UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALESSANDRA DE CARVALHO KITAOKA

O USO DE TECNOLOGIA COMO FERRAMENTA DE APOIO ÀS AULAS DE GEOMETRIA

SÃO CARLOS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALESSANDRA DE CARVALHO KITAOKA

O USO DE TECNOLOGIAS COMO FERRAMENTA DE APOIO ÀS AULAS DE GEOMETRIA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação:

Prof. Dr. Tomas Edson Barros

São Carlos

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

K62tf

Kitaoka, Alessandra de Carvalho.
O uso de tecnologias como ferramenta de apoio às aulas de geometria / Alessandra de Carvalho Kitaoka. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
92 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Circuncentro. 4. GeoGebra (Software de computador). I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

(Alessandra de Carvalho Kitaoka)

APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA , DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, EM (DATA: 16, agosto de 2013)

BANCA EXAMINADORA:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Tomas Edson Barros
DM - UFSCar

Thiago de Melo

Prof. Dr. Thiago de Melo
UNESP – Rio Claro

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
DM - UFSCar

Em especial a meu marido Rodrigo e minha filha Júlia, que foram o meu alicerce enviado por Deus, a toda minha família, e a todos alunos e professores do PROFMAT.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”

(Paulo Freire)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que permite a aprendizagem do ser humano em qualquer tempo e qualquer idade.

Agradeço a minha mãe Maria Emília que sempre me fez acreditar que todos os sonhos são possíveis desde que corramos atrás dele, uma mãe que me ensinou a nunca desistir e acreditar sempre que sou capaz.

Agradeço a meu marido Rodrigo e minha filha Júlia, que juntos me apoiaram e me ajudaram nessa árdua tarefa, que compreenderam todas as minhas faltas e todo o meu cansaço, muitas vezes ausente por presença e tantas outras ausente por estar ocupada estudando, deixando os interesses da família em segundo plano.

Agradeço a todos os professores do programa por toda a atenção, paciência e conhecimento adquirido. Costumo dizer que eles foram os melhores professores que tive em todo o meu desenvolvimento acadêmico. Em especial ao meu orientador Prof. Dr. Tomas Edson Barros.

Agradeço também a direção, mantenedores e alunos da Escola Futura de Educação Básica.

E não poderia deixar de agradecer a todos os amigos e companheiros do curso, sempre prontos para ajudar em todas as dificuldades que apresentei, em especial à Ana Lígia, Ana Paula, Aparecida Patrícia, Gilberto e Patrícia Aparecida, pela força, pela ajuda nos estudos, estímulo nas horas em que o cansaço sugeria que desistisse, sem eles não teria conseguido.

RESUMO

O presente trabalho objetiva relatar a aplicação de uma Sequência Didática sobre como encontrar os pontos notáveis de um triângulo, em particular o circuncentro, apresento na sequência entes geométricos primários da geometria euclidiana plana junto aos axiomas e teoremas necessários para a construção do circuncentro. Os objetos geométricos serão construídos através do software educacional Geogebra. O ensino da geometria, muitas vezes relegado ao final do livro didático, se depara com a dificuldade que os alunos têm em manipular instrumentos como régua, transferidor e compasso. Por outro lado, o fascínio dos estudantes por computadores facilita a utilização de softwares da Geometria dinâmica. A soma desses fatores, inspirou esse trabalho. Baseado na metodologia da engenharia didática, pretendo mostrar etapas da construção do conhecimento matemático a partir da investigação do aluno, experimentando, visualizando, conjecturando, generalizando e até mesmo demonstrando todo embasamento matemático envolvido nesse contexto.

Palavras–chave: Geometria Euclidiana Plana. Triângulos. Circuncentro.

ABSTRACT

This project's main goal is propose the application of a Teaching Sequence about how finding the notable points of a triangle, in particular, the circumcenter. Introducing in the sequence geometric objects primaries of Euclidean geometry with the axioms and the theorems necessary to construct the circumcenter. The geometric objects will be built through educational software Geogebra. The teaching of geometry, often present to the end of the textbook, is faced with the difficulty of the students to manipulate instruments as ruler, protractor and compass. On the other hand, the fascination of students by computers facilitates the use of geometric softwares. The sum of these factors, have inspired this project. Based on the methodology of the didactic engineering I intend to show the construction steps of mathematical knowing from the student's research experimenting, visualizing, conjecturing, generalizing even demonstrating the mathematical basement in this context.

Keywords: Euclidean geometry. Triangle. Circumcenter.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tendo em vista o enorme crescimento tecnológico da informática e seu uso na área educacional, acreditamos que tais novas tecnologias possam contribuir significativamente no processo de ensino-aprendizagem.

Por meio destas ferramentas digitais é possível que o aluno construa seu conhecimento por meio de simulações, construções e conjecturas testando suas hipóteses.

Esse trabalho visa articular o uso de novas tecnologias com o processo de ensino da geometria. Muitas escolas têm boas salas de informática, porém pouco utilizadas pelos professores, as dificuldades são encontradas ora por situações burocráticas, ora pela falta de conhecimento de como usar essa tecnologia interagindo com o conteúdo a ser ensinado.

A informática no ensino da matemática consiste em utilizar softwares educacionais presentes na internet sob domínio público, podendo ser baixados gratuitamente. O professor de matemática deve utilizar esses recursos, explorando suas potencialidades e aproveitando o máximo essas capacidades para o aluno assimilar, evidenciar e construir um conhecimento matemático.

A geometria está presente em diversas situações do nosso cotidiano, frequentemente nos deparamos com formas geométricas e situações que representem entes geométricos, por outro lado o ensino da geometria muitas vezes é suprimido do conteúdo a ser ensinado pela falta de tempo e por geralmente aparecer no final dos livros didáticos.

O presente trabalho se pauta na metodologia da Engenharia Didática, criada pela educadora Michèle Artigue na década de 80, baseia-se em realizações didáticas em sala de aula, seja na concepção, realização, observação e análise dos resultados.

No capítulo 1, apresentando a primeira fase da Engenharia Didática, também conhecida como *Análises Prévias*, descrevemos brevemente a História da Geometria e relatamos a trajetória das construções geométricas no ensino brasileiro.

No capítulo 2, apresentaremos a segunda fase da Engenharia Didática, conhecida como *Análise a Priori*, descrevemos a sequência didática, assim como as escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. Sendo o professor o mediador desse processo de aprendizagem, organizando e orientando o aluno, de forma a assegurar os resultados esperados.

Já a terceira fase da Engenharia Didática, a *Experimentação,* apresenta-se no capítulo 3, onde serão apresentadas as observações e produções registradas pelos alunos. A sequência completa será apresentada no apêndice 1.

Relatamos no capítulo 4 a *Análise a Posteriori,* quarta fase da Engenharia Didática. Segundo Artigue (1996), esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados coletados e o confronto com a análise a priori, possibilitando analisar as contribuições para a superação do problema, permitindo a validação ou não, da sequencia didática empregada. Dessa forma, apresentamos a conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

1.1 Introdução

A geometria está presente em nosso dia-a-dia, é comum nos depararmos com formas geométricas na natureza e em construções humanas. Ela surge através de observações de fenômenos naturais, pela necessidade do homem de medir terras, construir casas, calcular distâncias, entre outras. Porém, o ensino da geometria no Brasil, se depara com alguns entraves, por se apresentar geralmente nos finais dos livros didáticos, muitas vezes não dá tempo de ser ensinado, e essa falta de conhecimento de um ano escolar, prejudica o saber do ano seguinte.

Este capítulo descreve um pouco da História da Geometria e relata a trajetória das construções geométricas no ensino brasileiro.

1.2 Um pouco sobre a História da Geometria

O termo geometria do grego ***geometrein*** tem em seu significado ***geo*** = terra, ***metrein*** = medição, ou seja, medição da terra.

Acredita-se que ela começa a construir sua forma a partir das mudanças no estilo de vida, onde o homem deixa de ser nômade e começa a fixar residência cultivando a agricultura. E a partir da necessidade de medir terras aparecem os agrimensores egípcios, também conhecidos como “os esticadores de corda”. Segundo Boyer (1996, p.4):

> As afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever... Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terra após cada inundação anual no vale do rio.

Com as cheias anuais o rio Nilo inundava seu delta, apagando as marcas das possessões de terra. Sem as marcações os agricultores e administradores de templos não tinham com exatidão os limites de suas propriedades. Os faraós nomeavam agrimensores cuja tarefa era, entre outras, a de reestabelecer essas fronteiras. Esses agrimensores aprenderam como calcular as áreas desses terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos.

Além de auxiliar nas medidas da terra, a geometria contribuiu nas construções de edifícios egípcios e babilônicos. As concepções de curvas, superfícies e sólidos vieram mais através das observações do seu cotidiano, na dificuldade encontrada nas construções de paredes curvilíneas. Os egípcios descobriram um modo de como calcular a área de um círculo e o comprimento de uma circunferência, um escriba chamado Ahmes assume que a área de uma região circular de diâmetro de 9 unidades é a mesma que a área de um quadrado de lado 8 unidades, sendo essa uma afirmação bastante precisa da história referente a figuras curvilíneas.(BOYER, 1996)

Mas foi com Tales de Mileto, na Grécia, por volta de 500 a.C. que surgem as tentativas de se deduzir fatos geométricos. Dá-se continuidade a esse trabalho de sistematização da geometria nos séculos posteriores pelos pitagóricos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo e morava próximo à cidade de Mileto, onde vivia Tales. Do pouco que se sabe sobre a vida de Pitágoras seu maior legado foi a formação da Escola Pitagórica, um centro de estudos de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, com contribuições nos estudos de propriedades geométricas.

O marco culminante do estudo da Geometria se deu a partir da obra “Os Elementos” de Euclides, a 300 a.C., publicado em treze livros.

> Parece que este trabalho notável imediata e completamente superou todos os *Elementos* precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores. Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. (EVES, p.167, 2011)

Surge assim a Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides.

Provavelmente Euclides faz uma compilação muito bem sucedida de trabalhos de mestres anteriores, organizando-os de modo sistemático a partir de princípios e definições demonstrados por via dedutiva.

1.3 As construções geométricas no ensino brasileiro

A prática docente dessa professora permite afirmar que o ensino de Geometria no Brasil é pouco explorado, tanto na rede pública como na rede privada. Fazendo uma breve investigação em material publicado por Pavanello (1989), Pereira (2001) e Arbach (2002) sobre as causas desse abandono pude constatar que de um modo geral, essas causas são de ordem política, problemas de formação de professores, omissão de tópicos em livros didáticos entre outras. Faremos um breve relato sobre o assunto.

Na década de 70, com o Movimento da Matemática Moderna, o ensino da Geometria foi relegado a um segundo plano, a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional 5692/71 prevê mudanças no ensino das construções geométricas, separando-o da Matemática e tornando-o disciplina optativa de Desenho Geométrico, o que levou ao seu desaparecimento em diversas escolas. Foi na publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais , em 1998, que se percebe a preocupação de retomar o ensino das construções geométricas dentro da disciplina de Matemática.

Encontramos nos livros didáticos o ensino da geometria reduzido a cálculos algébricos entre elementos da figura. Raramente eles utilizam da construção geométrica para apresentar justificativas e demonstrações no conteúdo da geometria. Sem falar do fato que esses conteúdos se apresentam geralmente nos capítulos finais e os professores alegarem a falta de tempo e/ou habilidade em se tratar do assunto.

Essa falta de habilidade pode ser percebida nas escolas na relação com os colegas docentes, poucos se utilizam de construções geométricas em sala de aula, e quando um desses docentes o faz, pode constatar a grande dificuldade de manuseio dos instrumentos de medição por parte desses alunos.

São esses os fatos que justificam esse trabalho, acredito que as construções geométricas representam graficamente o conteúdo geométrico estudado, permitindo ao aluno a construção do conhecimento, levantando suas próprias conjecturas e tentando validar seus resultados através de demonstrações.

Capítulo 2

A Sequência Didática

2.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentarei a descrição da sequência didática, analisando a importância dessa situação de aprendizagem para o aluno, tornando-o responsável por sua aprendizagem.

Com o intuito de iniciar com os alunos a investigação de objetos geométricos e o pensamento dedutivo, essa sequência apresenta-se na forma de geometria um pouco mais formal que a apresentada nos livros didáticos, se dando entre axiomas e teoremas a fim de promover todo o embasamento teórico necessário para a introdução dos conceitos de pontos notáveis em um triângulo, em especial o circuncentro.

A sequência será apresentada por partes, de acordo com o tempo de aula estimado, onde os comentários sobre as intenções didáticas serão apresentados no decorrer de cada parte.

2.2 Descrição das atividades

As atividades foram elaboradas para que os alunos se organizem em duplas, a fim de haver uma troca de saberes entre eles. Os materiais utilizados são somente lápis e borracha, com o apoio de computadores no laboratório de informática possuindo o software de geometria dinâmica Geogebra devidamente instalado, ou ainda o acesso a internet para o download do mesmo.

Parte 1: tempo estimado 1 hora-aula.

Apresenta-se as noções primitivas como ponto, reta e plano, bem como suas representações gráficas. As relações de incidência, os axiomas de incidência e as posições relativas de retas, em seguida apresenta-se a primeira pergunta:

LIÇÃO 1: O que acontece se duas retas r e s possuem dois pontos distintos A e B em comum?

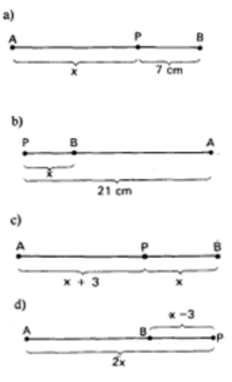
Espera-se que o aluno responda que as retas são coincidentes.

Apresento as relações de ordem, os axiomas de ordem e algumas definições sobre segmento de reta, semirreta, semiplano, medida de um segmento, congruência de segmentos e ponto médio de um segmento. A atividade abaixo é aplicada.

Folha de Atividade 1

.

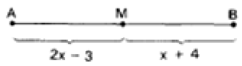
1) Se o segmento AB mede 17cm, determine o valor de x nos casos:



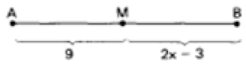
Nesse exercício 1 os alunos irão encontrar as medidas entre os segmentos. No exercício 2 aplicações sobre ponto médio de um segmento e no exercício 3 verificamos se o aluno compreendeu o conceito de segmento de reta.

2) Determine o valor de x, sabendo que M é ponto médio de AB.

a)



b)



3) Observe a figura e responda:

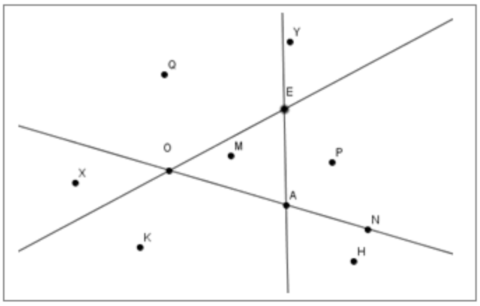
a) Quantos segmentos existem na reta r, com extremos em cada par de pontos formado a partir dos quatro pontos A, B, C e D da reta?

Parte 2: tempo estimado: 2 aulas

A definição de ângulo, bem como sua classificação quanto suas medidas, nessa parte apresentadas, permitem que possamos inserir o conceito de congruência de ângulos, de retas perpendiculares, bissetrizes e mediatrizes. Os conceitos de circunferência e círculos também são apresentados. No primeiro exercício da Folha de Atividade 2 verificamos se o aluno compreendeu as relações de incidência e ordem e interior de ângulo.

Folha de Atividade 2

1) Baseado na representação gráfica, responda:



a) O ponto P é interior ao ângulo $E\hat{O}A$?

b) O ponto H é interior ao ângulo $O\hat{A}E$?

c) Se $r = \overline{OA}$, $s = \overline{OE}$ e $t = \overline{AE}$, dentre os pontos A, O, E, P, Q, H, K, X, Y, M e N,

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$**?**

Quais não estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$?

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{tP}$?

Quais estão no interior de ângulo $O\hat{A}E$?

Quais estão no interior dos dois ângulos $A\hat{O}E$ e $O\hat{A}E$?

Quais estão na reta t?

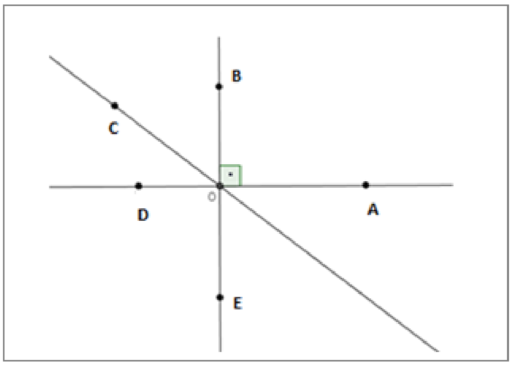
Quais não estão na reta t?

d) Pinte ou hachure a região formada por todos os pontos que são interiores ao ângulo $O\hat{E}A$ mas não são interiores ao ângulo $A\hat{O}E$.

e) Determine a medida do ângulo $O\hat{A}N$ sem usar o transferidor.

No exercício 2, os alunos através da observação irão responder sobre medidas de ângulos, sem a utilização do transferidor.

2) Considere a representação gráfica.



Se o ângulo AÔB é um ângulo reto, responda:

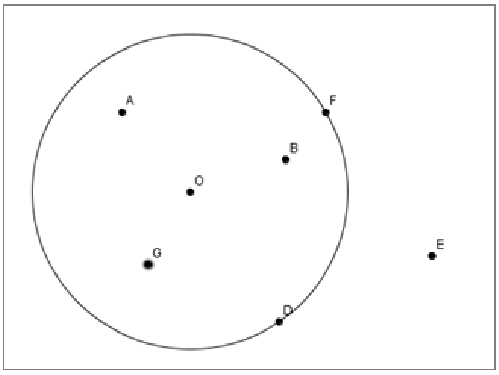
a) Qual a medida dos ângulos BÔD, DÔE, EÔA e DÔA?

b) O ângulo CÔA é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

c) O ângulo CÔD é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

Reconhecer e identificar as diferenças entre círculos e circunferências, assim como as relações entre pontos interiores, exteriores e o raio da circunferência se fará presente no exercício 3.

3) Considere a circunferência C de centro O e raio r = 3 representada graficamente abaixo.



a) Dentre os pontos A, B, D, E, F, G e O quais são interiores à circunferência?

b) Qual a medida dos segmentos OF e OD?

c) Podemos afirmar que m(OE) = 2? Justifique sem usar régua.

d) Podemos afirmar que m(OB) < 3? Justifique sem usar régua.

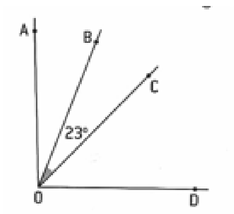
Parte 3: tempo estimado: 2 aulas

Aqui apresento os principais comandos do software geogebra e permito na atividade 3 que explorem os recursos do programa, seguido de dois exercícios sobre bissetrizes.

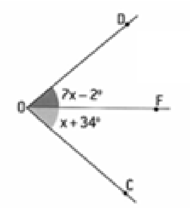
Folha de Atividade 3

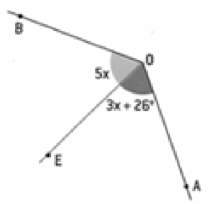
1) Explore na barra de ferramentas os recursos que o programa oferece em traçar, pontos, retas, semirretas, segmento de retas, ponto médio, mediatriz de um segmento, ângulo, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento entre outros.

2) Na figura a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$ e a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}D$. Qual é a medida do ângulo $B\hat{O}D$?



3) As semirretas $\overrightarrow{OF}$ e $\overrightarrow{OE}$ são bissetrizes dos ângulos indicados. Efetue os cálculos e obtenha a medida dos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$.





Neste momento apresento a figura geométrica triângulo, assim como seus elementos, ensino a construir um triângulo de medidas fixas através

do software geogebra, aplico na Folha de Atividade 4 uma sequência de construções que podem resultar ou não em triângulos, conduzindo o aluno a duvidar se dados quaisquer três pontos no plano é possível construir um triângulo, tendo esses pontos como vértices.

Folha de Atividade 4

1) Construa através do Geogebra, vários triângulos de acordo com as medidas indicadas:

T1: lados medindo 3, 3 e 3. Salve essa atividade como < T1seu nome >

T2: lados medindo 3, 4 e 4 cm. Salve essa atividade como < T2seu nome >

T3: lados medindo 3, 4 e 5 cm. Salve essa atividade como < T3seu nome >

T4: lados medindo 1, 2 e 3 cm. Salve essa atividade como < T4seu nome >

T5: lados medindo 3, 7 e 5 cm. Salve essa atividade como < T5seu nome >

T6: lados medindo 6, 3 e 3 cm. Salve essa atividade como < T6seu nome >

Agora responda:

2) Provavelmente você conseguiu construir alguns dos triângulos propostos e não conseguiu construir alguns outros. Quais foram os triângulos que você não conseguiu construir?

3) Você saberia dizer por que não foi possível construir algum dos triângulos propostos?

4) Pela definição de triângulo e pela atividade 1, três pontos A, B e C qualquer no plano α determinam sempre um triângulo com vértices A, B e C?

Parte 4: tempo estimado: 2 aulas

Na Folha de Atividade 5, permitimos através de construções previamente escolhidas, que o aluno possa analisar, investigar e conjecturar sobre a condição de existência de um triângulo. Cabendo ao professor validar esse processo.

Folha de Atividade 5

1) Construa os seguintes triângulos:
 a) Lados medindo 3 cm, 5 cm e 5 cm.
 b) Lados medindo 5 cm, 6 cm e 5 cm.
 c) Lados medindo 8 cm, 5 cm e 4 cm.
 d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

2) Construa os seguintes triângulos:
 a) Lados medindo 8 cm, 4 cm e 4 cm.
 b) Lados medindo 6 cm, 3 cm e 3 cm.
 c) Lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm.
 d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

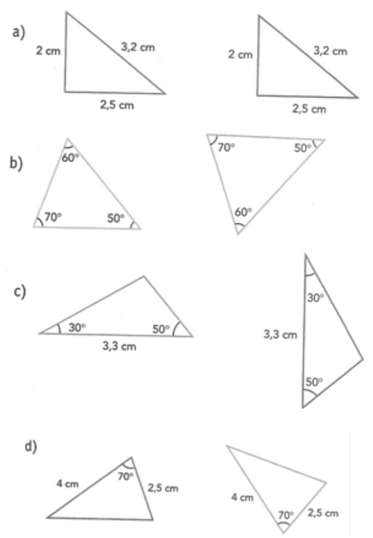
3) Construa os seguintes triângulos:
 a) Lados medindo 3 cm, 2 cm e 7 cm.
 b) Lados medindo 4 cm, 3 cm e 8 cm.
 c) Lados medindo 4 cm, 4 cm e 9 cm.
 d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

4) Vamos formular uma condição para garantir a existência de um triângulo.

Ainda na parte 4 explico congruência de triângulos, e apresento os quatro casos de congruência entre triângulos, os casos LAL, ALA, LLL e LAA$_{O}$. Na Folha de Atividade 6, dois exercícios de compreensão dos casos de congruência serão aplicados.

Folha de Atividade 6

1) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes e indique em caso positivo o caso que garante a congruência



e)

Parte 5: tempo estimado: 2 aulas

Apresento o conceito de mediatriz de um triângulo. Separo a sala em 4 grupos, onde cada um desses grupos irão construir um triângulo retângulo escaleno, o segundo grupo um triângulo isósceles, o terceiro um triângulo equilátero e o quarto um triângulo obtusângulo escaleno.

Cada dupla desses grupos irá salvar 4 arquivos iguais, e no exercício 1 da Folha de Atividade 7 irá construir as mediatrizes desses triângulos dois a dois, e por último as três mediatrizes juntas. Despertando no aluno a percepção de que eles se encontram em um mesmo ponto.

Folha de Atividade 7

1) No arquivo C1 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e AC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto D.

No arquivo C2 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e BC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto E.

No arquivo C3 trace as mediatrizes relativas aos lados AC e BC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto F.

No arquivo C4 trace as mediatrizes relativas aos lados AB, AC e BC e marque os pontos D, E e F.

Agora responda:

a) O que você pode dizer em relação aos pontos D, E e F?

No exercício 2, queremos que o aluno perceba que todo ponto equidistante das extremidades pertence à mediatriz do segmento. E no exercício 3 que todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento. A prova desses dois teoremas será apresentada depois do desenvolvimento dessa atividade.

2) Desenhar um segmento AB.
Desenhe no plano vários pontos que equidistam de A e de B.
Existe um tal ponto em AB?
Eles são colineares? Se sim, qual o ângulo que essa reta forma com a reta $\overline{AB}$?
O que podemos concluir sobre esses pontos?

3) Desenhar um segmento AB.
Desenhar a mediatriz **r** de AB.
Marque o ponto C sobre r e meça a distância desse ponto em relação à A e à B e compare esses valores. Faça o mesmo para diversos pontos sobre r.
O que você pode perceber? O que podemos concluir?

Voltamos ao quarto arquivo, onde as três mediatrizes foram construídas, e apresento aos alunos o Teorema 6: *As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo*. Faz-se a prova e concluímos que esse ponto de encontro é chamado **circuncentro** do triângulo. Espera-se que o aluno perceba o seguinte:

1) O circuncentro de um triângulo equidista dos vértices desse triângulo
2) O circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

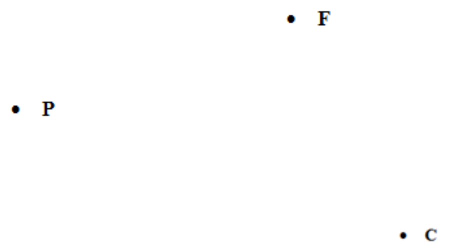
E permitimos que os alunos confiram essas propriedades no arquivo 4. Finalizamos a sequência com a Folha de Atividade 8, onde o aluno concretiza a construção do circuncentro e utiliza esse conhecimento para a resolução das exercícios 1 e 2 dessa atividade.

Folha de Atividade 8

1) É sempre possível traçar uma circunferência que passa por três pontos não alinhados?

2) Em uma cidade, será construído o prédio de uma agência bancária. Para a escolha do local, pensou-se no seguinte: ele deve ficar à mesma distância da prefeitura (**P**), do fórum (**F**) e do centro de saúde (**C**).

Observe a figura abaixo, converse com seus colegas e tentem responder: onde deve ser construída a agência bancária (**B**)?



Capítulo 3

Apresentação da sequência didática

3.1 Introdução

Nesse capítulo, descrevemos a escola, a turma e as condições de trabalho, onde será aplicada a sequência. Em seguida, descreveremos a aplicação das atividades, analisando as respostas, verificando os erros, as dificuldades encontradas, tanto por parte do aluno como por parte da professora, verificando as expectativas esperadas e se os objetivos foram atingidos.

3.2 A Escola

Esta sequência foi aplicada no 8ºano do EF da escola Futura de Educação Básica, na cidade de Campinas, SP. A Escola Futura é uma escola pequena e de estrutura familiar, com cerca de 250 alunos, nos quais 28 estão matriculados na turma do 8ºano A sala de informática é pequena, e por esse motivo o trabalho foi feito em duplas.

Acompanho essa turma desde o 6ºano, quando passaram do EFI, para o EFII. Uma turma de alunos falantes e agitados, onde a indisciplina sempre gerou desconforto entre os professores que junto a direção promoviam reuniões extraordinárias com os pais, a fim de auxiliar a escola no comportamento desses alunos. Por outro lado, é uma sala com potencial de conhecimento, desde que os alunos recebam estímulos dos professores. Nesse aspecto fazem-se necessárias aulas mais dinâmicas, que prendam mais a atenção deles, fazendo despertar o interesse no assunto abordado.

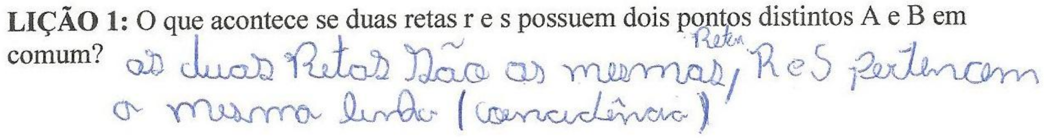
Minha experiência docente identifica uma dificuldade muito grande por parte dos alunos em manipular instrumentos como réguas, compasso, transferidor e esquadros. Em vista dessa dificuldade e somando o fascínio dos alunos em relação ao uso do computador, elaborei uma sequência didática para ensinar a construção de pontos notáveis, especificamente relatado neste trabalho o Incentro, através do software educacional Geogebra, que foi escolhido por ser de domínio público, podendo ser baixado em qualquer computador.

3.3 Descrições das Atividades

As atividades foram intercaladas entre a sala de aula e a sala de informática, de acordo com as necessidades apresentadas.

Lição 1

Todos os alunos compreenderam a pergunta, não tiveram dificuldades em responder que as retas são coincidentes.


LIÇÃO 1: O que acontece se duas retas r e s possuem dois pontos distintos A e B em comum? as duas Retas São as mesmas, Reta R e S pertencem a mesma linha (coincidência)

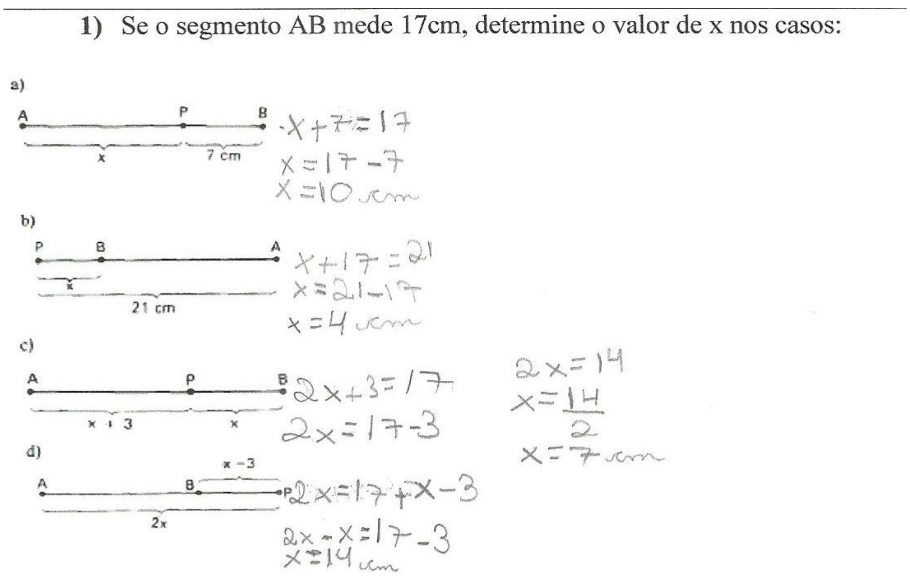
Folha de atividade 1

Ao iniciar essa atividade os alunos argumentaram que não saberiam responder, pois a professora não tinha passado nenhum exemplo desse. Aproveitando a oportunidade a cada dupla que se queixava, voltava na folha de teoria e juntos relíamos os conceitos sobre congruência de segmentos e ponto médio de segmento. Passado umas três duplas um certo aluno diz o seguinte: “_ Ah! Estou entendendo professora, você está nos obrigando a pensar na resposta.”

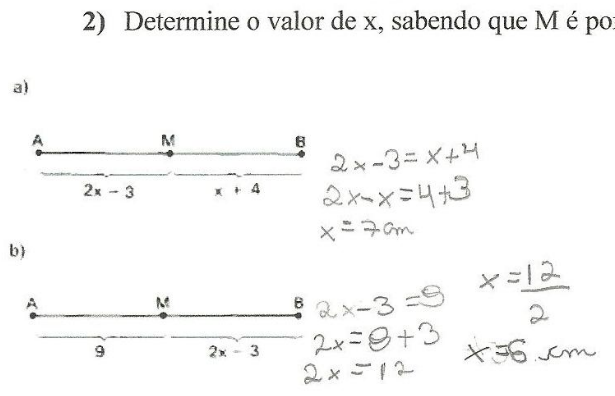
Fiquei muito satisfeita com o comentário, pois era exatamente essa a proposta da sequência, ou seja, “obrigá-los” a pensar, investigar e conjecturar.

De maneira geral o objetivo foi atingido, claro que apareceram erros, mas a maioria respondeu o esperado.

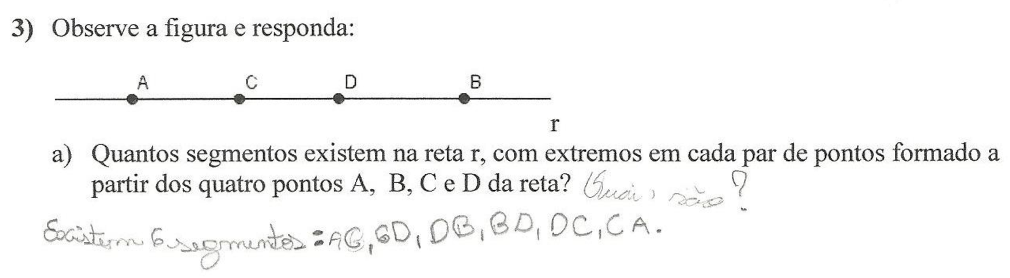
Para o exercício 1, apenas 1 dupla não conseguiu a resolução correta, uma porcentagem de 7% das duplas.



Já no exercício 2, no item b, tivemos 57% de acertos, o problema aqui se deu na resolução de equação, onde eles esqueceram de aplicar a operação inversa na segunda parte da igualdade e ao invés de somar 3, subtraíram, resultando erroneamente no número 3.



Houve duas respostas diferentes no exercício 3, cerca de 71% dos alunos responderam corretamente, enquanto que 4 duplas responderam que existiam 4 segmentos de reta, eles não identificaram os segmentos de reta CB e AD.

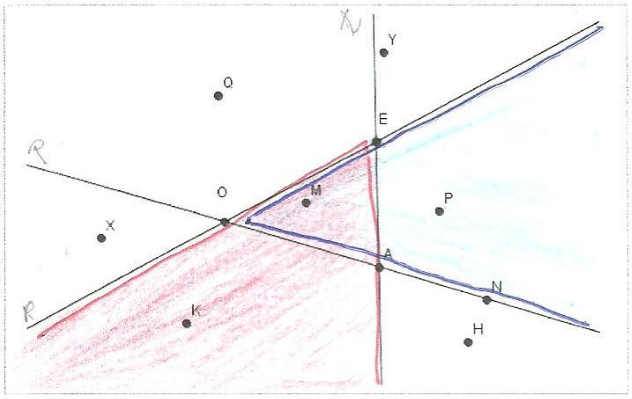


Foi interessante nessa primeira atividade notar o envolvimento dos alunos, todos querendo resolver, preocupados em estar acertando ou não.

Folha de atividade 2

Nesta atividade minha intervenção foi apenas a de pedir que relessem a teoria, os alunos entenderam que não partiria de mim as orientações para as respostas, mais uma vez fiquei satisfeita com os resultados, durante a aula a preocupação de estarem respondendo corretamente estava presente na maioria dos grupos. Cerca de 71% das duplas responderam corretamente o exercício 1.

1) Baseado na representação gráfica, responda:



a) O ponto P é interior ao ângulo EÔA? Sim

b) O ponto H é interior ao ângulo OÂE? não

c) Se r = $\overline{OA}$, s = $\overline{OE}$ e t = $\overline{AE}$, dentre os pontos A, O, E, P, Q, H, K, X, Y, M e N,

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$?

Os Pontos O, A, E, P, Q, Y, M e N

Quais não estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$?

Não os pontos X, K e H

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{tP}$?

Não Eles E, P, A, N e H

Quais estão no interior de ângulo OÂE?

M

Nessa última pergunta 100% das duplas não incluíram o ponto Q. Mas também não o incluíram na resposta seguinte, que excluía todos os pontos da resposta anterior. Esse erro persistiu em todos itens que relacionavam o interior de um ângulo, depois de corrigida as folhas, expliquei novamente o conceito, esclarecendo os equívocos.

Quais estão no interior de ângulo OÂE?
M
Quais não estão no interior de ângulo OÂE?
São eles, X, K, H, N, P, Y
Quais estão no interior dos dois ângulos AÔE e OÂE?
Para o ângulo AĜE = m , Para o angulo OÂE = q
Quais estão na reta t?

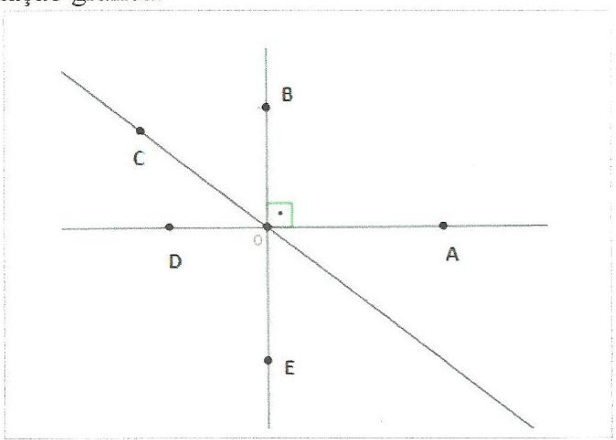
Quais estão na reta t? A, E
Quais não estão na reta t? Y, P, N, H, K, M, Q, X, Y

d) Pinte ou hachure a região formada por todos os pontos que são interiores ao ângulo OÊA mas não são interiores ao ângulo AÔE.
Região vermelha
e) Determine a medida do ângulo OÂN sem usar o transferidor.
Ângulo raso 180°

Acima, quando a dupla responde a região vermelha, responde corretamente, mas nesse item a porcentagem de acertos foi de 57% .

Enquanto que no ítem E 100% das duplas acertaram

2) Considere a representação gráfica.



Se o ângulo AÔB é um ângulo reto, responda:

a) Qual a medida dos ângulos BÔD, DÔE, EÔA e DÔA?

BÔD = 90°
DÔE = 90°
EÔA = 90°
DÔA = 180°

b) O ângulo CÔA é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

É obtuso. Porque tem medida maior de 90°.

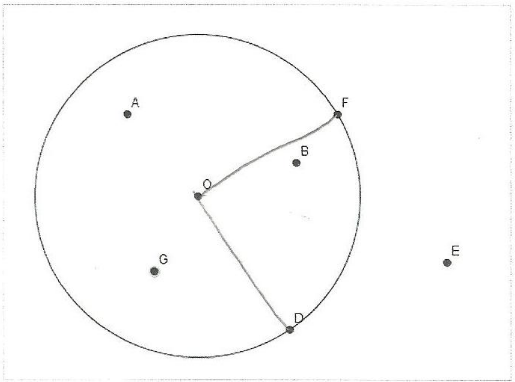
c) O ângulo CÔD é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

Agudo. Porque ele tem medida menor de 90°.

O objetivo desse exercício foi totalmente atingido, com 100% de acertos.

No exercício 3 teve muita reclamação, os alunos me diziam que faltavam dados para responder as questões, muitos utilizaram réguas para medir as distâncias entre pontos, minha intervenção novamente foi de voltar para a teoria e estudar os conceitos. O mesmo aluno que comentou que eu estava “obrigando-os” a pensar, fica contente e reafirma sua frase. Percebi uma satisfação da parte deles quando entendiam sobre as medidas do raio, sem usar a régua, mas na escrita poucos se referiram ao raio, a grande maioria erroneamente chamavam-no de reta.

3) Considere a circunferência C de centro O e raio r = 3 representada graficamente abaixo.



a) Dentre os pontos A, B, D, E, F, G e O quais são interiores à circunferência?

A, O, B, G e F e D

b) Qual a medida dos segmentos OF e OD?

OF = 3

OD = 3

OF ≡ OD

c) Podemos afirmar que m(OE) = 2? Justifique sem usar régua.

Não, pois se ao ponto O ao fim da circunferência é de raio 3, ao passar dela se tornar maior, no caso passando de 2.

d) Podemos afirmar que m(OB) < 3? Justifique sem usar régua.

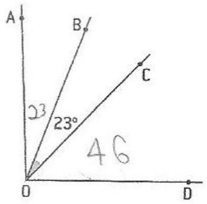
Sim, pois seria 3 se o ponto B estivesse em cima da circunferência.

Folha de Atividade 3

O primeiro exercício dessa atividade era de exploração do software Geogebra. Os alunos ficaram entusiasmados com as ferramentas, muitos foram inventando formas e colorindo-as, deixei que todos experimentassem as ferramentas do programa, em seguida passaram para os exercícios 2 e 3 que verificavam a propriedade da bissetriz de um ângulo. Os objetivos aqui foram atingidos plenamente.

1) Explore na barra de ferramentas os recursos que o programa oferece em traçar, pontos, retas, semirretas, segmento de retas, ponto médio, mediatriz de um segmento, ângulo, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento entre outros.

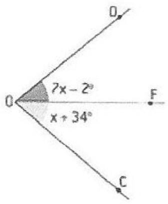
2) Na figura a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC e a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo AÔD. Qual é a medida do ângulo BÔD?



$$\begin{array}{r} 46 \\ +23 \\ \hline 69 \end{array}$$

R: O ângulo é 69

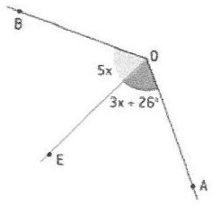
3) As semirretas $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OF}$ são bissetrizes dos ângulos indicados. Efetue os cálculos e obtenha a medida doa ângulos AÔB e CÔD.



$7x - 2 = x + 34$
$7x - x = 34 + 2$
$6x = 36$
$x = \frac{36}{6}$
$x = 6$

$$\begin{array}{r} 40 \\ +40 \\ \hline 80 \end{array}$$

R: ângulo de CÔD é 80°



$5x = 3x + 26$
$5x - 3x = 26$
$2x = 26$
$x = \frac{26}{2}$
$x = 13$

R: ângulo de AÔB é 130°

Folha de Atividade 4

Um fato interessante ocorreu no primeiro exercício dessa atividade, na construção dos triângulos 4 e 6, eles verificaram que não era possível, mas a inquietação em relação ao acerto aumentou, um olhava a construção do outro para ver se também não seria possível a construção do triângulo. Todos compreenderam completamente o objetivo desse exercício, e consequentemente, 100% das duplas acertaram os exercícios 1 e 2.

1) Construa através do Geogebra, vários triângulos de acordo com as medidas indicadas:

T1: lados medindo 3, 3 e 3. Salve essa atividade como < T1seu nome >

T2: lados medindo 3, 4 e 4 cm. Salve essa atividade como < T2seu nome >

T3: lados medindo 3, 4 e 5 cm. Salve essa atividade como < T3seu nome >

T4: lados medindo 1, 2 e 3 cm. Salve essa atividade como < T4seu nome >

T5: lados medindo 3, 7 e 5 cm. Salve essa atividade como < T5seu nome >

T6: lados medindo 6, 3 e 3 cm. Salve essa atividade como < T6seu nome >

Agora responda:

2) Provavelmente você conseguiu construir alguns dos triângulos propostos e não conseguiu construir alguns outros. Quais foram os triângulos que você não conseguiu construir?

T4 e T6

Já nas próximas três questões as respostas foram divergentes, cerca de 43% das duplas não acertaram essas questões, alguns deles simplesmente responderam que não sabiam, ou que faltavam dados. Com essa resposta, levei-os a sala de multimídia e fui construindo cada um dos triângulos da atividade 1, para que todos pudessem observar, assim a compreensão das 3 últimas questões se fizeram com mais naturalidade e os objetivos foram atingidos.

3) Você saberia dizer por que não foi possível construir algum dos triângulos propostos?

Porque elas são coincidentes

4) Pela definição de triângulo e pela atividade 1, três pontos A, B e C qualquer no plano α determinam sempre um triângulo com vértices A, B e C?

ABC podem ser pontos colineares

Folha de Atividade 5

Com a intervenção feita na atividade anterior os objetivos dessa atividade foram atingidos por todas as duplas, após perceberem as condições que somente os triângulos do exercício 1 poderiam ser construídos puderam compreender analisando a soma dos lados dois a dois, quais seriam as condições de existência de um triângulo.

1) Construa os seguintes triângulos:
a) Lados medindo 3 cm, 5 cm e 5 cm.
b) Lados medindo 5 cm, 6 cm e 5 cm.
c) Lados medindo 8 cm, 5 cm e 4 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

a.	b.	c.
8>5	11>5	13>4
8>5	11>5	9>8
10>3	10>6	12>5

2) Construa os seguintes triângulos:
a) Lados medindo 8 cm, 4 cm e 4 cm.
b) Lados medindo 6 cm, 3 cm e 3 cm.
c) Lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

a.	b.	c.
12>4	9>3	11>3
12>4	9>3	10>4
8=8	6=6	7=7

3) Construa os seguintes triângulos:
a) Lados medindo 3 cm, 2 cm e 7 cm.
b) Lados medindo 4 cm, 3 cm e 8 cm.
c) Lados medindo 4 cm, 4 cm e 9 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

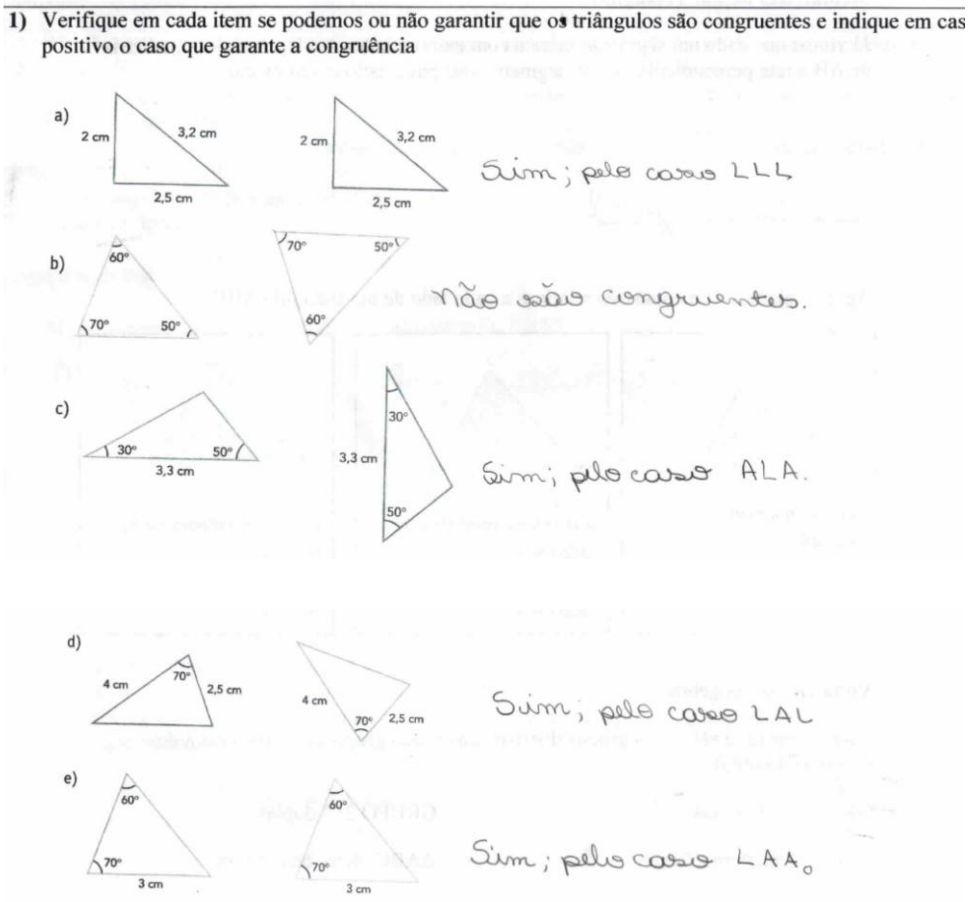
a.	b.	c.
5<7	7<8	8<9
10>2	11>4	13>4
9>7	12>3	8<9

4) Vamos formular uma condição para garantir a existência de um triângulo.

Que a soma de lados 2 a 2 seja maior que o terceiro.

Folha de Atividade 6

As respostas dessa atividade foram todas diferentes, encontrei uma atividade 100% correta, de maneira geral, cada dupla errou um item, porém nenhum item onde todos erraram.


1) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes e indique em cas positivo o caso que garante a congruência

a) Sim; pelo caso LLL

b) Não são congruentes.

c) Sim; pelo caso ALA.

d) Sim; pelo caso LAL

e) Sim; pelo caso LAA$_o$

Folha de Atividade 7

Os objetivos dessa atividade foram plenamente atingidos. No exercício 1, facilmente verificaram que o ponto era o mesmo, mas foi com as observações dos exercícios 2 e 3 que pudemos demonstrar os teoremas 4 e 5 da folha de teoria.

1) No arquivo C1 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e AC. E marque o encontro dessas mediatrizes como ponto D.

No arquivo C2 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e BC. E marque o encontro dessas mediatrizes como ponto E.

No arquivo C3 trace as mediatrizes relativas aos lados AC e BC. E marque o encontro dessas mediatrizes como ponto F.

No arquivo C4 trace as mediatrizes relativas aos lados AB, AC e BC e marque os pontos D, E e F, formando um triângulo.

Agora responda:

a) O que você pode dizer em relação as pontos D, E e F?

R. Pois as mediatriz se encontraram no mesmo ponto.

2) Desenhar um segmento AB.
Desenhe vários pontos que equidistam de A e de B.
Existe um tal ponto em AB?
Eles são colineares? Se sim, qual o ângulo que essa reta forma com a reta $\overline{AB}$?
O que podemos concluir sobre esses pontos?

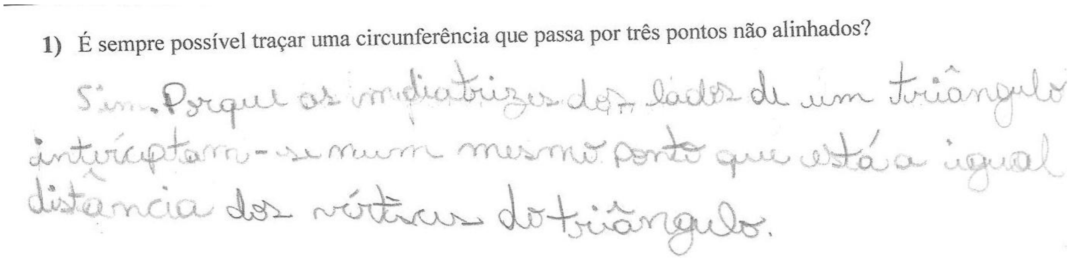
Sim, ele é um ponto médio
Eles são colineares, o angulo mede 90°
Podemos concluir que ele é um angulo reto, e são colineares.

3) Desenhar um segmento AB.
Desenhar a mediatriz **r** de AB.
Marque o ponto C sobre r e meça a distância desse ponto em relação à A e à B e compare esses valores. Faça o mesmo para diversos pontos sobre r.
O que você pode perceber? O que podemos concluir?

Podemos perceber que os pontos são equidistan-tes aos pontos A e B.

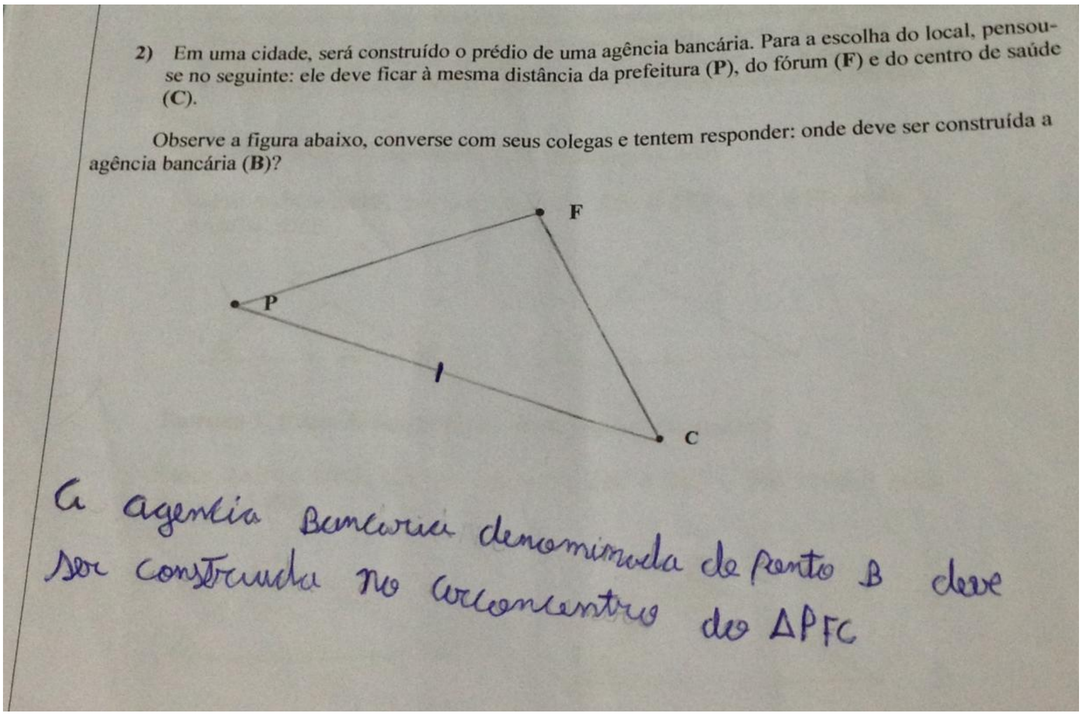
Folha de Atividade 8

Cerca de 71% das duplas acertaram com muita facilidade o exercício 1, o restante precisou de uma intervenção da professora. Curiosamente no exercício 2 a maioria das duplas desenharam um triângulo com vértices nos pontos P, F e C, alguns arriscaram a construção do circuncentro com o auxílio do compasso. A dupla que eu mostro a resposta já indicou a posição do circuncentro, ao ser indagada do motivo de colocar a agência naquele lugar, eles responderam que aparentemente o triângulo formado era retângulo, logo o circuncentro só poderia se localizar no ponto médio do lado PC desse triângulo.



1) É sempre possível traçar uma circunferência que passa por três pontos não alinhados?

Sim. Porque as mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.



2) Em uma cidade, será construído o prédio de uma agência bancária. Para a escolha do local, pensou-se no seguinte: ele deve ficar à mesma distância da prefeitura (**P**), do fórum (**F**) e do centro de saúde (**C**).

Observe a figura abaixo, converse com seus colegas e tentem responder: onde deve ser construída a agência bancária (**B**)?

A agencia Bancaria denominada de ponto B deve ser construida no circuncentro do ΔPFC

Capítulo 4

4.1 Análise a posteriori

Acostumados com aulas do estilo lousa e giz, os alunos inicialmente não sabiam como se comportar diante das atividades. Após a leitura da primeira parte da sequência, na aplicação da Folha de Atividade 1, os alunos esperavam por algum exemplo a ser seguido, percebendo que isso não aconteceria começaram a entender a proposta, e se preocuparam em responder corretamente. Apenas uma pergunta a acrescentar no item a da terceira questão ao perguntar quantos segmentos existiam na reta, com extremidades a partir dos pontos A, B, C e D, faltou perguntar quais seriam esses segmentos, questão levantada pelos próprios alunos.

Como já relatei anteriormente os alunos dessa sala são extremamente agitados, mas ao se depararem com uma atividade que envolvesse o computador ficaram todos curiosos em saber como seria essa atividade, em contato com o Geogebra a concentração deles na atividade chamou-me a atenção, a grande maioria das duplas faziam as atividades, preocupados com o tempo, e caso o sinal da troca de aula batesse, eles perguntaram se poderiam continuar na próxima aula.

A sequência foi preparada para ser dada em 9 aulas, porém esse tempo não foi o suficiente, ultrapassamos 3 aulas para a conclusão da sequência, e talvez por ela ser tão longa, acabou desprendendo a atenção de alguns alunos. A sequência também foi interrompida pelo calendário escolar, onde paramos por duas aulas para uma revisão de avaliação trimestral marcada pela escola e em seguida com mais duas aulas para a aplicação dessa avaliação.

Talvez todo esse conjunto provocou um desinteresse por parte dos alunos, onde retomamos a partir da Folha de Atividade 6. Nessa atividade talvez por essa dispersão, nenhuma dupla acertou todos os exercícios completamente, no entanto, nosso objetivo maior que é a determinação do circuncentro se faria a partir da Folha de Atividade 7. Logo antes que ela se iniciasse, chamei a atenção dos alunos pedindo que se concentrassem novamente na sequência. Os alunos colaboraram e realizaram as atividades seguintes mais concentrados, compreendendo com mais facilidade o objetivo proposto.

Essa sequência pode ter em sua continuidade a construção dos outros pontos notáveis de um triângulo, como o incentro, o baricentro e o ortocentro.

4.2 Conclusões

A sequência didática apresentada mudou a forma de ensinar dessa professora, ao detalhar mais os conteúdos matemáticos, colocando-os de maneira mais formal do que a encontrada nos livros didáticos, percebi uma melhora na escrita matemática produzida pelos alunos. O envolvimento deles foi maior e a preocupação em como escrever se fez presente em quase todos os momentos, fato pouco notado anteriormente a aplicação dessa sequência.

A sala me surpreendeu com as respostas das folhas de atividades 7 e 8, onde o progresso na escrita foi notório, não posso negar que encontrei erros de ortografia, mas de maneira geral a postura desses alunos diante da escrita mudou, antes da aplicação dessa sequência, costumava encontrar respostas curtas e sem desenvolvimento do raciocínio, a partir dela pude constatar a evolução dessa escrita.

Além da melhora na escrita, o uso da tecnologia de um software como o Geogebra despertou o interesse inclusive dos alunos menos participativos, promovendo um envolvimento ativo por parte de todos os alunos no processo de ensino aprendizagem.

De maneira geral, os objetivos foram atingidos, os alunos investigaram, participaram da produção dos conhecimentos geométricos pretendidos pela sequência.

Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. R. Engenharia didática: evolução e diversidade Didactic engineering: evolution and diversity. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1883>. Acesso em: dez. 2012.

ARBACH, N; **O Ensino da Geometria Plana: o saber do aluno e o saber escolar.** Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002. Disponível em < <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/nelson_arbach.pdf>. Acesso em: maio 2013.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2 ed. tradução: Gomide, E. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação, **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – matemática, 1998 <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em fev 2013.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: referencial para a ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23., p.87-119, 2005. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=6>. Acesso em: dez. 2012.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática.** 8º ano. Livro Didático. 3 ed. São Paulo: Ática, 2009

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar: geometria plana.** 7 ed. São Paulo: Atual. 1993.vol 9.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 5 ed. tradução: Domingues, H. H. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

FANTINELLI, A. L. **Engenharia didática:** articulando um material metodológico para o ensino da matemática financeira**.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 9 -25, 2010. Disponível em: < http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31596/000782512.pdf>. Acesso em: março 2013.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS. F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática (MA36).** Universidade Federal do Rio de Janeiro, Universidade Federal de São Carlos e Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2012. p.166. Material Didático PROFMAT.

IEZZI, G; MACHADO, A; DOLCE, O. **Geometria Plana: Conceitos Básicos.** 2 ed. São Paulo: Atual. 2010.

Lei das Diretrizes e Base de 1971 - Lei 5692/71 | Lei no 5.692, de 11 de agosto de 1971< http://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/128525/lei-de-diretrizes-e-base-de-1971-lei-5692-71#>. Acesso em: março de 2013.

LIMA, E. L.; et al. **A matemática do ensino médio.** 6.ed. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, v. 1, 2001.

LIMA, E. L.; et al. **A matemática do ensino médio.** 6.ed. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, v. 2, 2006.

MOISE, E. E.; **Elementary geometry from an advanced standpoint**, second edition, Addison-Wesley Pub. Company, New York, 1974.

NUNES, A. M; DALBERTO, F; MATHIAS, C. V. Conteúdo Digital para o Ensino dos Pontos Notáveis de um Triângulo. SIMPÓSIO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO. Santa Maria, 2010. Resumo as tecnologias de informação e comunicação. Santa Maria, RS Universidade Federal de Santa Maria, 2010. Disponível em: <http://www.unifra.br/eventos/sepe2010/2010/Trabalhos/tecnologica/Completo/5387.pdf>. Acesso em: março 2013.

PAVANELLO, M. R; **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica.** Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1989. Disponível em <

http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000045423&fd=y>. Acesso em: abril 2013.

PEREIRA, M. R. O. **A Geometria Escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino.** Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/maria_regina_pereira.pdf>. Acesso em: maio 2013.

Apêndice 1

O uso das novas tecnologias em sala de aula.

O uso do computador na sala de aula é uma ferramenta que viabiliza simular, praticar ou vivenciar resultados matemáticos. Com esse recurso preparei uma sequência didática a ser realizada no 8ºano do Ensino Fundamental II, com o tempo estimado em 9 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Iniciar com os alunos a investigação de objetos geométricos e o pensamento dedutivo.
- Introduzir os conceitos de pontos notáveis de um triângulo, especificamente neste projeto o circuncentro e estudar suas propriedades.

Parte 1: *tempo estimado: 1 aula*

Em Geometria, as noções primitivas como *ponto*, *reta* e *plano* são adotadas sem definição. Através de nossa experiência cotidiana, mantemos contato com muitos objetos no quais podem ser identificadas abstrações de pontos, partes de retas e partes de planos.

Notação:

a) Com letras:

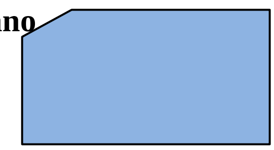
- ✓ Ponto, indicado por letras maiúsculas: A, B, C...
- ✓ Reta, indicada por letras minúsculas: r, s, t...
- ✓ Plano, representado pela letra grega π, fixaremos o plano π e o usaremos livremente, já que nosso objeto de estudo será na Geometria Plana.

b) Representação gráfica:

Ponto

reta

plano



- A

Além das noções primitivas, temos ainda duas relações primitivas, que também não são definidas. São as relações de incidência e de ordem.

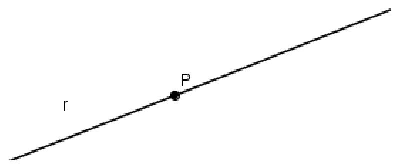
A **relação de incidência** é uma relação entre pontos e retas e que será usada em frases como:

“ O ponto **P** pertence à reta **r**.”

“ A reta **r** contém o ponto **P**.”

“ A reta **r** passa por um ponto P.”

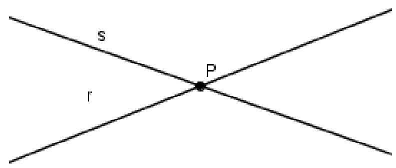
Representação gráfica:



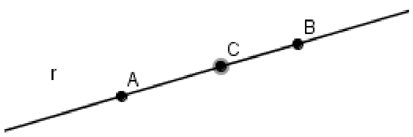
“ A reta **r** cruza a reta **s** no ponto **P**”

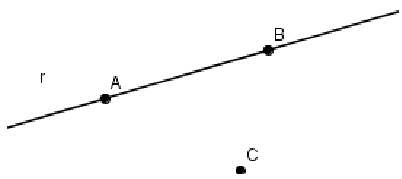
“ O ponto **P** é comum às retas **r** e **s**.”

Representação gráfica:



Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta. Caso contrário, serão chamados de **pontos não colineares**.

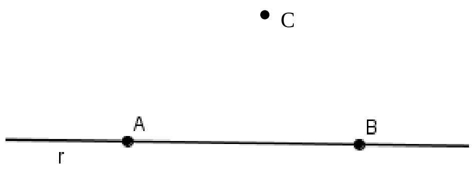




Como dissemos anteriormente, podemos identificar abstrações de pontos, retas e planos observando o universo em que vivemos. Uma observação mais cuidadosa nos permite identificar algumas propriedades e relações simples entre esses entes geométricos. Tais propriedades são assumidas como verdadeiras e são chamadas **Axiomas**. A partir dos axiomas são deduzidas outras propriedades mais complexas e menos evidentes que são chamadas de **Teoremas** ou **Proposições.**

Axiomas :

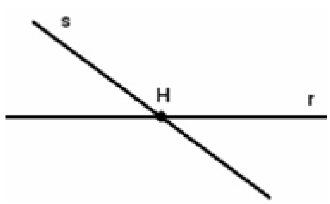
A1: Dada uma reta r qualquer, existem pontos que pertencem à r e existem pontos que não pertencem à r.



A2: Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Notação de reta determinada por dois pontos A e B: $\overline{AB} =$ r.

Retas concorrentes: Dizemos que duas retas são concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum.



Retas Paralelas: Dizemos que duas retas r e s são paralelas se não possuem nenhum ponto em comum

r

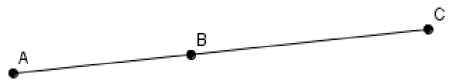
LIÇÃO 1: O que acontece se duas retas r e s possuem dois pontos distintos A e B em comum?

Relação de ordem: A relação de ordem é uma relação entre pontos e que será usada em frases como:

“ O ponto B está entre os pontos A e C.”

Denotaremos simbolicamente por: A*B*C.

A3: Se A*B*C, então A, B e C são três pontos distintos colineares e C*B*A.



A4: Dados três pontos em uma reta então um, e apenas um deles, localiza-se entre os outros dois.

A5: Dados dois pontos A e B, sempre existe um ponto C tal que A*C*B e sempre existe um ponto D tal que A*B*D.

Algumas definições importantes:

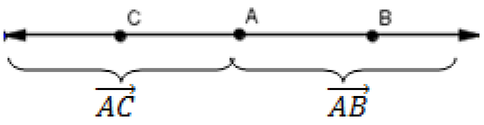
Segmento de reta: Dados dois pontos A e B, definimos o segmento de reta AB, com os **extremos** A e B, como sendo o conjunto formado por A e B e por todos os pontos da reta $\overline{AB}$ que estão entre A e B.

Notação: AB = segmento de reta com extremos A e B

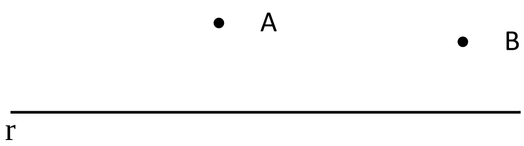
Semirreta: Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta com origem em A e que contém B.

A semirreta de origem em A e que contém B, será denotada por $\overrightarrow{AB}$

Se A está entre C e B, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas semirretas opostas.



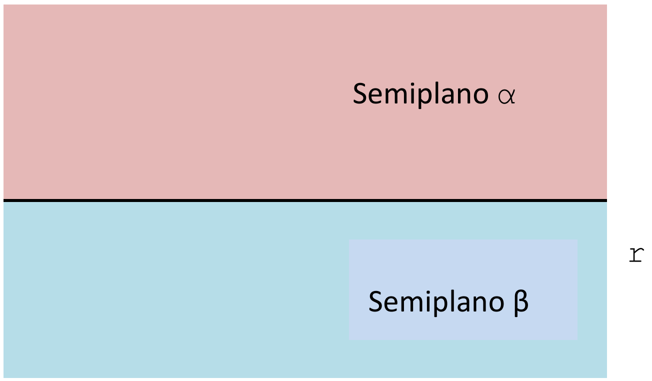
Semiplano: Sejam r uma reta e A um ponto que não pertence a r. O conjunto formado por todos os pontos pertencentes a r e por todos os pontos B tais que A e B se encontram em um mesmo lado da reta é chamado semiplano determinado por r e que contém A.



Notação: Semiplano determinado por r e que contém A $\overrightarrow{rA}$.

Obs: Dois pontos A e B se encontram num mesmo lado da reta r se o segmento AB não corta a reta r. Caso contrário, dizemos que os pontos A e B se encontram em lados opostos da reta r.

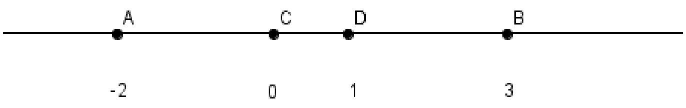
A6: Dada qualquer reta r então existem exatamente dois semiplanos distintos determinados por r, cuja intersecção é o conjunto formado pelos pontos da reta r.



Distância entre dois pontos: A cada par de pontos A e B corresponde um único número maior ou igual a zero, chamado distância entre A e B, sendo que esse número só é zero se os pontos forem coincidentes.

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais, ou seja:

- Cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real,
- Cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e
- A distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.



Na figura foi estabelecido que o número real -2 está correspondendo com o ponto A, o 0 (zero) com o ponto C, ...

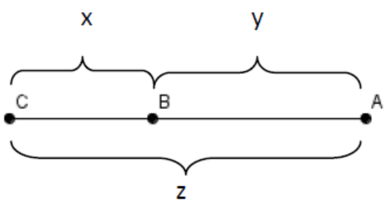
Medida de um segmento: Dado um segmento AB definimos o comprimento ou medida de AB como sendo a distância entre A e B, e denotamos por m(AB).

Congruência de segmentos: Dizemos que dois segmentos AB e CD são congruentes se m(AB) = m (CD).

Notação: AB ≡ CD

Ponto médio: O ponto médio de um segmento AB é o ponto M de AB que divide esse segmento em dois segmentos de mesmo comprimento, ou seja, m(AM) = m(MB).

A7: Se A*B*C então m(AC) = m(AB) + m(BC)



m(AB) = y

m(BC) = x

m(AC) = z

z = x + y

FOLHA DE ATIVIDADE 1

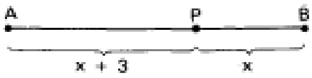
Nome: ____**nº**______ **8ºano**
Nome: ____**nº**______

1) Se o segmento AB mede 17cm, determine o valor de x nos casos:

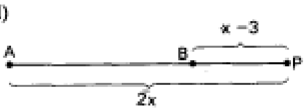
a)

b)

c)

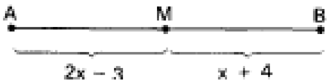


d)



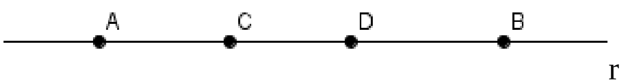
2) Determine o valor de x, sabendo que M é ponto médio de AB.

a)



b)

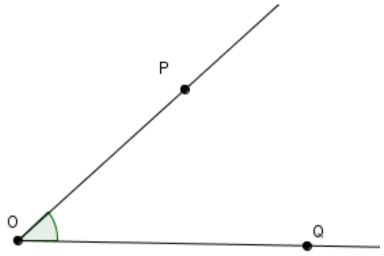
3) Observe a figura e responda:



a) Quantos segmentos existem na reta r, com extremos em cada par de pontos formado a partir dos quatro pontos A, B, C e D da reta?

Parte 2: *tempo estimado 2 aulas*

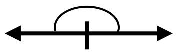
Ângulo: é uma figura geométrica formada pela reunião de duas semirretas de mesma origem. A essas semirretas chamamos de lados do ângulo e a origem de vértice, conforme figuras abaixo:



O ponto **O** é o vértice.

As semirretas $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}}$ são os lados.

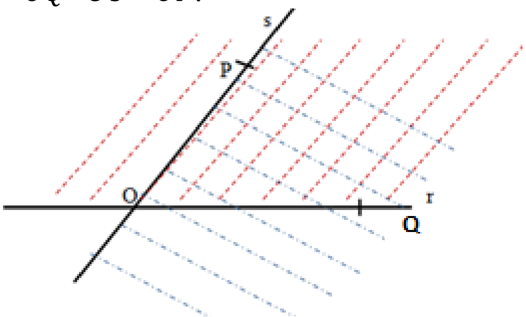
Se $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}}$ são semirretas opostas então, o ângulo PÔQ é chamado **ângulo raso.** Se $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OQ}}$, o ângulo PÔQ é chamado **ângulo nulo.**



P O Q
Ângulo raso

O P Q
ângulo nulo

Definimos ainda, o interior de um ângulo PÔQ que não é raso e nem nulo como sendo formado por todos os pontos que estão na intersecção dos semiplanos $\overrightarrow{rP}$ e $\overrightarrow{sQ}$, onde r = $\overline{OQ}$ e s = $\overline{OP}$.

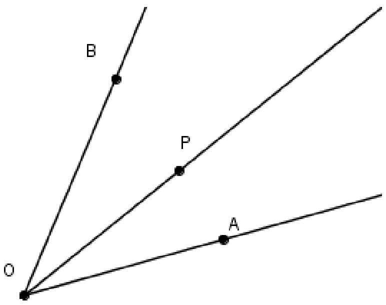


Medida de um ângulo: A cada ângulo AÔB associamos um número real chamado medida do ângulo AÔB, denotado por m(AÔB), que satisfaz as seguintes condições:

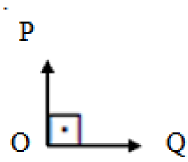
1) 0 ≤ m(AÔB)≤180.
2) Todo ângulo nulo tem medida 0 (zero).
3) Todo ângulo raso tem medida 180.
4) Se $\overrightarrow{\text{OP}}$ é uma semirreta que se encontra no interior do ângulo AÔB, então :
   m(AÔB) = m(AÔP) + m(PÔB)

A unidade de medida de ângulo que introduzimos acima é o grau. Assim, se AÔB é um ângulo raso, dizemos que ele mede 180 graus, denotamos m(AÔB) = 180°. Essa é a medida de ângulos que encontramos no transferidor.

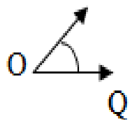
Dessa maneira definimos:



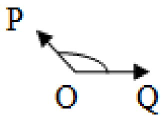
Ângulo reto: mede 90°



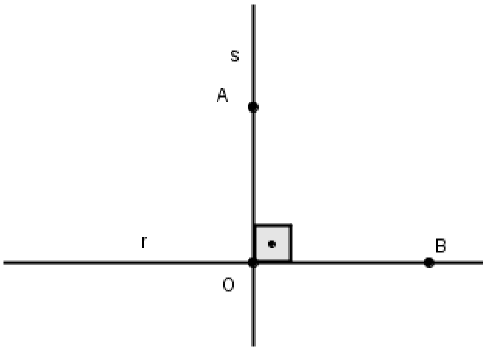
Ângulo agudo: tem medida menor que 90°



Ângulo obtuso: tem medida maior que 90°



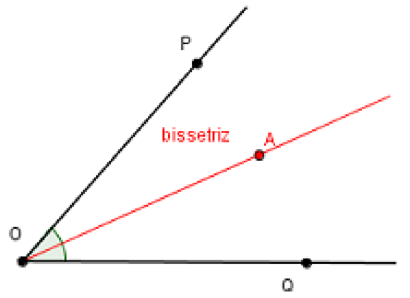
Retas perpendiculares: Duas retas r e s são perpendiculares se são distintas, se cruzam num ponto O e se dados pontos A em r , A ≠ O e B em s , B ≠ O então AÔB é um ângulo reto. Usamos a notação r ⊥ s, e representamos como no desenho abaixo:



Congruência entre ângulos: Dizemos que dois ângulos AÔB e CÔD são congruentes, se eles possuem a mesma medida. Notação AÔB ≡ CÔD.

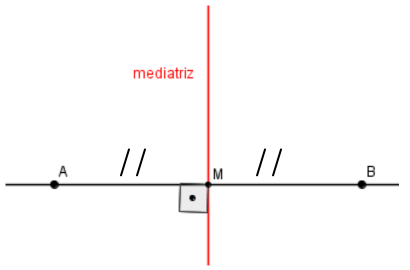
AÔB ≡ CÔD ⟺ m(AÔB) = m(CÔD)

Bissetriz: Chama-se bissetriz do ângulo PÔQ a semirreta $\overrightarrow{OA}$ interior ao ângulo PÔQ, com origem em O e que o divide em dois ângulos congruentes.

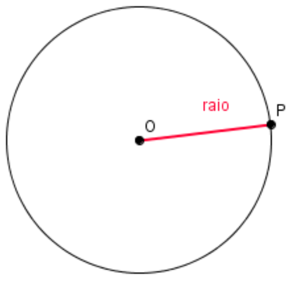


PÔA ≡ AÔQ

Mediatriz: Chama-se mediatriz de um segmento a reta perpendicular a esse segmento, passando pelo seu ponto médio.



Circunferência: Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um único ponto chamado centro da circunferência.



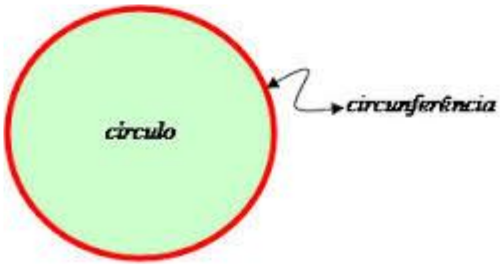
O ponto **O** é chamado de centro da circunferência

A medida do segmento **OP** é chamada de raio da circunferência

O interior da circunferência **C**, de centro O e raio **r** é o conjunto definido por :

int(C) = { Q ∈ π : m(OQ) < r}, onde π é o plano que contém a circunferência **C**.

Círculo: É a reunião da circunferência com seu interior.



fonte: brasilescola.com

Veja alguns exemplos que nos dão a ideia de circunferência e de círculo:

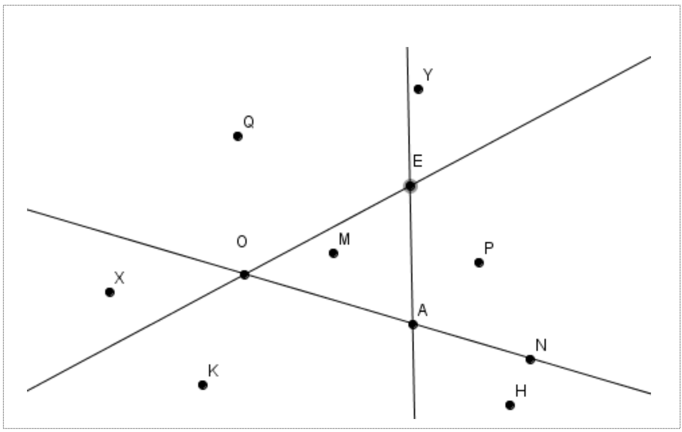
Fonte: oxford.com.br; puretrend.com.br; bydiva.com.br; pedidor.com; maionesetriptravel.blogspot.com.

FOLHA DE ATIVIDADE 2

Nome: ____nº______ 8ºano

Nome: ____nº______

1) Baseado na representação gráfica, responda:



a) O ponto P é interior ao ângulo EÔA?

b) O ponto H é interior ao ângulo OÂE?

c) Se r = $\overline{OA}$, s = $\overline{OE}$ e t = $\overline{AE}$, dentre os pontos A, O, E, P, Q, H, K, X, Y, M e N,

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$?

Quais não estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$?

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{tP}$?

Quais estão no interior de ângulo OÂE?

Quais não estão no interior de ângulo OÂE?

Quais estão no interior dos dois ângulos AÔE e OÂE?

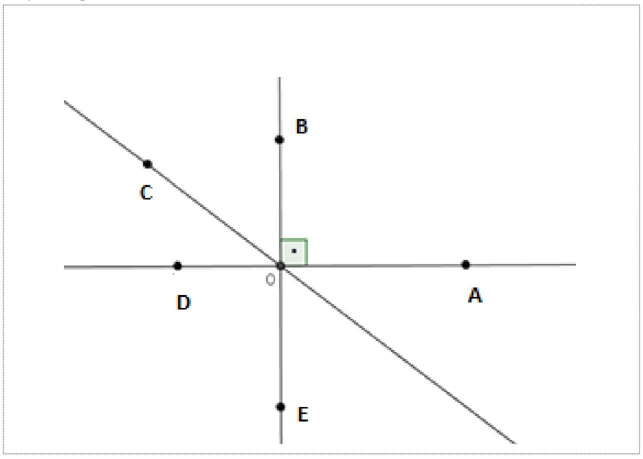
Quais estão na reta t?

Quais não estão na reta t?

d) Pinte ou hachure a região formada por todos os pontos que são interiores ao ângulo OÊA, mas não são interiores ao ângulo AÔE.

e) Determine a medida do ângulo OÂN sem usar o transferidor.

2) Considere a representação gráfica.



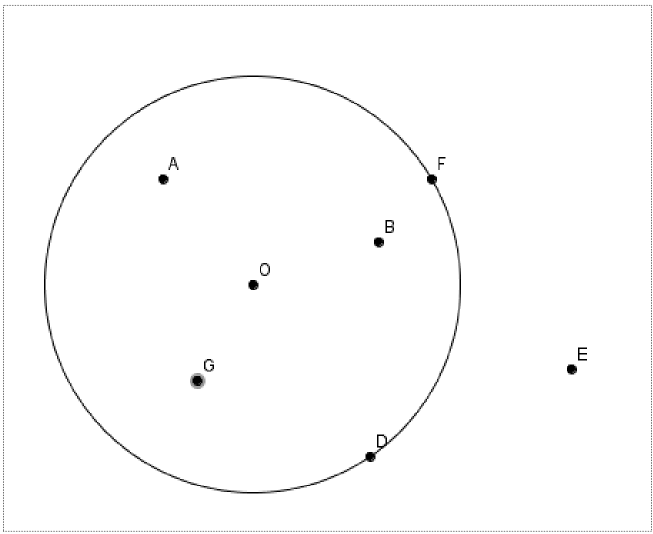
Se o ângulo AÔB é um ângulo reto, responda:

a) Qual a medida dos ângulos BÔD, DÔE, EÔA e DÔA?

b) O ângulo CÔA é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

c) O ângulo CÔD é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

3) Considere a circunferência C de centro O e raio r = 3 representada graficamente abaixo.



a) Dentre os pontos A, B, D, E, F, G e O quais são interiores à circunferência?

b) Qual a medida dos segmentos OF e OD?

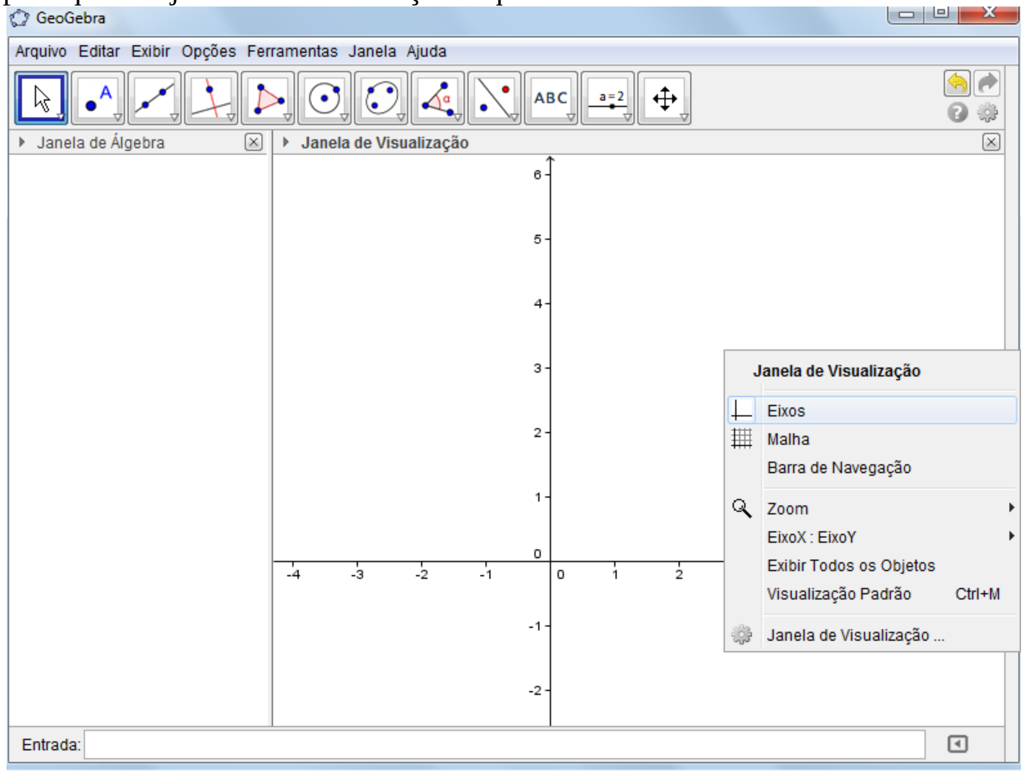
c) Podemos afirmar que m(OE) = 2? Justifique sem usar régua.

d) Podemos afirmar que m(OB) < 3? Justifique sem usar régua.

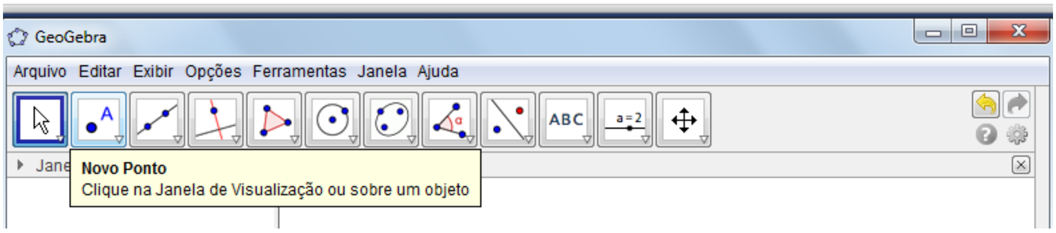
Parte 3: *tempo estimado 2 aulas*

Vamos agora baixar um software que irá nos ajudar a fazer construções geométricas, esse software se chama Geogebra e sua versão pode ser baixada gratuitamente através do link:
http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download

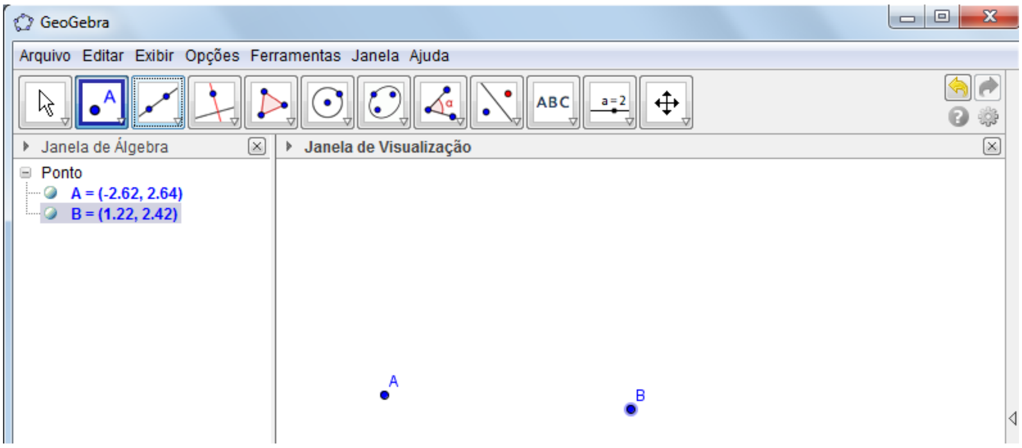
Essa é a tela do programa aberto, com o botão direito do mouse clique na opção eixos para que sua janela de visualização fique toda em branco.



Na barra de ferramentas clique em ponto.

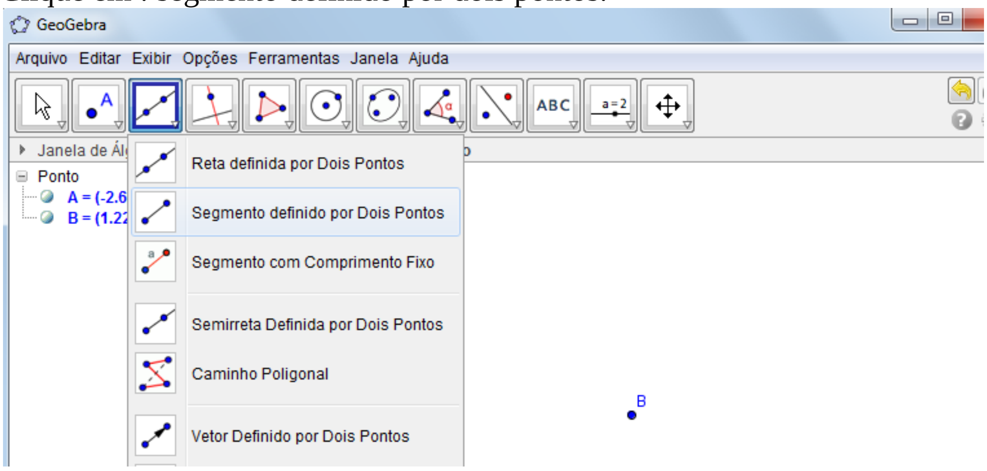


Em seguida marque os pontos A e B na janela de visualização. Como na ilustração:

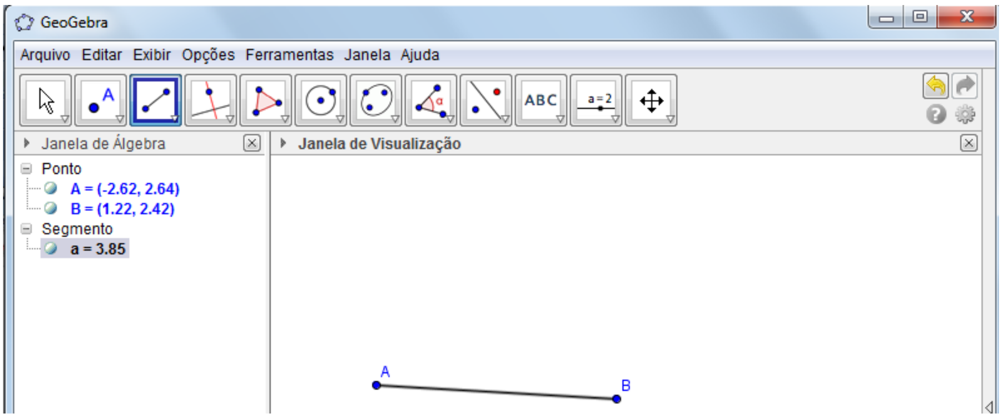


Vou agora indicar os procedimentos na barra de ferramentas sem me referir a elas todas às vezes, então fica combinado que sempre que houver uma tela embaixo, vocês seguem o comando.

Clique em : segmento definido por dois pontos.



E marque esse segmento partindo do ponto A para o ponto B.

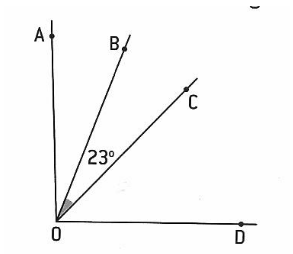


FOLHA DE ATIVIDADE 3

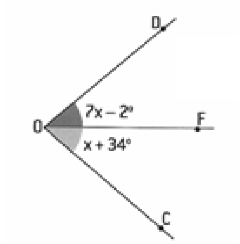
Nome: ____nº______ 8ºano
Nome: ____nº______

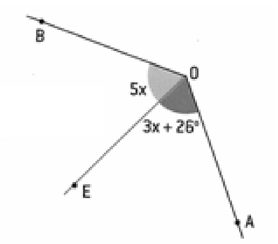
1) Explore na barra de ferramentas os recursos que o programa oferece em traçar, pontos, retas, semirretas, segmento de retas, ponto médio, mediatriz de um segmento, ângulo, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento entre outros.

2) Na figura a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC e a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo AÔD. Qual é a medida do ângulo BÔD?



3) As semirretas $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OF}$ são bissetrizes dos ângulos indicados. Efetue os cálculos e obtenha a medida doa ângulos AÔB e CÔD.

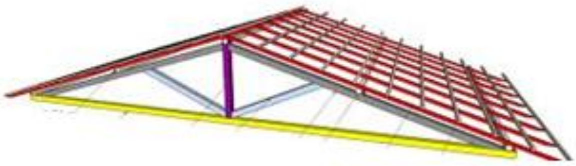




Triângulos

Certamente em seu dia a dia você se depara com várias formas geométricas e o triângulo é uma delas.



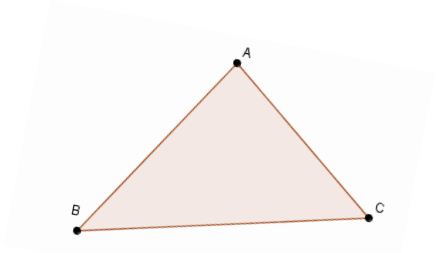



Fonte:
http://sonhodeturista.blogspot.com.br/2011/07/piramides-do-egito.html
http://rota-seg.com/verprodutos.asp?cod=2
http://forum.mygames.sapo.pt/viewtopic.php?t=6731
http://magdocad.blogspot.com

Triângulo: é uma figura geométrica formada por três pontos A, B e C não colineares e três segmentos de reta AB, AC e BC. Denotaremos por ΔABC ou simplesmente ABC.

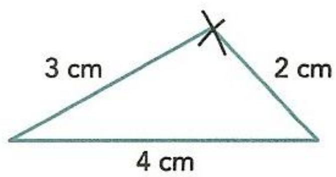
Elementos de um triângulo ABC:

- **Lados**: segmentos AB, AC e BC.
- **Vértices**: pontos **A**, **B** e **C**.
- **Ângulos internos:** $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



Condição de existência de um triângulo:

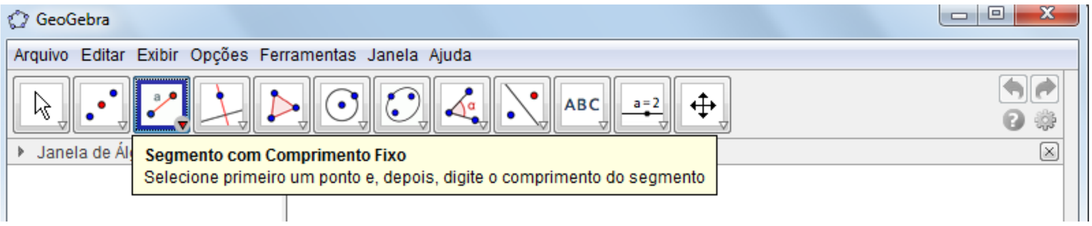
Dados três segmentos de reta, um de 3 cm, um de 4 cm e outro de 2 cm é possível construir com régua e compasso o triângulo abaixo:



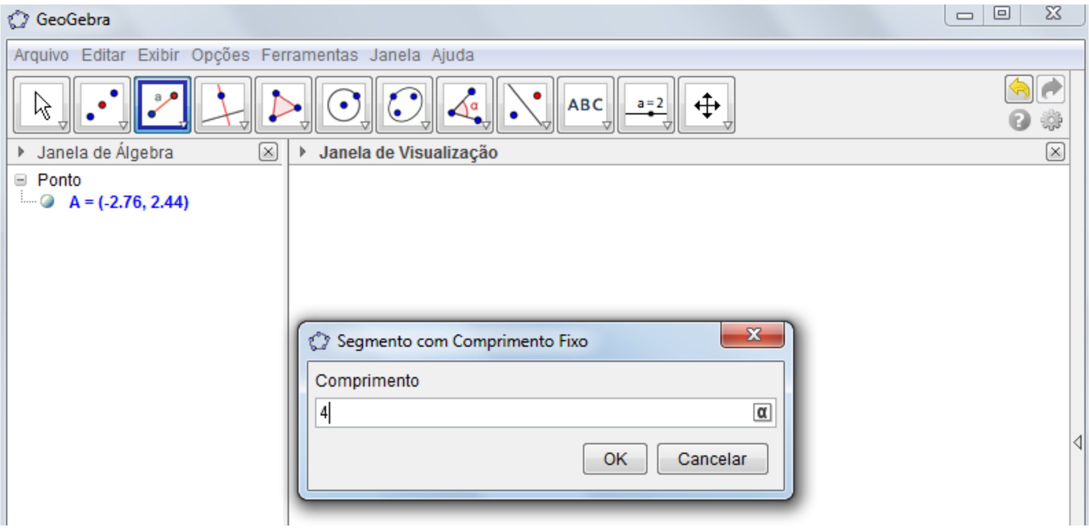
fonte: Tudo é Matemática- Dante

Lição 2: Vamos construir o triângulo utilizando o software Geogebra, siga os seguintes comandos:

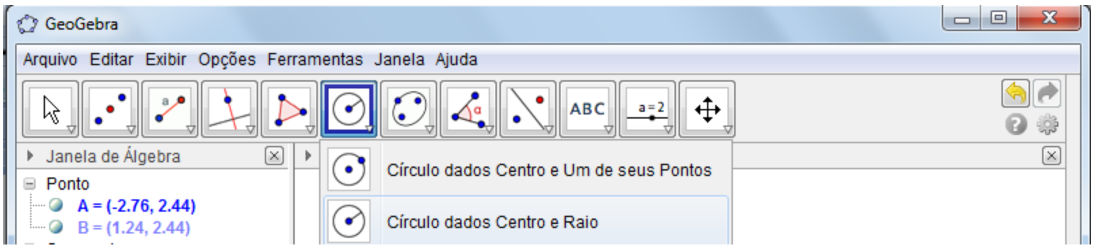
1) Marque a opção segmento com comprimento fixo.



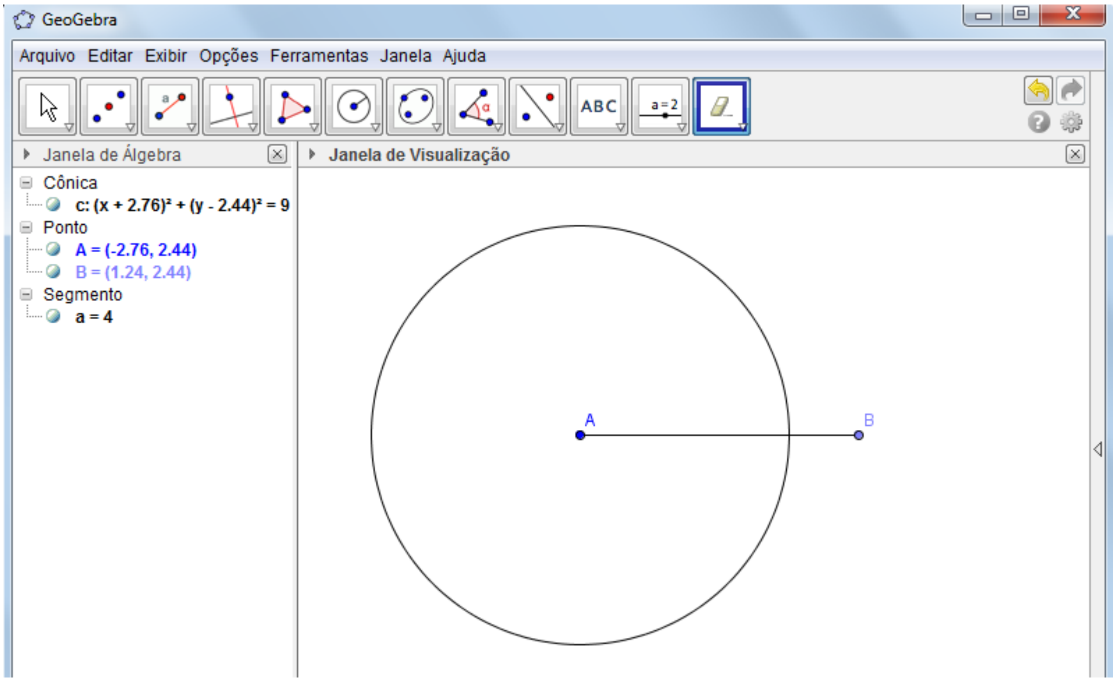
2) Vai aparecer na tela de visualização uma janela para determinar o tamanho do segmento.



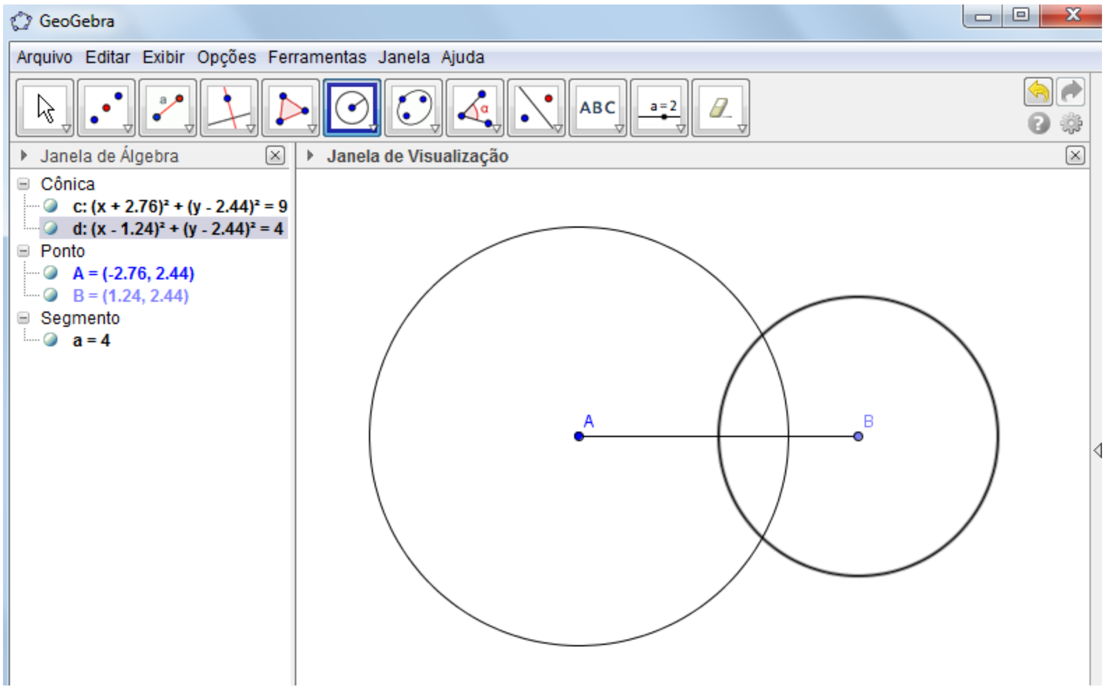
3) Marque a opção círculo dado centro e raio.



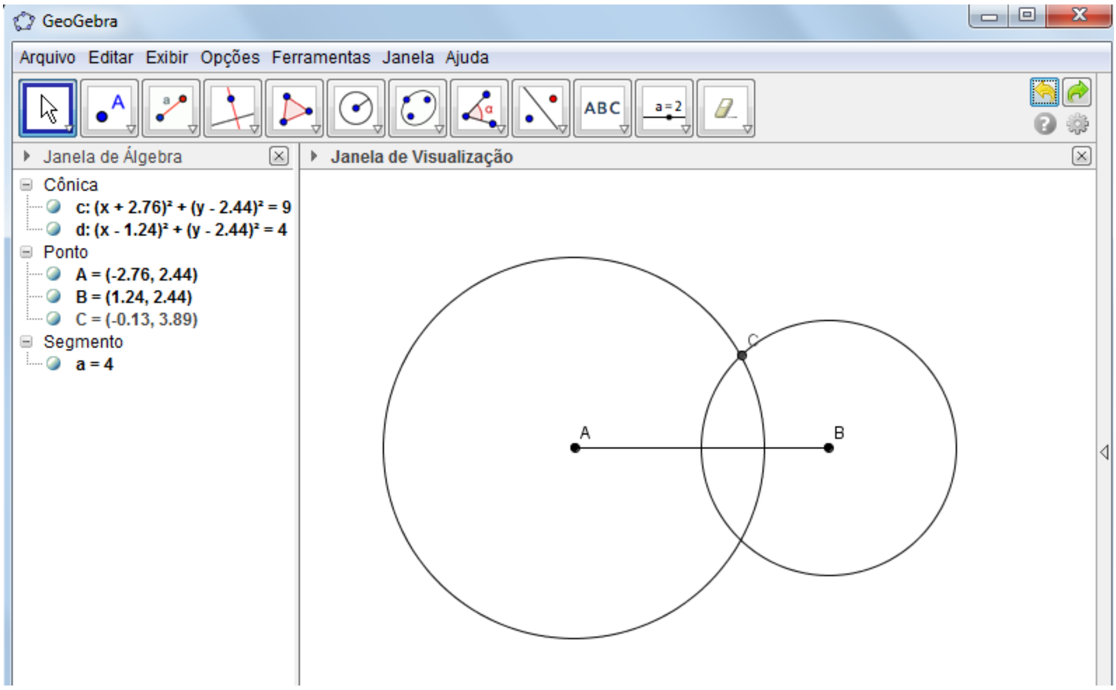
4) Marque o centro no ponto A e indique a medida 3, em seguida aperte OK.



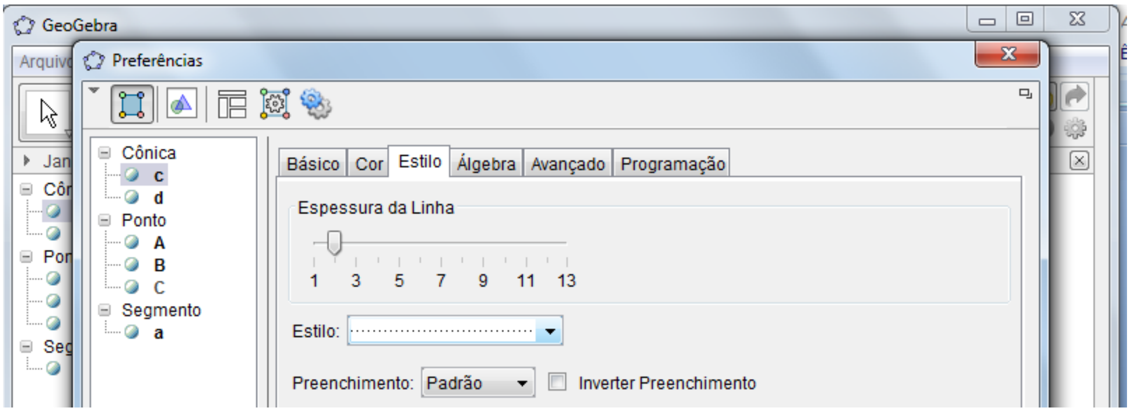
5) Faça o mesmo no ponto B e indique a medida 2.



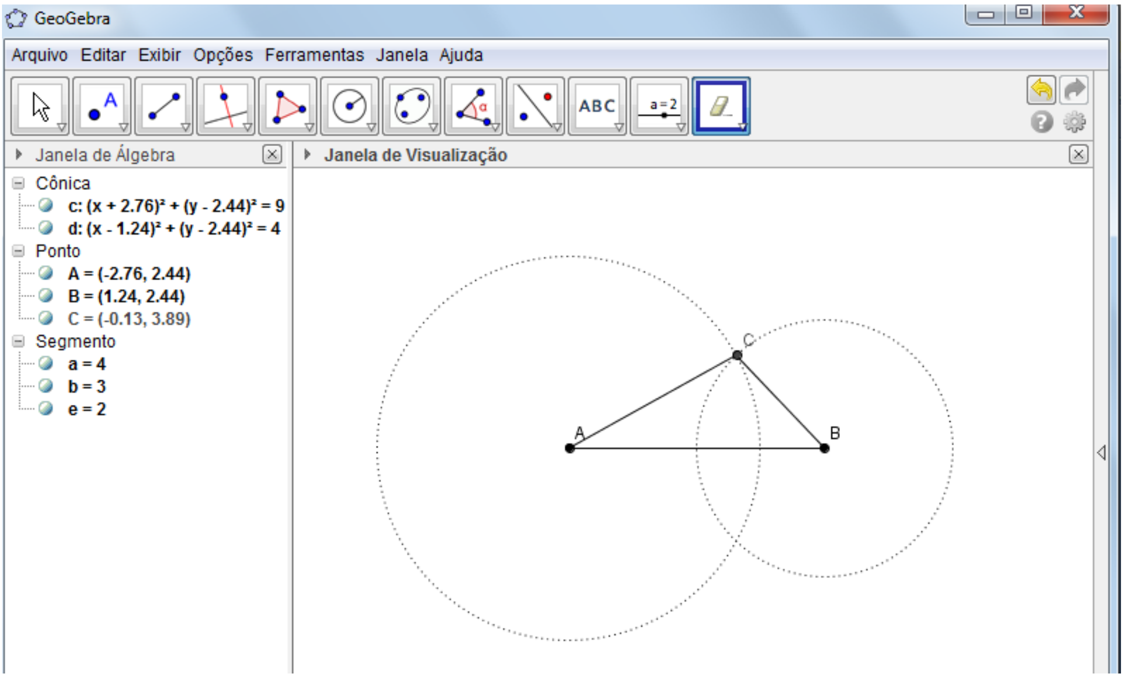
6) No ponto de interseção dos círculos marque o ponto C (Ponto de interseção é aquele onde os círculos se cruzam).



7) Com o botão direito do mouse clique em cima dos círculos desenhados e marque a opção propriedades, na janela **Estilo** defina a opção pontilhada.

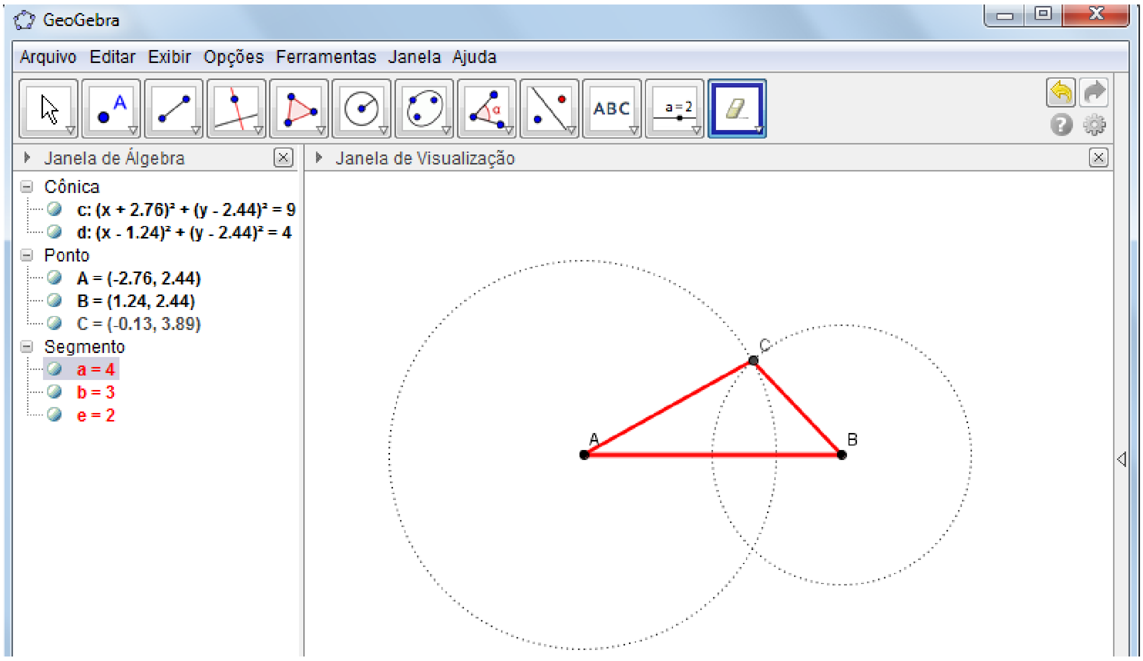


8) Marque a opção **Segmento definido por dois pontos**, e faça os segmentos AB, AC e CB.



Parabéns você construiu o triângulo desejado!

Apertando o botão direito do mouse em cima de cada lado do triângulo e escolhendo a opção propriedades, você pode alterar a cor e a espessura do traço.



Salve esse arquivo com <seunome-L2>

Folha de Atividade 4

Nome:____**nº**___________ **8º ano**

Nome:____**nº**___________

1) Construa através do Geogebra, vários triângulos de acordo com as medidas indicadas:

T1: lados medindo 3, 3 e 3. Salve essa atividade como < T1seu nome >

T2: lados medindo 3, 4 e 4 cm. Salve essa atividade como < T2seu nome >

T3: lados medindo 3, 4 e 5 cm. Salve essa atividade como < T3seu nome >

T4: lados medindo 1, 2 e 3 cm. Salve essa atividade como < T4seu nome >

T5: lados medindo 3, 7 e 5 cm. Salve essa atividade como < T5seu nome >

T6: lados medindo 6, 3 e 3 cm. Salve essa atividade como < T6seu nome >

Agora responda:

2) Provavelmente você conseguiu construir alguns dos triângulos propostos e não conseguiu construir alguns outros. Quais foram os triângulos que você não conseguiu construir?

3) Você saberia dizer por que não foi possível construir algum dos triângulos propostos?

4) Pela definição de triângulo e pela atividade 1, três pontos A, B e C quaisquer no plano α determinam sempre um triângulo com vértices A, B e C?

Parte 4: *tempo estimado 2 aulas*

Folha de Atividade 5

Nome:____nº____________ 8º ano

Nome:____nº____________

1) Construa os seguintes triângulos:
a) Lados medindo 3 cm, 5 cm e 5 cm.
b) Lados medindo 5 cm, 6 cm e 5 cm.
c) Lados medindo 8 cm, 5 cm e 4 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

2) Construa os seguintes triângulos:
a) Lados medindo 8 cm, 4 cm e 4 cm.
b) Lados medindo 6 cm, 3 cm e 3 cm.
c) Lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

3) Construa os seguintes triângulos:
a) Lados medindo 3 cm, 2 cm e 7 cm.
b) Lados medindo 4 cm, 3 cm e 8 cm.
c) Lados medindo 4 cm, 4 cm e 9 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

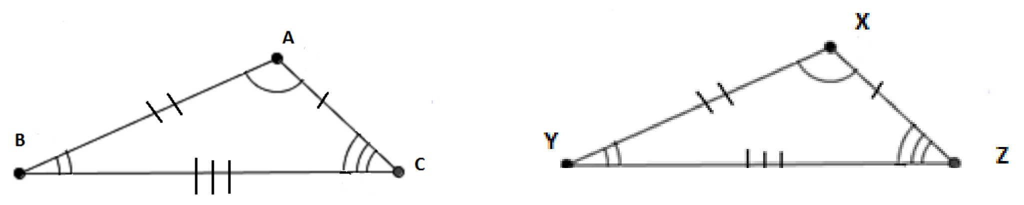
4) Vamos formular uma condição para garantir a existência de um triângulo.

Congruência de triângulos: Dados dois triângulos ΔABC e ΔXYZ, dizemos que eles são congruentes se,

AB ≡ XY A$\hat{B}$C ≡ X$\hat{Y}$Z

BC ≡ YZ e A$\hat{C}$B ≡ X$\hat{Z}$Y

AC ≡ XZ B$\hat{A}$C ≡ Y$\hat{X}$Z



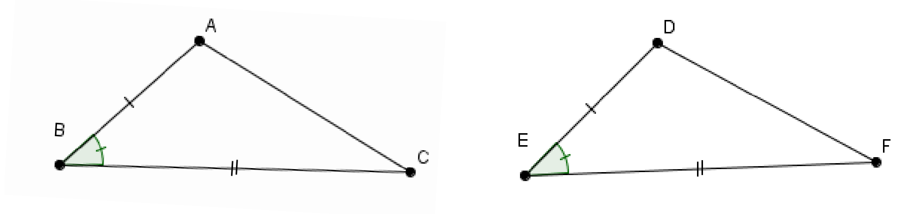
Casos de congruência entre triângulos

Para verificarmos a congruência entre dois triângulos pela definição, seria necessário verificarmos essas seis congruências entre seus elementos. Entretanto, existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, são os chamados **casos de congruência entre triângulos**, que vem contribuir para facilitar nosso trabalho.

Axioma: 1ºcaso de congruência, LAL (lado, ângulo, lado)

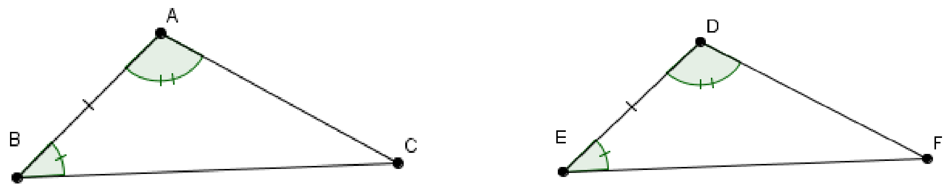
Dados ΔABC e ΔDEF, tais que AB ≡ DE, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ e BC ≡ EF, então

ΔABC≡ ΔDEF.



Teorema 1: 2º caso de congruência, ALA (ângulo, lado, ângulo)

Dados ΔABC e ΔDEF, tais que $AB \equiv DE$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.



Teorema 2: 3º caso de congruência, LLL (lado, lado, lado)

Dados ΔABC e ΔDEF, tais que $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$ e $CA \equiv FD$, então $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

Teorema 3: 4º caso de congruência, LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto)

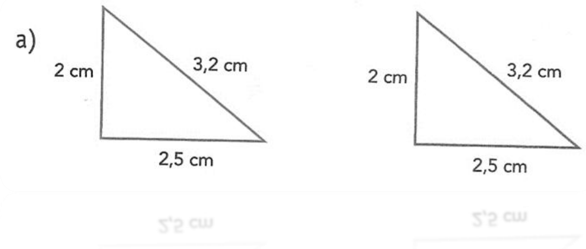
Dados ΔABC e ΔDEF, tais que $AB \equiv DE$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

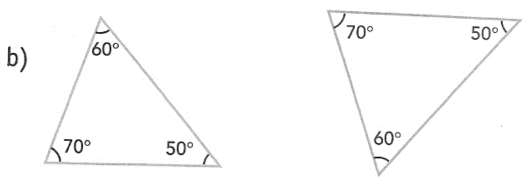
FOLHA DE ATIVIDADE 6

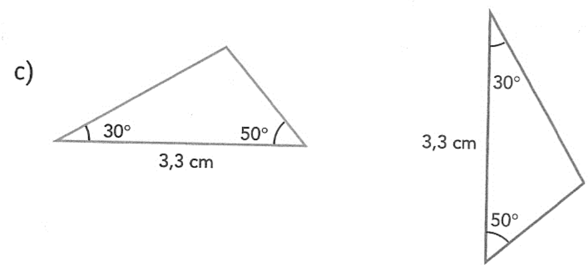
Nome:____nº___________ 8º ano

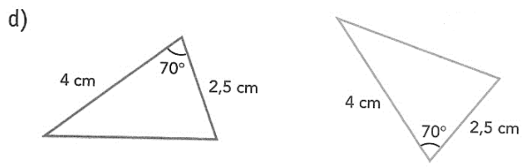
Nome:____nº___________

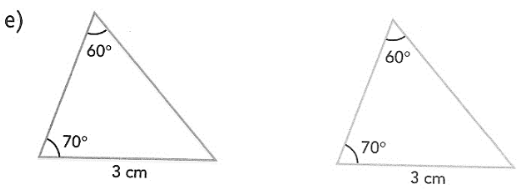
1) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes e indique em caso positivo o caso que garante a congruência







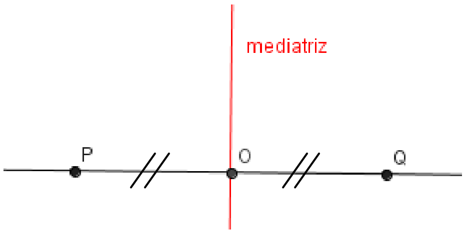




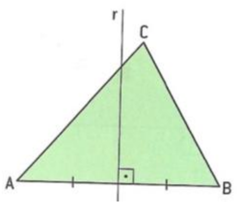
Parte 5: *tempo estimado 2 aulas*

Mediatrizes de um Triângulo:

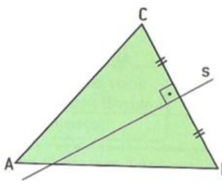
Já vimos que dado um segmento de reta com extremidades A e B, chama-se mediatriz de AB a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo ponto médio.



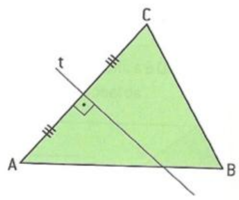
Agora, vejamos as mediatrizes relativas a cada lado de um triângulo ABC



A reta r é a mediatriz do lado AB.



A reta s é a mediatriz do lado CB.



A reta t é a mediatriz do lado AC.

Voltando ao Geogebra

Vamos separar a sala em 4 grupos distintos onde cada grupo irá construir um dos seguintes triângulos

GRUPO 1: 4 duplas

ΔABC: 3cm, 4cm e 5cm.

GRUPO 2: 3 duplas

ΔABC: 4cm, 6cm e 6cm.

GRUPO 3: 4 duplas

ΔABC: 5cm, 5cm e 5cm.

GRUPO 4: 3 duplas

ΔABC: 4cm, 7cm e 10cm.

Salve 4 arquivos como <seunomeC1> <seunomeC2>

<seunomeC3> <seunomeC4>

FOLHA DE ATIVIDADE 7

Nome:____nº____________ 8º ano

Nome:____nº____________

1) No arquivo C1 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e AC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto D.

No arquivo C2 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e BC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto E.

No arquivo C3 trace as mediatrizes relativas aos lados AC e BC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto F.

No arquivo C4 trace as mediatrizes relativas aos lados AB, AC e BC e marque os pontos D, E e F.

Agora responda:

a) O que você pode dizer em relação aos pontos D, E e F?

.

2) Desenhar um segmento AB.
Desenhe no plano vários pontos que equidistam de A e de B.
Existe um tal ponto em AB?
Eles são colineares? Se sim, qual o ângulo que essa reta forma com a reta $\overline{AB}$?
O que podemos concluir sobre esses pontos?

3) Desenhar um segmento AB.
Desenhar a mediatriz **r** de AB.
Marque o ponto C sobre r e meça a distância desse ponto em relação à A e à B e compare esses valores. Faça o mesmo para diversos pontos sobre r.
O que você pode perceber? O que podemos concluir?

Teorema 4: Todo ponto equidistante das extremidades de um segmento de reta pertence à mediatriz desse segmento.

<u>*Demonstração:*</u> Seja AB um segmento de reta com extremidades A e B, com $A \neq B$.

Se P é um ponto que equidista de A e B, então $AP \equiv PB$.

Temos duas possibilidades:

1ª: $\mathbf{P} \in \overline{\boldsymbol{AB}}$

Neste caso P é o ponto médio de AB, portanto neste caso P pertence à mediatriz de AB.

2ª: $\mathbf{P} \notin \overline{\boldsymbol{AB}}$

Neste caso, seja M o ponto médio de AB.

Notamos que os pontos A, P e M não são colineares e os pontos B, P e M também não são colineares. Dessa forma, podemos então formar os triângulos: $\triangle$ AMP e $\triangle$ BMP.

Observamos que: $AM \equiv BM$ (pois M é ponto médio de AB)

$MP \equiv MP$ (pois os dois segmentos são iguais)

$AP \equiv BP$ (pois por hipótese P é equidistante de A e B)

Segue então pelo caso LLL de congruência de triângulos que $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$.

Logo $A\widehat{M}P \equiv B\widehat{M}P$ e como $m(A\widehat{M}P) + m(P\widehat{M}B) = m(A\widehat{M}B) = 180°$

Segue que $m(A\widehat{M}P) = m(P\widehat{M}B) = 90°$

De onde segue que a reta $r = \overline{PM}$ intercepta AB em seu ponto médio M e é perpendicular a reta $\overline{AB}$, logo $r = \overline{PM}$ é a mediatriz de AB e P pertence a essa mediatriz.

Teorema 5: Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento.

Demonstração: Sejam AB um segmento de reta e r sua mediatriz. Dado um ponto P em r, temos que se $P \in \overline{AB}$, então P é ponto médio de AB, de onde segue que $AP \equiv BP$, ou seja, P é equidistante de A e B.

Se P não pertence a $\overline{AB}$, podemos formar os triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$, sendo M o ponto médio de AB.

Observamos que: $AM \equiv BM$ (pois M é ponto médio de AB)

$A\widehat{M}P \equiv B\widehat{M}P$ (pois $r = \overline{PM}$ e é perpendicular a $\overline{AB}$)

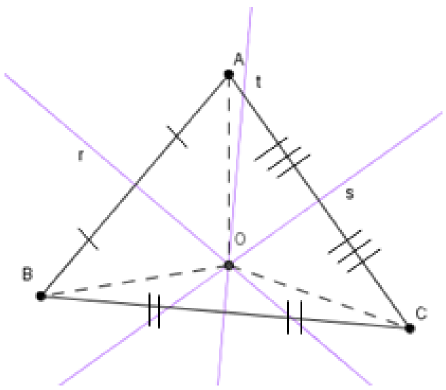
$MP \equiv MP$ (pois MP = MP).

Logo, segue pelo caso LAL de congruência de triângulos que $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$, portanto $AP \equiv BP$, de onde segue que P é equidistante de A e B.

Voltando aos pontos D, E e F da atividade anterior 1. Suspeitamos que as mediatrizes de um triângulo qualquer encontram-se num único ponto. Esse fato pode ser verificado através do seguinte teorema:

Teorema 6: As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Demonstração:



Seja o ΔABC, e as mediatrizes r, s e t de AB, AC e BC.

Seja O o ponto de interseção de r e s: r ∩ s = { O}

Como O ∈ r segue do Teorema 4 que OA ≡ OB

Como O ∈ s segue do Teorema 4 que OA ≡ OC

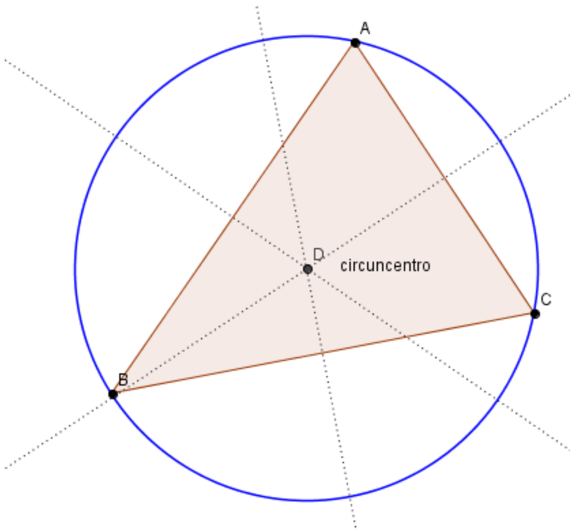
Disso segue que OB ≡ OC, ou seja, O é equidistante de B e C

Segue do Teorema 5 que O pertence a reta t

Logo, r ∩ s ∩ t = { O} e OA ≡ OB ≡ OC

Esse ponto é chamado **circuncentro**.

Circuncentro: o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



FOLHA DE ATIVIDADE 8

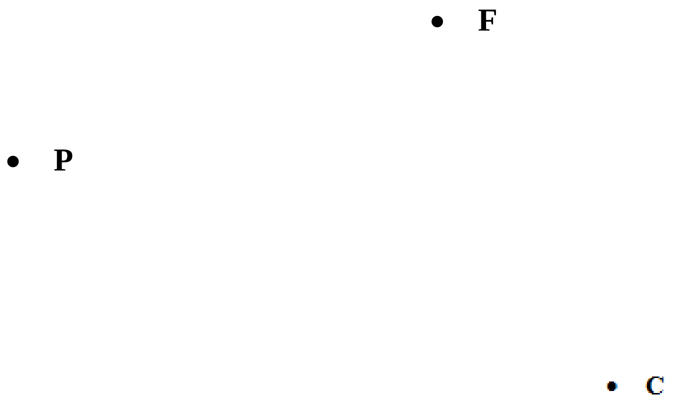
Nome:____**nº**___________ **8º ano**

Nome:____**nº**___________

1) É sempre possível traçar uma circunferência que passa por três pontos não alinhados?

2) Em uma cidade, será construído o prédio de uma agência bancária. Para a escolha do local, pensou-se no seguinte: ele deve ficar à mesma distância da prefeitura (**P**), do fórum (**F**) e do centro de saúde (**C**).

Observe a figura abaixo, converse com seus colegas e tentem responder: onde deve ser construída a agência bancária (**B**)?



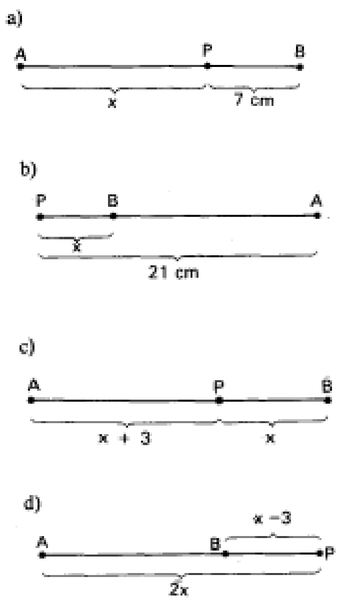
Apêndice 2

Resolução das Folhas de Atividades

FOLHA DE ATIVIDADE 1

Nome: ____nº______ 8ºano
Nome: ____nº______

1) Se o segmento AB mede 17cm, determine o valor de x nos casos:



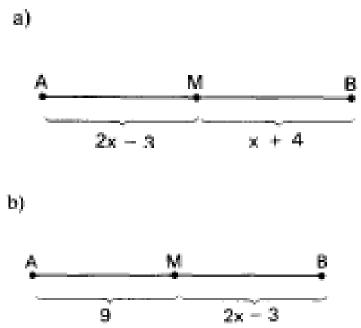
a) $x + 7 = 17$
$x = 17 - 7$
$x = 10$ **cm**

b) $x + 17 = 21$
$x = 21 - 17$
$x = 4$ **cm**

c) $x + 3 + x = 17$
$2x = 17 - 3$
$x = 7$**cm**

d) $2x - (x - 3) = 17$
$x + 3 = 17$
$x = 14$ **cm**

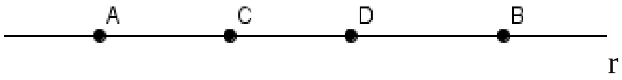
2) Determine o valor de x, sabendo que M é ponto médio de AB.



a) $2x - 3 = x + 4$
$x + 7$

b) $2x - 3 = 9$
$2x = 12$
$x = 6$

3) Observe a figura e responda:



b) Quantos segmentos existem na reta r, com extremos em cada par de pontos formado a partir dos quatro pontos A, B, C e D da reta? Quais são?

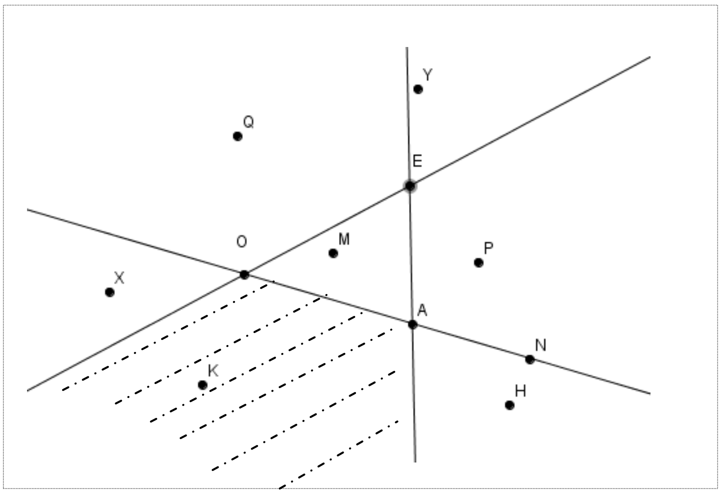
São seis segmentos: AC, AD, AB, CD, CB e DB.

FOLHA DE ATIVIDADE 2

Nome: ____nº______ 8ºano

Nome: ____nº______

1) Baseado na representação gráfica, responda:



a) O ponto P é interior ao ângulo EÔA? **Sim, o ponto P é interior ao ângulo EÔA**.

b) O ponto H é interior ao ângulo OÂE? **Não, o ponto H não é interior ao ângulo OÂE.**

c) Se r = $\overline{OA}$, s = $\overline{OE}$ e t = $\overline{AE}$, dentre os pontos A, O, E, P, Q, H, K, X, Y, M e N,

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$? **São os pontos: O, A, N, M, P, E, Q e Y.**

Quais não estão no semiplano $\overrightarrow{rE}$? **Os pontos X, K e H.**

Quais estão no semiplano $\overrightarrow{tP}$? **São os pontos: Y, E, A, P, H e N.**

Quais estão no interior de ângulo OÂE? **Os pontos O, A, E, M e Q.**

Quais não estão no interior de ângulo OÂE? **Os pontos Y, P, N, H, K e X.**

Quais estão no interior dos dois ângulos AÔE e OÂE? **O ponto M.**

Quais estão na reta t? **Os pontos A e E.**

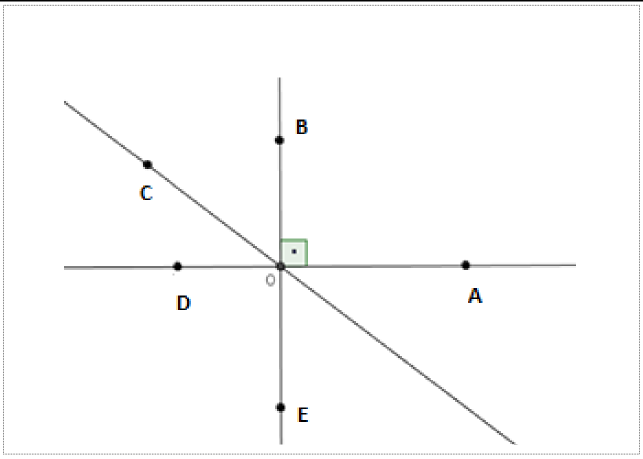
Quais não estão na reta t? **Os pontos: O, P, Q, H, K, X, Y, M e N.**

d) Pinte ou hachure a região formada por todos os pontos que são interiores ao ângulo OÊA, mas não são interiores ao ângulo AÔE.

e) Determine a medida do ângulo OÂN sem usar o transferidor.

M (OÂN) = 180°

2) Considere a representação gráfica.



Se o ângulo AÔB é um ângulo reto, responda:

a) Qual a medida dos ângulos BÔD, DÔE, EÔA e DÔA?

Os ângulos BÔD, DÔE, EÔA tem a mesma medida e valem 180°, e

m(DÔA) = 180°.

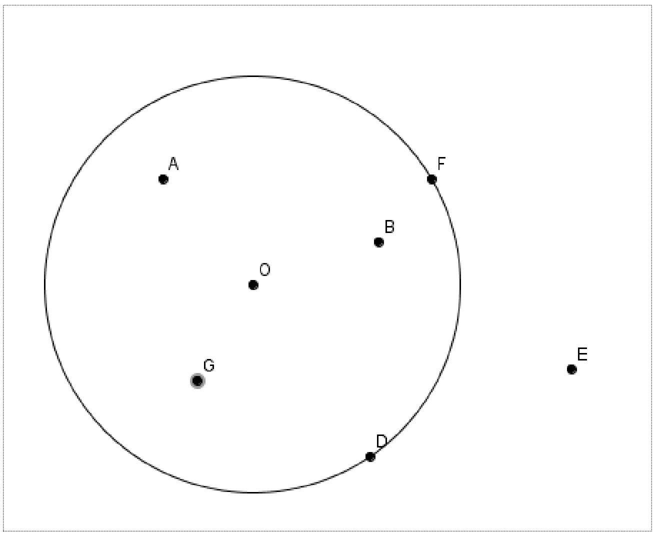
b) O ângulo CÔA é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

Se CÔA = CÔB + BÔA, e m(BÔA) = 90°, como CÔB não é nulo, CÔA é maior que 90°, logo é obtuso.

c) O ângulo CÔD é reto, agudo ou obtuso? Justifique sem usar o transferidor.

Se BÔD = BÔC + CÔD, e m(BÔD) = 90°, como BÔC não é nulo, CÔD é menor que 90°, logo é agudo.

3) Considere a circunferência C de centro O e raio r = 3 representada graficamente abaixo.



a) Dentre os pontos A, B, D, E, F, G e O quais são interiores à circunferência?

São os pontos: A, B, O e G.

b) Qual a medida dos segmentos OF e OD?

Como os pontos D e F são equidistantes de O, a medida deles é a medida do raio da circunferência, ou seja, 3.

c) Podemos afirmar que m(OE) = 2? Justifique sem usar régua.

Não, pois E é um ponto exterior à circunferência e como r = 3, m (OE) > 3 .

d) Podemos afirmar que m(OB) < 3? Justifique sem usar régua.

Sim, pois B é um ponto interior a circunferência.

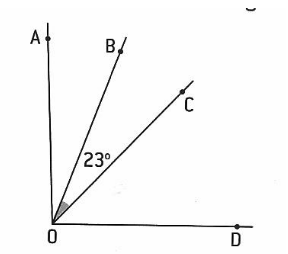
FOLHA DE ATIVIDADE 3

Nome: ____nº______ 8ºano

Nome: ____nº______

1) Explore na barra de ferramentas os recursos que o programa oferece em traçar, pontos, retas, semirretas, segmento de retas, ponto médio, mediatriz de um segmento, ângulo, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento entre outros.

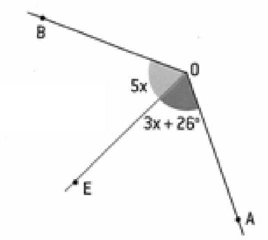
2) Na figura a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC e a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo AÔD. Qual é a medida do ângulo BÔD?

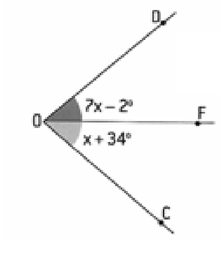


Como a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC, m (AÔC) = 46°, mas a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo AÔD, logo m(CÔD) = 46° e m(BÔD) = m(BÔC) + m(CÔD)

m(BÔD) = 23° + 46° = 69°

3) As semirretas $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OF}$ são bissetrizes dos ângulos indicados. Efetue os cálculos e obtenha a medida doa ângulos AÔB e CÔD.





5x = 3x + 26°

2x = 26°

x = 13°

E m(AÔB) = 130°

7x – 2° = x + 34°

6x = 36°

x = 6°

E m(CÔD) = 80°

Folha de Atividade 4

Nome:____**nº**____________ **8º ano**

Nome:____**nº**____________

1) Construa através do Geogebra, vários triângulos de acordo com as medidas indicadas:

T1: lados medindo 3, 3 e 3. Salve essa atividade como < T1seu nome >

T2: lados medindo 3, 4 e 4 cm. Salve essa atividade como < T2seu nome >

T3: lados medindo 3, 4 e 5 cm. Salve essa atividade como < T3seu nome >

T4: lados medindo 1, 2 e 3 cm. Salve essa atividade como < T4seu nome >

T5: lados medindo 3, 7 e 5 cm. Salve essa atividade como < T5seu nome >

T6: lados medindo 6, 3 e 3 cm. Salve essa atividade como < T6seu nome >

Agora responda:

2) Provavelmente você conseguiu construir alguns dos triângulos propostos e não conseguiu construir alguns outros. Quais foram os triângulos que você não conseguiu construir?

Os triângulos T4 e T6.

3) Você saberia dizer por que não foi possível construir algum dos triângulos propostos?

Não houve um ponto onde foi encontrado o terceiro vértice, ou ainda, os três vértices são colineares.

4) Pela definição de triângulo e pela atividade 1, três pontos A, B e C quaisquer no plano α determinam sempre um triângulo com vértices A, B e C?

Não, pois se os pontos forem colineares, eles não formam o triângulo .

Folha de Atividade 5

Nome:____**nº**___________ **8º ano**

Nome:____**nº**___________

1) Construa os seguintes triângulos:

a) Lados medindo 3 cm, 5 cm e 5 cm.
b) Lados medindo 5 cm, 6 cm e 5 cm.
c) Lados medindo 8 cm, 5 cm e 4 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

a)	b)	c)
5 < 8	**5 < 11**	**4 < 13**
5 < 8	**5 < 11**	**8 < 9**
3 < 10	**6 < 10**	**5 < 12**

2) Construa os seguintes triângulos:

a) Lados medindo 8 cm, 4 cm e 4 cm.
b) Lados medindo 6 cm, 3 cm e 3 cm.
c) Lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

a)	b)	c)
4 < 12	**3 < 9**	**3 < 11**
4 < 12	**3 < 9**	**4 < 10**
8 = 8	**6 = 6**	**7 = 7**

3) Construa os seguintes triângulos:

a) Lados medindo 3 cm, 2 cm e 7 cm.
b) Lados medindo 4 cm, 3 cm e 8 cm.
c) Lados medindo 4 cm, 4 cm e 9 cm.
d) Agora some os lados dois a dois e compare com o terceiro lado.

a)	b)	c)
2 < 10	**7 < 8**	**8 < 9**
3 < 9	**4 < 11**	**4 < 13**
7 > 5	**8 > 7**	**9 > 8**

4) Vamos formular uma condição para garantir a existência de um triângulo.

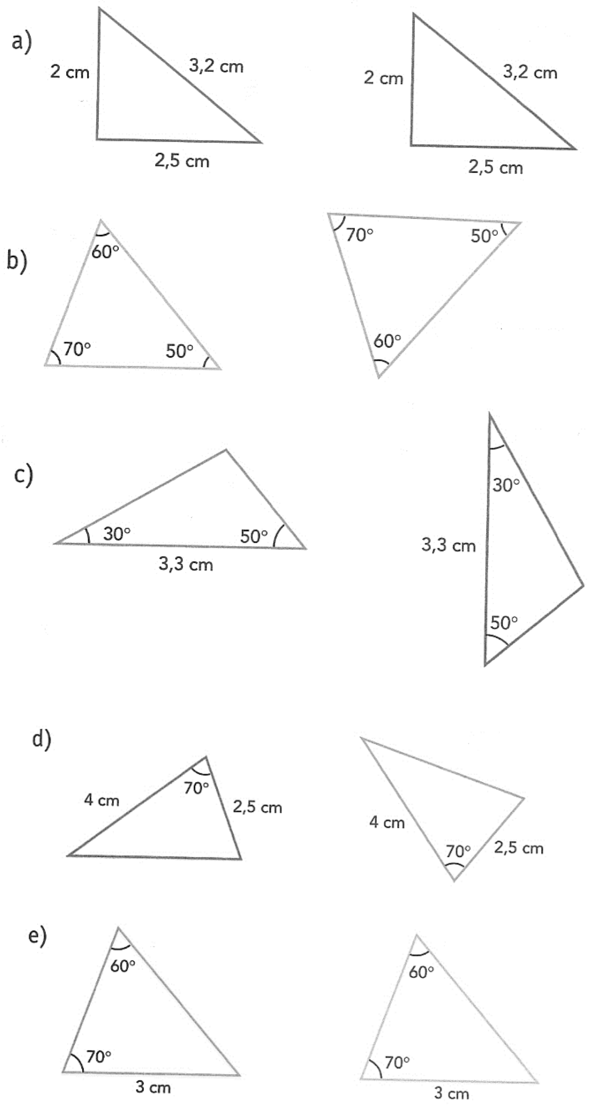
Em todo o triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

FOLHA DE ATIVIDADE 6

Nome:____nº___________ 8º ano

Nome:____nº___________

1) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes e indique em caso positivo o caso que garante a congruência



a) Sim, pelo caso LLL.
b) Não podemos garantir.
c) Sim, pelo caso ALA.
d) Sim, pelo caso LAL.
e) Sim, pelo caso LAA_o

FOLHA DE ATIVIDADE 7

Nome:____nº___________ 8º ano

Nome:____nº___________

4) No arquivo C1 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e AC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto D.

No arquivo C2 trace as mediatrizes relativas aos lados AB e BC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto E.

No arquivo C3 trace as mediatrizes relativas aos lados AC e BC, em seguida marque o encontro dessas mediatrizes como ponto F.

No arquivo C4 trace as mediatrizes relativas aos lados AB, AC e BC e marque os pontos D, E e F.

Agora responda:

a) O que você pode dizer em relação aos pontos D, E e F?
Podemos dizer que as mediatrizes se encontram em um único ponto.

.

5) Desenhar um segmento AB.
Desenhe vários pontos que equidistam de A e de B.
Existe um tal ponto em AB? **Sim, o ponto médio do segmento AB**
Eles são colineares? Se sim, qual o ângulo que essa reta forma com a reta $\overline{AB}$? **São colineares e formam um ângulo de 90°**
O que podemos concluir sobre esses pontos?

Podemos concluir que todo ponto equidistante das extremidades de um segmento de reta pertence à mediatriz desse segmento.

6) Desenhar um segmento AB.
Desenhar a mediatriz **r** de AB.
Marque o ponto C sobre r e meça a distância desse ponto em relação à A e à B e compare esses valores. Faça o mesmo para diversos pontos sobre r.
O que você pode perceber? O que podemos concluir?

Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento.

FOLHA DE ATIVIDADE 8

Nome:____**nº**___________ **8º ano**

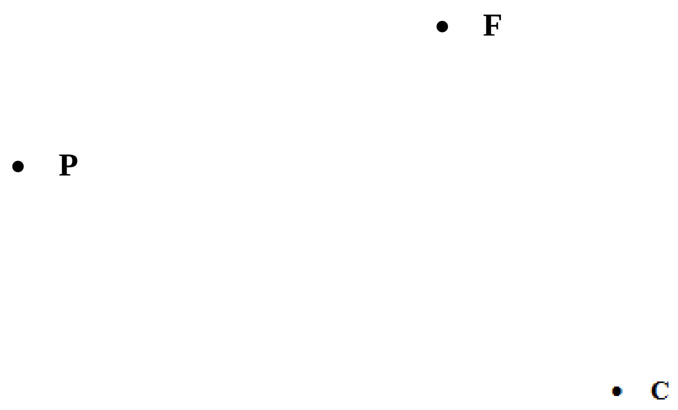
Nome:____**nº**___________

3) É sempre possível traçar uma circunferência que passa por três pontos não alinhados?

Sim, pois as mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

4) Em uma cidade, será construído o prédio de uma agência bancária. Para a escolha do local, pensou-se no seguinte: ele deve ficar à mesma distância da prefeitura (**P**), do fórum (**F**) e do centro de saúde (**C**).

Observe a figura abaixo, converse com seus colegas e tentem responder: onde deve ser construída a agência bancária (**B**)?



A agência bancária deve ser construída no circuncentro do triângulo PFC.