UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FABRÍCIO MENEZES NETTO DA SILVA

JOGOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM PROBABILIDADE

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FABRÍCIO MENEZES NETTO DA SILVA

JOGOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM PROBABILIDADE

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

São Carlos
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

S586jp	Silva, Fabrício Menezes Netto da. Jogos no processo de ensino-aprendizagem em probabilidade / Fabrício Menezes Netto da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013. 1. Probabilidades. 2. Jogos. 3. Ensino. 4. Matemática. I. Título. CDD: 519.2 (20[a])

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM - UFSCar

Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes
ICMC- USP

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
DM - UFSCar

À minha esposa e à minha família
que compreenderam os períodos de estudo.

“A probabilidade do impossível varia conforme sua força de vontade, sua competência e seu modo de encarar a vida.”

Iedda Carolina

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter dado esta oportunidade de aprendizagem que engrandece o homem e a beleza da vida.

Agradeço aos meus pais por dar toda força e ajuda que necessito, além do amor que tenho por eles.

Agradeço aos familiares que nos apoiam nos nossos esforços e que nos dá força para crescer.

Agradeço aos professores que se esforçam para nos transmitir conhecimentos e que nos incentiva a busca-lo cada vez mais em especial ao meu orientador Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti.

Agradeço aos meus colegas de curso, pois enfrentamos muitas vezes as mesmas dificuldades e encontramos apoio uns nos outros, principalmente André, Bruno, Deivid, Emerson, Fabiano, Gilberto e Luís Alexandre.

Agradeço também aos professores e às equipes gestoras das Unidades Escolares E. E. Prof° Roque Ielo e E. E. Nossa Senhora Aparecida, pela compreensão e pelos votos de confiança.

E por fim, agradeço imensamente à minha esposa Ludmila, pela paciência, pelos incentivos, por ser a paz nos meus momentos de tristeza ou dificuldade e por todo o apoio e amor tanto nos obstáculos cotidianos quanto nos estudos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo incentivar boas práticas pedagógicas almejando a melhor aprendizagem dos alunos em Probabilidade, através de aplicações cotidianas ou dos jogos. Além disso, tem por destaque a proposta de uma sequência didática inspirada em um programa de televisão ("O último passageiro") para o estudo do tema em questão, na qual foi desenvolvida através de simulações do jogo, debates, cálculo de probabilidades e construção de gráficos com os alunos dos 2º e 3° anos do ensino médio da Escola Estadual Professor Roque Ielo, Caconde-SP, de forma a transformar a abordagem teórica deste conhecimento em uma abordagem construtivista estimulando o protagonismo do aluno.

Palavras–chave: Probabilidade, jogos, ensino e Matemática.

ABSTRACT

This work has as a goal to stimulate good pedagogical practices aiming the best learning from students in Probability, through daily applications and/or games. Besides, it has as highlight a teaching sequence proposal inspired by TV Show ("O último passageiro) to analyze this subject, which it was developed through stimulations of game, debates, probability calculation and construction of graphics with students of 2nd and 3rd grade in High School at a public school "Escola Estadual Professor Roque Ielo", Caconde-SP, aiming to transform theoretical approach of this knowledge into a constructivist approach stimulating the student to be the protagonist.

Keywords: Probability, games, teaching and Mathematics.

LISTA DE FOTOS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Já faz algum tempo que, através de avaliações nacionais e internacionais, constatou-se que a Matemática no Brasil não se apresenta em boas posições nos *rankings* anunciados ou com resultados de se orgulhar.

O Programa Internacional de Avaliação dos estudantes (PISA), que representa a avaliação educacional mais importante – e relevante – do mundo revelou que a Educação brasileira ainda está ocupando uma posição baixa: em um ranking de 65 países somos o 53º colocado em Leitura e Ciências e 57º em Matemática.

No âmbito nacional, em 2009, 2010 e 2011, mais da metade dos estudantes da terceira série do ensino médio da rede estadual de São Paulo têm desempenho em Matemática considerado "insuficiente". Segundo os dados do Saresp (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), divulgados pela Secretaria de Estado da Educação, os índices de insuficiência apresentados foram de 58,3%, 57,7% e 58,4% respectivamente.

A situação não seria diferente na E. E. Prof. Roque Ielo em Caconde-SP onde os alunos do ensino médio desta escola são, em sua grande maioria, moradores da zona rural e se dividem em trabalhar na colheita do café e estudar. Muitos deles, até mesmo, não enxergam a necessidade de estudos para sua vida cotidiana e profissional.

Além disso, alguns alunos têm certa defasagem de aprendizagem em Matemática, ou seja, alunos que estão no 2º ou 3º anos do Ensino Médio, mas com dificuldades nas quatro operações fundamentais.

Assim, com oito anos como professor e quatro anos nesta escola pude constatar que é necessário uma forma diferente de se ensinar, em que o quadro e o giz não podem ser a principal forma de aprender, mas sim buscar o protagonismo do aluno para que ele possa construir o conhecimento.

Com essa forma de aprendizagem, o aluno mesmo encontrando obstáculos procurará alternativas para que alcance a solução desejada.

Logo, como a Matemática no Ensino Médio no Brasil precisa de alternativas didáticas que extrapolem a mera apresentação de conteúdos, sugere-se, por meio desta pesquisa, uma maneira diferente de se ensinar probabilidade de forma a tornar a aprendizagem mais prazerosa, divertida e indelével.

No capítulo 1 deste trabalho será feito uma análise do ensino de Probabilidade no Ensino Médio, como o tema é tratado em manuais e apoios didáticos e também será mostrado que uma das melhores formas de se aprender probabilidade é através de jogos e/ou aplicações no cotidiano do aluno.

Já no capítulo 2, será feita uma análise prévia sobre as dificuldades de aprendizagem em Probabilidade dos alunos da escola já mencionada e qual parte desse conhecimento que torna o assunto difícil, monótono e incerto.

No capítulo 3, será apresentado o desenvolvimento teórico sobre Probabilidade, processo histórico, suas definições, abordagens, exemplos e exercícios normalmente encontrados em livros didáticos.

No capítulo 4, será feita a descrição da atividade proposta por este trabalho apresentada através da evolução das dificuldades encontradas pelos alunos.

Já no capítulo 5, será analisado o resultado da atividade e, consequentemente, as vantagens na aplicação da sequência didática apresentada para a aprendizagem dos alunos da referida instituição.

Finalmente, no capítulo 6 conclui-se sobre os benefícios dos jogos no processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade.

1. PROBLEMAS COM O ENSINO DE PROBABILIDADE

A probabilidade nos Ensino Fundamental e Médio, muitas vezes, é deixada de lado ou até mesmo não é ensinada. Segundo Paulo Cezar Pinto Carvalho, a probabilidade, mesmo sendo um tema de grande importância, é pouco explorada, sendo tratada como um apêndice da Análise Combinatória ou até mesmo evitada. Os possíveis motivos para tal fato ocorrer são: a insegurança do professor frente a esse tema, as dificuldades dos alunos quanto à sua compreensão e a falta de apoio didático estimulador e envolvente sobre o tema.

A dificuldade inicial que os alunos enfrentam quando estão aprendendo Probabilidade é a falta do desenvolvimento do raciocínio probabilístico, pois, acreditam que a Matemática é um conhecimento determinístico e que não existe a possibilidade de lidar com fenômenos aleatórios. Sabe-se que essa dificuldade dificilmente é sanada, pois esses alunos chegam à universidade ou ao mercado de trabalho sem saber que a Probabilidade é um conhecimento matemático que trabalha com o “acaso” e que faz muito mais parte do seu cotidiano que a certeza absoluta. Assim, a dificuldade dos alunos, deve-se muito em parte ao fato de que a Probabilidade representa a incerteza inserida em uma disciplina que representa a lógica e a precisão.

Outra dificuldade é a insegurança dos professores que teve sua formação, quase que em sua totalidade, determinística, tanto nos ensinos Fundamental e Médio quanto em sua graduação, o que lhe faz sentir desconforto ao apresentar os fenômenos aleatórios aos alunos. Também contribui para isso o pouco tempo destinado à probabilidade nos diferentes níveis de ensino.

Já quanto ao material didático, nota-se que, no currículo oficial do estado de São Paulo e nos livros didáticos nos quais são os principais, senão os únicos, instrumentos de apoio do professor, a Probabilidade é apresentada através da definição, exemplos e exercícios e não se dedicam a temas contextualizados e jogos, ou seja, a apresentação da Probabilidade é realizada através do formalismo da definição com exemplos de exercícios mais fáceis seguidos por uma lista de atividades maçantes, tornando o assunto enfadonho para o aluno e até mesmo para o professor.

Também é perceptível nos livros didáticos, a falta de exercícios de Probabilidade envolvendo comparações de eventos e perguntas para registrar as impressões dos alunos.

Os livros didáticos, em geral, têm as apresentações das definições sobre Probabilidade seguidas imediatamente de uma lista imensa de exercícios repetitivos, sem contar a falta de conexão desses exercícios com a realidade do aluno. Além disso, nota-se a falta de exemplos que elucidam melhor a apresentação do conteúdo ou que sirvam para orientação dos alunos. Sendo assim, a Probabilidade torna-se um conhecimento em que alguns alunos até conseguem resolver as questões, porém a aprendizagem fica comprometida, pois fica restrito ao uso da fórmula. Assim, há a necessidade de se ensinar Probabilidade através da conjugação da teoria com alguma aplicação no cotidiano, ou seja, fazer o conteúdo ter mais significado para o aluno.

Portanto, segundo Arno Bayer e colaboradores (2005, p.12), torna-se necessário a produção de materiais que sirvam de apoio didático para as aulas de Matemática, bem como aproximar o professor da Probabilidade, de sua evolução, importância e suas aplicações em situações reais.

Isso se deve ao fato de que a Probabilidade tem sua extrema importância dentro do currículo do Ensino Médio, pois é o fundamento matemático que auxilia os alunos na análise e interpretação de eventos e, com isto, na tomada de decisões, até mesmo, futuras.

Deste modo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) ajudam a legitimar que a Probabilidade é muito útil na sociedade atual, ao afirmar que os alunos devem aprender a identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios. Além disso, espera-se que o aluno saia do Ensino Médio sabendo compreender o caráter aleatório dos fenômenos naturais e sociais, utilizar instrumentos adequados para a determinação de amostras e cálculo de probabilidades e aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.

Logo, diante de toda essa importância, Corbalán (2002) considera que os conteúdos em que os alunos apresentam grande dificuldade, deveria, então, ser feito um grande esforço para apresentar esses temas de forma lúdica.

Segundo Lopes e Meirelles (2005), deve-se ter experimentações, observações, registros, coletas e análise de dados de modo interdisciplinar no ensino desses conteúdos que envolvem fenômenos aleatórios para possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do senso crítico e, para com isso, obter melhores resultados na aprendizagem.

Sendo assim, deve-se buscar uma alternativa para que sejam superadas essas dificuldades, como também não se pode deixar de buscar uma metodologia diferenciada para que os alunos tenham maior apreço pela Matemática.

Uma das melhores formas encontradas para apresentar Probabilidade aos alunos é através dos jogos. Entretanto, a literatura sobre jogos e probabilidades para o Ensino Médio é bastante escassa.

Isso se deve ao fato de que o jogo não pode ser meramente divertido e deixar de lado o conhecimento. O jogo deve ser utilizado como uma prática pedagógica que permita a construção do conhecimento e que faça apresentar tópicos matemáticos que se deseja estudar, direta ou indiretamente. Assim, o jogo pode ser utilizado como uma forma de apresentação de um conhecimento e, com isso, transformar positivamente o ensino de Matemática.

Segundo Fernandez (1999), uma forma mais imaginativa de ensinar é ligar a aprendizagem a algo alegre, divertido e prazeroso. O saber tem que ser libertador. Entretanto não se pode pensar em um jogo estritamente para tornar o ato de ensinar divertido. Aprender trabalhando sim, pois a vida nos cobra trabalho, seriedade.

Conforme dispõe Regina Célia Grando (2007, p.43-50), o professor deve entender que a utilização de jogos na sala de aula não pode restringir-se apenas ao caráter motivacional, mas sim partir de uma ação planejada, para ser bem executada, registrada, avaliada e compartilhada pelos alunos, dentro do conhecimento em questão.

Ainda assim, tem-se que ressaltar que os jogos colaboram no desenvolvimento, principalmente, dos raciocínios lógico, dedutivo e indutivo, além de ativar a atenção e a concentração. O desenvolvimento dessas habilidades nos alunos contribui para que eles tenham melhor desempenho e entendimento sobre os conteúdos matemáticos.

Segundo Lopes, Teodoro e Rezende (2011), durante a realização do jogo, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo.

A ideia do uso de jogos como recurso didático deve ser uma busca incessante do professor, tanto pelo seu caráter lúdico, quanto por estimular a participação colaborativa na aprendizagem. Além disso, segundo Hurtado (1999), dificuldades encontradas nesse tipo de experiência podem ajudar a transpor obstáculos de ordem epistemológica, que surgem na construção desse conhecimento.

Sendo assim, busca-se através deste trabalho responder a seguinte pergunta de pesquisa:

Realmente o uso dos jogos traz benefícios à aprendizagem dos alunos sobre probabilidades no Ensino Médio?

Procura-se mostrar que a resposta é afirmativa e, ao mesmo tempo, incentivar essa prática, através de exemplos de tais atividades.

2. ANÁLISE A PRIORI

Logo no início do processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade alguns alunos já apresentam dúvidas/dificuldades pertinentes ao tema, mesmo que a Probabilidade seja um conhecimento apresentado praticamente através de aplicações, como por exemplo, em atividades que envolvem moedas, cartas e dados.

Primeiramente, estes alunos têm dificuldade ou sentem desconforto ao trabalhar com o incerto, em associar probabilidade à chance de algum evento ocorrer, ou ainda, mensurar essa chance. Isso acontece muito quando o professor pergunta qual é a chance de sair cara no lançamento de uma moeda e alguns alunos responderem que sim, uma resposta baseada na possibilidade de sair cara, mas que não atinge a resposta esperada.

Outra dificuldade que os alunos demonstram no decorrer do processo de ensino-aprendizagem é representar a probabilidade por meio de frações. Para eles é mais natural encontrar a probabilidade através da porcentagem. Tanto é que quando o professor pergunta qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda, os alunos com mais facilidade para entender o conceito respondem 50%. Entretanto, isso não garante aos alunos a resposta a todas as perguntas, pois ao perguntar qual é a chance de sair 4 no lançamento de um dado, os alunos demoram para encontrar a porcentagem.

Logo, há a necessidade de mostrar aos alunos uma maneira formal sobre Probabilidade no Ensino Médio para que a busca por esse resultado seja mais clara, rápida e significativa.

Além disso, através dessas informações nota-se que os alunos ainda têm dificuldade em frações e em seus significados, pois ao pedir a transformação dos 50% em fração os alunos, em sua grande parte, não conseguem.

E não podemos deixar de mencionar, ainda sobre frações, que os alunos apresentam muitos automatismos incorretos em Probabilidade. Isso ocorre frequentemente, pois os alunos estão mentalmente condicionados a acreditar que Probabilidade é sempre da forma 1/n, mas espantam-se quando perguntados sobre a probabilidade de tirar uma bola amarela de uma urna com 5 bolas (3 amarelas e 2 verdes) e a resposta não é 1/3 e não é 1/5 que são as primeiras respostas dos alunos.

Além disto, os alunos não conseguem perceber que no lançamento de uma moeda e um dado juntos, a probabilidade de sair o número 4 no dado e cara na moeda é de 1/12. Os alunos respondem às essas perguntas com “1/2” ou “1/6” ou ainda “1/6 e 1/2” sem a multiplicação devida. Os alunos só conseguem obter mais sucesso na resolução após descrever todas as situações possíveis, tornando mais demorado o procedimento, entretanto só assim este conteúdo torna-se mais compreensível para eles.

Nos casos de dificuldades descritos acima, os alunos que apresentavam evolução e adquiriam maior compreensão sobre o conteúdo se veem numa situação desconfortável quando algum assunto novo é trabalhado, principalmente quando estão acostumados a uma forma de resolução de exercícios e situações que lhes são familiares.

Logo, a probabilidade apresenta-se de forma muito vaga e com muitas mudanças em que o aluno não consegue acompanhar todo esse processo.

3. TEORIA DA PROBABILIDADE

Sabe-se que hoje em dia, a Probabilidade é frequentemente lembrada do seu uso apenas em jogos de azar. Entretanto, deve-se salientar que o estudo da Probabilidade tem imensa aplicabilidade na contratação de seguros, principalmente dentre as diversas variáveis que constam no mesmo, tais como, se o motorista é homem ou mulher, se o local de trabalho tem estacionamento próprio ou não e a idade do condutor, dentre outros.

Outra área em que o estudo das Probabilidades é muito utilizado é na Genética, que possibilita a análise das possibilidades das características dos indivíduos, tais como o seu gênero, cor dos olhos, dentre outros. A Probabilidade também possibilita através dos exames de DNA a verificação de parentesco e também colabora com o Projeto Genoma.

Além disso, a Probabilidade também tem sua importância nas linhas de produção, principalmente no produto final. Por exemplo, uma indústria que fabrica lâmpadas, deve constantemente realizar testes para garantir a durabilidade mínima ao consumidor. Já que fazer o teste para todas as lâmpadas é impossível, então este trabalho é feito através de uma amostragem.

3.1. Probabilidade

Segundo Elon Lages Lima e colaboradores (2006, p. 113), experiências que repetidas, sob as mesmas condições, produzem geralmente resultados diferentes são chamadas de aleatórias.

Ainda segundo Manuela Neves (2012), a experiência aleatória é um procedimento que pode ser repetido nas mesmas condições ou, ao menos, em condições semelhantes. Além disso, mesmo que os resultados dessa experiência sejam imprevisíveis, é possível observar uma frequência estável dos resultados.

Sendo assim, em uma experiência aleatória, apesar da imprevisibilidade, pode-se observar ou ainda descrever, posteriormente ao evento ou à repetição do mesmo, todos os resultados possíveis, isto é, pode-se conhecer todos resultados da experiência e, com isso, estes ficam restritos a um conjunto finito de possibilidades.

Exemplo: No sorteio da Mega-Sena, sabe-se que não é possível conhecer qual será o primeiro número do próximo sorteio, porém sabe-se também que o primeiro número que será sorteado deverá ser um número entre 1 e 60, inclusive.

Este conjunto finito de resultados possíveis deste experimento é denominado espaço amostral do experimento.

Exemplo: Em um lançamento de uma moeda, tem-se que os possíveis resultados são: cara e coroa. Portanto, o espaço amostral representado por A, será

A= {cara, coroa}.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.

3.1.1. Definição clássica (Fermat e Pascal)

Pela necessidade de quantificar a possibilidade de um determinado evento ocorrer que se buscou formular a Teoria das Probabilidade.

Segundo Elon Lages Lima e seus colaboradores (2006, p. 115), a probabilidade de um evento X ocorrer é representada pela razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis.

$$P(X) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Esta definição é a mais utilizada na maioria dos livros didáticos do Brasil.

Entretanto, para a utilização dessa abordagem há a necessidade da equiprobabilidade dos eventos, ou seja, a probabilidade de cada evento ocorrer dentre os possíveis é igual e também o espaço amostral tem que ser um conjunto finito.

Segundo Lydio Pereira de Sá, a probabilidade de um evento X, que é um subconjunto do espaço amostral A, de resultados equiprováveis é:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(A)}$$

onde n(X) é o número de elementos de X e n(A) é o número de elementos de A.

Com isto, temos que a Probabilidade (P) é uma aplicação que associa cada evento de A a um número real não-negativo:

Propriedade 1:para todo X subconjunto de A, tem-se que $0 \leq P(X) \leq 1$;

Propriedade 2: P(A)= 1;

Propriedade 3: P(∅) = 0;

Propriedade 4: Se X e Y subconjuntos próprios de A, tais que X∩Y=∅, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente, então P(X∪Y) = P(X) + P(Y).

Exemplo: Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado?

Os resultados possíveis no lançamento do dado são: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Os resultados favoráveis no lançamento do dado são: 2, 4, 6.

Sendo assim, temos que:

$$P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ .$$

As mesmas propriedades podem ser apresentadas através da noção de conjunto:

Propriedade 1: para todo X subconjunto de A, tem-se que 0 ≤ n(X) ≤ n(A);

Propriedade 2: $P(A) = \frac{n(A)}{n(A)} = 1;$

Propriedade 3: Se X e Y subconjuntos próprios de A, disjuntos, então n(X∪Y)=n(X)+n(Y).

3.1.2. Definição frequentista

Segundo Elon Lages Lima e seus colaboradores (2006, p.116), "...ao se repetir uma experiência aleatória n vezes e a ocorrência de um determinado evento X for em m dessas experiências...", tem-se que a probabilidade desse evento, então, "... será calculada através da frequência relativa do evento X...".

Sendo assim, segundo Mario Antonio Gneri, "...considera-se um experimento aleatório que possa ser repetido nas mesmas condições um número "grande" de vezes...". Para calcular a probabilidade de um determinado evento X, basta verificar quantas vezes esse evento ocorreu dentre as diversas vezes que o experimento foi repetido, ou seja, será a razão entre o número de vezes que o evento X pelo número de vezes que o experimento foi repetido.

$$P(X) = \frac{\text{número de vezes que o evento X ocorreu}}{\text{número total de repetições.}}$$

Entretanto, como a abordagem frequentista depende do número de repetições de uma experiência aleatória tem-se que não se sabe ao certo o momento de parar as repetições, o que torna o experimento limitado.

Talvez por isso e por utilizar noções de limite que calcular a probabilidade de um determinado evento ocorrer através da abordagem frequentista é pouco utilizado nas salas de aula. Entretanto, seria uma forma interessante de fazer os alunos comprovarem os resultados obtidos, até então, intuitivamente.

Exemplo de Atividade: Pode-se separar a sala em grupos de 2 ou 3 alunos para que cada grupo faça 10 lançamentos de uma moeda e marque os resultados. Após a realização dessa atividade, deve-se fazer levantamento dos resultados e calcular a frequência relativa dos eventos. Pode-se notar que os resultados não estarão próximos dos calculados pela definição clássica. Entretanto, se a atividade se repetir, agora com mais lançamentos, poderá ser verificado que as frequências tenderão cada vez mais para os resultados desejados.

3.1.3. Definição Axiomática (Kolmogorov)

No século XIX, Kolmogorov contribuiu para o desenvolvimento da Probabilidade com a sua axiomatização, pois até então as definições utilizadas eram basicamente implícitas.

Segundo Silva (2002) e Coutinho (1996), o objetivo de Kolmogorov era explicitar e esquematizar o conjunto de axiomas que já estavam sendo usados. Além disso, a sua formulação não era incompatível com as definições clássicas e frequentista, segundo Ara (2006) e Cabral (2009).

Segundo Mário Antônio Gneri e Paulo Soares, temos:

Definição: Seja **A** um conjunto não vazio. A probabilidade (P) em A é uma função que associa subconjuntos X de A um número real P(X) que satisfaz:

1) *Para todo* $X \subseteq A$, vale que $0 \leq P(X) \leq 1$;
2) $P(A) = 1$

3) $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_i)$

Dos axiomas podem ser obtidas as seguintes propriedades para X e Y subconjuntos do espaço amostral A:

P1) $P(\emptyset) = 0$;

P2) $P(X^c) = 1 - P(X)$;

P3) se $X \subseteq Y$, então $P(X) \leq P(Y)$ e $P(Y-X)=P(Y)-P(X)$;

P4) $P(Y-X) = P(Y)-P(Y \cap X)$;

P5) $P(X \cup Y) = P(X)+P(Y) - P(X \cap Y)$

As demonstrações dessas propriedades estão no Apêndice A.

3.1.4. Probabilidade Condicional

Segundo Elon Lages Lima e seus colaboradores (2006, p.124), temos que dados dois eventos X e Y, com $P(X) \neq 0$, a probabilidade condicional de Y na certeza de que X ocorreu é o número

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

A Probabilidade condicional é uma atualização da Probabilidade de determinado evento devido o conhecimento de que outro evento já tenha ocorrido.

Pode-se perceber pela formulação da Probabilidade condicional que caso $X \cap Y = \emptyset$, o seu resultado será 0. Logo, fará mais sentido a Probabilidade condicional quando os eventos não são disjuntos, ou seja, quando os eventos são dependentes.

Exemplo: Qual é a probabilidade de sair o número 4 no lançamento de um dado, sabendo que saiu um número par?

Espaço Amostral (A): {1,2,3,4,5,6}

Resultados pares (Y): {2,4,6}

Resultado favorável (X): {4}

A probabilidade de sair 4 no lançamento de um dado é 1/6, ou seja $P(X \cap Y)= 1/6$.

Já a probabilidade de sair um número par é 1/2, isto é, P(Y) = 1/2.

Sendo assim, $$P(X|Y) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Da definição de Probabilidade condicional, pode-se calcular também a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B, do mesmo espaço amostral, P(A ∩ B) = P(B) . P(A/B).

3.1.5. Eventos Independentes

Dois eventos são independentes quando o resultado de um não tem dependência do resultado do outro.

Dessa maneira, se dois eventos são independentes, a probabilidade de que eles realizem-se, simultaneamente, é igual ao produto das probabilidades da realização dos dois eventos.

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

Exemplo: Qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda e sortear uma carta de copas de um baralho?

Probabilidade de sair cara: P(X) = 1/2

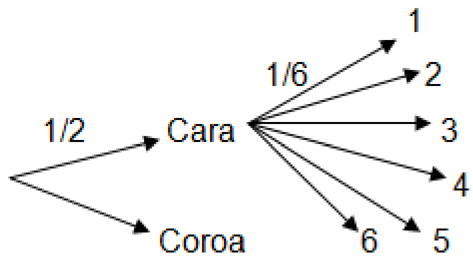
Probabilidade de sortear a carta sete de copas: P(Y) = 13/42

A Probabilidade de ocorrer os dois eventos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{52} = \frac{13}{104} = \frac{1}{8}$$

Além das definições sobre Probabilidade, muitas vezes, a Probabilidade é calculada utilizando o diagrama de árvore, principalmente, para eventos independentes e Probabilidade condicional, pois com este diagrama é possível todos os resultados possíveis.

Exemplo: Qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda e 1 no lançamento de um dado?



Sendo assim, a probabilidade de sair cara no lançamento da moeda e um no lançamento do dado é de 1/2 .1/6 = 1/12

4. DESCRIÇÃO DO JOGO APLICADO

A atividade que será proposta foi inspirada em uma parte de um programa de televisão chamado “O Último Passageiro” que passa na REDETV! aos domingos por volta das 19 horas.[1]

Essa parte do programa que é ressaltada das demais é conhecida como “Prova da Esteira” onde os alunos ficam divididos em três equipes coloridas (azul, verde e vermelho). Os participantes de cada equipe ficam em fila sobre uma esteira e, dispostos dessa maneira, participam de um jogo de perguntas e respostas.

Uma dessas equipes iniciará o jogo, sendo que o primeiro integrante tentará responder corretamente a uma pergunta formulada pelo apresentador. Caso responda corretamente, este integrante embarcará em um ônibus cenográfico de sua equipe e o integrante que está imediatamente atrás terá a oportunidade de responder à outra pergunta. Caso responda errado, o aluno permanece no mesmo lugar e a outra equipe testará sua sorte e seus conhecimentos.

A prova da esteira termina quando todos os participantes de uma equipe que estavam na esteira embarcam no ônibus, exceto o último da fila que é o responsável pela última disputa das equipes que pode representar a vitória de fato. As outras equipes mesmo perdedoras nessa prova também embarcarão todos os seus integrantes, exceto o último, porém isso afetará o resultado na próxima etapa.

A equipe que embarcar primeiro todos os participantes necessários irá receber duas chaves numeradas; já as outras equipes receberão um número maior de chaves que depende do número de participantes que não conseguiram embarcar[2].

Para melhor explicação, suponhamos que a equipe verde embarcou todos os seus participantes (exceto o último), que dois participantes da equipe vermelha não conseguiram embarcar e que o mesmo aconteceu com cinco participantes da equipe azul. Assim, a equipe verde recebe 2 chaves, já a equipe vermelha recebe 3 chaves e a equipe azul 6 chaves. Apenas uma das chaves que cada equipe recebe irá “ligar” o ônibus. Percebe-se que a equipe que tem melhor desempenho no jogo de perguntas e respostas sempre receberá duas chaves e as outras equipes irão

---

[1] http://www.youtube.com/watch?v=vyMGdPpTpYQ.
[2] http://www.youtube.com/watch?v=uvTzsNwfOvQ.

receber sempre uma chave a mais que o número de participantes de sua equipe que não embarcaram.

Após essa distribuição das chaves, a equipe com menor número de chaves tem a oportunidade de escolher a chave e testá-la para tentar ligar o ônibus. Caso acerte a chave, a equipe vence de fato, caso erre a chave a chance passará para outra equipe. A 2ª equipe segue o mesmo procedimento, escolhe a chave e testa, caso acerte, vence o jogo, caso erre a chance passará para a 3ª equipe, aquela que ainda não teve oportunidade de escolher e testar a chave. Caso acerte, vence, caso erre a chance retornará para a 1ª equipe, e assim por diante, até que haja um vencedor.

Sendo assim, no exemplo citado, a equipe verde terá, intuitivamente, maior chance de vencer de fato, ligando seu ônibus.

4.1. Desenvolvimento da Sequencia Didática

4.1.1. Primeira Atividade – Jogo de Perguntas e Respostas

Inicialmente foi proposto aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio do período vespertino da unidade escolar acima mencionada, uma simulação do jogo conforme as regras do programa, com algumas alterações. Uma delas foi de que o último integrante das fileiras também devia responder a uma pergunta, ou seja, todos os integrantes tinham que acertar para ingressar no ônibus. Outra alteração foi que como não se tem um ônibus cenográfico foi destinado um espaço lateral do pátio para aqueles que acertavam e deveriam embarcar no ônibus e, ao invés de ligar o ônibus, foi disponibilizado caixas com cadeados.

Entretanto, a alteração mais drástica foi quanto ao número de equipes que foi reduzido para apenas duas equipes, ao contrário do programa, que são três equipes.

Essa estratégia foi pensada para que a dificuldade da atividade fosse gradativa e até mesmo para que se pudesse notar o que o aluno conseguiu desenvolver e o que conseguiu assimilar do conhecimento.

Para garantir maior equilíbrio entre as equipes, a seleção dos alunos foi realizada pelo professor, para evitar que as equipes fossem formadas de acordo com a afinidade entre os alunos. Essa atitude culminou efetivamente em uma competição mais acirrada.

As perguntas foram de variados temas, dentre atualidades, conhecimentos gerais e matemática, e foram apresentadas pelo professor através do datashow no pátio da escola, conforme se pode perceber pelas imagens a seguir.

Foto 1 – Apresentação das perguntas feitas pelo professor.

Foto 2 – Alunos organizados em equipes.

Quando o aluno acertava a pergunta, ele ia para o espaço lateral destinado a sua equipe que continuava respondendo às perguntas, já quando errava, permanecia na fileira, dando oportunidade para a outra equipe responder. O jogo terminou quando todos os alunos de uma fileira conseguiram ir para este espaço lateral.

Nesta parte da atividade, os alunos demonstraram muito interesse por ser uma atividade dinâmica e muita ansiedade pelo fato de ter que responder a uma pergunta surpresa ou pelo fato de torcer para que sua equipe ganhe, conforme imagens.

Foto 3 – Concentração das equipes durante o jogo de perguntas e respostas.

Quando constatada a vitória de uma das duas equipes no jogo de perguntas e respostas, todos os participantes das duas equipes se reuniram e foram apresentadas a eles duas caixas com cadeado. A equipe que venceu, recebeu 2 chaves e a outra equipe n+2 chaves, sendo n o número de participantes que não conseguiram "embarcar", conforme a figura abaixo.

Foto 4 – Situação de cada equipe, após o jogo de perguntas e respostas.

O líder de cada equipe (último participante da fileira) foi o encarregado de escolher a chave que desejava para tentar abrir o cadeado e, consequentemente, a caixa.

Foto 5 - Finalização da 1ª etapa da Sequencia Didática: escolha das chaves.

A equipe que venceu o jogo de perguntas e respostas teve o direito de escolher a chave primeiro e testá-la para tentar abrir a sua caixa. Caso não conseguisse abrir, a chance passaria para outra equipe, dando oportunidade de escolher e testar a sua chave, e, assim, sucessivamente, até que alguma equipe obtenha êxito na abertura da sua caixa. No caso em questão, a equipe “B”, que foi a vencedora, obteve sucesso já na primeira tentativa.

Para realização dessa atividade foram necessárias duas aulas.

4.1.2. Segunda Atividade – Perguntas Discursivas

Após a simulação do jogo proposto, foram entregues para os alunos folhas impressas com perguntas para que estes se reunissem em grupos de até 03 pessoas e respondessem ao questionário apresentado.

Através dessa atividade foi trabalhado com os alunos a percepção de chance de outras possibilidades de desfecho do jogo, bem como análise crítica, por meio de questões discursivas, sobre as diversas situações injustas que poderiam ocorrer durante o desenvolvimento do jogo, a exemplo do que ocorre quando todas as equipes terminam com mais de dois participantes na “esteira”, conforme link do vídeo http://www.youtube.com/watch?v=zhA6NCCN0MM. Neste vídeo, ao término do tempo destinado às perguntas, nenhuma equipe conseguiu atingir o objetivo do jogo, qual seja, o embarque de todos os integrantes no ônibus. A equipe verde terminou com 3, a equipe vermelha com 4 e a equipe azul com 5 participantes na esteira. Assim, receberam respectivamente, 2, 5 e 6 chaves cada equipe, o que influencia significativamente no resultado, pois o correto seria cada equipe receber uma chave a mais do que o número de participantes, ou seja, 4,5 e 6 chaves.

Foto 6 – Resolução da folha de atividades.

FOLHA DE ATIVIDADES

Neste momento, alguns questionamentos referentes a situações que podem ocorrer no jogo (considere a Equipe A vencedora no jogo de perguntas e respostas):

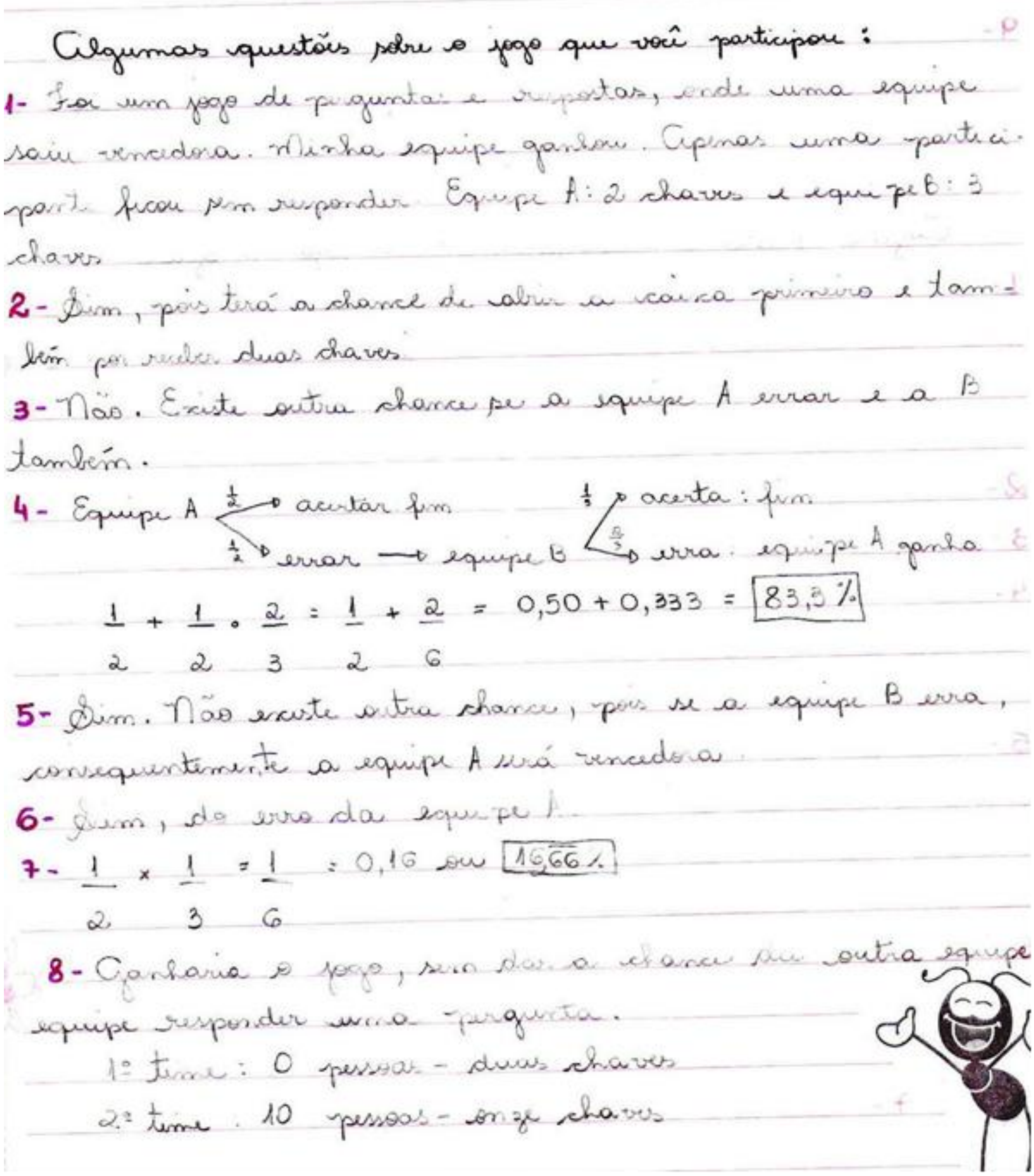
1) *O que de fato ocorreu no jogo em que você participou? A sua equipe ganhou ou perdeu? Quantos participantes ficaram sem responder na equipe perdedora? Quantas chaves cada equipe recebeu?*
2) *A chance da equipe A acertar primeiro é maior que a chance da equipe B?*
3) *A equipe A só consegue ganhar se escolher a chave correta na primeira tentativa?*
4) *Qual é a probabilidade da equipe A conseguir abrir a caixa primeiro?*
5) *A equipe B só consegue ganhar se escolher a chave correta na primeira tentativa?*
6) *Essa chance da equipe B ganhar depende de alguma coisa?*
7) *Qual é a probabilidade da equipe B conseguir abrir a caixa primeiro?*
8) *O que aconteceria se a equipe que começa o jogo não errar nenhuma pergunta?*
9) *Essas probabilidades são sempre as mesmas ou depende de algum fator para que elas sejam maiores ou menores? Justifique.*

Agora alguns casos particulares:

1) *Se as equipes começassem com números diferentes de participantes, isso altera a probabilidade de cada equipe?*
2) *Se dentre as chaves que uma equipe recebe não estiver a única chave que abrirá o cadeado, então a chance dessa equipe ganhar é_____. A chance da equipe adversária ganhar é_____.*
3) *Se em determinado momento a equipe A tem 2 participantes para responder e a equipe B tem 3 participantes e o apresentador quer terminar o jogo. É certo a equipe A receber 2 chaves e a equipe B receber 5 chaves, conforme a regra do jogo?*
4) *Caso respondeu sim na pergunta anterior, justifique. Caso respondeu não, qual seria então a melhor forma de distribuir as chaves?*
5) *Se o apresentador interrompeu o jogo com a equipe A com 4 participantes e a equipe B com 8 participantes. Seria justo ambas as equipes receberem 2 chaves? Isso pode alterar o desfecho do jogo?*
6) *E se no momento em que o apresentador interrompeu o jogo e o numero de participantes é igual. Quem escolhe a chave primeiro? Alguma equipe terá mais chance de ganhar que a outra?*
7) *E se a equipe vencedora passar a receber 3 chaves, o que alterará no jogo?*
8) *Se a equipe vencedora passar a receber 3 chaves, a equipe vencedora terá duas chances de vencer o jogo? E a equipe perdedora continuará com apenas uma chance de ganhar?*
9) *O que de fato ocorreu no jogo em que você participou?*

Ilustração 1 – Questões discursivas que incentivam o debate sobre as diversas variações do jogo.

Nesta atividade, os alunos não encontraram muita dificuldade até porque são perguntas, de certa forma simples e que muitas vezes representavam suas opiniões. Entretanto, o fato do trabalho ter sido realizado em grupo para o preenchimento do questionário incentivou no debate entre eles e, com isso, os próprios alunos conseguiram concluir a tarefa sem a necessidade da ajuda do professor e, assim, contribuiu para uma aula muito produtiva. Para essa atividade foram necessárias duas aulas.



Algumas questões sobre o jogo que você participou:

1- Foi um jogo de perguntas e respostas, onde uma equipe saiu vencedora. Minha equipe ganhou. Apenas uma participante ficou sem responder. Equipe A: 2 chaves e equipe B: 3 chaves

2- Sim, pois terá a chance de abrir a caixa primeiro e também por receber duas chaves

3- Não. Existe outra chance se a equipe A errar e a B também.

4- Equipe A $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ acertar fim; $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ errar → equipe B $\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ acerta: fim; $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ erra. equipe A ganha

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = 0,50 + 0,333 = \boxed{83,3\%}$$

5- Sim. Não existe outra chance, pois se a equipe B erra, consequentemente a equipe A será vencedora.

6- Sim, do erro da equipe A.

7- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0,16$ ou $\boxed{16,66\%}$

8- Ganharia o jogo, sem dar a chance de outra equipe equipe responder uma pergunta.

1º time: 0 pessoas - duas chaves

2º time: 10 pessoas - onze chaves

Ilustração 2 – Respostas dos alunos à folha de atividade.

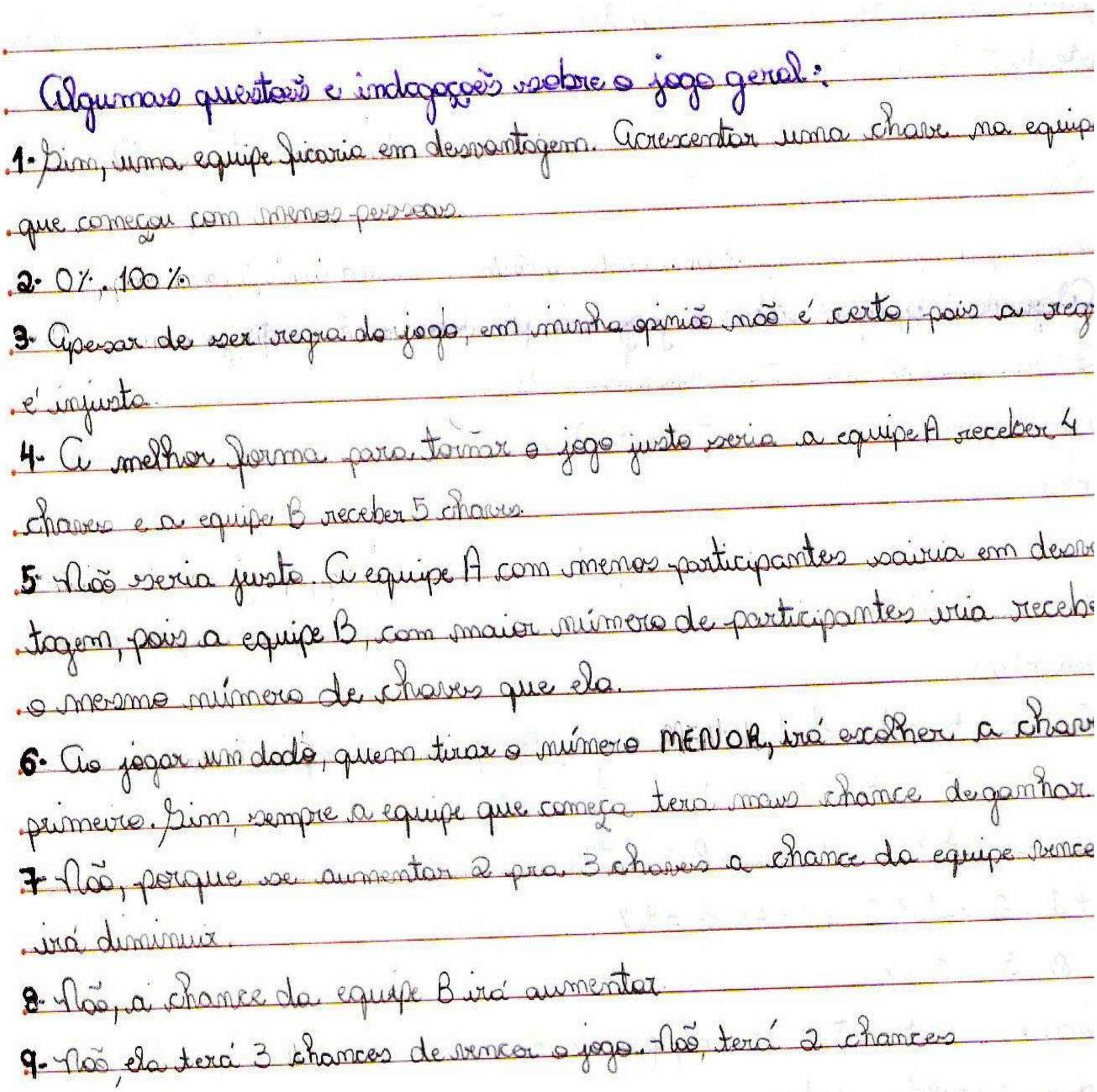

Algumas questões e indagações sobre o jogo geral:
1- Sim, uma equipe ficaria em desvantagem. Acrescentar uma chave na equip
que começou com menos pessoas.
2- 0%, 100%
3- Apesar de ser regra do jogo, em minha opinião não é certo, pois a reg
é injusta.
4- A melhor forma para tornar o jogo justo seria a equipe A receber 4
chaves e a equipe B receber 5 chaves.
5- Não seria justo. A equipe A com menos participantes sairia em desv
tagem, pois a equipe B, com maior número de participantes iria receb
o mesmo número de chaves que ela.
6- Ao jogar um dado, quem tirar o número MENOR, irá escolher a chav
primeiro. Sim, sempre a equipe que começa terá mais chance de ganhar.
7- Não, porque se aumentar 2 pra 3 chaves a chance da equipe vence
irá diminuir.
8- Não, a chance da equipe B irá aumentar
9- Não, ela terá 3 chances de vencer o jogo. Não, terá 2 chances

Ilustração 3 – Continuação das respostas da folha de atividades.

4.1.3. Terceira Atividade – Formalização do cálculo da Probabilidade

Nessa atividade, a proposta está baseada estritamente em cálculos e análise da tabela.

Incialmente é proposto a construção e o preenchimento de uma tabela com as probabilidades onde o número de chaves da equipe perdedora varia, ou seja, calcular probabilidade de cada equipe vencer, caso a equipe perdedora receba 2, 3, 4, 5, 6, ..., n chaves conforme tabela abaixo:

Calcular as probabilidades em diversos casos:

TABELA A SER PREENCHIDA PELOS ALUNOS E OS RESULTADOS ESPERADOS

Nº de chaves Equipe A	Nº de chaves Equipe B	Fração que representa a chance da equipe A vencer	% da equipe A vencer	Fração que representa a chance da equipe B vencer	% da equipe B vencer
2	3				
2	4				
2	5				
2	6				
2	7				
2	8				
2	9				
2	10				
2	11				
2	N				

Ilustração 4 – Cálculo das probabilidades, com valores aproximados das porcentagens, para o jogo com duas equipes.

Num primeiro momento, os alunos conseguiam expressar verbalmente a forma de calcular, porém não conseguiam formalizar esse pensamento. Foi necessário, portanto, a intervenção do professor para ilustrar o raciocínio e, assim, com auxílio de um esquema conseguiram calcular essas probabilidades.

Nota-se que nessa atividade não se cobrou probabilidade só em porcentagem, com seus valores aproximados, mas também na forma de fração exatamente para forçar também este raciocínio.

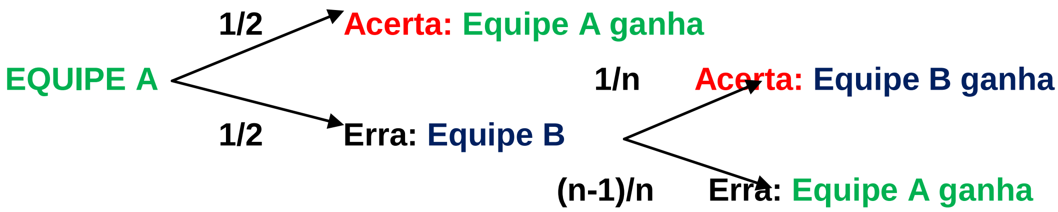


Ilustração 5 - Representação das probabilidades através do diagrama de árvore, onde n é o número de chaves que a Equipe B recebe.

Os alunos nesta atividade, apesar de ser um pouco mais complexa e com dificuldades iniciais, tanto na formalização do raciocínio quanto com frações, conseguiram compreender, após a intervenção, o esquema e realizaram os cálculos necessários para o preenchimento da tabela. Essa atividade levou duas aulas para ser concretizada.

Também nessa atividade pode–se perceber em uma das linhas da tabela, a generalização das probabilidades através do número n de chaves e assim a apresentação de uma fórmula de acordo com o número de chaves que a equipe perdedora recebe. Apesar da dificuldade de alguns alunos na realização da tarefa, eles conseguiram concluí-la com êxito.

Um fato interessante que foi observado durante essa atividade, foi que um grupo de alunos, quando do preenchimento da tabela, percebeu que havia uma sequência numérica nas respostas e assim, eles conseguiram preencher a tabela sem a necessidade da realização dos cálculos, antes mesmo da generalização.

Nº de chaves Equipe A	Nº de chaves Equipe B	Fração que representa a chance da equipe A vencer	% da equipe a vencer	Fração que representa a chance da equipe B vencer	% da equipe b vencer
2	3	5/6	83,3%	1/6	16,6%
2	4	7/8	87,5%	1/8	12,5%
2	5	9/10	90,0%	1/10	10,0%
2	6	11/12	91,6%	1/12	8,3%
2	7	13/14	92,8%	1/14	7,1%
2	8	15/16	93,7%	1/16	6,2%
2	9	17/18	94,4%	1/18	5,5%
2	10	19/20	95,0%	1/20	5%
2	11	21/22	95,4%	1/22	4,5%
2	N	$\frac{2N-1}{2N}$	tende à 100%	$\frac{1}{2N}$	tende a 0%

Ilustração 6 – Tabela preenchida pelos alunos para o jogo com 2 equipes, com valores aproximados das porcentagens.

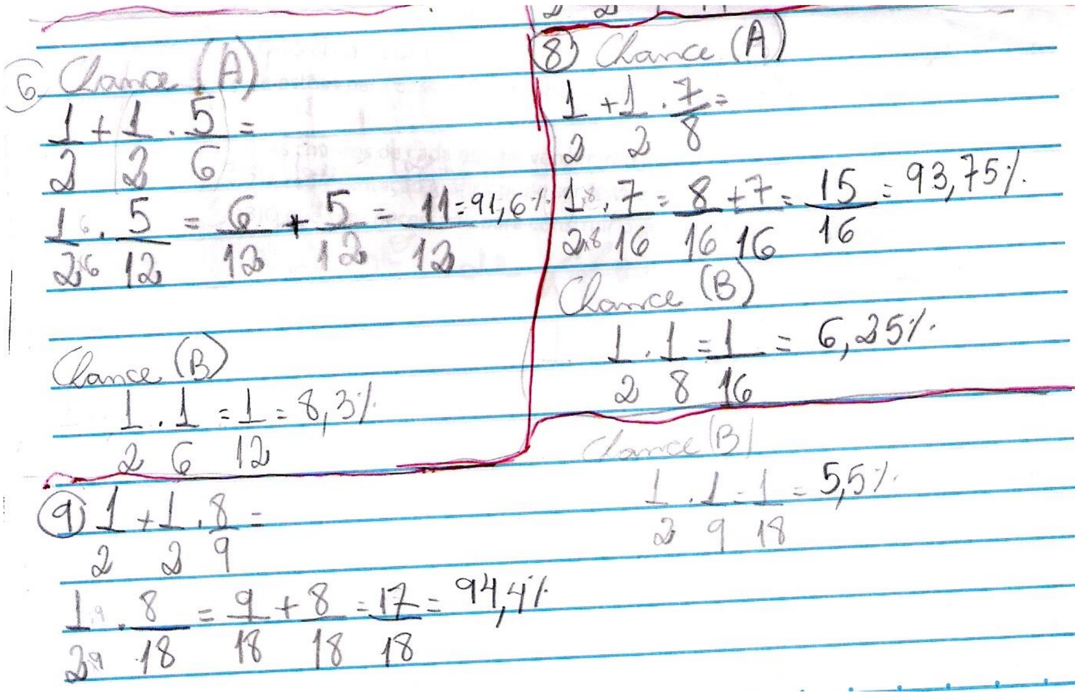


Ilustração 7 – Apresentação de alguns cálculos feitos pelos alunos para preenchimento da tabela.

4.1.4. Quarta Atividade – Representação Gráfica em Cartolinas

Já com a tabela preenchida, os alunos fizeram o uso dela para representar essas informações através de gráficos construídos em cartolinas. Eles construíram o plano cartesiano onde no eixo das abscissas ficava o número de chaves da equipe perdedora e no eixo das ordenadas ficava a chance de determinada equipe vencer, apresentada em porcentagem.

Foto 7 – Início da quarta atividade: elaboração dos gráficos em cartolina.

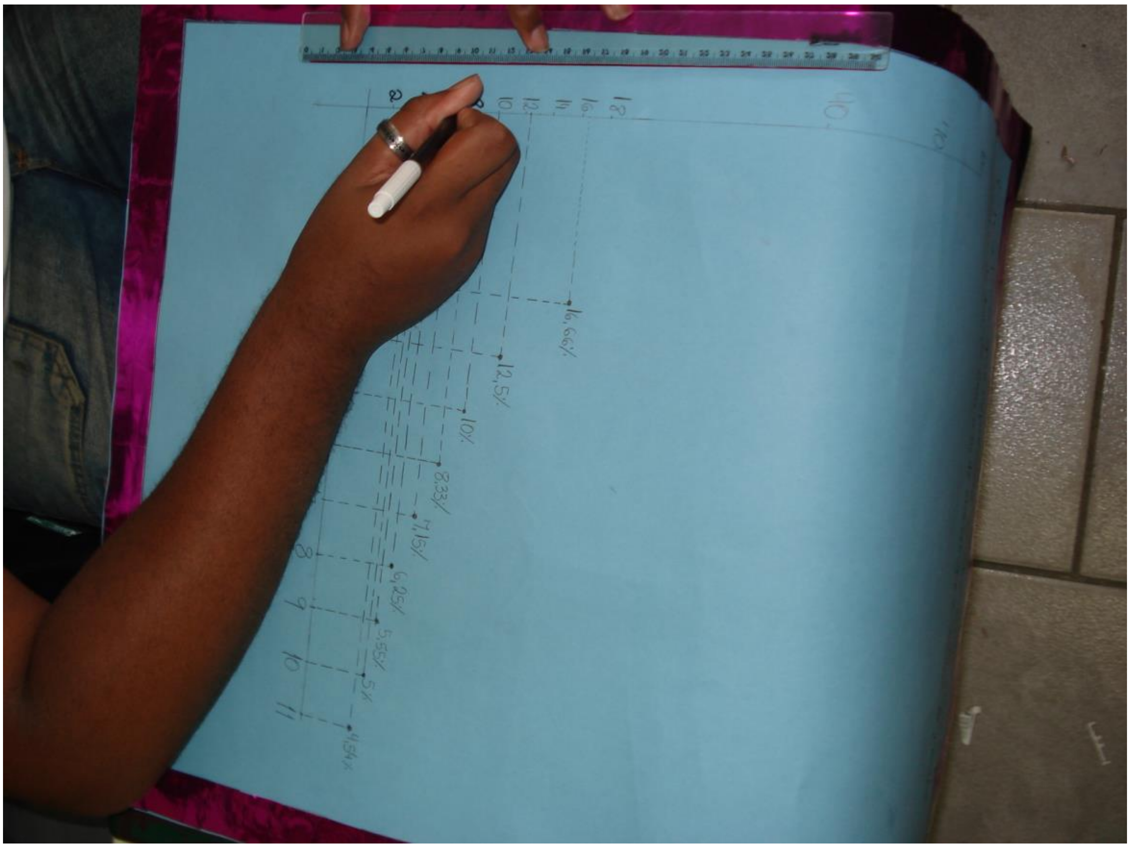


Foto 8 – Construção do plano cartesiano.

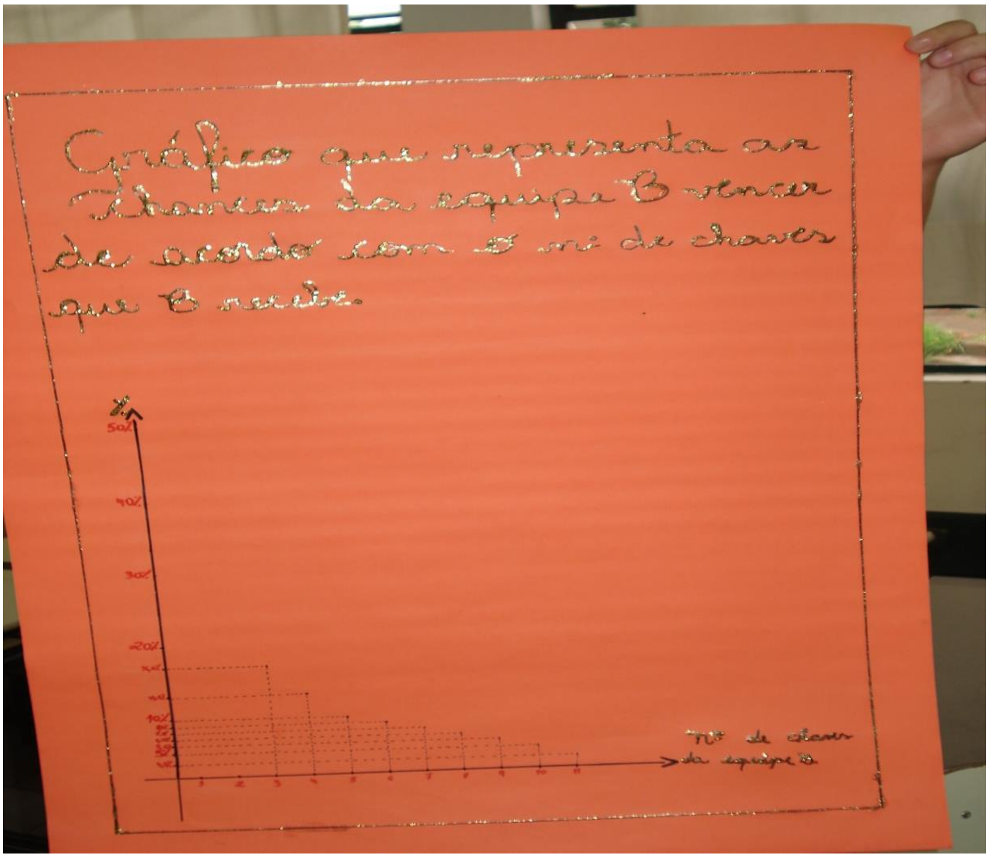


Foto 9 – Finalização da representação gráfica das probabilidades.

Acredita-se que esta sequência didática pode ser proposta no 9º ano do Ensino Fundamental, pois não há nenhum conceito que extrapola as habilidades dos alunos, ou seja, terão apenas as mesmas dificuldades descritas anteriormente.

4.1.5. Quinta Atividade – Questões para refletir e incentivar o debate

Após todo esse trabalho, pode-se levantar algumas questões, caso nenhum aluno tenha comentado antes, referentes ao jogo com 3 equipes.

Questões para os alunos responderem:

1) As chances de cada equipe vencer irão mudar?

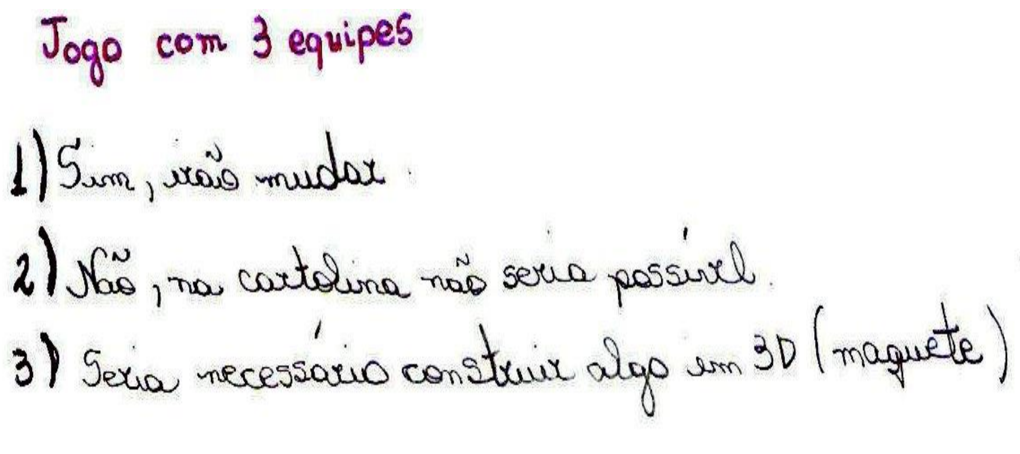
2) A representação gráfica pode ser feita em uma cartolina?

3) O que será necessário para construir o gráfico dessas probabilidades?

Ilustração 8 – Questões discursivas sobre o jogo com três equipes.

Os alunos tentaram, verbalmente, responder algumas questões, até mesmo pela euforia de mostrar que estavam entendendo e, assim, eles responderam algumas perguntas sobre tal assunto, formalmente.

Abaixo estão algumas das respostas fornecidas pelos alunos:


Jogo com 3 equipes

1) Sim, irão mudar.

2) Não, na cartolina não seria possível.

3) Seria necessário construir algo em 3D (maquete)

Ilustração 9 - Uma das respostas mais encontradas nessa atividade.

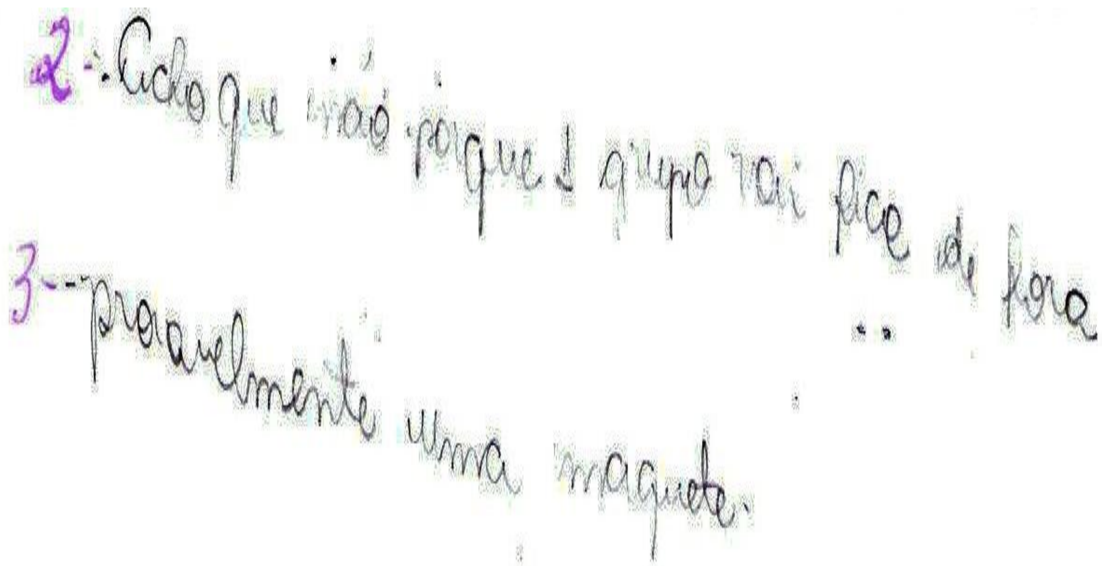


Ilustração 10 – Nessa questão os alunos percebem que, na cartolina, uma das equipes ficaria de fora da representação gráfica.

Entre essas perguntas devemos ressaltar a de n° 4 o qual questiona como representar graficamente o jogo de 03 equipes. Os alunos respondem que não dá para fazer em cartolinas, pois agora não tem só as equipes A e B. Entretanto, não conseguiram de prontidão a resposta, criando assim, um debate de como realizar a representação gráfica.

Nas salas onde a atividade foi experimentada os alunos conseguiram responder que precisava de mais um eixo, porém não conseguiram direcioná-lo.

4.1.6. Sexta Atividade – Tabela de probabilidades com 3 equipes.

Após todo o debate e os alunos responderem as questões, foi entregue para o grupo de alunos (no máximo com 08 integrantes), uma tabela, onde o número de chaves das equipes B e C varia, e junto a essa tabela todo o material para representar os gráficos (isopor, palitos, tintas e jornais).

Foi surpreendente, pois os alunos fizeram sozinhos, o esboço do esquema para três equipes, sem a necessidade de intervenção do professor. Também fizeram alguns cálculos, um pouco mais complexos e preencheram a tabela.

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	3	3			
2	3	4			
2	3	5			
2	3	6			
2	3	7			
2	3	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	4	4			
2	4	5			
2	4	6			
2	4	7			
2	4	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	5	5			
2	5	6			
2	5	7			
2	5	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	6	6			
2	6	7			
2	6	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	7	7			
2	7	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	8	8			

Ilustração 11 – Cálculo das probabilidades para o jogo com 3 equipes, com valores aproximados das porcentagens.

.

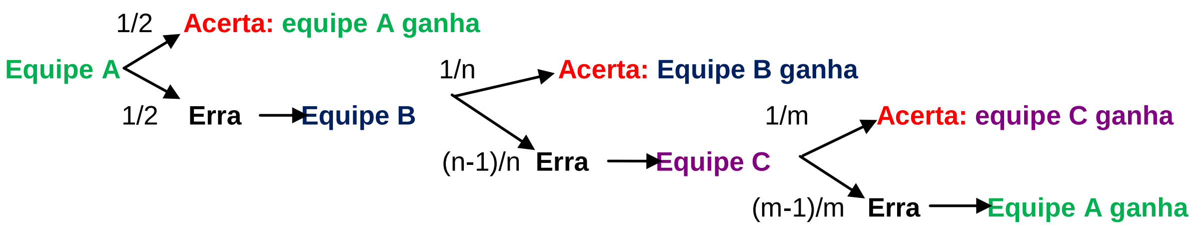


Ilustração 12 - Representação das probabilidades através do diagrama de árvore onde n é o número de chaves que a equipe B recebe e m o numero de chaves que a equipe C recebe.

Os alunos tentaram preencher a tabela de forma bem rápida para descobrir, enfim, como representar graficamente o jogo com três equipes, pois os alunos haviam constatado, após o debate realizado, que não seria possível fazer em cartolinas.

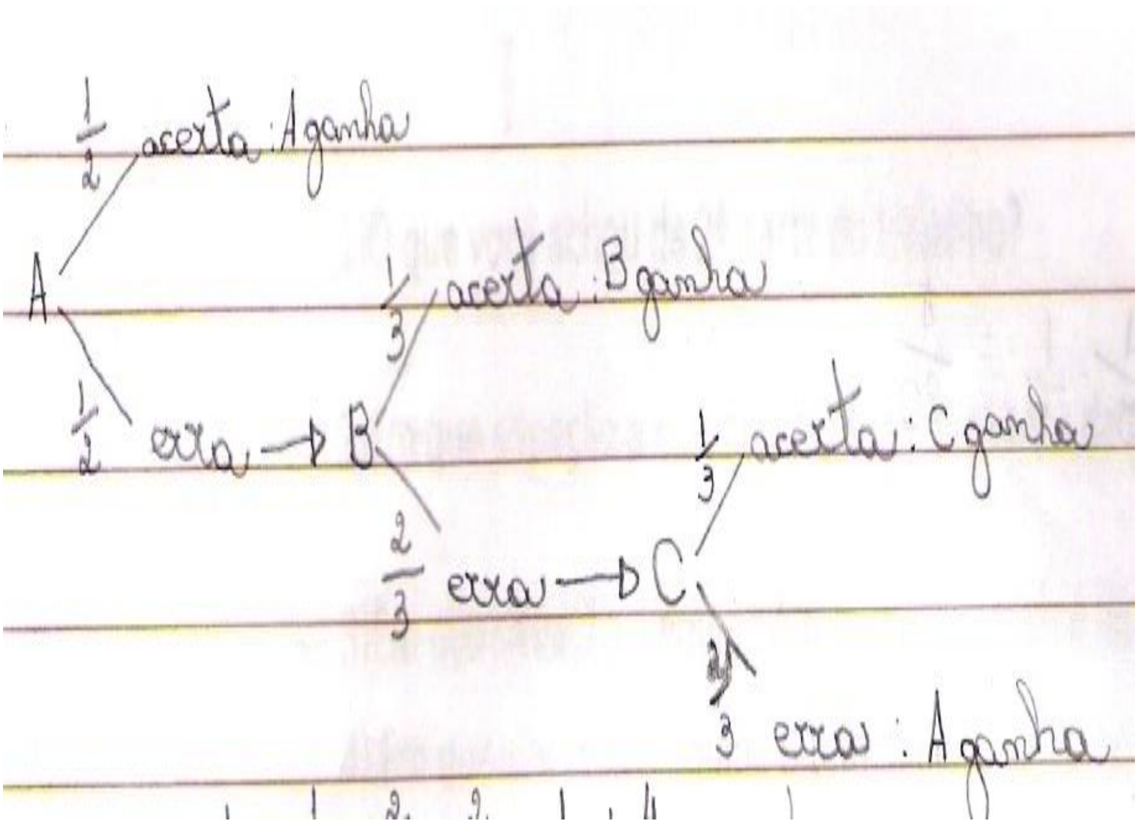


Ilustração 13 – Diagrama de Árvore feito pelos alunos

Foi convencionado que a equipe vencedora será a equipe A, a equipe B será a 2ª colocada e consequentemente a equipe C será a 3ª colocada, sem perda de generalização.

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	3	3	72,2%	16,6%	11,1%
2	3	4	75,1%	16,6%	8,3%
2	3	5	76,8%	16,6%	6,6%
2	3	6	77,9%	16,6%	5,5%
2	3	7	78,7%	16,6%	4,7%
2	3	8	79,3%	16,6%	4,1%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	4	4	78,2%	12,5%	9,3%
2	4	5	80%	12,5%	7,5%
2	4	6	81,25%	12,5%	6,25%
2	4	7	82,2%	12,5%	5,3%
2	4	8	82,9%	12,5%	4,6%

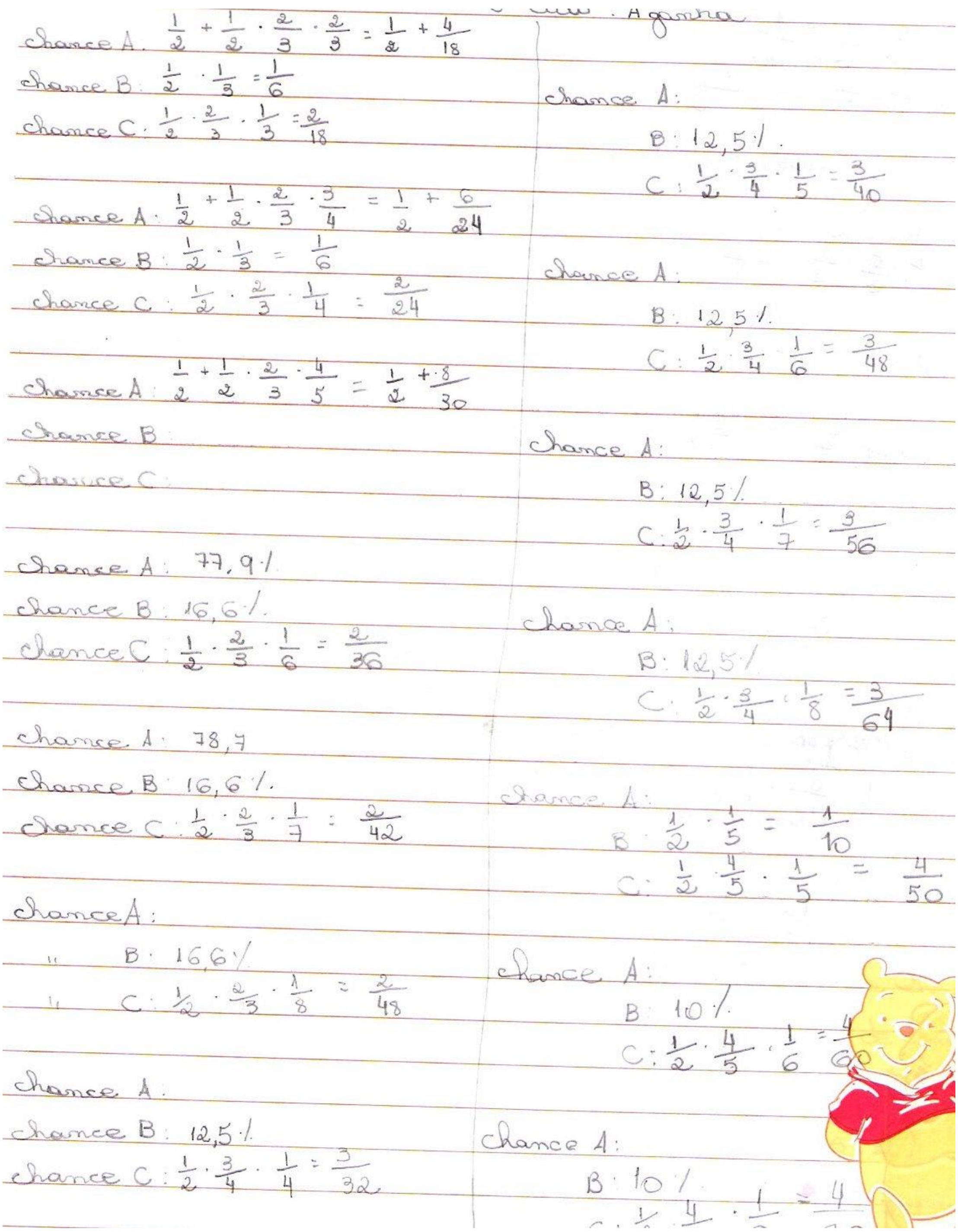
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	5	5	82%	10%	8%
2	5	6	83,4%	10%	6,6%
2	5	7	84,3%	10%	5,7%
2	5	8	85%	10%	5%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	6	6	84,8%	8,3%	6,9%
2	6	7	85,8%	8,3%	5,9%
2	6	8	86,5%	8,3%	5,2%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	7	7	86,8%	7,1%	6,1%
2	7	8	87,6%	7,1%	5,3%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance da equipe A vencer	Chance da equipe B vencer	Chance da equipe C vencer
2	8	8	88,35%	6,25%	5,4%

Ilustração 14 – Tabela preenchida pelos alunos para o jogo com 3 equipes, com valores aproximados das porcentagens.



A ganha

Chance A: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{4}{18}$
Chance B: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Chance C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{18}$

Chance A: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{6}{24}$
Chance B: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Chance C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

Chance A: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{8}{30}$
Chance B:
Chance C:

Chance A: 77,9%
Chance B: 16,6%
Chance C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$

Chance A: 78,7
Chance B: 16,6%
Chance C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{42}$

Chance A:
B: 16,6%
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{48}$

Chance A:
Chance B: 12,5%
Chance C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

Chance A:
B: 12,5%
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$

Chance A:
B: 12,5%
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{48}$

Chance A:
B: 12,5%
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{56}$

Chance A:
B: 12,5%
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{64}$

Chance A:
B: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{50}$

Chance A:
B: 10%
C: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{60}$

Chance A:
B: 10%

Ilustração 15 – Apresentação dos cálculos das probabilidades.

4.1.7. Sétima Atividade – Construção dos gráficos

Realizados os cálculos, os alunos começaram a trabalhar com os materiais que lhes foram entregues. Nas placas de isopor, após ser revestida por papel laminado, foi desenhado plano cartesiano bidimensional, onde no eixo horizontal ficava representado o número de chaves da equipe B e no eixo vertical estava representado o número de chaves da equipe C. Não há variação do número de chaves da equipe A.

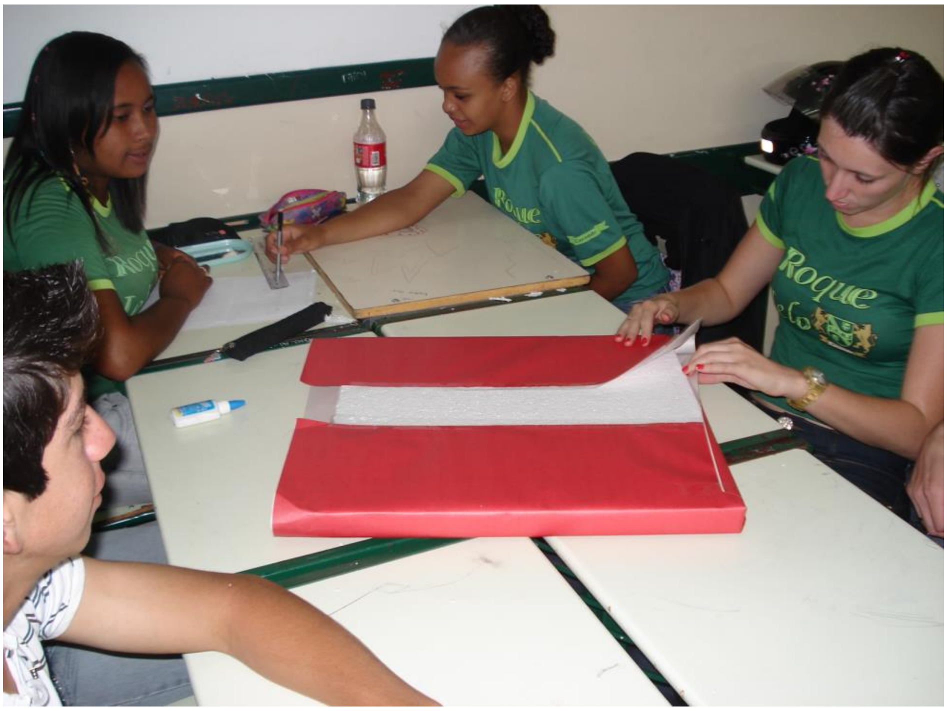


Foto 10 – Início da sexta atividade: divisão dos alunos em grupos.

Foto 11 – Início da confecção das maquetes.

Também é importante salientar que o menor número de chaves que as equipes B e C devem receber será 3 – este é o menor número possível neste jogo - pois a equipe perderá se sobrar um participante na fileira e assim receberá 3 = 1+2 chaves. Com isso, os números nos eixos do plano cartesiano foram representados a partir de 3.

Outro fato a ser mencionado é que o número de chaves da equipe B será sempre menor ou igual ao número de chaves de C, pois desde o início já consideramos a equipe A como a 1ª colocada no jogo de perguntas e respostas e a equipe B como segunda colocada e C como terceira colocada, sem perda de generalidade. Se considerarmos o ponto (4,3) estaremos dizendo que C na verdade é 2º colocado, causando conflito com a convenção acima adotada.

Para finalizar a construção do plano cartesiano, faltou apenas marcar os pontos que representam as interseções das coordenadas do plano, que foram sugeridas na tabela, como por exemplo, o ponto (3,4) representa 03 chaves de B e 04 chaves da equipe C, da mesma forma (4,6) representa 04 chaves de B e 06 chaves da equipe C.

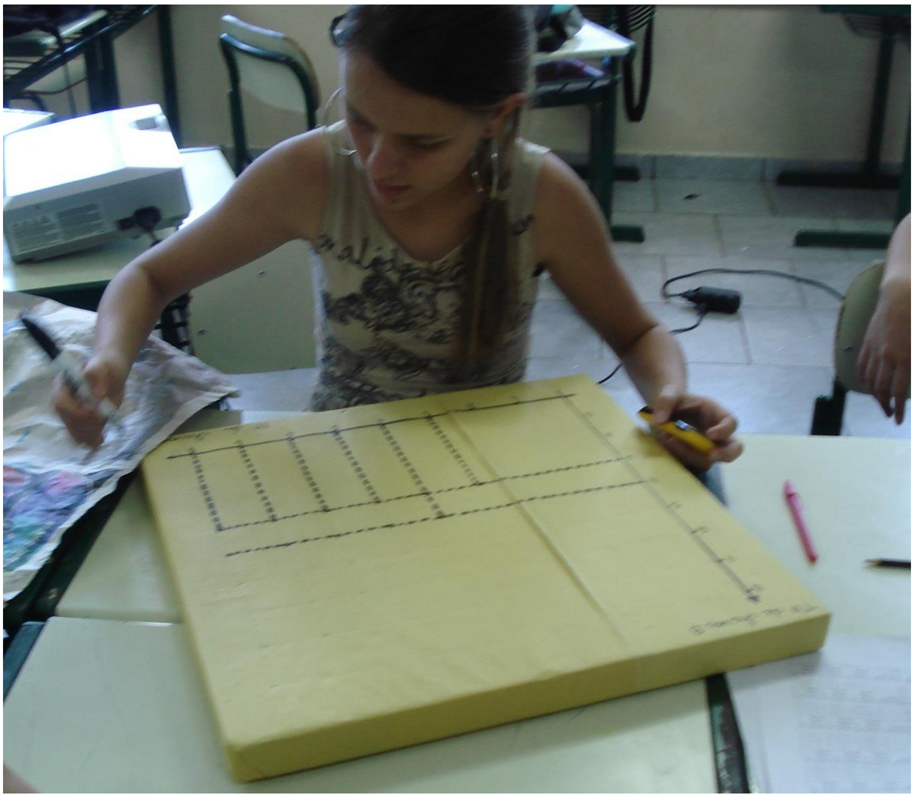


Foto 12 – Ilustração do plano cartesiano.

Após a construção, os alunos posicionaram os palitos na interseção das coordenadas marcadas perpendicularmente ao plano para representar a probabilidade de determinada equipe vencer. Como a probabilidade de uma equipe vencer sempre varia de acordo com o número de chaves de B e C, então as medidas dos palitos também devem variar.

Assim, os alunos precisavam, através das porcentagens encontradas na tabela, encontrar as medidas dos palitos. Para isso, sabendo que os palitos tinham 30 centímetros, eles calculavam, através da regra de três simples, as novas medidas dos palitos.

Foto 13 – Trabalho em equipe: cálculos das medidas dos palitos através das porcentagens.

Foto 14 – Foram utilizados palitos e bolas de isopor para a representação do gráfico em 3D.

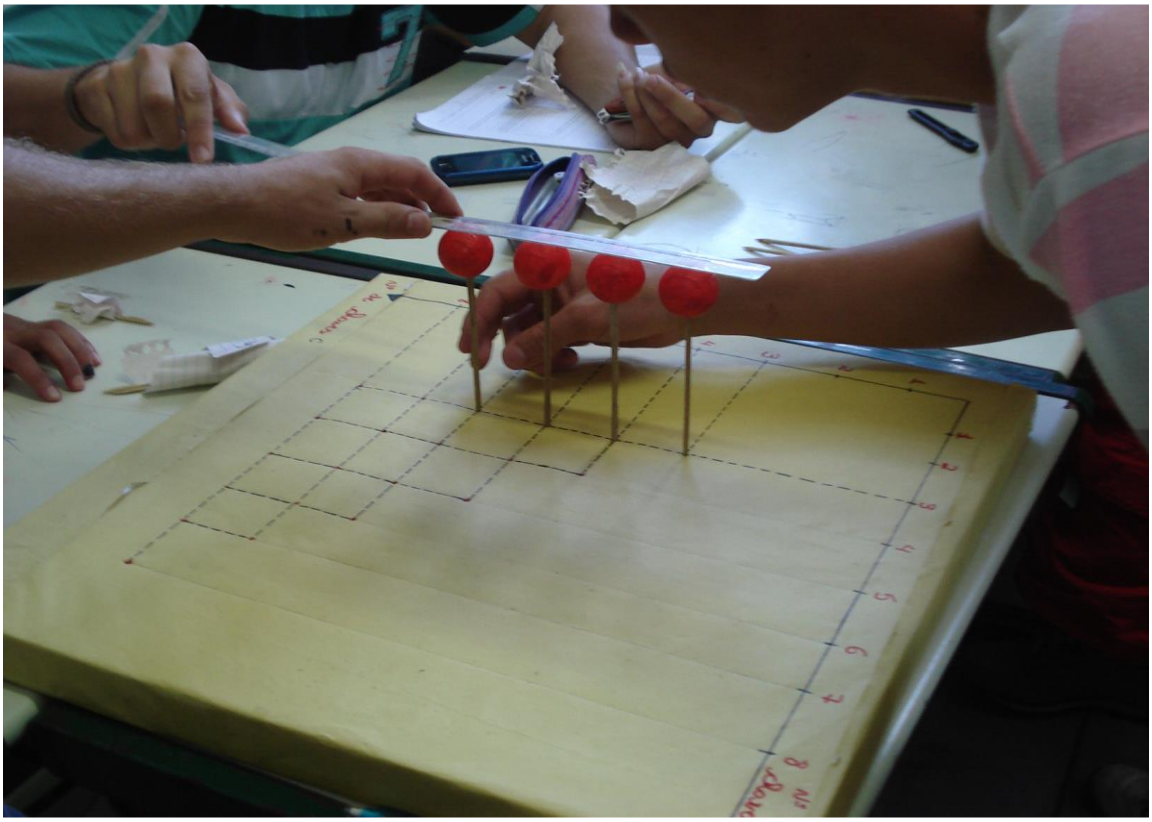


Foto 15 – Processo de confecção da maquete.

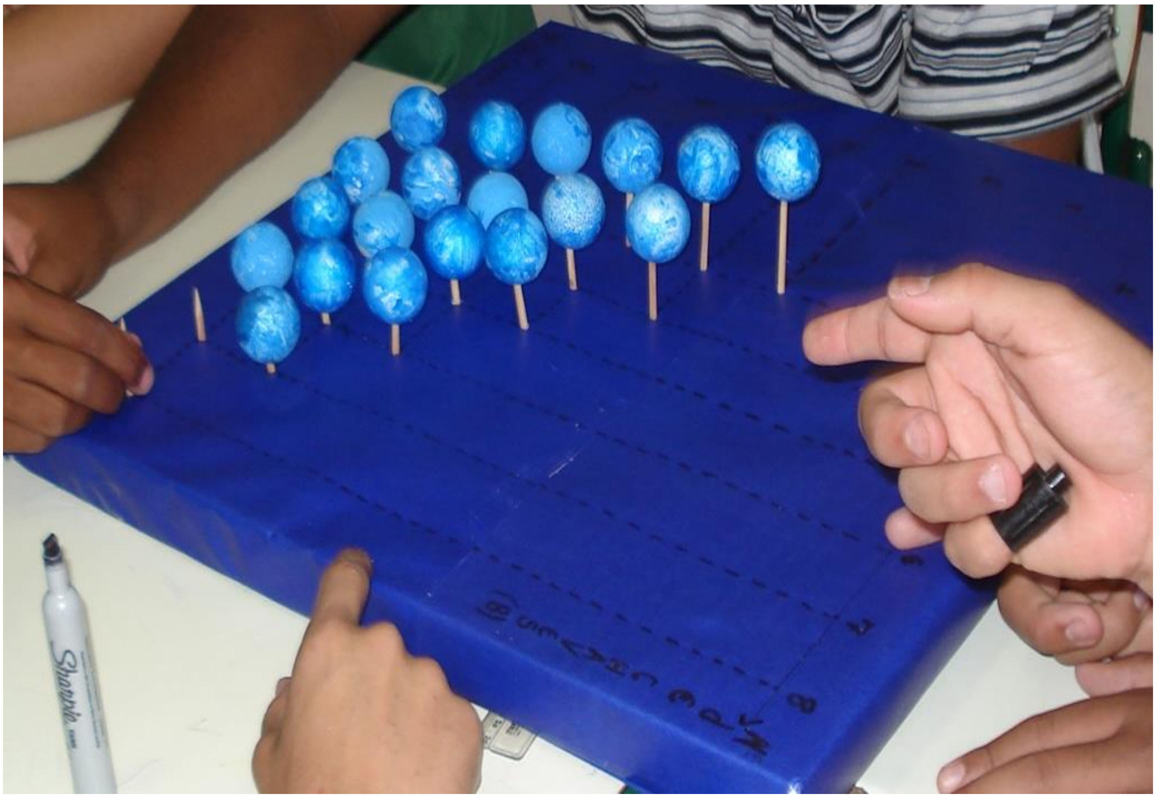


Foto 16 – Finalização da maquete para o jogo com 3 equipes.(Equipe C)

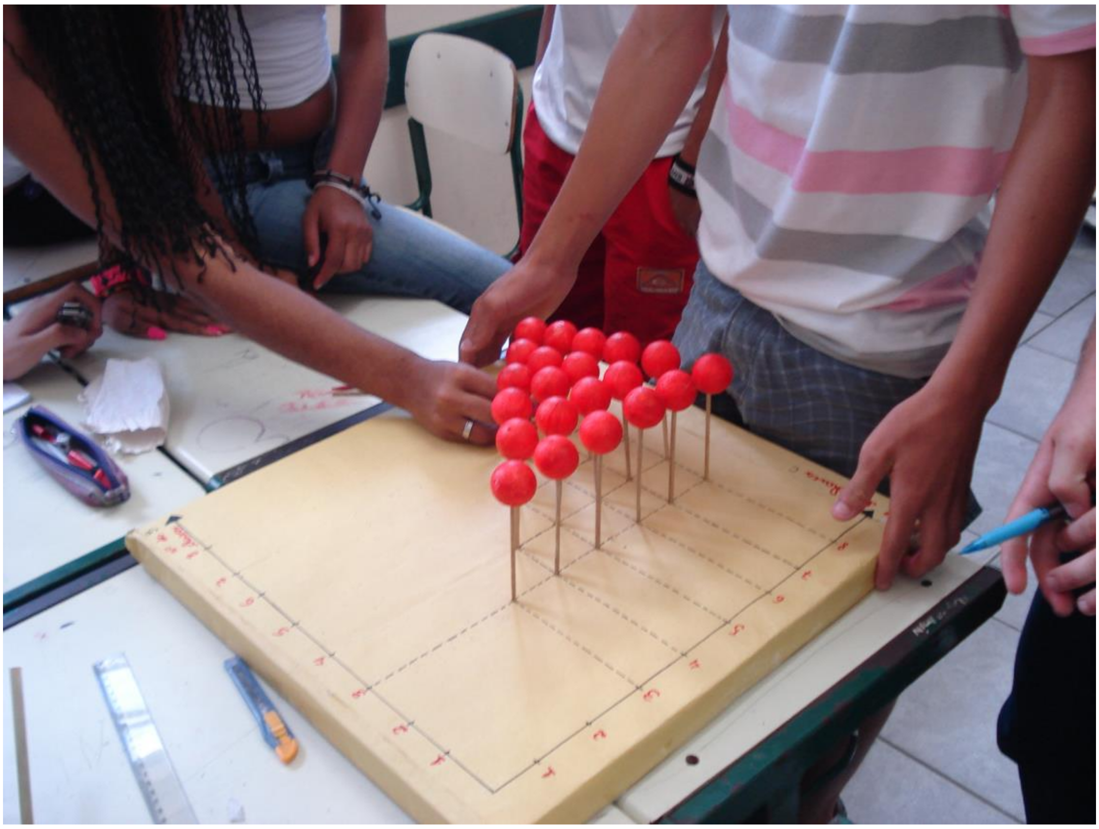


Foto 17 – Conclusão da maquete. (Equipe B)

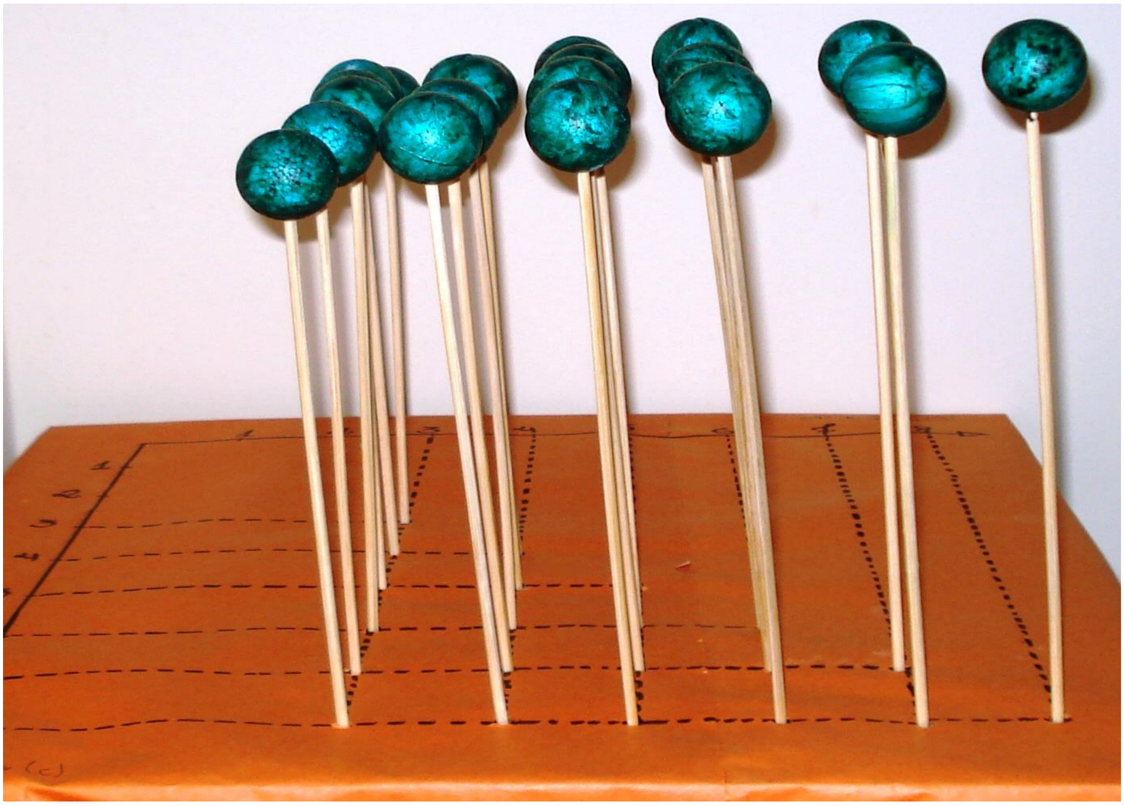


Foto 18 – Conclusão da maquete. (Equipe A)

5. ANÁLISE A POSTERIORI

Através dessa proposta de sequência didática sobre probabilidade pôde-se perceber que, diferentemente do ensino tradicional onde os alunos não conseguem assimilar o conhecimento adequadamente, eles demonstraram maior interesse e empenho devido ao dinamismo do jogo de perguntas e respostas e também pela construção da maquete e das cartolinas, ou seja, pelas atividades onde o objeto da aprendizagem pode ser manuseado. Tudo isso contribuiu para o protagonismo, pois o aluno e sua aprendizagem são os focos desse trabalho. Eles sentiram-se mais propensos a sanar as suas dúvidas e a emitir suas opiniões e comentários; as questões discursivas propiciaram o debate para se chegar a uma conclusão, e isto, de fato, contribuiu de maneira significativa para o processo de aprendizagem.

Da mesma forma, pode-se comprovar, com o decorrer das atividades, a evolução dos alunos tanto no raciocínio probabilístico - por exemplo, reconhecer os eventos independentes de maneira autônoma. Além disso, eles evoluíram significativamente na organização formal do raciocínio – constatado, por exemplo, com a construção de diagramas de árvore - sabendo representá-lo oralmente ou pela escrita.

Outro fato que deve ser ressaltado e que pôde ser observado foi o de fazer os alunos compreenderem conceitos, mesmo que indiretamente, uma vez que pelo método de ensino tradicional, muitas vezes, sequer é mencionado, provavelmente pela difícil compreensão dos alunos, deixando o ensino da probabilidade restrito apenas ao uso de fórmulas e sem aplicações do conhecimento no cotidiano do aluno, tornando um conhecimento sem significado para ele.

Entretanto, o ponto culminante desse trabalho foi o aumento do interesse dos alunos pela disciplina Matemática em geral, que foi visivelmente percebido, pois muitos alunos pediam logo o início da aula, e até mesmo perguntavam quais seriam as próximas atividades, demonstrando interesse em aprofundar nos diversos temas a serem estudados. Além disso, não era difícil encontrar comentários de alunos de outras séries que também queriam participar da sequência didática aplicada, e tudo isso contribui muito para mudar a visão de todos que Matemática é difícil, ruim, desinteressante e excludente, mostrando que a Matemática pode ser divertida e significativa.

6. CONCLUSÃO

A probabilidade faz parte dos conteúdos programáticos imprescindíveis do Ensino Médio, haja vista, como é mencionada nos PCN’s. Assim, o professor deve criar mecanismos metodológicos responsáveis para que a aprendizagem deste conteúdo matemático por parte dos alunos seja efetiva.

Dentre esses mecanismos metodológicos, deve-se buscar a contextualização que deverá ser realizada através da inserção de situações cotidianas em sala de aula, e uma das melhores formas encontradas, conforme sugestão do trabalho em questão é por meio dos jogos, pois, pode-se concluir, através das análises dos desenvolvimentos dos alunos que desta forma eles tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento, alcançando o que buscamos que é o desenvolvimento do seu raciocínio dedutivo e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é para toda a vida.

O aspecto lúdico na educação transforma o ensino em algo mais atraente e motivador, fazendo da aprendizagem um processo interessante e divertido. Essas transformações são de fundamental importância, pois interfere diretamente no resultado do processo de aprendizagem. Ao optar pelo jogo como estratégia de ensino de probabilidade, propicia-se uma aprendizagem agradável, significativa e de evolução, valorizando o raciocínio lógico e contribuindo para o enriquecimento da personalidade e crescimento gradativo do aluno indo além de suas avaliações tradicionais.

Sendo assim, fica evidente que a Probabilidade pode e deve ser apresentada através dos jogos, conforme se pode verificar, através dos questionários respondidos pelos alunos, o grande interesse deles na realização das atividades.

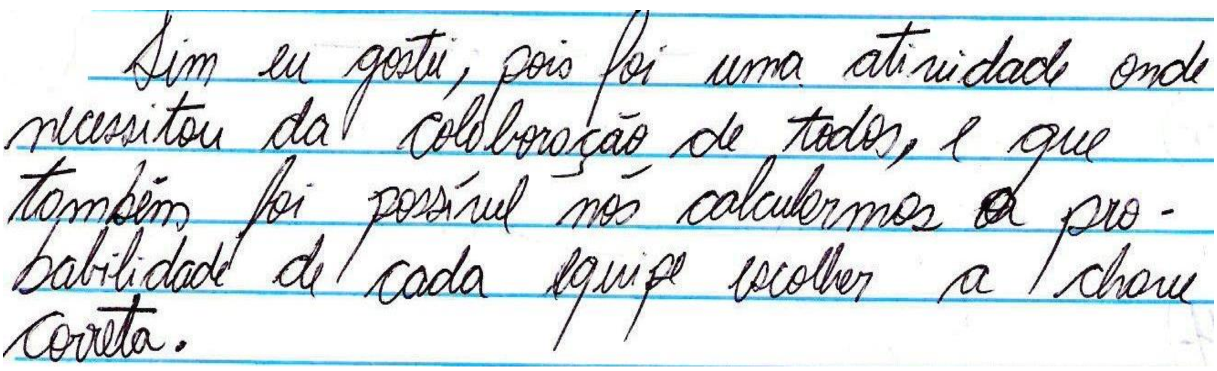

Sim eu gostei, pois foi uma atividade onde necessitou da colaboração de todos, e que também foi possível nós calcularmos a probabilidade de cada equipe escolher a chave correta.

Ilustração 16 – Opiniões dos alunos sobre a sequência didática.

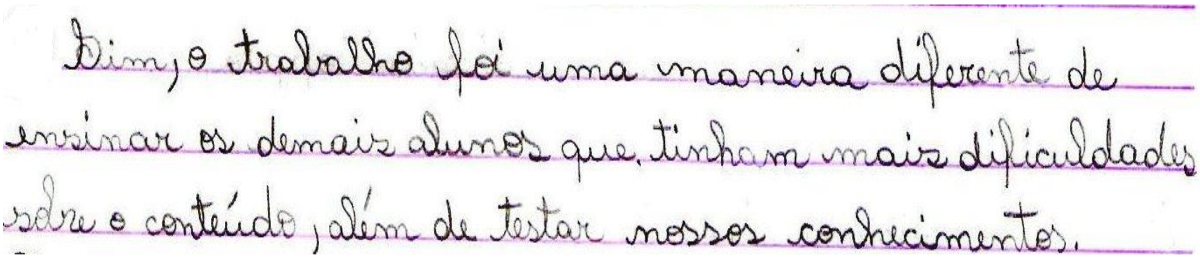

Sim, o trabalho foi uma maneira diferente de ensinar os demais alunos que, tinham mais dificuldades sobre o conteúdo, além de testar nossos conhecimentos.

Ilustração 17 – Opinião de aluno o qual demonstra o êxito da sequência didática.

Mudar a forma de se ensinar matemática é tarefa árdua e lenta; mas que depende, principalmente, dos professores, pois eles representam o efetivo papel pedagógico, fundamental para a promoção da qualidade na educação.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARA, A. B. **O ensino de estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade.** 2006. Tese (Doutorado em Educação) _ Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006**.** Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05062007-110845/pt-br.php>. Acesso em 15/05/13.

BAYER, A. et al. **Probabilidade na Escola**. In III CIEM – CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, Canoas, 2005. Disponível em <http://www.exatas.net/artigo_ciem2.pdf>. Acesso em: 27/04/13.

BORIN, J., **Jogos e Resolução de Problemas: Uma estratégia para as aulas de Matemática**. CAEM – IME/USP, 5ª Edição, São Paulo, 2004, p.100

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002. Páginas 12, 42 e 46. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 21/03/13

CABRAL, R. S. J. **Abordagem das noções iniciais de probabilidade em uma perspectiva construtivista.** 02/12/09. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/CABRALJR_rubens_souza.html>. Acesso em 30/04/13.

CARMO, A. G. **Teoria e Aplicação da Probabilidade no Ensino Médio**. Universidade Católica de Brasília – UCB. Disponível em <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AnselmoGoncalvesdoCarmo.pdf>. Acesso em 25/04/13.

CARVALHO P. C. P. **O Ensino de Probabilidade**. Disponível em <http://www.rpm.org.br/5e/docs/p5.pdf>. Acesso em 11/03/2013

CORBALÁN, F. **Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.** Madrid: Editorial Síntesis, 2002.

COUTINHO C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade: uma visão frequentista.** Estudo Epistemológico e Didático. 17/051994. p. 151. Dissertação (Mestrado em Matemática) São Paulo: EDUC, 1996. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/cileda_coutinho.pdf> Acesso em 16/05/13.

FERNANDEZ P. J. **Introdução à Teoria das Probabilidades**. IMPA, Rio de Janeiro, 2005. Disponível em <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM_18.pdf>. Acesso em 16/03/13.

FERNANDEZ, D. W. X.; FERNANDEZ, D. X. **O Prazer de Aprender Probabilidade Através de Jogos: Descobrindo a Distribuição Binomial**. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL "EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI", 1999, Florianópolis. Anais. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/cee/pasta3/art2p3.html>. Acesso em: 19/01/13.

GAFFURI, S. L. **Ensino e Aprendizagem de Probabilidade através da Metodologia de Resolução de Problemas.** Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão - Área de Ciências Tecnológicas. Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática. Santa Maria. 2012.

GNERI, M. A. **A Evolução Histórica do Conceito de Probabilidade.** IMECC – UNICAMP**.** Disponível http://www.ime.unicamp.br/~veronica/ME203ME414/apostilaprob.pdf>. Acesso em: 12/04/13

GRANDO, R. C. **Concepções quanto ao uso de jogos no ensino de matemática**. Revista de Educação Matemática, São Paulo: SBEM-SP, v. 10, n. 12, p. 43-50, 2007.

HURTADO, N. H.; COSTA, J. F. S. **A probabilidade no ensino médio: a importância dos jogos como ferramenta didática**. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL "EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI", 1999, Florianópolis. Anais. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/cee/pasta3/art3p3.html>. Acesso em: 19/01/13.

JUNQUEIRA, A. L. N.; CAMPOS, M. L. T. de; WATABE, L. **Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta.** XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: **<**http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1296/964>. Acesso em 15/05/13..

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Vol 2.

LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. **Estocástica nas Séries Iniciais.** XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática– LEM/IMECC/UNICAMP –2005. Disponível em **<**http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em 21/05/13.

LOPES, J.M., **Conceitos básicos de Probabilidade com Resolução de Problemas. Relato de uma experiência**. Resumo. Depto de Matemática, FEIS, UNESP- Ilha Solteira, SP. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxix_cnmac/PDF/34.pdf> Acesso em 15/05/13.

LOPES, J.M., **Probabilidade condicional por meio da resolução de problemas**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, vol. 62, p. 34-38, 2007. Disponível em: <http://www.mat.feis.unesp.br/docentes2008/jose_marcos/Probabilidade5pg.pdf> Acesso em 25/06/13.

LOPES, J. M. **Combinações Simples por meio de um jogo e da resolução de problemas.** Resumo. Depto de Matemática, FEIS, UNESP- Ilha Solteira, SP. Disponível em <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxi_cnmac/PDF/179.pdf> Acesso em 10/05/13.

MORGADO, A.C.O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática – SBM. Rio de Janeiro, 2004, 343p.

NEVES M**. Teoria da Probabilidade.** ISA (Instituto Superior de Agronomia) – Departamento de Matemática. 2012/2013. Disponível em: <http://www.isa.utl.pt/dm/estat/estat/probab.pdf>. Acesso em: 15/05/13

SÁ, I. P. de. **As três definições de probabilidades. UERJ – USS. 2012.** Disponível em:<http://magiadamatematica.com/wordpress/wp-content/uploads/2012/06/As-r%C3%AAs-defini%C3%A7%C3%B5es-de-probabilidades.pdf>. Acesso em: 25/05.

SILVA, I. A. **Probabilidades: a visão Laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito.** 17/05/02. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/SILVA_ismael_araujo.html>. Acesso em 01/05/13.

SILVEIRA, J. F. P. **A Evolução Histórica do Conceito de Probabilidade**. Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa6a.html>. Acesso em: 10/03/13.

SOARES, P. **Probabilidades e Estatística.** Notas de apoio às aulas teóricas. IST Lisboa (Instituto Superior Técnico) - Departamento de Matemática. 2010. Disponível em **<**http://www.math.ist.utl.pt/~psoares/pe/PE_teoricas.pdf>. Acesso em 10/04/13.

APÊNDICES

Apêndice A – Demonstração das propriedades mencionadas no tópico “Definição Axiomática (Kolmogorov)”.

P1) P(∅) = 0;

Demonstração: P(∅)=P(∅∪∅)=P(∅)+P(∅), logo, como P(∅)=P(∅)+P(∅), então P(∅)=0

P2) P(X^c) = 1 – P(X);

Demonstração: Tem-se que (X^c ∪ X) = A, entretanto (X^c ∩ X)= ∅, logo, pelo axioma 3 tem-se que P(X^c∪X)=P(X^c)+P(X), como P(X^c∪X) = P(A) e pelo axioma 2, P(A) = 1, então 1= P(X^c)+P(X) e, com isso, P(X) = 1 – P(X^c).

P3) se X⊆Y, então P(X)≤P(Y) e P(Y-X)=P(Y)-P(X);

Demonstração: como X∪(Y-X) = Y e X∩(Y-X) = ∅, então pelo axioma 3, temos que P[X∪(Y-X)]= P(X) + P(Y-X). Sendo assim, como P[X∪(Y-X)] = P(Y), podemos concluir que P(Y)=P(X) + P(Y-X). Desta igualdade, podemos observar que P(X) ≤ P(Y) e que P(Y-X) = P(Y) –P(X).

P4) P(Y-X) =P(Y) - P(Y∩X);

Demonstração: como Y-X = Y-(Y∩X) e também como (Y-X) ⊆ Y, tem-se pela P3 que P(Y-X) = P[Y- (Y∩X)] = P(Y) – P(Y∩X), c.q.d..

P5) P(X∪Y) = P(X) + P(Y) – P(X∩Y).

Demonstração: como X∪Y = X∪(Y-X), tem-se que P(X∪Y)=P[X∪(Y-X)]. Entretanto, X∩(Y-X)=∅. Assim, pelo axioma 3, tem-se que P[X∪(Y-X)]=P(X)+P(Y-X). Para concluir, temos pela Propriedade 4 que P(Y-X)= P(Y) – P(Y∩X) e, assim,

P(X∪Y)=P[X∪(Y-X)] = P(X)+P(Y-X)=P(X) + P(Y) – P(Y∩X), ou ainda,

P(X∪Y) = P(X) + P(Y) – P(X∩Y), c.q.d..

Apêndice B – Folhas de Atividades

1ª Folha de Atividades

Neste momento, alguns questionamentos referentes a situações que podem ocorrer no jogo (considere a Equipe A vencedora no jogo de perguntas e respostas):

1) *O que de fato ocorreu no jogo em que você participou? A sua equipe ganhou ou perdeu? Quantos participantes ficaram sem responder na equipe perdedora? Quantas chaves cada equipe recebeu?*
2) *A chance da equipe A acertar primeiro é maior que a chance da equipe B acertar primeiro?*
3) *A equipe A só consegue ganhar se escolher a chave correta na primeira tentativa?*
4) *Qual é a probabilidade da equipe A conseguir abrir a caixa primeiro?*
5) *A equipe B só consegue ganhar se escolher a chave correta na primeira tentativa?*
6) *Essa chance da equipe B ganhar depende de alguma coisa?*
7) *Qual é a probabilidade da equipe B conseguir abrir a caixa primeiro?*
8) *O que aconteceria se a equipe que começa o jogo não errar nenhuma pergunta?*
9) *Essas probabilidades são sempre as mesmas ou depende de algum fator para que elas sejam maiores ou menores? Justifique.*

Agora alguns casos particulares:

1) *Se as equipes começassem com números diferentes de participantes, isso altera a probabilidade de cada equipe?*
2) *Se dentre as chaves que uma equipe tem para escolher não estiver a única chave que abrirá o cadeado, então a chance dessa equipe ganhar é____________. E a chance da equipe adversária ganhar é_____________.*
3) *Se em determinado momento a equipe A tem 2 participantes para responder e a equipe B tem 3 participantes e o apresentador quer terminar o jogo. É certo a equipe A receber 2 chaves e a equipe B receber 5 chaves, conforme a regra do jogo?*
4) *Caso respondeu sim na pergunta anterior, justifique. Caso respondeu não, qual seria então a melhor forma de distribuir as chaves?*
5) *Se o apresentador interrompeu o jogo com a equipe A com 4 participantes e a equipe B com 8 participantes. Seria justo ambas as equipes receberem 2 chaves? Isso pode alterar o desfecho do jogo?*
6) *E se no momento em que o apresentador interrompeu o jogo e o numero de participantes é igual. Quem escolhe a chave primeiro? Alguma equipe terá mais chance de ganhar que a outra?*
7) *E se a equipe vencedora passar a receber 3 chaves, o que alterará no jogo?*

8) *Se a equipe vencedora passar a receber 3 chaves, a equipe vencedora terá duas chances de vencer o jogo? E a equipe perdedora continuará com apenas uma chance de ganhar?*
9) *O que de fato ocorreu no jogo em que você participou?*

2ª Folha de Atividades

TABELA A SER PREENCHIDA PELOS ALUNOS E OS RESULTADOS ESPERADOS

Nº de chaves Equipe A	Nº de chaves Equipe B	Fração que representa a chance da equipe A vencer	% aproximada da equipe A vencer	Fração que representa a chance da equipe B vencer	% aproximada da equipe B vencer
2	3				
2	4				
2	5				
2	6				
2	7				
2	8				
2	9				
2	10				
2	11				
2	N				

3ª Folha de Atividades

Questões para os alunos responderem:

1)As chances de cada equipe vencer irão mudar?
2)A representação gráfica pode ser feita em uma cartolina?
3)O que será necessário para construir o gráfico dessas probabilidades?

4ª Folha de Atividades

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	3	3			
2	3	4			
2	3	5			
2	3	6			
2	3	7			
2	3	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	4	4			
2	4	5			
2	4	6			
2	4	7			
2	4	8			

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	5	5			
2	5	6			
2	5	7			
2	5	8			
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	6	6			
2	6	7			
2	6	8			

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	7	7			
2	7	8			

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	8	8			

Apêndice C – Folhas de Atividades com as Respostas Esperadas

1ª Folha de Atividades

1) *O que de fato ocorreu no jogo em que você participou? A sua equipe ganhou ou perdeu? Quantos participantes ficaram sem responder na equipe perdedora? Quantas chaves cada equipe recebeu?*

   Foi um jogo de perguntas e respostas em que os alunos foram divididos em duas equipes pelo professor. Uma das equipes seria ganhadora desse jogo se todos de uma mesma equipe conseguissem responder as perguntas primeiro. A minha equipe ganhou/perdeu. Em uma das equipes, X alunos ficaram sem responder e por isso receberam X+2 chaves, enquanto a equipe ganhadora recebeu duas chaves.

2) *A chance da equipe A acertar primeiro é maior que a chance da equipe B acertar primeiro?*

   Sim, pois além de poder escolher a chave primeiro e testá-la, a equipe A também terá outra chance de acertar a chave, caso a equipe B erre.

3) *A equipe A só consegue ganhar se escolher a chave correta na primeira tentativa?*

   Não, pois a equipe A pode errar e caso a equipe B também erre, ainda assim, a equipe A será a vencedora.

4) *Qual é a probabilidade da equipe A conseguir abrir a caixa primeiro?*

   (1/2) + (1/2).[(n-1)/n] = (1/2) + [(n-1)/2n]= [(2n-1)/2n], onde n é o número de chaves que a equipe B recebe.

5) *A equipe B só consegue ganhar se escolher a chave correta na primeira tentativa?*

   Sim, pois caso faça a escolha errada, consequentemente a equipe A será a vencedora.

6) *Essa chance da equipe B ganhar depende de alguma coisa?*

   A equipe B só terá chance de ganhar se a equipe A errar a sua primeira tentativa na escolha da chave.

7) *Qual é a probabilidade da equipe B conseguir abrir a caixa primeiro?*

   (1/2).(1/n) = 1/2n, onde n é o número de chaves que a equipe B recebe.

8) *O que aconteceria se a equipe que começa o jogo não errar nenhuma pergunta?*

Suas chances para escolher a chave correta será muito alta, pois essa equipe receberá apenas 2 chaves e a outra equipe (n+2) chaves, onde n é o número de chaves.

Exemplo: As equipes começaram com 10 participantes cada.

Probabilidade da equipe A abrir a caixa primeiro: 23/24 ou ainda 95,83%

9) *Essas probabilidades são sempre as mesmas ou depende de algum fator para que elas sejam maiores ou menores? Justifique.*

As probabilidades de cada equipe conseguir abrir a caixa dependem do número de chaves que cada equipe recebe e isso é determinado pelo número de alunos que ficam sem responder no jogo de perguntas e respostas.

Agora alguns casos particulares:

1) *Se as equipes começassem com números diferentes de participantes, isso altera a probabilidade de cada equipe?*

Sim, pois uma equipe teria que responder menos perguntas para alcançar o objetivo final que é fazer todos os participantes de uma equipe responder primeiro e consequentemente influenciar no número de chaves que cada equipe receberá.

2) *Se dentre as chaves que uma equipe tem para escolher não estiver a única chave que abrirá o cadeado, então a chance dessa equipe ganhar é* **0% (evento impossível)**. *E a chance da equipe adversária ganhar é* **100% (evento certo).**

3) *Se em determinado momento a equipe A tem 2 participantes para responder e a equipe B tem 3 participantes e o apresentador quer terminar o jogo. É certo a equipe A receber 2 chaves e a equipe B receber 5 chaves, conforme a regra do jogo?*

Como as regras do jogo são pré-determinadas, então seria justo, entretanto, o procedimento mais pautado na justiça seria entregar 4 chaves para a equipe A e 5 chaves para a equipe B.

4) *Caso respondeu sim na pergunta anterior, justifique. Caso respondeu não, qual seria então a melhor forma de distribuir as chaves?*

Sim: Deve-se seguir exatamente as regras do jogo.

Não: Equipe A, 4 chaves

Equipe B, 5 chaves.

5) *Se o apresentador interrompeu o jogo com a equipe A com 4 participantes e a equipe B com 8 participantes. Seria justo ambas as equipes receberem 2 chaves? Isso pode alterar o desfecho do jogo?*

Não, pois assim não terá relevância o número de participantes que ainda não conseguiram responder.

6) *E se no momento em que o apresentador interrompeu o jogo e o numero de participantes é igual. Quem escolhe a chave primeiro? Alguma equipe terá mais chance de ganhar que a outra?*

Qualquer das equipes que escolher primeiro a chave terá uma vantagem enorme sobre a outra equipe mesmo que o jogo tenha terminado empatado. Logo, deve-se pensar em uma maneira mais justa para que essa ordem fique estabelecida.

Exemplo: Jogar uma moeda.

7) *E se a equipe vencedora passar a receber 3 chaves, o que alterará no jogo?*

As probabilidades das equipes abrirem a caixa primeiro serão alteradas, pois a menor chance dessa equipe acertar a chave recebendo duas chaves será de 5/6 (83,33%), enquanto que se ela recebesse três chaves a menor chance será de ¾ (75%), tornando o jogo mais disputado.

8) *Se a equipe vencedora passar a receber 3 chaves, a equipe vencedora terá duas chances de vencer o jogo? E a equipe perdedora continuará com apenas uma chance de ganhar?*

Não. A equipe vencedora terá três chances para acertar a chave correta:

- **Na primeira escolha da chave;**
- **Caso a outra equipe erre na escolha da chave, a equipe vencedora terá mais uma possibilidade de escolha da chave correta;**
- **Caso a outra equipe erre novamente, a equipe vencedora acertará a chave.**

9) *O que de fato ocorreu no jogo em que você participou?*

Nossa equipe venceu/perdeu no jogo de perguntas e respostas sendo que após a realização deste jogo, nossa equipe recebeu X chaves e a outra equipe recebeu Y chaves.

2ª Folha de Atividades

Calcular as probabilidades em diversos casos:

TABELA A SER PREENCHIDA PELOS ALUNOS E OS RESULTADOS ESPERADOS

Nº de chaves Equipe A	Nº de chaves Equipe B	Fração que representa a chance da equipe A vencer	% aproximada da equipe A vencer	Fração que representa a chance da equipe B vencer	% aproximada da equipe B vencer
2	3	**5/6**	**83,33%**	**1/6**	**16,66%**
2	4	**7/8**	**87,5%**	**1/8**	**12,5%**
2	5	**9/10**	**90%**	**1/10**	**10%**
2	6	**11/12**	**91,66%**	**1/12**	**8,33%**
2	7	**13/14**	**92,85%**	**1/14**	**7,15%**
2	8	**15/16**	**93,75%**	**1/16**	**6,25%**
2	9	**17/18**	**94,44%**	**1/18**	**5,55%**
2	10	**19/20**	**95%**	**1/20**	**5%**
2	11	**21/22**	**95,45%**	**1/22**	**4,55%**
2	N	**(2n-1)/2n**	**Para n cada vez maior a chance da equipe A vencer aproxima-se cada vez mais de 100%**	**1/2n**	**Para n cada vez menor a chance da equipe B vencer aproxima-se cada vez mais de 0**

3ª Folha de Atividades

JOGO COM 3 EQUIPES

Questões para os alunos responderem

1) As chances de cada equipe vencer irão mudar?

Sim, pois as chances agora serão distribuídas entre 3 equipes. Além disso, nota-se que a equipe A pode ganhar caso as equipes B e C errem.

2) A representação gráfica pode ser feita em uma cartolina?

Não, pois agora tem-se que o número de chaves de B e o número de chaves de C são variáveis. Portanto são necessários dois eixos para representar o número de chaves dessas equipes. Logo, além desses dois eixos, torna-se necessário a inclusão de um terceiro eixo para representar as probabilidades das equipes vencerem de fato, ou seja, um gráfico tridimensional que não pode ser feito em cartolina(bidimensional).

3) O que será necessário para construir o gráfico dessas probabilidades?

Para construir o gráfico que represente as probabilidades das equipes vencerem de fato deve-se pensar em uma maquete. Deve-se construir em algum objeto plano para representar os eixos que representam o número de chaves das equipes e também outro eixo de representar as probabilidades.

4ª Folha de Atividades.

Complete a tabela abaixo com as probabilidades de cada equipe vencer de acordo com o numero de chaves apresentado:

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	3	3	72,22%	16,66%	11,12%
2	3	4	75%	16,66%	8,33%
2	3	5	76.66%	16,66%	6,66%
2	3	6	77,77%	16,66%	5,55%
2	3	7	78,57%	16,66%	4,71%
2	3	8	79,16%	16,66%	4,16%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	4	4	78,125%	12,5%	9,375%
2	4	5	80%	12,5%	7,5%
2	4	6	81,125%	12,5%	6,25%
2	4	7	82,14%	12,5%	5,35%
2	4	8	82,81%	12,5%	4,68%
Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	5	5	82%	10%	8%
2	5	6	83,33%	10%	6,66%
2	5	7	84,28%	10%	5,71%
2	5	8	85%	10%	5%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	6	6	84,72%	8,33%	6,94%
2	6	7	85,71%	8,33%	5,95%
2	6	8	86,45%	8,33%	5,20%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	7	7	86,73%	7,14%	6,12%
2	7	8	87,5%	7,14%	5,35%

Nº de chaves da equipe A	Nº de chaves da equipe B	Nº de chaves da equipe C	Chance aproximada da equipe A vencer	Chance aproximada da equipe B vencer	Chance aproximada da equipe C vencer
2	8	8	88,28%	6,25%	5,46%