UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PAULO SÉRGIO ADAMI

FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SÃO CARLOS – SP
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PAULO SÉRGIO ADAMI

FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS – SP
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

A198fe	Adami, Paulo Sérgio. Fractais no ensino médio : uma sequência didática / Paulo Sérgio Adami. -- São Carlos : UFSCar, 2013. 55 f. Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013. 1. Fractais. 2. Caos. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Prática docente. 5. GeoGebra (Software de computador). I. Título. CDD: 514.742 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM - UFSCar

Prof^a. Dr^a. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE - UNESP

Prof. Dr. Tomas Edson Barros
DM - UFSCar

Dedico este trabalho à minha esposa Márcia e às minhas filhas Helena e Heloisa que apoiaram meus esforços, suportaram minhas ausências e vibraram comigo a cada conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, refúgio e segurança.

Aos meus pais Walter e Salomé que sempre me indicaram o caminho do bem e da honradez.

A todos os meus familiares e amigos pelo carinho, amor e apoio incondicional.

Ao meu orientador, Professor Dr. João C. V. Sampaio, pela atenção, paciência e por ser inspiração profissional pelo modo carismático, competente e gentil como trata a todos e à sua profissão.

Ao Coordenador do Profmat, Prof. Dr. Paulo A. S. Caetano, pela dedicação e apoio fundamental para o sucesso de nossa turma.

A todos os professores do Profmat, pela maneira atenciosa, gentil e idealista com que nos trataram.

Aos meus colegas de turma, com os quais tanto aprendi, encontrei apoio, inspiração e amizade.

RESUMO

Este trabalho pretende descrever uma sequência didática que visa dar condições para que os alunos construam noções sobre as aplicações da geometria fractal e dos sistemas dinâmicos, ajudando-os a perceber a importância da matemática para o desenvolvimento dos mais diversificados campos do conhecimento humano. A matemática, muitas vezes enfatizada nas salas de aula, privilegia seu aspecto procedimental, ceifando o aluno de percebê-la como uma ciência dinâmica e ligada à compreensão de fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento. A Geometria Euclidiana, amplamente divulgada é, em geral, mais apropriada para o estudo das formas verificadas nas construções de casas, pontes, máquinas e etc., e o aluno pode ser levado a imaginar que a matemática é distante das formas observadas além das janelas da sala de aula, como nas nuvens, flores, árvores, nos raios que cortam o céu, etc.

Palavras-chave: Fractais. Caos. Sistemas dinâmicos. Prática docente. GeoGebra.

ABSTRACT

The intention of this dissertation is to describe a didactic sequence which aims at giving conditions to students so they are able to construct notions about the applications of fractal geometry and dynamical systems, aiding them in realizing the importance of mathematics to the development of the most diverse fields of human knowledge. Mathematics, so often emphasized in classrooms, privileges its procedural aspect, forcing the student not to perceive it as a dynamic science, linked to the comprehension of phenomena in the several fields of knowledge. Euclidean Geometry, thoroughly advertised, is, in general, more appropriate to the study of shapes found in houses, bridges and machine constructions among others, and the student might be taken to assume that mathematics is distant from the shapes observed beyond the windows of the classroom, such as in clouds, trees, rays that cut the skies and so on.

Keywords: Fractals. Chaos. Dynamical systems. Teaching practice. GeoGebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

"Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta".

Benoit Mandelbrot

O tema desta sequência didática foi escolhido tendo-se em vista a necessidade de se trabalhar com os alunos do ensino médio noções de geometrias não Euclidianas e aplicações da matemática nas mais diversas áreas da atuação humana, buscando assim motivar os alunos a perceberem uma matemática além daquela proposta para resolver problemas nem sempre contextualizados ou distantes da realidade dos alunos.

A necessidade de se elaborar esta sequência didática surgiu inicialmente em uma aula de geometria de posição, numa segunda série do Ensino Médio do Colégio Objetivo de Batatais, quando um dos alunos disse que já ouvira falar que duas retas paralelas distintas encontrar-se-iam no infinito. Então, houve uma mediação alertando-o de que isto não era possível na geometria em que estavam estudando, a Geometria Euclidiana, mas que essa geometria não é a única que existe, que temos também, por exemplo, a geometria dos fractais, que está relacionada ao estudo de fenômenos em sistemas dinâmicos.

Os alunos mostraram-se muito mais interessados no comentário sobre fractais do que no estudo das proposições sobre as bases da Geometria Euclidiana, apresentadas no material didático para classificarem como falso ou verdadeiro.

Dessa forma, como recompensa pelo interesse, foi prometido aos alunos algumas atividades, paralelas às programadas no material didático, mediante as quais fosse possível aos alunos descobrir um fractal.

O presente trabalho relata a aplicação destas atividades e procura dar ideias de como se pode abordar temas complexos com a simplicidade necessária para alunos da educação básica, e, desta forma mostrar a matemática como conhecimento fundamental ao desenvolvimento científico e humano, além da importância da tecnologia.

Apresentar noções de fractais associados a sistemas dinâmicos pode contribuir para a formação de alunos com a consciência da importância do conhecimento matemático e libertá-los de uma matemática simplesmente procedimental, muitas vezes enfatizada nos currículos da educação básica, além de abrir possibilidades para a contextualização e interdisciplinaridade.

Segundo Barbosa (2005, p.19), as justificativas para se inserir geometria fractal em sala de aula se dá por:

- **conexões** com várias ciências
- **deficiências** da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
- **difusão e acesso** aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
- **existência** do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade.
- **sensação** de surpresa diante da ordem na desordem

Esta sequência didática iniciar-se-á com uma atividade lúdica, o Jogo do Caos. Em seguida uma atividade que visa apenas encontrar pontos de forma aleatória no interior de um triângulo e, finalmente, com o auxílio do software GeoGebra construir um fractal, o Triângulo de Sierpinski.

Um dos desafios iniciais para a construção desta sequência foi a de encontrar um programa que permitisse um algoritmo para a construção do Triângulo de Sierpinski a partir de seus pontos. O programa deveria utilizar uma linguagem computacional simples e refazer a atividade 2, exatamente como realizada pelos alunos.

Inicialmente foram testados algumas opções de programas, como: Nfract, Superlogo e Force, etc. Mas estas opções não pareceram adequadas às necessidades. O GeoGebra foi escolhido por apresentar uma interface bastante amigável, de fácil utilização.

Depois de muitas tentativas para se programar um aplicativo em Geogebra, conseguiu-se compreender quais recursos mínimos deveriam ser utilizados e como poderiam ser adaptados a uma linguagem própria para a sala de aula.

Este trabalho se orienta pelos métodos da teoria da Engenharia didática.

CAPÍTULO 1

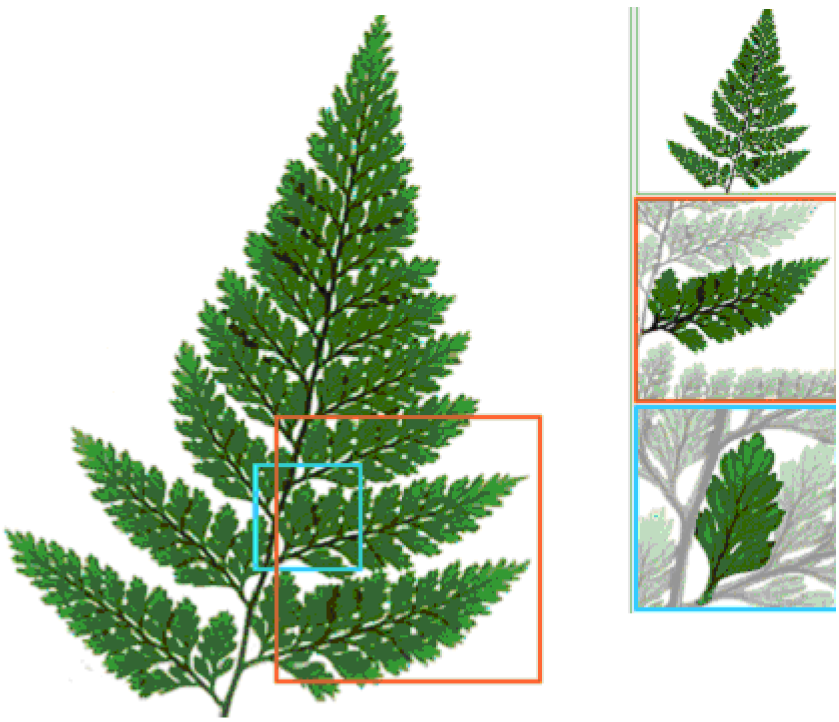
Alguns conceitos iniciais

Neste capítulo faremos uma simples abordagem dos principais conceitos utilizados neste trabalho, sendo que será dedicado o capítulo três especialmente para fractais.

1.1 FRACTAIS

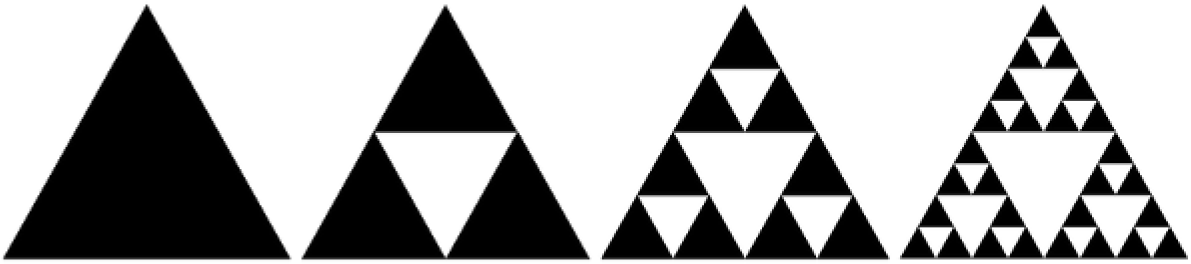
O nome fractal vem do latim *fractus* que indica quebra, fragmento. Este nome foi sugerido por Benoit Mandelbrot (1924–2010), pioneiro no estudo dos fractais, para o conjunto de objetos geométricos que possuem uma propriedade que as caracteriza, a autossimilaridade, ou seja, fractais são objetos nos quais cada uma de suas partes lembra o todo, como ilustra a Figura 1.1 a seguir.

Figura 1.1. – Sequência de partes de uma mesma planta em que cada parte lembra o todo.



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm ou ainda, como mostra a Figura 1.2:

Figura 1.2 – Triângulos de Sierpinski com 0, 1, 2 e 3 iterações, respectivamente.



Fonte:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/64/Sierpinsky_triangle_%28evolution%29.png

Diferentemente dos elementos encontrados na Geometria Euclidiana, Fractais são formas geométricas que não possuem dimensão inteira, como, por exemplo, um ponto, uma reta, ou um cubo. Um ponto tem dimensão zero, uma reta tem dimensão um, uma figura plana como um quadrado tem dimensão dois e um cubo, por exemplo, tem dimensão três.

Outra propriedade que caracteriza os fractais é a complexidade, pois cada detalhe de um fractal lembra o todo e existem infinitos detalhes.

1.2 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Trata-se de um fractal formado a partir de um triângulo em que, a partir dos pontos médios de seus lados, inscreve-se um outro triângulo equilátero, determinado-se assim, quatro triângulos congruentes em seu interior. Exclui-se a área do triângulo central e, em cada um dos três triângulos restantes, repete-se o processo de se conseguir quatro triângulos a partir dos pontos médios e excluir o triângulo central. Este procedimento continua infinitamente, formando o Triângulo de Sierpinski (Figura 1.2).

O nome é homenagem ao matemático polonês Wacław Sierpinski (1882–1969), o primeiro a descrever este fractal.

1.3 SISTEMAS DINÂMICOS

Na física e na matemática, o conceito de sistema dinâmico se refere a um sistema que evolui segundo uma regra que liga o estado no tempo presente aos seus estados passados. Sistemas dinâmicos caóticos são sistemas que estão fora de equilíbrio, pois seu estado muda com o tempo. Dentre as aplicações dos sistemas dinâmicos temos a modelagem de fenômenos meteorológicos, biológicos, químicos, sociais, naturais e etc.

Um exemplo de sistema dinâmico caótico pode ser o clima, pois pode-se fazer previsões metereológicas com certa eficiência para curtos períodos, mas o tempo encarrega-se de tornar qualquer previsão duvidosa para períodos longos.

Num sistema dinâmico pequenas alterações iniciais podem causar mudanças relevantes. Este fato é conhecido como "Efeito Borboleta", por conta de uma metáfora utilizada para exemplificar o comportamento de sistemas dinâmicos, ou seja, "o deslocamento de ar causado pelo bater de asas de uma borboleta no Brasil poderia causar um tornado no Texas".

A partir da segunda metade do século XX, por conta do desenvolvimento da capacidade computacional, os estudos sobre os sistemas dinâmicos ganharam forte impulso.

1.4 GeoGebra

Software gratuito para o ensino e aprendizagem de matemática com funções para álgebra, geometria, planilhas de cálculo.

Pode ser baixado para ser utilizado sem auxílio da internet ou utilizado *on-line*. O *site* de acesso é http://www.geogebra.org/cms/ (acesso em 04/01/2013).

No site oficial encontram-se tutoriais e material de apoio gratuitos.

1.5 ENGENHARIA DIDÁTICA

Engenharia didática é uma metodologia de pesquisa, surgida na década de 1980, proposta por pesquisadores em Educação Matemática, dentre os quais se destaca Michèle Artigue, pesquisadora matemática francesa, Trata-se de uma forma de se organizar procedimentos de pesquisa no contexto do trabalho docente. Assim, o professor utiliza seus saberes didáticos na construção de oportunidades de aprendizagem, e pesquisa a viabilidade dessas oportunidades, validando-as com os argumentos da Engenharia didática.

O método de Engenharia didática diferencia-se de outros métodos de pesquisa principalmente na forma de validação dos resultados e no registro das ações. A validação dos resultados é interna, pois sendo um estudo de caso, apoia-se na comparação entre as análises prévias e posteriores.

Geralmente, outros métodos de pesquisa apoiam-se na validação externa de seus resultados, ou seja, deve-se mostrar que os resultados obtidos não dependem da amostra ou das condições particulares da pesquisa, e que podem ser aplicados em outros contextos ou em outras populações.

Segundo Gomes:

> Engenharia Didática é um referencial de pesquisa que visa unir a pesquisa à prática, tendo como foco o ensino de Matemática. Essa metodologia abrange quatro etapas: Análises Prévias, Concepção e Análise a Priori, Experimentação e Análise a Posteriori e Validação da Experiência.

Para Saddo,

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.
>
> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

Neste sentido, a proposta de sequência didática apresentada neste trabalho baseou-se em realizações didáticas, a partir de necessidades surgidas no fazer didático.

A partir do interesse demonstrado por alguns alunos sobre fractais, pretendia-se construir uma sequência didática composta por duas atividades. Uma artesanal, em que os alunos pudessem compreender como são obtidos os pontos que determinam um fractal bastante conhecido, o triângulo de Sierpinski, e outra que complementasse a primeira, com o auxílio do software GeoGebra, em que se construiria um aplicativo que refizesse os passos da primeira atividade e construísse com mais propriedade o fractal.

Porém, a primeira atividade, que será descrita no próximo capítulo, não trouxe os resultados esperados pelo professor e não foi significativa para os alunos, que não reconheceram nenhum padrão. Esta avaliação de resultados se fez imediatamente após a aplicação, apoiada na figura construída pelos alunos e, principalmente, pelo retorno recebido dos alunos, através das conversas e reflexões sobre a atividade.

Desta forma, uma outra sequência didática foi construída, e esta trouxe os resultados esperados pelo professor e trouxe significados para os alunos. A avaliação desta atividade também se deu pela figura produzida e pela percepção do professor sobre os relatos dos alunos sobre suas impressões.

A terceira atividade foi construída para mostrar a imagem de um fractal e a importância do uso de tecnologias para o desenvolvimento científico. O desenvolvimento da atividade também serviu como oportunidade para os alunos refletirem como deveriam organizar os passos a serem programados no computador para a obtenção do fractal, servindo assim para o desenvolvimento da competência de utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

CAPÍTULO 2

Desenvolvimento das atividades

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será descrito o desenvolvimento das atividades, destacando seus objetivos didáticos e os resultados obtidos.

A necessidade de criação destas atividades surgiu ao se perceber o interesse dos alunos sobre a existência de geometrias não-euclidianas e sobre os exemplos citados pelo professor sobre a importância da geometria fractal em diversos campos de atuação, como por exemplo, no desenvolvimento de sistemas de criptografia.

Na tentativa de tornar as aulas mais estimulantes, pensou-se em criar uma atividade em que os alunos pudessem, aos poucos, construir conhecimentos sobre fractais, com atividades extras no final das aulas regularmente previstas.

Estas atividades foram realizadas de forma paralela às aulas regulares, para que não houvesse atraso na programação, uma vez que nesta escola adota-se sistema apostilado. Sempre utilizavam-se os 30 minutos finais de uma das duas aulas semanais para a realização das atividades e, precisou-se de 4 semanas para concluí-las.

2.2 Atividade 1 – Jogo do Caos

O “Jogo do Caos” é um algoritmo criado pelo matemático Michael Fielding Barnsley, em 1988 e, uma de suas versões consiste na formação de um fractal com iterações a partir de um ponto interno de um triângulo.

Há aplicativos do jogo disponível na internet, mas o desafio inicial era apresentar o jogo aos alunos de forma artesanal e coletar todos os pontos obtidos numa mesma transparência, a fim de formar uma figura que sugerisse alguma ordem entre aqueles pontos coletados de formas diversas.

Objetivo do jogo

O objetivo do jogo é atingir um triângulo destacado no interior de um triângulo de Sierpinski com três iterações.

Objetivo didático

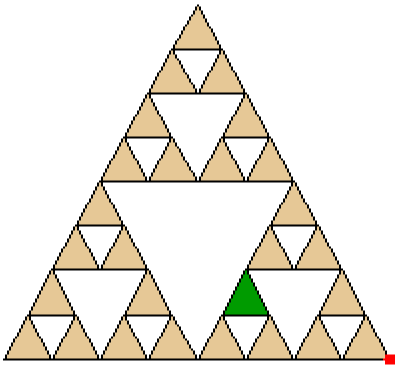
Propiciar aos alunos uma oportunidade para notarem que os pontos obtidos tendem a ficar bem próximos ou dentro das áreas que definem um triângulo de Sierpinski com 3 iterações, e desta forma, concluir que através desse sistema aleatório de obtenção de pontos consegue-se um conjunto de pontos que obedecem a um padrão.

Desenvolvimento

A partir de um ponto de referência, inicialmente dado, um dos participantes do jogo escolhe um dos vértices do triângulo e determina o ponto médio do segmento cujas extremidades são o ponto de referência inicial e o vértice escolhido. A partir daí, o ponto médio é destacado e passa a ser o ponto de referência. O próximo participante deverá novamente escolher um vértice e determinar o ponto médio do segmento formado pelo vértice escolhido e pelo ponto de referência determinado anteriormente. Este procedimento continuará até que um dos pontos médios esteja no interior do triângulo destacado.

Na Figura 2.1, o objetivo é obter um ponto no interior do triângulo destacado na cor verde.

Figura 2.1 – Um triângulo de Sierpinski com um dos triângulos interiores em destaque, alvo do jogo.



fonte: http://math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html

Com esta atividade, deseja-se que os alunos percebam que os pontos médios obtidos tenderão a pertencer às regiões escuras ou aos segmentos que as delimitam, independentemente da ordem das escolhas dos vértices.

O caminho percorrido para se chegar ao objetivo do jogo não é previsível, pois depende da intuição de cada jogador, mesmo quando vários jogadores partem de um mesmo ponto.

Essas características predominam nos sistemas dinâmicos não-lineares, que são extremamente sensíveis às condições iniciais, tem comportamento não-periódico e estrutura fractal.

O triângulo usado para este jogo é o triângulo de Sierpinski com três iterações e o grau de dificuldade deste jogo pode aumentar caso se utilize um triângulo de Sierpinski com mais iterações, ou seja, com mais regiões brancas e escuras.

O jogo foi realizado, neste caso, por duplas de alunos, que, depois de terminada cada partida, transferiram os pontos para uma única folha de transparência, especialmente confeccionada, de modo que o retângulo impresso na transparência sobrepunha-se exatamente no das folhas dos jogos realizados pelas duplas.

Os pontos iniciais de referência foram iguais para todas as duplas, mas poderiam ser distintos.

Com isso, espera-se que os alunos percebam o surgimento de um padrão na folha de transparência.

Resultados

Os pontos coletados na transparência estão mostrados na Figura 2.2:

Figura 2.2 – Transparência com os pontos coletados

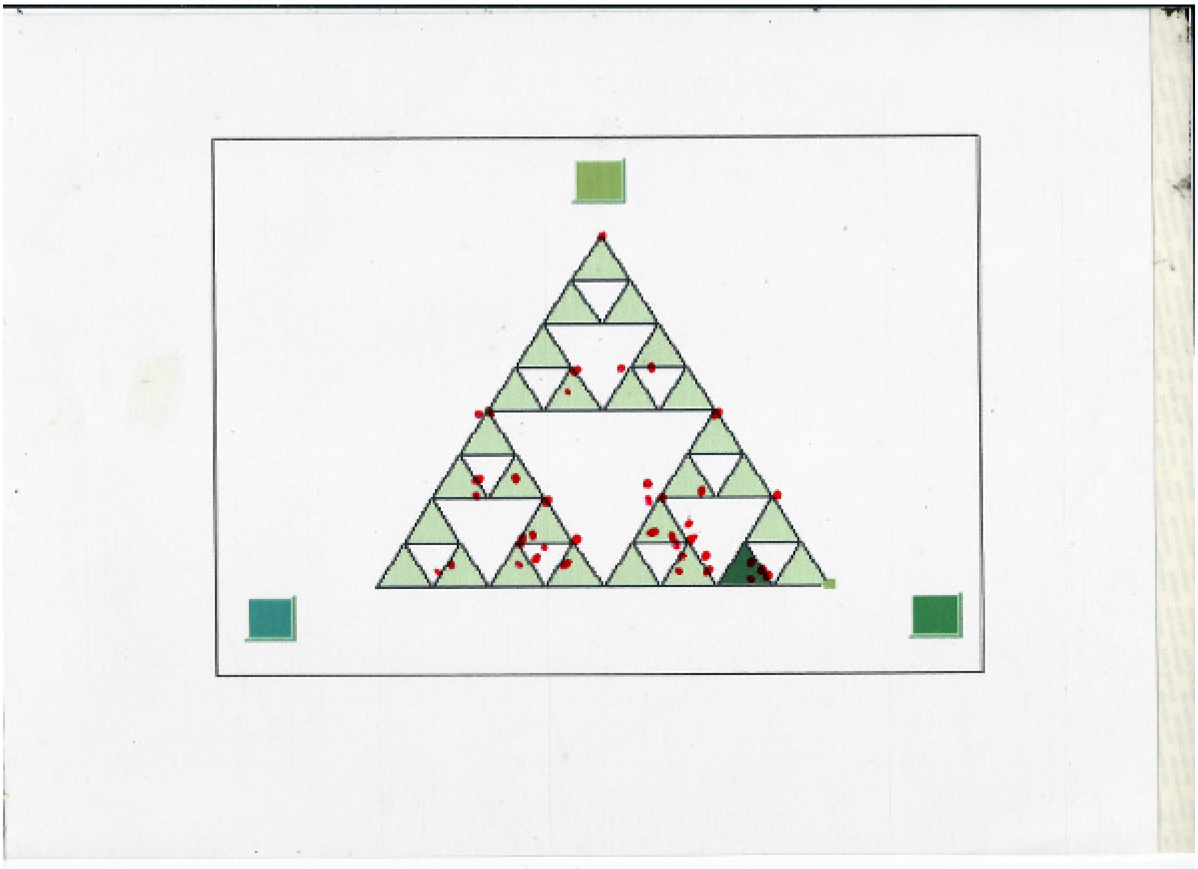
Fonte: Autor.

Como a turma em que a atividade foi aplicada era constituída por poucos alunos, 20 alunos, poucos pontos foram obtidos, pois muitos alunos conseguiram pontos coincidentes. Com turmas maiores a atividade poderá trazer melhores resultados.

Propor a atividade em duplas também concorreu para a obtenção de poucos pontos. Uma estratégia melhor seria propor que cada aluno marcasse seus pontos e depois comparasse a quantidade de pontos obtidos com a dos colegas, poderia(am) ser o(s) vencedor(es) o(s) que conseguisse(m) o objetivo com menos pontos.

Porém, ao se colocar a folha de transparência sobre uma folha contendo um triângulo de Sierpinski de mesmo tamanho, como mostra a Figura 2.3, já se pode notar que os pontos, em sua maioria, ficam no interior dos triângulos coloridos ou em sobre seus lados.

Figura 2.3 – Transparência sobreposta a uma das folhas utilizada pelos alunos



Fonte: Autor.

Era esperado que esta atividade apontasse para o surgimento de um padrão, mas este resultado não teve significado para os alunos. Assim fez-se necessário uma outra atividade que fornecesse pontos com mais eficiência e rapidez. Esta necessidade foi sanada com a atividade 2.

Antes de se propor a atividade 2, que fora aplicada em outra aula, foram lançadas as seguintes questões: Será que se continuarmos a coletar cada vez mais pontos as regiões escuras ficariam totalmente tomadas? Ou o triângulo todo ficaria tomado por pontos? Poderíamos dizer que há uma tendência dos pontos obtidos ficarem sobre as áreas escuras ou nos segmentos que as determinam?

2.3 Atividade 2 – Obter pontos médios de segmentos determinados aleatoriamente no interior de um triângulo

Esta atividade foi criada na tentativa de se obter um maior número de pontos, uma vez que a atividade 1 não trouxe resultados significativos. Os pontos conseguidos nesta atividade também eram determinados de modo aleatório.

Objetivo da atividade

Obter pontos no interior de um triângulo a partir de um ponto inicial utilizando procedimento aleatório.

Objetivo didático

Criar condições para que o aluno perceba que podem existir padrões “escondidos” em sistemas de caráter aleatório.

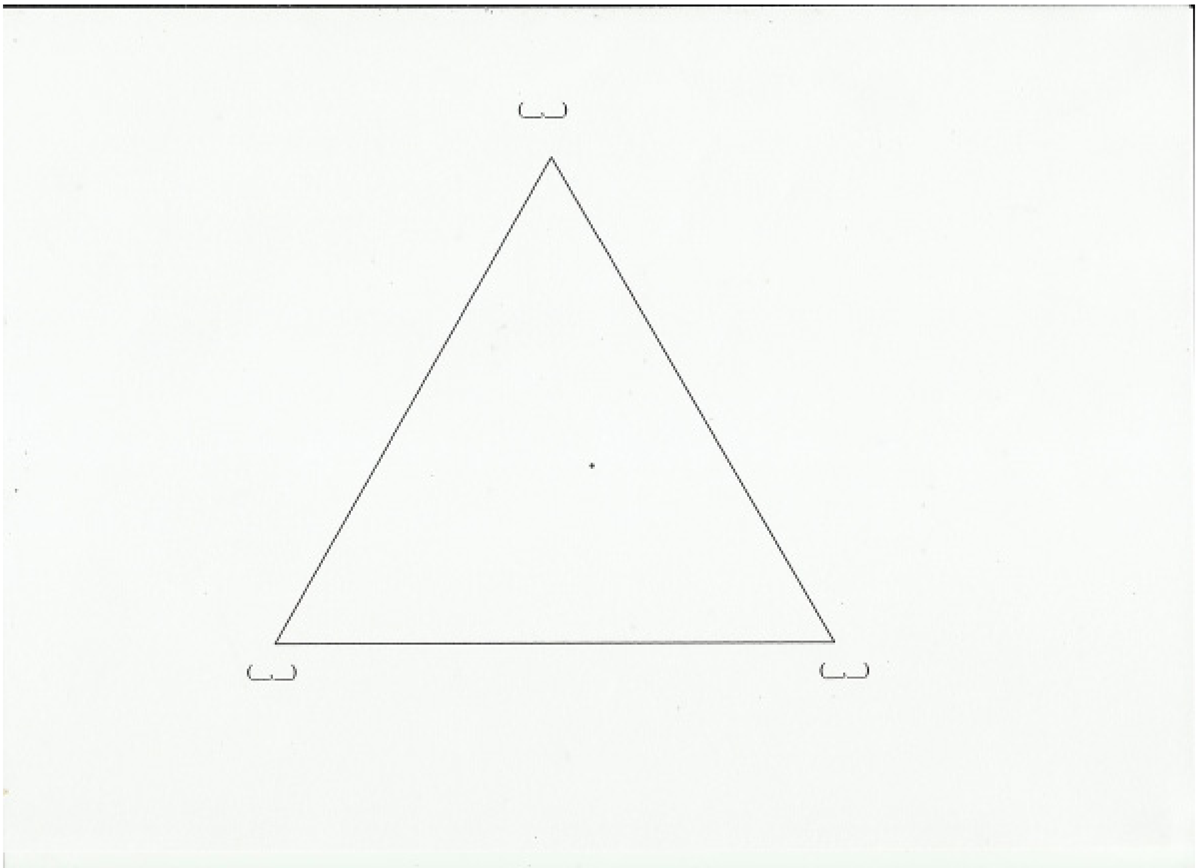
Desenvolvimento

Cada aluno recebeu uma folha com um triângulo e um ponto destacado em seu interior, como mostra a Figura 2.4, e eles deveriam colocar no espaço reservado, ao lado de cada vértice, um par de números naturais distintos escolhidos entre um e seis, de tal forma que todos os seis números fossem empregados.

Todas as folhas utilizadas pelos alunos eram idênticas, ou seja, com o mesmo ponto inicial.

Este ponto inicial não pode ser o baricentro do triângulo. Pois, se assim fosse, os pontos médios convergiriam para posições definidas e não se teria a diversidade de pontos necessária para a atividade.

Figura 2.4 – Imagem da folha entregue aos alunos,contendo um triângulo, espaços para numerar os vértices e um ponto inicial interno.



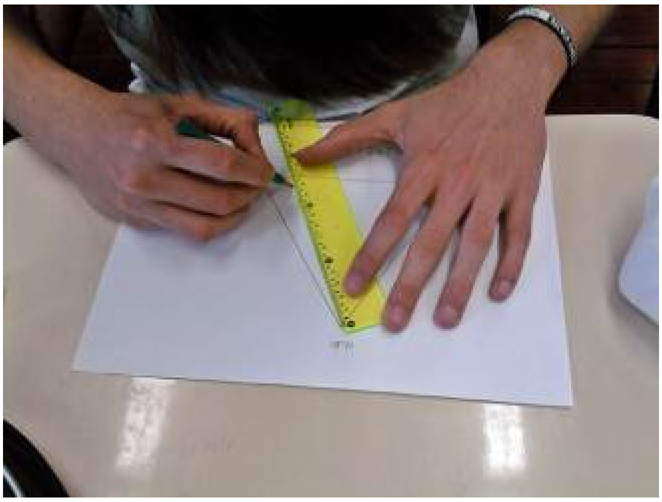
Fonte: Autor.

Na sequência deveriam jogar um dado e, por exemplo, caso o dado mostrasse na sua face superior o número 3, o aluno deveria encontrar o ponto médio do segmento determinado pelo ponto inicial destacado no triângulo e o vértice do triângulo onde está o número 3.

Em seguida, lança-se o dado novamente, observa-se o número indicado pelo dado e o vértice que contém este número e encontra-se o ponto médio do segmento determinado por este vértice e pelo ponto médio determinado anteriormente. E assim sucessivamente.

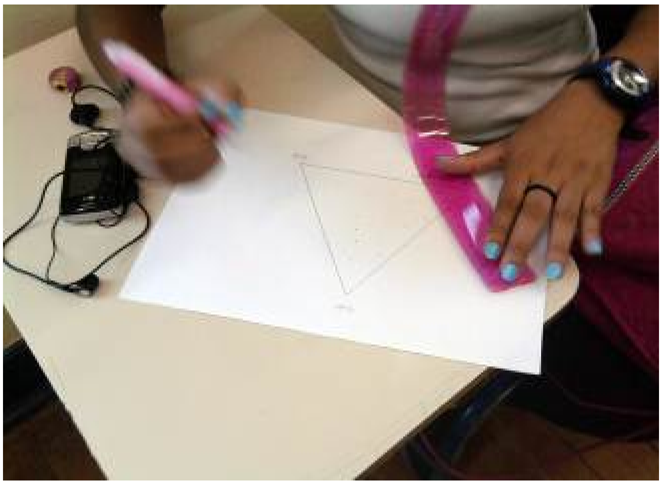
Para se determinar o ponto médio usava-se simplesmente a graduação em milímetros da régua, como mostrado nas Figuras 2.5, 2.6 e 2.7.

Figura 2.5 – Aluno obtendo pontos médios.



Fonte: Autor.

Figura 2.6 – Aluna obtendo pontos médios.



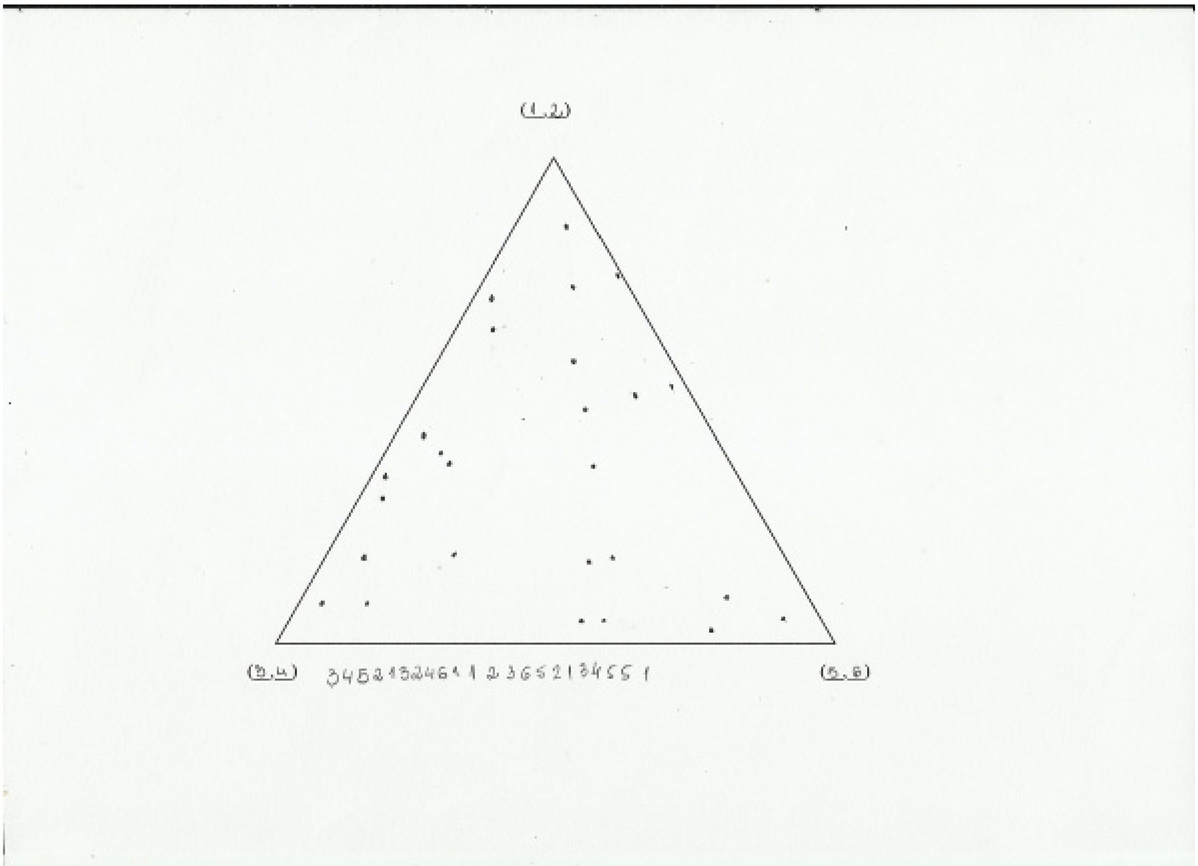
Fonte: Autor.

Figura 2.7 – Aluna obtendo pontos médios.

Fonte: Autor.

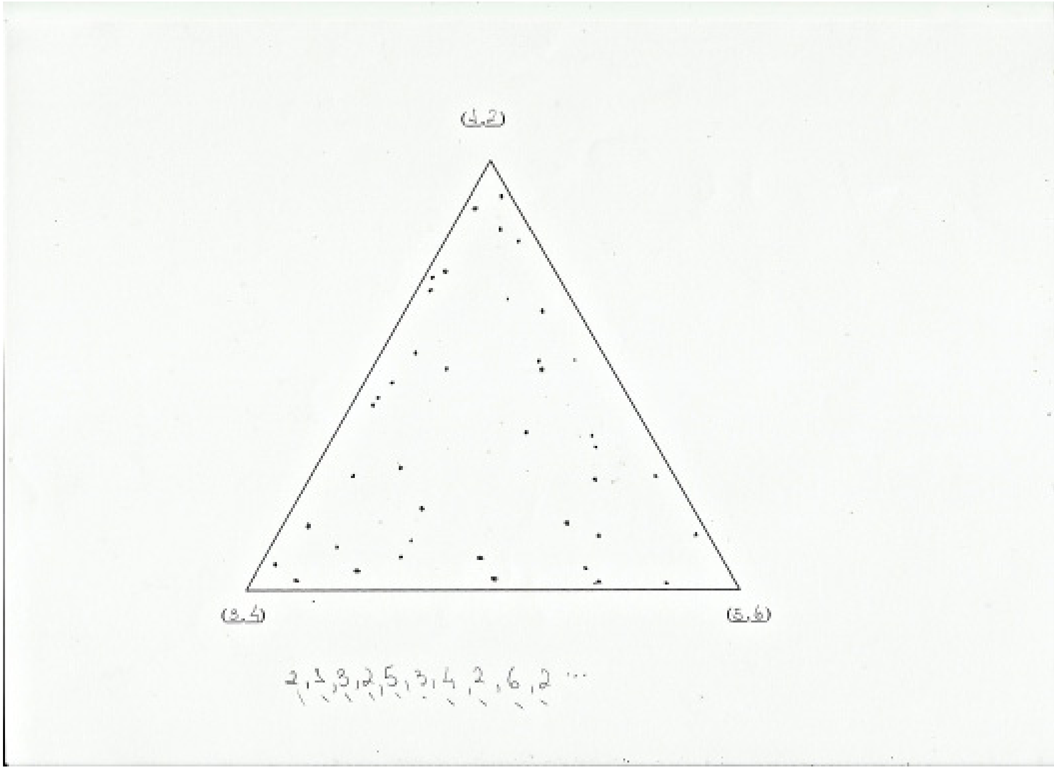
Inicialmente os alunos foram orientados a determinarem pelo menos 10 pontos cada um, porém como a turma possuía pouco alunos, foi percebido pelo professor que os pontos obtidos não seriam suficientes para que se notasse algum padrão ou indício de padrão, então, voluntariamente alguns alunos resolveram continuar o trabalho determinando mais alguns pontos. Seguem, nas Figuras 2.8, 2.9 e 2.10, algumas imagens das folhas apresentadas pelos alunos.

Figura 2.8 – Uma das folhas entregues pelos alunos.



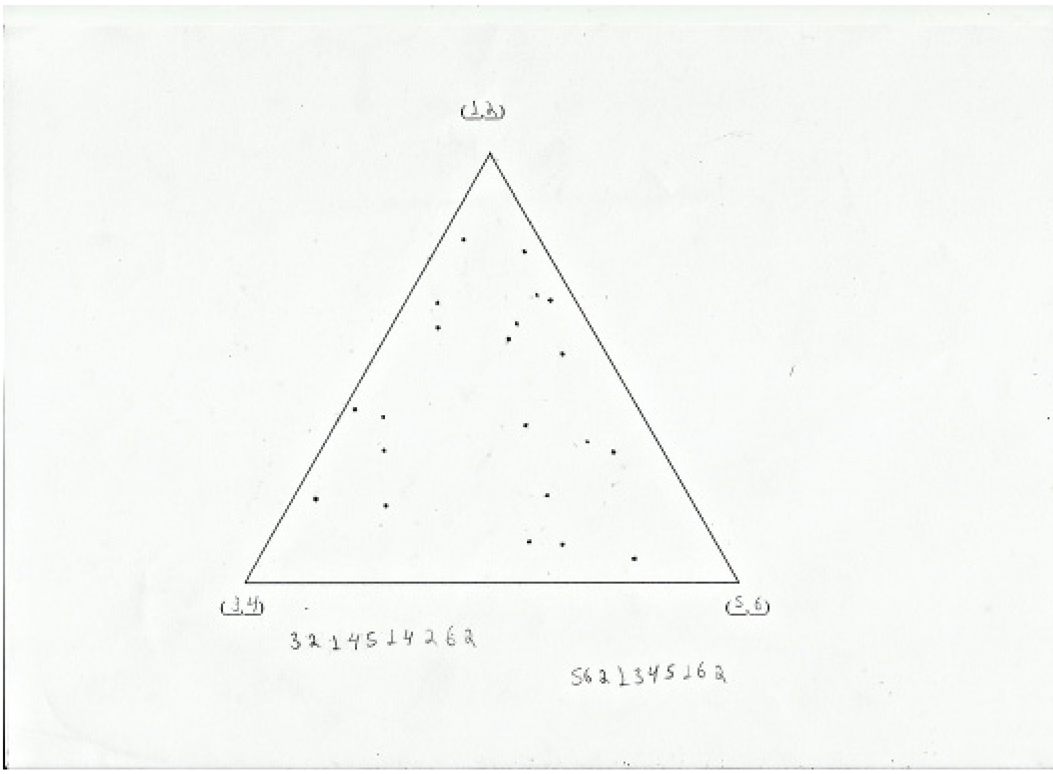
Fonte: Autor.

Figura 2.9 – Uma das folhas entregues pelos alunos.



Fonte: Autor.

Figura 2.10 – Uma das folhas entregues pelos alunos.

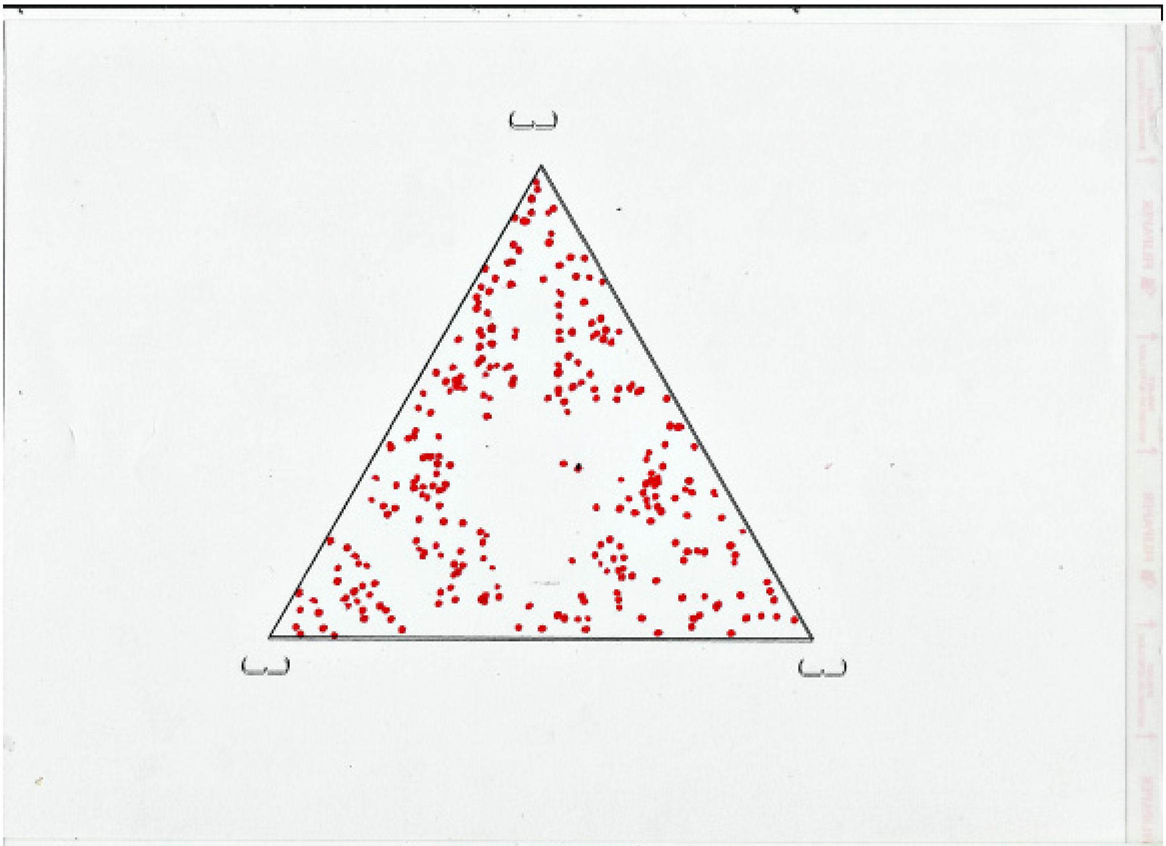


Fonte: Autor.

Os alunos foram convidados a comparar suas folhas e verificar se percebiam algum padrão entre as figuras obtidas. Evidentemente os alunos não reconheceram padrão algum comparando seus pontos com os pontos obtidos pelos colegas.

Na sequência todos os pontos foram coletados numa mesma folha de transparência, tomando-se o cuidado de sobrepor de maneira adequada o triângulo da transparência ao triângulo da folha de cada aluno. O resultado obtido segue na Figura 2.11.

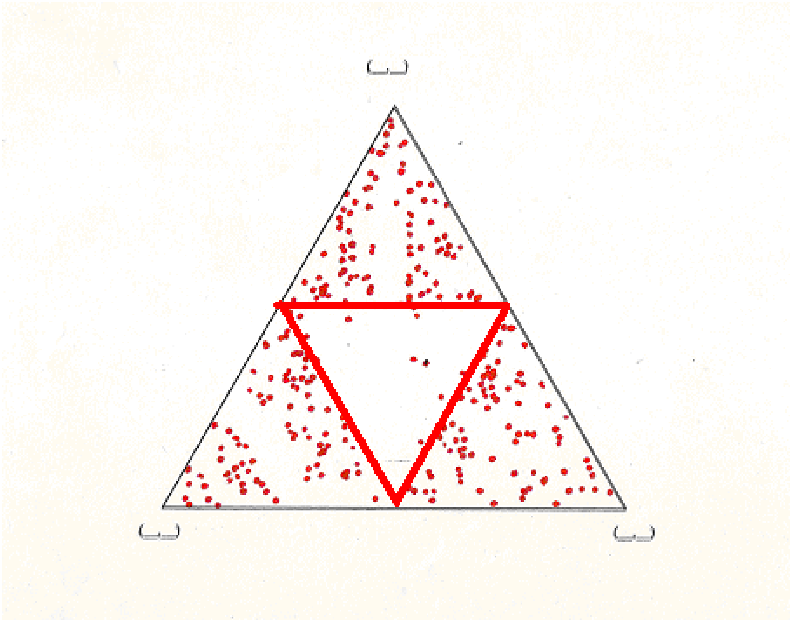
Figura 2.11 – Imagem da folha de transparência sobreposta a uma das folhas entregues pelos alunos.



Fonte: Autor.

Novamente os alunos foram convidados a verificar se percebiam algum padrão para os pontos coletados na transparência, e a maioria destacou a imagem de um triângulo que surgiu no centro. Como destacado na Figura 2.12.

Figura 2.12 – Imagem da folha de transparência sobreposta a uma das folhas entregues pelos alunos com o triângulo percebido pelos alunos em destaque.



Fonte: Autor.

Então os pontos conseguidos aleatoriamente pelos alunos contribuíram para a determinação de uma figura?!

Este resultado deixou a turma em silêncio. Os alunos não esperavam que pontos conseguidos aleatoriamente pudessem formar uma figura que seguisse algum padrão! Parecia haver ordem na desordem!

Neste momento da aula pudemos refletir sobre a importância da matemática, que é a ciência que busca essencialmente reconhecer padrões, em especial a matemática do Caos, onde a palavra “caos” não tem o sentido utilizado no cotidiano, pois sistemas que tem comportamento caótico são determinísticos.

Também foi discutida a ideia de fractais, que são objetos que não podem ser classificados como figuras de dimensões inteiras, como retas, pontos, planos e sólidos, comumente abordados na geometria euclidiana. Os fractais surgem quando busca-se representar graficamente determinados sistemas dinâmicos.

A partir das reflexões e da participação dos alunos, pode-se perceber que o objetivo desta atividade havia sido atingido, pois a atividade deveria apenas sugerir a existência de um padrão, e motivar os alunos para prosseguirem na próxima atividade.

Para motivar os alunos, lançou-se as seguintes questões: Seriam então os pontos obtidos na atividade 2, pontos de um fractal? Se obtivéssemos mais pontos, este fractal ficaria mais perceptível? E se existe este fractal, qual sua dimensão?

A partir deste momento, fez-se necessária a atividade 3, que buscará conseguir mais pontos a fim de determinar o padrão que se começava a observar.

2.4 Atividade 3: Construção do triângulo de Sierpinski com GeoGebra

Objetivo

Implementar uma rotina computacional para ser executado no Geogebra que repita as condições da atividade 2.

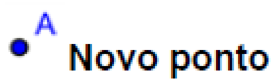
Objetivo didático

Motivar os alunos a desenvolver uma rotina computacional que refaça a atividade 2, mostrando assim a importância da computação para o desenvolvimento das ciências, em especial a matemática do caos, bem como o desenvolvimento de habilidades de compreensão e desenvolvimento de algoritmos.

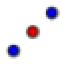
Desenvolvimento

Inicialmente buscou-se apresentar aos alunos os seguintes comandos básicos do aplicativo *GeoGebra 4.0.40.0*, utilizados para a execução dessa atividade:

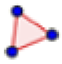
Botões



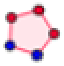
Determina um novo ponto.

 **Ponto médio ou centro**

Determina o ponto médio de um segmento dadas as extremidades.

 **Polígono**

Determina um polígono dados seus vértices.

 **Polígono regular**

Determina um polígono regular a partir de dois vértices e da quantidade de vértices.

Um seletor é a representação gráfica de um número livre ou de um ângulo livre. Pode se criar um seletor para qualquer número livre ou ângulo livre criado anteriormente exibindo esse objeto.

<u>Comandos</u>

Lista

Este comando cria um conjunto de valores ou objetos. Por exemplo, para criar um conjunto com os valores 0, 1, 2, 3, e 4, basta digitar na barra “Entrada”, localizada na parte inferior esquerda da tela, o comando: lista = {0, 1, 2, 3, 4}.

Elemento[<Lista>, <Posição do Elemento>]

Este comando permite que se escolha um elemento de uma lista criada definida a sua posição. Então, usando a lista do exemplo anterior, ao se digitar no campo de entrada o comando: Elemento[lista, 3], o aplicativo selecionará o terceiro elemento da lista, logo o número 2.

DefinirValor[<ObjetoA>,<ObjetoB>]

Este comando faz com que o objeto B assuma o valor do objeto A. Logo, a cada atualização o objeto B assumirá o valor do objeto A.

NúmeroAleatório[<Valor Inteiro Mínimo>, <Valor Inteiro Máximo>]

Este comando cria números aleatórios inteiros em um intervalo definido. Digitando-se no campo Entrada o comando: NúmeroAleatório[1,6], o aplicativo determinará, aleatoriamente a cada atualização, um número inteiro entre um e seis.

Note que a escrita correta dos comandos é imprescindível, desta forma deve-se ficar atento aos acentos ortográficos e às letras maiúsculas.

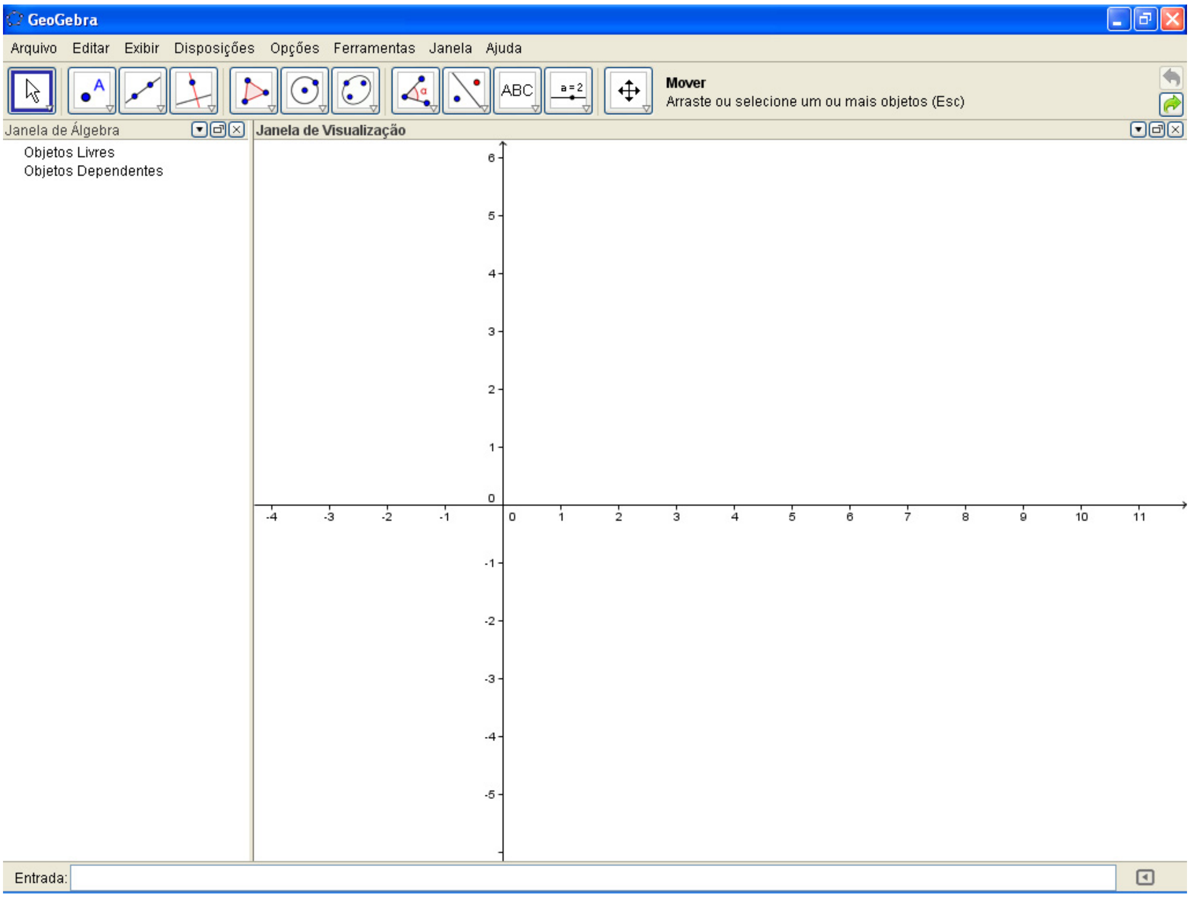
Após verificarmos os comandos e botões que poderiam ser necessários, foi solicitado aos alunos que dissessem quais passos deveríamos tomar seguidamente para que o algoritmo fosse construído. Uma outra opção seria o professor pedir para que grupos de alunos produzissem textos com linguagem coloquial criando algoritmos para posterior análise da turma.

Como a turma em que a atividade foi aplicada é pequena os alunos foram dizendo que passos deveriam ser adotados, e com a mediação do professor, foi-se escrevendo na lousa um pequeno texto para convertermos em aplicativo com os comandos do GeoGebra. Os passos definidos foram os seguintes:

1. Criar um triângulo.
2. Determinar um ponto interno ao triângulo.
3. Determinar o ponto médio do segmento determinado pelo ponto interno e um dos vértices do triângulo.
4. Determinar o ponto médio do segmento determinado pelo ponto médio determinado anteriormente e um dos vértices do triângulo.
5. Repetir o procedimento anterior.

Então definidos os passos, passou-se à construção do aplicativo. A seguir tem-se a imagem da tela inicial do GeoGebra, e na opção “Exibir”, pode-se ocultar os eixos do espaço “Janela de Visualização”.

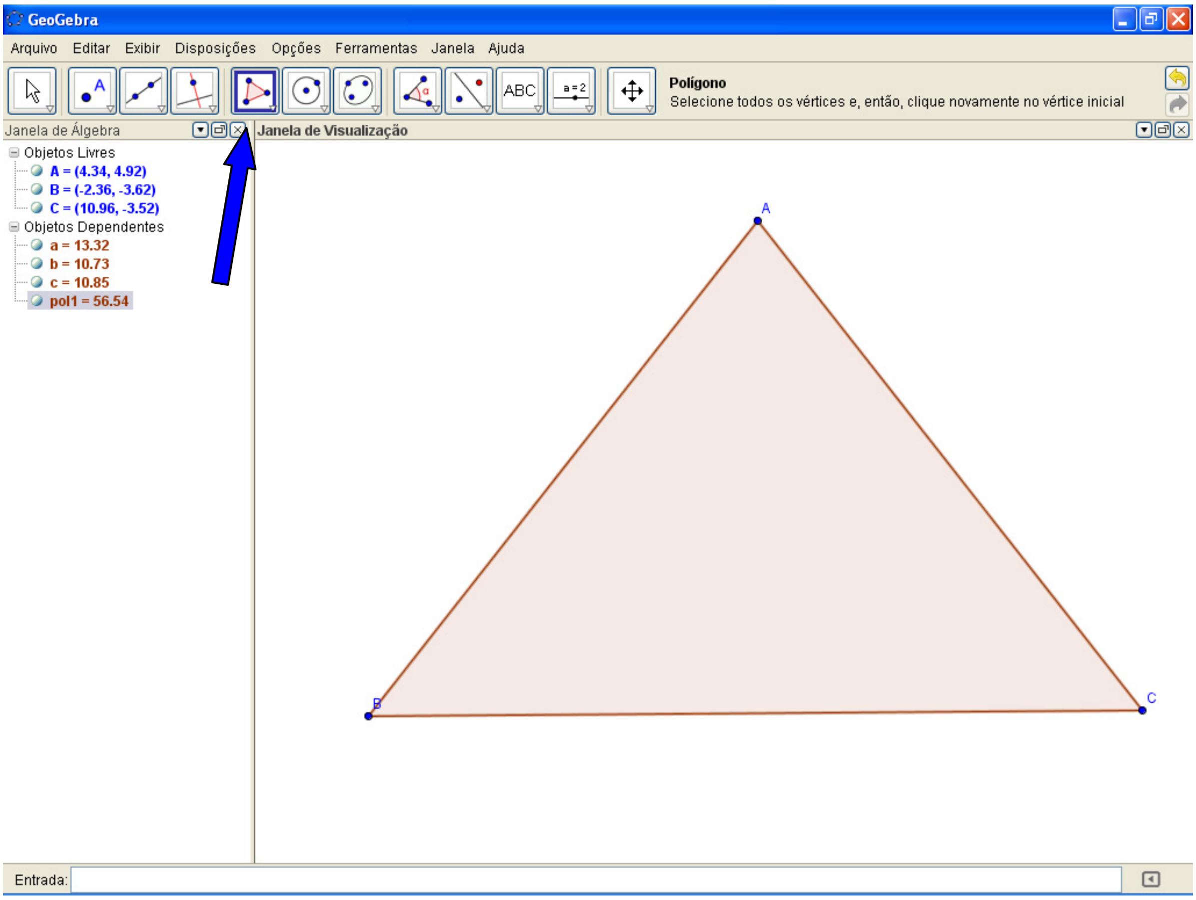
Figura 2.13 – Geogebra – Tela inicial



Fonte: Autor.

Cria-se um triângulo, selecionando-se o botão em destaque na Figura 2.14, e, em seguida clicando-se na janela de visualização para a obtenção dos vértices desse triângulo. Não se teve a preocupação de que o triângulo fosse equilátero.

Figura 2.14 – Geogebra – passo 1

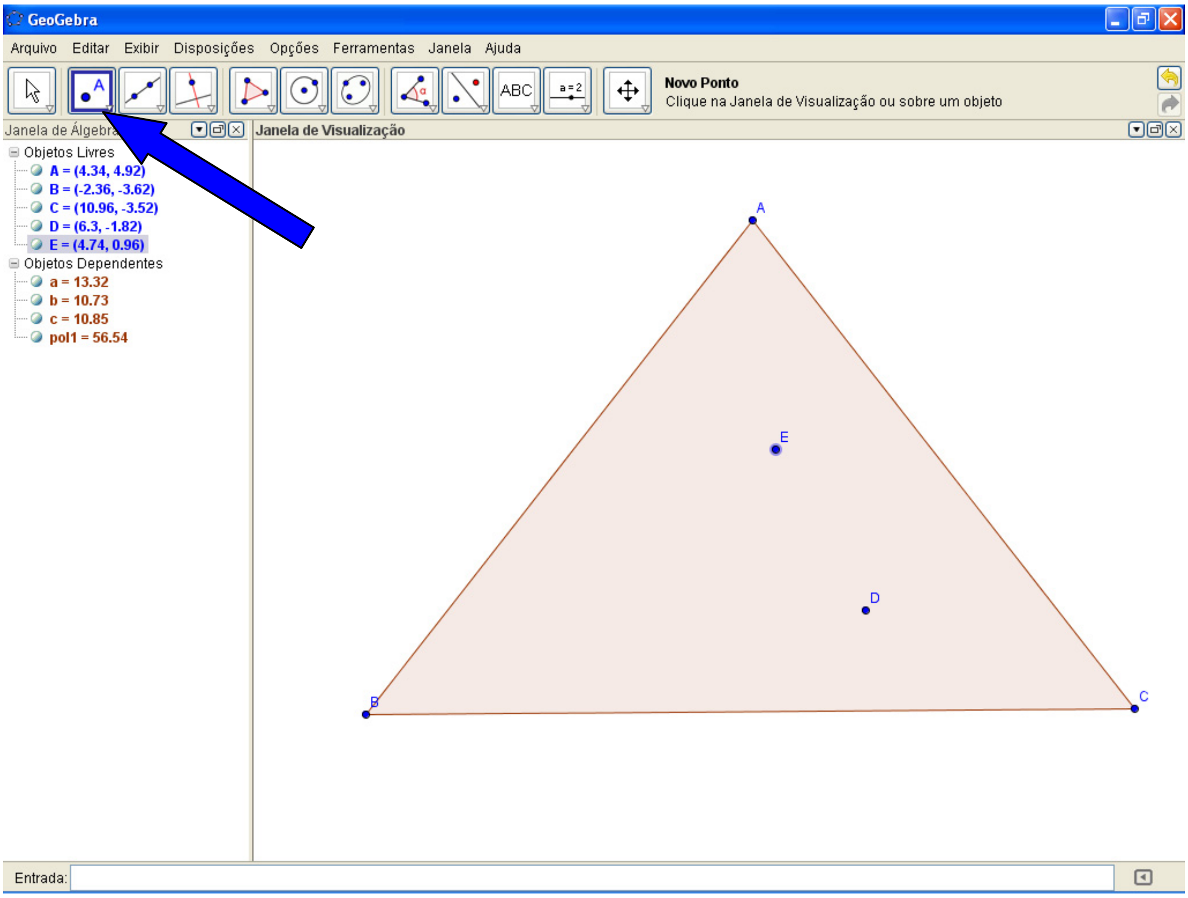


Fonte: Autor.

Determinam-se dois pontos em seu interior, selecionando-se o botão em destaque na Figura 2.15 e clicando-se sob os locais onde se desejava criar os pontos. Um ponto representa o ponto inicial e o outro ponto representa o primeiro ponto médio. Porém não há a necessidade que um dos pontos ocupe a posição correta de ponto médio em relação a algum vértice do triângulo, pois o ponto inicial é aleatório, portanto, basta criar dois pontos quaisquer no interior do triângulo.

Deve-se apenas tomar o cuidado para que o ponto inicial não seja o baricentro do triângulo, pois nesse caso teríamos convergência dos pontos para posições definidas, não construindo, assim, o fractal.

Figura 2.15 – Geogebra – passo 2

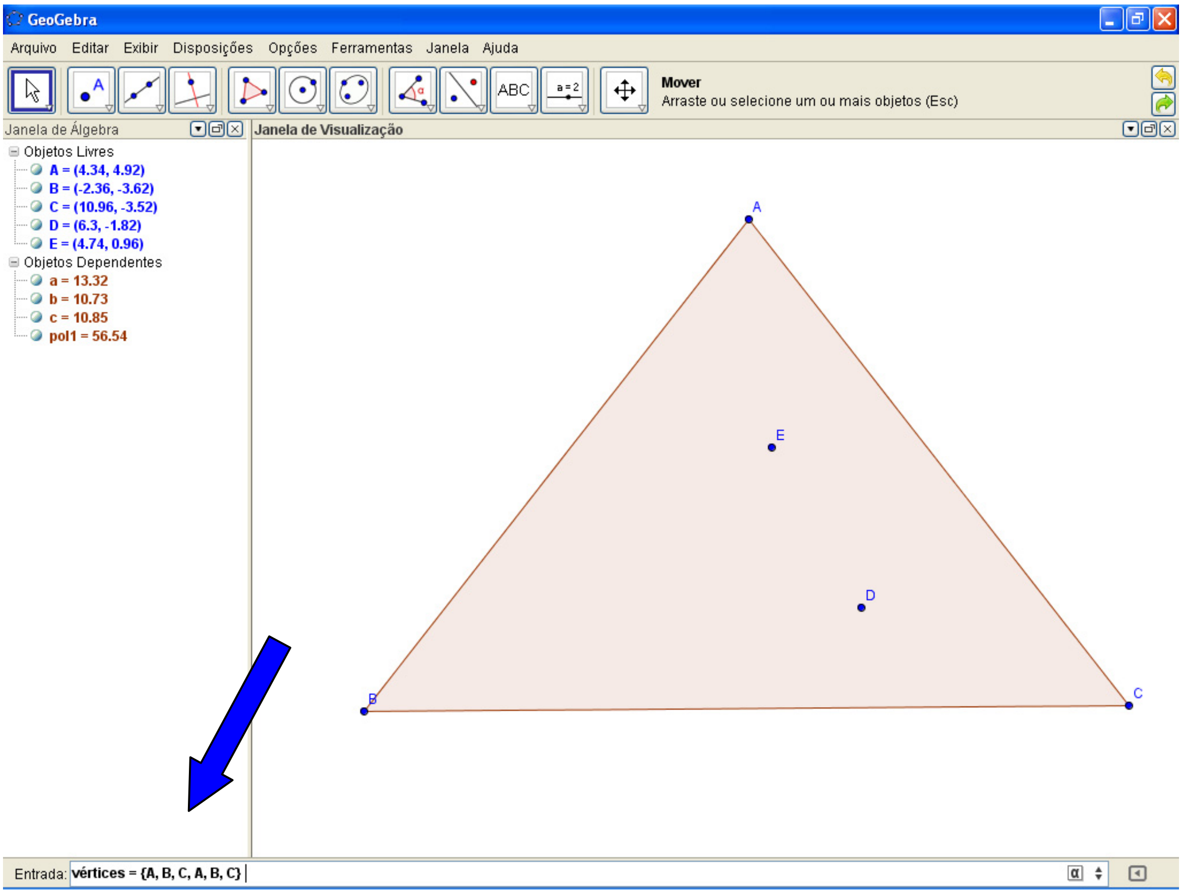


Fonte: Autor.

Em seguida, cria-se uma lista com os vértices A, B e C. Como será simulado o lançamento de um dado utilizando o comando NúmeroAleatório para inteiros de 1 a 6, colocamos os vértices repetidamente num conjunto, a fim de termos 6 posições no conjunto. Assim, se o número aleatório for 1 ou 4, estará selecionado o vértice A, 2 ou 5, vértice B, 3 ou 6, vértice C.

Desse modo, no campo Entrada, digita-se: vértices = {A,B,C,A,B,C}, pressionando-se a tecla *“enter”* na sequência, como mostrado na Figura 2.15.

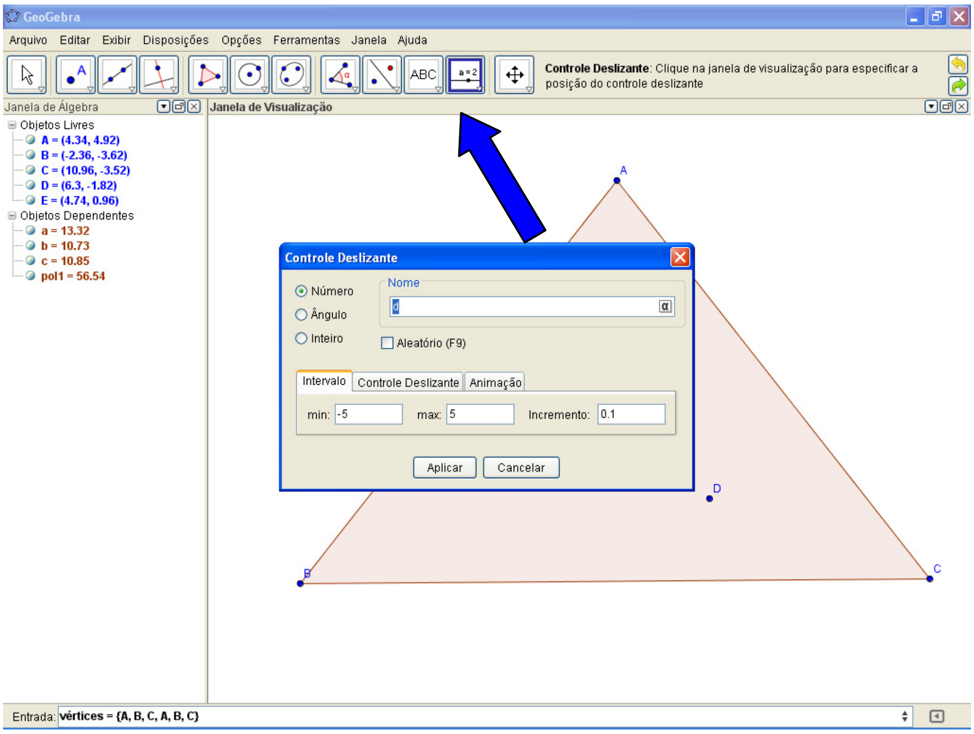
Figura 2.15 – Geogebra – passo 3



Fonte: Autor.

Cria-se um seletor deslizante para número aleatório. Selecionando-se o botão destacado na Figura 2.16 e clicando-se sobre a janela de visualização, abre-se uma janela onde se pode determinar as condições para a variável que está sendo criada.

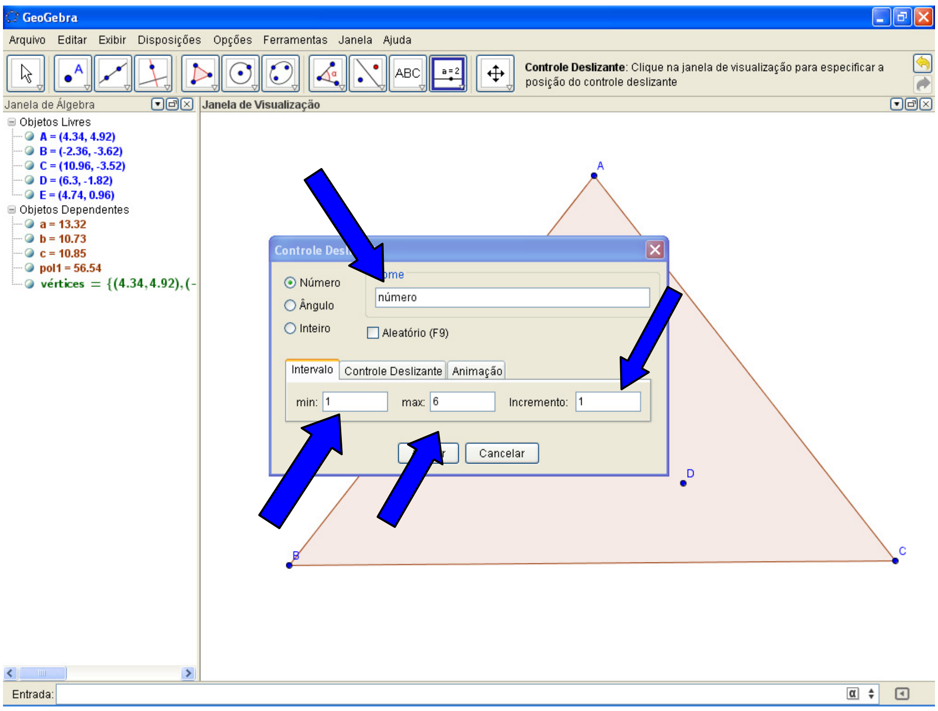
Figura 2.16 – Geogebra – passo 4



Fonte: Autor.

Na janela que se abriu, digita-se o nome da variável "número", por exemplo, definem-se os limites de variação, sendo o mínimo 1, o máximo 6 e o incremento 1, como mostra a Figura 2.17.

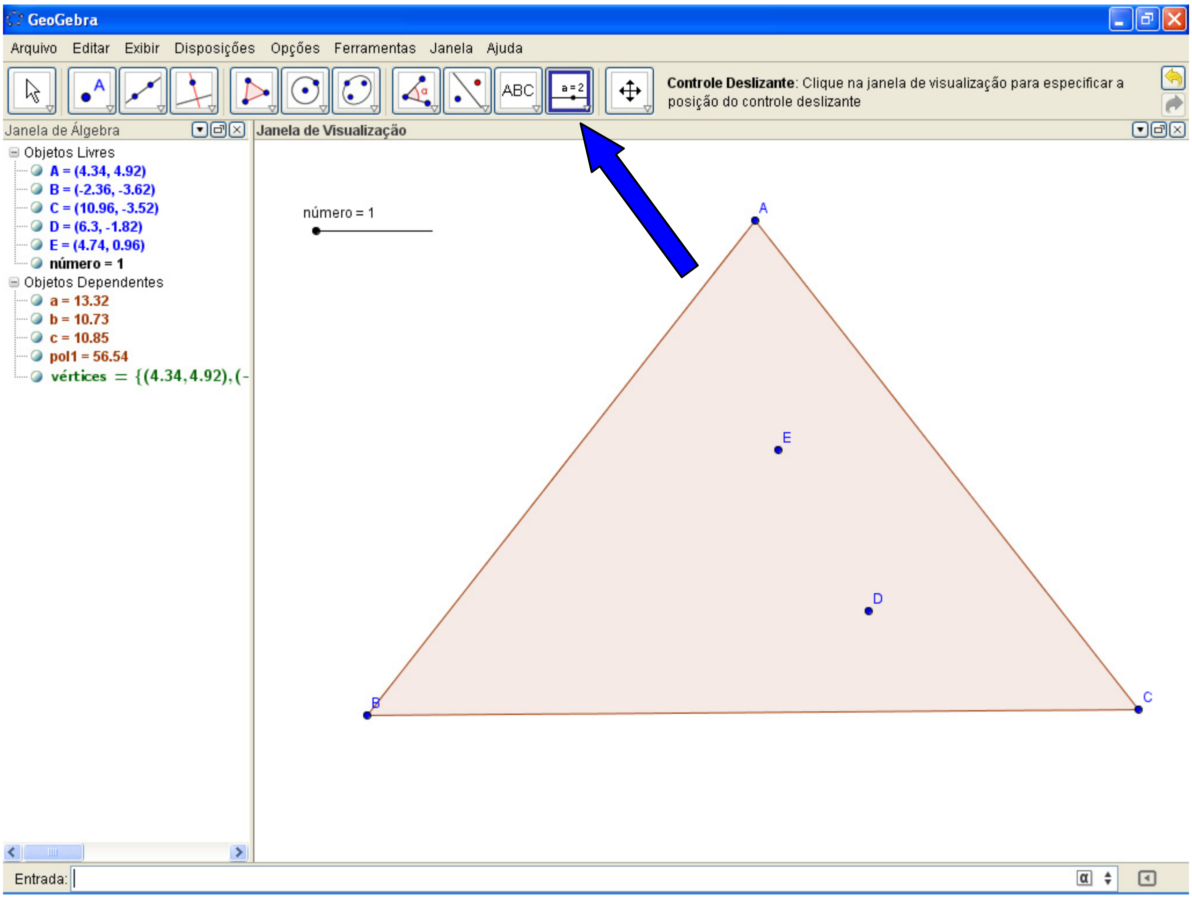
Figura 2.17 – Geogebra – passo 5



Fonte: Autor.

Na sequência obtivemos a tela como mostrado na Figura 2.18.

Figura 2.18 – Geogebra – passo 6



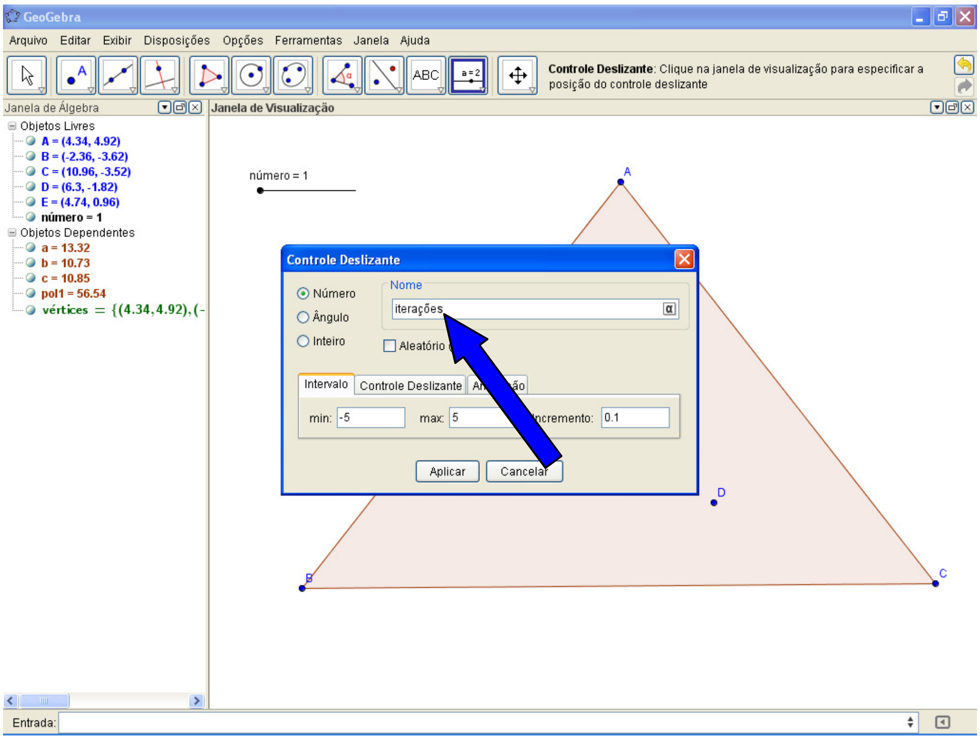
Fonte: Autor.

Criamos outro seletor para uma variável que representará as iterações, assim, para cada valor desta variável teremos um ponto médio novo calculado.

Novamente selecionamos o botão em destaque na figura 2.18 e clicamos sobre a janela de visualização.

Na janela que se abre determinamos o nome da variável como sendo, por exemplo, “iterações”, como exemplificado na Figura 2.20.

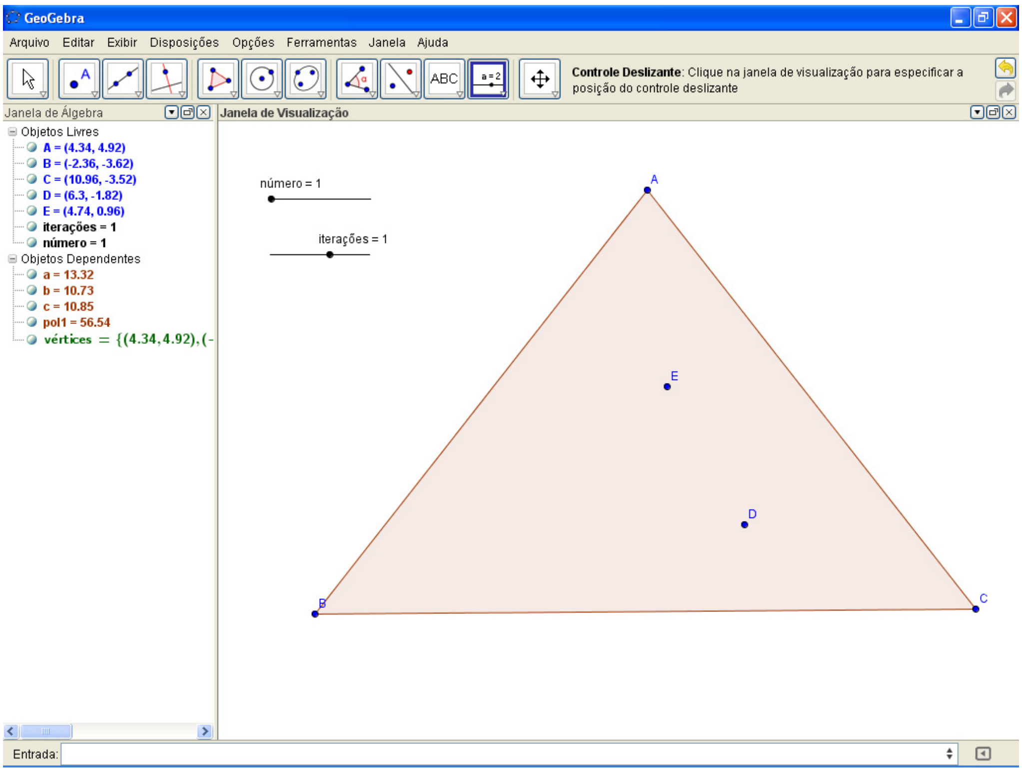
Figura 2.20 – Geogebra – passo 8



Fonte: Autor.

Obtém-se assim a tela mostrada na Figura 2.21.

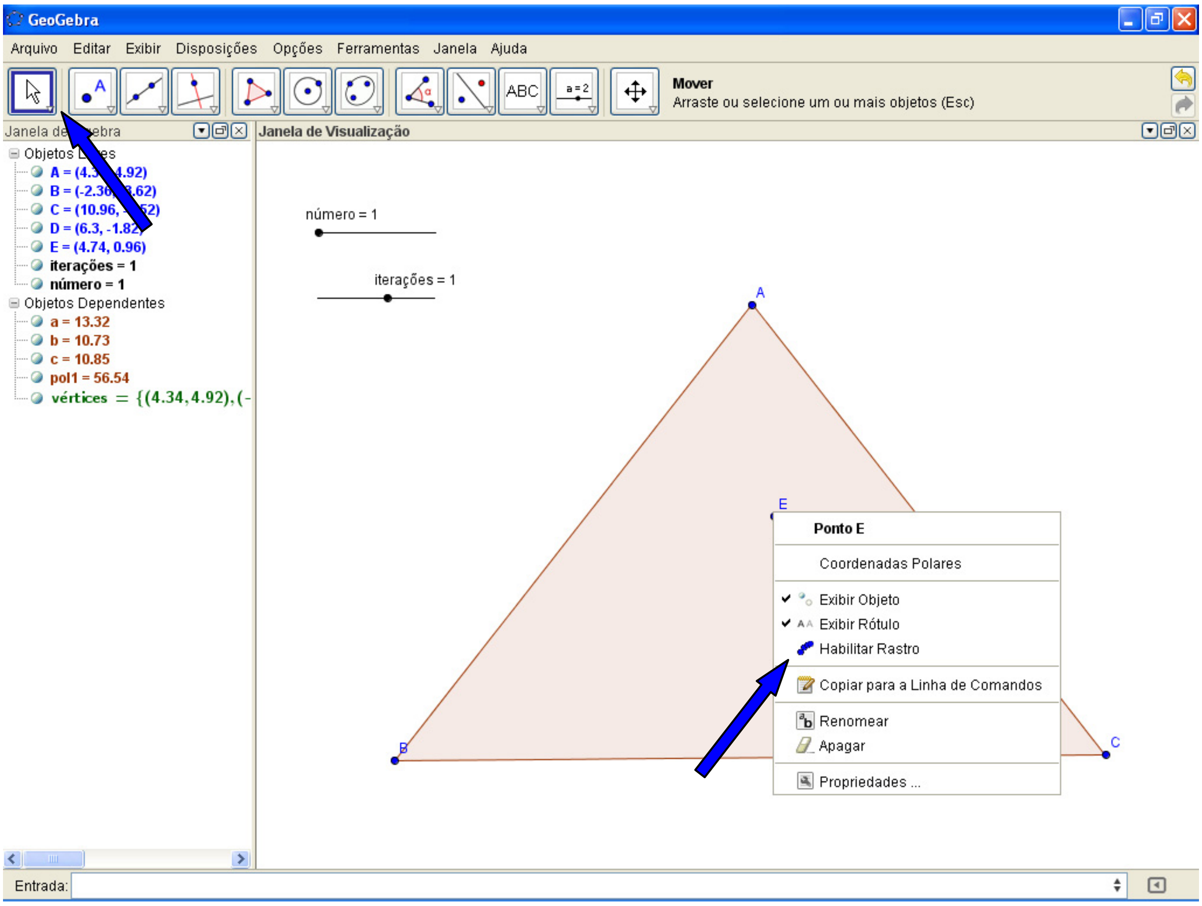
Figura 2.21 – Geogebra – passo 9



Fonte: Autor.

Em seguida, seleciona-se o botão “mover” em destaque na figura 2.22, e na sequência, com o botão direito do *mouse*, clica-se sobre o sobre o ponto E. Na janela que se abre, seleciona-se a opção “habilitar rastro”.

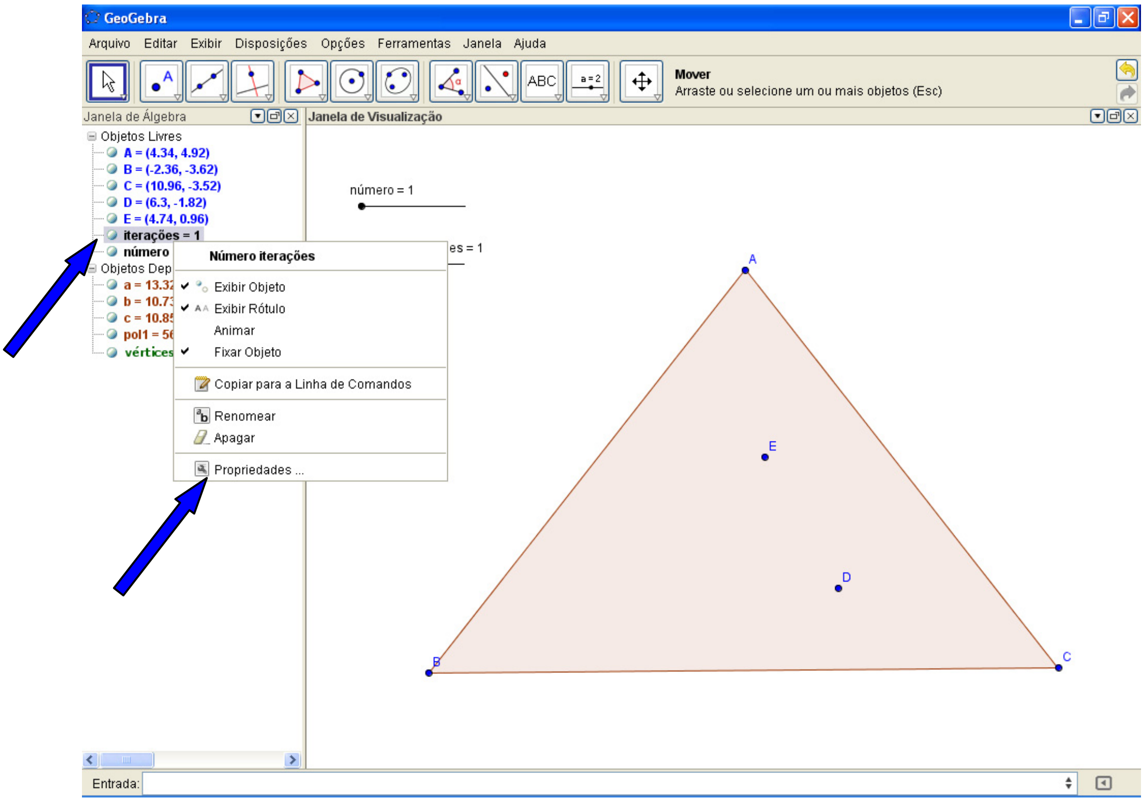
Figura 2.22 – Geogebra – passo 10



Fonte: Autor.

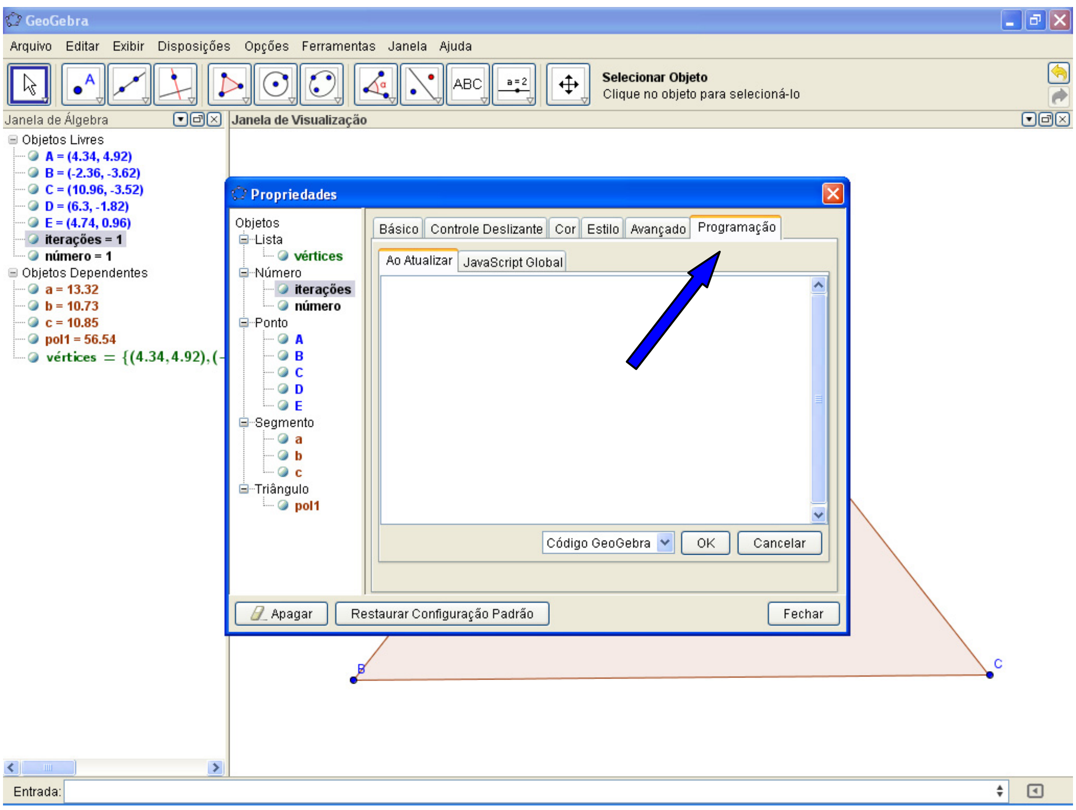
Na “janela de álgebra” clicamos com o botão direito na variável “iterações”, em seguida, na janela aberta, na aba programação, como mostram as Figuras 2.23 e 2.24.

Figura 2.23 – Geogebra – passo 11



Fonte: Autor.

Figura 2.24 – Geogebra – passo 12



Fonte: Autor.

E no espaço “Ao Atualizar” escreve-se o que deverá ocorrer a cada atualização do programa, ou seja, a cada iteração o ponto médio calculado passará a ser o ponto inicial. O ponto inicial é D, e E representa um ponto médio qualquer, assim, na próxima iteração, E passará a ser o ponto inicial D e, a partir dele calcular-se-á um novo ponto médio. Para que D passe a ser E, utiliza-se o comando: DefinirValor[D,E].

Também, a cada atualização, a variável “número”, criada anteriormente, deverá assumir um valor inteiro aleatório entre 1 e 6, para que se possa sortear o vértice com o qual se definirá o novo ponto médio. Então utiliza-se o comando: DefinirValor [número, NúmeroAleatório[1,6]].

Finalmente, a cada atualização, deve-se determinar que o ponto E deverá assumir a posição do novo ponto médio determinado por ele e o vértice sorteado, ou seja, o vértice que ocupa a posição definida pela variável “número” na lista.

Consegue-se isto com o comando:

DefinirValor[E, 0.5(E+Elemento[lista, número])].

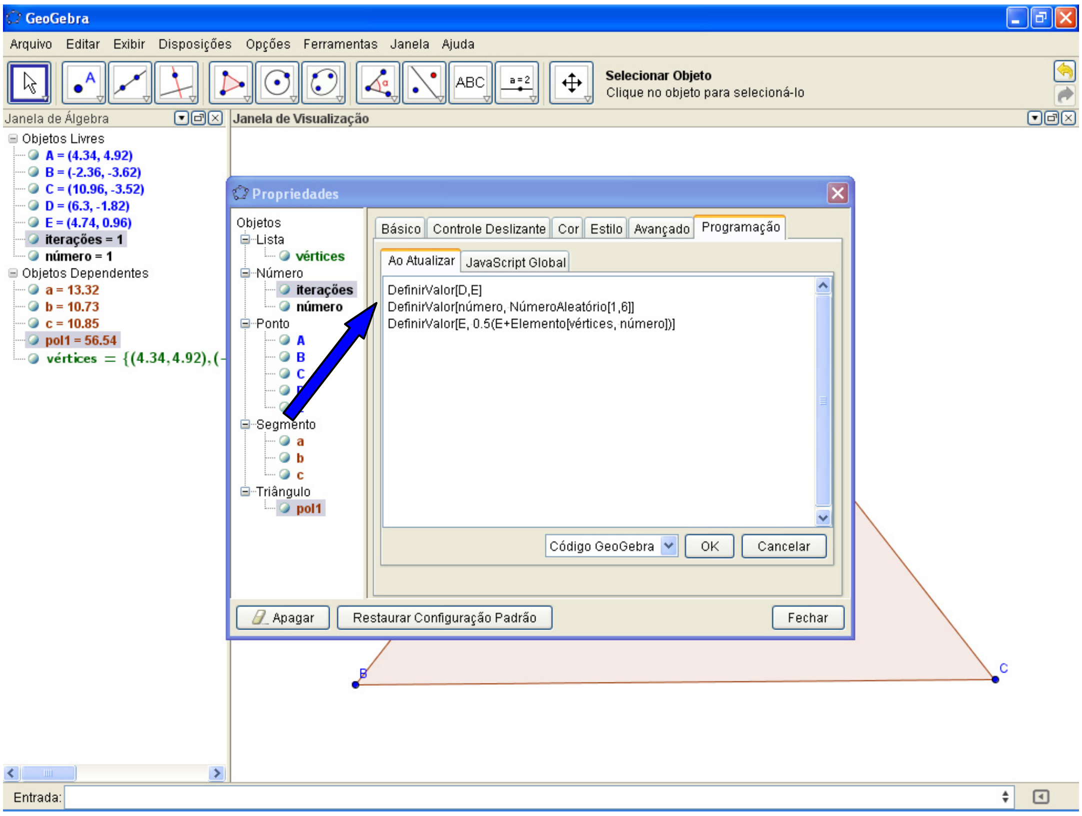
Dessa forma, no espaço “Ao Atualizar”, deverão estar escritos os comandos;

DefinirValor[D,E]

DefinirValor [número, NúmeroAleatório[1,6]]

DefinirValor[E, 0.5(E+Elemento[vértices, número])]

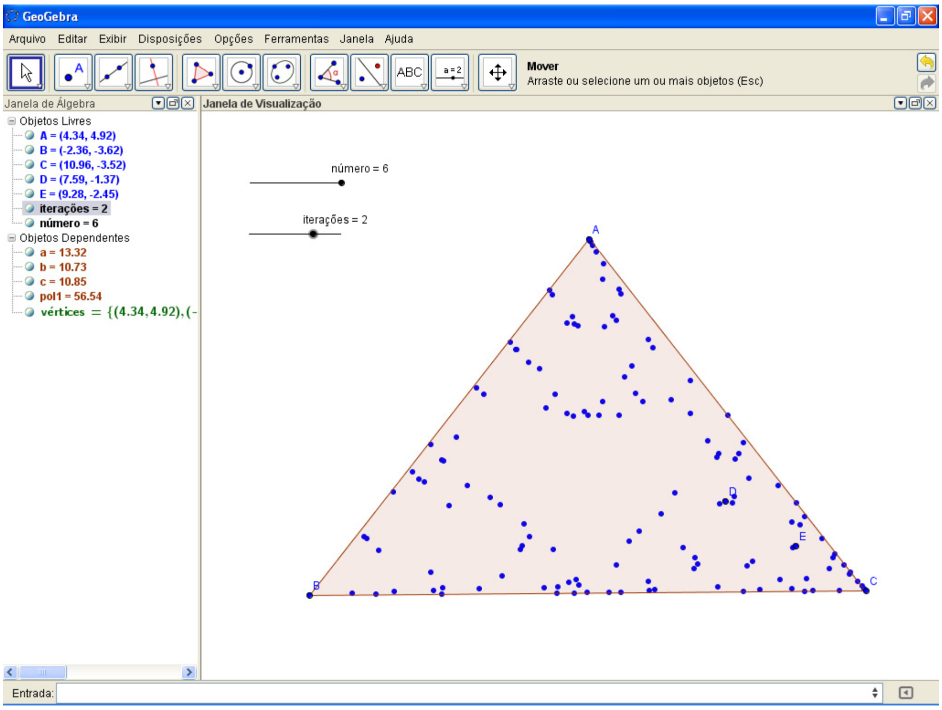
Figura 2.25 – Geogebra – passo 13



Fonte: Autor.

Após clicar no botão “OK” e fechar a janela, pode-se mover o seletor “iterações” para conseguir alguns pontos. Tais pontos já começam a mostrar um padrão, começamos a ter contato com o Triângulo de Sierpinski.

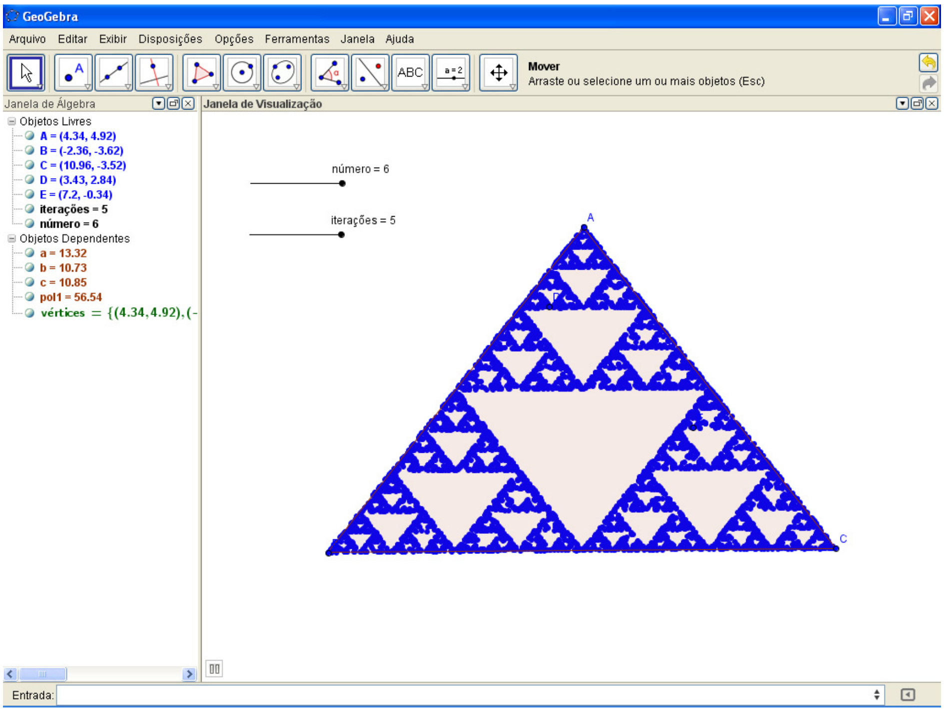
Figura 2.26 – Geogebra – passo 14.



Fonte: Autor.

Pode-se ainda clicar com o botão direito do mouse sobre o seletor iterações e habilitar o comando "Animar" e assim conseguir o triângulo de Sierpinski mais rapidamente.

Figura 2.27 – Geogebra – passo 15



Fonte: Autor.

A partir desta atividade, os alunos puderam compreender melhor o que é um fractal, e suas características principais, como a autossimilaridade. Puderam também reconhecer que o programa simplesmente agilizou o trabalho que haviam feito manualmente e sem muita precisão, pois utilizavam simplesmente a graduação de uma régua para se determinar os pontos médios da atividade 2.

CAPÍTULO 3

Fractais

Neste capítulo, será abordado com um pouco mais de detalhes o conceito de fractal, apresentando uma forma de se calcular sua dimensão e uma breve apresentação histórica.

Conforme já apresentado no capítulo 1, Benoit Mandelbrot, nascido em Varsóvia (1924–2010) foi um dos iniciadores dos estudos sobre geometria fractal. Porém, ideias relacionadas à geometria fractal já haviam sido discutidas por matemáticos anteriores, como Georg Cantor (1845–1918), por exemplo.

Mandelbrot teve a genialidade e também a tecnologia necessária para a realização de cálculos e construções de gráficos, pois tinha cargo na IBM. Foi o primeiro a poder visualizar a imagem de um fractal com alta complexidade de detalhes.

De acordo com Barbosa (2005, p.12), sobre Mandelbrot,

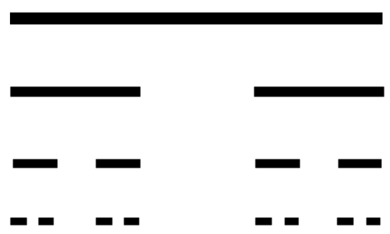
> Na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema empregando um trabalho antigo de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor.

Georg Cantor publicou em 1883 um trabalho em que aparece um conjunto, conhecido como “Conjunto de Cantor” ou “Poeira de Cantor”.

Podemos representar graficamente a ideia de Cantor, considerando inicialmente um segmento de reta. Em seguida, divide-se o segmento em três partes iguais e retira-se a parte central. Este procedimento deve ser novamente repetido para cada segmento que restou e, assim sucessivamente. Este procedimento gerará como objeto limite o fractal chamado “Conjunto de Cantor”.

Temos que cada parte é similar ao todo e as figuras são obtidas por iterações, como mostra a Figura 3.1. Estas são características principais dos Fractais.

Figura 3.1 – Conjunto de Cantor



Fonte: Autor.

O triângulo de Sierpinski, como mostrado no capítulo 1, é obtido de forma parecida, ou seja, divide-se um triângulo em quatro triângulos congruentes e retira-se o triângulo central e, na sequência repete-se o procedimento para cada triângulo que restou e assim sucessivamente, como mostrado na Figura 1.2.

Outra característica dos objetos geométricos com estrutura fractal é a dimensão não-inteira. Por exemplo, a figura limite que representa o Conjunto de Cantor tem dimensão maior do que a de um ponto e menor do que a de uma reta, ou seja, podemos dizer que tal figura ocupa no espaço uma porção maior do que ocupa um ponto e menos do que ocupa uma reta.

Assim, a dimensão tem uma relação direta com a área que uma figura ocupa. Para entendermos como se calcula a dimensão de um fractal, partiremos de figuras da geometria euclidiana.

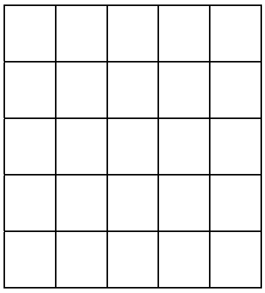
Se dividirmos um segmento em 5 partes congruentes, como mostra a Figura 3.2, teremos 5^1 partes iguais ao original, porém cada uma multiplicada por um coeficiente de redução $r = \frac{1}{5}$.

Figura 3.2 – Segmento subdividido em 5 partes iguais.

Fonte: Autor.

Se realizarmos o mesmo processo com um quadrado, ou seja, dividirmos os seus lados em 5 partes congruentes, portanto usando um coeficiente de redução r $= \frac{1}{5}$, obteremos 5^2 partes semelhantes ao original.

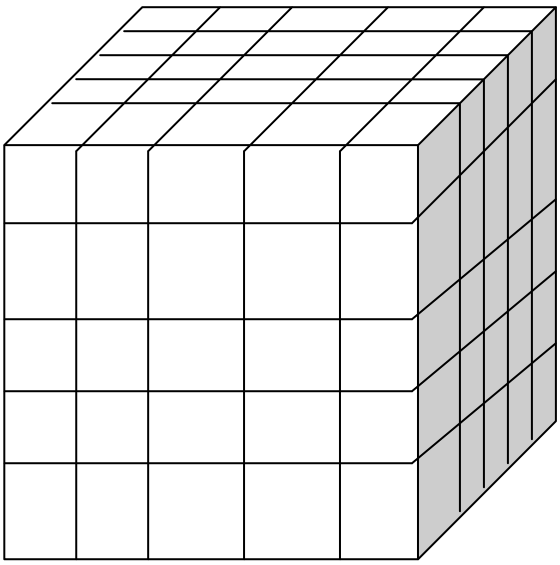
Figura 3.3 – Quadrado subdividido em 25 partes iguais.



Fonte: Autor.

De modo análogo, se subdividirmos as arestas de um cubo em 5 partes iguais, como representado na Figura 3.4, portanto usando o mesmo coeficiente de redução r $= \frac{1}{5}$ dos exemplos anteriores, obteremos 5^3 partes semelhantes ao original.

Figura 3.4 – Cubo subdividido em 125 partes equivalentes.



Fonte: Autor.

Com estes exemplos pode-se notar que a quantidade N de partes semelhantes ao todo corresponde ao inverso do coeficiente de redução elevado à dimensão da figura.

No caso do segmento, temos que N = $\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{1}}$, e um segmento tem dimensão 1.

No caso do quadrado, temos que N = $\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{2}}$, e um quadrado tem dimensão dois.

No caso do cubo, temos que N = $\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}$, e um cubo tem dimensão três.

Estes exemplos sugerem uma relação entre a dimensão de uma figura e a quantidade de elementos semelhantes que se consegue ao subdividi-la.

O coeficiente de redução utilizado nos exemplos foi escolhido aleatoriamente, e explorar tais regularidades na sala de aula pode ser um fator motivador e uma oportunidade para significar conteúdos como sequência, potências, logaritmos e etc.

Então assumindo que $N = \frac{1}{r^d}$, em que d, representa a dimensão e r um coeficiente de redução não nulo, temos:

$$N = \frac{1}{r^d} = \left(\frac{1}{r}\right)^d \Rightarrow \log N = \log\left(\frac{1}{r}\right)^d \Rightarrow d = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Assumindo que o cálculo de dimensões para fractais obedece ao mesmo padrão, poderemos calcular a dimensão do fractal Poeira de Cantor.

A cada iteração os segmentos são divididos em três partes e restam duas partes, assim, o fator de redução é r = $\frac{1}{3}$ e a quantidade de partes obtidas é N = 2, assim d = $\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx \frac{0{,}30}{0{,}48} \approx 0{,}63$.

Da mesma forma poderemos calcular a dimensão do fractal Triângulo de Sierpinski, pois a cada iteração o fator de redução r = $\frac{1}{2}$, pois os triângulos menores são obtidos a partir dos pontos médios dos lados do triângulo maior, e a quantidade de partes obtidas é N = 3. Assim, d = $\frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0,48}{0,30} \approx 1,6$.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E CONCLUSÕES

4.1 Resultados

As atividades foram bastante eficientes para motivar os alunos e despertar-lhes o interesse sobre seus resultados. Chamaram a atenção dos alunos por serem novidade, seja pela dinâmica da aula ou pelo conteúdo que se estava discutindo.

A curiosidade em se saber o que teríamos como resultado com os pontos coletados foi um importante fator motivador, pois, os alunos foram avisados inicialmente que as atividades 1 e 2 os ajudariam a compreender as características de um fractal, mas nenhum conceito sobre fractais ou sistemas dinâmicos foi abordado. Sabiam também que os pontos gerados nas atividades seriam coletados na transparência e ficaram curiosos para saber o que estes pontos determinariam.

No caso do jogo do caos, atividade 1, como cada dupla iniciou o jogo a partir de um ponto, e cada dupla decidiu de maneira independente por qual vértice começar e qual sequência de vértices deveria ser tomada, os alunos puderam perceber que o objetivo do jogo pode ser conseguido de maneiras diferentes, umas mais rápidas que outras. Porém o conjunto de todas as possibilidades converge para determinados pontos do plano.

Da mesma forma, na atividade 2, os pontos obtidos foram determinados de maneira aleatória, e cada aluno conseguiu um conjunto de pontos que quando comparado aos conjuntos obtidos pelos colegas não mostrava nenhuma regularidade. O conjunto de todos os pontos obtidos na transparência pode revelar o início de uma ordem, com o surgimento do triângulo central. Este resultado foi muito bom para que os alunos percebessem o sentido da atividade. Puderam ver que poderia haver um padrão onde eles acreditavam, inicialmente, que não fosse possível existir padrão algum.

Essa atividade mostra-se importante mesmo no caso dos alunos não perceberem nenhuma regularidade, pois serve de motivação para a atividade 3 e ajuda os alunos a compreenderem os passos para a construção do aplicativo.

Quando iniciou-se a atividade 3 os alunos já estavam cientes de que buscávamos confirmar a existência de um padrão, caso ele existisse, porém com muitos mais pontos do que obtidos anteriormente, inclusive sem a imprecisão que tínhamos nas atividades anteriores, em que os pontos médios eram determinados apenas com o uso de réguas, mas nada havia sido tratado ainda sobre o Triângulo de Sierpinski, para que o resultado fosse surpreendente.

Durante a execução do aplicativo, foi dada uma pausa no programa quando tínhamos pontos formando uma figura parecida com a da transparência e os alunos foram convidados a observarem o que ocorreria em seguida.

Os alunos mostraram-se muito entusiasmados quando os pontos começaram a deixar evidente o Triângulo de Sierpinski. A atividade 3 foi a que mais agradou e chamou a atenção dos alunos.

4.2 Conclusões

Tais atividades marcaram uma oportunidade de bastante reflexão sobre a importância da matemática e das tecnologias para o desenvolvimento científico e a partir destas atividades podem-se criar outras problematizações, como por exemplo, como determinar a dimensão de um fractal e também encontrar, nesse assunto, formas para se contextualizar conteúdos clássicos do ensino médio, como funções, logaritmos, números complexos, sequências, etc.

Acredita-se que atividades como essas possam trazer para a sala de aula discussões importantes sobre o desenvolvimento da matemática e como a matemática participa do desenvolvimento científico, e, dessa forma, contribuir para que os alunos possam percebê-la em sua beleza, e não como sinônimo de assuntos áridos e nem sempre interessantes.

Segundo Madsen:

> Cremos, no entanto, que para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração e talvez evidenciando o êxtase na contemplação da beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais.

Levar a geometria fractal para a sala de aula pode ser uma oportunidade para conectar a matemática com o mundo fora da sala de aula, favorecendo o desenvolvimento de projetos interdisciplinares e contribuindo para que os alunos se coloquem num processo de aprendizagem significativa.

Com estas atividades não se tinha a preocupação inicial com o ensino-aprendizagem de algum conteúdo formal, mas com o possível desenvolvimento de competências e habilidades. Quando os alunos participaram das determinações do intervalo de variação e do valor do incremento da variável “número”, na atividade 3, quando auxiliaram na determinação da ordem dos passos a serem seguidos para a construção do aplicativo, ou ao buscarem compreender a necessidade e a forma de utilização dos comandos, poderiam estar desenvolvendo competências e habilidades relacionadas a, por exemplo, reconhecer significados para os números, compreender algoritmos, dominar diversas linguagens.

Espera-se que esta atividade seja apenas uma inspiração para a criação de outras sequências didáticas que tenham a intenção de desenvolver competências e habilidades, inclusive através de conteúdos matemáticos, dando-lhes significados, e servindo aos alunos como fonte de percepção da beleza da matemática, pois, segundo John Von Neumann, matemático húngaro, um dos maiores matemáticos do século XX, "Em Matemática você não entende as coisas, você se acostuma com elas".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, Michèle. *Ingèniere didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques , V9, n3, p231-308,1988.

BARBOSA, Ruy Madsen**.** *Descobrindo a Geometria Fractal - para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ministério da Educação e Cultura. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília*: SEMTEC, 2002

GLEICK, James. *Caos: a criação de uma nova ciência*; tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1990

GOMES, H. C. M. *Reflexões sobre uma prática de ensino: Uma engenharia didática*. Trabalho de conclusão do curso de licenciatura em matemática. Porto Alegre: s. n., 2008.

OSONE, Mariana. *"Em segredo com os Fractais".* Revista: Cálculo – Matemática para Todos, Edição 16, ano 2, 2012, páginas 30 e 31.

SADDO, Ag Almouloud, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, *Engenharia Didática: características e seus usos,* em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd 1. 2008

SALLUN, M. E. *Fractais no Ensino Médio*. Revista do Professor de Matemática v. 57, p. 1 – 8. SBM. 2005.

STASZKOW, Robert. Bradshaw, R. *The Mathematical Pallete.* 3rd edition. Brooks/Cole – Thomson Learning. USA. 2004.

GLOSSÁRIO

Autossimilaridade – Propriedade das figuras em que cada uma de suas partes é similar ao todo.

Caos – Ciência que estuda os sistemas determinísticos complexos e dinâmicos.

Fractais – São objetos geométricos não-euclidianos que possuem autossimilaridade, ou seja, em que cada uma de suas partes lembra o todo. Geralmente surgem a partir do estudo gráfico de sistemas dinâmicos e suas formas lembram as formas da natureza, como as nuvens, folhas de samambaias, raios, etc.

Segundo Madsen,

> Nota-se do exposto que o conceito de fractal ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal, que caiba ao ser e só ao ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, à qual pode simplesmente convir uma conceituação simples e de fácil compreensão e entendimento. Bastará considerarmos a autossimilaridade.

Sistemas complexos - São sistemas que apresentam propriedades cuja compreensão não depende da análise individual de cada elemento que o constitui, mas das relações estabelecidas entre tais elementos.

Sistemas determinísticos – São sistemas que apresentam resultados que podem ser determinados por funções ou leis bem definidas.

Sistemas dinâmicos – São sistemas que evoluem com o tempo e cujo comportamento depende da iteração entre seus componentes. Um sistema dinâmico pode ser linear ou não-linear.

Sistema dinâmico linear - São sistemas que podem ser modelados através de equações diferenciais lineares.

Sistema dinâmico caótico – Evolui com o tempo e seu comportamento não apresenta períodos. Pequenas alterações nas condições iniciais podem levar grandes alterações em seu comportamento futuro.

Sensibilidade às condições iniciais – É a propriedade de um sistema em que pequenas alterações iniciais em seu desenvolvimento podem causar grandes alterações futuras.

Padrões matemáticos – São regularidades, sequências, que podem ser representadas por modelos matemáticos.