\Gamma\subset K_\varepsilon$ então

$$\|f\|_{k_\varepsilon^{=}} \le \|f\|_{S_\varepsilon} = \|f\|_{S_\varepsilon\cap T_\Gamma} \le \|f\|_{K_\varepsilon}. \tag{72}$$

Por outro lado, se $\alpha\in[0,1]$ e αL denota o conjunto $\{\alpha\xi \ : \ \xi\in L\}$, então $\|f\|_{\alpha k_\varepsilon^{=}}\le \|f\|_{\alpha K_\varepsilon}$.

De fato, no caso de $\alpha=0$ é óbvio. Se $0<\alpha\le 1$, sejam $(x_1,x_2,0,...,0)\in\alpha k_\varepsilon^{=}$ e $h(z_1,...,z_n)=(\alpha z_1,...,\alpha z_n)$, então para todo $f\in A(\Omega)$ de (72), tem se que:

$$\begin{aligned}
|f(x_1,x_2,0,...,0)| &= \left|f\circ h(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},0,...,0)\right| \le \|f\circ h\|_{K_\varepsilon^{=}}\\
&= \|f\|_{h(K_\varepsilon)} \le \|f\|_{\alpha K_\varepsilon}
\end{aligned}$$

E dado que $\alpha K_\varepsilon\subset K_\varepsilon$, para todo $\alpha\in]0,1[$, então

$$\|f\|_{\alpha k_\varepsilon^{=}} \le \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

Por outro lado, se $\varepsilon\in]0,1/4[$, para todo $(x_1,x_2,0,...,0)\in k_\varepsilon\setminus(\Gamma\cup k_\varepsilon^{=})$ existe $\alpha\in]0,1[$ tal que $(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},0,...,0)\in k_\varepsilon$, pois a equação

$$\alpha^2(1-\varepsilon)-\alpha(x_1+x_2)+\varepsilon(x_1^2+x_2^2)=0$$

tem solução α positiva e menor que 1, dada pela fórmula de Bhaskara, pois a desigualdade $x_1+x_2-\varepsilon(x_1^2+x_2^2)<1-\varepsilon$ é equivalente a $(x_1+x_2)+\sqrt{(x_1+x_2)^2-4\varepsilon(1-\varepsilon)(x_1^2+x_2^2)}<2(1-\varepsilon)$ quando $\varepsilon\in]0,1/4[$. Logo

$$|f(x_1,x_2,0,..,0)|\le \|f\|_{\alpha k_\varepsilon^{=}}\le \|f\|_{K_\varepsilon}$$

Portanto obteríamos que

$$\|f\|_{k_\varepsilon}\le \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

Finalizando, para $\lambda \in [0,1]$, considere $\varepsilon \in]0, 1/4[$ e $\lambda + \varepsilon \leq 1$ e veja que $A_\lambda \subset k_\varepsilon$. Pois se $x_1 + x_2 \leq \lambda$ e $0 \leq x_1, 0 \leq x_2$ então

$$x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) \leq x_1 + x_2 \leq \lambda \leq 1 - \varepsilon.$$

Logo se $M = 1/\varepsilon$, então $Q \supset K_\varepsilon$, e assim $\|f\|_{A_\lambda} \leq \|f\|_Q$, isto é $\widehat{Q}_\Omega \supset A_\lambda$. □

Teorema 3.5.11 (Teorema de Bochner)**.** *Se Ω é um tubo conexo, então toda função $u \in A(\Omega)$ pode ser estendida a uma função em $A(ch(\Omega))$.*

Prova. (a) Primeiro assumimos que $\Omega = T(B)$ onde B é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ estrelado conexo contendo a origem. Desde que a família L de tubos $W = T(w)$ com base w estrelada contendo B e tal que toda função em $A(\Omega)$ pode ser continuada analiticamente à W é distinta do vazio (pois Ω pertence a esta família), e todo tubo com base estrelada é conexo, e a interseção deles é outro tubo com base estrelada; existe um tubo $\widetilde{\Omega}$ com base estrelada $\widetilde{\omega}$ tal que toda função em $A(\Omega)$ pode ser continuada analiticamente à $\widetilde{\Omega}$ e $\widetilde{\Omega}$ contem todo tubo estrelado com esta propriedade (Basta tomar a união dos elementos da família L). Queda por demonstrar que $\widetilde{\omega}$ é convexo.

Sejam ξ_1, ξ_2 vetores linearmente independentes em $\widetilde{\omega}$. Podemos escolher coordenadas em $\mathbb{C}^n$ tal que $\xi_1 = (1, 0, ..., 0)$ e $\xi_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$.

Seja $E = \{a \in \mathbb{R} \ : \ a \in [0,1], \{(x_1, x_2, 0, ..., 0) \ : \ x_1, x_2 \geq 0, a \geq x_1 + x_2\} \subset \widetilde{\omega}\}$, observe que

(i) $0 \in E$

(ii) E é aberto em $[0,1]$, pois se $a \in E$, então o conjunto

$$\{(x_1, x_2, 0, ..., 0) \ : \ x_1, x_2 \geq 0, a \geq x_1 + x_2\}$$

que é compacto, esta contido em $\widetilde{\omega}$ aberto, logo $\{(x_1, x_2, 0, ..., 0) \ : \ x_1, x_2 \geq 0, a + \varepsilon \geq x_1 + x_2\}$ esta contido em $\widetilde{\omega}$ para ϵ suficientemente pequeno.

(iii) E é fechado em $[0,1]$. De fato, seja $b \in \overline{E}$,

$$\Gamma = \{(x_1, 0, ..., 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(0, x_2, 0, ..., 0) : 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

e $\delta > 0$ tal que $\Delta_{\widetilde{\omega}}^D(z) > \delta$ para $z \in \Gamma$ e $D = \{z \ : \ |z_j| < 1, j = 1, ..., n\}$. Portanto existe $a \in E$ tal que $|b - a| < \delta$.

Do Lema 3.5.10, para $\lambda \in [0,1)$, existe um conjunto compacto $K = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ z \in T(\Gamma), |\mathrm{Im}(z)| \leq M = M_\lambda\}$ tal que $\hat{K}_{\widetilde{\Omega}} \supset L_\lambda := \{(x_1, x_2, 0, ..., 0) \ : \ x_1, x_2 \geq 0, \lambda a \geq x_1 + x_2\}$. E também $\widehat{(K + iy)}_{\widetilde{\Omega}} \supset L_\lambda + iy$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Por outro lado, dado que $\widetilde{\Omega}$ é um tubo, se $\Delta_{\widetilde{\Omega}}^D(z) > \delta$ para todo $z \in \Gamma$, então $\Delta_{\widetilde{\Omega}}^D(\zeta) > \delta$ para todo $\zeta \in K + iy$, e para quaisquer $y \in \mathbb{R}^n$.

Então, do Lemma 3.5.3, tem-se que para todo $\widetilde{f} \in A(\widetilde{\Omega})$, a expansão em série de de potências de $\widetilde{f}$ centrada em $\zeta \in (\widehat{K + iy})_{\widetilde{\Omega}}$ converge no polidisco $\{\zeta\} + \delta D$, para quaisquer $y \in \mathbb{R}^n$. Em particular converge em todo polidisco da forma $\{\zeta\}+\delta D$ onde $\zeta \in L_\lambda + iy$, para quaisquer $y \in \mathbb{R}^n$. Logo $\widetilde{f}$ pode ser definida no tubo T que tenha como base um conjunto de pontos cuja distância ao conjunto $\Gamma \cup L_\lambda$ seja menor que δ. Da definição de $\widetilde{\Omega}$ temos que tal conjunto T esta contido em $\widehat{\Omega}$. Considerando λ suficientemente perto de 1, por exemplo λ tal que $|b - \lambda a| < \delta$, teria se que o conjunto $\{(x_1, x_2, 0, ..., 0) \ : \ x_1, x_2 \geq 0, b \geq x_1 + x_2\}$ estaria contido em $\widetilde{\omega}$. Logo E é fechado.

Então $E = [0, 1]$, e assim $\widetilde{\omega}$ é convexo.

(b) Seja agora ω um conjunto aberto conexo arbitrário em $\mathbb{R}^n$. Suponha $0 \in \omega$ e denote $\widetilde{\Omega}$ o tubo mais grande com base estrelada em relação a origem tal que, para todo $f \in A(\Omega)$ existe $\widetilde{f} \in A(\widetilde{\Omega})$ tal que $f = \widetilde{f}$ numa vizinhança de 0.

Primeiro veja, que a família L' de tubos W com base estrelada em relação a origem tal que para todo $f \in A(\Omega)$ é possível encontrar $\widetilde{f} \in A(W)$ tal que $f = \widetilde{f}$ numa vizinhança da origem; é não vazio pois o tubo de base $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < r\} \subset \omega$ pertence à família L', sendo r suficientemente pequeno.

Logo $\widetilde{\Omega}$ existe pois basta só considerar a união dos elementos de L', que como no caso anterior, também será um elemento de L'. Assim também, como no caso anterior prova-se que $\widetilde{\Omega}$ é convexo.

Afirmo que $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$. Suponhamos por contradição que $\widetilde{\Omega}$ não contem todo Ω. Então existe $x_0 \in \omega$ tal que $x_0 \notin \widetilde{\omega}$. Dado que ω é aberto conexo podemos encontrar um caminho poligonal que une x_0 e a origem. Seja x_1 o último ponto que interseta $\partial\widetilde{\omega}$. Seja ω_1 um conjunto convexo que contem x_1 e esta contida em ω.

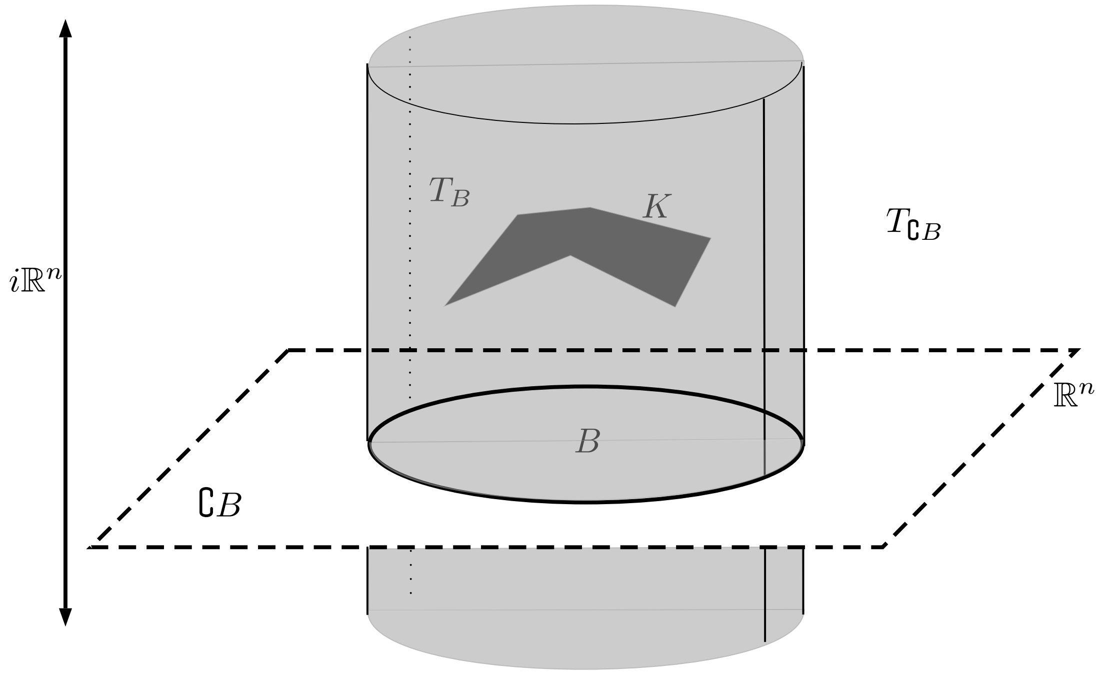
Veja que o conjunto $\omega_1 \cup \omega$ é estrelado em relação a x_1 e $ch(\omega_1 \cup \widetilde{\omega})$ é estrelado em relação a origem e $ch(\omega_1 \cup \widetilde{\omega}) \supsetneq \widetilde{\omega}$.

Se $f \in A(\omega)$, pela definição de $\widetilde{\omega}$, existe $\widetilde{f} \in A(\widetilde{\Omega})$ tal que $\widetilde{f} = f$ numa vizinhança de 0. Podemos definir a função $\dot{f}$ em $T(\omega_1 \cup \widetilde{\omega})$ dada por $\dot{f} = \widetilde{f}$ em $T(\widetilde{\omega})$ e $\dot{f} = f$ em $T(\omega_1)$. Esta função $\dot{f}$ esta bem definida pois tanto f como $\widetilde{f}$ estão definidas em particular em $T(\omega \cap \widetilde{\omega})$ que contem 0, logo $f = \widetilde{f}$ em $\omega \cap \widetilde{\omega}$, e em particular $f = \widetilde{f}$ em $\omega_1 \cap \widetilde{\omega}$.

Pela parte (a) temos que $\dot{f}$ pode ser estendida analiticamente a uma função F em $T(ch(\omega_1\widetilde{\omega}))$, logo em particular $F = f$ numa vizinhança de 0. Com isto, para todo $f \in A(\Omega)$ é possível encontrar $F \in A(T(ch(\omega_1 \cup \widetilde{\omega})))$, tal que $F = f$ numa vizinhança da origem. Logo pela definição de $\widetilde{\Omega}$ tem-se que $T(ch(\omega_1 \cup \widetilde{\omega})) \subset \widetilde{\Omega} = T(\widetilde{\omega})$, isto é $ch(\omega_1 \cup \widetilde{\omega}) \subset \widetilde{\omega}$, contradição. Logo $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$.

Da mesma forma, como na parte (a), obtém-se que $ch(\Omega) = \widetilde{\Omega}$. $\square$

Veja que o resultado do Teorema de extensão de Hartogs segue como uma aplicação deste teorema, da seguinte forma: Se K é um conjunto compacto contido em $\mathbb{C}^n$ com $n \geq 2$ tal que $\complement K = \mathbb{C}^n \setminus K$ é conexo e f é uma função analítica em $\complement K$, considerando $R > 0$ tal que o tubo T_B de base $B = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq R^2\}$ contenha K, então aplicando o Teorema de Bochner para a função f restrita ao tubo $T_{\complement B}$ cuja base é $\complement B = \mathbb{R}^n \setminus B$ e como $ch(T_{\complement B}) = \mathbb{C}^n$ obtemos que existe uma função F analítica definida em $\mathbb{C}^n$ tal que $F = f$ no tubo $T_{\complement B}$. Como $\complement K$ é conexo então do principio da continuação analítica temos que $f = F$ em $\complement K$.



Corolário 3.5.12. *Um tubo é um domínio de holomorfia se, e somente se, todas as componentes conexas são convexas.*

Prova. Seja Ω um tubo conexo.

($\Leftarrow$) Se cada componente é convexo, então cada uma é um domínio de holomorfia.

($\Rightarrow$) Suponhamos que Ω não é convexo, então $\Omega \subsetneq ch(\Omega)$. Dado que $ch(\Omega)$ é conexo, do teorema anterior, toda $f \in A(\Omega)$ é estendida a uma função analítica de $ch(\Omega)$, isto é uma contradição com o fato de ser Ω domínio de holomorfia. $\square$

Teorema 3.5.13. *Se Ω é um domínio de holomorfia e $f_1, ..., f_N \in A(\Omega)$ então $\Omega_f = \{z \ : \ z \in \Omega, |f_j(z)| < 1, j = 1, ..., N\}$ é um domínio de holomorfia.*

Prova. Em vista do Corolário 3.5.7 suficiente mostrar para $N = 1$. Seja $K \subset\subset \Omega_f$. Se $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$ então

$$|g(\zeta)| \leq \sup_K |g| = \max_K |g|, \quad \forall g \in A(\Omega)$$

em particular

$$|f(\zeta)| \leq \max_K |f| < 1$$

então $\zeta \in \Omega_f$, $\widehat{K}_\Omega \subset \Omega_f$.

$\widehat{K}_\Omega$ é compacto pois Ω é domínio de holomorfia. Dado que $\widehat{K}_{\Omega_f} \subset \widehat{K}_\Omega \subset \Omega_f$, então

$$Cl_{\mathbb{C}^n}(\widehat{K}_{\Omega_f}) \subset Cl_{\mathbb{C}^n}(\widehat{K}_\Omega) = \widehat{K}_\Omega \subset \Omega_f$$

onde $Cl_{\mathbb{C}^n}(\widehat{K}_{\Omega_f})$ denota a clausura de $\widehat{K}_{\Omega_f}$ no conjunto $\mathbb{C}^n$, então $\widehat{K}_{\Omega_f} \subset\subset \Omega_f$

□

Teorema 3.5.14. *Sejam Ω e Ω' domínios de holomorfia em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ respetivamente, e seja u uma aplicação analítica de Ω em $\mathbb{C}^m$. Então*

$$\Omega_u = \{z \ : \ z \in \Omega, u(z) \in \Omega'\}$$

é um domínio de holomorfia.

Prova. Seja $K \subset\subset \Omega_u$. Então $\widehat{K}_{\Omega_u} \subset \widehat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$. É suficiente mostrar que $\widehat{K}_{\Omega_u}$ é fechado em Ω. Pois assim $\widehat{K}_{\Omega_u} = F \cap \Omega$ sendo F fechado, logo $\widehat{K}_{\Omega_u} = \widehat{K}_{\Omega_u} \cap \widehat{K}_\Omega = F \cap \Omega \cap \widehat{K}_\Omega = F \cap \widehat{K}_\Omega$, e assim $\widehat{K}_{\Omega_u}$será compacto. Desde que $u(K)$ é compacto, então $K' = \widehat{(u(K))}_{\Omega'}$ é compacto contido em Ω'.

Se $f \in A(\Omega')$ e $\zeta \in \widehat{K}_{\Omega_u}$ tem que

$$|f(u(\zeta))| \leq \sup_{z \in K} |f \circ u(z)| = \sup_{u(K)} |f|$$

então $u(\zeta) \in K' = \widehat{(u(K))}_{\Omega'}$. Então $u(\widehat{K}_{\Omega_u}) \subset K'$. E da compacidade de K' obtemos que $u(cl_\Omega(\widehat{K}_{\Omega_u})) \subset K' \subset \Omega'$, isto pela definição de Ω_u implica que $cl_\Omega(\widehat{K}_{\Omega_u}) \subset \Omega_u$. Logo $cl_\Omega(\widehat{K}_{\Omega_u}) = cl_\Omega(\widehat{K}_{\Omega_u}) \cap \widehat{K}_{\Omega_u} \subset \Omega_u \cap \widehat{K}_{\Omega_u} = \widehat{K}_{\Omega_u}$ assim $cl_\Omega(\widehat{K}_{\Omega_u}) = \widehat{K}_{\Omega_u}$, isto é, $\widehat{K}_{\Omega_u}$ é fechado em Ω. □

Veja que nesta prova, não fazemos o uso total do fato de ser Ω um domínio de holomorfia, e só precisamos do que $\widehat{K}_{\Omega_u} \subset\subset \Omega$ para todo $K \subset\subset \Omega_u$. E se $\Omega_u \subset\subset \Omega$, então podemos deixar de assumir que Ω é um domínio de holomorfia.

3.6 Pseudoconvexidade e Plurisubharmonicidade

Observe que os últimos resultados na anterior seção, fazem uso do Teorema 3.5.4 quando f foi considerado constante, isto é, usamos só a segunda parte do resultado do Teorema 3.5.4. Vejamos agora o seguinte resultado quando fazemos uso do primeira parte do Teorema.

Sejam Ω um domínio de holomorfia, $z_0 \in \Omega$, $w \in \mathbb{C}^n$, $0 < R$ tal que

$$D_R = \{z_0 + \tau w \ : \ \tau \in \mathbb{C}, |\tau| < R\} \subset \Omega.$$

Considere a função $S : D(0,R) \to \mathbb{R}$ dada por $\tau \longmapsto -\log\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega)$ onde δ é uma função distância e $D(0,R)$ é um disco de centro na origem e de raio R contido em $\mathbb{C}$.

Afirmo que a função S é subharmônica. De fato, no caso em que $w = 0$ é óbvio, pois toda função constante é subharmônica. Seja $w \neq 0$ e f um polinômio analítico tal que $S(\tau) \leq \mathrm{Re}(f(\tau))$ para $|\tau| = r < R$.

Podemos escolher um polinômio analítico F em $\mathbb{C}^n$ tal que $F(z_0 + \tau w) = f(\tau)$. Por exemplo, desde que $w \neq 0$, existe uma coordenada de w, digamos w_k, diferente de 0. Se $f(\tau) = a_0 + a_1\tau + ... + a_m\tau^m$, então podemos considerar $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ como sendo

$$F(z_1, ..., z_n) = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{z_k - z_k^0}{w_k}\right)^j$$

então $F(z_0 + \tau w) = F(z_1^0 + \tau w_1, ..., z_n^0 + \tau w_n) = f(\tau)$.

Então

$$-\log\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \mathrm{Re}(F(z_0 + \tau w))$$

para todo $|\tau| = r$, logo

$$e^{\mathrm{Re}(-F(z_0+\tau w))} \leq \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega)$$

para todo $|\tau| = r$, ou também

$$\left|e^{-F(\zeta)}\right| \leq \delta(\zeta, \complement\Omega) \tag{73}$$

para todo $\zeta \in \partial D_r$ sendo D_r o conjunto análogo a D_R. Logo do Teorema 3.5.4, tem-se que a desigualdade (73) é satisfeita para todo $\zeta \in \widehat{(\partial D_r)}_\Omega$. Do Principio do Máximo temos que $D_r \subset \widehat{(\partial D_r)}_\Omega$ e assim a desigualdade (73) é satisfeita para todo $\zeta \in D_r$. Mas isto equivale dizer que

$$e^{\mathrm{Re}(-F(z_0+\tau w))} \leq \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega)$$

para todo $|\tau| \leq r$. Logo $-\log\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \mathrm{Re}(f(\tau))$, para todo $|\tau| \leq r$. Assim a função S é subharmônica.

Definição 3.6.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, u é chamada plurisubharmônica, se*

(i) *u é semicontinua por acima.*

(ii) *Para z e $w \in \mathbb{C}$ arbitrários, a função $\tau \longmapsto u(z + \tau w)$ é subharmônica na parte de $\mathbb{C}$ onde ela é definida.*

Denotamos por $P(\Omega)$, o conjunto de todas as funções plurisubharmônicas definida em Ω.

Por exemplo, se f analítica, então

(i) $\{z\ :\ log\,|f(z)| < s\} = \{z\ :\ |f(z)| < e^s\}$ é aberto pois f é continua.

(ii) Se $g(\tau) = f(z+\tau w)$ então g é analítica na variável τ onde $f(z+\tau w)$ esteja definida, logo do Corolário 2.5.7 $log\,|f(z+\tau w)|$ é subharmônica na variável t.

Logo $log\,|f|$ é plurisubharmônica.

Teorema 3.6.2. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é plurisubharmônica, se e somente se*

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k \geq 0, \quad \forall z \in \Omega \text{ } e \text{ } w \in \mathbb{C}^n \tag{74}$$

Prova. Seja $z \in \Omega$ e $w \in \mathbb{C}^n$ e a função $s : \tau \longmapsto u(z+\tau w)$. Logo s é de classe C^2 na parte de $\mathbb{C}$ onde ela estiver definida. Veja que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 s(\tau)}{\partial \tau \partial \overline{\tau}} &= \frac{\partial^2 (u(z+\tau w))}{\partial \tau \partial \overline{\tau}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial (u(z+\tau w))}{\partial \overline{\tau}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}(z+\tau w).0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}(z+\tau w)\overline{w}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}(z+\tau w)\right)\overline{w}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}(z+\tau w) w_k\right)\overline{w}_j \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_j}(z+\tau w) w_k \overline{w}_j.
\end{aligned}$$

Se u é plurisubharmônica, então s é subharmônica e em particular em $\tau = 0$ tem se que $\partial^2 s(0)/\partial \tau \partial \overline{\tau}$ logo

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_j}(z) w_k \overline{w}_j \geq 0$$

e isto para todo $z \in \Omega$ e $w \in \mathbb{C}^n$.

Agora se (74) é válido, em particular (74) será verdade para todo $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $z+\tau w \in \Omega$, isto é

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_j}(z+\tau w) w_k \overline{w}_j \geq 0.$$

Logo a função s é subharmônica para $z \in \Omega$ e $w \in \mathbb{C}^n$. Portanto u é plurisubharmônica. $\square$

Teorema 3.6.3. *Seja $0 \leq \varphi \in C_0^\infty$ e identicamente zero quando $|z| > 1$, e depende só de $|z_1|, ..., |z_n|$ e assuma que $\int \varphi(\zeta) d\lambda(\zeta) = 1$. Se u é plurisubharmônica, segue que*

$$u_\epsilon(z) = \int u(z - \epsilon\zeta)\varphi(\zeta) d\lambda(\zeta) \tag{75}$$

é plurisubhamónica, $u_\epsilon \in C^\infty$ onde $d(z, \complement\Omega) > \epsilon$ e $u_\epsilon \searrow u$ quando $\epsilon \searrow 0$ (assuma que $u \not\equiv \infty$)

Prova. O fato de que u_ε decresce quando $\varepsilon \searrow 0$ é verdade no caso $n = 1$. Suponhamos a afirmação seja verdade para $n = m$ Seja u uma função plurisubharmônica num aberto de $\mathbb{C}^{m+1}$. Denotemos $z' = (z_1, ..., z_m)$ e $(z_1, ..., z_m, z_{m+1}) = (z', z_{m+1})$. Veja que $(z_1, ..., z_m) \longmapsto u(z_1, ..., z_m, z_{m+1})$ é plurisubharmônica onde ela esteja definida, para cada z_{m+1} devidamente fixado. Também a função $z_{m+1} \longmapsto u(z_1, ..., z_m, z_{m+1})$ é subhamónica para cada $(z_1, ..., z_m)$ devidamente fixado. Logo se $\varepsilon \leq \varepsilon'$ então

$$\begin{aligned}
\int u(z' - \varepsilon\zeta', z_{m+1} &- \varepsilon\zeta_{m+1})\varphi(\zeta) d\lambda(\zeta) = \\
&= c \int\int u(z' - \varepsilon\zeta', z_{m+1} - \varepsilon\zeta_{m+1}) \frac{\varphi(\zeta', \zeta_{m+1})}{c} d\lambda(\zeta') d\lambda(\zeta_{m+1}) \\
&\leq c \int\int u(z' - \varepsilon'\zeta', z_{m+1} - \varepsilon\zeta_{m+1}) \frac{\varphi(\zeta', \zeta_{m+1})}{c} d\lambda(\zeta') d\lambda(\zeta_{m+1}) \\
&= d \int\int u(z' - \varepsilon'\zeta', z_{m+1} - \varepsilon\zeta_{m+1}) \frac{\varphi(\zeta', \zeta_{m+1})}{d} d\lambda(\zeta_{m+1}) d\lambda(\zeta') \\
&\leq \int\int u(z' - \varepsilon'\zeta', z_{m+1} - \varepsilon'\zeta_{m+1})\varphi(\zeta', \zeta_{m+1}) d\lambda(\zeta_{m+1}) d\lambda(\zeta')
\end{aligned}$$

sendo $c = \int \varphi(\zeta', \zeta_{m+1}) d\lambda(\zeta')$ e $d = \int \varphi(\zeta', \zeta_{m+1}) d\lambda(\zeta_{m+1})$. Logo a afirmação de que u_ε decresce quando $\varepsilon \searrow 0$ é verdade para o caso em que $n = m+1$. Logo u_ε decresce quando $\varepsilon \searrow 0$ qualquer fosse n.

Por outro lado desde que $u \leq u_\varepsilon$ quando $n = 1$, então

$$u(z_1, ..., z_n) \leq \int u(z_1 - \varepsilon\zeta_1, z_2 - \varepsilon\zeta_2, ..., z_n - \varepsilon\zeta_n) \frac{\varphi(\zeta_1, ..., \zeta_n)}{\int \varphi d\lambda(\zeta_1)} d\lambda(\zeta_1),$$

logo, multiplicando em ambos lados por $\int \varphi(\zeta) d\lambda(\zeta_1)$ e integrando em relação às variáveis $\zeta_2, ..., \zeta_n$ obtemos que

$$u(z) \leq u_\varepsilon(z). \tag{76}$$

Por outro lado, da semicontinuidade por acima da função u, tem-se que para todo $\vartheta > 0$, existe $l > 0$ suficientemente pequeno tal que, se $|w - z| \leq l$ então $u(w) \leq u(z) + \vartheta$. Em particular para $|\varepsilon| < l$ tem-se que $u(z - \varepsilon\zeta) \leq u(z) + \vartheta$ onde ζ esta na bola aberta $B(0, 1)$ de centro na origem e raio 1, e assim

$$u_\varepsilon(z) = \int u(z - \varepsilon\zeta)\varphi(\zeta) d\lambda(\zeta) \leq u(z) + \vartheta.$$

Em resumo, para todo $\vartheta > 0$, existe $l > 0$ tal que se $|\varepsilon| < l$, então $u_\varepsilon(z) \le u(z) + \vartheta$; da definição de limite superior, tem-se que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) \le u(z).$$

Mas de (76) temos que

$$u(z) \le \liminf_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z)$$

então $u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z)$ e assim $u_\varepsilon \searrow u$ quando $\varepsilon \searrow 0$.

É fácil ver que $u_\varepsilon \in C^\infty$ em $d(z, \complement\Omega) > \varepsilon$. Por ultimo, se $v \in C_0^2$ com suporte compacto contido na parte de $\mathbb{C}$ onde $\tau \longmapsto u_\varepsilon(z + \tau w)$ esteja definida e $v \ge 0$, então

$$\begin{aligned} \int u_\varepsilon(z + \tau w)\Delta v(\tau) d\lambda(\tau) &= \int \left(\int u(z + \tau w - \varepsilon z')\varphi(z') d\lambda(z') \Delta v(\tau) \right) d\lambda(\tau) \\ &= \int \left(\int u((z - \varepsilon z') + \tau w)\Delta v(\tau) d\lambda(\tau) \right) \varphi(z') d\lambda(z') \ge 0. \end{aligned}$$

Então u_ε é plurisubharmônica, pois este ultimo implica que $\Delta_\tau u_\varepsilon(z+\tau w) \ge 0$ e a afirmação segue então do Teorema 2.5.12. $\square$

Observe que o teorema anterior menciona que toda função plurisubharmônica em Ω restrita a subconjunto abertos próprios de Ω, é o limite de uma sequência decrescente de funções plurisubharmônicas de classe C^∞. Reciprocamente, do Teorema 2.5.2 o limite decrescente de funções plurisubharmônicas é uma função plurisubharmônica.

Teorema 3.6.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e $\Omega' \subset \mathbb{C}^m$ conjuntos abertos, f uma aplicação analítica de Ω em Ω' e $u \in P(\Omega')$. Então $f^*u \in P(\Omega)$*

Prova. Se $u \in C^2(\Omega)$ então o resultado segue do Teorema 3.6.2 e do fato que:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u \circ f(z)}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} = \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{t,s=1}^{m} \frac{\partial u(f(z))}{\partial \zeta_s \partial \zeta_t} \frac{\partial f_s(z)}{\partial z_j} \frac{\partial \overline{f_t}(z)}{\partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} = \sum_{t,s=1}^{m} \frac{\partial u(f(z))}{\partial \zeta_s \partial \zeta_t} g_s \overline{g_t} \ge 0$$

com

$$g_s = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial z_j} w_j.$$

No caso geral, do Teorema 3.6.3 para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções plurisubharmônicas em $C^\infty(\Omega'_\varepsilon)$ tal que decrescem à u. Logo, dado que $u_j \circ f$ decresce à $u \circ f$ em $f^{-1}(\Omega'_\varepsilon)$ e da observação anterior ao teorema, temos que $u \circ f$ é plurisubharmônica em $f^{-1}(\Omega'_\varepsilon)$.

Dado que para todo subconjunto próprio de Ω_0 existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}(\Omega_\varepsilon) \supset \Omega_0$, então $u \circ f$ plurisubharmônica em Ω. $\square$

Teorema 3.6.5. *Se Ω é um domínio de holomorfia e δ é uma função distância, então $-\log\delta(z, \complement\Omega)$ é plurisubharmônica e continua.*

Prova. Segue do feito ao inicio da sessão. $\square$

Definição 3.6.6. *Se K é um subconjunto compacto do aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, definimos o $P(\Omega)$ envoltória, $\widehat{K}_\Omega^P$, de K por*

$$\widehat{K}_\Omega^P = \left\{ z \ : \ z \in \Omega,\ u(z) \le \sup_K u,\ u \in P(\Omega) \right\} \tag{77}$$

Observe que, desde que $|f|$ é plurisubharmônica se f analítico, então $\widehat{K}_\Omega^P \subset \widehat{K}_\Omega$

Teorema 3.6.7. *Se Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{C}^n$, então as seguintes condições são equivalentes.*

(*i*) $-\log\delta(z, \complement\Omega)$ *é plurisubharmônica em* Ω.

(*ii*) *Existe uma função plurisubharmônica continua u em Ω tal que*

$$\Omega_C = \{ z \ : \ z \in \Omega,\ u(z) < C \} \subset\subset \Omega,\ \forall C \in \mathbb{R}$$

(*iii*) $\widehat{K}_\Omega^P \subset\subset \Omega$ *se* $K \subset\subset \Omega$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$. Considere $u(z) = \max\left\{ |z|, -\log\delta(z, \complement\Omega) \right\}$ e veja que do Teorema 2.5.2 u é uma função plurisubharmônica.

Logo, se $\zeta \in \overline{\Omega_C}$, então existe uma sequência $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em Ω_C tal que $z_j \to \zeta$ quando $j \to +\infty$. Desde que $-\log\delta(z_j, \complement\Omega) \le C$, temos que $e^{-C} \le \delta(z_j, \complement\Omega)$ e da continuidade de δ tem-se que $0 < e^{-C} \le \delta(\zeta, \complement\Omega)$, então $\zeta \in \Omega$. Por outro lado também $|z| < C$. De de estes dos ultimo, obtemos que $\Omega_C \subset\subset \Omega$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Seja $\varepsilon > 0$ e veja que

$$\widehat{K}_\Omega^P \subset \left\{ z \ : \ z \in \Omega, u(z) < \sup_K u + \varepsilon \right\} \subset\subset \Omega$$

então $\widehat{K}_\Omega^P \subset\subset \Omega$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Seja $z_0 \in \Omega$, $0 \ne w \in \mathbb{C}^n$, e escolha $r > 0$ tal que

$$D = \{ z_0 + \tau w \ : \ |\tau| \le r \} \subset \Omega.$$

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio analítico tal que

$$-\log\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \le \mathrm{Re} f(z)$$

para $|\tau| = r$, e veja que esta desigualdade é equivalente a que

$$\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \geq \left|e^{-f(\tau)}\right|$$

para $|\tau| = r$.

Observe que o anterior implica que os pontos $z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}$ estão em Ω, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}^n$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, $\delta(a) < 1$ e $|\tau| = r$ (pois se estiver no complementar, então $\lambda \left|e^{-f(\tau)}\right| \delta(a) = \delta(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} - (z_0 + \tau w)) \geq \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \geq \left|e^{-f(\tau)}\right|$, que é uma contradição).

Seja algum $a \in \mathbb{C}^n$, tal que $\delta(a) < 1$. Consideremos para $\lambda \in [0,1]$ a seguinte aplicação definida em $\{\tau \in \mathbb{C} \ : \ |\tau| \leq 1\}$ dada por $\tau \longmapsto z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}$ denotemos sua imagem como D_λ.

Seja $\Delta = \{\lambda \ : \ \lambda \in [0,1], D_\lambda \subset \Omega\}$ veja que $D_0 = D \subset \Omega$. Então $\Delta \neq \phi$. Dado que se $\lambda \in \Delta$, D_λ é compacto então existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_{\lambda+\varepsilon} \subset \Omega$. Assim Δ é aberto.

Mostremos que Δ é fechado.

Seja

$$K = \left\{z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \ : \ 0 \leq \lambda \leq 1, \ |\tau| = r\right\}.$$

Veja que K é compacto, e esta contido em Ω pela observação feita anteriormente nesta demonstração.

Seja $\lambda \in \Delta$, e $u \in P(\Omega)$, então $D_\lambda \subset \Omega$ e do Teorema 3.6.4 a função $\tau \longmapsto u(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)})$ é subharmônica numa vizinhança $\{\tau \ : \ |\tau| \leq r\}$. Logo do principio do máximo para funções subharmônicas, temos que

$$u(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}) \leq \sup_{|\tau|=r} u(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}) \leq \sup_K u,$$

para todo $|\tau| \leq r$, então $z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \in \widehat{K}_\Omega^P$ para todo $|\tau| \leq r$.

Logo, se $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e Δ, tal que $\lambda_j \to \lambda$, então $z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \in Cl(\widehat{K}_\Omega^P)$, onde $Cl(\widehat{K}_\Omega^P)$ denota a clausura de $\widehat{K}_\Omega^P$, e isto para todo $|\tau| \leq r$. Por hipótese $Cl(\widehat{K}_\Omega^P) \subset \Omega$. Então $z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \in \Omega$, para todo $|\tau| \leq r$, isto é, $\lambda \in \Delta$. Logo Δ é fechado, e portanto $\Delta = [0,1]$.

Em particular $z_0 + \tau w + a e^{-f(\tau)} \in \Omega$, para todo $a \in \mathbb{C}^n$ tal que $\delta(a) < 1$, e todo $|\tau| \leq r$. Logo de (68) no Teorema 3.5.4 obtemos que

$$\left|e^{-f(\tau)}\right| \leq \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega)$$

para todo $|\tau| \leq r$. Isto implica que

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \mathrm{Re}(f(\tau))$$

para todo $|\tau| \leq r$. Portanto $-\log \delta(z, \complement\Omega)$ é plurisubharmônica. $\square$

Veja que no teorema acima, poderíamos adicionar a seguinte afirmação

$(i)'$ Existe uma função distância δ tal que $-\log\delta(z,\complement\Omega)$ é plurisubharmônica em Ω.

e a prova ficaria de igual forma substituindo a implicação $(i) \Longrightarrow (ii)$ por $(i)' \Longrightarrow (ii)$.

Definição 3.6.8. *Um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é chamado pseudoconvexo se as condições equivalentes no Teorema 3.6.7 são satisfeitas.*

Teorema 3.6.9. *Se Ω_α é um conjunto aberto pseudoconvexo para todo α num conjunto de índices A, então o interior Ω de $\cap_{\alpha\in A}\Omega_\alpha$ é também pseudoconvexo.*

Prova. Seja δ uma função distância e K um conjunto compacto contido em Ω. Se $z \in \Omega$ então

$$\delta(z,\complement\Omega) = \delta(z,\complement\,(\cap_\alpha\Omega_\alpha)) = \inf_{\alpha\in A}\delta(z,\complement\Omega_\alpha).$$

E assim $-\log\delta(z,\complement\Omega) = \sup_{\alpha\in A}\left(-\log\delta(z,\complement\Omega_\alpha)\right)$. Do fato que a função δ é continua e do Teorema 2.5.2 obtemos que $-\log(z,\complement\Omega)$ é plurisubharmônica. Logo do Teorema 3.6.7 parte (i) obtemos que Ω é pseudoconvexa. □

Teorema 3.6.10. *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$. Se para todo ponto em $\overline{\Omega}$ existe uma vizinhança ω tal que $\omega\cap\Omega$ é pseudoconvexo, então Ω é pseudoconvexo.*

Prova. Se $\Omega = \mathbb{C}$, então a afirmação óbvia, suponhamos $(\mathbb{C}\setminus\Omega) \neq \phi$. Sejam $\zeta \in \partial\Omega$ e ω_ζ como na afirmação da hipótese. De considerar V_ζ como siendo uma bola de centro em ζ e de radio suficientemente pequeno obtemos que $\delta(z,\complement\Omega) = \delta(z,\complement(\Omega\cap\omega_\zeta))$ para $z \in V_\zeta\cap\Omega$. Em particular, $-\log\delta(z,\complement\Omega)$ é plurisubharmônica em $V_\zeta\cap\Omega$. Logo existe uma vizinhança $V = \cup_{\zeta\in\partial\Omega}V_\zeta$ de $\partial\Omega$ tal que $\delta(z,\complement\Omega) = \delta(z,\complement(\Omega\cap\omega_\zeta))$ para $z \in V\cap\Omega$. Consequentemente, existe um conjunto fechado $F \subset \Omega$ tal que $-\log\delta(z,\complement\Omega)$ é plurisubharmônica em $\Omega\setminus F$. Seja $\varphi_0(t) := \max\{-\log\delta(z,\complement\Omega) \ : \ z \in F, |z| \leq t\}$ para $t \in \mathbb{R}$ (considere $\max\phi = -\infty$). Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente convexa tal que $\varphi(t) > \max\{t,\varphi_0(t)\}$ para $t \in \mathbb{R}$. Definamos

$$u(z) := \max\{-\log\delta(z,\complement\Omega), \varphi(|z|)\}$$

para $z \in \Omega$. Logo a função u é continua em Ω. Desde que $\varphi(|z|) > -\log(z,\complement\Omega)$ para todo z numa vizinhança de F, a função u é plurisubharmônica em Ω. Mais ainda

$$\{z \in \Omega \ : \ u(z) \leq t\} \subset \{z \in \Omega \ : \ \delta(z,\complement\Omega) \geq e^{-t}, |z| \leq t\} \subset \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo u satisfaz a condição (ii) no Teorema 3.6.7. □

Veja que neste teorema, a condição é obvia no interior do conjunto, portanto, a condição reserva-se aos pontos na fronteira do conjunto. Com isto, falando vagamente, que a propriedade de pseudoconvexidade é uma propriedade local da fronteira de um conjunto.

Teorema 3.6.11. *Seja Ω um conjunto aberto pseudoconvexo em $\mathbb{C}^n$, e seja K um subconjunto compacto de Ω, e ω uma vizinhança aberta de $\widehat{K}^P_\Omega$. Então existe uma função $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que* (*a*) *u é estritamente plurisubharmônica, isto é, a forma hermitiana em (74) é estritamente definida positiva para todo* $z \in \Omega$.

(*b*) $u < 0$ *em* K *mas* $u > 0$ *em* $\Omega \cap \complement\omega$.

(*c*) $\{z \ : \ z \in \Omega, \ u(z) < c\} \subset\subset \Omega$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Prova. Dado que Ω é pseudoconvexa existe do Teorema 3.6.7 uma função $u_0 \in P(\Omega)$ continua tal que $\{z \ : \ z \in \Omega, u_0(z) < C\} \subset\subset \Omega$, para todo $C \in \mathbb{R}$.

Depois de adicionar uma constante, se for necessário, podemos assumir que $u_0 < 0$ em K. Sejam $K' = \{z \ : \ z \in \Omega, u_0(z) \leq 2\}$ e $L = \{z \ : \ z \in \Omega, u_0(z) \leq 0\} \cap \complement\omega$. K' e L são conjuntos compactos.

Dado que $\widehat{K}_\Omega^P \subset \omega$, e $L \cap \omega = \phi$, temos que $L \subset \widehat{K}_\Omega^P = \phi$. Da definição de $P(\Omega)$ envoltória temos que, para cada $w \in L$ existe $u_w \in P(\Omega)$ tal que

$$u_w(w) > \sup_K u_w.$$

Por adicionar uma constante se for necessário, podemos assumir também que:

$$u_w(w) > 0 > \sup_K u_w.$$

Do Teorema 3.6.3, podemos obter uma função plurisubharmônica $\dot{u}_w$ de classe C^∞ numa vizinhança de K' tal que

$$u_w \leq \dot{u}_w < u_w + (-\sup_K u_w)$$

em K'. Logo se $\zeta \in K$ temos que

$$\dot{u}_w(\zeta) < u_w(\zeta) + (-\sup_K u_w) \leq \sup_K u_w + (-\sup_K u_w) = 0.$$

Então $\sup_K \dot{u}_w < 0$, e alem disso $0 < u_w(w) \leq \dot{u}_w(w)$ e da continuidade de $\dot{u}_w$, $\dot{u}_w > 0$ numa vizinhança V_w de w.

Dado que L é compacto, existe uma quantidade finita de pontos $w_1, ..., w_m \in L$ tal que $L \subset \bigcup_{i=1}^m V_{w_i}$. Podemos definir numa vizinhança de K' a função.

$$\ddot{u} := \max_{1 \leq i \leq m} \dot{u}_{w_i}.$$

Logo $\ddot{u}$ é plurisubharmônica continua numa vizinhança de K', que satisfaz

- $\ddot{u} < 0$ em K.

- $\ddot{u} > 0$ numa vizinhança de L.

Se $C = \max_{K'} \ddot{u} > 0$, então definimos em Ω, a seguinte função

$$v(z) = \begin{cases} \max\{\ddot{u}(z), Cu_0(z)\}, \text{ se } u_0(z) < 2 \\ Cu_0(z), \text{ se } u_0(z) > 1 \end{cases}$$

v esta bem definida pois, se, $1 < u_0(z) < 2$, então $z \in K'$ logo, $\ddot{u}(z) \leq C < Cu_0(z)$, e assim

$$Cu_0(z) = \max\{\ddot{u}(z), Cu_0(z)\}.$$

Também

- Se $z \in K$, então $u_0(z) < 0$ e $\ddot{u}(z) < 0$ em K, e assim

$$v(z) = \max\{\ddot{u}(z), Cu_0(z)\} < 0.$$

- Seja

$$\begin{aligned} z \in \complement\omega \cap \Omega &= \complement\omega \cap (L \cup (\Omega \setminus L)) \\ &= (\complement\omega \cap L) \cup (\complement\omega \cap (\Omega \setminus L)) \\ &= L \cup (\complement\omega \cap \{u_0 > 0\}). \end{aligned}$$

  No caso $z \in L$ então $u_0(z) \leq 0$ e $\ddot{u}(z) > 0$ e assim

$$v(z) = \max\{\ddot{u}(z), Cu_0(z)\} > 0$$

  Se $z \in \complement\omega \cap \{\zeta \ : \ u_0(\zeta) > 0\}$ então $u_0(z) > 0$ e assim $Cu_0(z) > 0$, como também $\max\{\ddot{u}(z), Cu_0(z)\} > 0$, isto é $v(z) > 0$.

  Portanto v satisfaz (b).

- Veja que $\{\zeta \ : \ v(\zeta) < d\} \subset \{\zeta \ : \ u_0(\zeta) < d/C\}$. De fato, se $v(\zeta) < d$, então pela definição de v temos que, ou $Cu_0(\zeta) < d$ ou $\max\{\ddot{u}(\zeta), Cu_0(\zeta)\} < d$, em ambos casos obtemos que $u_0(\zeta) < d/C$.

  Portanto v satisfaz (c).

Agora ja podemos afirmar que existe uma função v continua, tal que $\{z \ : \ v(z) < c\} \subset\subset \Omega$, para todo $c \in \mathbb{R}$ e ainda $v < 0$ em K e $v > 0$ em $\complement\omega \cap \Omega$.

Seja $\Omega_\varepsilon = \{z \ : \ z \in \Omega, v(z) < \varepsilon\}$. Então $\Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega$. Inicialmente, para cada $j = 0, 1, ...,$ consideremos

$$\varepsilon_j < \min\left\{\frac{d(\Omega_j, \complement\Omega_{j+1})}{2}, \frac{d(\Omega_{j+1}, \complement\Omega)}{2}\right\},$$

e com as notações do teorema 3.6.3, seja

$$v_j(z) = \frac{1}{\varepsilon_j^{2n}} \int_{\Omega_{j+1}} v(\zeta)\phi\left(\frac{z-\zeta}{\varepsilon_j}\right) d\lambda(\zeta) + \varepsilon_j |z|^2$$

e veja que $v_j \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ e se $z \in \Omega$ é tal que $d(z, \Omega_j) < \varepsilon_j$, então $B(z, \varepsilon) \subset \Omega_{j+1}$e assim

$$v_j(z) = \int v(z - \varepsilon_j\zeta)\phi(\zeta)d\lambda(\zeta) + \varepsilon_j |z|^2 . \tag{78}$$

Logo v_j é estritamente plurisubharmônica em $\{\xi \ : \ d(\xi, \Omega_j) < \varepsilon_j\}$; e alem disso $v(z) < v_j(z)$ para todo z numa vizinhança de Ω_j.

Finalmente, para a escolha de ε_j dado que o primeiro termo da parte direita de (78) decresce uniformemente em subconjuntos compactos de Ω quando $\varepsilon \searrow 0$ (pois v é continuo em Ω), podemos escolher ε_j ainda mais pequeno (se for necessário) tal que

$$v(z) < v_j(z) < v(z) + 1$$

em Ω_j, para $j = 1, 2, ...$, e $v_0 < 0$, $v_1 < 0$ em K.

Seja agora $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função convexa tal que $\chi(t) = 0$ quando $t < 0$ e $\chi'(t) > 0$ quando $t > 0$. Então $\chi(v_j + 1 - j)$ é estritamente plurisubharmônica numa vizinhança de $\overline{\Omega_j} \setminus \Omega_{j-1}$ pois se $z \in \overline{\Omega_j} \setminus \Omega_{j-1}$, então $v_j(z) \geq j - 1$, e assim $v_j(z) + 1 - j > 0$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \chi(v_j + 1 - j)}{\partial z_l \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} &= \sum_{l=1=k}^{n} \chi''(v_j + 1 - j) \frac{\partial v_j}{\partial z_l} \frac{\partial v_j}{\partial \overline{z_k}} w_l \overline{w_k} + \\
&+ \sum_{l,k=1}^{n} \chi'(v_j + 1 - j) \frac{\partial^2 v_j}{\partial z_l \partial \overline{z_k}} w_l \overline{w_k} \\
&= \chi''(v_j + 1 - j) \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial z_l} w_l \right|^2 + \\
&+ \chi'(v_j + 1 - j) \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 v_j}{\partial z_l \partial \overline{z_k}} w_l \overline{w_k} > 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado que $v_1 + 1 - 1 > 0$ em $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_0$ temos que $\chi(v_1 + 1 - 1) > 0$ em $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_0$, então podemos escolhemos $a_1 > 0$ tal que

$$a_1\chi(v_1 + 1 - 1) > \sup_{\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_0} v - v_0 > v - v_0$$

em $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_0$. De fato, também $a_1\chi(v_1 + 1 - 1) + v_0 > v$ em Ω_0. Defino agora

$$u_1 = v_0 + a_1\chi(v_1).$$

Suponha existam $a_1, ..., a_l$ de tal forma que

$$u_l = v_0 + \sum_k^l a_k \chi(v_k + 1 - k) > v$$

em Ω_l. Pela definição de v_{l+1} temos que $l < v < v_{l+1} < v+1$ e assim $0 < v_{l+1} - (l+1) + 1$ em $\overline{\Omega_{l+1}} \setminus \Omega_l$, então $\chi(v_{l+1} - (l+1) + 1) > 0$ em $\overline{\Omega_{l+1}} \setminus \Omega_l$. Agora escolhemos a_{l+1} tal que

$$a_{l+1}\chi(v_{l+1} - (l+1) + 1) > \sup_{\overline{\Omega_{l+1}} \setminus \Omega_l} v - u_l$$

em $\overline{\Omega_{l+1}} \setminus \Omega_l$. Definimos

$$u_{l+1} = v_0 + \sum_{k=1}^{l+1} a_k \chi(v_k + 1 - k)$$

e veja que $u_m = u_l$ em Ω_j se $l, m > j$; logo assim a função definida por

$$u = lim_{m\to\infty} u_m$$

existe pois é finita desde que se $z \in \Omega_l$, então $v_{l+r}(z) - (l+r) + 1 < v(z) + 1 - (l+r) + 1 \leq 0$ e portanto $\chi(v_{l+r}(z) + 1 - (l+r)) = 0$ para $r \geq 2$. Alem disso u é de classe C^∞ em Ω e estritamente plurisubharmônica em cada fatia $\overline{\Omega_{j+1}} \setminus \Omega_j$. Agora desde que $u = v_0 < 0$ em K e $u > v$ em Ω, as propriedades (a),(b) e (c) seguem. □

Teorema 3.6.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aberto com fronteira de classe C^2, e seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ onde ρ é de classe C^2 numa vizinhança de $\overline{\Omega}$ e $grad\, g \neq 0$ em $\partial\Omega$. Então Ω é pseudoconvexa se, e somente se*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \partial^2\rho/\partial z_j \partial \overline{z}_k w_j \overline{w}_k \geq 0, \quad \textit{quando} \quad z \in \partial\Omega \textit{ e } \sum_{j=1}^{n} \partial\rho/\partial z_j w_j = 0 \tag{79}$$

A condição (79) é chamada a condição de Levi; e $\partial\Omega$ é também chamada por pseudo-convexa se (79) é satisfeita.

Prova. ($\Longrightarrow$) Se ρ_1 é outra função satisfazendo a hipotese no teorema. Então $\rho_1 = h\rho$ com $h > 0$ numa vizinhança de $\overline{\Omega}$. Assim

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k = h \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k$$

se $\rho = \sum_1^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j} w_j = 0$, que prova que (79) é independente da escolha de ρ.

Definimos a função $\rho(z) := -\delta(z, \complement\Omega)$ para $z \in \Omega$ e $\rho(z) := \delta(z, \Omega)$ para $z \in \complement\Omega$. Logo $\rho \in C^2$ perto da fronteira de Ω (Segue do Teorema da função implícita). Em pontos de Ω suficientemente perto da fronteira de Ω, a plurisubharmonicidade de $-\log\delta(z,\complement\Omega)$ permite escrever

$$\sum_{j,k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2\delta}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}+\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z_j}\right)\left(\frac{\partial\delta}{\partial\overline{z}_k}\right)\right)w_j\overline{w}_k=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\left(-\log\delta(z,\complement\Omega)\right)w_j\overline{w}_k\geq 0. \tag{80}$$

para todo $w\in\mathbb{C}^n$. Se w é tal que $\sum_{j=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial w_j}w_j=0$ então $\sum_{j=1}^n\frac{\partial\delta}{\partial w_j}w_j=0$, e tambem $\sum_{j=1}^n\frac{\partial\delta}{\partial\overline{w}_j}\overline{w}_j=0$. Portanto de (80) e da definição de ρ temos que

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}w_j\overline{w}_k\geq 0$$

para todo z perto da fronteira de Ω. Da continuidade de δ obtemos que a desigualdade anterior também é satisfeita em pontos da fronteira de Ω.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que (79) é satisfeita e ρ é definida como acima. Suponha agora que para $w\in\mathbb{C}^n$ tenha se que

$$c=\frac{\partial\log\delta(z+\tau w,\complement\Omega)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}>0 \text{ quando } 0=\tau\in\mathbb{C},$$

para algum z numa vizinhança de um ponto na fronteira de Ω onde δ é de classe C^2. Da Formula de Taylor temos que

$$\begin{aligned}\log\delta(z+\tau w,\complement\Omega) &= \log\delta(z,\complement\Omega)+\frac{\partial\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z}\tau+\frac{\partial\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial\overline{z}}\overline{\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z^2}\tau^2+\\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial\overline{z}^2}\overline{\tau}^2+\frac{\partial^2\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z\partial\overline{z}}\tau\overline{\tau}+o(|a|^2)\\ &= \log\delta(z,\complement\Omega)+2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z}\tau\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z^2}\tau^2\right)+\\ &\quad+\frac{\partial\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z\partial\overline{z}}|\tau|^2+o(|\tau|^2)\end{aligned}$$

Fazendo $2A=\frac{\partial\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z}$, $B=\frac{\partial^2\log\delta(z,\complement\Omega)}{\partial z^2}$ e temos que

$$\log\delta(z+\tau w,\complement\Omega)=\log\delta(z,\complement\Omega)+\mathrm{Re}(A\tau+B\tau^2)+c|\tau|^2+o(|\tau|^2). \tag{81}$$

Seja $a\in\mathbb{C}^n$ tal que $\delta(a)=\delta(z,\complement\Omega)$, de modo que $z+a\in\partial\Omega$. Seja agora

$$z(\tau)=z+\tau w+ae^{A\tau+B\tau^2}$$

então para $P\in\complement\Omega$ temos que

$$\begin{aligned}|z(\tau)-P| &= \left|z+\tau w+ae^{A\tau+B\tau^2}-P\right|\geq\\ &\geq |z+\tau w-P|-|ae^{A\tau+B\tau^2}|\geq\delta(z+\tau w,\complement\Omega)-|a|\left|e^{A\tau+B\tau^2}\right|.\end{aligned}$$

E assim

$$\delta(z(\tau), \complement\Omega) \geq \delta(z + \tau w, \complement\Omega) - \delta(a) \left| e^{A\tau + B\tau^2} \right|. \tag{82}$$

De (81) temos que $\delta(z + \tau w, \complement\Omega) = \delta(z, \complement\Omega) \left| e^{A\tau + B\tau^2} \right| e^{c|\tau|^2 + o(|\tau|^2)}$. Logo para $|\tau|$ suficientemente pequeno tem se que $c|\tau|^2 + o(|\tau|^2) \geq c|\tau|^2/2$ e então de (82) temos que

$$\delta(z(\tau)) \geq \delta(a) \left(e^{c|\tau|^2/2} - 1 \right) \left| e^{A\tau + B\tau^2} \right| \geq 0$$

Desde que $\delta(z(0), \complement\Omega) = 0$, concluímos que $(\partial/\partial\tau)\delta(z(\tau), \complement\Omega) = 0$ e assim $(\partial^2/\partial\tau\partial\overline{\tau})\delta(z(\tau), \complement\Omega) > 0$ quando $\tau = 0$. Com a notação ρ usada acima, e desde que $z(\tau)$ é uma função analítica de τ, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j} z_j'(0) = 0, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial\overline{z}_k} z_j'(0)\overline{z_k'(0)} < 0$$

que é uma contradição com a condição de Levi (79) em $z(0)$. Isto completa a prova. $\square$

4 ANEXO

Teorema 4.0.13. *(Teorema de Baire) Seja X um espacio métrico completo. Então, se $\{U_n\}$, $n \geq 1$, é uma sequência de conjuntos abertos densos em X, o conjunto $Y = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ é denso em X.*

Prova. X é um espaço métrico completo com métrica d. Seja $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Escolhemos $x_1 \in U_1$ tal que $d(a, x_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$, e $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$, tal que $\{x \in X \ : \ d(x, x_1) \leq \varepsilon_1\} \subset U_1$. Escolhemos $x_2 \in U_2$ e $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tal que $d(x_2, x_1) < \frac{\varepsilon_1}{2}$ e $\{x \in X \ : \ d(x, x_2) \leq \varepsilon_2\} \subset U_2$. Por indução, escolhemos $x_n \in U_n$ e $\varepsilon_n > 0$ tal que $\{x \in X \ : \ d(x, x_n) \leq \varepsilon_n\} \subset U_n$, $d(x_{n+1}, x_n) < \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ e $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$. Então, se $m > n$, temos $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon_n(2^{-n} + ... + 2^{-m+1})$.
Desde que X é um espacio métrico completo, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x^0$, e temos $d(x^0, x_n) \leq \varepsilon_n \sum_{m\geq n} 2^{-m} = \varepsilon_n 2^{-n+1} \leq \varepsilon_n (n \geq 1)$. Portanto $x^0 \in U_n$ para todo n, alem $d(x^0, a) \leq d(x^0, x_1) + d(x_1, a) < \varepsilon$, assim $x^0 \in Y$, $d(x^0, a) < \varepsilon$, assim também, desde que $a \in X$ e $\varepsilon > 0$ são arbitrários, segue que Y é denso em X. □

Teorema 4.0.14 (Teorema de Dini)**.** *Seja X um espaço topológico compacto, e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente de funções de valor real em X, isto é $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, que converge pontualmente a uma função contínua f, então f_n converge uniformemente a f em X.*

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Sejam $g_n = f - f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{x \in X \ : \ g_n(x) < \varepsilon\}$. Desde que cada g_n é contínua segue que cada E_n é aberto. Desde que cada a sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente, segue que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente, logo segue que $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n \subset ...$. Desde que a sequência f_n converge pontualmente a f segue que a família de conjuntos E_n é uma cobertura aberta de X. Logo da compactidade de X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E_N = X$. Isto é para todo $n > N$ tem se que $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. □

Referências

[1] LARS HORMANDER: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. 2ed. Amsterdan North Holland, 1979.

[2] KRANTZ, STEVEN GEORGE: Function Theory of Several Complex Variables .New York, 1982.

[3] GREENE, ROBERT E; KRANTZ, STEVEN G.:Function Theory of One Complex Variables. New York: John Wiley, 1997.

[4] VLADIMIROV, VASILY SERGEYEVICH: Methods of the Theory of Functions of many Complex Variables. cambridge MIT Pres, 1966.

[5] AHLFORS, LARS VALERIAN: Complex Analylisis: An Introduction to the Theory of Analitic Functions of One Complex Variable. 3ed. New York: McGraw-Hill Book, 1979.

[6] RAGHAVAN NARASIMHAN: Several Complex Variables. University of Chicago Press, 1995.

[7] RAGHAVAN NARASIMHAN, YVES NIEVERGELT: Complex Analysis in One Variable. 2ed. Birkhauser, 2000.

[8] ZAMPIERI GIUSEPPE: Complex Analysis and CR Geometric. Berlin: Springer-Verlag, c2004.

[9] HORMANDER, LARS: Notions of Complexity. Boston: Birkhauser,1994.

[10] NISHIO, TOSHIO: Function Theory in Several Complex Variables. Rhode Island: Americam Mathematival Society, 1990.

[11] FRANK W. WARNER: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1983.