UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANALITICIDADE, NA VARIÁVEL ESPACIAL, DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DE KdV

Márcio Luís Miotto

São Carlos – SP

Março de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Analiticidade, na variável espacial, da solução do Problema de Cauchy para a equação de KdV

Márcio Luís Miotto

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos – SP

Março de 2006

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M669av

Miotto, Márcio Luís.
Analiticidade, na variável espacial, da solução do problema de Cauchy para a equação de KdV / Márcio Luís Miotto. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
56 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equação de Korteweg-de Vries. 3. Cauchy, Problemas de. 4. Analiticidade. 5. Estimativas bilineares. 6. Teorema do ponto fixo (Topologia). I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Orientador

Prof. Dr. Gerson Petronilho

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gerson Petronilho

Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos

Agradecimentos

A Deus, pela dádiva da vida.

Aos meus pais, Anselmo e Lourdes, pela educação, por todo amor, compreensão, pelo constante incentivo e apoio. Vocês possuem grande parte do mérito desta conquista.

Ao Prof. Dr. Gerson Petronilho, pelos ensinamentos matemáticos, bem como por sua orientação.

Aos meus irmãos, Eder e Anderson, bem como a Ana, pela força, paciência, pelo encorajamento e incentivo.

À minha noiva Taísa, por todo amor, alegrias, pela paciência, apoio, tolerância, por sua inesgotável atenção e disposição em me ajudar.

A todos os meus familiares. Em especial, ao "nono" José e a "nona" Teonésta, pela constante presença e apoio.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, em especial ao professor Luís, por todo o seu empenho e presteza em me auxiliar.

Aos amigos e professores da Universidade Federal do Paraná e da CEU, em especial ao professor Xavier, pelas oportunidades, por sua enorme atenção e incentivo.

Aos amigos do DM, Ana Claudia, Angelo, Bruno, Claudete, Cristina, Elaine, Elisa, Fabíolo, Fernanda, Francisco, Gustavo, Irma, Jacson, Jamil, João, Márcia, Paulo, Ricardo, Tiago.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho usamos estimativas bilineares e teorema do ponto fixo para mostrar que a solução do Problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries, com dado inicial analítico periódico, é analítica e periódica na variável espacial.

Abstract

In this work we use bilinear estimates and point fix theorem to show that the solution to the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation with analytic periodic initial data is analytic and periodic in the space variable.

Sumário

Introdução

O nosso trabalho baseia-se no artigo de Gorsky e Himonas [GH], o qual apresenta um estudo sobre o Problema de Cauchy, com dado inicial periódico, para a equação de Korteweg-de Vries (KdV),

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\,\partial_x(u^2) = 0,\ x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, & (1)\\ u(x,0) = \varphi(x),\ \varphi \in C^\omega(\mathbb{T}),\ \widehat{\varphi}(0) = 0, & (2) \end{cases}$$

onde $C^\omega(\mathbb{T})$ denota o conjunto das funções analíticas periódicas e $\widehat{\varphi}$ denota o coeficiente de Fourier de φ.

O nosso objetivo neste trabalho é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 1.1 *A solução $u(\cdot,t)$ do problema de valor inicial* (1)–(2) *pertence a $C^\omega(\mathbb{T})$, para t próximo de* 0.

A demonstração deste resultado será feita utilizando estimativas bilineares e um teorema do ponto fixo.

Lembremos que o Teorema 1.1 foi primeiramente demonstrado por Trubowitz [Tr] usando a técnica do espalhamento. Vários autores têm estudado a equação de KdV, dentre eles podemos citar Bourgain [B], Byers e Himonas [BH], Korteweg e de Vries [KdV], Kenig, Ponce e Vega [KPV1], [KPV2], [KPV3] e Sjöberg [Sj].

Gostaríamos de salientar que embora o dado inicial seja analítico, em geral a solução não preserva esta propriedade na variável t como acontece com a variável x. Em [BH], encontra-se a construção de um exemplo em que o dado inicial é um função analítica periódica, mas $u(0,\cdot) \notin C^{\omega}(\mathbb{R})$. Finalmente salientamos que embora a solução possa não ser analítica na variável t, mostra-se que a mesma pertence ao espaço de Gevrey $G^3(\mathbb{R})$ na variável t para x fixado e próximo de zero, (ver Himonas e Petronilho [HP]).

O Problema de Cauchy para a equação de KdV

Este capítulo esta dividido em cinco partes. Na primeira, iniciamos a demonstração do Teorema 1.1 transformando o problema (1)–(2) em infinitas equações. Na segunda seção, introduzimos dois espaços de funções, os quais serão de extrema importância para o que segue. Na terceira parte, exibimos condições para que uma função periódica de classe C^∞ seja uma função analítica. Nesta seção ainda definimos um espaço natural para expressar a analiticidade na variável x. Na quarta seção, obtemos algumas estimativas que são úteis para demonstrarmos o Teorema 1.1 e finalizamos este capítulo fazendo a demonstração do referido teorema.

1.1 Infinitas equações

Nesta seção iremos começar a demonstração do Teorema 1.1 e para isto começamos diferenciando formalmente as equações (1)–(2), k vezes com respeito a x, donde obtemos os seguintes problemas

$$\begin{cases} \partial_t \left(\partial_x^k u\right) + \partial_x^3 \left(\partial_x^k u\right) + \frac{1}{2}\, \partial_x \left[\partial_x^k (u \cdot u)\right] = 0, & (1.3) \\ \partial_x^k u(x,0) = \partial_x^k \varphi(x), \;\; k = 0, 1, \cdots . & (1.4) \end{cases}$$

Definindo $B_k(v,v) \doteq \dfrac{1}{2}\partial_x \left[\partial_x^k (v \cdot v)\right]$ e usando a fórmula de Leibniz, obtemos que

$$B_k(v,v) = \frac{1}{2}\partial_x \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!}\partial_x^{k-j}v\,\partial_x^j v.$$

Por simplicidade, neste trabalho denotaremos $\partial_x^k v = v_k$, para todo $k \in I\!N$.

Devido a notação utilizada, podemos reescrever $B_k(v,v)$ da seguinte forma

$$B_k(v,v) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial_x(v_{k-j}v_j).$$

Portanto podemos reescrever o problema de valor inicial (1.3)–(1.4) da seguinte maneira

$$\begin{cases} \partial_t u_k + \partial_x^3 u_k + B_k(u,u) = 0, & (1.5) \\ u_k(x,0) = \varphi_k(x), \;\; k = 0, 1, \cdots . & (1.6) \end{cases}$$

Desse modo, caso $u : \mathbb{T} \times I\!R \to I\!R$ seja tal que u_k é solução do problema de valor inicial (1.5)–(1.6), para todo $k = 0, 1, \cdots$, então a função $u_0 = u$ será solução do problema de valor inicial (1)–(2).

Agora, com o objetivo de encontrar as soluções do problema de valor inicial (1.5)–(1.6), definimos o operador W, onde para cada função $h \in C^\infty(\mathbb{T})$ temos

$$W(t)h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} e^{in^3 t}\widehat{h}(n).$$

O operador W é frequentemente denotado por $e^{-t\partial_x^3}$.

É interessante ressaltar que $W(0)h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}\widehat{h}(n) = h(x)$ e ainda que

$$\partial_t\big(W(t)h(x)\big) = -\partial_x^3\big(W(t)h(x)\big),$$

para todo $x \in \mathbb{T}$, pois

$$\begin{aligned}
\partial_t\big(W(t)h(x)\big) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} e^{in^3 t} in^3 \widehat{h}(n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\partial_x^3\left(e^{inx}\right) e^{in^3 t}\widehat{h}(n) \\
&= -\partial_x^3\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} e^{in^3 t}\widehat{h}(n)\right) \\
&= -\partial_x^3\big(W(t)h(x)\big).
\end{aligned}$$

Como o nosso objetivo é encontrar as soluções do problema de valor inicial (1.5)–(1.6), definimos para cada $k = 0, 1, \cdots,$

$$v_k(x,t) = W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t-\tau)B_k(v,v)(x,\tau)\, d\tau,$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$ qualquer, mostremos que $v_k(x,t)$ satisfaz o problema de valor inicial (1.5)–(1.6).

De fato, se $x \in \mathbb{T}$ então temos que

$$v_k(x,0) = W(0)\varphi_k(x) = \varphi_k(x).$$

Como

$$\begin{aligned}
\partial_t v_k(x,t) &= \partial_t \left(W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t-\tau)B_k(v,v)(x,\tau)\, d\tau \right) \\
&= \partial_t \big(W(t)\varphi_k(x) \big) - W(0)B_k(v,v)(x,t) \\
&\quad - \int_0^t \partial_t \big(W(t-\tau)B_k(v,v)(x,\tau) \big) d\tau \\
&= -B_k(v,v)(x,t) - \partial_x^3 \big(W(t)\varphi_k(x) \big) \\
&\quad - \int_0^t -\partial_x^3 \left(W(t-\tau)B_k(v,v)(x,\tau) \right) d\tau \\
&= -B_k(v,v)(x,t) - \partial_x^3 \left(W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t-\tau)B_k(v,v)(x,\tau) \right) d\tau \\
&= -B_k(v,v)(x,t) - \partial_x^3 v_k(x,t),
\end{aligned}$$

então temos que

$$\partial_t v_k(x,t) + \partial_x^3 v_k(x,t) + B_k(v,v)(x,t) = 0,$$

o que mostra o desejado.

Portanto caso encontrarmos uma função $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que

$$u_k(x,t) = W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t-\tau)B_k(u,u)(x,\tau)\, d\tau, \tag{1.7}$$

para qualquer $k = 0, 1, \cdots,$ então teremos que u_k é solução do problema de valor inicial (1.5)–(1.6) e consequentemente a função $u_0 = u$ será solução do problema de valor inicial (1)–(2).

Usando série de Fourier e transformada de Fourier podemos reescrever a equação (1.7) da seguinte maneira

$$u_k(x,t)=\sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\widehat{\varphi_k}(n)+i\sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\lambda-n^3)t}-1}{\lambda-n^3}\widehat{B_k(u,u)}(n,\lambda)\,d\lambda, \quad (1.8)$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, pois devido a definição do operador W temos que

$$\begin{aligned}
u_k(x,t) &= \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{inx}e^{in^3t}\widehat{\varphi_k}(n) - \int_0^t \left(\sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{inx}e^{in^3(t-\tau)}\widehat{B_k(u,u)}^{x}(n,\tau)\right)d\tau \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\widehat{\varphi_k}(n) - \int_0^t \left[\sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{inx}e^{in^3(t-\tau)}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda}\widehat{B_k(u,u)}^{x,\tau}(n,\lambda)\,d\lambda\right)\right]d\tau \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\widehat{\varphi_k}(n) + \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t -e^{i\tau(\lambda-n^3)}\,d\tau\right)\widehat{B_k(u,u)}(n,\lambda)\,d\lambda\right] \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\widehat{\varphi_k}(n) + \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{e^{i\tau(\lambda-n^3)}}{i(\lambda-n^3)}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{t}\widehat{B_k(u,u)}(n,\lambda)\,d\lambda\right] \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\widehat{\varphi_k}(n) + \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{e^{it(\lambda-n^3)}-1}{i(\lambda-n^3)}\right)\widehat{B_k(u,u)}(n,\lambda)\,d\lambda\right] \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\widehat{\varphi_k}(n) + i\sum_{n\in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\lambda-n^3)t}-1}{\lambda-n^3}\widehat{B_k(u,u)}(n,\lambda)\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Como estamos interessados em mostrar que a solução do problema de valor inicial (1)–(2) é analítica na variável x, apenas para t próximo de zero, a seguir escolhemos uma função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável, com suporte contido no intervalo $(-1,1)$, onde $0 \leq \psi(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e ainda $\psi(t) \equiv 1$ se $|t| < \frac{1}{2}$.

Fixado $0 < \delta < 1$ qualquer, definimos a função $\psi_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde para cada $t \in \mathbb{R}$ temos $\psi_\delta(t) = \psi(\frac{t}{\delta})$.

Agora, substituindo na equação (1.7) a função u_k por $\psi_\delta u_k$ e multiplicando a expressão resultante pela função ψ, obtemos que

$$\begin{aligned}
\psi(t)\psi_\delta(t)u_k(x,t) &= \psi(t)W(t)\varphi_k(x)-\psi(t)\int_0^t W(t-\tau)B_k(\psi_\delta u,\psi_\delta u)(x,\tau)d\tau \quad (1.9) \\
&\doteq T_k^\delta(u_0,u_1,\ldots,u_k).
\end{aligned}$$

Então se encontrarmos uma função u de modo que $T_k^\delta(u_0,u_1,\ldots,u_k)$ satisfaz a equação (1.9) para todo k, então $T_0^\delta(u_0) = u_0(x,t)$ será a solução do problema de valor inicial (1)–(2), desde que $|t| < \frac{\delta}{2}$.

Demonstraremos o Teorema 1.1 garantindo a existência de tal função u e mostrando que a função $T_0^\delta(u_0)$ é analítica na variável x. Para tanto, necessitamos de alguns espaços de funções especiais.

1.2 Os Espaços $\mathcal{X}^s$ e $\mathcal{Y}^s$

Antes de definirmos tais espaços, demonstramos um resultado que nos fornece uma propriedade da solução u do problema de valor inicial (1)–(2).

Lema 1.1 *Se $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for solução do problema de valor inicial* (1)–(2)*, então temos que*

$$\widehat{u}^{\,x}(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(x,t)\,dx = \widehat{\varphi}(0) = 0,$$

para todo t em $\mathbb{R}$, onde $\widehat{u}^{\,x}$ denota o coeficiente de Fourier de u com relação a variável x.

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(t) = \int_{\mathbb{T}} u(x,t)\,dx$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Devido a relação (2) temos que

$$f(0) = \int_{\mathbb{T}} u(x,0)\,dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi(x)\,dx = 2\pi\widehat{\varphi}(0) = 0.$$

Então para concluir a demonstração, basta mostrar que $f'(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Devido a relação (1) temos que

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \int_{\mathbb{T}} \partial_t u(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} -\partial_x^3 u(x,t) - \frac{1}{2}\partial_x u^2(x,t)\,dx \\
&= -\left(\partial_x^2 u(x,t) + \frac{1}{2}u^2(x,t) + C(t)\right)\Bigg|_{x=0}^{2\pi} \\
&= \partial_x^2 u(0,t) - \partial_x^2 u(2\pi,t) + \frac{1}{2}u^2(0,t) - \frac{1}{2}u^2(2\pi,t) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\partial_x^2 u(\cdot,t)$ e $u^2(\cdot,t)$ são $2\pi-$periódicas na variável x. $\blacksquare$

Observe que se $\widehat{u}^x(0,t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, então temos para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ que $\widehat{u}(0,\lambda) = 0$.

Portanto se u é solução do problema de valor inicial (1)–(2) então $\widehat{u}(0,\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Devido ao Teorema 5 em $([B], p.221)$ e ao fato que $\varphi \in H^s(\mathbb{T})$ para qualquer $s \geq 0$, sabemos que o problema de valor inicial (1)–(2) possui uma única solução global (ver definição abaixo) para todo $s \geq 0$. Logo a solução u do problema de valor inicial (1)–(2) é C^∞ na variável x.

Lembremos que o problema de valor inicial para a KdV é localmente (globalmente) **bem-posto** em um espaço X se dado $u_0 \in X$ existe $T = T(u_0)$ (para todo T) tal que existe uma única u resolvendo a equação integral associada a KdV, como em (1.7), com $u \in C([-T,T];X)$ e a aplicação

$$u_0 \to u \in C([-T,T];X)$$

é contínua.

Motivados por esta propriedade, definimos a seguir o espaço de funções $\mathcal{X}^s$, o qual foi usado por diversos autores, ver por exemplo [KPV2], [KPV3].

Definição 1.1 *Dado $s \geq 0$, definimos por $\mathcal{X}^s$, o espaço das funções $u \in L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, onde para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $\widehat{u}(0,\lambda) = 0$, com $u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{T})$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e ainda*

$$|||u|||_{\mathcal{X}^s} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \big(1 + |\lambda - n^3|\big)\, |\widehat{u}(n,\lambda)|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.10}$$

Temos que $(\mathcal{X}^s, |||\cdot|||_{\mathcal{X}^s})$ é um espaço vetorial normado completo.

Para provar a analiticidade na variável x necessitamos do seguinte espaço.

Definição 1.2 *Fixado $s \geq 0$, definimos por $\mathcal{Y}^s$ o espaço das funções $u \in \mathcal{X}^s$, onde*

$$|||u|||_{\mathcal{Y}^s} = |||u|||_{\mathcal{X}^s} + \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n,\lambda)| \, d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.11}$$

Temos que $(\mathcal{Y}^s, |||\cdot|||_{\mathcal{Y}^s})$ é um espaço vetorial normado completo.

Observe ainda que $\mathcal{Y}^s \hookrightarrow \mathcal{X}^s$, para qualquer $s \geq 0$.

Os espaços $\mathcal{Y}^s$ foram primeiramente introduzidos por Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka e Tao [CKSTT] para se estudar a bem postura global do problema de valor inicial para a equação de KdV quando $s \geq -1/2$.

Observe que as normas $|||u|||_{\mathcal{Y}^s}$ e $|||u|||_{\mathcal{X}^s}$ diferem apenas pela quantidade $\left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n,\lambda)| \, d\lambda \right)^2 \right)^{1/2}$. Esta quantidade foi acrescentada com o objetivo de garantir que se $u \in \mathcal{Y}^s$, então $u(\cdot,t) \in H^s(\mathbb{T})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, fixado. Vejamos tal resultado.

Lema 1.2 *Sendo $s \geq 0$ qualquer e $u \in \mathcal{Y}^s$ então para todo $t \in \mathbb{R}$, fixado, temos que*

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq |||u|||_{\mathcal{Y}^s}.$$

Demonstração: Fixemos $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Como para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos que $\widehat{u}^{\,x}(n,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda \cdot t} \widehat{u}(n,\lambda) \, d\lambda$, então

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} &= \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \, |\widehat{u}^{\,x}(n,t)|^2 \right) \\
&= \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{it\cdot\lambda} \widehat{u}(n,\lambda) \, d\lambda \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| e^{it\cdot\lambda} \widehat{u}(n,\lambda) \right| \, d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n,\lambda)| \, d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq |||u|||_{\mathcal{Y}^s},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

A seguir apresentamos um resultado que nos garante que dada uma função $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ qualquer, então $\psi u \in \mathcal{Y}^s$ para toda $u \in \mathcal{Y}^s$, ou seja, o espaço $\mathcal{Y}^s$ é invariante pela multiplicação de funções na variável t que são infinitamente diferenciável e que possuem suporte compacto.

Lema 1.3 *Dada $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, então existe $C = C(\psi) > 0$, de modo que,*

$$|||\psi u|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C|||u|||_{\mathcal{Y}^s},$$

para toda $u \in \mathcal{Y}^s$.

Demonstração: Nestas condições evidentemente que $\psi u \in \mathcal{Y}^s$. Definimos a função $g : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, onde $g(x,t) = \psi(t)u(x,t)$. Então se $n \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\widehat{g}(n,\lambda) = \widehat{\psi}^{\,t}(\lambda) * \widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}^{\,t}(\tau)\widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda-\tau)\,d\tau.$$

Como $1 + |\lambda - n^3| \leq (1+|\tau|)\,(1+|\lambda-\tau-n^3|)$, para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, então temos que

$$\begin{aligned}
|||\psi u|||^2_{\mathcal{X}^s} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\lambda-n^3|\right) \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}^{\,t}(\tau)\widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda-\tau)\,d\tau \right|^2 d\lambda \right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\lambda-n^3|\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}^{\,t}(\tau)\widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda-\tau) \right| d\tau \right)^2 d\lambda \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|)^{1/2} \left(1+|\lambda-\tau-n^3|\right)^{1/2} \left| \widehat{\psi}^{\,t}(\tau)\widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda-\tau) \right| d\tau \right)^2 d\lambda \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| (1+|\tau|)^{1/2} \left(1+|\lambda-\tau-n^3|\right)^{1/2} \widehat{\psi}^{\,t}(\tau)\widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda-\tau) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} d\tau \right)^2 \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| (1+|\tau|)\,\widehat{\psi}(\tau) \right| d\tau \right)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\mu-n^3|\right) |\widehat{u}(n,\mu)|^2\,d\mu \right) \\
&\leq C|||u|||^2_{\mathcal{X}^s},
\end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade decorre da desigualdade de Minkowski para Integrais e a última segue do fato de que a função ψ pertence ao espaço de Schwartz. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R} |\widehat{g}(n,\lambda)|\, d\lambda\right)^2 &= \sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R}\left|\int_{I\!R} \widehat{\psi}^{\,t}(\tau)\widehat{u}^{\,x,t}(n,\lambda-\tau)\, d\tau\right| d\lambda\right)^2 \\
&\le \sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R}\int_{I\!R}\left|\widehat{\psi}(\tau)\widehat{u}(n,\lambda-\tau)\right| d\tau d\lambda\right)^2 \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R}\left|\widehat{\psi}(\tau)\right|\int_{I\!R} |\widehat{u}(n,\lambda-\tau)|\; d\lambda d\tau\right)^2 \\
&= \sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R}\left|\widehat{\psi}(\tau)\right| d\tau\int_{I\!R} |\widehat{u}(n,\lambda)|\; d\lambda\right)^2 \\
&= \left(\int_{I\!R}\left|\widehat{\psi}(\tau)\right| d\tau\right)^2 \sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R} |\widehat{u}(n,\lambda)|\; d\lambda d\tau\right)^2 \\
&\le C\sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R} |\widehat{u}(n,\lambda)|\; d\lambda d\tau\right)^2,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato de ψ pertencer ao espaço de Schwartz.

Pelo fato de

$$|||\psi u|||_{\mathcal{Y}^s} = |||\psi u|||_{\mathcal{X}^s} + \left(\sum_{n\in \mathbb{Z}} |n|^{2s}\left(\int_{I\!R} |\widehat{g}(n,\lambda)|\, d\lambda\right)^2\right)^{1/2},$$

obtemos então que $|||\psi u|||_{\mathcal{Y}^s} \le C|||u|||_{\mathcal{Y}^s}$, o que conclui a demonstração. ■

Na sequência demonstraremos um resultado que tem por objetivo caracterizar, através da norma $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}$, as funções analíticas periódicas. Para tanto, para cada $k\in\mathbb{N}$, denotemos $\varphi_k \doteq \partial^k\varphi$.

Lema 1.4 *Seja $\varphi\in C^\omega(\mathbb{T})$ qualquer, então para cada $s\ge 0$ existe $M(s,\varphi)>0$ e $C_\varphi = C(\varphi)>0$, tal que*

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \le M(s,\varphi)\left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!,$$

para cada $k\in I\!N$.

Demonstração: Fixemos $k\in\mathbb{N}$ e $s\ge 0$ quaisquer. Pelo fato de $\varphi\in C^\omega(\mathbb{T})$, temos que existem constantes $C,\varepsilon>0$, de modo que $|\widehat{\varphi}(n)|\le Ce^{-\varepsilon|n|}$, para todo

$n \in \dot{\mathbb{Z}}$. Portanto obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k\|^2_{H^s(\mathbb{T})} &= \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s}|\widehat{\varphi_k}(n)|^2 \\
&= \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s}|n|^{2k}|\widehat{\varphi}(n)|^2 \\
&\leq \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s}|n|^{2k}C^2e^{-2\varepsilon|n|} \\
&= \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} C^2|n|^{2s}e^{-\varepsilon|n|}|n|^{2k}e^{-\varepsilon|n|}.
\end{aligned}$$

Como o intuito de limitarmos $|n|^{2k}e^{-\varepsilon|n|}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, onde $f(t) = t^{2k}e^{-\varepsilon t}$, para todo $t \in [0,\infty)$.

Pelo fato da função f ter como ponto de máximo $t_0 = \frac{2k}{\varepsilon}$, obtemos que $f\left(|n|\right) \leq f(\frac{2k}{\varepsilon})$ para cada n em $\dot{\mathbb{Z}}$, ou seja,

$$|n|^{2k}e^{-\varepsilon|n|} \leq \left(\frac{2k}{\varepsilon}\right)^{2k} e^{-2k} = \left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^k k^k e^{-k}\right]^2 \leq \left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^k k!\right]^2,$$

para todo $n \in \dot{\mathbb{Z}}$, onde a última desigualdade decorre do fato de $k^k e^{-k} \leq k!$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como a série $\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} C^2|n|^{2s}e^{-\varepsilon|n|}$ converge, existe uma constante $M(s,\varphi) < \infty$, de modo que $\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} C^2|n|^{2s}e^{-\varepsilon|n|} \leq M(s,\varphi)^2$.

Então devido a majoração acima de $\|\varphi_k\|^2_{H^s(\mathbb{T})}$, obtemos que

$$\|\varphi_k\|^2_{H^s(\mathbb{T})} \leq \left[M(s,\varphi)\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^k k!\right]^2.$$

Tomando $C_\varphi = \frac{\varepsilon}{4}$ e pelo fato das constantes $M(s,\varphi), C_\varphi > 0$ independerem do valor de $k \in \mathbb{N}$ então obtemos que

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s,\varphi)\left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que conclui a demonstração. ∎

Na sequência deste trabalho, denotaremos por $C_\varphi > 0$, a constante obtida pelo Lema 1.4, onde $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$ é a condição inicial do problema (1)–(2). Ainda nos referindo a condição inicial do problema (1)–(2), denotamos para cada $s \geq 0$,

$$[\![\varphi]\!]_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

A seguir, apresentamos um resultado que nos dá uma condição para que uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ seja uma função analítica em $\mathbb{T}$.

Lema 1.5 *Seja $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável. Se existem constantes $s \geq 0, M(s,\varphi) \geq 0$ e $C_\varphi > 0$, onde para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos*

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s,\varphi) \left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!, \tag{1.12}$$

então $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$.

Demonstração: Sabemos que $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$ se, e somente se, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ e existem constantes positivas C e ε, de modo que $|\widehat{\varphi}(n)| \leq Ce^{-\varepsilon|n|}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Pela relação (1.12) obtemos para qualquer $k \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \left|\widehat{\varphi_k}(n)\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s}|n|^{2k} \left|\widehat{\varphi}(n)\right|^2 \leq M(s,\varphi)^2 \left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^{2k} (k!)^2,$$

donde resulta que

$$|n|^{2s}|n|^{2k}|\widehat{\varphi}(n)|^2 \leq M(s,\varphi)^2 \left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^{2k} (k!)^2,$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Temos que a última relação é equivalente a,

$$|n|^s|n|^k|\widehat{\varphi}(n)| \leq M(s,\varphi) \left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$, ou ainda,

$$\frac{C_\varphi^k|n|^k}{k!}|\widehat{\varphi}(n)| \leq M(s,\varphi) \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, donde resulta que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(C_\varphi|n|)^k}{k!}|\widehat{\varphi}(n)| \leq M(s,\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ou seja,

$$e^{C_\varphi |n|}|\widehat{\varphi}(n)| \leq 2M(s,\varphi),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Tomando $C = \max\{2M(s,\varphi), |\widehat{\varphi}(0)|\}$ e $\varepsilon = C_\varphi$, obtemos então que $|\widehat{\varphi}(n)| \leq Ce^{-\varepsilon|n|}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, o que conclui a demonstração. ∎

1.3 O espaço $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$

Como o nosso objetivo é mostrar que a solução u, do problema de valor inicial (1)–(2), é analítica na variável x, desde que t esteja próximo de zero, então vamos introduzir um espaço especial para tornar isto possível.

Como já visto no Lema 1.4 o fato de $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$ pode ser traduzido em termos das normas H^s por

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s,\varphi)\left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto se definirmos

$$\{\varphi_k\} \doteq (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots), \;\; \varphi_k = \partial_x^k \varphi$$

e definirmos

$$[\![\{\varphi_k\}]\!]_s \doteq [\![\varphi]\!]_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!}||\varphi_k||_{H^s(\mathbb{T})},$$

então pela definição de $[\![\varphi]\!]_s$, temos que

$$[\![\{\varphi_k\}]\!]_s < \infty.$$

Motivados por este resultado, a seguir iremos definir um espaço natural para expressar a analiticidade na variável x.

Definição 1.3 *Fixado $s \geq 0$, definimos $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ como o conjunto das sequências $\{v_k\} \doteq (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, onde $v_k \in \mathcal{Y}^s$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e ainda*

$$|||\{v_k\}|||_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} |||v_k|||_{\mathcal{Y}^s} < \infty. \tag{1.13}$$

Temos que $(\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s), |||\cdot|||_s)$ é um espaço vetorial normado completo.

Mostraremos a seguir porque este espaço é apropriado para mostrarmos a analiticidade pretendida.

Lema 1.6 *Se $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ para algum $s \geq 0$, então $v(\cdot, t) \in C^\omega(\mathbb{T})$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixo.*

Demonstração: Pelo fato de existir $s \geq 0$ de modo que

$$|||\{v_k\}|||_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} |||v_k|||_{\mathcal{Y}^s} < \infty,$$

então existe uma constante $M = M(s, v)$, de modo que

$$\frac{C_\varphi^k}{k!} |||v_k|||_{\mathcal{Y}^s} \leq M,$$

para todo $k \in I\!N$. Mas isso é equivalente a afirmar que se $k \in \mathbb{N}$, então

$$|||v_k|||_{\mathcal{Y}^s} \leq M \left(\frac{1}{C_\varphi} \right)^k k!.$$

Fixado $t \in \mathbb{R}$ qualquer, pelo fato das hipóteses do Lema 1.2 serem satisfeitas, obtemos então que

$$\|v_k(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq |||v_k|||_{\mathcal{Y}^s} \leq M \left(\frac{1}{C_\varphi} \right)^k k!,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como as hipóteses do Lema 1.5 são satisfeitas, concluímos que $v(\cdot, t) \in C^\omega(\mathbb{T})$. Pelo fato de $t \in \mathbb{R}$ ser qualquer, temos então que $v(\cdot, t) \in C^\omega(\mathbb{T})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que conclui a demonstração. ■

Na sequência deste trabalho denotaremos por $B_s[0, r]$ o conjunto das sequências $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$, onde $|||\{v_k\}|||_s \leq r$.

Temos que o espaço $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ é extremamente útil para demonstrarmos o Teorema 1.1, pois para cada $s \geq 0$ fixo, vamos garantir a existência de $0 < \delta < 1$ e de $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$, de modo que $T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ satisfaz a equação (1.9) para cada $k \in \mathbb{N}$. Isso implica que se $|t| < \frac{\delta}{2}$, então a função $T^\delta(v_0) = v(x,t)$ é uma solução do problema de valor inicial (1)–(2) e pelo fato de $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ temos então que a função v é analítica na variável x.

Como iremos demonstrar o Teorema 1.1 utilizando a técnica do ponto fixo, então para cada $0 < \delta < 1$, definimos o operador $T^\delta : \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s) \to \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$, onde

$$T^\delta(\{v_k\}) = \big(T_0^\delta(v_0), T_1^\delta(v_0, v_1), \ldots, T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k), \ldots\big) = \big\{T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k)\big\}.$$

Na sequência veremos alguns resultados técnicos que serão úteis para mostrarmos que a aplicação T^δ é uma contração em um subconjunto apropriado de $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$.

1.4 Estimativas

Esta seção tem por objetivo encontrar, para cada $s \geq 0$ fixo, condições sobre $0 < \delta < 1$ e $r > 0$, de modo que o operador T^δ seja uma contração em $B_s[\mathit{0}, r]$.

A princípio, enunciaremos um resultado que é fundamental para mostrarmos que T^δ é uma contração em uma bola apropriada de $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$. A demonstração desta proposição não foi redigida nesta seção devido ao sua extensão, mas está inteiramente contida no Apêndice.

Proposição 1.1 *Fixado* $0 < \delta < 1$*, existe uma constante* $C > 0$*, de modo que*

$$|||T_k^\delta(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |||v_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s} |||v_j|||_{\mathcal{Y}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

para quaisquer $v_0, v_1, v_2 \ldots, v_k \in \mathcal{Y}^s$.

A seguir, enunciamos uma generalização da Proposição 1.1, cuja demonstração também pode ser encontrada no Apêndice.

Proposição 1.2 *Se* $0<\delta<1$, *então existe uma constante* $C>0$, *de modo que*

$$\begin{aligned} & |||T_k^\delta(w_0,w_1,\ldots,w_k)-T_k^\delta(v_0,v_1,\ldots,v_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \\ \leq \;& C\delta^{1/24}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||w_{k-j}+v_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_j-v_j|||_{\mathcal{Y}^s}, \end{aligned}$$

para quaisquer $w_0,v_0,w_1,v_1,\ldots,w_k,v_k\in\mathcal{Y}^s$.

Na sequência, demonstraremos um resultado que nos dá, mediante o uso das estimativas obtidas pelas Proposições 1.1 e 1.2, uma estimativas para $|||T^\delta(\{v_k\})|||_s$.

Lema 1.7 *Fixado* $0<\delta<1$, *existe uma constante* $C>0$, *de modo que*

$$|||T^\delta\left(\{w_k\}\right)|||_s\leq C\delta^{1/24}|||\{w_k\}|||_s^2+C[\![\varphi]\!]_s, \tag{1.14}$$

e ainda

$$|||T^\delta\left(\{w_k\}\right)-T^\delta\left(\{v_k\}\right)|||_s\leq C\delta^{1/24}|||\{w_k\}+\{v_k\}|||_s\cdot|||\{w_k\}-\{v_k\}|||_s, \tag{1.15}$$

para quaisquer $\{w_k\}$ *e* $\{v_k\}$ *que pertencem a* $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$.

Demonstração: Seja $\{w_k\}\in\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$. Devido a Proposição 1.1, obtemos que

$$\begin{aligned} |||T^\delta\left(\{w_k\}\right)|||_s &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^k}{k!}|||T_k^\delta(w_0,w_1,\ldots,w_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \\ &\leq C\delta^{1/24}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||w_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_j|||_{\mathcal{Y}^s}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^k}{k!}C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \\ &= C\delta^{1/24}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||w_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_j|||_{\mathcal{Y}^s}+C[\![\varphi]\!]_s. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||w_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_j|||_{\mathcal{Y}^s} \qquad (1.17)\\
=&C_\varphi^0\left(\frac{1}{0!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&C_\varphi^1\left(\frac{1}{1!}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{1!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&C_\varphi^2\left(\frac{1}{2!}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{1!}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{2!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&C_\varphi^3\left(\frac{1}{3!}|||w_3|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{2!}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{2!}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{3!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_3|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&\quad\vdots\\
=&C_\varphi^0\left(\frac{1}{0!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&C_\varphi^1\left(\frac{1}{1!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{1!}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&C_\varphi^2\left(\frac{1}{2!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{1!}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{2!}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&C_\varphi^3\left(\frac{1}{3!}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_3|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{2!}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{2!}|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}+\frac{1}{3!}|||w_3|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}\right)+\\
&\quad\vdots\\
=&C_\varphi^0|||w_0|||_{\mathcal{Y}^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^k}{k!}|||w_k|||_{\mathcal{Y}^s}+C_\varphi^1\frac{|||w_1|||_{\mathcal{Y}^s}}{1!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_\varphi^{k-1}}{(k-1)!}|||w_{k-1}|||_{\mathcal{Y}^s}+\\
&C_\varphi^2\frac{|||w_2|||_{\mathcal{Y}^s}}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{C_\varphi^{k-2}}{(k-2)!}|||w_{k-2}|||_{\mathcal{Y}^s}+C_\varphi^3\frac{|||w_3|||_{\mathcal{Y}^s}}{3!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{C_\varphi^{k-3}}{(k-3)!}|||w_{k-3}|||_{\mathcal{Y}^s}+\dots\\
=&\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^j}{j!}|||w_j|||_{\mathcal{Y}^s}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{C_\varphi^{k-j}}{(k-j)!}|||w_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}\\
=&\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^j}{j!}|||w_j|||_{\mathcal{Y}^s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^l}{l!}|||w_l|||_{\mathcal{Y}^s},
\end{aligned}$$

onde a antepenúltima igualdade é obtida da igualdade anterior somando em colunas.

Segue de (1.16) e da última igualdade que

$$\begin{aligned}
|||T^\delta(\{w_k\})|||_s &\leq C\delta^{1/24}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^j}{j!}|||w_j|||_{\mathcal{Y}^s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_\varphi^l}{l!}|||w_l|||_{\mathcal{Y}^s}+C[\![\varphi]\!]_s\\
&= C\delta^{1/24}|||\{w_k\}|||_s^2+C[\![\varphi]\!]_s,
\end{aligned}$$

o que prova a relação (1.14).

A seguir mostraremos que a relação (1.15) é satisfeita. Devido a definição de $|||\cdot|||_s$, Proposição 1.2 e a igualdade (1.17), obtemos que

$$\begin{aligned}
& |||T^\delta(\{w_k\}) - T^\delta(\{v_k\})|||_s \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} |||T_k^\delta(w_0, w_1, \ldots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \\
\leq & C\delta^{1/24} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |||w_{k-j} + v_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s} |||w_j - v_j|||_{\mathcal{Y}^s} \\
= & C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^j}{j!} |||w_j + v_j|||_{\mathcal{Y}^s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^l}{l!} |||w_l - v_l|||_{\mathcal{Y}^s} \\
= & C\delta^{1/24} |||\{w_k\} + \{v_k\}|||_s \cdot |||\{w_k\} - \{v_k\}|||_s,
\end{aligned}$$

o que demonstra a relação (1.15) e conclui a demonstração do Lema 1.7. ■

O resultado a seguir exibe condições sobre $0 < \delta < 1$ e $r > 0$ para que o operador T^δ seja uma contração em $B_s[0, r]$.

Proposição 1.3 *Se tomarmos* $r = 2C[\![\varphi]\!]_s$ *e* $0 < \delta < min\left\{1, \frac{[\![\varphi]\!]_s^{24}}{(2r^2)^{24}}\right\}$*, onde C é a constante obtida no Lema 1.7, então* $T^\delta : B_s[0, r] \to B_s[0, r]$ *é uma contração. Mais precisamente, temos que* $|||T^\delta(\{w_k\})|||_s \leq r$*, para todo* $\{w_k\} \in B_s[0, r]$ *e ainda*

$$|||T^\delta(\{w_k\}) - T^\delta(\{v_k\})|||_s \leq \frac{1}{2} |||\{w_k\} - \{v_k\}|||_s,$$

para qualquer $\{w_k\}$, $\{v_k\} \in B_s[0, r]$.

Demonstração: Devido ao Lema 1.7 e as condições impostas sobre r e δ obtemos

$$|||T^\delta(\{w_k\})|||_s \leq C\delta^{1/24} |||\{w_k\}|||_s^2 + C[\![\varphi]\!]_s < C\frac{[\![\varphi]\!]_s}{2r^2} r^2 + \frac{r}{2} = \frac{3r}{4} < r,$$

para qualquer $\{w_k\}$ em $B_s[0, r]$.

Fixados $\{w_k\}, \{v_k\} \in B_s[0, r]$ quaisquer, ainda pelo Lema 1.7 e pelo fato de $|||\cdot|||_s$ ser uma norma sobre $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$, temos que

$$\begin{aligned}
|||T^{\delta}(\{w_k\}) - T^{\delta}(\{v_k\})|||_s &\leq C\delta^{1/24}|||\{w_k\}+\{v_k\}|||_s \cdot |||\{w_k\}-\{v_k\}|||_s \\
&< C\frac{[\![\varphi]\!]_s}{2r^2}|||\{w_k\}+\{v_k\}|||_s \cdot |||\{w_k\}-\{v_k\}|||_s \\
&\leq C\frac{[\![\varphi]\!]_s}{2r^2}\big(|||\{w_k\}|||_s + |||\{v_k\}|||_s\big) \cdot |||\{w_k\}-\{v_k\}|||_s \\
&\leq \frac{r}{2}\frac{2r}{2r^2}|||\{w_k\}-\{v_k\}|||_s \\
&= \frac{1}{2}|||\{w_k\}-\{v_k\}|||_s,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

A seguir enunciaremos o Lema da Contração, resultado este que nos garantirá a existência de um único elemento $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ de modo que $T_k^{\delta}(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ satisfaz a equação (1.9) para qualquer $k \in \mathbb{N}$. A demonstração deste Lema pode ser encontrada em $([\mathrm{St}], p.12)$.

Lema 1.8 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração. Então existe um único ponto fixo p, isto é, $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F, isto é, dado qualquer $x \in X$, temos que $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = p$, onde $x_1 = F(x)$ e $x_{n+1} = F(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1.5 Demonstração do Teorema 1.1

Seja $s \geq 0$ fixado. Se tomarmos r e δ satisfazendo as hipóteses da Proposição 1.3, então pelo fato de $(B_s[0,r], |||\cdot|||_s)$ ser um espaço normado completo e a aplicação T^{δ} ser uma contração sobre $B_s[0,r]$, temos pelo Lema 1.8 que existe um único elemento $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$, de modo que $\{v_k\} = T^{\delta}(\{v_k\})$.

Segue desta última igualdade e da definição do operador T^{δ} que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$v_k(x,t) = T_k^{\delta}(v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

Assim para $|t| < \frac{\delta}{2}$, temos para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$\psi(t)\psi_\delta(t)v_k(x,t) = T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

Logo, pelo fato da função v satisfazer a relação (1.9) para qualquer $k \in \mathbb{N}$, obtemos então que v é solução do problema de valor inicial (1)–(2), desde que $|t| < \frac{\delta}{2}$.

Agora devido o fato de $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$, temos então que a função v é analítica na variável x. Portanto, temos que a solução $v(x,t) = T_0^\delta(v_0)$ do problema de valor inicial (1)–(2) é analítica na variável x desde que $|t| < \frac{\delta}{2}$, o que conclui a demonstração do Teorema 1.1. ■

Apêndice

Neste apêndice o nosso objetivo será demonstrar alguns dos resultados que foram omitidos durante a demonstração do Teorema 1.1.

2.1 Demonstração da Proposição 1.1

A seguir faremos a demonstração da Proposição 1.1, resultado este de grande valia, pois nos dá uma estimativa para o valor de $|||T_k^\delta(u_0, u_1, \ldots, u_k)|||_{\mathcal{Y}^s}$ para quaisquer $0 < \delta < 1$ e $k \in \mathbb{N}$. Esta estimativa possui um papel fundamental para mostrarmos que T^δ é uma contração em um conjunto apropriado de $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$. Na sequência enunciamos a referida proposição novamente.

Proposição 2.1 *Fixado $0 < \delta < 1$, existe uma constante $C > 0$, de modo que*

$$|||T_k^\delta(u_0, u_1, \ldots, u_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |||u_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s} |||u_j|||_{\mathcal{Y}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

para quaisquer $u_0, u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{Y}^s$.

Fixemos $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Antes de começarmos a demonstração do resultado acima, iremos buscar uma outra caracterização de $T_k^\delta(u_0, u_1, \ldots, u_k)$.

Para simplificar a notação utilizada convencionamos que

$$B_k^\delta \doteq B_k(\psi_\delta u, \psi_\delta u) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial_x (\psi_\delta u_{k-j} \cdot \psi_\delta u_j).$$

Segue da definição de T_k^δ, relação (1.9) e da definição do operador W que

$$\begin{aligned}
T_k^\delta\left(u_0,u_1,\ldots,u_k\right) &= \psi(t)W(t)\varphi_k(x) - \psi(t)\int_0^t W(t-\tau)B_k\left(\psi_\delta u,\psi_\delta u\right)(x,\tau)\,d\tau\\
&= \psi(t)W(t)\varphi_k(x) - \psi(t)\int_0^t W(t-\tau)B_k^\delta(x,\tau)\,d\tau\\
&= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\widehat{\varphi_k}(n) - \psi(t)\int_0^t\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left[nx+n^3(t-\tau)\right]}\widehat{B_k^\delta}^x(n,\tau)\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Como $\widehat{B_k^\delta}^x(n,\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\cdot\tau}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda$, para quaisquer $n\in\mathbb{Z}$ e $\tau\in\mathbb{R}$, segue da igualdade acima que

$$\begin{aligned}
T_k^\delta\left(u_0,u_1,\ldots,u_k\right) &= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}\\
&- \psi(t)\int_0^t\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left[nx+n^3(t-\tau)\right]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\cdot\tau}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda\right)d\tau\\
&= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}\\
&- \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\lambda-n^3\right)\cdot\tau}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda d\tau\\
&= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}\\
&- \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\int_0^t e^{i\left(\lambda-n^3\right)\cdot\tau}\,d\tau d\lambda\\
&= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}\\
&- \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\left(\frac{e^{i\left(\lambda-n^3\right)\cdot\tau}}{i\left(\lambda-n^3\right)}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}d\lambda\\
&= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}\\
&- \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\left(-i\frac{e^{it\left(\lambda-n^3\right)}-1}{\lambda-n^3}\right)d\lambda\\
&= \psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}
\end{aligned}$$

$$+ \quad i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{it\left(\lambda-n^3\right)}-1}{\lambda-n^3} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda.$$

Como $1 = \psi\left(\lambda-n^3\right)+1-\psi\left(\lambda-n^3\right) = \psi\left(\lambda-n^3\right)+(1-\psi)\left(\lambda-n^3\right)$ e ainda para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\frac{e^{it\left(\lambda-n^3\right)}-1}{\lambda-n^3} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j \left(\lambda-n^3\right)^{j-1},$$

então obtemos que

$$\begin{aligned}
& T_k^\delta\left(u_0,u_1,\ldots,u_k\right) \\
= \;& \psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} \widehat{\varphi_k}(n) e^{i\left(nx+n^3t\right)} \\
& + i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi\left(\lambda-n^3\right)+(1-\psi)\left(\lambda-n^3\right)\right] \left(\frac{e^{it\left(\lambda-n^3\right)}-1}{\lambda-n^3} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda \\
= \;& \psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} \widehat{\varphi_k}(n) e^{i\left(nx+n^3t\right)} \\
& + i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\lambda-n^3\right) \left(\frac{e^{it\left(\lambda-n^3\right)}-1}{\lambda-n^3} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda \\
& + i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\psi)\left(\lambda-n^3\right) \left(\frac{e^{it\left(\lambda-n^3\right)}-1}{\lambda-n^3} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda \\
= \;& \psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} \widehat{\varphi_k}(n) e^{i\left(nx+n^3t\right)} \\
& + i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\lambda-n^3\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j \left(\lambda-n^3\right)^{j-1} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda \\
& + i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\psi)\left(\lambda-n^3\right) \left(\frac{e^{it\lambda}e^{-itn^3}}{\lambda-n^3} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda \\
& - i\psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\psi)\left(\lambda-n^3\right) \left(\frac{1}{\lambda-n^3} \right) \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda \\
= \;& \psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} \widehat{\varphi_k}(n) e^{i\left(nx+n^3t\right)} && (2.18) \\
& + i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j \psi(t) \sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\lambda-n^3\right) \left(\lambda-n^3\right)^{j-1} \widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\, d\lambda && (2.19)
\end{aligned}$$

$$+i\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{inx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\psi)\left(\lambda-n^3\right)}{\lambda-n^3}e^{it\lambda}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda \tag{2.20}$$

$$-i\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\psi)\left(\lambda-n^3\right)}{\lambda-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda. \tag{2.21}$$

Como o nosso intuito é obter uma estimativa para $|||T_k^\delta\left(u_0,u_1,\ldots,u_k\right)|||_{\mathcal{Y}^s}$, a nossa estratégia será estimar os valores de $|||(2.18)|||_{\mathcal{Y}^s}$, $|||(2.19)|||_{\mathcal{Y}^s}$, $|||(2.20)|||_{\mathcal{Y}^s}$ e $|||(2.21)|||_{\mathcal{Y}^s}$.

Estimativa de $|||(2.18)|||_{\mathcal{Y}^s}$.

Por conveniência definimos $f:\mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, onde se $x\in\mathbb{T}$ e $t\in\mathbb{R}$,

$$(2.18)=f(x,t)=\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}.$$

Basta então encontrarmos uma estimativa para $|||f|||_{\mathcal{Y}^s}$.

Fixados $m\in\mathbb{Z}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, afirmamos que

$$\widehat{f}(m,\lambda)=\widehat{\varphi_k}(m)\widehat{\psi}(\lambda-m^3).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(m,\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-it\cdot\lambda}e^{-ix\cdot m}\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{i\left(nx+n^3t\right)}\,dxdt\\
&= \int_{\mathbb{R}}\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}\widehat{\varphi_k}(n)e^{-it\cdot(\lambda-n^3)}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ix\cdot(n-m)}\,dxdt\\
&= \int_{\mathbb{R}}\psi(t)e^{-it\cdot(\lambda-m^3)}\widehat{\varphi_k}(m)\,dt\\
&= \widehat{\varphi_k}(m)\widehat{\psi}(\lambda-m^3).
\end{aligned}$$

Então obtemos que

$$\begin{aligned}
|||f|||_{\mathcal{Y}^s} &= \left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left(1+\left|\lambda-n^3\right|\right)\left|\widehat{f}(n,\lambda)\right|^2 d\lambda\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(n,\lambda)\right|\,d\lambda\right)^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \left|\lambda - n^3\right|\right) \left|\widehat{\varphi_k}(n) \widehat{\psi}(\lambda - n^3)\right|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi_k}(n) \widehat{\psi}(\lambda - n^3)\right| \, d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left|\widehat{\varphi_k}(n)\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \left|\lambda - n^3\right|\right) \left|\widehat{\psi}(\lambda - n^3)\right|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left|\widehat{\varphi_k}(n)\right|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi}(\lambda - n^3)\right| \, d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda'|) \left|\widehat{\psi}(\lambda')\right|^2 \, d\lambda' \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi}(\lambda')\right| \, d\lambda' \right) \right] \\
&\leq C \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade segue do fato da função ψ pertencer ao espaço de Schwartz.

Portanto, temos que existe $C > 0$, de modo que

$$
|||(2.18)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}. \tag{2.22}
$$

Estimativa de $|||(2.19)|||_{\mathcal{Y}^s}$.

No intuito de obter estimativas para $|||(2.19)|||_{\mathcal{Y}^s}$, então para cada $j \in \mathbb{N}^*$, definimos $f_j : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, onde para qualquer $x \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{R}$, temos

$$
f_j(x,t) = t^j \psi(t) \sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx + n^3 t\right)} \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) \left(\tau - n^3\right)^{j-1} \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \, d\tau.
$$

Pela definição das funções f_j, temos então para qualquer $x \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{R}$ que

$$
(2.19) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^{j+1}}{j!} f_j(x,t).
$$

Buscaremos então estimativas para $|||f_j|||_{\mathcal{Y}^s}$.

Fixado $j \in \mathbb{N}^*$ qualquer, afirmamos que

$$\widehat{f_j}(m,\lambda) = \widehat{t^j\psi}(\lambda - m^3) \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - m^3)\left(\tau - m^3\right)^{j-1} \widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\, d\tau,$$

para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

De fato, fixados $m \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos que

$$\begin{aligned}
&\widehat{f_j}(m,\lambda)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} t^j\psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}} e^{-i\left[x\cdot(m-n)+t\cdot(\lambda-n^3)\right]}\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau dx dt\\
&= \sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot(\lambda-n^3)}t^j\psi(t)\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-ix\cdot(m-n)}dxdt\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot(\lambda-m^3)}t^j\psi(t)\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-m^3)\left(\tau-m^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\,d\tau dt\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot(\lambda-m^3)}t^j\psi(t)\,dt\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-m^3)\left(\tau-m^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\,d\tau\\
&= \widehat{t^j\psi}(\lambda-m^3)\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-m^3)\left(\tau-m^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Na sequência encontraremos uma estimativa para $|||f_j|||_{\mathcal{Y}^s}$.

$$\begin{aligned}
&|||f_j|||_{\mathcal{Y}^s}\\
&=\Bigg(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda-n^3|\right)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda-n^3)\right|^2\\
&\qquad\cdot\left|\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau\right|^2 d\lambda\Bigg)^{1/2}\\
&\quad+\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda-n^3)\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau\right|d\lambda\right)^2\right)^{1/2}\\
&=\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}(1+|\lambda'|)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda')\right|^2\cdot\left|\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\right|^2 d\lambda'\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda')\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\right|d\lambda'\right)^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\lambda'|)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda')\right|^2 d\lambda'\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left|\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau\right|^2\right)^{1/2}$$

$$+\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda')\right|\,d\lambda'\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(\left\|(1+|\lambda|)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2}+\left\|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\psi(\tau-n^3)\left(\tau-n^3\right)^{j-1}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}.$$

Como $1+|\lambda|\leq 2(1+|\lambda|^2)$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ e por ψ pertencer a $C_0^\infty(-1,1)$, onde $0\leq\psi(t)\leq 1$, para todo $t\in\mathbb{R}$, obtemos que existe $C=C(\psi)>0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left\|(1+|\lambda|)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2} &\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda|^2\right)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\\
&= 2\left\|t^j\psi\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&= 2\left(\left\|t^j\psi\right\|_{H^0(\mathbb{R})}+\left\|(t^j\psi)'\right\|_{H^0(\mathbb{R})}\right)\\
&\leq 2\left(\left\|t^j\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|jt^{j-1}\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|t^j\psi'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)\\
&\leq C\cdot j.
\end{aligned}$$

Analogamente, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade acima, obtemos que existe $C=C(\psi)>0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(1+|\lambda|)}(1+|\lambda|)\,\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|\,d\lambda\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\lambda|)^2}\,d\lambda\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\lambda|)^2\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda|^2+2|\lambda|\right)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda|^2\right)\left|\widehat{t^j\psi}(\lambda)\right|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\\
&= C\|t^j\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&\leq C\cdot j.
\end{aligned}$$

Portanto, devido as relações acima, nós obtemos para qualquer $j \in \mathbb{N}^*$, que existe $C = C(\psi) > 0$, onde

$$|||f_j|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C \cdot j \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \psi(\tau - n^3) \left(\tau - n^3\right)^{j-1} \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right| d\tau \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Novamente pelo fato de $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$, onde $0 \leq \psi(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\psi(\tau - n^3) = 0$, se $|\tau - n^3| > 1$ e ainda $|\psi(\tau - n^3)|\,|\tau - n^3|^{j-1} \leq 1$ se $|\tau - n^3| \leq 1$. Então obtemos para qualquer $j \in \mathbb{N}^*$ que

$$\begin{aligned}
|||f_j|||_{\mathcal{Y}^s} &\leq C \cdot j \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \psi(\tau - n^3) \left(\tau - n^3\right)^{j-1} \right| \left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right| d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \cdot j \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{|\tau - n^3| \leq 1} \left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right| d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \cdot j \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{\left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato que $1 \leq \frac{2}{1+|\tau - n^3|}$, sempre que $|\tau - n^3| \leq 1$.

Pelo fato de $(2.19) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^{j+1}}{j!} f_j(x,t)$, por $|||\cdot|||_{\mathcal{Y}^s}$ ser norma e pela relação (2.23) obtemos que existe $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
|||(2.19)|||_{\mathcal{Y}^s} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} |||f_j|||_{\mathcal{Y}^s} \\
&\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j!} \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{\left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{\left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j!} \\
&= C \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{\left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

pois a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ é convergente.

Portanto, obtemos existe $C > 0$, de modo que

$$\| (2.19) \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \left(\sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} \, d\tau \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{2.24}$$

Estimativa de $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s}$.

Com o objetivo de obter uma estimativa para $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s}$ e o intuito de simplificar a notação, definimos $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, onde para quaisquer $x \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{R}$

$$f(x,t) = \sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} e^{inx} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} e^{i\tau t} \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \, d\tau.$$

Devido a definição da função f, temos que $(2.20) = i\psi(t) f(x,t)$, para quaisquer $x \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s} = \| i\psi f \|_{\mathcal{Y}^s} = \| \psi f \|_{\mathcal{Y}^s}.$$

Devido ao fato de $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$, temos então pelo Lema 1.3 que existe uma constante $C = C(\psi) > 0$ de modo que $\| \psi f \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \| f \|_{\mathcal{Y}^s}$. Portanto para obter uma estimativa para $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s}$, basta encontrar uma estimativa para $\| f \|_{\mathcal{Y}^s}$.

Temos que $\widehat{f}(m,\lambda) = \dfrac{(1-\psi)(\lambda - m^3)}{\lambda - m^3} \widehat{B_k^\delta}(m,\lambda)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

De fato, sendo $m \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer, obtemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(m,\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix\cdot m} e^{-it\cdot\lambda} \sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} e^{inx} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} e^{i\tau t} \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \, d\tau dx dt \\
&= \sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} e^{i\tau t} \widehat{B_k^\delta}(n,\tau) \, d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix\cdot(m-n)} \, dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - m^3)}{\tau - m^3} e^{i\tau t} \widehat{B_k^\delta}(m,\tau) \, d\tau dt \\
&= \frac{(1-\psi)(\lambda - m^3)}{\lambda - m^3} \widehat{B_k^\delta}(m,\lambda).
\end{aligned}$$

A seguir, iremos encontrar uma estimativa de $\| f \|_{\mathcal{Y}^s}$. Pelo fato da função $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$, onde $0 \leq \psi(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e ainda $\psi(t) = 1$ se $|t| < \frac{1}{2}$, temos que $(1-\psi)(t)=0$ se $|t|<\frac{1}{2}$ e ainda $|(1-\psi)(t)|\leq 1$, para todo $t\in\mathbb{R}$, logo

$$
\begin{aligned}
|||f|||_{\mathcal{Y}^s} &= \left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\big(1+|\tau-n^3|\big)\left|\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|d\tau\right)^2\right)^{1/2}\\
&= \left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\big(1+|\tau-n^3|\big)\frac{|(1-\psi)(\tau-n^3)|^2}{|\tau-n^3|^2}\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\frac{|(1-\psi)(\tau-n^3)|}{|\tau-n^3|}\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|d\tau\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\frac{(1+|\tau-n^3|)}{|\tau-n^3|^2}\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{|\tau-n^3|}d\tau\right)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Se $|\tau-n^3|\geq\dfrac{1}{2}$, então $1+|\tau-n^3|\leq 2\,|\tau-n^3|+|\tau-n^3|=3\,|\tau-n^3|$ donde resulta que $\dfrac{1}{|\tau-n^3|}\leq\dfrac{3}{1+|\tau-n^3|}$ e ainda $\dfrac{1}{|\tau-n^3|^2}\leq\dfrac{9}{(1+|\tau-n^3|)^2}$. Portanto temos que existe $C>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
|||f|||_{\mathcal{Y}^s} &\leq C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}d\tau\right)^{1/2}\\
&\quad+C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}d\tau\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}d\tau\right)^{1/2}\\
&\quad+C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}d\tau\right)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Devido ao fato de $|||(2.20)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C|||f|||_{\mathcal{Y}^s}$, obtemos existe $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |||(2.20)|||_{\mathcal{Y}^s} &\leq C\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2} \\ &\quad + C\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} |n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Estimativa de $|||(2.21)|||_{\mathcal{Y}^s}$.

Com o objetivo de simplificar a notação, definimos $f : \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, onde

$$f(x,t) = \psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{(\tau-n^3)}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau,$$

para quaisquer $x \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{R}$. Devido a definição da função f, temos para todo $x \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{R}$ que

$$(2.21) = -if(x,t).$$

Portanto

$$|||(2.21)|||_{\mathcal{Y}^s} = |||if|||_{\mathcal{Y}^s} = |||f|||_{\mathcal{Y}^s}.$$

Então para obter uma estimativa de $|||(2.21)|||_{\mathcal{Y}^s}$ basta encontrar uma majoração para $|||f|||_{\mathcal{Y}^s}$.

Afirmamos que $\widehat{f}(m,\lambda) = \widehat{\psi}(\lambda-m^3)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-m^3)}{(\tau-m^3)}\widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\,d\tau$, para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

De fato, pois fixados $m \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(m,\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-ix\cdot m}e^{-it\cdot\lambda}\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{(\tau-n^3)}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot\lambda}\psi(t)\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}} e^{in^3t}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-ix\cdot(m-n)}\,dx\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{(\tau-n^3)}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot(\lambda-m^3)}\psi(t)\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-m^3)}{(\tau-m^3)}\widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\,d\tau dt \\ &= \widehat{\psi}(\lambda-m^3)\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-m^3)}{(\tau-m^3)}\widehat{B_k^\delta}(m,\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Na sequência encontraremos uma estimativa para $|||f|||_{\mathcal{Y}^s}$,

$$
\begin{aligned}
|||f|||_{\mathcal{Y}^s} = &\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}(1+|\lambda-n^3|)\left|\widehat{\psi}(\lambda-n^3)\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\right|^2 d\lambda\right)^{1/2}\\
&+\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}(\lambda-n^3)\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\right| d\lambda\right)^2\right)^{1/2}\\
= &\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\lambda'|)\left|\widehat{\psi}(\lambda')\right|^2 d\lambda'\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\right|^2\right)^{1/2}\\
&+\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}(\lambda')\right| d\lambda'\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)d\tau\right|^2\right)^{1/2}\\
\leq &\, C\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\,d\tau\right|^2\right)^{1/2}\\
\leq &\, C\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{\tau-n^3}\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right| d\tau\right)^2\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

onde a penúltima desigualdade decorre do fato que a função ψ pertence ao espaço de Schwartz.

Pelo fato de $0\leq\psi(t)\leq 1$, para todo $t\in\mathbb{R}$ e $\psi(\tau-n^3)\equiv 1$, sempre que $|\tau-n^3|<\dfrac{1}{2}$, obtemos então que $|(1-\psi)(\tau-n^3)|=0$, se $|\tau-n^3|<\dfrac{1}{2}$. Usando este fato, por $|(1-\psi)(t)|\leq 1$, para todo $t\in\mathbb{R}$ e ainda que $\dfrac{1}{|\tau-n^3|}\leq\dfrac{3}{1+|\tau-n^3|}$ se $|\tau-n^3|\geq\dfrac{1}{2}$, obtemos então que existe $C>0$, onde

$$
\begin{aligned}
|||f|||_{\mathcal{Y}^s} &\leq C\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{|\tau-n^3|\geq\frac{1}{2}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{|\tau-n^3|}d\tau\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}d\tau\right)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, existe $C>0$ de modo que

$$|||(2.21)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}. \tag{2.26}$$

A partir das relações $(2.22), (2.24), (2.25)$ e (2.26) obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.2 *Fixado $0<\delta<1$ qualquer, então existe $C>0$ de modo que*

$$\begin{aligned}|||T_k^\delta(u_0,u_1,\dots,u_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq\; & C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}\\ & +C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.27}$$

para quaisquer $u_0,u_1,\dots,u_k\in\mathcal{Y}^s$.

Devido a definição de B_k^δ, faremos uso de duas estimativas bilineares, cuja demonstração pode ser encontrada em ([B], $p.214$).

Proposição 2.3 *Existe $C>0$, de modo que para quaisquer $f,g\in\mathcal{X}^s$, com t-suporte no intervalo $[-\delta,\delta]$, temos*

$$\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{w}_{fg}(n,\tau)|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2} \leq C\delta^{1/12}|||f|||_{\mathcal{X}^s}|||g|||_{\mathcal{X}^s}, \tag{2.28}$$

$$\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{w}_{fg}(n,\tau)|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2} \leq C\delta^{1/12}|||f|||_{\mathcal{X}^s}|||g|||_{\mathcal{X}^s}, \tag{2.29}$$

onde $w_{fg}=\partial_x(f\cdot g)$.

Portanto, para qualquer $0<\delta<1$ e $u_0,u_1,\dots,u_k\in\mathcal{Y}^s$, temos que existe $C>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B^{\delta}_{k}}(n,\tau)\right|^{2}}{1+|\tau-n^{3}|}\,d\tau\right)^{1/2}\\
=&\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}[\partial_x\left(\psi_\delta u_{k-j}\cdot\psi_\delta u_j\right)]\widehat{\ }(n,\tau)\right|^{2}}{1+|\tau-n^{3}|}\,d\tau\right)^{1/2}\\
\leq&\ C\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\left[\partial_x\left(\binom{k}{j}\psi_\delta u_{k-j}\cdot\psi_\delta u_j\right)\right]\widehat{\ }(n,\tau)\right|^{2}}{1+|\tau-n^{3}|}\,d\tau\right)^{1/2}\\
\leq&\ \sum_{j=0}^{k}C\delta^{1/12}|||\binom{k}{j}\psi_\delta u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta u_j|||_{\mathcal{X}^s}\\
=&\ C\delta^{1/12}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||\psi_\delta u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta u_j|||_{\mathcal{X}^s}.
\end{aligned}
$$

Ainda devido a Proposição 2.3, obtemos que existe $C>0$, de modo que

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{B^{\delta}_{k}}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^{3}|}\,d\tau\right)^{2}\right)^{1/2}\\
=&\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}[\partial_x\left(\psi_\delta u_{k-j}\cdot\psi_\delta u_j\right)]\widehat{\ }(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^{3}|}\,d\tau\right)^{2}\right)^{1/2}\\
\leq&\ C\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\left[\partial_x\left(\binom{k}{j}\psi_\delta u_{k-j}\cdot\psi_\delta u_j\right)\right]\widehat{\ }(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^{3}|}\,d\tau\right)^{2}\right)^{1/2}\\
\leq&\ \sum_{j=0}^{k}C\delta^{1/12}|||\binom{k}{j}\psi_\delta u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta u_j|||_{\mathcal{X}^s}\\
=&\ C\delta^{1/12}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||\psi_\delta u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta u_j|||_{\mathcal{X}^s},
\end{aligned}
$$

para quaisquer $u_0, u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{Y}^s$.

Logo pela relação (2.27) e as desigualdades acima, obtemos para qualquer $0 < \delta < 1$ que existe $C > 0$, de modo que

$$|||T_k^\delta(u_0, u_1, \ldots, u_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \leq C\delta^{1/12}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||\psi_\delta u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta u_j|||_{\mathcal{X}^s}+C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}, \tag{2.30}$$

onde $u_0, u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{Y}^s$ são quaisquer.

O Lema a seguir é extremamente essencial para finalizarmos a demonstração da Proposição 1.1, pois ele nos garante, para cada $0 < \delta < 1$, que existe uma constante $C = C(\frac{1}{48})$ positiva, onde $|||\psi_\delta v|||_{\mathcal{X}^s} \leq C\delta^{-1/48}|||v|||_{\mathcal{X}^s}$ para qualquer $v \in \mathcal{X}^s$. Na demonstração deste resultado será utilizado alguns argumentos de interpolação.

Lema 2.1 *Seja $0 < \delta < 1$ qualquer. Então para qualquer $0 < \varepsilon < 1$ existe uma constante $C = C(\varepsilon) > 0$, de modo que para qualquer $u \in \mathcal{X}^s$ temos*

$$|||\psi_\delta u|||_{\mathcal{X}^s} \leq C\delta^{-\varepsilon}|||u|||_{\mathcal{X}^s}. \tag{2.31}$$

Demonstração: Fixemos $0 < \varepsilon < 1$ qualquer. Pelo fato que

$$|||v|||_{\mathcal{X}^s} = \left(\sum_{n\in \dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda-n^3|\right)|\widehat{v}(n,\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{1/2},$$

para qualquer $v \in \mathcal{X}^s$, então para que a relação (2.31) seja válida basta mostrar que existe $C > 0$, de modo que para qualquer $n \in \dot{\mathbb{Z}}$ e $u \in \mathcal{X}^s$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda-n^3|\right)\left|\widehat{\psi_\delta u}(n,\lambda)\right|^2 d\lambda \leq C\delta^{-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\left(1+|\lambda-n^3|\right)|\widehat{u}(n,\lambda)|^2 d\lambda. \tag{2.32}$$

Fixemos então $u \in \mathcal{X}^s$ qualquer. Temos que a relação (2.32) é equivalente à seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|)\left|\left[e^{-in^3t}\psi_\delta(t)\widehat{u}^x(n,t)\right]^{\wedge t}(\tau)\right|^2 d\tau\\ \leq\ & C\delta^{-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|)\left|\left[e^{-in^3t}\widehat{u}^x(n,t)\right]^{\wedge t}(\tau)\right|^2 d\tau,\end{aligned} \tag{2.33}$$

para qualquer $n \in \dot{\mathbb{Z}}$.

Fixado $n \in \dot{\mathbb{Z}}$ qualquer, definimos para cada $t \in \mathbb{R}$ a função h_n onde $h_n(t) = \widehat{u}^x(n,t)$, então a desigualdade (2.33) pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|) \left| \left[e^{-in^3t}\psi_\delta(t)h_n(t) \right]^{\widehat{}\, t} (\tau) \right|^2 d\tau \leq C\delta^{-2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|) \left| \left[e^{-in^3t}h_n(t) \right]^{\widehat{}\, t} (\tau) \right|^2 d\tau,$$

ou seja,

$$\left\| e^{-in^3t}\psi_\delta(t)h_n(t) \right\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq C\delta^{-2\varepsilon} \left\| e^{-in^3t}h_n(t) \right\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}. \tag{2.34}$$

No intuito de demonstrar que a relação (2.34) é satisfeita, utilizaremos alguns argumentos de interpolação.

Sendo $b = \dfrac{1+\varepsilon}{2}$, então para qualquer $0 \leq \rho \leq 1$ definimos $\mathcal{A}_\rho \doteq H^{\rho b}(\mathbb{R})$. Observe que $\mathcal{A}_0 = L^2(\mathbb{R})$ e pelo fato de $H^s(\mathbb{R})$ ser um espaço de Banach para qualquer $s \geq 0$, obtemos então que $\mathcal{A}_\rho$ é um espaço de Banach para qualquer $0 \leq \rho \leq 1$.

A seguir citaremos um resultado apenas para referência futura. Este resultado nos dá uma condição para que os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sejam funções contínuas.

Lema 2.2 *Seja $s > \frac{n}{2}$. Então $H^s(\mathbb{R}^n)$ pode ser imerso continuamente em $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (a coleção das funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ que tendem a zero quando $|x| \to \infty$) e vale a seguinte desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em ([I], p.340).

Em ([SW], p.211) encontramos o seguinte resultado.

Lema 2.3 *Sendo $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ dois espaços de Banach e T é um operador linear de $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ em $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$, onde T leva $\mathcal{A}_j$ em $\mathcal{A}_j$, para $j = 0,1$ e ainda existem constantes M_0 e M_1, de modo que $\|Ta\|_{\mathcal{A}_j} \leq M_j \|a\|_{\mathcal{A}_j}$, $j = 0,1$ e $a \in \mathcal{A}_j$, então T leva $\mathcal{A}_\rho$ em $\mathcal{A}_\rho$ e ainda $\|Ta\|_{\mathcal{A}_\rho} \leq M_0^{(1-\rho)} M_1^\rho \|a\|_{\mathcal{A}_\rho}$, para qualquer $0 \leq \rho \leq 1$ e $a \in \mathcal{A}_\rho$.*

Com o objetivo mostrar que a relação (2.34) é satisfeita, iremos aplicar o Lema acima com T sendo o operador multiplicação por ψ_δ, mais precisamente, $T(f)(t) = \psi_\delta(t)f(t)$, para qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Claramente T é linear.

Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ qualquer, pelo fato de $\psi_\delta \in C_0^\infty(-\delta, \delta)$, onde $0 \leq \psi_\delta(t) \leq 1$, temos que

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{[\psi_\delta f]}(t)\right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi_\delta f(t)|^2 \, dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.35)$$

Portanto o operador T leva $\mathcal{A}_0$ em $\mathcal{A}_0$.

A seguir mostraremos que existe $C > 0$ de modo que para qualquer $f \in \mathcal{A}_1$ é válida a seguinte estimativa

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}_1} \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1},$$

donde resulta que T leva $\mathcal{A}_1$ em $\mathcal{A}_1$.

Fixemos $f \in \mathcal{A}_1$ qualquer. Devido o fato que $\frac{1}{2} < b < 1$, obtemos então que $(1 + |\tau|)^{2b} \leq \left(1 + 2^b\right)\left(1 + |\tau|^{2b}\right)$, para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$. Portanto temos que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2_{\mathcal{A}_1} &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|)^{2b} \left|\widehat{Tf}(\tau)\right|^2 d\tau \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\tau|^{2b}\right) \left|\widehat{[\psi_\delta f]}(\tau)\right|^2 d\tau \\
&= C \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{[\psi_\delta f]}(\tau)\right|^2 d\tau \qquad (2.36) \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left|\widehat{[\psi_\delta f]}(\tau)\right|^2 d\tau. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Nosso objetivo então é obter majorações para as relações (2.36) e (2.37). Devido a relação (2.35), obtemos que

$$(2.36) \leq C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Pelo fato que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_1}$ para qualquer $f \in \mathcal{A}_1$ e como $1 < \delta^{2(1-2b)}$, então obtemos que

$$(2.36) \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|^2_{\mathcal{A}_1}. \quad (2.38)$$

Com o objetivo de obter uma estimativa para a relação (2.37), para qualquer $g \in H^b(\mathbb{R})$ definimos $D^b g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$D^b g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\cdot\lambda} |\lambda|^b \widehat{g}(\lambda)\, d\lambda.$$

Temos então para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$ que

$$\widehat{D^b g}(\tau) = |\tau|^b \widehat{g}(\tau).$$

Portanto

$$\begin{aligned} (2.37) &= C \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left|\widehat{[\psi_\delta f]}(\tau)\right|^2 d\tau \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \left|[\widehat{D^b(\psi_\delta f)}](\tau)\right|^2 d\tau \\ &= C \left\|D^b(\psi_\delta f)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

então o nosso objetivo então será encontrar uma estimativa para a relação (2.39).

Em ([KPV1], p.614) pode ser encontrada a demonstração do seguinte resultado.

Lema 2.4 *Caso* $0 < \alpha < 1$ *e* $1 < p < \infty$*, então*

$$\|D^\alpha(gh) - hD^\alpha g - gD^\alpha h\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|D^\alpha h\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Aplicando o Lema acima com $\alpha = b$, $p = 2$, $g = \psi_\delta$ e $h = f$, obtemos que

$$\begin{aligned} &\left\|D^b(\psi_\delta f)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ \leq\ & C\|\psi_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|D^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|f D^b \psi_\delta\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\psi_\delta D^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pelo fato que $\psi_\delta \in C_0^\infty(-\delta, \delta)$, onde $0 \leq \psi_\delta(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, resulta que $\|\psi_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$ e ainda $\|\psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C$.

Então decorre da desigualdade de Hölder que

$$\left\|\psi_\delta D^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|D^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left\|D^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Devido a definição de $D^b f$, temos então que

$$\left\|D^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left|\widehat{f}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|)^{2b} \left|\widehat{f}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} = \|f\|_{\mathcal{A}_1}.$$

Portanto devido as relações acima obtemos que

$$\left\|D^b(\psi_\delta f)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{\mathcal{A}_1} + \left\|f D^b \psi_\delta\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.41}$$

A seguir buscaremos uma estimativa para $\left\|f D^b \psi_\delta\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Devido o fato de $f \in H^b(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_1$ com $\frac{1}{2} < b < 1$, temos pelo Lema 2.2 que existe $C = C(\frac{1}{2}) > 0$ de modo que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{\mathcal{A}_1}.$$

Portanto obtemos que

$$\left\|f D^b \psi_\delta\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|D^b \psi_\delta\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{\mathcal{A}_1} \left\|D^b \psi_\delta\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.42}$$

Usando o fato que $\widehat{\psi_\delta}(\tau) = \delta\widehat{\psi}(\delta\tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, temos então que existe $C = C(\psi) > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left\|D^b \psi_\delta\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left|\widehat{\psi_\delta}(\tau)\right|^2 d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left|\delta\widehat{\psi}(\delta\tau)\right|^2 d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\mu}{\delta}\right|^{2b} \delta \left|\widehat{\psi}(\mu)\right|^2 d\mu \\
&\leq \delta^{(1-2b)} \int_{\mathbb{R}} (1+|\mu|^2) \left|\widehat{\psi}(\mu)\right|^2 d\mu \\
&\leq C\delta^{2(1-2b)},
\end{aligned}$$

pois a função ψ pertence ao espaço de Schwartz e $1 < \delta^{(1-2b)}$.

Logo devido a relação (2.42) e a última desigualdade, obtemos que

$$\|f D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\delta^{(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1}. \tag{2.43}$$

Usando o fato que $1 < \delta^{(1-2b)}$ e devido as relações (2.41) e (2.43) temos que

$$\left\|D^b(\psi_\delta f)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|^2_{\mathcal{A}_1}. \tag{2.44}$$

Segue então das relações (2.38), (2.39) e (2.44) que

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}_1}^2 \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1}^2.$$

Novamente usando o fato que $1 < \delta^{(1-2b)}$ obtemos que

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}_1} \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1}. \tag{2.45}$$

Pelo fato das hipóteses do Lema 2.3 estarem satisfeitas, onde as constantes M_0 e M_1 são respectivamente 1 e $C\delta^{2(1-2b)}$, temos então que

$$\left\|e^{-in^3t}\psi_\delta(t)h_n(t)\right\|_{\mathcal{A}_\rho} \leq C\delta^{2(1-2b)\rho}\left\|e^{-in^3t}h_n(t)\right\|_{\mathcal{A}_\rho},$$

para qualquer $0 \leq \rho \leq 1$.

Tomando $\rho = \dfrac{1}{2b}$, temos que $\rho b = \frac{1}{2}$ e pelo fato que $\delta^{\frac{-2\varepsilon}{(1+\varepsilon)}} \leq \delta^{-2\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-in^3t}\psi_\delta(t)h_n(t)\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} &\leq C\delta^{\frac{(1-2b)}{b}}\left\|e^{-in^3t}h_n(t)\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\
&= C\delta^{\frac{2(1-1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}}\left\|e^{-in^3t}h_n(t)\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\
&= C\delta^{\frac{-2\varepsilon}{(1+\varepsilon)}}\left\|e^{-in^3t}h_n(t)\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\
&\leq C\delta^{-2\varepsilon}\left\|e^{-in^3t}h_n(t)\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

donde resulta que a relação (2.34) é satisfeita.

Pelo fato de $n \in \dot{\mathbb{Z}}$ ser qualquer, temos que a relação (2.34) é satisfeita para todo $n \in \dot{\mathbb{Z}}$, donde resulta que é válida a relação (2.32) para qualquer $n \in \dot{\mathbb{Z}}$, ou seja, existe $C = C(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$|||\psi_\delta u|||_{\mathcal{X}^s} \leq C\delta^{-\varepsilon}|||u|||_{\mathcal{X}^s},$$

o que conclui demonstração do Lema 2.1.

Devido a relação (2.30) e ao Lema 2.1 aplicado com $\varepsilon = \frac{1}{48}$ obtemos para qualquer $0 < \delta < 1$, que existe $C > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
|||T_k^\delta(u_0,u_1,\ldots,u_k)|||_{\mathcal{Y}^s} &\leq C\delta^{1/12}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}|||\psi_\delta u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta u_j|||_{\mathcal{X}^s}+C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}\\
&\leq C\delta^{1/12}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\delta^{-1/24}|||u_{k-j}|||_{\mathcal{X}^s}|||u_j|||_{\mathcal{X}^s}+C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}\\
&\leq C\delta^{1/24}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}|||u_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}|||u_j|||_{\mathcal{Y}^s}+C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

para quaisquer $u_0,u_1,\ldots,u_k\in\mathcal{Y}^s$, pois $|||\cdot|||_{\mathcal{X}^s}\leq|||\cdot|||_{\mathcal{Y}^s}$, desse modo concluindo a demonstração da Proposição 1.1.

2.2 Demonstração da Proposição 1.2

Esta seção tem por objetivo demonstrar a Proposição 1.2, cujo resultado, juntamente com a Proposição 1.1, foi essencial para demonstrarmos o Lema 1.7, e consequentemente, concluir que o operador T^δ é uma contração em um conjunto apropriado de $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$. A princípio vamos enunciar novamente a referida proposição.

Proposição 2.4 *Se $0<\delta<1$, então existe uma constante $C>0$, de modo que*

$$\begin{aligned}
&|||T_k^\delta(w_0,w_1,\ldots,w_k)-T_k^\delta(v_0,v_1,\ldots,v_k)|||_{\mathcal{Y}^s}\\
\leq\ & C\delta^{1/24}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||w_{k-j}+v_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s}|||w_j-v_j|||_{\mathcal{Y}^s},
\end{aligned}$$

para quaisquer $w_0,v_0,w_1,v_1,\ldots,w_k,v_k\in\mathcal{Y}^s$.

Demonstração: Fixado $k\in\mathbb{N}$ qualquer, temos então que

$$\begin{aligned}
&T_k^\delta(w_0,w_1,\ldots,w_k)-T_k^\delta(v_0,v_1,\ldots,v_k)\\
=\ & -\int_0^t W(t-\tau)B_k^\delta(w,w)(x,\tau)\,d\tau+\int_0^t W(t-\tau)B_k^\delta(v,v)(x,\tau)\,d\tau\\
=\ & -\int_0^t W(t-\tau)\big(B_k^\delta(w,w)-B_k^\delta(v,v)\big)(x,\tau)\,d\tau. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Com objetivo de reescrever a relação acima de outra forma, temos que

$$
\begin{aligned}
& B_k^\delta(w,w) - B_k^\delta(v,v) \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\partial_x\left(\psi_\delta w_{k-j}\psi_\delta w_j\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\partial_x\left(\psi_\delta v_{k-j}\psi_\delta v_j\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\partial_x\left[\psi_\delta^2(w_{k-j}w_j - v_{k-j}v_j)\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\partial_x\Bigg[\psi_\delta^2\Big(w_k w_0 - w_k v_0 + v_k w_0 - v_k v_0 + k(w_{k-1}w_1 - w_{k-1}v_1 + v_{k-1}w_1 - v_{k-1}v_1) \\
& + \frac{k(k-1)}{2}(w_{k-2}w_2 - w_{k-2}v_2 + v_{k-2}w_2 - v_{k-2}v_2) + \ldots \\
& + \frac{k(k-1)}{2}(w_2 w_{k-2} - w_2 v_{k-2} + v_2 w_{k-2} - v_2 v_{k-2}) \\
& + k(w_1 w_{k-1} - w_1 v_{k-1} + v_1 w_{k-1} - v_1 v_{k-1}) + w_0 w_k - w_0 v_k + v_0 w_k - v_0 v_k\Big)\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{2}\partial_x\Bigg[\psi_\delta^2\Big((w_k + v_k)(w_0 - v_0) + k(w_{k-1} + v_{k-1})(w_1 - v_1) \\
& + \frac{k(k-1)}{2}(w_{k-2} + v_{k-2})(w_2 - v_2) + \ldots + \frac{k(k-1)}{2}(w_2 + v_2)(w_{k-2} - v_{k-2}) \\
& + k(w_1 + v_1)(w_{k-1} - v_{k-1}) + (w_0 + v_0)(w_k - v_k)\Big)\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\partial_x\Big[\psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j})\cdot\psi_\delta(w_j - v_j)\Big] \\
= \; & B_k^\delta(w_{k-j} + v_{k-j}, w_j - v_j) \\
\doteq \; & \tilde{B}_k^\delta.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela relação (2.46) e a igualdade acima, temos que

$$
T_k^\delta(w_0, w_1, \ldots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k) = -\int_0^t W(t-\tau)\tilde{B}_k^\delta(x,\tau)\, d\tau. \qquad (2.47)
$$

Procedendo de maneira análoga à demonstração da Proposição 1.1, podemos reescrever a relação (2.47) da seguinte maneira,

$$
\begin{aligned}
&T_k^\delta(w_0,w_1,\ldots,w_k)-T_k^\delta(v_0,v_1,\ldots,v_k)\\
=&+i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{i^j}{j!}t^j\psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\lambda-n^3\right)\left(\lambda-n^3\right)^{j-1}\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda \quad (2.48)\\
&+i\psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}e^{inx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\psi)\left(\lambda-n^3\right)}{\lambda-n^3}e^{it\lambda}\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda \quad (2.49)\\
&-i\psi(t)\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}e^{i\left(nx+n^3t\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\psi)\left(\lambda-n^3\right)}{\lambda-n^3}\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\lambda)\,d\lambda, \quad (2.50)
\end{aligned}
$$

onde a seguinte estimativa é satisfeita,

$$
\begin{aligned}
&|||(2.48)|||_{\mathcal{Y}^s}+|||(2.49)|||_{\mathcal{Y}^s}+|||(2.50)|||_{\mathcal{Y}^s}\\
\leq\ & C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2}\\
&+C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos que é válida a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&|||T_k^\delta(w_0,w_1,\ldots,w_k)-T_k^\delta(v_0,v_1,\ldots,v_k)|||_{\mathcal{Y}^s}\\
\leq\ & C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2} \quad (2.51)\\
&+C\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}. \quad (2.52)
\end{aligned}
$$

A seguir o nosso objetivo será obter estimativas para as relações (2.51) e (2.52).

Devido a definição de $\tilde{B}_k^\delta$ e a Proposição 2.3, temos que

$$\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\partial_x\Big(\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})\cdot\psi_\delta(w_j-v_j)\Big)\right]^{\widehat{}}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\left[\partial_x\left(\binom{k}{j}\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})\cdot\psi_\delta(w_j-v_j)\right)\right]^{\widehat{}}(n,\tau)\right|^2}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k}C\delta^{1/12}|||\binom{k}{j}\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta(w_j-v_j)|||_{\mathcal{X}^s}$$

$$= C\delta^{1/12}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta(w_j-v_j)|||_{\mathcal{X}^s}.$$

Ainda pela definição de $\tilde{B}_k^\delta$ e a Proposição 2.3, obtemos que

$$\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\widehat{\tilde{B}_k^\delta}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\partial_x\Big(\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})\cdot\psi_\delta(w_j-v_j)\Big)\right]^{\widehat{}}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{n\in\dot{\mathbb{Z}}}|n|^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\left[\partial_x\left(\binom{k}{j}\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})\cdot\psi_\delta(w_j-v_j)\right)\right]^{\widehat{}}(n,\tau)\right|}{1+|\tau-n^3|}\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k}C\delta^{1/12}|||\binom{k}{j}\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta(w_j-v_j)|||_{\mathcal{X}^s}$$

$$\leq C\delta^{1/12}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|||\psi_\delta(w_{k-j}+v_{k-j})|||_{\mathcal{X}^s}|||\psi_\delta(w_j-v_j)|||_{\mathcal{X}^s},$$

Portanto para quaisquer $w_0, v_0, w_1, v_1, \ldots, w_k, v_k \in \mathcal{Y}^s$ e $0 < \delta < 1$, obtemos que existe $C > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} & |||T_k^\delta(w_0, w_1, \ldots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \\ \leq \;& C\delta^{1/12} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |||\psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j})|||_{\mathcal{X}^s} |||\psi_\delta(w_j - v_j)|||_{\mathcal{X}^s}. \end{aligned}$$

Agora utilizando o Lema 2.1, aplicado com $\varepsilon = \frac{1}{48}$, temos que para cada $0 \leq j \leq k$ que

$$|||\psi_\delta(w_j + v_j)|||_{\mathcal{X}^s} \leq \delta^{-1/48} |||w_j + v_j|||_{\mathcal{X}^s},$$

e também que

$$|||\psi_\delta(w_j - v_j)|||_{\mathcal{X}^s} \leq \delta^{-1/48} |||w_j - v_j|||_{\mathcal{X}^s}.$$

Devido as relações acima e o fato que $|||\cdot|||_{\mathcal{X}^s} \leq |||\cdot|||_{\mathcal{Y}^s}$, obtemos então para cada $0 < \delta < 1$ fixo, que existe uma constante $C > 0$, de modo que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} & |||T_k^\delta(w_0, w_1, \ldots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \ldots, v_k)|||_{\mathcal{Y}^s} \\ \leq \;& C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |||w_{k-j} + v_{k-j}|||_{\mathcal{Y}^s} |||w_j - v_j|||_{\mathcal{Y}^s}, \end{aligned}$$

para quaisquer $w_0, v_0, w_1, v_1, \ldots, w_k, v_k \in \mathcal{Y}^s$, desse modo concluindo a demonstração da Proposição 1.2.

Referências Bibliográficas

[B] Bourgain, J.: Fourier transform restriction phenomena for certain latice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Part II: The KdV–Equation, **Geom. Funct. Anal.**, 3, (1993), 209–262.

[BH] BYERS, P; e HIMONAS, A. A.: Non-analytic solutions of the KdV equation, **Abstract and Appl. Anal.**, 6, (2004), 453–460.

[CKSTT] COLLIANDER, J.; KEEL, M.; STAFFILANI, G.; TAKAOKA, H.; e TAO, T.: Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$, **J. Amer. Math. Soc.**, 16, (2003), 705–749.

[GH] GORSKY, J.; e HIMONAS, A. A.: On analyticy in space variable of solutions to the KdV equation, **Contemporary Mathematics of AMS**, 368, (2005), 233–247.

[HP] HIMONAS, A. A.; e PETRONILHO, G.: Gevrey regularity in time for generalized KdV type equations, a aparecer em **Contemporary Mathematics of AMS**.

[I] IÓRIO Jr., R. J.; e IÓRIO, V.: **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**, IMPA, Rio de Janeiro, (1988).

[KPV1] KENIG, C. E.; PONCE, G.; e VEGA, L.: Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via Contraction Principle, **Comm. Pure Appl. Math.**, 46, (1993), 527–620.

[KPV2] KENIG, C. E.; PONCE, G.; e VEGA, L.: The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices, **Duke Math. J.**, 71, (1993), 1–21.

[KPV3] KENIG, C. E.; PONCE, G.; e VEGA, L.: A Bilinear Estimate with applications to the KdV Equation, **J. Amer. Math. Soc.**, 9, (1996), 573–603.

[KdV] KORTEWEG, D.J.; e de VRIES, G.: On the change of form of long wavesadvancing in a rectagular canal, and on a new type oflong stationary waves, **Phil. Mag.**, 39, (1895), 422–443.

[Sj] SJÖBERG, A.: On the Korteweg–de Vries equation: existence and uniqueness, **J. Math. Anal. Appl.**, 29, (1970), 569–579.

[St] SOTOMAYOR, J.: **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

[SW] STEIN, E.; e WEISS, G.: **Fourier Analysis in Euclidean Space**, Princeton University Press, New Jersey, (1971).

[Tr] TRUBOWITZ, E.: The inverse problem for periodic potentials, **Comm. Pure Appl. Math.**, 30, (1977), 321–337.