

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Poliedro de Newton e o Número de Milnor

Cristina Spohr

São Carlos - SP
Fevereiro de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Poliedro de Newton e o Número de Milnor

Cristina Spohr

Orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Fevereiro de 2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S762pn

Spohr, Cristina.

Poliedro de Newton e o Número de Milnor / Cristina
Spohr. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
85 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2006.

1. Álgebra. 2. Álgebra comutativa. 3. Singularidades. 4.
Poliedro de Newton. 5. Número de Milnor. I. Título.

CDD: 512 (20^a)

Orientador

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Agradecimentos

A Deus por todas às oportunidades.

Aos meus pais, João Francisco e Maria Lourdes Spohr, e aos meus irmãos Cássia e Tomé Spohr por todo apoio e amor.

Ao meu esposo Márcio Alexandre de Oliveira Reis pelo companheirismo, carinho e apoio.

Ao professor João Nivaldo Tomazella pela orientação e amizade.

Aos professores Carles Bívica-Ausina, Daniel Levcovitz, Waldeck Schützer e Sadao Massago pelo auxílio em algumas dúvidas.

Ao Thiago de Melo pela ajuda com o \LaTeX .

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a relação que existe entre o número de Milnor de uma série formal com o número de Newton. O número de Milnor de uma série formal é sempre maior ou igual ao número de Newton e a igualdade entre os números é obtida sempre que a série formal f possui parte principal Newton não-degenerada na origem.

Abstract

In this work, we study the relation between Milnor's number and the Newton's number of a formal series. The former is always greater than or equal to the latter and equality occurs when the formal series f has non-degenerate newtonian principal part at the origin.

Sumário

1	Preliminares	3
1.1	Anéis e Módulos Graduados	7
1.2	Filtrações	10
1.3	Anel Graduado Associado a uma Filtração Multiplicativa	10
1.4	Complexos	11
1.5	Construção do Complexo de Koszul	13
1.6	Anéis e Módulos Cohen-Macaulay	17
1.7	Séries de Hilbert	20
1.8	Complexo de Cadeia Celular	20
1.9	Grupos de Homologia Relativa	22
2	Poliedro e Filtração de Newton	24
2.1	Densidade do conjunto das partes principais não-degeneradas	31
2.2	A Filtração de Newton	33
3	O Número de Milnor e o Número de Newton	39
4	Codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$	47
4.1	Codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$ coincide com a codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1} \rangle_{i=1, \dots, k}$	63
5	Demonstração do Teorema Principal	69
	Referências Bibliográficas	80

Notação

\mathcal{C} corpo de base \mathbb{R} ou \mathbb{C}

\mathbb{Z} conjunto dos números inteiros

\mathbb{N} conjunto dos números inteiros não negativos

\mathbb{R}_+ conjunto dos números reais não negativos

$\mathcal{A} = \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ o anel das séries formais

$\mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ o anel dos polinômios

$\mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}] = \mathcal{C}[x, x^{-1}]$ o anel dos polinômios de Laurent

$\mathcal{C}\{x_1, \dots, x_k\}$ o anel das séries convergentes

$\bar{\mathcal{C}}$ o fecho algébrico de \mathcal{C}

$\mathcal{C}[P]$ anel do semigrupo de P sobre \mathcal{C}

$\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ o ideal gerado pelos elementos g_1, \dots, g_k

\underline{x} é a k -upla (x_1, \dots, x_k)

$$f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1}$$

$\Gamma_+(f)$ poliedro de Newton da série formal f

$\Gamma(f)$ fronteira ou bordo de Newton da série formal f

$\tilde{\Gamma}_+(f)$ poliedro de Newton do polinômio f

$\tilde{\Gamma}(f)$ fronteira ou bordo de Newton do polinômio f

$\Gamma_+^*(f)$ poliedro de Newton do polinômio de Laurent f

$\Gamma^*(f)$ fronteira ou bordo de Newton do polinômio de Laurent f

μ número de Milnor

ν número de Newton

$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1})$ o anel graduado associado

$$d(f) = \max_{n \in \Gamma(f)} \{|n|\}$$

M é o valor assumido pela aplicação filtrante ϕ sobre a fronteira de Newton de uma série formal.

Introdução

Um importante invariante de um germe analítico $f : (\mathbb{C}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ é seu *número de Milnor* $\mu(f)$. Este número para uma série formal $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ é dado por

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}.$$

No caso analítico complexo, temos que $\mu(f) < \infty$ se, e somente se, a origem é um ponto singular isolado de f (ver [15], [21]).

Existem outras formas equivalentes de definir o número de Milnor de um germe de função analítica que podem ser encontradas em [15], mas nós usaremos apenas a definição acima.

O número de Milnor de um germe de função $f : (\mathbb{C}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ descreve diferentes aspectos da geometria de f . Em [22] Lê Dũng Tráng mostra que, para $k \neq 3$, μ é um invariante completo do tipo topológico da singularidade. Se dois germes de hipersuperfícies complexas $V = f^{-1}(0)$ e $W = g^{-1}(0)$ com singularidades isoladas são homeomorfos, então possuem o mesmo número de Milnor. Convém ressaltar, que se uma deformação f_t de um germe f tem número de Milnor $\mu(f_t)$ constante, então as variedades $V_t = f_t^{-1}(0)$ são topologicamente equivalentes. Em [15] J. Milnor mostra que um germe f é finitamente determinado com respeito a ação do grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{C}^k, 0)$ no anel dos germes de funções analíticas se, e somente se, f tem número de Milnor finito e também mostra que se f tem número de Milnor finito e f_t é uma família de funções tais que $f = f_0$ e todos os pontos críticos de f_t , para $t \neq 0$ são não-degenerados, então o número de pontos críticos de f_t que converge para 0, quando t tende a 0, é igual a $\mu(f)$.

Apesar de sua importância o número de Milnor, em geral, é difícil de ser calculado. Kouchnirenko em seu importante artigo: Polyèdres de Newton et nombres de Milnor,

[11], exibe uma fórmula que facilita muito o cálculo deste número para germes de funções com certas propriedades. Neste artigo Kouchnirenko apresenta um teorema que relaciona o número de Milnor de uma série com o número de Newton o qual é a soma alternada de volumes de regiões determinadas pelo poliedro de Newton da série. O objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração detalhada deste teorema.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No Capítulo 1 introduzimos vários conceitos e resultados preliminares da Álgebra Comutativa e alguns conceitos da Topologia Algébrica. Para o leitor que estiver familiarizado com estes conceitos, a leitura deste capítulo poderá ser omitida.

No Capítulo 2, introduzimos vários conceitos importantes, dentre os quais podemos destacar o poliedro e fronteira de Newton, germes cômodos e germes com parte principal Newton não-degenerada. Estes conceitos foram definidos para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent, embora, posteriormente, nos limitamos apenas ao estudo para as séries de potências formais. Neste capítulo demonstramos que o conjunto das partes principais Newton não-degeneradas é aberto e denso na topologia de Zariski e portanto o conjunto das partes principais degeneradas é uma subvariedade própria na variedade de todas as partes principais que correspondem a fronteira de Newton dada. Na última seção do capítulo, construímos uma filtração no anel $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ e com auxílio desta, construímos o anel graduado associado.

O Capítulo 3, é o capítulo central do nosso trabalho. Neste capítulo enunciamos o teorema principal, Teorema 65, o qual relaciona o número de Milnor com o número de Newton, e enunciamos também os resultados necessários para demonstrá-lo. Além disso, apresentamos em linhas gerais a demonstração deste teorema.

O Capítulo 4 é dedicado as demonstrações de resultados necessários para a demonstração do teorema principal.

No Capítulo 5, apresentamos a demonstração detalhada do teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os pré-requisitos da Álgebra Comutativa e Topologia Algébrica. Para o leitor que estiver familiarizado com estes conceitos, a leitura do mesmo poderá ser omitida.

Por um anel R entendemos um anel comutativo com unidade ($1 \neq 0$) e por \mathcal{C} entendemos o corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados nas seguintes referências: [1], [3], [12], [14], [17], [18] e [19].

Um R -módulo M é *Noetheriano*, se qualquer submódulo de M é finitamente gerado.

Proposição 1: ([1], pag. 80) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) M é Noetheriano;
- b) Qualquer cadeia ascendente de submódulos de M ,

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots$$

é estacionária, ou seja, existe $l \geq 1$ tal que $N_l = N_{l+1} = \cdots$;

- c) Qualquer família não vazia de submódulos de M contém um elemento maximal N , ou seja, se existe elemento P da família tal que $N \subset P$, então $N = P$.

Um R -módulo M é *Artiniano*, se qualquer cadeia descendente de submódulos

$$M = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_n \supset \cdots$$

é estacionária.

Dizemos que o anel R é *Noetheriano* (resp. *Artiniano*), se ele é Noetheriano (resp. Artiniano) como um R -módulo.

Sejam I, J ideais de um anel R . O seguinte subconjunto de R

$$(I : J) = \{x \in R : xJ \subset I\}$$

é um ideal. No caso de um R -módulo M , podemos também definir

$$(0 :_M J) = \{x \in M : xJ = 0\}.$$

Seja R um anel e $\mathcal{P} \subset R$ um ideal primo. Uma *cadeia de ideais primos* da forma

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$$

tem comprimento n . A *altura* de um ideal primo \mathcal{P} é definida por

$$\text{alt}\mathcal{P} = \text{ht}\mathcal{P} := \sup\{n : \text{existe uma cadeia de comprimento } n \text{ com } \mathcal{P}_n = \mathcal{P}\}.$$

A *dimensão de Krull* de um anel R é dada por

$$\sup\{\text{ht}\mathcal{P} : \mathcal{P} \subset R \text{ primo}\}$$

e a denotamos por $k \dim R = \dim R$.

Seja M um R -módulo e 0 o submódulo nulo de M . Dizemos que M é *simples* se ele não contém submódulos distintos de 0 e M .

Uma *cadeia* em um módulo M é uma sequência $\{M_i\}$, com $1 \leq i \leq n$, de submódulos de M tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = 0.$$

Dizemos que n é o comprimento da cadeia. Uma *série de composição* de M é uma cadeia maximal, ou seja, M_{i-1}/M_i é simples, para $1 \leq i \leq n$. Sabemos que se M tem uma série de composição de comprimento n , então toda série de composição de M tem comprimento n (ver [1], pag.77). Isto nos permite definir o *comprimento* de M como sendo o comprimento de uma série de composição, denotado por $L_R(M)$. Se $M \neq 0$ e não existe série de composição de M a 0 , então $L_R(M) = +\infty$. $L_R(M) = 0$ se M é o módulo nulo.

Teorema 2: (*Teorema da Base de Hilbert*) ([14], pag. 16) Se R é um anel Noetheriano, então os anéis $\mathcal{R}[x_1, \dots, x_k]$ e $\mathcal{R}[[x_1, \dots, x_k]]$ são Noetherianos.

Teorema 3: (*Teorema dos Zeros de Hilbert*) ([8], pag. 21) Seja \mathcal{C} um corpo algebricamente fechado, e seja $I \subset \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ um ideal. Então

$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$$

onde $V(I)$ é a variedade algébrica do ideal I e $\mathcal{I}(V(I))$ é o ideal do conjunto algébrico $V(I)$.

Teorema 4: (*Lema de Nakayama*) ([1], pag. 21) Seja M um R -módulo finitamente gerado, e I um ideal de R contido no radical de Jacobson \mathcal{R} de R . Se $IM = M$, então $M = 0$.

Corolário 5: ([1], pag. 22) Seja M um R -módulo finitamente gerado, N um submódulo de M , e I um ideal de R contido no radical de Jacobson \mathcal{R} de R . Se $M = IM + N$, então $M = N$.

Consideramos um \mathcal{C} -espaço vetorial V . Logo temos, em V , uma estrutura de \mathcal{C} -módulo.

Proposição 6: ([1], pag. 78) Para um \mathcal{C} -espaço vetorial V as seguintes condições são equivalentes:

- a) o \mathcal{C} -espaço vetorial V possui dimensão finita;
- b) o \mathcal{C} -módulo V possui comprimento finito;
- c) é satisfeita a condição de cadeia ascendente;
- d) é satisfeita a condição de cadeia descendente.

Além disso, se essas condições são satisfeitas temos comprimento igual a dimensão.

Dizemos que P é um R -módulo *projetivo* se satisfaz a seguinte condição: para todo epimorfismo de R -módulos $\beta : B \longrightarrow C$ e qualquer homomorfismo de R -módulos $\alpha : P \longrightarrow C$, existe um homomorfismo de R -módulos $\gamma : P \longrightarrow B$ tal que $\alpha = \beta \circ \gamma$.

Observamos que um módulo P é projetivo se, e somente se, o funtor $\text{Hom}(P, \cdot)$ é exato (ver [18], pag. 62).

Dizemos que E é um R -módulo *injetivo* se satisfaz a seguinte condição: para todo monomorfismo de R -módulos $\iota : A \longrightarrow B$ e qualquer homomorfismo de R -módulos $f : A \longrightarrow E$, existe um homomorfismo de R -módulos $g : B \longrightarrow E$ tal que $f = g \circ \iota$.

E é injetivo se, e somente se, o funtor $\text{Hom}(\cdot, E)$ é exato (ver [18], pag.65).

Definição 7: Uma *resolução injetiva* de um módulo M é uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \dots$$

em que cada E^n é injetivo.

Definição 8: Uma *resolução projetiva* de um módulo M é uma sequência exata

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

em que cada P_n é projetivo.

Consideramos a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, E^0) \xrightarrow{d_*^1} \text{Hom}(C, E^1) \xrightarrow{d_*^2} \text{Hom}(C, E^2) \longrightarrow \dots$$

obtida a partir de uma resolução injetiva de A

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

Definimos o funtor Ext como

$$\text{Ext}_R^n(C, A) = \ker d_*^n / \text{Im } d_*^{n-1}.$$

Consideramos a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P_0, A) \xrightarrow{d_{1*}} \text{Hom}(P_1, A) \xrightarrow{d_{2*}} \text{Hom}(P_2, A) \longrightarrow \dots$$

obtida a partir de uma resolução projetiva de C

$$\dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Podemos ainda definir o funtor Ext como

$$\text{Ext}_R^n(C, A) = \ker d_{n*} / \text{Im } d_{n-1*}.$$

Observamos que as definições anteriores independem das resoluções injetiva e projetiva, respectivamente, e além disso, que elas coincidem (ver [18], pag.185 – 186).

1.1 Anéis e Módulos Graduados

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [17].

Definição 9: Um *monóide graduado* é um par $(\Gamma, +)$, onde Γ é um conjunto não vazio e

$$+ : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

é uma operação binária em Γ satisfazendo:

- a) $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$, para quaisquer $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$;
- b) $\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$, para quaisquer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$;
- c) Existe elemento 0 (necessariamente único) tal que $\gamma + 0 = \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$;
- d) Se $\gamma + \gamma_1 = \gamma + \gamma_2$, onde $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ estão em Γ , então $\gamma_1 = \gamma_2$.

Exemplo 10: 1) Qualquer grupo abeliano escrito aditivamente é um monóide graduado.

2) O conjunto dos inteiros não negativos munido com a adição é um monóide graduado.

3) O conjunto das sequências da forma (m_1, m_2, \dots, m_p) , $m_i \in \mathbb{Z}_+$, para todo $i = 1, \dots, p$, com a seguinte lei de composição

$$(m_1, m_2, \dots, m_p) + (m'_1, m'_2, \dots, m'_p) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2, \dots, m_p + m'_p)$$

é um monóide graduado.

Consideramos um monóide graduado Γ e um anel R . Lembramos que R possui estrutura de grupo abeliano com respeito à operação adição.

Definição 11: Uma Γ -*graduação* em R é uma família $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de subgrupos do grupo aditivo de R , satisfazendo:

- a) $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$;
- b) $R_\gamma R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma + \gamma'}$, para quaisquer $\gamma, \gamma' \in \Gamma$.

Lembramos que

$$R_\gamma R_{\gamma'} = \{r_{\gamma_1} \rho_{\gamma'_1} + \dots + r_{\gamma_s} \rho_{\gamma'_s}, \text{ onde } r_{\gamma_j} \in R_\gamma \text{ e } \rho_{\gamma'_j} \in R_{\gamma'}, \text{ para } j = 1, \dots, s\}.$$

Suponhamos que temos uma Γ -gradação em R . Cada elemento r de R tem uma única representação da forma

$$r = \sum_{\gamma} r_{\gamma}$$

onde $r_{\gamma} \in R_{\gamma}$ e a soma contém somente um número finito de termos não nulos.

Definição 12: Os elementos de R_{γ} são chamados *homogêneos de grau γ* e r_{γ} é chamada *componente homogênea* de r , de grau γ .

Observação 13: 1) O elemento zero do anel R é homogêneo de grau γ , para todo $\gamma \in \Gamma$.

2) Dado um anel R , podemos sempre obter uma Γ -gradação de R , pondo $R_0 = R$ e $R_{\gamma} = 0$, quando $\gamma \neq 0$, chamada de *Γ -gradação trivial* em R .

3) Seja R um anel Γ -graduado. O elemento identidade de R é homogêneo de grau zero, e conseqüentemente R_0 é um subanel de R .

Exemplo 14: Seja $\Gamma = \mathbb{N}$, R um anel e $R[x_1, \dots, x_k]$ o anel dos polinômios nas indeterminadas x_1, \dots, x_k . Os conjuntos $\overline{S}_d = \{\text{polinômios de grau } d\}$ são subgrupos de $R[x_1, \dots, x_k]$, para todo $d \geq 0$. Logo

$$R[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \overline{S}_d.$$

Seja $R = \sum_{\gamma} R_{\gamma}$ um anel Γ -graduado e seja M um R -módulo. Temos em M uma estrutura de grupo abeliano aditivo.

Definição 15: Uma *Γ -gradação* em M é uma família $\{M_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ de subgrupos do grupo aditivo M que satisfaz:

- a) $M = \bigoplus_{\gamma} M_{\gamma}$;
- b) $R_{\gamma} M_{\gamma'} \subseteq M_{\gamma+\gamma'}$, para quaisquer $\gamma, \gamma' \in \Gamma$.

Lembramos que

$$R_{\gamma} M_{\gamma'} = \{r_{\gamma_1} m_{\gamma'_1} + \dots + r_{\gamma_n} m_{\gamma'_n} : r_{\gamma_i} \in R_{\gamma}, m_{\gamma'_i} \in M_{\gamma'}, i = 1, \dots, n\}.$$

Seja $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_{\gamma}$ um módulo Γ -graduado sobre um anel Γ -graduado $R = \bigoplus_{\gamma} R_{\gamma}$.

Cada elemento $m \in M$ tem uma única representação na forma

$$m = \sum_{\gamma} m_{\gamma}$$

onde $m_{\gamma} \in M_{\gamma}$ e a soma contém somente um número finito de termos não nulos.

Definição 16: Os elementos de M_{γ} são ditos *homogêneos de grau γ* e m_{γ} é chamada *componente homogênea de grau γ* de m .

Observação 17: 1) Notamos que cada M_{γ} é um R_0 -módulo.

2) Sejam R um anel e M um R -módulo. Consideramos R com a Γ -gradação trivial. Podemos sempre tornar M um módulo Γ -graduado sobre o anel Γ -graduado R , fazendo $M_0 = M$ e $M_{\gamma} = 0$, para $\gamma \neq 0$.

Proposição 18: ([17], pag. 115) Se K é um submódulo de um R -módulo Γ -graduado $M = \bigoplus_{\gamma} M_{\gamma}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $K = \bigoplus_{\gamma} (M_{\gamma} \cap K)$;
- b) Se $y \in K$, então todas as componentes homogêneas de y pertencem a K ;
- c) K pode ser gerado, como R -módulo, por elementos homogêneos.

Um submódulo K que satisfaz uma condição (e portanto todas as propriedades (a), (b) e (c)) da proposição anterior é chamado *submódulo homogêneo* de M .

Seja $M = \bigoplus_{\gamma} M_{\gamma}$ um módulo Γ -graduado sobre um anel Γ -graduado $R = \bigoplus_{\gamma} R_{\gamma}$ e seja K um submódulo homogêneo de M . Se escrevermos $K_{\gamma} = M_{\gamma} \cap K$, então K_{γ} é um subgrupo do grupo aditivo K .

A família $\{K_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ constitui uma Γ -gradação em K . Chamamos esta graduação de *gradação induzida*.

Ainda assumindo que K é um submódulo homogêneo de M , seja

$$\phi : M \longrightarrow M/K$$

a aplicação natural. Ambos M e M/K são R_0 -módulos e portanto ϕ é um R_0 -homomorfismo. Colocamos

$$\phi(M_{\gamma}) = (M/K)_{\gamma}. \tag{1.1}$$

Então $(M/K)_\gamma$ é um R_0 -submódulo de M/K e portanto um subgrupo aditivo de M/K . Então temos que a família $\{(M/K)_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma Γ -gradação em M/K . A Γ -gradação $\{(M/K)_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ em M/K é chamada de *gradação quociente*.

Teorema 19: ([1], pag. 106) *Seja R um anel graduado, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) R é um anel Noetheriano;
- b) R_0 é Noetheriano e R é finitamente gerado como R_0 -álgebra.

1.2 Filtrações

Seja R um anel. Uma *filtração* em R é uma família de ideais $\{R_n\}_{n \geq 0}$ satisfazendo $R_n \supseteq R_{n+1}$, para todo $n \geq 0$.

Seja $\{R_n\}_{n \geq 0}$ uma filtração de ideais num anel R . $\{R_n\}_{n \geq 0}$ é uma *filtração multiplicativa* em R se:

- a) $R_0 = R$;
- b) $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$.

Exemplo 20: Seja I um ideal em R . Então $\{I^n\}_{n \geq 0}$ (as potências do ideal I) constitui uma filtração multiplicativa em R .

1.3 Anel Graduado Associado a uma Filtração Multiplicativa

Seja $\{R_n\}_{n \geq 0}$ uma filtração multiplicativa em R . Definimos

$$\text{gr } R = (R_0/R_1) \oplus (R_1/R_2) \oplus (R_2/R_3) \oplus \cdots .$$

Notamos que $\text{gr } R$ possui uma estrutura de grupo abeliano. Podemos também definir uma estrutura multiplicativa em $\text{gr } R$ da seguinte maneira

$$\text{gr } R \times \text{gr } R \longrightarrow \text{gr } R$$

$$(\sum_i x_i, \sum_j y_j) \mapsto (\sum_i x_i)(\sum_j y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j.$$

Com estas operações $\text{gr } R$ se torna um anel.

$\text{gr } R$ é dito o *anel graduado associado a filtração multiplicativa* $\{R_n\}_{n \geq 0}$ do anel R .

Os elementos homogêneos de grau m , $m \geq 0$, do anel $\text{gr } R$ são os elementos de R_m/R_{m+1} .

Observação 21: O elemento identidade em $\text{gr } R$ é a imagem de $1_R \in R_0/R_1 = R/R_1$.

1.4 Complexos

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [17].

Um *complexo* de R -módulos é uma sequência

$$\cdots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \rightarrow \cdots \quad (1.2)$$

de R -módulos e R -homomorfismos estendida indefinidamente em ambas as direções, com a propriedade que

$$d_n d_{n+1} = 0 \quad (1.3)$$

para todo n .

M_n será chamado *módulo componente de grau n* ou a *n -ésima componente do complexo*.

d_n será chamado *n -ésima diferencial* ou *n -ésimo homomorfismo de bordo*.

Por simplicidade, representamos (1.2) por (M, d) , ou ainda como M .

Além disso, a condição dada em (1.3), pode ser escrita como $d^2 = 0$.

Vamos agora definir os módulos de homologia de um complexo. Para isto, consideramos um complexo (M, d) de R -módulos. Seja

$$Z_n(M) = \ker d_n$$

$$B_n(M) = \text{Im } d_{n+1}$$

os elementos de $Z_n(M)$ são chamados os *n -ciclos* de M e os de $B_n(M)$ os *n -bordos*.

Segue de (1.3) que para todo $n \geq 0$, vale a inclusão abaixo

$$B_n(M) \subseteq Z_n(M).$$

Portanto, podemos definir o seguinte R -módulo quociente

$$H_n(M) = Z_n(M)/B_n(M) \quad (1.4)$$

que é chamado n -ésimo módulo de homologia do complexo M .

Observação 22: A sequência (1.2) é exata se, e somente se, os módulos de homologia $H_n(M)$ de M são nulos, para todo n .

Definição 23: Um complexo (M, d) é *acíclico* se $H_n(M) = 0$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Assim um complexo é acíclico se, e somente se, for uma sequência exata.

Sejam (M', d') e (M, d) complexos de R -módulos. Uma aplicação entre os complexos (M', d') e (M, d) , é uma família $\{\phi_n\}$ de R -homomorfismos

$$\phi_n : M'_n \longrightarrow M_n$$

para todo n , $-\infty < n < \infty$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M'_n & \xrightarrow{d'_n} & M'_{n-1} \\ \phi_n \downarrow & & \downarrow \phi_{n-1} \\ M_n & \xrightarrow{d_n} & M_{n-1} \end{array} \quad (1.5)$$

é comutativo, isto é, tal que

$$\phi_{n-1}d'_n = d_n\phi_n,$$

para todo n .

Por simplicidade, escrevemos $\phi : M' \longrightarrow M$. ϕ é chamado um *isomorfismo de complexos* se ϕ_n é um isomorfismo de R -módulos, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Seja $\phi : M' \longrightarrow M$ uma aplicação entre complexos. O fato do diagrama (1.5) ser comutativo implica que

$$\phi_n(Z_n(M')) \subseteq Z_n(M). \quad (1.6)$$

Por outro lado, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & M'_n \\ \phi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & M_n \end{array}$$

é também comutativo, e portanto temos

$$\phi_n(B_n(M')) \subseteq B_n(M). \quad (1.7)$$

Com base em (1.6) e (1.7), ϕ_n é uma aplicação entre os pares $(B_n(M'), Z_n(M'))$ e $(B_n(M), Z_n(M))$. Logo induz um homomorfismo

$$\phi_n^* : H_n(M') \longrightarrow H_n(M) \quad (1.8)$$

dado por $\phi_n^*(m + B_n(M')) = \phi_n(m) + B_n(M)$, onde $m \in Z_n(M')$.

Portanto a aplicação $\phi : M' \longrightarrow M$ de complexos induz homomorfismos

$$H_n(M') \longrightarrow H_n(M)$$

dos módulos de homologia de M' nos módulos de homologia de M .

O complexo (M, d) é chamado um *complexo à esquerda* se $M_n = 0$, para todo $n < 0$. Portanto um exemplo típico de um complexo à esquerda tem a forma

$$\cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

1.5 Construção do Complexo de Koszul

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [17].

Seja M um R -módulo e $\gamma_1, \dots, \gamma_s (s \geq 0)$ elementos do anel R . Vamos construir um complexo de R -módulos que chamaremos *complexo de Koszul* de M com respeito a $\gamma_1, \dots, \gamma_s$. Denotamos o complexo de Koszul de M com respeito a $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ por $K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | R | M)$, ou por $K(\underline{\gamma} | M) = K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$ se não há dúvidas sobre o anel em questão.

O complexo de Koszul $K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$ tem a forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_s(\underline{\gamma} | M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1(\underline{\gamma} | M) \longrightarrow K_0(\underline{\gamma} | M) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Para $0 \leq \mu \leq s$, a μ -ésima componente $K_\mu(\underline{\gamma} | M)$ é a soma direta de $\binom{s}{\mu}$ cópias de M , onde $\binom{s}{\mu}$ é o coeficiente binomial usual. Portanto quando $s = 0$, $K(\cdot | M)$ é simplesmente

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Para $s \geq 1$ é necessário descrever os homomorfismos de bordo e para isto introduzimos algumas notações. Sejam T_1, T_2, \dots, T_s novos símbolos e escrevemos

$$K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) = \bigoplus_{i_1 < i_2 < \dots < i_\mu} MT_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}$$

onde i_1, i_2, \dots, i_μ são inteiros que variam $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\mu \leq s$.

Exemplo 24: Seja $s = 3$ e $\mu = 2$. Temos que

$$K_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | M) = M \oplus M \oplus M.$$

Mas com a nova notação escrevemos

$$K_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | M) = MT_{i_1} T_{i_2} \oplus MT_{i_2} T_{i_3} \oplus MT_{i_1} T_{i_3}.$$

Portanto, quando $0 \leq \mu \leq s$, $K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$ é efetivamente a soma direta de M , $\binom{s}{\mu}$ cópias e um elemento de $K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$ tem uma única representação na forma

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_\mu} m_{i_1 i_2 \dots i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}$$

onde $m_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$ pertence a M . No caso $\mu = 0$, nós temos que

$$K_0(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) = M.$$

Queremos agora definir um homomorfismo de bordo

$$d_\mu : K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) \longrightarrow K_{\mu-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$$

e observamos que aqui, somente valores de μ que satisfazem $0 \leq \mu \leq s$ é que necessitam consideração. Supomos então que μ está nestas condições e sejam i_1, i_2, \dots, i_μ inteiros tais que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\mu \leq s$. Desde que cada elemento de $K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$ é unicamente expresso como uma soma de elementos da forma $mT_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}$, colocamos

$$d_\mu(mT_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}) = \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} mT_{i_1} \dots \widehat{T}_{i_p} \dots T_{i_\mu} \quad (1.9)$$

onde $\widehat{}$ sobre T_{i_p} significa que este fator foi omitido. Notamos que d_μ é um homomorfismo de R -módulos.

Quando $\mu = 1$, (1.9) assegura que $d_1(mT_{i_1}) = \gamma_{i_1}m$.

É necessário agora, mostrarmos que

$$\cdots \rightarrow K_{\mu+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) \xrightarrow{d_{\mu+1}} K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) \xrightarrow{d_\mu} K_{\mu-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) \rightarrow \cdots$$

realmente é um complexo, isto é, precisamos verificar que $d_{\mu-1}d_\mu = 0$. Supomos $0 \leq \mu - 1 < \mu \leq s$ e queremos verificar que

$$d_{\mu-1}d_\mu(mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_\mu}) = 0. \quad (1.10)$$

Consideramos $1 \leq p < q \leq \mu$, então quando calcularmos o lado esquerdo de (1.10) temos que o termo $\gamma_{i_p}\gamma_{i_q}mT_{i_1}\dots\widehat{T}_{i_p}\dots\widehat{T}_{i_q}\dots T_{i_\mu}$ ocorre duas vezes. Numa ocasião o termo está multiplicado por $(-1)^{p-1}(-1)^{q-1}$ e na outra por $(-1)^{p-1}(-1)^{q-2}$, e daí os dois termos se anulam e conseqüentemente temos $d_{\mu-1}d_\mu = 0$.

Desde que $K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$ é um complexo, podemos formar seu módulo de homologia. O μ -ésimo módulo de homologia será denotado por

$$H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$$

que as vezes abreviaremos para $H_\mu K(\underline{\gamma}|M) = H_\mu(\underline{\gamma}|M)$.

Observamos que $H_\mu K(\underline{\gamma}|M) = 0$, quando $\mu > s$ ou $\mu < 0$. De fato, pois para $\mu > s$ ou $\mu < 0$ temos que $K_\mu(\underline{\gamma}|M) = 0$.

Um elemento de $K_1(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$ tem a forma $\sum_{i=1}^s m_i T_i$, onde $m_i \in M$, logo por $d_1(mT_{i_1}) = \gamma_{i_1}m$, temos

$$d_1(\sum_{i=1}^s m_i T_i) = \gamma_1 m_1 + \cdots + \gamma_s m_s.$$

Portanto

$$\text{Im } d_1 = \gamma_1 M + \cdots + \gamma_s M.$$

Assim, desde que $K_{-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = 0$, temos

$$H_0 K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = M/(\gamma_1 M + \cdots + \gamma_s M).$$

Cada elemento de $K_s(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$ tem a forma $mT_1T_2\dots T_s$. Por (1.9)

$$d_s(mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_s}) = \sum_{p=1}^s (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} mT_{i_1}\dots \widehat{T}_{i_p}\dots T_{i_s}.$$

Assim, $d_s(mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_s}) = 0 \Leftrightarrow \gamma_i m = 0$, para $i = 1, 2, \dots, s$.

Identificamos $K_s(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$ com M , assim $mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_s}$ se identifica com m .

Logo

$$\ker d_s = (0 :_M (\gamma_1 R + \dots + \gamma_s R)).$$

Portanto desde que $K_{s+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = 0$, temos

$$H_s K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = (0 :_M (\gamma_1 R + \dots + \gamma_s R)).$$

Definição 25: Sejam y_1, \dots, y_n elementos do anel R , denotados por \underline{y} . Denotamos por $K(\underline{y})$ o complexo de Koszul de \underline{y} . Mais geralmente, se M é um R -módulo, então $K(\underline{y}, M)$ é o complexo $K(\underline{y}) \otimes_R M$ chamado *complexo de Koszul de \underline{y} com coeficientes em M* , sua diferencial é denotada por $d_{\underline{y}, M}$.

Definição 26: Os elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_s (s \geq 0)$ formam um *sistema de multiplicidade* em M (M um R -módulo) se o R -módulo $M/(\gamma_1 M + \dots + \gamma_s M)$ tem comprimento finito. Quando $s = 0$, esta condição significa que $L_R(M)$ é finito.

Lema 27: ([17], pag. 369) *Seja M um R -módulo Noetheriano e $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M . Então cada um dos R -módulos $H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$ tem comprimento finito.*

Seja M um R -módulo Noetheriano e $\gamma_1, \dots, \gamma_s (s \geq 0)$ um sistema de multiplicidade em M . Pelo lema anterior, cada módulo de homologia $H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$ tem comprimento finito, portanto podemos definir a soma

$$\chi_R(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = \sum_{\mu} (-1)^\mu L_R(H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)).$$

Para $s = 0$, temos $\chi_R(\cdot|M) = L_R(M)$.

Suponhamos que (M, d) é um complexo de R -módulos tal que todos os módulos componentes tem comprimento finito e no máximo um número finito deles são não

nulos, então a soma

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} L_R(M_{\mu})$$

está bem definida e é chamada a *característica de Euler-Poincaré* de M .

1.6 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Consideramos um anel Noetheriano local R , com ideal maximal \mathcal{M} . Seja M um R -módulo finitamente gerado. O conjunto

$$\text{Ann}(M) = \{a \in R : am = 0, \text{ para todo } m \in M\}$$

é um ideal de R , chamado o *anulador* de M .

Definimos a *dimensão* de M , $\dim M$, como a dimensão de Krull do anel $R/\text{Ann}(M)$, assim

$$\dim M = \dim\left(\frac{R}{\text{Ann}(M)}\right).$$

Observamos que, se $\text{Ann}(M) = 0$, temos $\dim M = \dim R$.

Seja (R, \mathcal{M}) um anel Noetheriano local com dimensão r , ou seja, $\dim R = r$. Dizemos que o conjunto $\{a_1, \dots, a_r\}$ de elementos em \mathcal{M} é um *sistema de parâmetros* de R , se eles geram um ideal \mathcal{M} -primário.

Seja M um R -módulo finitamente gerado e $\dim M = s$. Dizemos que os elementos $a_1, \dots, a_s \in \mathcal{M}$ formam um *sistema de parâmetros* em M , se o R -módulo

$$\frac{M}{(a_1M + \dots + a_sM)}$$

tem comprimento finito.

Notamos que o número de elementos num sistema de parâmetros de M deve ser igual a dimensão de M , por definição.

Dizemos que um elemento $a \in R$ é *M -regular* se $am = 0$ para todo $m \in M$, $m \neq 0$, implica $a = 0$.

Definição 28: Seja (R, \mathcal{M}) um anel Noetheriano local e I um ideal do anel R . Uma sequência $a_1, \dots, a_n \in I$ de elementos de R é chamada *M -regular* se as seguintes

condições forem satisfeitas:

- a) a_1 é M -regular, a_2 é (M/a_1M) -regular, ..., a_n é $(M/(a_1, \dots, a_{n-1})M)$ -regular;
- b) $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$.

Observamos que se $I = \mathcal{M}$ na definição anterior, diremos que a_1, \dots, a_n é uma M -sequência ou M -sequência regular.

Uma sequência M -regular x_1, \dots, x_n em I é *maximal* quando x_1, \dots, x_n, x não é uma sequência M -regular, para todo $x \in I$.

Suponhamos que $M \neq 0$ e $I = \mathcal{M}$. Qualquer M -sequência pode ser estendida a uma M -sequência maximal. De fato, pois caso contrário, seria possível construir uma sequência infinita (a_1, a_2, \dots) satisfazendo (a) da definição acima e uma cadeia estritamente ascendente de ideais

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subset \dots$$

o que contradiz o fato de R ser um anel Noetheriano. Além disso, observamos que todas as sequências maximais tem o mesmo número de elementos e toda M -sequência pode ser estendida a um sistema de parâmetros (ver [19], pag.61).

Definição 29: O número de elementos numa M -sequência maximal de M é chamada a *profundidade* de M , e é denotada por $\text{depth}_R M$. Um módulo M é chamado *módulo Cohen-Macaulay* se

$$\dim M = \text{depth} M.$$

Um anel R é chamado *anel Cohen-Macaulay* se ele é um módulo Cohen-Macaulay quando visto como um módulo sobre si mesmo.

Definimos *profundidade* de I em M , como o número de elementos de uma sequência M -regular maximal contida em I e denotaremos por $\text{depth}(I, M)$.

Teorema 30: ([19], pag.65) *Se M é um módulo Cohen-Macaulay, todo sistema de parâmetros de M é uma M -sequência. Reciprocamente, se um sistema de parâmetros de M é uma M -sequência, M é um módulo Cohen-Macaulay.*

Outro modo de definirmos a profundidade de um módulo M , vista por exemplo em [14], é através do funtor Ext , como segue abaixo.

Teorema 31: ([14], pag. 130) *Seja R um anel Noetheriano, I um ideal de R e M um R -módulo finitamente gerado tal que $M \neq IM$, então o comprimento de uma M -sequência maximal em I é um inteiro bem definido n , e n é determinado por $\text{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$, se $i < n$ e $\text{Ext}_R^n(R/I, M) \neq 0$. Escrevemos $n = \text{depth}(I, M)$, e chamamos n o I -depth de M .*

Assim o teorema anterior toma a forma

$$\text{depth}(I, M) = \inf\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Em particular, para um anel local Noetheriano (R, \mathcal{M}, K) , onde $K = R/\mathcal{M}$, chamamos $\text{depth}(\mathcal{M}, M)$ simplesmente o depth de M , e escrevemos $\text{depth}M$ ou $\text{depth}_R M$:

$$\text{depth}M = \inf\{i : \text{Ext}_R^i(K, M) \neq 0\}.$$

Teorema 32: ([14], pag. 131) *Seja R um anel Noetheriano, $I = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ um ideal de R e M um R -módulo finitamente gerado tal que $M \neq IM$. Se*

$$q = \sup\{i : H_i(\underline{y}, M) \neq 0\}$$

então qualquer M -sequência maximal em I tem comprimento $n - q$, onde \underline{y} denota elementos $y_1, \dots, y_n \in R$ e $H_i(\underline{y}, M) = H_i K(\underline{y}, M)$, ou seja, são os módulos de homologia do complexo de Koszul dos elementos $y_1, \dots, y_n \in R$, com coeficientes no R -módulo M .

Observação 33: O teorema anterior afirma que $\text{depth}(I, M)$ é o número de termos nulos sucessivos, da esquerda para a direita, na sequência

$$H_n(\underline{y}, M), H_{n-1}(\underline{y}, M), \dots, H_0(\underline{y}, M) = M/IM \neq 0.$$

Corolário 34: ([14], pag. 131) *Nas hipóteses do teorema anterior, temos y_1, \dots, y_n é uma M -sequência se, e somente se, $\text{depth}(I, M) = n$.*

1.7 Séries de Hilbert

Seja $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ um anel Noetheriano graduado. Depois do Teorema 19 segue que R_0 é Noetheriano e R é finitamente gerado como uma R_0 -álgebra, digamos por y_1, \dots, y_s e supomos que estes são homogêneos de graus positivos l_1, \dots, l_s , respectivamente.

Seja $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ um R -módulo graduado finitamente gerado e portanto Noetheriano. Então podemos dizer que M é gerado por um número finito de elementos homogêneos, tais como m_1, \dots, m_j homogêneos de graus r_1, \dots, r_j , respectivamente.

Definição 35: Definimos a *série de Hilbert* do módulo M como

$$p_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_R(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$$

onde $L_R(M_n)$ é o comprimento do submódulo M_n .

Teorema 36: ([1], pag. 117) $p_M(t)$ é uma função racional em t da forma

$$f(t) / \prod_{i=1}^s (1 - t^{l_i}), \text{ onde } f(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Logo $p_M(t)$ possui um polo em $t = 1$. Denotaremos por $d(M)$ a ordem deste polo.

Observamos que $d(R) = \dim R$ (ver [1], pag. 119), no caso em que $M = R$.

Supomos agora que M_q seja um \mathcal{C} -espaço vetorial, para todo $q \geq 0$. Supomos ainda que $\dim M_q$ é finita, para todo $q \geq 0$.

Definição 37: Definimos a *série de Poincaré* do R -módulo graduado M como a série $p_M(t) = \sum_{q=0}^{\infty} (\dim M_q) \cdot t^q$.

No caso em que M_q é \mathcal{C} -espaço vetorial de dimensão finita, segue que o comprimento é igual a dimensão, pelo Teorema 6, portanto a definição de série de Hilbert e série de Poincaré coincidem.

1.8 Complexo de Cadeia Celular

Os resultados das próximas duas seções podem ser encontrados em [12].

Definição 38: Seja $k \geq 0$. Um *simplexo* k -dimensional, ou k -simplexo, é o fecho convexo σ de $k + 1$ pontos linearmente independentes $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Escrevemos

$$\sigma = v_0 v_1 \dots v_k.$$

Os pontos v_i são chamados os *vértices* de σ .

Consideramos agora os seguintes conjuntos

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \partial(E^n).$$

Temos que U^n é homeomorfo a \mathbb{R}^n . Seja X^* um espaço de Hausdorff e X um subconjunto fechado de X^* , tal que

$$X^* - X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda^n$$

onde a união anterior é uma união disjunta e cada e_λ^n é um subconjunto aberto, homeomorfo a U^n . Chamaremos e_λ^n *n-célula* ou *n-célula aberta*.

Para cada índice $\lambda \in \Lambda$, existe uma aplicação contínua

$$f_\lambda : E^n \longrightarrow \bar{e}_\lambda^n$$

tal que f_λ aplica U^n homeomorficamente em e_λ^n e $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X$. Esta aplicação chamaremos de *aplicação característica*.

Definição 39: Uma estrutura de *CW-complexo* em um espaço X (Hausdorff) é uma sequência ascendente de subespaços fechados em X

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisfaz as seguintes condições:

- a) X^0 tem topologia discreta;
- b) para $n > 0$, X^n é obtido de X^{n-1} colando uma coleção de n -células de modo que

sejam satisfeitas as condições vistas anteriormente;

c) X é união dos subespaços X^i , para $i \geq 0$;

d) o espaço X e os subespaços X^q têm a topologia fraca: Um subconjunto A é fechado se, e somente se, $A \cap \bar{e}^n$ é fechado em \bar{e}^n , para qualquer n -célula e^n , $n = 0, 1, 2, \dots$

Chamaremos X^n de n -esqueleto.

1.9 Grupos de Homologia Relativa

Seja X um espaço e A um subespaço de X . Seja $C_n(X)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto dos n -simplexos e_λ^n em X . Seja $C_n(X, A)$ o grupo quociente $C_n(X)/C_n(A)$. A aplicação de bordo

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

é tal que $\partial(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$, portanto induz uma aplicação de bordo quociente

$$\partial : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A).$$

Assim temos uma sequência de aplicações de bordo

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Observamos que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Portanto temos um complexo de cadeias, chamado *complexo de cadeia celular* de X . Logo, podemos considerar os grupos de homologia $\ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ deste complexo, que serão chamados de *grupos de homologia relativa* $H_n(X, A)$.

Os grupos de homologia relativa $H_n(X, A)$, para qualquer par (X, A) , se encaixam em uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0 \quad (1.11)$$

onde ι_n é a aplicação que associa $x + \text{Im } \partial$ ($x \in \ker \partial \subset C_n(A)$) em $\iota(x) + \text{Im } \partial$ ($\iota(x) \in \ker \partial \subset C_n(X)$), onde ι é a aplicação inclusão de $C_n(A)$ em $C_n(X)$. Da mesma forma é definido j_n em função da aplicação quociente j de $C_n(X)$ em $C_n(X)/C_n(A)$.

Teorema 40: ([12]) *Seja X um CW-complexo. Então $H_q(X^n, X^{n-1})$ é zero para $q \neq n$ e é abeliano livre para $q = n$, com base em correspondência um-a-um com as n -células de X .*

Com auxílio da sequência exata longa (1.11) dos pares (X^{n+1}, X^n) , (X^n, X^{n-1}) e (X^{n-1}, X^{n-2}) , obtemos a seguinte sequência

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \cdots$$

onde d_{n+1} e d_n são definidas como as composições $J_n \partial_{n+1}$ e $J_{n-1} \partial_n$. Como a sequência (1.11) é exata, temos que $\partial_n J_n = 0$, e então a composição $d_n d_{n+1} = 0$.

Portanto a sequência anterior é um complexo de cadeias, chamado *sequência de homologia do complexo de cadeia celular* de X .

Desde que $H_n(X^n, X^{n-1})$ é livre com base em correspondência com as n -células de X , podemos pensar os elementos de $H_n(X^n, X^{n-1})$ como combinações lineares de n -células de X .

Capítulo 2

Poliedro e Filtração de Newton

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos preliminares. Dentre estes, definiremos o poliedro de Newton, germes cômodos e uma classe importante de funções, que são os germes com parte principal Newton não-degenerada.

Construiremos ainda uma filtração no anel das séries de potências formais, que chamaremos filtração de Newton, associada ao poliedro de Newton. Com auxílio desta filtração construiremos o anel graduado associado.

Em [2], esta construção é generalizada, uma vez que é construída a filtração a partir do poliedro de Newton de um germe qualquer, não necessariamente da série em questão.

Observamos que neste capítulo definiremos os conceitos para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent, mas no teorema principal nos limitaremos apenas às séries formais. Convém ressaltar, que existe um teorema semelhante ao teorema principal, para polinômios e polinômios de Laurent (ver [11],5.8 - 5.11).

Definição 41: Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$, onde $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ e $a_n \in \mathcal{C}$. Definimos o *suporte* da série f por:

$$\text{supp } f = \{n \in \mathbb{Z}^k : a_n \neq 0\}.$$

Desde que $\mathbb{N}^k \subset \mathbb{Z}^k$, esta definição é aplicável para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent.

Definição 42: Chamamos a série formal (ou polinômio) $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$ *cômodo*, se

para qualquer $i = 1, \dots, k$ o monômio $x_i^{n_i}$, onde $n_i \geq 1$, aparece em f com o coeficiente não nulo.

O polinômio de Laurent $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$ é chamado *cômodo*, se o ponto 0 do espaço \mathbb{R}^k não pertence a nenhum plano das faces de dimensão i ($1 \leq i \leq k-1$) do poliedro que está no fecho convexo do conjunto $\text{supp } f \setminus \{0\}$ em \mathbb{R}^k .

Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. Definimos *poliedro de Newton*, $\Gamma_+(f)$, de uma série formal como o fecho convexo em \mathbb{R}_+^k do conjunto $\cup(n + \mathbb{R}_+^k)$ onde $n \in \text{supp } f \setminus \{0\}$.

Definimos a *fronteira de Newton (bordo)* da série f na origem como a união das faces compactas do poliedro $\Gamma_+(f)$, denotada por $\Gamma(f)$.

A *parte principal newtoniana* ou simplesmente *parte principal* da série formal f , na origem, é definida como sendo o polinômio $f_0 = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n$. A união de todos os segmentos de origem 0 e extremo sobre $\Gamma(f)$ é denotada por $\Gamma_-(f)$.

Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ um polinômio cômodo. O fecho convexo do conjunto $\{0\} \cup \text{supp } f$ em \mathbb{R}_+^k é denotado por $\tilde{\Gamma}_-(f)$.

Definimos a *fronteira de Newton (bordo)* do polinômio f , no infinito, como a união das faces fechadas do poliedro $\tilde{\Gamma}_-(f)$ que não passam pela origem e denotamos por $\tilde{\Gamma}(f)$.

Definimos a *parte principal newtoniana* ou simplesmente *parte principal* do polinômio f , no infinito, como o polinômio: $\tilde{f}_0 = \sum_{n \in \tilde{\Gamma}(f)} a_n x^n$.

Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ um polinômio de Laurent cômodo. O fecho convexo em \mathbb{R}^k do conjunto $\text{supp } f \setminus \{0\}$ é denotado por $\Gamma^*(f)$. Definimos a *fronteira de Newton* do polinômio de Laurent f , como sendo

$$\Gamma^*(f) = \partial \Gamma^*(f).$$

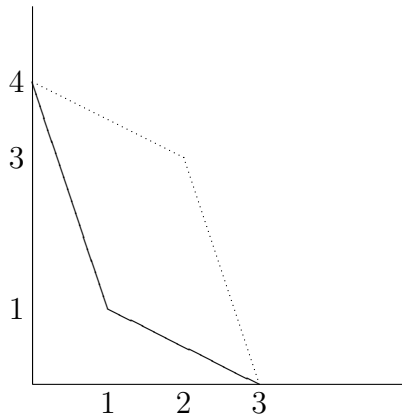
Definimos *parte principal newtoniana* ou simplesmente *parte principal* de f , como sendo o polinômio de Laurent

$$f_0^* = \sum_{n \in \Gamma^*(f)} a_n x^n.$$

Exemplo 43: Seja $f : (\mathcal{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathcal{C}, 0)$ dada por

$$f(x, y) = x^3 + xy + x^2y^3 + y^4.$$

O poliedro de Newton de f , pensando f como sendo uma série formal, é dado pela parte ilimitada em \mathbb{R}_+^2 , a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos $(0, 4)$ a $(1, 1)$ e $(1, 1)$ a $(3, 0)$. E $\Gamma_-(f)$ é a parte limitada em \mathbb{R}_+^2 pelos mesmos segmentos de reta e estes segmentos de reta formam a fronteira de Newton, como observamos na figura abaixo



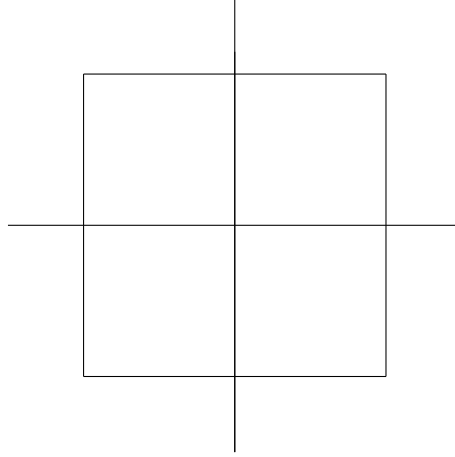
Se pensarmos f como um polinômio, temos que $\tilde{\Gamma}_-(f)$ é a parte limitada em \mathbb{R}_+^2 pelos segmentos pontilhados que ligam os pontos $(0, 4)$ a $(2, 3)$ e $(2, 3)$ a $(3, 0)$. E estes segmentos pontilhados formam o bordo de Newton do polinômio f .

Exemplo 44: Seja $f \in \mathcal{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ dada por

$$f(x, x^{-1}, y, y^{-1}) = x^2 + x^2y^2 + y^2 + x^{-2} + x^{-2}y^{-2} + y^{-2} + x^{-2}y^2 + x^2y^{-2}.$$

Temos que $\Gamma_-^*(f)$ é dada pela área em \mathbb{R}^2 limitada pelos segmentos de reta unindo os pontos $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, 2)$. E estes segmentos de reta formam a

fronteira de Newton do polinômio de Laurent f , como podemos ver na figura abaixo:



Definição 45: Seja S um poliedro compacto de \mathbb{R}_+^k . Definimos o *número de Newton* $\nu(S)$ do poliedro S pela fórmula

$$\nu(S) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k,$$

onde V_k é o volume de dimensão k do poliedro S e V_q é a soma dos volumes de dimensão q das interseções de S com todos os planos coordenados de dimensão q , para $1 \leq q \leq k-1$.

Esta definição é válida tanto para séries formais quanto para polinômios.

Definição 46: Seja S um poliedro compacto de \mathbb{R}^k . Definimos

$$\nu(S) = k!V_k(S).$$

Definição 47: Seja f uma série cômoda, ou um polinômio ou um polinômio de Laurent. Definimos o *número de Newton* de f da seguinte maneira:

para $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, definimos $\nu(f) = \nu(\Gamma_-(f))$;

para $f \in \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$, definimos $\tilde{\nu}(f) = \tilde{\nu}(\tilde{\Gamma}_-(f))$;

para $f \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$, definimos $\nu^*(f) = \nu^*(\Gamma_-^*(f))$.

Exemplo 48: Consideramos a série, polinômio e polinômio de Laurent dos exemplos (43) e (44), ou seja, $f : (\mathcal{C}^2, 0) \rightarrow (\mathcal{C}, 0)$ dada por

$$f(x, y) = x^3 + xy + x^2y^3 + y^4.$$

Então, se pensarmos f como uma série formal, temos que $V_2 = \frac{7}{2}$, $V_1 = 3 + 4 = 7$. Logo,

$$\nu(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 7 + 1 = 1.$$

Se pensarmos f como um polinômio, temos $V_2 = \frac{17}{2}$, $V_1 = 3 + 4 = 7$. Logo,

$$\tilde{\nu}(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 2 \cdot \frac{17}{2} - 7 + 1 = 11.$$

Consideramos $f \in \mathcal{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ dada por

$$f(x, x^{-1}, y, y^{-1}) = x^2 + x^2y^2 + y^2 + x^{-2} + x^{-2}y^{-2} + y^{-2} + x^{-2}y^2 + x^2y^{-2}$$

como no exemplo (44). Então

$$\nu^*(f) = 2!V_2 = 2 \cdot 16 = 32.$$

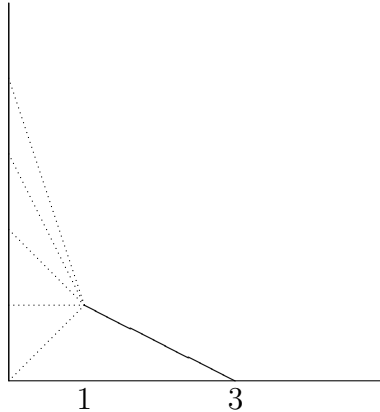
Definição 49: Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal não-cômuda onde não se encontram os monômios contendo somente uma das indeterminadas x_1, \dots, x_q , mas se encontram monômios com indeterminadas x_{q+1}, \dots, x_k . Então definimos o número de Newton de f por

$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + x_1^m + \dots + x_q^m).$$

Exemplo 50: Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, x_2, x_3, x_4]]$ dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^3 + x_1^2x_2^5 + x_3^7 + x_4$, temos que $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ não é cômuda. Então, por definição

$$\nu(f(x_1, x_2, x_3, x_4)) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_1^m + x_2^m).$$

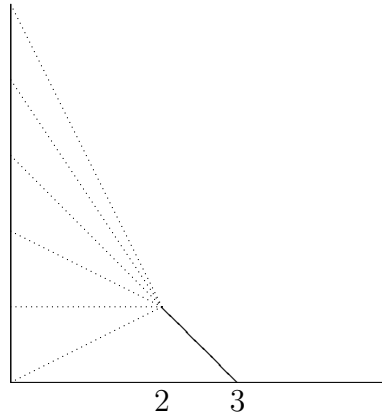
Exemplo 51: Consideramos $f(x, y) = x^3 + xy$. f é uma série não-cômuda. Definimos $g_m = f + y^m$, para $m \in \mathbb{N}$. Temos na figura abaixo o suporte da série g_m , para cada $m \in \mathbb{N}$:



Por definição

$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + y^m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} (2!(2 + \frac{m-1}{2}) - 1!(3+m) + 1) = 1.$$

Exemplo 52: Consideramos $f(x, y) = x^3 + x^2y$. A série f não é cômoda. Definimos $g_m = f + y^m$ que é uma série cômoda, para todo $m > 0$. Para cada m , temos os pontos do suporte da série g_m como observamos na figura abaixo



Por definição

$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + y^m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} (2!(\frac{1}{2} + 2 + m - 1) - 1!(3 + m) + 1) = \sup_{m \in \mathbb{N}} (m + 1) = \infty.$$

Introduziremos agora a noção de Newton não-degeneração, para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent.

Definição 53: Sejam $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$ e Δ um subespaço compacto de \mathbb{R}^k . Definimos

$$g_\Delta = \sum_{n \in (\Delta \cap \mathbb{Z}^k)} a_n x^n.$$

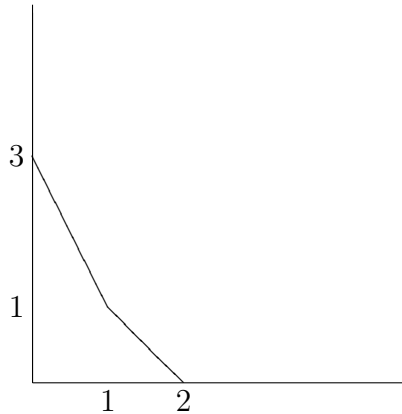
Dizemos que a parte principal de uma série (de um polinômio ou de um polinômio de Laurent) f é *Newton não-degenerada*, se para qualquer face fechada Δ da fronteira de Newton

$$(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1})_\Delta, \dots, (x_k \frac{\partial f}{\partial x_k})_\Delta$$

não se anulam simultaneamente sobre $(\bar{\mathcal{C}} \setminus 0)^k$.

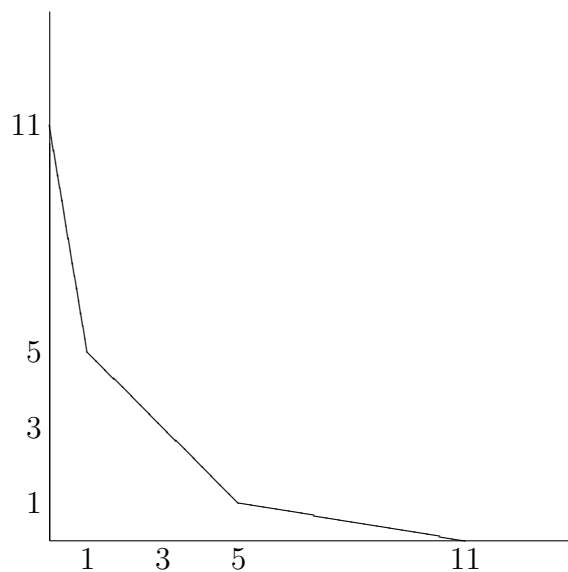
Se um germe não é Newton não-degenerado, dizemos que o germe é *Newton degenerado* ou simplesmente *degenerado*.

Exemplo 54: Consideramos a série formal $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$. O poliedro de Newton da série f é dado por



Notamos que f é uma série Newton não-degenerada, pois se $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_1} = 0$ e $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_1} = 0$, onde Δ_1 é a face formada pelos vértices $(1, 1)$ e $(2, 0)$, então $x = 0$ ou $y = 0$. E se $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_2} = 0$ e $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_2} = 0$, onde Δ_2 é a face formada pelos vértices $(1, 1)$ e $(0, 3)$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Exemplo 55: Consideramos a série formal $f(x, y) = x^{11} + x^5y - 2x^3y^3 + xy^5 + y^{11}$. O poliedro de Newton da série f é dado por



Temos que f é uma série degenerada, pois na face Δ formada pelos vértices $(5, 1)$, $(1, 5)$, temos $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta} = xy(x^2 - y^2)(5x^2 - y^2)$ e $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta} = xy(x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2)$ tem o polinômio $x^2 - y^2 = 0$ como solução comum.

Definição 56: Para $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, definimos

$$d(f) = \max_{n \in \Gamma(f)} \{|n|\}$$

onde $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ e $|n| = n_1 + \dots + n_k$.

2.1 Densidade do conjunto das partes principais não-degeneradas

Nesta seção mostraremos que o conjunto das partes principais Newton não-degeneradas é aberto e denso, na topologia de Zariski. Portanto, o conjunto das partes principais degeneradas é uma subvariedade algébrica na variedade de todas as partes principais que correspondem à fronteira de Newton dada.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o corpo \mathcal{C} é algebricamente fechado.

Observação 57: Consideramos Δ um poliedro compacto, convexo, de dimensão q em \mathbb{R}^k , cujos vértices pertencem a \mathbb{Z}^k , para q entre 0 e $k - 1$. Supomos também, que Δ não está situado em um subespaço linear de dimensão q .

Seja S um subconjunto compacto de \mathbb{R}^k . Definimos

$$\mathcal{C}[S] = \{f \in \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k] : \text{supp } f \subset S\}.$$

Teorema 58: ([9], pag. 49) (**Teorema de Sard**) Seja $f : N \rightarrow P$ uma aplicação suave. O conjunto dos valores regulares de f é denso em P .

Teorema 59: Para cada poliedro $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ satisfazendo as hipóteses da observação anterior, existe um subconjunto do espaço $\mathcal{C}[\Delta]$ aberto e denso na topologia de Zariski, que consiste de todos os polinômios de Laurent $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ tais que os polinômios de Laurent

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

não se anulam ao mesmo tempo sobre $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$.

Demonstração: Para cada $f \in \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k]$, o ideal

$$\left\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\rangle$$

não depende da escolha da base em \mathbb{Z}^k .

Escolhendo uma nova base em \mathbb{Z}^k , podemos supor que para um certo i temos:

$$\Delta \subset \{t \in \mathbb{R}^k : t_k = i\}.$$

Substituindo x_i por x_i^d , $i \leq k-1$, para um $d \in \mathbb{N}$ conveniente, podemos supor que para um $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ temos $(0, \dots, 0, i) \in \text{supp } f$.

Então

$$f(x_1, \dots, x_k) = x_k^i g(x_1, \dots, x_{k-1})$$

onde $g(x_1, \dots, x_{k-1})$ é um polinômio de Laurent nas variáveis x_1, \dots, x_{k-1} .

Se $x_k^i g \in \mathcal{C}[\Delta]$, então para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, temos $x_k^i(g - \alpha) \in \mathcal{C}[\Delta]$. Calculando as derivadas de $x_k^i(g - \alpha)$, temos que se

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_k^i(g - \alpha)), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k^i(g - \alpha))$$

se anulam ao mesmo tempo sobre $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$, então α é um valor crítico do polinômio de Laurent $g(x_1, \dots, x_{k-1})$. De fato, se as derivadas, vistas anteriormente, se anulam ao mesmo tempo sobre $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$, significa que o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_k^i x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ x_k^i x_{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_{k-1}} = 0 \\ i g x_k^i - i \alpha x_k^i = 0 \end{cases}$$

se anula em um ponto $\beta \in (\mathcal{C} \setminus 0)^k$, donde temos

$$\begin{cases} \frac{\partial g(\beta)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g(\beta)}{\partial x_{k-1}} = 0 \\ g(\beta) - \alpha = 0 \end{cases}$$

ou seja, α é um valor crítico de g .

Mas, pelo Teorema 58, o conjunto dos valores regulares de g é denso. Assim, para cada $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ e para quase todos os $\alpha \in \mathcal{C}$ os polinômios

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

não podem se anular ao mesmo tempo sobre $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$. Dado que para cada $\alpha \in \mathcal{C}$ e cada $f \in \mathcal{C}[\Delta]$, temos que $f - \alpha x_k^i \in \mathcal{C}[\Delta]$ e temos que o conjunto de polinômios da forma $f - \alpha x_k^i$ satisfaz a propriedade de que as séries

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

não se anulam simultaneamente sobre $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$, para quase todos os α e todos f e portanto é denso. Além disso este conjunto é aberto uma vez que seu complementar é o conjunto de zeros dos polinômios

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i).$$

Portanto, $\{f - \alpha x_k^i\}$ com a propriedade de

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

não se anular simultaneamente sobre $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$ é um conjunto aberto e denso, na topologia de Zariski. ■

Notamos que este resultado é válido para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent.

2.2 A Filtração de Newton

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [3].

Seja $\mathcal{A} = \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ o anel das séries de potências formais.

Definição 60: Seja $\Gamma_+ \subseteq \mathbb{R}^k$ um poliedro de Newton, dado um vetor $v \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$, definimos

$$l(v) = \min\{\langle n, v \rangle : n \in \Gamma_+\}.$$

Uma *face* de Γ_+ é um subconjunto da forma

$$\Delta(v) = \{n \in \Gamma_+ : \langle n, v \rangle = l(v), \text{ para algum } v \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}\}.$$

Definição 61: Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{Z}_+^k \setminus \{0\}$ é *primitivo* quando v é o vetor de menor comprimento entre os vetores do conjunto $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}_+\} \cap \{\mathbb{Z}_+^k \setminus \{0\}\}$.

Consideramos Δ um poliedro compacto, convexo, de dimensão q (q entre 0 e $k-1$) em \mathbb{R}^k , cujos vértices pertencem à \mathbb{Z}^k . Suponhamos que Δ não esteja situado em um subespaço linear de dimensão q . Definimos $C(\Delta)$ como sendo o cone convexo de vértice 0 e de base Δ , isto é, a reunião de todas as semi-retas de \mathbb{R}^k de origem 0 que passam por Δ .

Dizemos que uma face $\Delta(v)$ tem dimensão d , $0 \leq d \leq k-1$, quando o menor subespaço afim que contém $\Delta(v)$ tem dimensão d . Para cada poliedro de Newton, definimos

$$K(\Gamma) = \max\{\dim C(\Delta) : \Delta \text{ é uma face compacta de } \Gamma\}.$$

Definição 62: Seja R um anel comutativo qualquer, uma *filtração* sobre R é uma função

$$d : R \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

tal que

- 1) $d(1) \geq 0, d(0) = +\infty$
- 2) $d(x + y) \geq \min\{d(x), d(y)\}$
- 3) $d(x \cdot y) \geq d(x) + d(y)$

Observamos que esta definição e a definição de filtração da seção 1.2 são equivalentes, pois a partir de uma filtração $d : R \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ podemos construir subconjuntos $R_q = \{x \in R : d(x) \geq q\} \subseteq R$, onde $q \in \mathbb{N}$.

Pelas propriedades da aplicação d temos que, $R_0 = R$ e que R_q é um ideal, para todo $q \geq 0$.

Além disso valem:

$$R_p \cdot R_q \subseteq R_{p+q} \quad e \quad R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots \supseteq R_q \supseteq \cdots$$

Reciprocamente, dada uma filtração no sentido da seção 1.2, a função grau é uma filtração segundo a definição (62).

Dizemos que a filtração d é *homogênea* quando $d(x^q) = q \cdot d(x)$ para todo $x \in R$, $q \in \mathbb{N}$.

Supomos que $\Gamma_+ \subseteq \mathbb{R}^k$ é um poliedro de Newton com vértices em \mathbb{Z}_+^k e tal que $K(\Gamma) = k$. Observamos que para cada face de dimensão máxima, existe um único vetor primitivo v tal que $\Delta = \Delta(v)$.

Sejam v_1, v_2, \dots, v_r os vetores primitivos correspondentes às faces de dimensão $k-1$ de Γ , tais que $l(v_j) \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, r$. Seja M o mínimo múltiplo comum entre $l(v_1), l(v_2), \dots, l(v_r)$, ou qualquer outro múltiplo destes números. Para cada $j = 1, 2, \dots, r$ consideramos a aplicação linear

$$\phi_{\Delta(v_j)} : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por

$$\phi_{\Delta(v_j)}(n) = \frac{M}{l(v_j)} \langle n, v_j \rangle .$$

Definimos assim a aplicação filtrante associada a Γ_+ como a aplicação

$$\phi : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por

$$\phi(n) = \min\{\phi_{\Delta(v_j)}(n); j = 1, 2, \dots, r\}.$$

Notamos que

$$\phi|_{C(\Delta(v_j))}(n) = \phi_{\Delta(v_j)}(n)$$

para todo $n \in C(\Delta(v_j))$ e para $j = 1, \dots, r$, ou seja, a aplicação ϕ é linear sobre cada cone $C(\Delta(v_j))$.

A aplicação ϕ é tal que

$$\phi(a + b) \geq \phi(a) + \phi(b)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}_+^k$ e se cumpre a igualdade se, e somente se, existe uma face $\Delta \subseteq \Gamma$ de dimensão máxima tal que $a, b \in C(\Delta)$.

Além disso, $\phi(\mathbb{Z}_+^k) \subseteq \mathbb{Z}_+$ e o valor de ϕ sobre cada ponto de Γ é igual a M .
 Afirmamos que toda função

$$\phi' : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

tal que ϕ' é linear sobre cada cone $C(\Delta(v_j))$ e ϕ' é constante sobre Γ é um múltiplo de ϕ .

De fato, queremos mostrar que $\phi' = \lambda \cdot \phi$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como ϕ' e ϕ são constantes sobre Γ , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\phi' = \lambda \cdot \phi$ em Γ .

Agora dado $n \in \mathbb{R}_+^k$, então $n \in C(\Delta(v_j))$ para alguma face $\Delta(v_j)$. Logo $n = \mu \cdot m$, onde $m \in \Delta(v_j)$ e $\mu \in \mathbb{R}$, e assim temos

$$\phi(n) = \phi_{C(\Delta(v_j))}(n) = \mu \cdot \phi_{\Delta(v_j)}(m) = \mu \cdot L = \lambda(\mu N) = \lambda(\mu \phi'_{C(\Delta(v_j))}(m)) = \lambda \phi'(n),$$

para todo n pertencendo a \mathbb{R}_+^k , onde $L = \phi'_{\Delta(v_j)}(\Gamma)$ e $N = \phi_{\Delta(v_j)}(\Gamma)$.

Definição 63: Chamamos *filtração de Newton* induzida por Γ_+ a aplicação

$$d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

dada por

$$d(h) = \min\{\phi(n) : n \in \text{supp}(h)\},$$

quando $h \neq 0$ e $d(0) = +\infty$.

$d(h)$ é o grau (ou nível) de h com respeito a Γ_+ .

Observamos que d é uma filtração homogênea sobre \mathcal{A} .

Como na definição 62, a partir desta função construímos os seguintes ideais

$$\mathcal{A}_q = \{g \in \mathcal{A} : d(g) \geq q\} = \{g \in \mathcal{A} : \phi(\text{supp}(g)) \subseteq [q, +\infty)\} \cup \{0\},$$

para todo $q \in \mathbb{N}$.

Além disso, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $q = q(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}^n \subset \mathcal{A}_q$, onde \mathcal{M} é o único ideal maximal do anel $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. E temos que $\bigcap_{q \geq 0} \mathcal{A}_q = \{0\}$.

A partir desta filtração podemos considerar o anel graduado

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} \left(\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \right) = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathbf{A}_q), \text{ para todo } q \geq 0.$$

Como \mathcal{A}_q é um ideal e $\mathcal{A}_{q+1} \subseteq \mathcal{A}_q$, para todo $q \geq 0$, podemos considerar o quociente $\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$, que é um subgrupo aditivo induzido pela operação de soma do ideal \mathcal{A}_q . Assim $\mathbf{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}})$ tem estrutura de grupo aditivo. Logo, resta definirmos uma multiplicação em \mathbf{A} . Definimos $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$. Observamos que esta operação está bem definida.

Outro anel associado a filtração é o *anel de Rees*. Consideramos o anel graduado

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}),$$

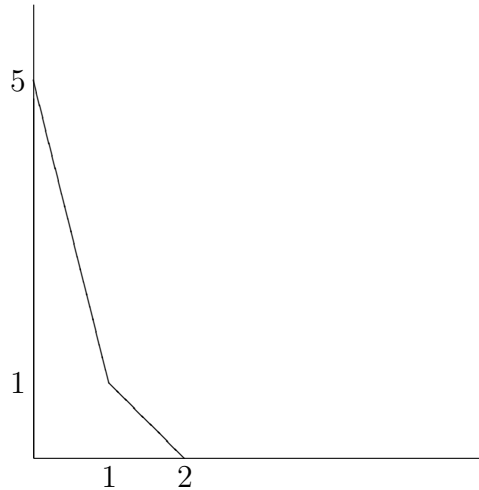
e qualquer $f \in \mathbf{A}$, com $f = \sum_{q \geq 0} \bar{f}_q$, onde $\bar{f}_q \in \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ para $q \geq 0$. \bar{f}_q é um elemento homogêneo de grau q . Fazendo

$$\tilde{f} = \sum_{q \geq 0} \bar{f}_q \cdot t^q,$$

temos o anel de Rees

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(d) = \bigoplus_{q \geq 0} (\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}) \cdot t^q \subseteq \mathbf{A}[t].$$

Exemplo 64: Em $\mathcal{C}[[x, y]]$ consideramos $f(x, y) = x^2 + xy + y^5$. Então, $\text{supp } f = \{(2, 0), (1, 1), (0, 5)\}$. Logo temos duas faces compactas de dimensão 1, Δ_1 e Δ_2 com vértices em $\{(2, 0), (1, 1)\}$, $\{(1, 1), (0, 5)\}$, respectivamente.



Temos que $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (4, 1)$ são os vetores primitivos com respeito a Δ_1 e Δ_2 , respectivamente. E, temos também que $l(v_1) = 2$ e $l(v_2) = 5$. Assim, $M =$

$\text{mmc}\{l(v_1), l(v_2)\} = 10$. Então

$$\phi(n) = \min\left\{\left(\frac{10}{2}\right) \langle n, v_1 \rangle, \left(\frac{10}{5}\right) \langle n, v_2 \rangle\right\}.$$

Vamos construir os ideais \mathcal{A}_q , para todo $q \geq 0$. Segue que $\mathcal{A}_0 = \mathcal{C}[[x, y]]$, $\mathcal{A}_1 = \langle x, y \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle x, y \rangle$, $\mathcal{A}_3 = \langle x, y^2 \rangle$, $\mathcal{A}_4 = \langle x, y^2 \rangle$, $\mathcal{A}_5 = \langle x, y^3 \rangle$, $\mathcal{A}_6 = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$, $\mathcal{A}_7 = \langle x^2, xy, y^4 \rangle$, $\mathcal{A}_8 = \langle x^2, xy, y^4 \rangle$, $\mathcal{A}_9 = \langle x^2, xy, y^5 \rangle$, $\mathcal{A}_{10} = \langle x^2, xy, y^5 \rangle$, $\mathcal{A}_{11} = \langle x^3, xy^2, x^2y, y^6 \rangle$, $\mathcal{A}_{12} = \langle x^3, xy^2, x^2y, y^6 \rangle$, $\mathcal{A}_{13} = \langle x^3, xy^3, x^2y, y^7 \rangle, \dots$

Assim, obtemos os seguintes subespaços vetoriais $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1 = \langle 1 \rangle$, $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2 = \langle 0 \rangle$, $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_3 = \langle y \rangle$, $\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_4 = \langle 0 \rangle$, $\mathcal{A}_4/\mathcal{A}_5 = \langle y^2 \rangle$, $\mathcal{A}_5/\mathcal{A}_6 = \langle x \rangle$, $\mathcal{A}_6/\mathcal{A}_7 = \langle y^3 \rangle$, $\mathcal{A}_7/\mathcal{A}_8 = \langle 0 \rangle$, $\mathcal{A}_8/\mathcal{A}_9 = \langle y^4 \rangle$, $\mathcal{A}_9/\mathcal{A}_{10} = \langle 0 \rangle$, $\mathcal{A}_{10}/\mathcal{A}_{11} = \langle x^2, xy, y^5 \rangle$, $\mathcal{A}_{11}/\mathcal{A}_{12} = \langle 0 \rangle$, $\mathcal{A}_{12}/\mathcal{A}_{13} = \langle xy^2, y^6 \rangle, \dots$

Portanto o anel graduado associado a filtração é dado por

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \langle 1 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle y \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle y^2 \rangle \oplus \langle x \rangle \oplus \langle y^3 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle y^4 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle x^2, xy, y^5 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle xy^2, y^6 \rangle \oplus \dots$$

O anel de Rees $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ é dado por

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \langle 1 \rangle \oplus \langle 0 \rangle t \oplus \langle y \rangle t^2 \oplus \langle 0 \rangle t^3 \oplus \langle y^2 \rangle t^4 \oplus \langle x \rangle t^5 \oplus \langle y^3 \rangle t^6 \oplus \langle 0 \rangle t^7 \oplus \langle y^4 \rangle t^8 \oplus \langle 0 \rangle t^9 \oplus \langle x^2, xy, y^5 \rangle t^{10} \oplus \dots$$

Capítulo 3

O Número de Milnor e o Número de Newton

O principal objetivo do nosso trabalho é fornecer uma relação entre o número de Milnor e o número de Newton. Esta relação é dada no seguinte resultado:

Teorema 65: *a) O número de Milnor de uma série formal f é maior ou igual ao número de Newton, ou seja,*

$$\mu(f) \geq \nu(f)$$

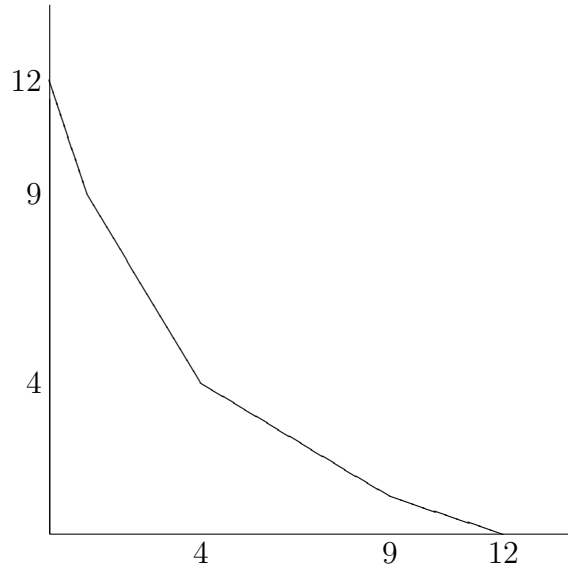
e $\mu(f) = \infty$ se $\nu(f) = \infty$.

b) Se a parte principal f_0 da série f é Newton não-degenerada então $\mu(f) = \nu(f)$.

Esta relação, entre o número de Milnor e o número de Newton, dada por Kouchnirenko em [11], é muito relevante, uma vez que o número de Newton é fácil de ser calculado, em dimensões "pequenas", e depende somente do poliedro de Newton da série f , enquanto que número de Milnor, em geral, é muito difícil de ser calculado, como observamos no exemplo a seguir.

Exemplo 66: Seja $f : (\mathcal{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathcal{C}, 0)$ dada por

$$f(x, y) = x^{12} + x^9y + x^4y^4 + xy^9 + y^{12}.$$



Temos que f é uma série com parte principal Newton não-degenerada. Logo, pelo teorema anterior, temos que o número de Milnor de f é igual ao número de Newton

$$\mu(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 2 \cdot 44 - 1 \cdot 24 + 1 = 65.$$

Por outro lado, determinar o número de Milnor, usando a definição, é determinar a seguinte dimensão

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle 12x^{11} + 9x^8y + 4x^3y^4 + y^9, x^9 + 4x^4y^3 + 9xy^8 + 12y^{11} \rangle}$$

que é um cálculo difícil.

Agora enunciamos os principais resultados necessários para a demonstração do Teorema 65 e damos uma idéia geral da demonstração deste resultado. Observamos que a demonstração detalhada do teorema será dada no Capítulo 5. A demonstração da parte (b) do teorema será feita em dois casos: quando f for uma série cômoda e quando f for não-cômoda. Começamos no caso em que f é cômoda.

Teorema 67: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda com parte principal Newton não-degenerada na origem. Então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle} = k!V_k$$

onde V_k é o volume de dimensão k do poliedro $\Gamma_-(f)$.

A demonstração deste teorema é bastante trabalhosa e será apresentada no próximo capítulo.

Observamos que em [2] é feita uma generalização do teorema anterior.

A seguir enunciaremos e demonstraremos alguns lemas que são essenciais:

Lema 68: *Se $g', g'', g_2, \dots, g_k \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ e $g_1 = g' \cdot g''$ então*

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g'', g_2, \dots, g_k \rangle}.$$

Demonstração: Observamos primeiramente que no caso de dimensão infinita, vale a igualdade.

Assim podemos supor que todos os espaços vetoriais anteriores possuem dimensão finita.

Seja

$$\overline{\mathcal{O}} = \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g_2, \dots, g_k \rangle}.$$

Então

$$\frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g'g'', g_2, \dots, g_k \rangle} \cong \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]/\langle g_2, \dots, g_k \rangle}{\langle g'g'', g_2, \dots, g_k \rangle/\langle g_2, \dots, g_k \rangle} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\langle g'g'' \rangle}$$

onde $\overline{g'g''} = g'g'' + \langle g_2, \dots, g_k \rangle$. Da mesma forma

$$\frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle} \cong \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]/\langle g_2, \dots, g_k \rangle}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle/\langle g_2, \dots, g_k \rangle} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\langle g' \rangle}$$

e

$$\frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g'', g_2, \dots, g_k \rangle} \cong \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]/\langle g_2, \dots, g_k \rangle}{\langle g'', g_2, \dots, g_k \rangle/\langle g_2, \dots, g_k \rangle} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\langle g'' \rangle}$$

onde $\overline{g'} = g' + \langle g_2, \dots, g_k \rangle$ e $\overline{g''} = g'' + \langle g_2, \dots, g_k \rangle$. Consideramos agora a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \overline{g'}/\langle \overline{g'g''} \rangle \xrightarrow{\iota} \overline{\mathcal{O}}/\langle \overline{g'g''} \rangle \xrightarrow{j} \overline{\mathcal{O}}/\langle \overline{g'} \rangle \longrightarrow 0$$

onde ι é a aplicação inclusão, e j é a aplicação que associa a cada classe $x + \langle \overline{g'g''} \rangle$, a classe $x + \langle \overline{g'} \rangle$, que está bem definida pois o ideal $\langle \overline{g'g''} \rangle$ está contido em $\langle \overline{g'} \rangle$.

Assim, resta mostrar que $\overline{g'}/\langle \overline{g'g''} \rangle \cong \overline{\mathcal{O}}/\langle \overline{g''} \rangle$. Consideramos o homomorfismo $\psi : \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \overline{g'}$ dado por $\psi(\eta) = \eta\overline{g'}$, e consideramos o homomorfismo sobrejetor

$\pi : \langle \bar{g}' \rangle \longrightarrow \langle \bar{g}' \rangle / \langle \bar{g}' \bar{g}'' \rangle$. Seja $\varphi : \bar{\mathcal{O}} \longrightarrow \langle \bar{g}' \rangle / \langle \bar{g}' \bar{g}'' \rangle$, a aplicação composta $\pi \circ \psi$. Observamos que $\langle \bar{g}'' \rangle \subset \ker \varphi$, assim φ induz uma aplicação

$$\phi : \bar{\mathcal{O}} / \langle \bar{g}'' \rangle \longrightarrow \langle \bar{g}' \rangle / \langle \bar{g}' \bar{g}'' \rangle$$

da seguinte maneira $\phi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi)$, que está bem definida pois $\langle \bar{g}'' \rangle \subset \ker \varphi$, e é um homomorfismo sobrejetor. Além disso, ϕ é injetor, pois se $\phi(\bar{\xi}) = 0$, então $\xi \bar{g}' \in \langle \bar{g}' \bar{g}'' \rangle$. Logo $\xi \bar{g}' = m \bar{g}' \bar{g}''$. Se \bar{g}' for não-divisor do zero em $\bar{\mathcal{O}}$, então segue que $\xi \in \langle \bar{g}'' \rangle$. Assim $\bar{\xi} = 0$. Portanto ϕ é um isomorfismo.

Temos que \bar{g}' é não-divisor do zero em $\bar{\mathcal{O}}$, pois a sequência g', g_2, \dots, g_k é uma sequência regular. De fato, como $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle}$ é finita, então pelo Teorema 6, $\frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle}$ tem comprimento finito, logo por definição g', g_2, \dots, g_k é um sistema de parâmetros e como $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ é um anel Cohen-Macaulay, temos pelo Teorema 30, que g', g_2, \dots, g_k é uma sequência regular. ■

Seja I um subconjunto próprio de $\{1, 2, \dots, k\}$. Por $|I|$ entendemos o número de elementos em I . Consideramos o seguinte conjunto

$$\mathbb{R}_{+I} = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k : \text{para qualquer } \alpha \in I, t_\alpha = 0\}$$

e $\mathbb{N}_I = \mathbb{N}^k \cap \mathbb{R}_{+I}$. Dada $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$, seja $f_I = \sum_{n \in \mathbb{N}_I} a_n x^n$ que é uma série formal de $k - |I|$ variáveis.

Denotaremos o número de Milnor de uma série formal f_I por μ_I . Caso $I = \emptyset$, escrevemos $\mu_\emptyset = \mu(f)$, e caso $I = \{1, 2, \dots, k\}$, escrevemos $\mu_{\{1, \dots, k\}} = 1$.

Lema 69: *O número*

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle$$

é igual a uma soma de 2^k termos, a saber $\sum_{I \in 2^{\{1, \dots, k\}}} \mu_I$, onde $2^{\{1, \dots, k\}}$ significa todos os subconjuntos das partes de $\{1, \dots, k\}$.

Demonstração: Queremos mostrar que

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle = \sum_{I \in 2^{\{1, \dots, k\}}} \mu_I, \quad (3.1)$$

onde $2^{\{1, \dots, k\}}$ significa todos os subconjuntos das partes de $\{1, \dots, k\}$, que são 2^k subconjuntos.

Para mostrar (3.1) vamos usar o princípio de indução em k (observamos que k também é a quantidade de termos da forma $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ além de ser o número de variáveis, de forma que a indução será feita na quantidade de termos da forma $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$). Para $k = 1$ temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x} \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle x \rangle} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$$

onde $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle x \rangle} = \mu_{\{1\}}$ e $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle} = \mu(f) = \mu_{\emptyset}$, e assim $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$ se escreve como uma soma de dois elementos.

Observamos que para $k = 2$ temos:

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x, y \rangle} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \rangle} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle}$$

onde $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \mu(f) = \mu_{\emptyset}$, $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]/\langle y \rangle}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \rangle/\langle y \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle} = \mu(f_{\{2\}}) = \mu_{\{2\}}$, $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]/\langle x \rangle}{\langle x, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle/\langle x \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \mu(f_{\{1\}}) = \mu_{\{1\}}$ e $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x, y \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = 1 = \mu_{\{1, 2\}}$.

Portanto

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \mu_{\emptyset} + \mu_{\{2\}} + \mu_{\{1\}} + \mu_{\{1, 2\}} = \sum_{I \in 2^{\{1, 2\}}} \mu_I.$$

Suponhamos por hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para $k - 1$, e mostraremos que a afirmação é verdadeira para k . Agora

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, x_k \rangle} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

onde $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, x_k \rangle}$, por hipótese de indução, é uma soma de 2^{k-1} termos e da mesma forma $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$, por hipótese de indução, é uma soma de 2^{k-1} termos. Assim $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$ é uma soma de $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ termos. Portanto, vale (3.1). ■

Lema 70: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda, com parte principal Newton não-degenerada na origem. Seja I um subconjunto próprio do conjunto*

$\{1, \dots, k\}$. Então:

a) a série f_I é uma série formal cômoda, com parte principal Newton não-degenerada na origem;

b) $\Gamma_-(f_I) = \Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}_{+I}$.

A demonstração do lema anterior segue imediatamente do fato de f_I ser a série f vista com $k - |I|$ variáveis e deste modo herda as propriedades de f .

A seguir esboçamos em linhas gerais o ítem (b) do Teorema 65, para séries cômodas, com parte principal Newton não-degenerada. Com auxílio do Lema 69, conseguimos escrever

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

como uma soma de 2^k termos, onde os termos desta soma são os números de Milnor da função f_I .

Por outro lado, pensando f como uma função de menos variáveis, digamos $k - |L|$, onde $L \subset \{1, \dots, k\}$, pelo Teorema 67

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f_I}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \rangle} = (k - |I|)! V_{k-|I|}^I,$$

onde $V_{k-|I|}^I$ é o volume de dimensão $k - |I|$ de $\Gamma_-(f_I)$. Fazendo somas alternadas destes valores, para todo subconjunto I de $\{1, \dots, k\}$, obtemos

$$k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k,$$

onde

$$V_{k-i} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ |I| = i}} V_{k-i}^I,$$

para $i = 0, 1, \dots, k$.

Com isto, mostra-se que

$$\mu(f) = \nu(f).$$

Para a demonstração do ítem (b) do Teorema 65 para séries não-cômodas, consideramos os seguintes resultados, cujas demonstrações serão feitas no Capítulo 5.

Proposição 71: *Sejam $f, f_1 \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, $\mu(f) = l < \infty$ e sejam $f_1 - f \in \mathcal{M}^{l+2}$. Então*

$$\mu(f_1) = \mu(f).$$

Teorema 72: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal Newton não-degenerada, não-cômoda não contendo monômios da forma $x_i^{n_i}$, para $i = 1, \dots, q$, e contendo os monômios desta forma para as outras indeterminadas. Denotaremos por $g = g_{\alpha, m}$ a série*

$$f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$$

para $\alpha_i \in \mathcal{C}$. Então

- a) *existe um m_0 , tal que para $m \geq m_0$ e $\alpha_i \neq 0$ a parte principal g_0 da série g na origem é igual a $f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$, Newton não-degenerada para quase todos os α_i .*
- b) *se $\dim \Gamma(f) = k - 1$, então em (a) podemos tomar o número $(d(f))^k + 1$ no papel de m_0 (lembramos que $d(f) = \max_{n \in \Gamma(f)} \{|n|\}$, onde $|n| = n_1 + \dots + n_k$).*
- c) *existe um polinômio $p(m)$ cujo termo de grau nulo é igual a $\nu(\Gamma_-(f))$, tal que para um número infinito de valores de m tem-se $\nu(g_{\alpha, m}) = p(m)$.*

Com auxílio dos dois resultados anteriores esboçamos uma prova do item (b) do Teorema 65, para séries não cômodas, com parte principal Newton não-degenerada. De fato, se $\nu(f) < \infty$ e usando a definição de $\nu(f)$ para uma série formal não-cômoda f , deduzimos

$$\nu(f) = \nu(g),$$

onde $g = f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$ e supomos que f não contenha os monômios da forma $x_i^{n_i}$, para $i = 1, \dots, q$ e f contenha os monômios desta forma para as outras indeterminadas. Como g é uma série Newton não-degenerada para quase todos os α_i (pelo Teorema 72), segue pelo que já havíamos observado que

$$\nu(g) = \mu(g).$$

Usando a Proposição 71, segue que

$$\mu(f) = \nu(f).$$

Supomos agora $\nu(f) = \infty$. Se $\mu(f) < \infty$, então pela Proposição 71, segue que

$$\mu(g) = \mu(f).$$

Novamente, como g é uma série Newton não-degenerada para quase todos os α_i (pelo Teorema 72), segue que

$$\nu(g) = \mu(g).$$

Assim

$$\nu(f) = \sup \mu(g) < \infty$$

contradizendo a hipótese. Portanto $\mu(f) = \infty$, e assim temos

$$\nu(g) = \mu(g).$$

Para obtermos a parte (a) do Teorema 65 usaremos o Teorema 59. Com auxílio deste teorema e da semicontinuidade do número de Milnor, vamos dar uma idéia da demonstração do item (a) do Teorema 65. Dada uma série formal f , conseguimos uma família de séries Newton não-degeneradas a um parâmetro, com a mesma fronteira de Newton, convergindo para f . Pelo que já provamos cada série desta família é tal que seu número de Milnor coincide com o número de Newton. Agora usando a semicontinuidade do número de Milnor, temos

$$\mu(g) \geq \nu(g).$$

Capítulo 4

Codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$

Neste capítulo demonstramos o Teorema 67, que diz que dada uma série formal cômoda, com parte principal Newton não-degenerada na origem, então

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle = k!V_k$$

onde $f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, para $i = 1, \dots, k$, e V_k é o volume de dimensão k de $\Gamma_-(f)$.

Para demonstrar este teorema precisamos dos seguintes resultados que serão demonstrados neste capítulo.

Teorema 73: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda com parte principal Newton não-degenerada na origem. Então a codimensão do ideal gerado, no anel graduado associado*

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}),$$

pelas formas iniciais das séries

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

é igual a $k!V_k$. Em outras palavras, temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = k!V_k$$

onde $F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1}$ é a forma inicial de $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, para $i = 1, \dots, k$ e M é o valor da aplicação ϕ (que define a filtração d) sobre cada ponto de Γ .

Teorema 74: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda, com parte principal Newton não-degenerada na origem. Então a codimensão do ideal gerado por $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ em \mathcal{A} , é igual a codimensão do ideal gerado pelas formas iniciais de $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ no anel graduado associado $\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A}$. Em outras palavras, temos*

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle.$$

Assim pelos Teoremas 73 e 74, temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle = k!V_k,$$

o que demonstra o Teorema 67.

Começamos demonstrando o Teorema 73. Para demonstrar este resultado fazemos um estudo do anel graduado associado.

Consideramos $f \in \mathcal{A}_M \setminus \mathcal{A}_{M+1}$. A classe de f em $\mathcal{A}_M / \mathcal{A}_{M+1}$ depende somente da parte principal f_0 da série f na origem.

As derivadas da série f não pertencem a \mathcal{A}_M , mas as séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ pertencem a \mathcal{A}_M e sua forma inicial, ou seja, a classe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ no quociente $\mathcal{A}_M / \mathcal{A}_{M+1}$, depende somente de f_0 . Estas observações seguem da construção da filtração de Newton.

Denotamos a forma inicial do monômio $x^n \in \mathcal{A}$ por δ_n , ou seja,

$$\delta_n = x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \in \mathcal{A}_{\phi(n)} / \mathcal{A}_{\phi(n)+1} = \mathbf{A}_{\phi(n)},$$

e o elemento δ_n no anel \mathbf{A} será chamado *monômio* de \mathbf{A} . Considerado como espaço vetorial, temos que a \mathcal{C} -álgebra \mathbf{A} é isomorfa ao anel dos polinômios em k indeterminadas, uma vez que \mathbf{A} é gerado por monômios (ver [19], pag.15). Assim para descrevermos a multiplicação em \mathbf{A} é suficiente definir o produto de monômios.

Usando a definição da filtração de Newton e a definição de multiplicação no anel graduado associado, provamos a seguinte fórmula

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} = \begin{cases} \delta_{n_1+n_2}, & \text{se existe uma face } \Delta \subset \Gamma \text{ tal que } n_1 \in P(\Delta), n_2 \in P(\Delta), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Se existir uma face $\Delta \subset \Gamma$ tal que $n_1 \in P(\Delta), n_2 \in P(\Delta)$, então

$$\phi(n_1 + n_2) = \phi(n_1) + \phi(n_2),$$

pois ϕ é linear em $C(\Delta)$. Logo

$$\begin{aligned} \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} &= (x^{n_1} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+1})(x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_2)+1}) \\ &= x^{n_1} \cdot x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)+1} \\ &= \delta_{n_1+n_2} \end{aligned}$$

Por outro lado, se $n_1 \in C(\Delta_1)$ e $n_2 \in C(\Delta_2)$, onde $\Delta_1 \neq \Delta_2$, então temos a seguinte desigualdade estrita

$$\phi(n_1 + n_2) > \phi(n_1) + \phi(n_2)$$

o que implica claramente que

$$\phi(n_1 + n_2) \geq \phi(n_1) + \phi(n_2) + 1.$$

Assim, pela desigualdade anterior, temos $\mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)} \subset \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1}$, logo $x^{n_1+n_2} \in \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1}$ e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} &= (x^{n_1} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+1})(x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_2)+1}) \\ &= x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= 0 + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

No Capítulo 2, definimos uma função com parte principal Newton não-degenerada. Daremos agora uma formulação equivalente à esta definição. Para fornecer esta condição equivalente, consideramos Δ um poliedro compacto, convexo, de dimensão q em \mathbb{R}^k , cujos vértices pertencem à \mathbb{Z}^k , para q entre 0 e $k - 1$. Supomos que Δ não está situado em um subespaço linear de dimensão q . Definimos $C(\Delta)$ como sendo o cone convexo de vértice 0 e de base Δ , isto é, a reunião de todas as semi-retas de \mathbb{R}^k de origem 0 que passam por Δ . Colocamos

$$P(\Delta) = \mathbb{Z}^k \cap C(\Delta).$$

Notamos que $P(\Delta)$ é um subsemigrupo do semigrupo \mathbb{Z}^k .

Consideramos agora o conjunto

$$\mathcal{C}[P(\Delta)] = \{f \in \mathcal{C}[x, x^{-1}] : \text{supp}(f) \subset P(\Delta)\}.$$

$\mathcal{C}[P(\Delta)]$ é um subanel unitário do anel $\mathcal{C}[x, x^{-1}]$. De fato, se $f, g \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$ então $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp} f \cup \text{supp} g \subset P(\Delta)$ e $\text{supp}(fg) \subset \text{supp} f + \text{supp} g \subset P(\Delta)$. Como $\text{supp}(1) = 0 \in P(\Delta)$, então $1 \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$. Portanto $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ é um subanel com identidade de $\mathcal{C}[x, x^{-1}]$.

Observamos que as derivações

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

do anel $\mathcal{C}[x, x^{-1}]$ aplicam o subanel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ nele mesmo.

O polinômio de Laurent f é *Newton não-degenerado* sobre Δ , se os elementos

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

do anel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ geram em $\mathcal{C}[P(\Delta)]$, um ideal de codimensão finita.

A parte principal é Newton não-degenerada se for Newton não-degenerada sobre qualquer face da fronteira newtoniana.

O teorema a seguir dá a equivalência entre a definição de Newton não-degeneração com a condição apresentada anteriormente. Sua demonstração pode ser encontrada em [11], 6.2 e 6.4.

Teorema 75: *A condição de Newton não-degeneração que diz: se para qualquer face fechada Δ da fronteira de Newton*

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

não se anulam simultaneamente sobre $(\bar{\mathcal{C}} \setminus 0)^k$, é equivalente a dizer que os elementos

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

do anel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ geram um ideal de codimensão finita, em $\mathcal{C}[P(\Delta)]$.

Para cada face Δ da fronteira de Newton Γ , denotamos o anel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ por \mathcal{A}_Δ . Para cada face compacta $\Delta \subset \Gamma$, a filtração em \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots$$

induz uma filtração

$$\mathcal{A}_\Delta = (\mathcal{A}_\Delta)_0 \supset (\mathcal{A}_\Delta)_1 \supset (\mathcal{A}_\Delta)_2 \supset \dots$$

em \mathcal{A}_Δ , onde $(\mathcal{A}_\Delta)_q = \mathcal{A}_\Delta \cap \mathcal{A}_q$. Assim obtemos um anel graduado

$$\mathbf{A}_\Delta = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathcal{A}_\Delta)_q / (\mathcal{A}_\Delta)_{q+1}.$$

Podemos identificar o anel \mathbf{A}_Δ com um subanel de \mathbf{A} .

Proposição 76: *Para cada face $\Delta \subseteq \Gamma$, existe um epimorfismo que respeita a graduação das \mathcal{C} -álgebras*

$$\pi_\Delta : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_\Delta$$

e para cada par $\Delta_1 \subset \Delta$ existe um homomorfismo de \mathcal{C} -álgebras

$$\pi_{\Delta, \Delta_1} : \mathbf{A}_\Delta \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta_1}$$

que respeita a graduação e para o qual

$$\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_\Delta.$$

Demonstração: Notamos que \mathbf{A} tem estrutura de \mathcal{C} -álgebra, pois \mathbf{A} é isomorfo ao anel dos polinômios em k indeterminadas, assim dado $\alpha \in \mathcal{C}$ e $a \in \mathbf{A}$, $\alpha \cdot a := \phi(\alpha) \cdot a$, onde ϕ é o homomorfismo bijetor entre \mathbf{A} e $\mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$. Analogamente, temos uma estrutura de \mathcal{C} -álgebra em \mathbf{A}_Δ . Definimos

$$\pi_\Delta : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_\Delta$$

de modo que para cada $\bar{f} = \sum \bar{f}_q \in \mathbf{A}$; $\pi_\Delta(\bar{f}) = \pi_\Delta(\sum_{q \geq 0} \bar{f}_q) = \sum_{q \geq 0} (\bar{f}_q)_{\mathcal{C}(\Delta)}$. Temos que π_Δ é um homomorfismo sobrejetor, pois dado $(\bar{f}_q)_{\mathcal{C}(\Delta)} \in \mathbf{A}_\Delta$, existe $\bar{f}_q = f_q + \mathcal{A}_{q+1}$ tal que $\pi(\bar{f}_q) = (\bar{f}_q)_{\mathcal{C}(\Delta)}$.

Dados $\Delta_1 \subset \Delta$, pelo demonstrado acima existem π_Δ e π_{Δ_1} , de modo que dado $f \in \mathbf{A}$, temos $\pi_\Delta(f) = (f)_{\mathcal{C}(\Delta)}$ e $\pi_{\Delta_1}(f) = (f)_{\mathcal{C}(\Delta_1)}$. Definimos

$$\pi_{\Delta, \Delta_1} : \mathbf{A}_\Delta \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta_1}$$

por $\pi_{\Delta, \Delta_1}((f)_{C(\Delta)}) = (f)_{C(\Delta_1)}$. Observamos que π_{Δ, Δ_1} é um homomorfismo e além disso, $\pi_{\Delta_1}(f) = (f)_{C(\Delta_1)} = \pi_{\Delta, \Delta_1}((f)_{C(\Delta)}) = (\pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_{\Delta})(f)$, para todo $f \in \mathbf{A}$. Portanto $\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_{\Delta}$. ■

Lembramos que F_1, \dots, F_k são as formas iniciais das séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ respectivamente, isto é,

$$F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1} \in \mathbf{A}_M.$$

A condição de Newton não-degeneração é equivalente à seguinte condição: Para cada face Δ da fronteira de Newton Γ , os elementos homogêneos $\pi_{\Delta}F_1, \dots, \pi_{\Delta}F_k$ do anel graduado \mathbf{A}_{Δ} , geram em \mathbf{A}_{Δ} um ideal de codimensão finita (ver [3] pag.61).

Dado o homomorfismo sobrejetor $\pi_{\Delta} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta}$, conseguimos introduzir uma estrutura de \mathbf{A} -módulo no anel \mathbf{A}_{Δ} como segue: dado $f \in \mathbf{A}$ e $g \in \mathbf{A}_{\Delta}$, definimos $f \cdot g := \pi_{\Delta}(f) \cdot g$. Isto nos permite trabalhar com o anel \mathbf{A}_{Δ} no lugar do anel \mathbf{A} . Seja I o conjunto formado pelas faces de maior dimensão da fronteira de Newton Γ . Através da fórmula (4.1) temos que o anel \mathbf{A} é, em alguns casos, isomorfo à soma direta $\bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_{\Delta}$. De fato, a aplicação

$$\bigoplus_{\Delta \in I} \pi_{\Delta} : \mathbf{A} \longrightarrow \bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_{\Delta}$$

é injetora, pois dado $f \in \mathbf{A}$, se $\bigoplus_{\Delta \in I} \pi_{\Delta}(f) = ((f)_{C(\Delta)})_{\Delta \in I} = 0$, para todo $\Delta \in I$. Então como $\bigcup_{\Delta \in I} P(\Delta) = \mathbb{N}^k$ (pois f é cômoda), segue que $f = 0$.

Na próxima proposição veremos o pouco que falta para a aplicação $d_k = \bigoplus_{\Delta \in I} \pi_{\Delta}$ ser um isomorfismo.

Proposição 77: *Existe uma sequência exata de homomorfismos de \mathbf{A} -módulos graduados (que respeita as graduações)*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_{\Delta} \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

onde, para $0 \leq q \leq k-1$, nós designamos por C_q a soma direta dos \mathbf{A} -módulos \mathbf{A}_{Δ} sobre todas as faces de dimensão q da fronteira de Newton Γ não situado na união dos planos coordenados.

Demonstração: Denotamos por I_q o conjunto formado pelas faces de Γ de dimensão q não situados na união dos planos coordenados. Para definirmos d_q é suficiente fornecer, para todo $\Delta \in I_q$, $\Delta_1 \in I_{q-1}$ um homomorfismo $d_{\Delta, \Delta_1} : \mathbf{A}_\Delta \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta_1}$. Definimos, para cada $\Delta \in I_q$, $\Delta_1 \in I_{q-1}$

$$d_{\Delta, \Delta_1} = \sigma(\Delta, \Delta_1) \pi_{\Delta, \Delta_1},$$

$$\text{onde } \sigma(\Delta, \Delta_1) = \begin{cases} \pm 1, \text{ se } \Delta_1 \subset \Delta \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Para determinarmos o sinal $+$ ou $-$ da definição de $\sigma(\Delta, \Delta_1)$, atribuímos uma certa orientação da fronteira de Newton Γ , como segue: sobre a face $\Delta \subset \Gamma$ definimos uma orientação, como sendo a induzida de Γ e sobre as demais, definimos orientações arbitrárias. Assim, se $\Delta \in I_q$, $\Delta_1 \in I_{q-1}$ e $\Delta_1 \subset \partial\Delta$ definimos $\sigma(\Delta, \Delta_1) = 1$, quando a orientação induzida sobre Δ_1 coincidir com a orientação de Δ_1 , e $\sigma(\Delta, \Delta_1) = -1$, caso contrário. De acordo com a Proposição 76 segue que d_q é um homomorfismo de \mathbf{A} -módulos graduados respeitando a graduação.

Como cada anel \mathbf{A}_Δ possui estrutura de \mathcal{C} -módulo, podemos, por um momento, esquecer a estrutura de \mathbf{A} -módulo sobre C_q e demonstrarmos que a sequência de \mathcal{C} -módulos (4.2) é exata.

Temos que

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} \oplus \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} \oplus \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_3} \oplus \dots$$

e $\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ é um espaço vetorial sobre \mathcal{C} de dimensão finita, para todo $q \geq 0$. Assim, \mathbf{A} se escreve como soma direta de espaços vetoriais, logo \mathbf{A} é um \mathcal{C} -módulo livre. Assim podemos escrever $\mathbf{A} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}$. Definimos então para todo $m \in \mathbb{N}^k$, $\mathbf{A}(m) = \mathcal{C}$ e, portanto $\mathbf{A} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}(m)$.

Da mesma forma que fizemos para \mathbf{A} , para cada $m \in \mathbb{N}^k$ e para $\Delta \subset \Gamma$ definimos $\mathbf{A}_\Delta(m) = \begin{cases} \mathcal{C}, \text{ se } m \in P(\Delta) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$.

Assim temos que $\mathbf{A}_\Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}_\Delta(m)$. Desta forma, conseguimos introduzir uma \mathbb{N}^k -graduação sobre os módulos \mathbf{A} e \mathbf{A}_Δ .

Como $\mathbf{A}_\Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}_\Delta(m)$, e lembrando que $\mathbf{A}_\Delta(m) = 0$ caso m não pertença a $P(\Delta)$, segue que $C_q = \bigoplus_{\Delta \in I_q} \mathbf{A}_\Delta = \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}_\Delta(m)) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} (\bigoplus_{\Delta \in I_q} \mathbf{A}_\Delta(m))$.

Então definindo $C_q(m)$ como $\bigoplus_{\Delta \in I_q} \mathbf{A}_\Delta(m)$, para todo $m \in \mathbb{N}^k$, obtemos que $C_q = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} C_q(m)$. Portanto, C_q também possui uma estrutura de \mathbb{N}^k -gradação.

Temos que d_q respeita a \mathbb{N}^k -gradação, para todo q pertencente a $\{1, \dots, k-1\}$.

Para demonstrar que a sequência (4.2) é exata, é suficiente mostrar que para cada $m \in \mathbb{N}^k$ a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}(m) \xrightarrow{d_k(m)} C_{k-1}(m) \xrightarrow{d_{k-1}(m)} \dots \xrightarrow{d_2(m)} C_1(m) \xrightarrow{d_1(m)} C_0(m) \longrightarrow 0 \quad (4.3)$$

é exata. Pois se a sequência (4.3) for exata, então tomando a soma direta em $m \in \mathbb{N}^k$, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_\Delta \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

é exata.

Seja $X(m) = \bigcup_{m \in P(\Delta)} \Delta$ e consideramos a decomposição celular da variedade topológica Γ em células correspondentes às faces e a decomposição induzida nos espaços $X(m)$.

Da definição de $C_q(m)$ e de $X(m)$ (e do fato de Δ não estar situado em um subespaço linear de dimensão q , para $1 \leq q \leq k-1$) temos que a sequência (4.3) (menos o termo $\mathbf{A}(m)$) é isomorfa ao complexo de cadeias celulares do par $(X(m), \partial X(m))$ com coeficientes em \mathcal{C} . Assim temos que a sequência (4.3) é isomorfa ao complexo

$$C_{k-1}(X(m), \partial X(m)) \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2}(X(m), \partial X(m)) \xrightarrow{d_{k-2}} \dots \xrightarrow{d_2} C_0(X(m), \partial X(m)) \longrightarrow 0.$$

Como Γ é uma união de subconjuntos convexos temos que o par $(X(m), \partial X(m))$ é homotopicamente equivalente ao par (disco, fronteira do disco) (disco de dimensão $k-1$) e portanto, somente as homologias de dimensão maximal são não-nulas e elas são isomorfas à $\mathcal{C} = \mathbf{A}(m)$. Portanto a sequência (4.3) (menos o termo $\mathbf{A}(m)$) é exata, uma vez que as homologias H_q , $1 \leq q \leq k-2$, são nulas e a homologia de dimensão maximal $H_{k-1} = \mathcal{C} = \mathbf{A}(m)$.

Assim, a sequência (4.3), e portanto a sequência (4.2), é exata. ■

Afim de estudar o anel quociente $\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle$, consideramos a sequência exata

$$\mathbf{A}^k \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle$$

do módulo R_{ii} , para $i = 2, \dots, n$, a saber a sequência

$$0 \rightarrow R_{ni} \rightarrow R_{n-1,i} \rightarrow R_{n-2,i} \rightarrow \dots \rightarrow R_{ii} \rightarrow R_{i-1,i} \rightarrow 0$$

é exata. Então a primeira coluna é exata.

Teorema 79: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda com parte principal Newton não-degenerada na origem. Nestas condições, o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} é acíclico em dimensões positivas.*

Demonstração: Desejamos mostrar que o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} é acíclico em dimensões positivas. Para isto consideramos o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} , com coeficientes nos \mathbf{A} -módulos da sequência (4.2), formando um diagrama comutativo

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow & C_{k-2} & \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^{(k)}_{(1)} & \longrightarrow & C_{k-1}^{(k)} & \longrightarrow & C_{k-2}^{(k)} & \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0^{(k)} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^{(k)}_{(2)} & \longrightarrow & C_{k-1}^{(k)} & \longrightarrow & C_{k-2}^{(k)} & \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0^{(k)} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^{(k)}_{(k)} & \longrightarrow & C_{k-1}^{(k)} & \longrightarrow & C_{k-2}^{(k)} & \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0^{(k)} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

no qual as linhas são exatas (pelo Teorema 77) e as colunas são complexos. Então mostraremos que a partir da segunda coluna, da esquerda para a direita, as colunas

são exatas até os termos $C_{k-i}^{\binom{k}{i}}$, e então aplicando o lema anterior, concluiremos que a primeira coluna é exata, ou seja, o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} é acíclico em dimensões positivas.

Iniciamos a demonstração construindo o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} com coeficientes nos \mathbf{A} -módulos da sequência (4.2). Assim obtemos um diagrama, cujas colunas são complexos e as linhas são exatas, isto pois a primeira linha é a sequência (4.2) que é exata pela Proposição 77, a segunda linha do diagrama é exata pois é a soma direta de $\binom{k}{1}$ cópias da sequência (4.2), e assim sucessivamente, até a última linha, que é exata pois é a soma direta de $\binom{k}{k}$ cópias da sequência (4.2).

Uma vez que os homomorfismos da sequência (4.2) são homomorfismos de \mathbf{A} -módulos, segue que o diagrama acima é comutativo.

De acordo com o Lema 78, basta mostrar que as colunas são exatas em todos os termos que se encontram abaixo da linha pontilhada, para obtermos a exatidão da coluna extrema à esquerda em todos os termos.

Pela definição do complexo de Koszul com coeficientes em um módulo, temos que o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} com coeficientes nos \mathbf{A} -módulos C_q é isomorfo à soma direta dos complexos de Koszul com coeficientes em \mathbf{A}_Δ , onde $\Delta \in I_q$. De fato, consideramos o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A}

$$K(F_1, \dots, F_k) : 0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}$$

então $K(F_1, \dots, F_k, C_q) := K(F_1, \dots, F_k) \otimes_{\mathbf{A}} C_q$, é o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel \mathbf{A} , com coeficientes nos \mathbf{A} -módulos C_q , dando origem a seguinte sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \otimes_{\mathbf{A}} C_q \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \otimes_{\mathbf{A}} C_q \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \otimes_{\mathbf{A}} C_q \rightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} C_q$$

como o produto tensorial comuta com a soma direta, segue que a sequência acima é isomorfa a

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta)$$

e esta sequência é a soma direta do complexo de Koszul com coeficientes em \mathbf{A}_Δ , $\Delta \in I_q$, como queríamos demonstrar.

Agora para cada face Δ em I_q o complexo

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k-1}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta$$

é isomorfo, como um complexo de \mathcal{C} módulos, ao complexo de Koszul dos elementos $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ do anel \mathbf{A}_Δ . De fato, novamente aplicando a propriedade de que o produto tensorial comuta com a soma direta, segue que o complexo anterior é isomorfo ao complexo abaixo

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\binom{k}{k}} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\binom{k}{1}} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta).$$

Uma vez que \mathbf{A}_Δ é um \mathbf{A} -módulo, temos que a sequência anterior é isomorfa a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta$$

que é o complexo de Koszul dos elementos $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ do anel \mathbf{A}_Δ , pois \mathbf{A}_Δ é uma \mathbf{A} -álgebra.

Pela observação anterior e pelo Lema 78, para mostrar que a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}$$

é exata, basta mostrar que a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{2}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta \quad (4.5)$$

é exata em dimensões $\geq k - q$, para todo $q = 0, 1, \dots, k - 1$. E isto é equivalente a dizer que o complexo (4.5) é exato em dimensões $\geq k - q$, para toda face q -dimensional Δ e todo $q = 0, 1, \dots, k - 1$.

Se $q \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ e Δ é uma face compacta q -dimensional de Γ_+ , então pela hipótese de não-degeneração o ideal de \mathbf{A}_Δ , gerado pelos elementos $\pi_\Delta(F_1), \dots, \pi_\Delta(F_k)$, é de codimensão finita em \mathbf{A}_Δ , ou seja,

$$\dim \frac{\mathbf{A}_\Delta}{\langle \pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k \rangle} < \infty.$$

Então pela Proposição 6 segue que

$$\frac{\mathbf{A}_\Delta}{\langle \pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k \rangle}$$

possui comprimento finito.

O anel \mathbf{A}_Δ é um anel Cohen-Macaulay (ver [10]) e temos que $\dim \mathbf{A}_\Delta = \dim \Delta + 1 = q + 1$ (ver [4], pag. 210). Então $\text{depth}(\pi_\Delta(F_i), \mathbf{A}_\Delta) = \dim \mathbf{A}_\Delta = q + 1$. Isto implica que a profundidade de \mathbf{A}_Δ é $q + 1$. Então pela observação do Teorema 32 o número de termos nulos sucessivos na sequência das homologias é $k - q$, logo

$$H_k(\pi_\Delta(F_i), \mathbf{A}_\Delta) = \dots = H_{k-q}(\pi_\Delta(F_i), \mathbf{A}_\Delta) = 0.$$

Portanto as homologias de (4.5) são zero de k até $k - q$. Logo o complexo (4.5) é acíclico em dimensões $\geq k - q$.

Portanto o complexo (4.5) é acíclico em dimensões maiores ou iguais a $k - q$, logo o complexo

$$0 \rightarrow C_q^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow C_q^{(2)} \rightarrow C_q^{(1)} \rightarrow C_q$$

é acíclico em dimensões maiores ou iguais a $k - q$.

Portanto pelo Lema anterior a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{(k)} \rightarrow \mathbf{A}^{(k-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}^{(2)} \rightarrow \mathbf{A}^{(1)} \rightarrow \mathbf{A}$$

é exata. ■

Definição 80: A *série de Poincaré* do \mathcal{C} -módulo graduado \mathbf{A} é dada pela expressão

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{q=0}^{\infty} (\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A}_q) \cdot t^q$$

e denotamos por $p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)$ a *série de Poincaré* do \mathcal{C} -módulo graduado \mathbf{A}_Δ .

Lema 81: a) $p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)$ é uma função racional em t e o ponto $t = 1$ é um polo de ordem $\dim \Delta + 1$.

b) Se $\dim \Delta = k - 1$, então

$$p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)(1 - t^M)^k \Big|_{t=1} = k! V_{k\Delta}$$

onde $V_{k\Delta}$ é o k -volume da pirâmide de vértice zero e de base Δ .

Demonstração: a) Observamos que o anel \mathbf{A}_Δ é Noetheriano, pois é o quociente de um anel Noetheriano (pois $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}/\ker \pi_\Delta$ pela Proposição 76). Portanto pelo Teorema 36 a série de Poincaré de \mathbf{A}_Δ é uma função racional em t e o ponto $t = 1$ é um polo de ordem $\dim \mathbf{A}_\Delta = \dim \Delta + 1$.

b) Sejam m_1, \dots, m_k os vértices da face. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)(1 - t^M)^k &= \text{número de pontos do conjunto } P(\Delta) \setminus \cup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta)) \\ &= \text{número de pontos do grupo quociente } \mathbb{Z}^k / \langle m_1, \dots, m_k \rangle \\ &= |\det(m_1, \dots, m_k)| = k! V_{k\Delta}. \end{aligned}$$

onde $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$ denota o subgrupo gerado pelos elementos m_1, \dots, m_k (para as três últimas igualdades ver [5]). ■

Teorema 82: ([3], pag. 47) *Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel Noetheriano graduado com R_0 Artiniano e seja $U = (u_{ij})$ uma matriz $k \times m$ com entradas em R , sendo $k \geq m$ e cada u_{ij} homogêneo de grau d_{ij} . Suponhamos que se cumpre*

$$d_{ij} + d_{nl} = d_{il} + d_{nj};$$

para quaisquer i, j, n, l . Se o ideal gerado pelos menores de ordem maximal de U , denotado por $I_m(U)$, tem profundidade $k - m + 1$, então a série de Hilbert de $R_m(U) = R/I_m(U)$ é dada por:

$$p_{R_m(U)}(t) = p_R(t) \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^r (-1)^{n+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq m \\ 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m+n} \leq k}} t^{d_{i_1 j_1} + \dots + d_{i_m j_m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+n} j_n}}\right)$$

onde $r = k - m$.

Observação 83: Consideramos $R = \mathbf{A} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}$ que tem estrutura de anel graduado associado. Além disso, \mathbf{A} é Noetheriano (pois é isomorfo ao anel de polinômios nas indeterminadas x_1, \dots, x_k sobre o corpo \mathcal{C}) e \mathbf{A}_0 é Artiniano (pois $\mathbf{A}_0 = \mathcal{A}_0 / \mathcal{A}_1 = \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \mathcal{A}_1$ que é um anel Noetheriano, com dimensão de Krull zero, e portanto é um anel Artiniano). Consideramos no teorema anterior $m = 1$ e $I(m) = I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$, onde F_i é homogêneo de grau M , para $i = 1, \dots, k$. Além disso, $R_1(U) = \mathbf{A}/I$ possui dimensão finita como espaço vetorial. Logo pelo Teorema 6, \mathbf{A}/I tem comprimento finito e tem estrutura de anel graduado. Logo, estão

satisfeitas as hipóteses do teorema anterior, para $m = 1$. Portanto, temos

$$p_{\mathbf{A}/I}(t) = p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k.$$

Agora iremos demonstrar o Teorema 73. Iremos enunciá-lo novamente para facilitar a leitura do texto.

Teorema 84: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda com parte principal Newton não-degenerada na origem. Então a codimensão do ideal gerado, no anel graduado associado*

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}),$$

pelos formas iniciais das séries

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

é igual a $k!V_k$. Em outras palavras, temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = k!V_k.$$

Demonstração: Da exatidão da sequência (4.4) e da Observação 83 temos:

$$p_{\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle}(t) = p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k.$$

A partir desta igualdade, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle}(t) = \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k.$$

Considerando em $\mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ a graduação trivial, a igualdade acima se reescreve da seguinte forma

$$\lim_{t \rightarrow 1} \dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k$$

donde segue que

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k,$$

ou seja,

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k \Big|_{t=1}. \quad (4.6)$$

Pelo fato da sequência (4.2) ser exata e a dimensão ser uma função aditiva temos:

$$\dim \mathbf{A}_q - \dim(C_{k-1})_q + \dim(C_{k-2})_q - \dots + (-1)^k \dim(C_0)_q = 0.$$

Logo, multiplicando cada parcela da soma anterior por t^q e somando em q de zero a infinito, segue

$$\sum_{q=0}^{\infty} \dim \mathbf{A}_q t^q - \sum_{q=0}^{\infty} \dim(C_{k-1})_q t^q + \dots + (-1)^k \sum_{q=0}^{\infty} \dim(C_0)_q t^q = 0$$

donde obtemos,

$$p_{\mathbf{A}}(t) - p_{C_{k-1}}(t) + \dots + (-1)^k p_{C_0}(t) = 0$$

portanto

$$p_{\mathbf{A}}(t) = p_{C_{k-1}}(t) + R(t)$$

onde $R(t)$ é a soma alternada das séries de Poincaré dos módulos \mathbf{A}_{Δ} onde $\dim \Delta \leq k-2$. Além disso, $p_{C_{k-1}}(t) = p_{\oplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_{\Delta}}(t) = \sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)$. Portanto a série de Poincaré do \mathcal{C} -módulo \mathbf{A} é:

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t) + R(t). \quad (4.7)$$

Conforme o item (a) do Lema 81, temos que $R(t)$ é uma função racional em t com polo de ordem menor ou igual a $k-1$. Então

$$\lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)(1-t)^{k-1} = \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)^k = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t^M)^k &= \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)^k (1+t+t^2+\dots+t^{M-1})^k \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)^k \lim_{t \rightarrow 1} (1+t+t^2+\dots+t^{M-1})^k \\ &= 0 \cdot M^k = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t^M)^k = 0. \quad (4.8)$$

Consequentemente, por (4.6), (4.7), (4.8) e pelo segundo ítem do Lema 81, segue

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle) &= \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} (\sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t) + R(t))(1 - t^M)^k \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} (\sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)(1 - t^M)^k) + \lim_{t \rightarrow 1} (R(t)(1 - t^M)^k) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} (\sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)(1 - t^M)^k) \\
 &= \sum_{\Delta \in I} (\lim_{t \rightarrow 1} (p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)(1 - t^M)^k)) \\
 &= \sum_{\Delta \in I} k! V_{k_{\Delta}} = k! \sum_{\Delta \in I} V_{k_{\Delta}} = k! V_k.
 \end{aligned}$$

■

4.1 Codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$ coincide com a codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1} \rangle_{i=1, \dots, k}$

Nesta seção demonstraremos o Teorema 74.

Para os próximos resultados, entendemos por filtração uma \mathbb{Z} -filtração decrescente, que é definida como segue: uma \mathbb{Z} -filtração decrescente em um anel R é uma família de ideais $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfazendo as seguintes condições:

- a) $R = R_0$;
- b) $R_{n+1} \subset R_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$;
- c) $R_p R_q \subset R_{p+q}$.

Definição 85: Uma aplicação $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ de \mathcal{C} -módulos filtrados é dita *estricta* se para todo $q \in \mathbb{Z}$, temos

$$\partial \mathcal{B}_q = \partial \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_q.$$

Seja \mathcal{A} uma \mathcal{C} -álgebra filtrada que satisfaz a condição $\mathcal{A} = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q$.

Denotamos $\text{gr } \mathcal{A} = \oplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}$, por

$$\mathbf{A} = \oplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}_q,$$

ou seja, $\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1} = \mathbf{A}_q$.

Seja $f_i \in \mathcal{A}_{d_i}$ e $F_i = f_i + \mathcal{A}_{d_i+1}$ que é um elemento de \mathbf{A}_{d_i} , para $i = 1, \dots, k$.

Consideramos uma aplicação $\partial : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ de \mathcal{C} -módulos filtrados e ∂ respeitando a filtração, isto é,

$$\partial(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A}_i$$

para $i \geq 0$. Nestas condições, podemos definir

$$\text{gr } \partial : \text{gr } \mathcal{B} \longrightarrow \text{gr } \mathcal{A}$$

onde, $\text{gr } \partial(f + \mathcal{B}_{i+1}) = \partial(f) + \mathcal{A}_{i+1}$. Notamos que, $\text{gr } \partial$ está bem definida e é um homomorfismo.

Lema 86: *Seja*

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{B} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

um complexo de \mathcal{C} -módulos filtrados, ∂_1 e ∂_2 respeitando a filtração. Suponhamos que $\mathcal{B} = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$ e a sequência

$$\text{gr } \mathcal{K} \xrightarrow{\text{gr } \partial_2} \text{gr } \mathcal{B} \xrightarrow{\text{gr } \partial_1} \text{gr } \mathcal{A} \tag{4.9}$$

é exata. Então, para qualquer $q \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial_1(\mathcal{B}_q)$$

ou seja, o morfismo ∂_1 é estrito.

Demonstração: Temos que

$$\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q \supseteq \partial_1(\mathcal{B}_q)$$

uma vez que $\partial_1(\mathcal{B}_q) \subseteq \mathcal{A}_q$ e $\partial_1(\mathcal{B}_q) \subseteq \partial_1(\mathcal{B})$. Mostramos agora que,

$$\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q \subseteq \partial_1(\mathcal{B}_q).$$

Seja $\partial_1 b = a \in \partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q$, para algum $b \in \mathcal{B}$. Definimos

$$q_1 = \max\{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}.$$

Como $b \in \mathcal{B} = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$ segue que $b \in \mathcal{B}_m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$ e assim $a \in \partial_1(\mathcal{B}_m)$.

Caso $m \leq q$, segue que $m \in \{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$. Por outro lado, se $m > q$,

temos que $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_q$; portanto $a \in \partial_1(\mathcal{B}_q)$ e temos $m \in \{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$. Portanto o conjunto

$$\{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$$

é não-vazio e está bem definido. Resta mostrar que $q = q_1$ para concluirmos a demonstração. Suponhamos que $q_1 < q$, por definição de q_1 , $a \in \partial(\mathcal{B}_{q_1})$. Logo podemos encontrar $b_1 \in \mathcal{B}_{q_1}$, para o qual $\partial_1(b_1) = a$. Portanto, $\text{gr} \partial_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) = \partial_1 b_1 + \mathcal{A}_{q_1+1} = a + \mathcal{A}_{q_1+1} = \mathcal{A}_{q_1+1}$, esta última igualdade segue pelo fato que $q_1 + 1 \leq q$ e portanto $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_{q_1+1}$. Portanto, $b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1} \in \ker \text{gr} \partial_1$. Pela exatidão da sequência (4.9), temos que $\ker \text{gr} \partial_1 = \text{Im} \text{gr} \partial_2$. Logo, existe $x \in \mathcal{K}_{q_1}$ tal que $\text{gr} \partial_2(x + \mathcal{K}_{q_1+1}) = \partial_2(x) + \mathcal{B}_{q_1+1} = b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}$. Por consequência, $b_1 - \partial_2(x) \in \mathcal{B}_{q_1+1}$ e

$$\partial_1(b_1 - \partial_2 x) = \partial_1 b_1 - \partial_1 \partial_2 x = \partial_1 b_1 = a.$$

Então, $a \in \partial_1(\mathcal{B}_{q_1+1})$, o que contradiz a maximalidade de q_1 . Logo, $q \geq q_1$, mas desde que $q \leq q_1$, concluímos que ∂_1 é estrita. ■

Lema 87: *Seja $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ um morfismo estrito de \mathcal{C} -módulos filtrados, isto é, $\partial(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial(\mathcal{B}_q)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. Então temos o seguinte isomorfismo de \mathcal{C} -módulos*

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \text{gr} \mathcal{A}/\text{gr} \partial(\text{gr} \mathcal{B}).$$

Demonstração: Da sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_i \cap \partial(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}_i \rightarrow \left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})}\right)_i \rightarrow 0,$$

e como $\mathcal{A}_i \cap \partial(\mathcal{B}) = \partial(\mathcal{B}_i)$, segue que

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})}\right)_i \cong \mathcal{A}_i/\partial(\mathcal{B}_i).$$

Assim,

$$\text{gr}\left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})}\right) = \bigoplus \left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})}\right)_i \cong \bigoplus \left(\frac{\mathcal{A}_i}{\partial(\mathcal{B}_i)}\right) = \frac{\text{gr} \mathcal{A}}{\text{gr} \partial(\text{gr} \mathcal{B})}.$$

Portanto, $\text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \text{gr} \mathcal{A}/\text{gr} \partial(\text{gr} \mathcal{B})$. ■

Teorema 88: *Suponha que o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k da \mathcal{C} -álgebra \mathbf{A} é acíclico em dimensão 1. Então temos*

a) *um isomorfismo de \mathcal{C} -módulos*

$$\mathrm{gr}(\mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle) \cong \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle. \quad (4.10)$$

b) *o morfismo $\partial_1 : \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$ que envia (g_1, \dots, g_k) em $g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ é estrito para a seguinte escolha da filtração em \mathcal{A}^k : a filtração de $(0, \dots, g_i, \dots, 0)$ em \mathcal{A}^k é igual a filtração de g_i em \mathcal{A} menos d_i .*

Demonstração: Vamos considerar uma parte do complexo de Koszul dos elementos $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}^{(k)} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{A}^{(1)} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

onde a filtração em $\mathcal{A}^{(k)}$ é introduzida da mesma maneira que a filtração em $\mathcal{A}^{(1)}$ no enunciado do teorema. A sequência

$$\mathrm{gr} \mathcal{A}^{(k)} \xrightarrow{\mathrm{gr} \partial_2} \mathrm{gr} \mathcal{A}^{(1)} \xrightarrow{\mathrm{gr} \partial_1} \mathrm{gr} \mathcal{A}$$

é isomorfa a sequência

$$\mathbf{A}^{(k)} \xrightarrow{\mathrm{gr} \partial_2} \mathbf{A}^{(1)} \xrightarrow{\mathrm{gr} \partial_1} \mathbf{A}$$

que é uma parte do complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel $\mathbf{A} = \mathrm{gr} \mathcal{A}$. Por hipótese temos que a sequência anterior é exata, então pelo Lema 86 segue que o morfismo ∂_1 é estrito, o que demonstra a segunda parte do teorema.

Como $\mathrm{Im} \partial_1 = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ e $\mathrm{Im} \mathrm{gr} \partial_1 = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$, então pelo Lema 87, temos

$$\mathrm{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \mathrm{gr} \mathcal{A}/\mathrm{gr} \partial(\mathrm{gr} \mathcal{B})$$

ou seja,

$$\mathrm{gr}(\mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle) \cong \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle.$$

Portanto vale (a). ■

Agora demonstraremos o Teorema 74. Iremos enunciar-lo novamente para facilitar a leitura do texto.

Teorema 89: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal cômoda, com parte principal Newton não-degenerada na origem. Então a codimensão do ideal gerado por $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ em \mathcal{A} , é igual a codimensão do ideal gerado pelas formas iniciais de $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ no anel graduado associado $\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A}$. Em outras palavras, temos*

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle.$$

Demonstração: Colocamos $f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{A}_M$, para $i = 1, \dots, k$. Por hipótese temos que f é uma série formal cômoda e com parte principal Newton não-degenerada, então pelo Teorema 79 temos que o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k é acíclico em dimensões positivas. Logo, temos que vale (4.10) do Teorema 88, ou seja,

$$\text{gr}(\mathcal{A} / \langle f_1, \dots, f_k \rangle) \cong \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle.$$

Resta apenas mostrar que

$$\dim_{\mathcal{C}}(\text{gr}(\mathcal{A} / \langle f_1, \dots, f_k \rangle)) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{A} / \langle f_1, \dots, f_k \rangle.$$

Seja $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ e $\text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}_i / \mathcal{X}_{i+1}$. Já sabemos que

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = k!V_k.$$

Assim, usando (4.10) e o Teorema 73, temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \dim_{\mathcal{C}} \mathbf{A} / \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathcal{A}_{M+1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \mathcal{A}_{M+1} \rangle = k!V_k.$$

Portanto, $\dim_{\mathcal{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ é finita. Logo, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que

$$\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_{r+1} = \dots$$

onde $\mathcal{X}_i = (\mathcal{A}/\mathcal{I})_i = (\mathcal{A}_i + \mathcal{I})/\mathcal{I}$. Assim

$$\mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_{r+1} = \dots$$

Decorre da filtração de Newton, que existem $n, l \in \mathbb{N}$, $n > r$ tal que

$$\mathcal{A}_r \supset \mathcal{M}^l \supset \mathcal{M}^{l+1} \supset \mathcal{A}_n.$$

Como $n > r$, temos $\mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_n$ e assim

$$\mathcal{I} + \mathcal{M}^l \subseteq \mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{I} + \mathcal{M}^{l+1}$$

e conseqüentemente isto implica que

$$\mathcal{I} + \mathcal{M}^l = \mathcal{I} + \mathcal{M}^{l+1}.$$

Assim

$$\mathcal{M}^l \subset \mathcal{I} + \mathcal{M}^l = \mathcal{I} + \mathcal{M}\mathcal{M}^l.$$

Logo, aplicando o Lema de Nakayama (Corolário 5), segue que

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}^l \subset \mathcal{I}$$

e portanto segue que

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{A}_n/\mathcal{I} = 0$$

e assim $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0/\mathcal{X}_n$ logo

$$\dim_{\mathcal{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \sum_{q=0}^{n-1} \dim_{\mathcal{C}} X_q = \sum_{q=0}^{n-1} \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{X}_q/\mathcal{X}_{q+1} = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{X}_0 = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Portanto $\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{A}/\mathcal{I} = \dim_{\mathcal{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$. ■

Capítulo 5

Demonstração do Teorema Principal

Neste capítulo daremos a demonstração completa do Teorema 65. Para isto, serão necessários mais alguns resultados além dos já enunciados no Capítulo 3.

Lema 90: ([13], pag. 130) *Seja J um ideal do anel $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ que satisfaz para um certo inteiro $l \geq 0$ a seguinte condição*

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / (J + \mathcal{M}^{l+1}) \leq l,$$

onde \mathcal{M} o ideal maximal de $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. Então $J \supset \mathcal{M}^l$.

Demonstração: Consideramos a seguinte cadeia descendente

$$(J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^0 \supseteq (J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^1 \supseteq (J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^2 \supseteq \dots \supseteq (J + \mathcal{M}^{l+1}).$$

Como $J + \mathcal{M}^{l+1}$ é um ideal de codimensão l e cada uma das inclusões acrescenta um na codimensão de $J + \mathcal{M}^{l+1}$, segue que a cadeia é estacionária em $k \leq l$, isto é,

$$(J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^k = (J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^{k+1}.$$

Logo $J + \mathcal{M}^k = J + \mathcal{M}^{k+1}$ e por isto

$$\mathcal{M}^k \subseteq J + \mathcal{M}^k = J + \mathcal{M}^{k+1} = J + \mathcal{M}\mathcal{M}^k.$$

Então pelo Lema de Nakayama, temos $\mathcal{M}^l \subseteq \mathcal{M}^k \subseteq J$. ■

Enunciaremos novamente alguns resultados já apresentados no Capítulo 3, para facilitar a leitura do texto.

Proposição 91: *Sejam $f, f_1 \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, $\mu(f) = l < \infty$ e sejam $f_1 - f \in \mathcal{M}^{l+2}$. Então*

$$\mu(f_1) = \mu(f).$$

Demonstração: Denotaremos $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle$ e $J_1 = \langle \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \rangle$. Como por hipótese $\mu(f) = l < \infty$ temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]/J = l < \infty.$$

Como

$$J \subseteq J + \mathcal{M}^{l+1},$$

então

$$\frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(J + \mathcal{M}^{l+1})} \subseteq \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J}$$

e assim

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(J + \mathcal{M}^{l+1})} \leq \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J} = l.$$

Pelo lema anterior, segue que, $J \supseteq \mathcal{M}^{l+1}$, então $J = J + \mathcal{M}^{l+1}$. Portanto

$$l = \mu(f) = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J + \mathcal{M}^{l+1}}. \quad (5.1)$$

Como por hipótese $f_1 - f \in \mathcal{M}^{l+2}$, temos $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 - f) \in \mathcal{M}^{l+1}$. Logo

$$J + \mathcal{M}^{l+1} = J_1 + \mathcal{M}^{l+1}.$$

Por (5.1) e pelo lema anterior, temos $J_1 \supseteq \mathcal{M}^{l+1}$. Então $J_1 + \mathcal{M}^{l+1} = J_1$, e portanto concluímos que $\mu(f) = \mu(f_1)$. ■

Observamos que o teorema anterior ainda é verdadeiro se supormos $\mu(f) \leq l$. A demonstração segue analogamente.

Teorema 92: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal Newton não-degenerada, não-cômoda não contendo monômios da forma $x_i^{n_i}$ para $i = 1, \dots, q$, e contendo os monômios desta forma para as outras indeterminadas. Denotaremos por $g = g_{\alpha, m}$ a série*

$$f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$$

para $\alpha_i \in \mathcal{C}$. Então

a) existe um m_0 , tal que para $m \geq m_0$ e $\alpha_i \neq 0$ a parte principal newtoniana g_0 da série g na origem é igual a $f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$, Newton não-degenerada para quase todos os α_i .

b) se $\dim \Gamma(f) = k - 1$, então em (a) podemos tomar o número $(d(f))^k + 1$ no papel de m_0 (lembramos que $d(f) = \max_{n \in \Gamma(f)} \{|n|\}$, onde $|n| = n_1 + \dots + n_k$).

c) existe um polinômio $p(m)$ cujo termo de grau nulo é igual a $\nu(\Gamma_-(f))$, tal que para um número infinito de valores de m temos $\nu(g_{\alpha,m}) = p(m)$.

Demonstração: a) Consideramos m_0 o maior inteiro positivo do conjunto de pontos, os quais são obtidos da interseção dos hiperplanos passando pelas faces, obtidas de f , com os eixos. Logo tomando valores m maiores ou iguais a m_0 , obtemos uma série

$$g = g_{\alpha,m} = f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m.$$

Agora os elementos do $\text{supp } g_{\alpha,m}$ já estão sobre a fronteira de Newton de g , assim para conhecer a parte principal da série g basta considerar os elementos sobre a fronteira de $\Gamma(f)$, que é a parte principal de f . Assim, temos

$$g_0 = f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m.$$

g_0 é Newton não-degenerada para quase todos os $\alpha_i \in \mathcal{C}$, pois o conjunto das partes principais Newton não-degeneradas é aberto e denso na topologia de Zariski, conforme Teorema 59.

b) Os hiperplanos de dimensão $k - 1$ da fronteira de Newton de f interceptam os eixos nos pontos situados a uma distância da origem menor ou igual a $(d(f))^k$.

c) Pelo item (a) do teorema, temos que para $m \geq m_0$, a fronteira $\Gamma(g)$ possui um número de vértices constante. Existe uma quantidade finita de tipos combinatórios distintos a um número de vértices dado. Fixemos $\Gamma(g)$, pela definição de $\nu(g)$, o número $\nu(\Gamma_-(g))$ é um polinômio dependendo das coordenadas dos vértices de $\Gamma(g)$, ou seja, $\nu(\Gamma_-(g))$ é um polinômio em m . O número $\nu(\Gamma_-(g_{\alpha,m}))$, para cada $m \geq m_0$, se obtém por uma das fórmulas, dentre uma quantidade finita. Portanto, para

um número infinito de valores de m o número $\nu(\Gamma_-(g_{\alpha,m}))$ é obtido por uma destas fórmulas, digamos $p(m)$. Observamos que, geometricamente, é claro que o termo constante do polinômio $p(m)$ é igual a $\nu(\Gamma_-(f))$. ■

Definição 93: Seja X um espaço métrico qualquer. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *semicontínua superiormente* em a se para toda sequência de pontos $x_n \in X$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(a).$$

Agora iremos demonstrar o teorema principal (Teorema 65):

Teorema 94: *a) O número de Milnor de uma série formal f é maior ou igual ao número de Newton, ou seja,*

$$\mu(f) \geq \nu(f)$$

e $\mu(f) = \infty$ se $\nu(f) = \infty$.

b) Se a parte principal f_0 da série f é Newton não-degenerada então $\mu(f) = \nu(f)$, ou seja,

$$\mu(f) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k \quad (5.2)$$

Demonstração: (a) Consideremos um série formal f . Depois do Teorema 59, podemos encontrar uma aproximação de f consistindo de uma família $\{f_n\}$ de séries Newton não-degeneradas a um parâmetro, com a mesma fronteira de Newton $\Gamma(f)$ para cada série. Depois do ítem (b) do Teorema 65, segue que

$$\mu(f_n) = \nu(f_n).$$

Observamos agora que o número de Newton é uma soma de volumes, e o volume é uma função contínua, logo o número de Newton é uma função contínua.

Usando a semicontinuidade do número de Milnor, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) \leq \mu(f).$$

Como para cada f_n temos: $\mu(f_n) = \nu(f_n)$, segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(f_n).$$

Uma vez que a sequência $\{f_n\}$ converge para a série f , temos, pela continuidade do número de Newton que a sequência $\nu(f_n)$ converge para $\nu(f)$. Assim, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(f_n) = \nu(f).$$

Portanto

$$\mu(f) \geq \nu(f).$$

(b) Demonstraremos agora, com auxílio do Teorema 67, a afirmação (b), para séries cômodas com parte principal Newton não-degenerada na origem.

Consideramos o conjunto $\{1, \dots, k\}$. Seja I um subconjunto próprio do conjunto $\{1, \dots, k\}$. Denotaremos por ω_I o volume de dimensão $(k - |I|)$ do poliedro $\Gamma_-(f_I)$ multiplicado por $(k - |I|)!$, ou seja, $\omega_I = (k - |I|)!V_{(k-|I|)}$. Colocamos $\omega_{\{1, \dots, k\}} = 1$ e $\omega_\emptyset = k!V_k$, onde V_k é o volume de dimensão k de $\Gamma_-(f_I)$.

Seja f uma série formal cômoda, com parte principal Newton não-degenerada na origem. Então pelo item (a) do Lema 70, a série f_I , para cada $I \subset \{1, \dots, k\}$, é uma série formal cômoda com parte principal Newton não-degenerada na origem. Assim, podemos aplicar o Teorema 67 a cada uma das séries f_I .

Depois da fórmula (3.1) para f_I e um abuso de notação, obtemos

$$\omega_I = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle x_1 \frac{\partial f_I}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \rangle} = \sum_{I_1 \in 2^{\{1, \dots, k\}}} \mu_{I_1} \quad (5.3)$$

onde $I \subset I_1$.

Com auxílio do Lema 70, (parte (b)), obtemos a seguinte igualdade

$$k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k = \sum (-1)^{|I|} \omega_I \quad (5.4)$$

onde $I \in 2^{\{1, \dots, k\}}$.

Mas por (5.3) temos que

$$\sum_I (-1)^{|I|} \omega_I = \sum_{I \subset I_1 \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \mu_{I_1} = \sum_{I_1 \subset \{1, \dots, k\}} \left(\sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|} \right) \mu_{I_1} = \mu_\emptyset = \mu(f),$$

pois o coeficiente de μ_\emptyset é igual a 1 e o coeficiente de μ_{I_1} , para $I_1 \neq \emptyset$, é dado por $\sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|}$ (que é igual a $\sum_{0 \leq i \leq |I_1|} (-1)^i \binom{|I_1|}{i} = 0$).

Portanto vale (5.2).

Antes de continuar a prova faremos um exemplo para ilustrar (5.4) e o fato de que o coeficiente de μ_\emptyset é igual a 1 e o coeficiente de μ_{I_1} , para $I_1 \neq \emptyset$, é dado por $\sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|}$, respectivamente.

Consideramos $I \in 2^{\{1,2\}}$ temos

$$\begin{aligned} \Sigma(-1)^{|I|}\omega_I &= (-1)^{|\emptyset|}\omega_\emptyset + (-1)^{|\{1\}|}\omega_{\{1\}} + (-1)^{|\{2\}|}\omega_{\{2\}} + (-1)^{|\{1,2\}|}\omega_{\{1,2\}} \\ &= 2!V_2 - V_1^{\{1\}} - V_1^{\{2\}} + 1 \end{aligned}$$

onde $\Gamma_-(f_{\{1\}}) = \Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}_{+\{1\}}$ e $\Gamma_-(f_{\{2\}}) = \Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}_{+\{2\}}$. Notemos que $V_{k-1}^{\{1\}} + V_{k-1}^{\{2\}}$ é a soma dos volumes de dimensão 2 das interseções do poliedro $\Gamma_-(f)$ com os planos coordenados de dimensão 1. Assim a soma anterior é igual $2!V_2 - 1!V_1 + 1$.

Portanto $\Sigma(-1)^{|I|}\omega_I = 2!V_2 - 1!V_1 + 1$.

Consideramos $I \subset \{1, 2\}$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{I_1 \subset \{1,2\}} \left(\sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|} \right) \mu_{I_1} &= \sum_{\emptyset \subset I_1 \subset \{1,2\}} \mu_{I_1} - \sum_{\{1\} \subset I_1 \subset \{1,2\}} \mu_{I_1} - \sum_{\{2\} \subset I_1 \subset \{1,2\}} \mu_{I_1} + \sum_{\{1,2\} \subset I_1 \subset \{1,2\}} \mu_{I_1} \\ &= \mu_\emptyset + \mu_{\{1\}} + \mu_{\{2\}} + \mu_{\{1,2\}} - \mu_{\{2\}} - \mu_{\{1\}} - \mu_{\{1,2\}} + \mu_{\{1,2\}} - \mu_{\{1,2\}} = \mu_\emptyset = \mu(f). \end{aligned}$$

Observamos que o coeficiente de μ_\emptyset é igual a 1, enquanto que para $|I_1| = 1$ os coeficientes de μ_{I_1} são $0 = 1 - 1 = \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = \sum_{0 \leq i \leq 1} (-1)^i \binom{|I_1|}{i}$, e no caso $|I_1| = 2$ os coeficientes são $0 = 1 - 2 + 1 = \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \sum_{0 \leq i \leq 2} (-1)^i \binom{|I_1|}{i}$.

Demonstraremos agora a afirmação (b) para séries não-cômodas.

Vamos separar a demonstração desta afirmação em duas partes: primeiramente para $\nu(f) < \infty$ e depois para $\nu(f) = \infty$.

- Supomos que nas condições do Teorema 92 tenhamos $\nu(f) < \infty$.

Pela definição de $\nu(f)$ (para f não-cômoda) e pelo item (a) do Teorema 92, temos para um m suficientemente grande, as seguintes igualdades

$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + \sum_{i=1}^q x_i^m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(g) = \nu(g).$$

Uma vez que $g = g_{\alpha, m}$ é uma série com parte principal Newton não-degenerada para quase todos os α_i , segue de (5.2) que

$$\nu(f) = \nu(g) = \mu(g).$$

Como

$$g_{\alpha, m} - f = f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m - f = \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m \in \mathcal{M}^m$$

e como $\nu(f) = \mu(g_{\alpha, m}) = \mu(g) < \infty$, conseguimos m suficientemente grande de modo que, $m \geq \nu(f) + 2$. Assim pela Proposição 91 e pela observação anterior, temos

$$\mu(f) = \mu(g_{\alpha, m}) = \nu(g_{\alpha, m}) = \nu(f).$$

Portanto

$$\mu(f) = \nu(f).$$

- Supomos agora que $\nu(f) = \infty$.

Mostraremos que se $\mu(f) < \infty$, então $\nu(f) < \infty$, o que será um absurdo.

Se $\mu(f) < \infty$, então como

$$g_{\alpha, m} - f = \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m \in \mathcal{M}^m$$

e para um m suficientemente grande, temos $\mu(f) \leq m - 2$, segue do Teorema 91

$$\mu(g_{\alpha, m}) = \mu(f).$$

Mas a série $g_{\alpha, m}$ é cômoda e Newton não-degenerada, pelo item (a) do Teorema 92, portanto depois da fórmula (5.2) $\mu(g_{\alpha, m}) = \nu(g_{\alpha, m})$ conseqüentemente

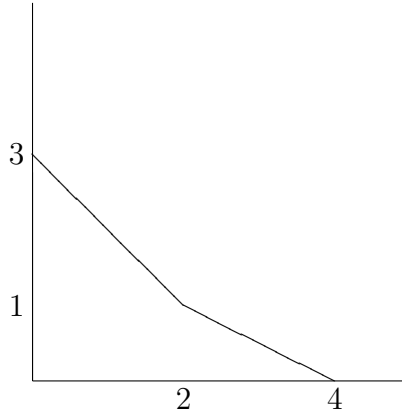
$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(g_{\alpha, m}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu(f) < \infty$$

o que é uma contradição.

Logo, se $\nu(f) = \infty$, então $\mu(f) = \infty$. Portanto $\nu(f) = \mu(f)$. ■

Os exemplos a seguir ilustram os Teoremas 65, 67 e 73.

Exemplo 95: Seja $f : (\mathcal{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathcal{C}, 0)$ dada por $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^3$.



Observamos que a fronteira de Newton possui duas faces de dimensão um, digamos Δ_1 e Δ_2 , como podemos observar na figura acima. Os vetores primitivos são, respectivamente $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (1, 1)$. E $l(v_1) = \min\{a + 2b : (a, b) \in \Gamma_+\} = 4$ e $l(v_2) = \min\{a + b : (a, b) \in \Gamma_+\} = 3$. Portanto, $M = \text{mmc}\{4, 3\} = 12$. Logo, a aplicação filtrante associada a Γ_+ é dada por

$$\phi(a, b) = \min\{3a + 6b, 4a + 4b\}.$$

Como f é uma série formal cômoda com parte principal Newton não-degenerada na origem, temos pelo Teorema 65 que o número de Milnor $\mu(f)$ é igual ao número de Newton $\nu(f)$. Assim

$$\mu(f) = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle 4x^3 + 2xy, x^2 + 3y^2 \rangle} = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 4$$

Pelo Teorema 67 temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle 4x^4 + 2x^2y, x^2y + 3y^3 \rangle} = 2!V_2 = 10.$$

Pelo Teorema 73 temos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{A}}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{A}_{13}, y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{A}_{13} \rangle} = 2!V_2 = 10.$$

Para verificarmos esta igualdade em nosso exemplo, calculamos os ideais \mathcal{A}_q para todo $q \geq 0$, e determinamos os quocientes $\mathcal{A}_q/\mathcal{A}_{q+1}$, para todo $q \geq 0$.

Temos $\langle x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{A}_{M+1}, y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{A}_{M+1} \rangle = \langle 4x^4 + 2x^2y + \mathcal{A}_{13}, x^2y + 3y^3 + \mathcal{A}_{13} \rangle$.

O ideal $I = \langle 4x^4 + 2x^2y, x^2y + 3y^3 \rangle$ contém \mathcal{M}^6 . Além disso, temos que $x^4y, x^2y^3, x^3y^2, xy^4, x^2y^2$ e $y^4 \in I$. Observamos também que $4x^4 + 2x^2y \in I$ e $x^2y + 3y^3 \in I$, assim temos que $\overline{x^4} = -\frac{1}{2}\overline{x^2y}, \overline{y^3} = -\frac{1}{3}\overline{x^2y}, \overline{x^5} = -\frac{1}{2}\overline{x^3y}$ e $\overline{xy^3} = -\frac{1}{3}\overline{x^3y}$.

Assim \mathbf{A}/I é o seguinte anel quociente

$$\frac{\langle 1 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle x^2 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle y^2, xy \rangle \oplus \langle x^3 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle x^4, y^3, xy^2, x^2y \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \dots}{\langle 2x^2 + xy + \mathcal{A}_{13}, xy + 3y^3 + \mathcal{A}_{13} \rangle}$$

que é um espaço vetorial gerado por $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{x^2}, \overline{y^2}, \overline{xy}, \overline{x^3}, \overline{xy^2}, \overline{x^2y}, \overline{x^3y}\}$.

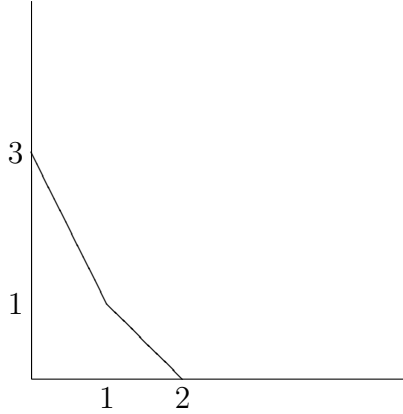
Portanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/I = 10.$$

Exemplo 96: Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, dada por

$$f(x, y) = x^2 + xy + x^2y + xy^2 + y^3.$$

Note que a fronteira de Newton $\Gamma(f)$ possui somente duas faces, Δ_1 e Δ_2 , formadas pelos vértices $\{(2, 0), (1, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, 3)\}$, respectivamente, como podemos observar na figura abaixo.



A face Δ_1 possui vetor primitivo $v_1 = (1, 1)$ e $l(v_1) = 2$, e a face Δ_2 possui vetor primitivo $v_2 = (2, 1)$ e $l(v_2) = 3$. Temos que $M = 6$. Assim

$$\phi(a, b) = \min\{3a + 3b, 4a + 2b\}.$$

Pelo Teorema 65 segue que o número de Milnor da série formal f é igual ao número de Newton, ou seja, $\mu(f) = 2 \cdot \frac{5}{2} - 5 + 1 = 1$. Pelo Teorema 67 temos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{C}[[x, y]]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = 2!V_2 = 5.$$

E pelo Teorema 73 temos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{A}}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{A}_7, y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{A}_7 \rangle} = 2!V_2 = 5.$$

Com auxílio de ϕ conseguimos determinar os ideais \mathcal{A}_q , e os espaços vetoriais $\mathcal{A}_q/\mathcal{A}_{q+1}$, para todo $q \geq 0$.

Temos a seguinte igualdade

$$\langle x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{A}_{M+1}, y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{A}_{M+1} \rangle = \langle 2x^2 + xy + \mathcal{A}_7, yx + 3y^3 + \mathcal{A}_7 \rangle.$$

Considerando o ideal $I = \langle 2x^2 + xy, yx + 3y^3 \rangle$, temos que I contém \mathcal{M}^4 . Além disso, observamos que os monômios xy^2 , x^2y , e $x^3 \in I$.

Logo temos o seguinte quociente

$$\mathbf{A}/I = \frac{\langle 1 \oplus (0) \oplus (y) \oplus (x) \oplus (y^2) \oplus (0) \oplus (x^2, y^3, xy) \oplus (0) \oplus (y^4, xy^2) \oplus (x^3, x^2y) \oplus \dots \rangle}{\langle 2x^2 + xy + \mathcal{A}_7, yx + 3y^3 + \mathcal{A}_7 \rangle}$$

que é um espaço vetorial gerado por $\langle \bar{1}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{y}^2, \bar{xy} \rangle$.

Portanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/I = 5.$$

A próxima proposição nos fornece uma maneira de determinarmos o número de Newton de uma série formal não-cômoda.

Proposição 97: *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série não cômoda não contendo monômios da forma $x_i^{n_i}$, para $i = 1, \dots, q$, e contendo os monômios desta forma para as outras indeterminadas. Então $\nu(f) = \infty$, ou $\nu(f) = \nu(\Gamma_-(f))$.*

Demonstração: Consideramos o polinômio $p(m)$ cuja existência é provada no item (c) do Teorema 92. Se $p(m)$ não é um polinômio constante, então $p(m) = \nu(\Gamma_-(g_{\alpha, m}))$ para um número infinito de valores de m . Assim,

$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(g_{\alpha, m}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(\Gamma_-(g_{\alpha, m})) = \sup_{m \in \mathbb{N}} p(m) = \infty$$

então

$$\nu(f) = \infty.$$

Se $p(m)$ é uma constante, então por (c) do Teorema 92 temos que

$$p(m) = \nu(\Gamma_-(f)).$$

Então pode-se encontrar um m suficientemente grande, tal que $m - 2 \geq \nu(\Gamma_-(f))$, de modo que

$$\nu(g_{\alpha,m}) = p(m) = \nu(\Gamma_-(f)).$$

Como a série $g_{\alpha,m}$ é cômoda, com parte principal Newton não-degenerada, segue que

$$\mu(g_{\alpha,m}) = \nu(g_{\alpha,m}) = \nu(\Gamma_-(f)).$$

Agora, temos $\mu(g_{\alpha,m}) = \nu(\Gamma_-(f)) \leq m - 2$ e $g_{\alpha,m} - f \in \mathcal{M}^m$ o que implica que

$$\mu(f) = \mu(g_{\alpha,m}) = \nu(\Gamma_-(f)).$$

Logo, como

$$\nu(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(g_{\alpha,m}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu(g_{\alpha,m}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu(f) = \nu(\Gamma_-(f)),$$

obtemos a igualdade

$$\nu(f) = \nu(\Gamma_-(f)).$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. **Introduction to commutative algebra**. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [2] Bivià-Ausina, C.; Fukui, T.; Saia, M. J. Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerate ideals. **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.** 135, 55-75, 2002 .
- [3] Bivià-Ausina, C. **Tesis Doctoral**. València, 2000.
- [4] Bruns, W.; Herzog, J. **Cohen-Macaulay rings**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. 39, 1993.
- [5] Cohn, H. **Advanced Number Theory**. General Publishing Company, New York, 1980.
- [6] Cox, D. A.; Little, J.; O'Shea, D. **Using Algebraic Geometry**. Graduate Texts in Mathematics, No.185. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [7] Eisenbud, D. **Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry**. Graduate Texts in Mathematics, No. 150. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1995.
- [8] Fulton, W. **Algebraic Curves: an introduction to algebraic geometry**. Addison-Wesley Publishing Co., Inc. 1989.
- [9] Gibson, C. G. **Singular points of smooth mappings**. Pitman Publishing Limited, London, 1979.

-
- [10] Hochster, M. Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes. **Ann. of Math.** 96, 318-337, 1972.
- [11] Kouchnirenko, A. G. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. **Inventiones math.** 32, 1-31, 1976.
- [12] Massey, W. S. **Singular Homology Theory**. Graduate Texts in Mathematics, No. 70. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1980.
- [13] Mather, J. N. Stability of C^∞ mappings III. **Publ. Sc. IHES** 35, 127-156, 1969.
- [14] Matsumura, H. **Commutative ring theory**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 8, 1988.
- [15] Milnor, J. W. **Singular points of complex hypersurfaces** Annals of Math. Studies, Princeton University. 61, 1968.
- [16] Munkres, J. R. **Elements of Algebraic Topology**. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [17] Northcott, D. **Lessons on rings, modules and multiplicities** Cambridge University Press, London, 1988.
- [18] Rotman, J. J. **An Introduction to Homological Algebra** Academic Press, New York, 1979.
- [19] Serre, Jean-Pierre. **Local algebra**. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [20] Shafarevich, I. R. **Basic Algebraic Geometry**. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, No. 213. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1977.
- [21] Tomazella, J. N. **O número de Milnor**. Dissertação (Mestrado). USP-ICMC. São Carlos, 1992.

- [22] Tráng, L. D. Topologie des Singularites des Hypersurfaces Complexes. **Asterisque 7 e 8**, 171-182, 1973.

Índice Remissivo

- anel
 - Artiniano, 4
 - Cohen-Macaulay, 17
 - Noetheriano, 4
 - graduado, 7
- anel de Rees
 - associado a filtração, 37
- anel graduado associado a filtração multiplicativa do anel, 11
- anulador de um módulo, 17
- aplicação característica, 21
- aplicação estrita, 63
- cadeia, 4
- característica de Euler-Poincaré, 17
- complexo, 11
- complexo a esquerda, 13
- complexo acíclico, 12
- complexo de cadeia celular, 22
- complexo de Koszul, 13
 - com coeficientes no módulo , 16
- componente homogênea, 8, 9
- comprimento de um módulo, 4
- CW-complexo, 21
- célula, 21
- dimensão de um módulo, 17
- elemento homogêneo
 - de um anel graduado, 8
 - de um módulo graduado, 9
- Ext, 6
- filtração
 - de anéis, 34
 - de Newton, 36
 - homogênea, 35
- filtração de anéis, 10
- filtração multiplicativa, 10
- fronteira de Newton
 - de um polinômio de Laurent, 25
 - de um polinômio, 25
 - de uma série formal, 25
- função semicontínua superiormente, 72
- germe
 - degenerado, 30
 - Newton degenerado, 30
- gradação
 - induzida, 9
 - quociente, 10
 - trivial, 8
- grupos de homologia relativa, 22

- homologia do complexo de cadeia celular, 23
- isomorfismo de complexos, 12
- Lema de Nakayama, 5
- M-sequência, 18
- M-sequência regular, 18
- monóide graduado, 7
- monômio em um anel graduado associado, 48
- módulo
 - Artiniano, 3
 - Cohen-Macaulay, 17
 - Noetheriano, 3
 - graduado, 8
 - injetivo, 6
 - projetivo, 5
 - simples, 4
- módulo componente de grau n , 11
- n -bordos, 11
- n -ciclos, 11
- n -esqueleto, 22
- n -ésima componente do complexo, 11
- n -ésima diferencial, 11
- n -ésimo homomorfismo de bordo, 11
- n -ésimo módulo de homologia, 12
- Newton não-degenerado, 50
- número de Newton
 - de um polinômio de Laurent, 27
 - de um polinômio, 27
- de uma série formal, 27
- parte principal
 - de um polinômio de Laurent, 25
 - de um polinômio, 25
 - de uma série formal, 25
- parte principal newtoniana
 - de um polinômio de Laurent, 25
 - de um polinômio, 25
 - de uma série formal, 25
- poliedro de Newton, 25
- polinômio
 - cômodo, 24
 - Newton não-degenerado, 29
- polinômio de Laurent
 - cômodo, 25
 - Newton não-degenerado, 29
- profundidade de um ideal, 18
- profundidade de um módulo, 18
- resolução injetiva, 6
- resolução projetiva, 6
- sequência
 - M-regular maximal, 18
 - M-regular, 17
- simplexo, 21
- sistema de multiplicidade, 16
- sistema de parâmetros
 - de um anel, 17
 - de um módulo, 17
- submódulo homogêneo, 9

suporte, 24

série

 Newton não-degenerada, 29

 cômoda, 24

série de composição, 4

série de Hilbert, 20

série de Poincaré, 20

Teorema da Base de Hilbert, 5

Teorema de Sard, 31

Teorema dos Zeros de Hilbert, 5

vetor

 primitivo, 34

vértice, 21