UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FLÁVIA ADOLF LUTZ KELLER

DESCOBRINDO O NÚMERO π

SÃO CARLOS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FLÁVIA ADOLF LUTZ KELLER

DESCOBRINDO O NÚMERO π

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

São Carlos

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

K29dn	Keller, Flávia Adolf Lutz. Descobrindo o número π / Flávia Adolf Lutz Keller. -- São Carlos : UFSCar, 2013. 66 f. Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013. 1. Círculo. 2. Números irracionais. I. Título. CDD: 516.15 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Renato José de Moura
DM - UFSCar

Sérgio Luis Zani

Prof. Dr. Sérgio Luis Zani
ICMC- USP

Prof^{a}. Dr^{a}. Luciene Nogueira Bertoncello
DM - UFSCar

Em especial ao meu marido Luis, ao meu filho Gustav e a minha mãe Lizete, que sempre me apoiaram e acreditaram em mim.

Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.

Isaac Newton

Aos meus professores do PROFMAT

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela vida e por toda força necessária para vencer as barreiras encontradas no caminho.

A Mãe Maria por estar sempre intercedendo por nós em todos os momentos de nossa vida, ao Filho e Espírito Santo que sempre nós abençoou.

Dedico este trabalho ao meu marido Luis que sempre esteve me apoiando, mesmo nos momentos em que achava que não iria conseguir e ao meu filho Gustav, que muitas vezes teve minha atenção dividida para que pudesse me dedicar aos estudos e poder realizar meu grande sonho.

Agradeço a minha Lizete, que nunca deixou de me apoiar e sempre esteve comigo nos momentos que precisei de amparo.

Agradeço à minha irmã Patrícia que ajudou nos momentos difíceis, e aos meus tios Iselda e Agostinho que me acolheram em sua casa para que eu pudesse estar mais próxima da UFSCAR.

Agradeço aos professores do PROFMAT, que sempre acreditaram em minha capacidade, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Renato José de Moura, pela dedicação e por todos os ensinamentos durante toda esta trajetória. Não posso me esquecer dos "puxões de orelha" que me fizeram evoluir durante a produção desse trabalho.

Agradeço ao programa PROFMAT por ter fornecido esta oportunidade junto a CAPES que nos proporcionou auxilio durante todo o curso.

Agradeço a todos os colegas de turma que de uma maneira ou de outra estiveram me apoiando, dando ânimo e incentivando, mesmos nas manhãs mais frias de sábado.

Agradeço a todos os professores do programa, pelo apoio e os ensinamentos que levarei sempre comigo.

Agradeço a todos os alunos que realizaram as atividades, que estiveram em outro período dispostos a me ajudar e meus colegas de escola, que tiveram muita paciência em todos os mementos de cansaço e desalento.

RESUMO

O valor do comprimento de uma circunferência dividido pelo seu diâmetro tem como resultado um valor constante. Tal constante é denominada π. Este valor é conhecido desde a antiguidade, por egípcios e gregos, mas somente na história mais recente esta constante foi reconhecida como sendo um número irracional. O objetivo deste trabalho foi explorar essa relação do círculo por alunos do Ensino Fundamental II e ampliação dos conjuntos numéricos a partir desta constante. Determinar este valor, verificando sua regularidade em todos os círculos através de experimentos práticos e também explorando os recursos tecnológicos disponíveis na escola, fazendo com que os alunos calculem o valor numérico de π, fazendo-os participar do processo de construção e descoberta deste novo conhecimento.

A sequência didática proposta foi baseada na Engenharia didática como metodologia de investigação, realizando-se ao final, uma análise a posteriori que demonstra que o aprendizado a partir de objetos manipuláveis, aliados aos recursos tecnológicos disponíveis, proporciona aos alunos uma maior assimilação do conteúdo matemático, tornando-se uma experiência marcante para os alunos do Ensino Fundamental e sendo uma importante ferramenta que completa as aulas e as tornam mais participativas. Espera-se que este trabalho auxilie os professores de matemática a refletirem que o uso de materiais manipulativos, software educacionais e todos os recursos disponíveis proporcionam maior assimilação e aproximação do aluno com os conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Círculo, Valor de π, Irracionais, materiais manipulativos, software educacional.

ABSTRACT

The value of the circumference's length divided by its diameter has a result a constant named π. This value is known since ancient times by the Greeks and Egyptians, but only in current history this constant has been recognized as an irrational number. This study has as objective to explore the relationship of the circle by II elementary school students and extension of numerical sets from this constant. Making sense of this value by checking its regularity in all circles through practical experiments and also exploring the technological resources available in the school, making the students to follow the steps for determining of the numerical value and to participate in the construction and discovery process of new knowledge.

The teaching sequence proposed was based on Engineering teaching as research methodology, conducting in the end a posteriori analysis which demonstrates that learning from manipulable objects, together with technological resources available provides to students with a greater assimilation of mathematical content, one becoming a remarkable experience for elementary school students and being an important tool which complements the lessons and makes them more participative. It is hoped that this work support math teachers to reflect the usage of manipulative materials, educational software and all available resources which provide greater assimilation and approach the student with the mathematical concepts.

Keywords: Circle, Value of π, Irrational, manipulative materials, educational software.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Quadrados inscrito e circunscrito no círculo..............................25
Figura 2: Hexágonos inscrito e circunscrito no círculo..............................26
Figura 3: Alunos contornando CD com barbante..28
Figura 4: Alunos contornando um prato com barbante..............................29
Figura 5: Medindo tigela com o barbante..30
Figura 6: Grupo medindo o comprimento de um CD..................................30
Figura 7: Desenhando o círculo da bacia em sulfite...................................30
Figura 8: Medindo o comprimento do barbante..31
Figura 9: Desenhando um círculo qualquer no geogebra..........................33
Figura 10: Usando a calculadora do computador para determinar o valor de π 33
Figura 11: Círculo qualquer representado no Geogebra............................34
Figura 12: Circulo de comprimento inteiro representado no Geogebra....34
Figura 13: Círculo de raio com medida inteira representado no Geogebra..35
Figura 14: Retirar os eixos do Geogebra...44
Figura 15: Ícone para a construção do círculo 44
Figura 16: Construção da circunferência 45
Figura 17: Ícone para a medição do comprimento e raio do círculo..........45
Figura 18: Configuração da tela após realização da atividade...................46
Figura 19: Ícone do cursor para modificação do círculo............................46
Figura 20: Hexágonos inscrito e circunscrito no círculo............................49
Figura 21: Relações no polígono inscrito e circunscrito............................53
Figura 22: Relações no polígono regular inscrito de n e 2n lados............54
Figura 23: Relações no polígono regular circunscrito de n e 2n lados.....55
Figura 24: Pesquisa da aluna I sobre o π 62
Figura 25: Pesquisa realizada sobre o π 63
Figura 26: Autoavaliação realizada...64
Figura 27: Autoavaliação realizada após atividade....................................64
Figura 28: Atividade realizada após experiências......................................64

Figura 29: Atividade realizada após aplicação da sequência didática.......65
Figura 30: Avaliação da sequência didática..65
Figura 31: Avaliação da sequência didática realizada.................................66
Figura 32: Tabela com as medidas dos objetos circulares.........................66
Figura 33: Tabela com as medidas dos círculos no Geogebra..................66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Calculando o valor de π com as medidas dos objetos...............31

Tabela 2: Tabulação do número de acertos na prova logo após a atividade...36

Tabela 3: Tabulação do resultado da autoavaliação...................................37

Tabela 4: Tabulação do número de acertos na prova 2 meses após a realização da atividade..37

Tabela 5: Modelo para registro da atividade com barbante........................43

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14

1 - A ESCOLA, A DOCÊNCIA E OS ALUNOS 19

1.1 HISTÓRICO DA UNIDADE ESCOLAR 19

1.2 A ESCOLHA PELA DOCÊNCIA 20

1.3. O OBJETIVO DO PROJETO..22

2 - METODOLOGIA DE PESQUISA...24

2.1 REFERENCIAL TEÓRICO 24

2.2 ANÁLISE A PRIORI 24

2.3 EXPERIMENTAÇÃO 27

2.4 ANÁLISE A POSTERIORI 35

3 - CONCLUSÕES...39

REFERÊNCIAS..41

APÊNDICE A – PROPOSTA DE ATIVIDADE..43

APÊNDICE B – UM POUCO DA HISTÓRIA DO π 49

APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES 53

APÊNDICE D - DEFINIÇÕES IMPORTANTES RELATIVAS AO NÚMERO π........62

APÊNDICE E – TRABALHOS DOS ALUNOS 63

INTRODUÇÃO

O Ensino da matemática tem sido, ao longo dos anos, dissociado da realidade e de significado para o aluno. A utilização de fórmulas sem sentido, de números sem significado, de problemas imaginários e distantes da realidade tem feito com que esta disciplina seja temida pela maioria dos estudantes, pois acabou sendo sinônimo de reprovação e fracasso dos alunos.

> "Deve ficar claro que o problema com a matemática é universal... a matemática é a disciplina mais temida em todo o mundo." (DRUCK)

Notícias têm sido divulgadas constantemente nos meios de comunicação, ressaltando a incapacidade de alunos em aprender e de professores em ensinar Matemática nas escolas de todo país.

> "Resultados do Programa de Avaliação Internacional de Alunos (PISA-2009) apontaram que o Brasil ocupa a 53º posição no ranking mundial de desempenho da matemática, entre os 65 países que participam do exame" (Sesi)

Muitos são os motivos que levaram a esses resultados que colocam a educação do Brasil numa posição insatisfatória: o despreparo dos professores, desinteresse dos alunos, falta de infraestrutura nas escolas, currículo defasado, abandono intelectual das famílias, ausência de políticas educacionais efetivas, entre outros. No entanto, muitos esforços vêm sendo realizados com o objetivo de reverter essa situação. Um destes esforços é o PROFMAT.

Iniciado em 2011, o PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional patrocinado pela CAPES, tem promovido o aperfeiçoamento de professores em todo o país. Consta no Artigo 1º do Regimento do PROFMAT:

> O Objetivo do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é proporcionar ao aluno formação matemática aprofundada, relevante ao exercício da docência em matemática no ensino básico, visando proporcionar ao professor da escola básica competência matemática certificada, relevante ao exercício da docência. O programa prevê aquisição de competências e de

> conteúdo matemático com vistas a habilitar o egresso ao exercício das seguintes atividades:
> • Coordenação do ensino de matemática nas escolas;
> • Elaboração de material didático;
> • Orientação de equipes no uso de materiais alternativos e de ferramentas computacionais;

Além do programa há muitas obras na literatura que abrem possibilidades de um trabalho de qualidade, com idéias que utilizam recursos tecnológicos, a história da matemática, materiais manipulativos, resolução de problemas que tornam o ensino da disciplina mais atrativo e significativo para o aluno. Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1998, já apontam a necessidade dessa adaptação:

> "O papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas."

Ao longo do desenvolvimento da matemática muito foi estudado a respeito dos números, de suas propriedades e como este estudo propiciou o desenvolvimento da tecnologia existente. Um destes números, objeto de estudo desta dissertação, o número π, foi muito explorado ao longo dos séculos. Além deste número aparecer naturalmente, como por exemplo no cálculo da área de um círculo, bem como no comprimento dele, entre as diversas aplicações, uma delas é o uso ligado à área computacional para que se possa, por exemplo, testar a velocidade e confiabilidade de processamento de novos computadores. Entre as tarefas computacionais busca-se exibir o maior número de dígitos do π, como pode ser verificado na literatura atual.

O objetivo desta dissertação está em expor uma opção de trabalho com materiais concretos e experimentais e também utilizar um software de geometria dinâmica (Geogebra) explorando recursos tecnológicos com os alunos, para que eles possam verificar na prática que o valor do número π é constante e que esse número não se caracteriza como os números estudados pelos alunos até o momento que, ou são exatos ou dízimas periódicas. Atrair a atenção e a curiosidade dos alunos, fazendo com que eles se sintam protagonistas do processo de aprendizagem do seu próprio conhecimento também é um dos objetivos deste trabalho, cuja atividade pretende estimular a participação e envolver os alunos na busca de soluções, além de despertar a parte lúdica da Matemática. Quando fórmulas são simplesmente colocadas aos alunos, sem um trabalho de como elas surgiram, o aluno tende a esquecê-las facilmente ou utilizá-las de maneira mecânica, assim como ela foi memorizada. A percepção de que a fórmula tem uma justificativa dá sentido àquela expressão, garantindo a compreensão das noções envolvidas, conforme é apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

> “Outro aspecto a ser salientado diz respeito à obtenção de fórmulas. A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente.” (PCN, 1998)

A escolha da utilização de duas diferentes metodologias para o mesmo conteúdo é a possibilidade de que a atividade possa ser desenvolvida tanto em escolas cujos recursos materiais sejam escassos, pois utiliza materiais que podem ser trazidos pelos próprios alunos, como em escolas cujos recursos tecnológicos, como computadores, estejam à disposição do professor e dos alunos.

A primeira parte deste trabalho foi desenvolvida com materiais de fácil acesso como objetos circulares (pratos, CDs, bacias, tampas), barbante e calculadora. A utilização desses recursos mais acessíveis garante à sala de aula o trabalho colaborativo e a possibilidade de se verificar experimentos matemáticos. Neste sentido, Vitti (1999, pg. 89) afirma que

> “(a geometria) pode ser “encontrada” nos mais simples objetos, na natureza e até mesmo em projetos mais arrojados do homem. Essa busca de elementos na geometria também se deu na tentativa de mostrar que é possível tornar o ensino da matemática atraente e – por que não? – prazeroso.”

A tecnologia está presente na vida dos alunos através de celulares, computadores, notebooks, smatphones e tablets. Colocar estes aparatos tecnológicos a favor da educação é um desafio aos professores que ainda concorrem com o dinamismo desses recursos. Neste sentido, a segunda parte deste trabalho foi realizada com o auxílio do software livre Geogebra, que pode ser adquiro em www.geogebra.com. Atrair a atenção dos alunos com a utilização desses recursos deve fazer parte do dia a dia dos professores. Além disso,

> "os softwares de geometria dinâmica podem mudar drasticamente e melhorar o ensino da geometria. A habilidade dos estudantes para explorar relações geométricas com esse tipo de software é incomparável com qualquer modo não-computadorizado". (WALLE, 2009)

Como consequência desta sequência didática, espera-se proporcionar ao aluno determinar uma regularidade que ocorre quando dividimos o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro e que esta constante obtida não é classificada como número racional. Para tanto desenvolvemos esta atividade com uma turma do início do 9° ano e que até o momento os alunos não tinham contato com números irracionais.

Este trabalhado está organizado como segue. No capítulo 1 apresentamos um relato da escola, dos alunos envolvido no projeto e da professora aplicadora. O capítulo termina com os objetivos pertinentes ao projeto.

No capítulo 2 abordamos o referencial teórico no qual o trabalho foi desenvolvido e relatamos o desenvolvimento do projeto, enfocando as etapas da Engenharia Didática: a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori.

No capítulo 3 relatamos a conclusão geral do projeto e comentários sobre a aplicação do projeto considerando diferentes contextos sociais.

Finalizamos o trabalho com os apêndices. No apêndice A está a atividade proposta que poderá ser atualizada por outro docente interessado em desenvolver esta atividade com sugestões de atividades e propostas de intervenções. No apêndice B há um relato da história do número π desde a antiguidade até seu uso atual relacionado à área computacional. No apêndice C exploramos as fórmulas utilizadas por Arquimedes na obra “A medida de um círculo” e demonstramos todas as fórmulas utilizadas. No apêndice D apresentamos algumas definições relacionadas ao número π, as definições de irracional e transcendente e para finalizar o apêndice E traz o trabalho produzido pelos alunos durante a realização das atividades desenvolvidas.

1. A ESCOLA, A DOCÊNCIA E OS ALUNOS

1.1. HISTÓRICO DA UNIDADE ESCOLAR

Este trabalho foi desenvolvido em uma classe de 9° ano do Centro de Educação Básica, em Bariri. A cidade de Bariri sempre teve tradição por sua qualidade de ensino, mas havia uma aspiração comum entre pais baririenses de garantir aos filhos um ensino de boa qualidade, com mensalidades mais acessíveis. A solução foi se associarem, criando a Cooperativa Educacional de Bariri - Coeba - isso no dia 22 de agosto de 1997, para, no ano seguinte, tornar-se a mantenedora de uma escola de Ensino Fundamental e Médio. E, posteriormente, também de Ensino Infantil.

A Cooperativa Educacional de Bariri é instituição privada comunitária, sem fins lucrativos e registrada de acordo com as normas específicas para Cooperativas e legislação em vigor, com Estatuto devidamente registrado. Tem sede, administração e foro jurídico no município de Bariri, com endereço na Av. Centenário nº 257, em Bariri. O objetivo era oferecer ensino de qualidade em classes menos numerosas (pelo regulamento da escola as classes só podem ter 25 alunos no Ensino Fundamental I, 30 alunos no Fundamental II e 35 alunos no Ensino Médio) e que atendesse tanto aos conteúdos quanto a formação da cidadania, pautada em valores éticos e morais. A escola foi então fundada em 28 de abril de 1998 com aproximadamente 100 alunos, distribuídos da 1ª série à 8ª série do Ensino Fundamental e do 1° e 2° ano do Ensino Médio. Os professores do Ensino Fundamental foram selecionados através de concurso por uma empresa de Presidente Prudente que realizou processo seletivo através de prova de conhecimentos específicos, entrevista com psicólogo e apresentação de uma aula para uma equipe de pais cooperados que também fossem professores da área a ser avaliada. Os professores do Ensino Médio foram contratados por serem professores de renome, tendo ampla experiência com cursinhos e escolas particulares da região. Em seu segundo ano de funcionamento, a escola já tinha mais de 150 alunos, abrigando também a 3ª série do Ensino

Médio. Hoje, a escola atende desde a educação infantil, com alunos a partir de 1 ano e conta com mais de 600 alunos.

A escola oferece uma carga horária ampla aos alunos, sendo 36 aulas semanais no Ensino Fundamental II, além de plantão de Matemática, Língua Portuguesa e Física (para o 9° ano). Para o ensino Médio, a carga horária é de 37, 39 e 50 aulas semanais para os 1°, 2° e 3° ano, respectivamente, além de plantões de Língua Portuguesa, Matemática, Biologia, Física e Química para o Ensino Médio.

A escola é destaque na região em índices de Enem e aprovação de vestibulares. Nos anos de 2010, 2011 e 2012 esteve entre as 5 melhores notas do ENEM da região de Bauru. Também é destaque dentro do seu Sistema de Ensino (Anglo) nas avaliações e simulados. O 7° ano em 2012 esteve em primeiro lugar no ranking das escolas conveniadas no simulado anual. Além disso, a matemática também é destaque. No ano de 2012, um aluno do 7° ano do Ensino Fundamental foi medalhista na 3ª fase da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática).

1.2 A ESCOLHA PELA DOCÊNCIA

Filha de professora, nunca tive em mente outra profissão a não ser a docência. Durante a adolescência realizei vários trabalhos que me levavam a este destino, desde muito nova já fui catequista de crianças, montava grupos de estudos com vizinhos para ensinar e uma de minhas brincadeiras preferidas era escolinha (eu sempre era a professora) e com 14 anos optei por fazer magistério ao colegial. Iniciei fazendo estágio em salas de 1° e 2° ano do ensino fundamental e tinha sonho de fazer o curso de Letras. Foi no magistério que descobri minha paixão pela matemática.

Durante o Ensino Fundamental, a matemática apresentou-se sempre muito cansativa: listas intermináveis de polinômios e equações para resolver, poucos problemas e muitas contas, a geometria foi praticamente esquecida, a não ser algumas fórmulas de áreas e umas definições para decorar. Muito pouco de geometria era trabalhado nos livros, já que estavam sempre nos últimos capítulos e se chegasse até lá (algo incomum) sempre estávamos já em clima de final de ano e férias. Mas no 3° ano do magistério tive uma professora que mudou minha visão da matemática: Professora Selma Rosana Santiago Manechine. Era meio atrapalhada e sempre andava com uma caixa de sólidos, palitos, barbantes e todos esses materiais 'didáticos' para uma aula de matemática. Pouco trabalhou com álgebra. O curso basicamente se resumiu à geometria plana e espacial. Quando aqueles sólidos da caixa ganharam vida e comecei a perceber que Pitágoras, Tales e tantos outros matemáticos desenvolveram conceitos que retratavam a natureza e o cotidiano e que suas fórmulas e teoria faziam sentido, tudo se encaixava, ampliei meus horizontes. Ficava encantada em perceber que tudo tinha um porque, tudo tinha uma justificativa, tudo tinha uma demonstração, aliás, foi a primeira vez que tive contato com o termo demonstração matemática. Queria que todos vissem as ligações e as conexões que outrora nem imaginava existir. Optei, sem sombra de dúvidas pela faculdade em Licenciatura em Matemática.

Cursei Licenciatura plena em Matemática na UNESP em Bauru de 1993 a 1996. Já em 1994 comecei a ministrar aulas em escolas estaduais, passando em concurso público no ano de 2000. Em 1998 comecei a dar aulas no Centro de Educação Básica (COEBA) onde estou até hoje. Na rede estadual trabalhei em várias cidades como Bauru, Itaju, Bocaina e Bariri, tanto com Ensino Fundamental como com Ensino Médio. Trabalhei também como coordenadora da área de matemática em uma escola particular na cidade de Ibitinga. Atualmente atuo na EE Profª Idalina Vianna Ferro, onde sou designada como coordenadora pedagógica do Ensino Médio. Durante esses quase 20 anos de docência, nunca abandonei os estudos e a oportunidade de aperfeiçoamento profissional: cursei Especialização em Matemática na UNIFRAN (Franca), Especialização no Redefor em convênio com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, formei-me pedagogia na UNINOVE (Bauru) e atualmente participo de um curso a distância pela UFMG sobre a Juventude Brasileira (JUBEMI).

1.3. O OBJETIVO DO PROJETO

O número π é um valor que gera grandes dificuldades ao chegar ao Ensino Médio, pois é muito comum a confusão dos alunos que afirmam que π é igual a 180 graus. Se a definição de π for bem trabalhada no ensino fundamental, provavelmente este tipo de erro não será tão comum.

Nem todos os alunos aprendem do mesmo modo. Segundo Gardner (1999) as pessoas aprendem de maneiras diferentes e reagem a estímulos diversos. Alguns aprendem a partir da leitura, outros a partir da escrita, outros ainda a partir de estímulos sonoros. Com isso:

> "os educadores precisam levar em conta as diferenças entre as mentes de estudantes e, tanto quanto possível, moldar uma educação que possa atingir a infinita variedade de estudantes". (Gardner, 1999)

Portanto a escolha de explorar o valor de π utilizando-se instrumentos diferentes proporciona a aquisição do conhecimento por um número maior de alunos. O trabalho com materiais concretos sempre teve maior destaque no Ensino Fundamental por proporcionar ao aluno uma maior vivência da matemática. O uso da calculadora também já gerou muita polêmica e tem sido defendida por muitos educadores e por matemáticos, desde que não seja restrito ao seu uso somente pelo cálculo. Estudos mostram que quando fundamentado, todos esses recursos auxiliam no desenvolvimento do raciocínio.

> "Em uma sociedade voltada à comunicação, que se apóia no uso de calculadoras e computadores, nada mais natural do que os alunos utilizarem ferramentas para explorar as idéias numéricas, regularidades em sequências, tendências, comprovação de cálculos com números grandes, aplicações da Matemática em problemas reais, etc." (Dante, 2009).

A classe escolhida foi do 9° ano composta de 22 alunos. As aulas forma desenvolvidas no período da tarde com a participação de todos os alunos que se dispuseram a vir no período diverso das aulas. As aulas foram filmadas e fotografadas e foi realizada em um período de 2 dias de aulas duplas, já no início do ano letivo de 2013.

O objetivo da sequência didática é mostrar aos alunos, através de manipulação de objetos e uso de recursos tecnológicos que a razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro é um valor constante e se aproxima de 3,14, que posteriormente foi representado por π. Completando o tema, os alunos realizaram uma pesquisa onde puderam ampliar o conjunto numérico até agora conhecido (o conjunto dos números racionais) e perceber que essa constante não é um número racional, mas um número infinito e não periódico.

2 – Metodologia de pesquisa

2.1.Referencial teórico

A metodologia de pesquisa do trabalho é com base na Engenharia Didática criada na década de 1980 e tendo como principal representante a francesa Michèle Artigue(1988).

A engenharia didática é uma linha de pesquisa que apresenta como resultado final a elaboração de uma sequência didática aplicada em sala de aula que foi observada, testada e avaliada. Nela é realizado um estudo de caso que apresenta três etapas fundamentais: a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori e validação.

A análise a priori é o momento em que há um estudo do objeto a ser trabalhado. É nesta fase que são levantadas as hipóteses, as possíveis variáveis, a caracterização da clientela a ser trabalhada, o ambiente em que ocorrerá a atividade a ser desenvolvida. É importante que o professor colete dados para serem comparados com os resultados alcançados após a aplicação da sequência didática.

A experimentação é a aplicação da sequência didática em si, com todas as suas características, variáveis, levantando dados sobre a receptividade, participação, conclusões, imprevistos que ocorreram durante as atividades propostas. É muito importante a anotação e registro de todas as situações vivenciadas para uma análise completa da realização do experimento.

A análise a posteriori é o confronto entre a hipótese realizada e o resultado atingido. É a verificação se a situação de aprendizagem proposta teve um impacto positivo na aprendizagem dos alunos.

2.2. Análise a priori

A atividade foi desenvolvida com o objetivo de que os alunos reconhecessem o número π como uma constante resultante da razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro e refletissem sobre a natureza do número π, que não é um número racional. Espera-se que os alunos compreendam que essa razão é constante, que este valor é aproximadamente 3,14 e que consigam determinar o comprimento de qualquer circunferência dado seu diâmetro ou raio. Ainda espera-se que identifiquem o π como um número irracional, conhecendo um pouco a história dessa constante.

Desde a antiguidade, já se observara que esse valor não é variável. No Antigo Testamento, é citado no Primeiro Livro dos Reis, 7;23: *"Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até a outra borda, perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor."* De acordo com as escrituras sagradas o valor da divisão do comprimento pelo diâmetro de uma circunferência é exatamente 3. É dos babilônicos um dos primeiros registros de que este valor variava entre $3\frac{1}{8}$ e $3\frac{1}{7}$, que em valores decimais correspondem a 3,125 e 3,142 respectivamente. O escriba egípcio Ahmes, autor do famoso papiro de Rhind, também determinou essa constante com o valor de $\frac{256}{81}$ em escritos de aproximadamente 2 mil anos antes de Cristo. Arquimedes também se dedicou ao estudo dessa constante e obteve o valor 3,1416 utilizando de polígonos inscritos e circunscritos. O método de Arquimedes parte do princípio que um polígono inscrito a um círculo tem perímetro menor que o comprimento da circunferência e que o polígono circunscrito tem perímetro maior.

Podemos verificar esta observação inicial como exemplo em dois polígonos. No caso do quadrado temos:

Figura 1: Quadrados inscrito e circunscrito no círculo.

Dado um círculo de raio r, temos que o perímetro do quadrado circunscrito no círculo será 8r. Usando o Teorema de Pitágoras podemos obter que cada lado do quadrado inscrito ao círculo é $4r\sqrt{2}$. Sabendo que o comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

$$4r\sqrt{2} < 2\pi r < 8r \Rightarrow 2\sqrt{2} < \pi < 4$$

Portanto π é um valor maior que 2,8 e menor que 4.

Figura 2 Hexágonos inscrito e circunscrito no círculo.

Realizando a mesma comparação nos hexágonos temos que, dado um círculo de raio r, o hexágono circunscrito terá lado $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ e portanto seu perímetro será $4r\sqrt{3}$, enquanto o perímetro do hexágono inscrito será 6r. Como o comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

$$6r < 2\pi r < 4r\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 2\sqrt{3}$$

Então o valor de π fica reduzido a um número maior que 3 e menor que 3,42.

Prosseguindo por esse método, ao aumentarmos os lados dos polígonos inscritos e circunscritos, estaremos sempre reduzindo o intervalo do qual pertence o valor de π. Por aplicações sucessivas desse processo, sempre dobrando o número de lados dos polígonos regulares, Arquimedes realizou cálculos com polígonos de até 96 lados e obteve a seguinte aproximação em seu trabalho para a medida de um círculo:

$$3 + \frac{10}{71} \le \pi \le 3 + \frac{1}{7}.$$

No apêndice C faremos esta demonstração apresentando o método que Arquimedes utilizou. Sua fórmula envolve um processo de recorrência que permite obter o valor aproximado de π.

Somente em 1706 o matemático inglês William Jones usou pela primeira vez o símbolo π, mas o símbolo só foi aceito e utilizado depois que Leonhard Euler passou a utilizá-lo em 1737.

Em 1767, Johann Heinrich Lambert demonstrou que π é irracional, ou seja, que não pode ser representado por meio de uma fração de números inteiros. E somente em 1882, Ferdinand Von Lindemann provou que ele é transcendental, ou seja, não é raiz de nenhuma equação polinomial de coeficientes inteiros. Tais definições estarão presentes no apêndice D, mas não é o objetivo desta dissertação mostrar tais resultados importantes.

Uma outra aproximação interessante ao número π pode ser obtida pela séria descoberta em 1677 por James Gregory, que mostrou que a série infinita $arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \dots \quad (-1 \leq x \leq +1)$, quando $x = 1$, torna-se a série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \dots = \frac{\pi}{4}$.

Ao realizar as atividades propostas com os alunos do ensino fundamental, não elaboramos atividades que exijam conteúdos complexos pois os alunos ainda não possuem conhecimentos prévios necessários a esse trabalho, mas espera-se que aprendam que o valor de π é obtido a partir da divisão do comprimento de um círculo pelo diâmetro do mesmo, e por conseguinte, que para determinar o perímetro de qualquer círculo basta multiplicar o diâmetro pela constante π.

2.3. Experimentação

> "... a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa dos resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da

> confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.” (PCN, p. 27)

O desenvolvimento da atividade deu-se em quatro aulas (duas duplas de aulas). Para despertar o desafio, os alunos foram questionados: “Quantas vezes o diâmetro de uma circunferência cabe no seu comprimento?” As respostas foram as mais variadas, desde uma vez e meia até 6 vezes. Então foi proposto aos alunos uma atividade prática que pudesse dar indícios da resposta à pergunta elaborada: dispostos de barbantes e objetos circulares trazidos por eles mesmos, recortaram barbantes do tamanho do diâmetro dos objetos e verificavam quantos pedaços do tamanho do diâmetro seriam necessários para contornar o círculo. Para determinar o tamanho do diâmetro dos objetos, os alunos desenharam os objetos em folhas de papel sulfite, realizaram a dobradura do recorte de círculo em 4 partes iguais e ao abrir o papel o tamanho do diâmetro seria a medida equivalente de uma das dobras do círculo. Utilizando régua, mediram e cortaram o barbante.

Os objetos trazidos pelos alunos foram pratos, CDs, bacias, tampas plásticas, caixa de CDs, tigelas e disco de vinil. Os alunos trabalharam em grupos, supervisionado pela professora que passava pelos grupos constantemente, observando a realização da atividade e questionando os resultados obtidos.

Figura 3 Alunos contornando CD com barbante

Figura 4 Alunos contornando um prato com barbante.

Após a medição de todos os grupos, os alunos socializaram os resultados obtidos com a classe toda. Todos os grupos chegaram à conclusão que o valor ultrapassava um pouco três medidas de diâmetro. Neste momento foi colocado o seguinte questionamento: O diâmetro cabe três vezes e quanto no comprimento? As respostas foram 1cm, 6cm, 10cm, etc.. Foi então colocado pelo aluno Raphael que esta medida era maior quanto maior fosse o círculo utilizado. Por intervenção da professora, os alunos foram desafiados: “Essa medida corresponde a quanto do diâmetro: ½? 1/3? ¼? Como saber mais precisamente quanto é isso?” A partir da sugestão dos próprios alunos, concluíram que para ter uma medida mais exata seria necessário dividir a medida do comprimento da circunferência pelo valor do seu diâmetro. Como isso deveria ser realizado da maneira mais precisa possível, foi sugerido usar a medida do diâmetro da atividade anterior e determinar a medida do contorno da circunferência circulando os objetos com barbante e esticarem o barbante, medindo seu comprimento.

Figura 5 Medindo tigela com o barbante

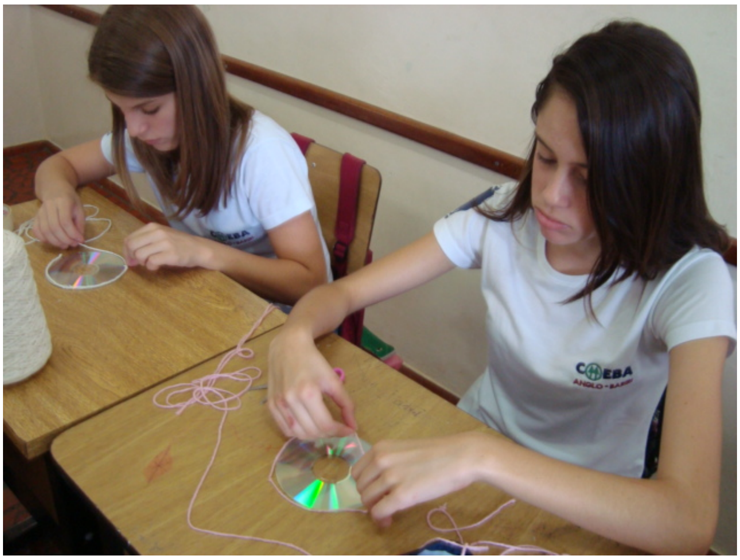

Figura 6 Grupo medindo o comprimento de um CD

Figura 7 Desenhando o círculo da bacia em papel sulfite

Figura 8 Medindo o comprimento do barbante

De posses dos valores obtidos, completaram a tabela abaixo e com uma calculadora determinaram quantas vezes o diâmetro de um círculo cabe em seu comprimento, com aproximação de 2 casas decimais. A tabela com os valores foi registrada numa folha que posteriormente foi colada no caderno dos alunos:

Tabela 1: Calculando o valor de π com as medidas dos objetos.

Objeto	Medida do comprimento (C)	Medida do diâmetro (D)	C/D
Tampa 1	38 cm	12 cm	3,166
Tampa 2	45 cm	14 cm	3,21
Bacia	70,3 cm	22 cm	3,19

Após a socialização da tabela, os alunos perceberam que o número variava entre 3,1 e 3,3. Foi informado aos alunos que este número era chamado de π e proposto para que na próxima aula os alunos trouxessem informações, através de uma pesquisa, que tipo de número é o π e o que eles conseguissem de informações sobre essa constante.

Na semana seguinte, a aula foi iniciada com a socialização da pesquisa feita pelos alunos. Os dados coletados pelos alunos foram

π é irracional e transcendente;

O π é igual e constante;

Não podemos conhecer a última casa;

É a mais antiga constante que se conhece;

O número não termina;

O nome é "περίμετρος";

O filme "As aventuras de Pi" é porque o protagonista do fime adotou o nome da letra e sabia escrever o número π até encher a lousa.

Após a socialização, destaquei a primeira afirmação: π é irracional. Mas que tipo de número é esse? Até o momento os alunos tiveram apenas contato com números racionais. Voltamos então à definição de número racional: todo o número que pode ser expresso na forma de fração. Então o π não pode ser expresso como uma fração? Retomamos o conceito de fração que é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$,com $a \in Z$ e $b \in N^*$. Com esse conceito em mente, foi lançado o seguinte questionamento: "Então, se π não é racional, significa que não existe uma circunferência onde o comprimento e o diâmetro sejam números naturais?" Neste momento, levei os alunos à sala de informática.

Com 2 e 3 alunos por computador, eles utilizaram o GEOGEBRA para realizar as construções e completar a mesma tabela da aula anterior, com 3 exemplos quaisquer, mas com esse novo recurso tecnológico, pude ampliar a questão do π.

> "ele (Geogebra) traz muitas vantagens em relação ao trabalho no papel ou quadro, como movimentar as figuras em diversas direções, comparar e voltar ao aspecto inicial." (Revista Nova Escola)

Além de ter medidas mais precisas, o GEOGEBRA possibilitou que fossem realizados mais dois desafios. Os alunos tiveram que alterar o tamanho do círculo e garantir:

1° que o diâmetro tivesse uma medida inteira;

2° que o comprimento da circunferência tivesse uma medida inteira.

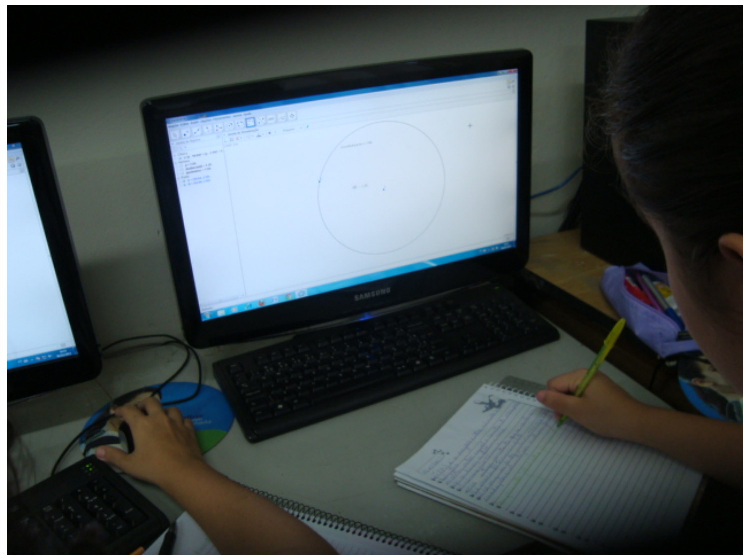

Figura 9 Desenhando um círculo qualquer no geogebra

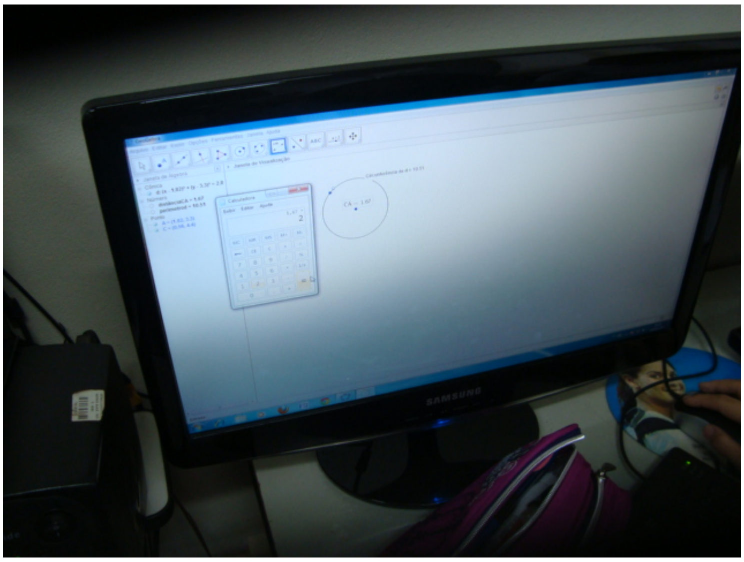

Figura 10 Usando a calculadora do computador para determinar o valor de π

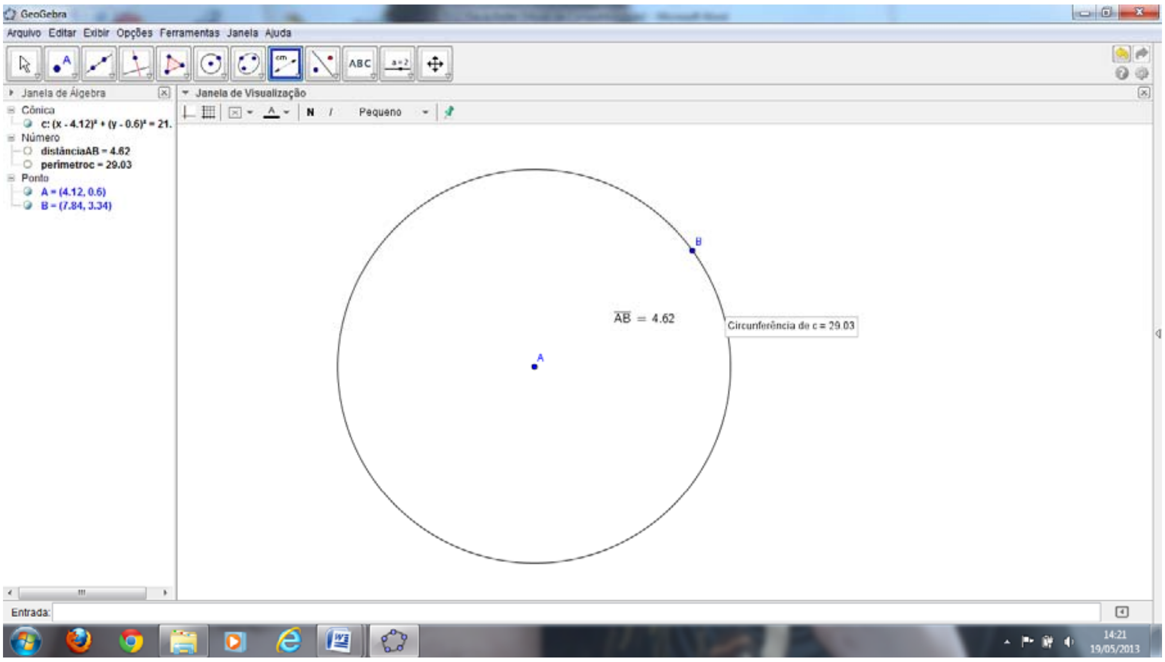

Figura 11 Círculo qualquer representado no Geogebra

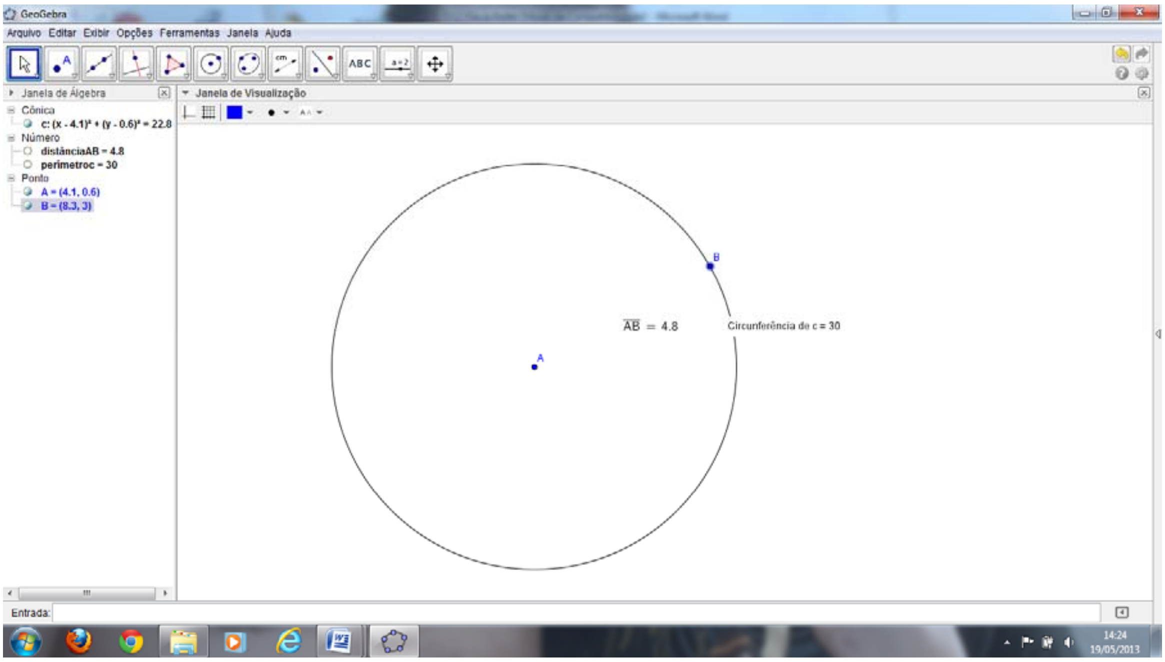

Figura 12 Circulo de comprimento inteiro representado no Geogebra

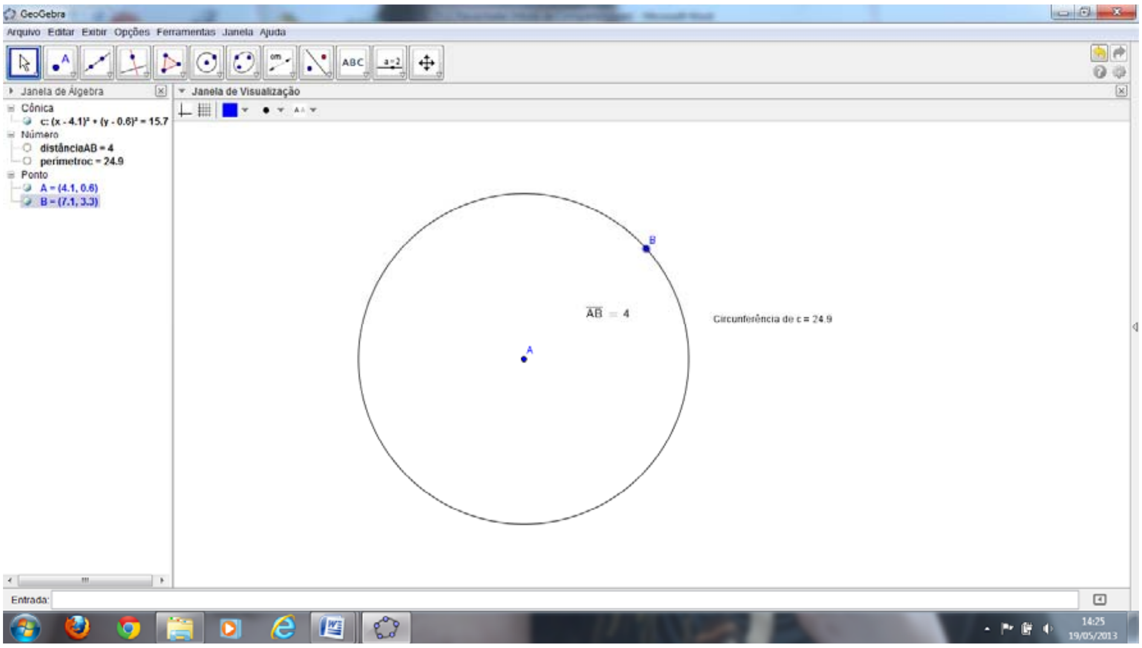

Figura 13 Círculo de raio com medida inteira representado no Geogebra

Após essas atividades, foi realizada uma série de exercícios sobre o cálculo do comprimento da circunferência, uma autoavaliação da atividade realizada e uma avaliação sobre comprimento de círculo e classificação do número π.

2.4. Análise a posteriori

Para análise da atividade desenvolvida, realizamos uma tabulação das questões aplicadas na avaliação correspondente a comprimento de circunferência e a classificação do número π.

A primeira questão da prova a ser tabulada foi a questão envolvendo cálculo de circunferência. A questão foi reproduzida a seguir:

6 - Calcule o comprimento e a área de uma circunferência de:

a) raio = 3 cm.

b) raio = 1,2 cm.

c) diâmetro = 7 cm.

d) diâmetro = 10,6 cm.

No caso, o objeto de pesquisa foi apenas o comprimento cujo resultado é mostrado na tabela abaixo:

Tabela 2: Tabulação do número de acertos na prova logo após a atividade.

Acertou todos os itens	15 alunos	68%
Acertou quando foi dado o diâmetro, mas errou quando foi dado o raio (no caso elevou o raio ao quadrado)	1 aluno	5%
Errou a questão ou deixou em branco	6 alunos	27%
	22 alunos	100%

A outra questão correspondia à classificação do π .

2 –Dados os números:

6	1/3	-4,5	6,444...	12/4	-2/4
0	-8	$\sqrt{-16}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{1000}$	π

Quais desses números são:

a) Naturais:

b) Inteiros

c) Racionais

d) Irracionais

Nesta questão analisei somente os que classificaram corretamente o número π como um número irracional. 17 alunos, o que corresponde a 77%, identificaram corretamente o π como um número irracional

Quanto à autoavaliação realizada, os alunos deveriam completar uma tabela com as seguintes informações: o que eu aprendi e o que ainda tenho dúvida.

Tabela 3: Tabulação do resultado da autoavaliação.

O que eu aprendi	O que ainda tenho dúvida
Calcular o comprimento da circunferência – 16 O número π – 12 Usar o Geogebra – 2 O que são números irracionais – 5	Calcular o comprimento do círculo – 3 Diferença entre número racional e irracional – 3 Diferenciar diâmetro de raio – 1

Decorridos dois meses da aplicação das atividades propostas e com o intuito de verificar se o que os alunos aprenderam foi realmente assimilado ou decorado de uma forma mecânica, foi reaplicado os mesmos exercícios da avaliação. O resultado obtido para a questão do cálculo do comprimento do círculo foi:

Tabela 4: Tabulação do número de acertos na prova 2 meses após a realização da atividade.

Acertou todos os itens	11 alunos	50%
Acertou quando foi dado o diâmetro, mas errou quando foi dado o raio (no caso elevou o raio ao quadrado)	4 aluno	18%
Errou a questão a questão ou deixou em branco	7 alunos	32%
	22 alunos	100%

Percebemos que os resultados são satisfatórios. Metade dos alunos não teve dificuldade em resolver a questão mesmo depois de um período sem retomar “a fórmula” do comprimento da circunferência. O número de alunos que erraram a questão praticamente manteve-se estável. Quanto aos 4 alunos que acertaram apenas quando foi dado o diâmetro, um errou, pois fez os cálculos com o próprio raio, os outros três elevaram o raio ao quadrado. Isso pode ter sido causado devido ao assunto seguinte, quando foi abordado o tema da área do círculo, que neste caso sabemos ser πr^2, com r o raio do círculo.

Quanto à classificação do número π, pedi para que os alunos dissessem se ele é racional ou irracional e por que. Todos os alunos classificaram π como irracional, alguns justificaram corretamente, mas outros apresentaram algumas justificativas equivocadas:

Porque é uma dízima não periódica – 11

Porque possui infinitas casas decimais – 5

Porque ele não tem raiz – 2

Porque não pode ser colocado na forma de fração – 1

Porque ele pode ter qualquer valor – 1

Não justificou – 2

Como podemos observar, a maioria dos alunos soube caracterizar corretamente o valor de π.

3. Conclusões

O trabalho com recursos diversificados principalmente no Ensino Fundamental leva os alunos a visualizar a Matemática de uma maneira diferente. A utilização de materiais lúdicos ou manipulativos proporciona uma maior aproximação do professor e dos alunos. Nesta fase da escolaridade dos alunos é importante os alunos se identificarem não apenas com a disciplinas e os conceitos nela englobados, mas é necessário um olhar diferente tanto do professor quanto dos alunos. O olhar do aluno com o professor, sua empatia, suas afinidades colaboraram para o interesse e o processo de ensino aprendizagem.

Ao trabalhar com os alunos, aulas diferentes de giz e lousa, cria-se um vínculo afetivo e de cumplicidade com os alunos. Este contato direto com os alunos para explorar os conceitos matemáticos em grupos menores faz com que a aprendizagem seja menos cansativa e mais produtiva. O trabalho em grupo também favorece esse dinamismo em sala de aula, proporcionando um clima favorável e o aluno se sente mais aberto a novas experiências.

Na adolescência, o mundo oferece aos alunos muitas opções de divertimento e lazer. Os recursos tecnológicos tornam a vida do adolescente uma atividade dinâmica e muito longe da monotonia de algumas atividades. Proporcionar aos alunos aulas que acompanhem esse avanço tecnológico apenas reforça que estamos no caminho certo para torná-los nossos parceiros na aprendizagem.

Não são todos os conteúdos que proporcionam ao professor essa abertura e liberdade de trabalhar com materiais diversos, mas acreditamos que a capacitação e atualização constante dos professores têm um papel fundamental nessas aulas. É do professor a responsabilidade de poder observar perspectivas diferentes nos conteúdos escolares. Seja com material concreto, jogos, tecnologias, história da matemática, aulas através de situações problemas, é o professor que comanda o rumo das aulas e abre aos alunos caminhos e desperta a curiosidade, a atenção, o entusiasmo, os horizontes para que o conteúdo vá além das páginas dos livros e ganhe vida.

O projeto proposto pode ser aplicado em salas de aula de todo o país, em sua íntegra ou mesmo parte dele. Cada escola deve adequar o conteúdo à sua realidade, pois sabemos da realidade de algumas escolas públicas que não tem nem computadores para os alunos. Em escolas cujos alunos dispõem de computadores, até em casa, a atividade pode até ser enriquecida com outras possibilidades de uso do geogebra, como por exemplo, o aluno tentar descobrir, como se calcula a área de um círculo. As aplicações são inúmeras e acreditamos que com um sólido conhecimento e com muita criatividade, o professor poderá realizar outras adaptações que julgar necessária.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** – Brasília, 1998.

DANTE, Luis Roberto. **Tudo é Matemática.** 3ª ed. v.4. São Paulo: Ática, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H, Domingues . 5ª ed. Campinas: TradEditora UNICAMP, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de, **Números Irracionais e transcendentes**. Brasília: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

GARDNER, H. **Estruturas da mente: a teoria das inteligências múltiplas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

______. **Inteligência: múltiplas perspectivas**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

LIMA, Elon Lages. **Medidas e formas em geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** Rio de janeiro: Editora Impa, 1991.

PORTAL DO PROFESSOR. **Entrevista com a diretora acadêmica da OBMEP Suely Druck**. Disponível em http://portaldoprofessor.mec.gov.br /conteudoJornal.html?idConteudo=745> Acesso em: abr. 2013.

Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em < www.profmat-sbm.org.br/docs/PROFMAT-Regimento_2011.pdf> Acesso em: abr. 2013.

SALLES, Tomás, DONOLATO, Denilson, PIRES, Rodrigo. **A irracionalidade e a transcendência dos números e e π**_. Disponível em < http://www.ime. unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Transcendencia.pdf> Acesso em jul. 2013.

SESI MATEMÁTICA. Brasil tem baixo desempenho em matemática. Disponível em <http://www.firjan.org.br/sesimatematica/noticias/brasil-tem-baixo-desempenho-em-matematica.htm>. Acesso em: jun/2013.

SILVEIRA, Evanildo da. Não é apenas loucura. **Revista Cálculo**, São Paulo, ano 2, n. 14, p. 36 a 41, mar. 2012.

VAN DE WALLE , Jonh A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Colonese – 6ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VICHESSI, Beatriz. Sete respostas sobre o software Geogebra**. Revista Nova Escola**. São Paulo, ano 26, n. 244, p. 61 a 63, ago. 2011.

VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer.** A partir da história e da geometria. 2ª ed. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1999.

APÊNDICE A

Proposta da atividade.

1ª aula: Calculando o número π a partir de objetos concretos.

Material necessário: objetos circulares de tamanhos diferentes: CD, pratos, tampas de panelas de diferentes tamanhos, tampas de potes, disco de vinil, aros de bicicletas, bacias... , barbante, folha de papel sulfite e calculadora.

Desenvolvimento:

Retomar com os alunos o conceito de diâmetro de circunferência e comprimento. Pedir para que eles estimem: quantas vezes o diâmetro de uma circunferência cabe em seu comprimento? Para responder a essa pergunta os alunos deverão cortar pedaços de barbante que tenham o tamanho do diâmetro do círculo a ser medido e com esses pedaços contornar o circulo para tentar responder à pergunta proposta. Como este processo pode gerar alguma dúvida, pois os alunos deverão concluir que são 3 pedaços e ainda falta um pedaço, poderá ser proposta a seguinte atividade: Como descobrir com mais exatidão quantas vezes o diâmetro de um círculo cabe no seu comprimento? O professor deve conduzir a discussão para que os alunos realizem a seguinte atividade em grupos de dois ou três alunos: contornar o círculo com barbante e medir seu comprimento. Depois, desenhar o círculo em uma folha de papel e determinar seu diâmetro a partir de dobradura. Medir este diâmetro. Por fim, organizar todos os dados coletados em uma tabela que contenha o comprimento do círculo, a medida de seu diâmetro e o valor correspondente à divisão do comprimento pelo diâmetro, que deverá ser resolvido com o auxílio de uma calculadora. O quociente obtido é a resposta da pergunta: quantas vezes o diâmetro cabe no comprimento. A tabela terá o formato abaixo:

Tabela 5: Modelo para registro da atividade com barbante.

Medida do comprimento do círculo (C)	Medida do Diâmetro (D)	C: D, ou seja, quantas vezes o diâmetro cabe no comprimento.

O professor deverá passar pelos grupos para verificar se as medições estão sendo realizadas de forma correta e se a divisão está em um valor próximo a π. Após os grupos encerrarem a atividade, socializar as respostas obtidas e questionar com os alunos se os valores encontrados estão todos próximos de 3,14. Informar que este número já é conhecido há muito tempo e propor que os alunos realizem uma pesquisa sobre o número π. Neste momento é importante que o professor não dê muitos detalhes sobre essa constante, deixando que os alunos descubram suas características principais.

2ª aula:

Iniciar a aula socializando o que os alunos pesquisaram sobre o número π. Verificar se entre as informações obtidas apareceu que o número π é um número irracional. Se ainda não foi citado, acrescentar essa informação aos dados coletados. Explorar com os alunos o que é um número irracional. Até o momento, provavelmente, os alunos tiveram contato apenas com números racionais. Retomar com eles a definição de número racional: todo número que pode ser escrito na forma de fração, ou seja, como razão de dois números inteiros. Como o prefixo i é de negação, os números irracionais são os que não são racionais. Pode-se levantar o seguinte questionamento: mas se π é originário da divisão do comprimento pelo diâmetro, não existe uma circunferência onde o comprimento e o diâmetro são números inteiros? Neste momento, o professor deve levar os alunos à sala de informática onde será proposta a utilização do software Geogebra.

É importante que antes desta aula os alunos já tenham noções básicas de utilização do programa. Se a escola dispõe de aulas de informática, peça para que o professor utilize o programa em algumas aulas anteriormente, se não tem o professor, leve os alunos antes à sala de informática e faça uma atividade de construção de figuras que utilize as principais ferramentas do programa: construção de polígonos, construção de circunferência, medição, traçado de retas paralelas e perpendiculares.

> "Depois de estudar o software, você pode mostrar para a turma o que é possível fazer com os botões básicos – como 'mover' e 'polígono'. Em seguida, propor atividades que permitam explorar os demais. Assim, os alunos vão descobrir o que é possível fazer" (Revista Escola, agosto 2011)

Na Revista Escola há uma sequência didática completa – Ambientação com o Geogebra. Há também sugestões no site www.uff.br/cdme da Universidade Federal Fluminense.

Dando continuidade a atividade eles deverão abrir o softawe Geogebra e na janela de visualização deverão deixar a página em branco, sem os eixos. Para isso, clicar na barra de eixos logo abaixo da janela de visualização:

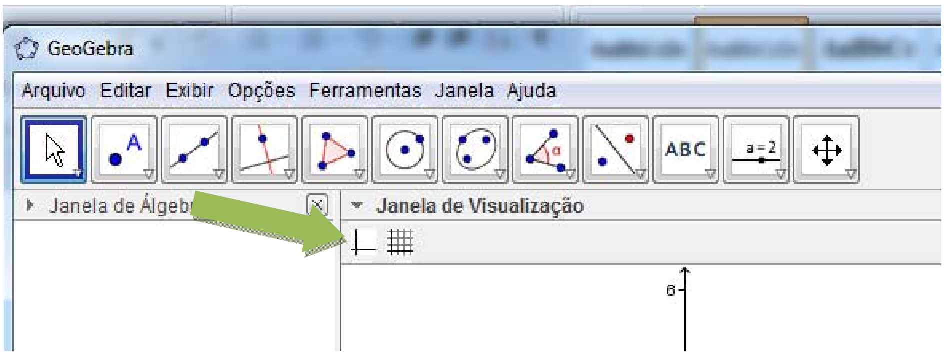

Figura 14: Retirar os eixos do Geogebra.

Logo após, proponha que eles construam um círculo qualquer no Geogebra. Para isso eles deverão clicar no ícone "circulo dado o centro e um de seus pontos".

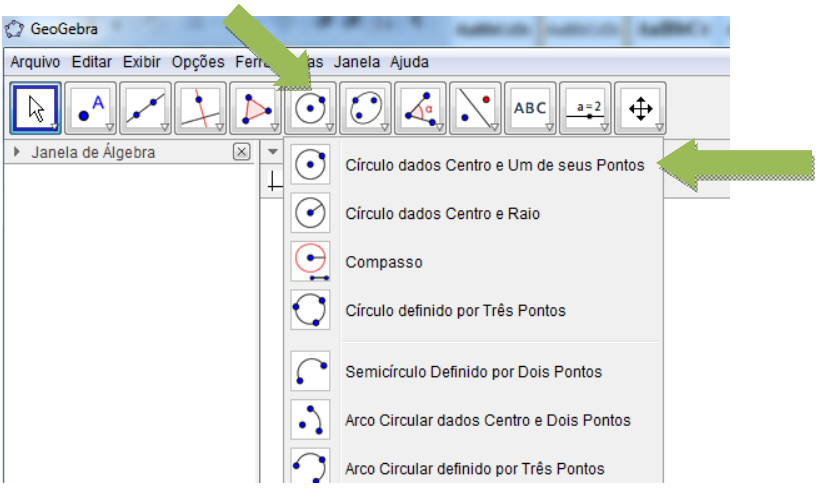

Figura 15: Ícone para a construção do círculo

Clicando em um ponto qualquer é possível construir uma circunferência a clicar novamente quando formar a circunferência do tamanho pretendido.

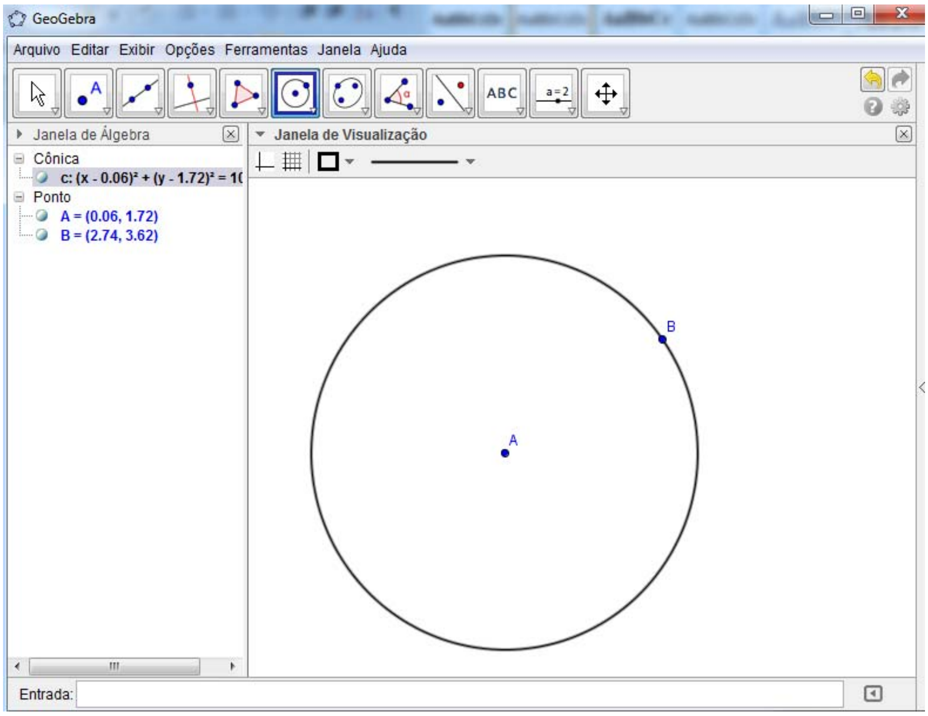

Figura 16: Construção da circunferência

Com o comando “Distância, comprimento ou perímetro”, meça o comprimento do círculo construído apenas clicando sobre a circunferência e o raio da mesma clicando nos pontos A e depois no ponto B.

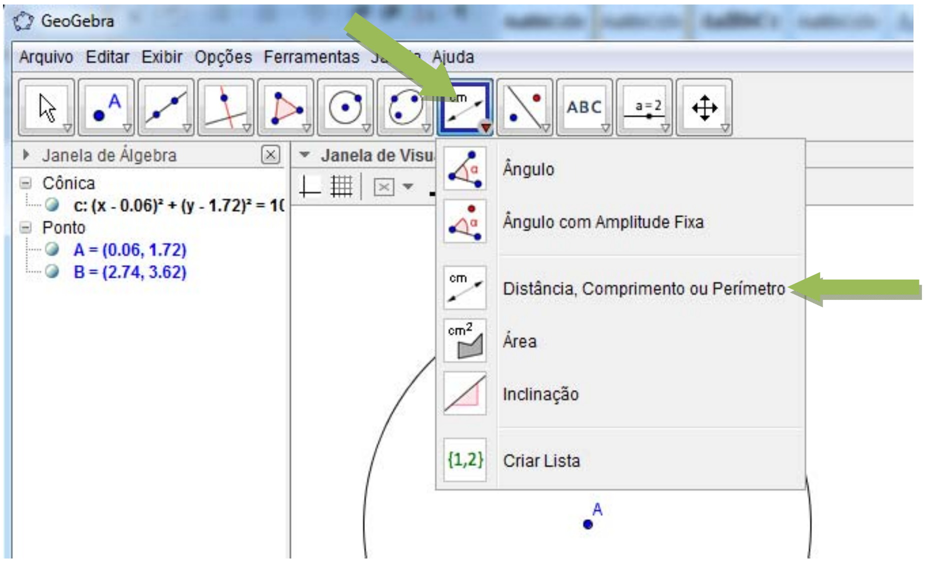

Figura 17: Ícone para a medição do comprimento e raio do círculo

Podem continuar anotando na tabela da aula anterior, lembrando que no computador está a medida do raio e que o aluno deverá dobrar para passar para a tabela que deve ser preenchida com a medida do diâmetro. A tela terá as seguintes informações:

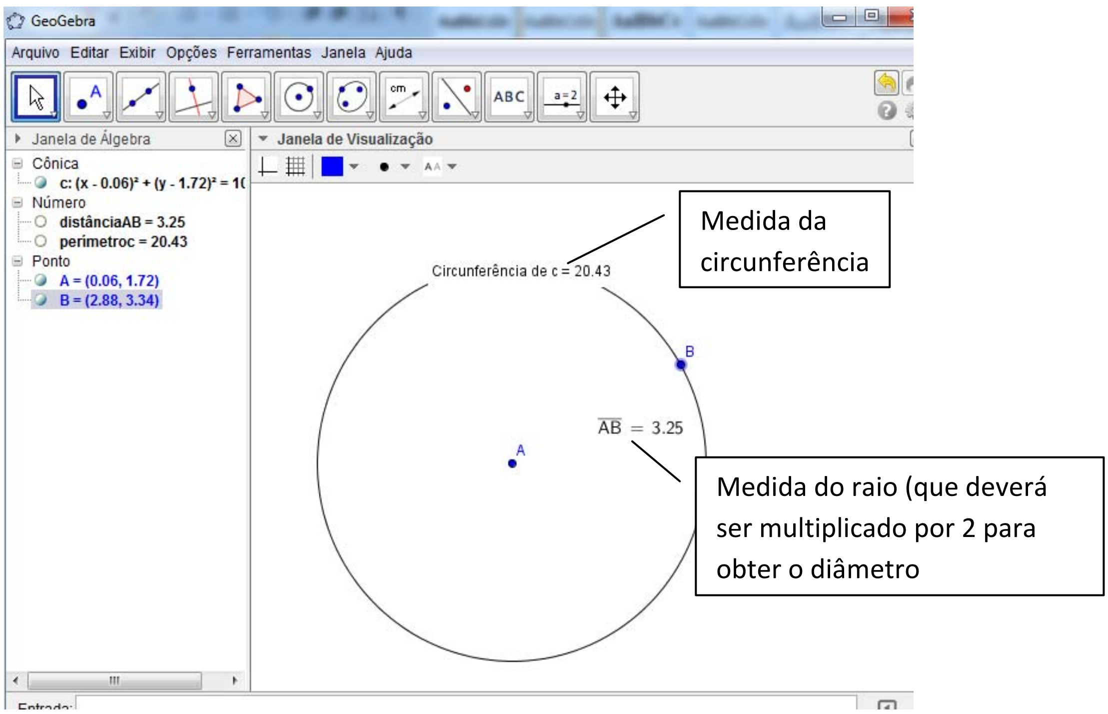

Figura 18: Configuração da tela após realização da atividade

Utilizando a ferramenta mover, peça que alterem o tamanho do círculo. Para isso deverão clicar com o cursor sobre o ponto B e movê-lo.

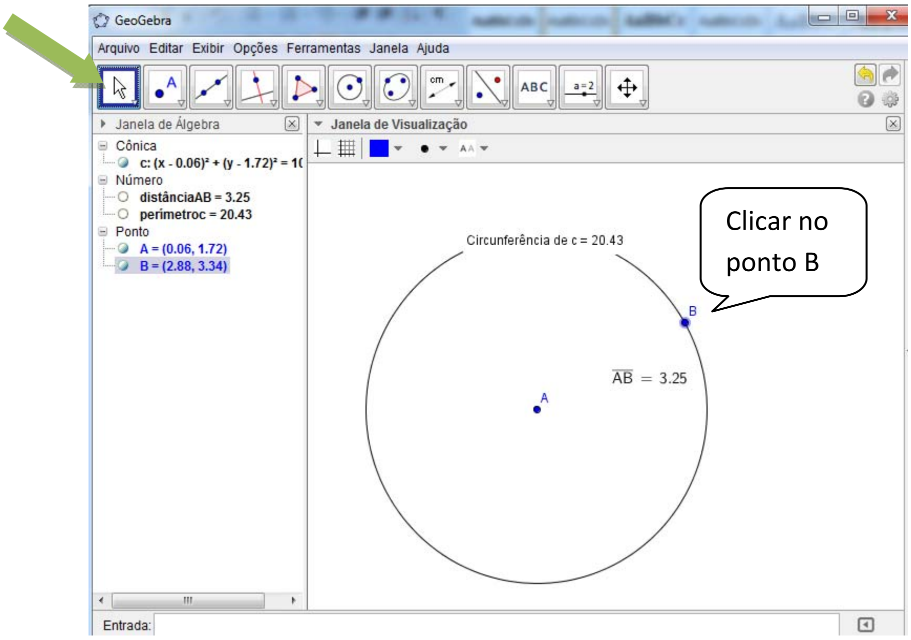

Figura 19: Ícone do cursor para modificação do círculo

Anotem mais uma vez os valores obtidos. A modificação deve ser realizada mais uma vez. Com o uso de uma calculadora, deverão dividir o comprimento pelo diâmetro. Chamar a atenção dos alunos que a aproximação agora é bem próxima de 3,14, com diferenças de menos de 0,1.

O objetivo agora é discutir a natureza do número π. Relembrando que já foi dito que se o π fosse um número racional poderia ser escrito como a razão de dois números inteiros. Então a proposta é: modifique o circulo de forma que o diâmetro seja um número inteiro, o que acontece com o comprimento do círculo? Faça essa alteração várias vezes a troque experiências com as outras duplas sobre o resultado obtido. Observarão que não tem comprimento inteiro. Agora farão o inverso: deverão garantir que o comprimento seja um valor inteiro e então observar que tipo de número é o diâmetro.

A atividade mostra alguns exemplos de que não existe para π a possibilidade de que o comprimento e o diâmetro sejam números inteiros, mas provar formalmente essa afirmação não é possível para o nível de conhecimento dos alunos do Ensino Fundamental.

APÊNDICE B

Um pouco da história do número π

O π é um número muito especial. Possui um símbolo próprio para representá-lo e está intimamente ligado a uma das formas geométricas mais perfeitas: a circunferência e seu diâmetro. Não importa o tamanho da circunferência medida (de uma moeda, de um CD, de uma bola de futebol, etc.), o resultado dessa razão vai se aproximar do valor de π, ou seja, 3,14... . É claro que, na prática, podemos obter resultados um pouco abaixo ou acima do valor de π, pois nem sempre os objetos medidos são circunferências perfeitas. Além disso, pode haver alguma imprecisão ao se tomar medidas de objetos circulares.

Hoje em dia é possível calcular teoricamente o valor de π para uma circunferência perfeita, usando-se fórmulas matemáticas, com a precisão que se desejar. Contudo, o conhecimento sobre como calcular o valor de π tem uma longa historia, de mais de 3 000 anos. A busca por um método de cálculo preciso para π intrigou matemáticos e filósofos desde a Antiguidade. No antigo Egito, acreditava-se que essa razão valia aproximadamente $\frac{256}{81}$. Na Mesopotâmia, os antigos babilônios usavam a fração $\frac{25}{8}$. Na Alexandria, por volta do século II d.C., o filosofo grego Ptolomeu aproximou o valor de π da fração $\frac{377}{120}$.

Contudo, é atribuído a Arquimedes (287-212 a.C.) uma das primeiras tentativas de se calcular rigorosamente o comprimento da circunferência e o valor de π.

Arquimedes escreveu a obra *A medida de um Círculo*. Esta obra é composta de apenas três proposições na qual Arquimedes demonstra primeiramente que a área de um círculo (A_c) de raio igual a r é igual a área de um triângulo cuja base é igual a circunferência do circulo (C) e cuja altura é r, isto é, $A_c = \frac{Cr}{2}$. Por consequência, a razão entre a área do círculo e o raio ao quadrado é o que hoje sabemos ser o valor de π. Observe:

$$\frac{A_c}{r^2} = \frac{\frac{rC}{2}}{r^2} = \frac{rC}{2r^2} = \frac{C}{D} = \pi$$

Arquimedes quis descobrir a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Partindo de um hexágono regular inscrito e circunscrito a um mesmo círculo calculou os perímetros dos polígonos obtidos. Assim, dado um círculo de raio r, o hexágono circunscrito terá lado $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ e portanto seu perímetro será $4r\sqrt{3}$, enquanto o perímetro do hexágono inscrito será 6r. Como o comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

$$6r < 2\pi r < 4r\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 3{,}434$$

Figura 20: Hexágonos inscrito e circunscrito no círculo.

Arquimedes já sabia que, se p_k e P_k correspondem, respectivamente, aos perímetros dos polígonos regulares de k lados inscritos e circunscritos ao mesmo círculo, então $P_{2n} = \frac{2\,p_n P_n}{p_n + P_n}$ e $p_{2n} = (p_n P_{2n})^{1/2}$. Com estas fórmulas (que estão demonstradas no Apêndice C), Arquimedes calculou p_{12}, p_{24}, p_{48} e p_{96} e o resultado obtido foi que a aproximação ao π com 8 casas decimais era

$$3{,}140704872 < \pi < 3{,}14232195.$$

Esta metodologia mostrou ser possível obter aproximações do valor de π tão precisas quanto desejarmos, bastando aumentar, continuamente, o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos. Por exemplo, o cálculo de Ptolomeu foi feito com base em um polígono de 720 lados. Em 1579, François Viète encontrou π até a nona casa decimal de exatidão utilizando um polígono de 393 216 lados e em 1610 o holandês

Ludolph van Ceulen calculou π até a trigésima quinta casa usando um polígono de 2^{62} lados. Ele gastou grande parte de sua vida nesta tarefa tanto que após sua morte a viúva mandou gravar o número em seu túmulo. Por isso o número π é às vezes chamado de "número ludolphiano". A última vez que o método de Arquimedes foi utilizado para calcular o valor de π foi em 1630 por Grienberger.

Nesta mesma obra, Arquimedes trabalhou com as áreas destes polígonos regulares, tentando calcular a área do círculo percebeu que ela era limitada por estas áreas e que este limite se estreitava até a área real do círculo. Este foi o início do cálculo, embora fossem necessários mais 20 séculos para que Newton desenvolvesse esta idéia quando formulou os elementos essenciais do cálculo diferencial.

Em 1677 o matemático escocês James Gregory obteve a série infinita $arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\ (-1 \leq x \leq 1)$. A partir desta série e utilizando outras relações trigonométricas, vários outros matemáticos tiveram sucesso no cálculo de π com várias casas decimais. Por exemplo, em 1699, Abraham Sharp encontrou as primeiras 17 casas decimais utilizando x = $\sqrt{1/3}$, em 1841, William Rutherford calculou π com 208 casas, sendo 152 casas corretas, utilizando a série de Gregory e em 1948 Ferguson e Wrench publicaram o valor correto e testado com 808 casas decimais.

A letra π, do alfabeto grego, foi escolhida por ser a primeira letra da palavra *peripheria* (πewijefwov), cujo significado é circunferência, ou seja, o contorno de um círculo. Também foi nessa época que se fez uma das descobertas mais importantes sobre π. O matemático francês Johann Heinrich Lambert, em 1767, conseguiu provar que não há nenhuma razão de números inteiros cujo resultado seja igual a π. Ou seja, π é um número irracional, cuja terminação decimal é infinita e não periódica. E em 1882, F. Lindemann provou que π é transcendente, ou seja, que ele não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes racionais.

A grande evolução no cálculo do valor de π aconteceu a partir do momento em que o computador entrou em cena. Com o advento da computação, associado ao descobrimento de métodos de cálculos mais poderosos e eficientes, tornou-se possível calcular o valor de π com milhares de casas decimais, em um tempo muito mais curto. Logo, o número de dígitos de π obtidos saltou para a casa dos milhões. Um dos últimos recordes foi obtido pelos pesquisadores japoneses Kanada e Takahashi que, em 2002, conseguiram obter o valor de π com mais de um trilhão de casas decimais.

Além do desafio intelectual relacionado a estas pesquisas, o cálculo do π é usado, por exemplo, para testar a eficiência dos novos computadores. Por exigir uma computação intensa e precisa, o cálculo de milhões de casas decimais do π serve de parâmetro para verificar a velocidade e a confiabilidade dos novos processadores.

Contudo, na prática, não precisamos conhecer o valor de π com tantas casas decimais.

Na maioria das aplicações, uma aproximação do valor de π com uma ou duas casas decimais é suficiente para garantir precisão em construções, desenhos, etc. Em cálculos científicos, uma aproximação com quatro casas decimais é mais do que suficiente. Por exemplo, o valor de π com 11 casas decimais permitiria calcular a circunferência da Terra com uma precisão de milímetros.

APÊNDICE C

Demonstrações

Arquimedes em seu tratado “A medida de um círculo” obteve a aproximação do valor do número π utilizando-se da aproximação do comprimento da circunferência de raio R através do comprimento de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência.

Arquimedes demonstrou que

$$P_{2n} = \frac{2\, p_n P_n}{p_n + P_n} \qquad (1)$$

$$p_{2n} = (p_n . P_{2n})^{1/2} \qquad (2)$$

sendo que P_n e p_n denotam os perímetros dos polígonos regulares de n lados circunscrito e inscrito ao mesmo círculo respectivamente. Para tanto ele iniciou os cálculos obtendo os valores de P_6 e p_6 (hexágonos), e calculando sucessivamente P_{12}, p_{12}, P_{24}, p_{24}, P_{48}, p_{48}, P_{96} e p_{96}.

Nosso objetivo será mostrar estas duas fórmulas e obter os valores encontrados por Arquimedes.

Vamos inicialmente demonstrar que tendo dois polígonos regulares de n lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo, podemos obter a medida do lado de um a partir da medida do lado do outro. Denotemos por Sn a medida do lado do polígono circunscrito e s_n a medida do lado do polígono inscrito, e seja R o raio da circunferência. Então valem as seguintes relações

$$\boldsymbol{s_n = \frac{2\, R\, S_n}{\sqrt{4R^2 + {S_n}^2}}} \ \boldsymbol{(3)}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2\, R\, s_n}{\sqrt{4\, R^2 - {s_n}^2}}} . \boldsymbol{(4)}$$

A figura a seguir servirá de auxílio aos cálculos. Apesar da figura ser um hexágono, os resultados obtidos não dependem deste fato.

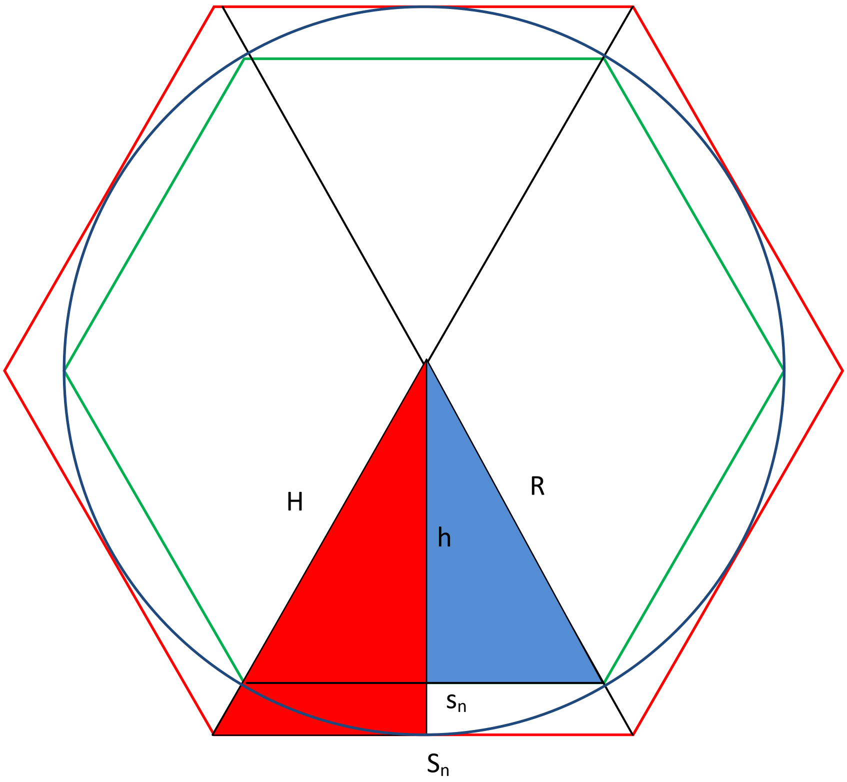

Figura 21: Relações no polígono inscrito e circunscrito

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos as seguintes relações

$$H^2 = R^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 + S_n{}^2}{4} \rightarrow \boldsymbol{H} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{4R^2 + S_n{}^2}}}{\boldsymbol{2}}.$$

$$\boldsymbol{h^2 = R^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - s_n{}^2}{4} \rightarrow h = \frac{\sqrt{4\,R^2 - s_n{}^2}}{2}}.$$

Não é difícil verificarmos que os triângulos azul e vermelho são semelhantes pelo caso AA (Caso Ângulo – Ângulo). Portanto temos

$$\frac{\frac{S_n}{2}}{\frac{s_n}{2}} = \frac{H}{R} \rightarrow \frac{S_n}{s_n} = \frac{\frac{\sqrt{4R^2 + S_n{}^2}}{2}}{R} \rightarrow \boldsymbol{s_n} = \frac{\boldsymbol{2\,R\,S_n}}{\sqrt{\boldsymbol{4R^2 + S_n{}^2}}}.$$

Analogamente podemos obter a medida do lado S_n do polígono circunscrito a partir da medida do lado s_n do polígono inscrito, ambos em um círculo de raio R. Da relação acima temos que

$$\boldsymbol{\frac{\frac{S_n}{2}}{\frac{s_n}{2}} = \frac{R}{h} \rightarrow \frac{S_n}{s_n} = \frac{R}{\frac{\sqrt{4\,R^2 - s_n{}^2}}{2}} \rightarrow S_n = \frac{2\,R\,s_n}{\sqrt{4\,R^2 - s_n{}^2}}},$$

concluindo assim a demonstração das fórmulas (3) e (4).

Agora, vamos mostrar uma fórmula geral para encontrar o lado de um polígono regular de 2n lados inscrito em um círculo em função de um polígono de n lados.

Para ilustração usaremos o hexágono

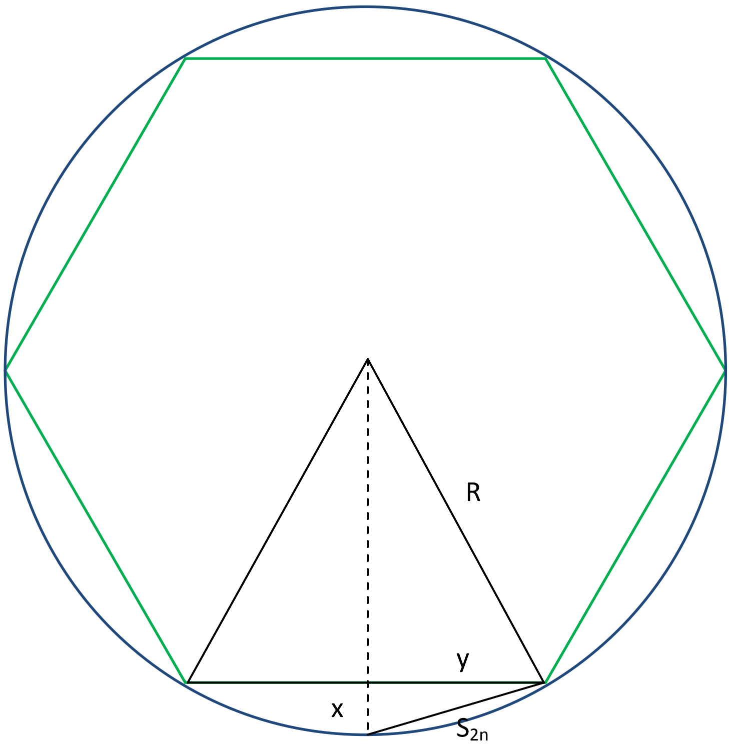

Figura 22: Relações no polígono regular inscrito de n e 2n lados

Denotemos por x a diferença entre a medida do raio do círculo e a medida da altura do triângulo isósceles formado e y a metade da medida do lado do polígono inscrito neste círculo.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$R - x = \sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow x = R - \sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow$$

$$x^2 = R^2 - 2R\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 - y^2 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Por outro lado, temos que

$$(s_{2n})^2 = x^2 + y^2.$$

Logo

$$(s_{2n})^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow s_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}},$$

o que nos leva a

$$s_{2n} = \sqrt{2\,R^2 - R\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}}\,.$$

Na sequência, demonstraremos uma fórmula que nos permite determinar o lado de um polígono regular circunscrito a um círculo com 2n lados, conhecendo o lado do polígono circunscrito de n lados. Novamente com o auxílio da figura temos

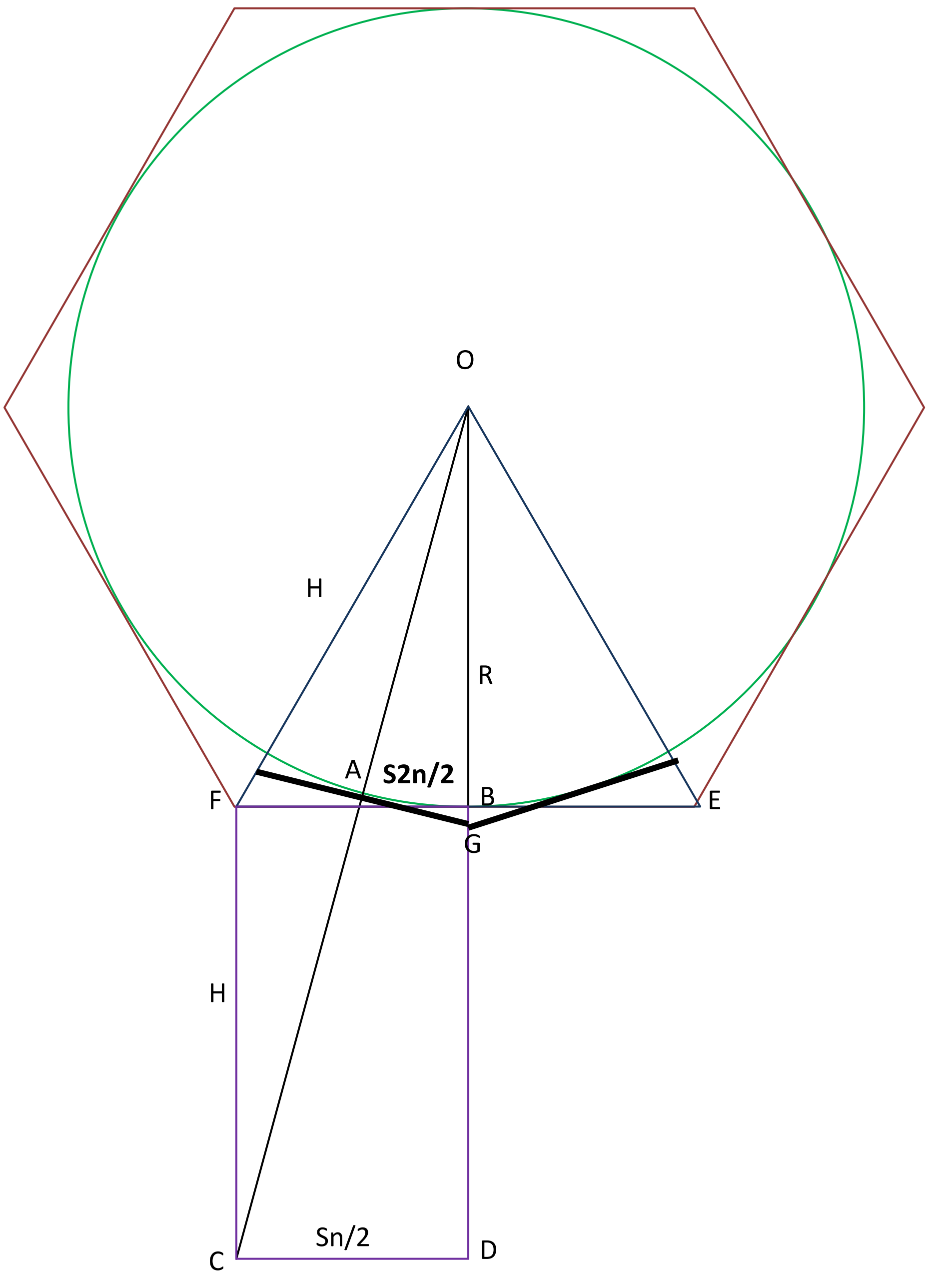

Figura 23: Relações no polígono regular circunscrito de n e 2n lados.

Sejam A, B, C, D, E, F e G pontos tais que A é ponto médio do lado do polígono circunscrito de 2n lados, BDCF um retângulo com lados medindo H e Sn/2, OEF um triângulo isósceles com lados congruentes iguais a

H e base o lado do polígono regular circunscrito de n lados. O ponto G é o vértice do polígono circunscrito de 2n lados.

Aplicando Teorema de Pitágoras no triângulo OBE obtemos

$$H^2 = \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + R^2 \rightarrow H = \frac{1}{2}\sqrt{{S_n}^2 + 4R^2}.$$

Observe que os triângulos AOG e DOC são retângulos em A e D e tem o ângulo O em comum, por isso, pelo caso AA, eles são semelhantes. Portanto vale a seguinte relação

$$\frac{\frac{S_{2n}}{2}}{\frac{S_n}{2}} = \frac{R}{R+H} \rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{R}{R+\frac{1}{2}\sqrt{{S_n}^2+4R^2}} \rightarrow \boldsymbol{S_{2n}} = \frac{\boldsymbol{2RS_n}}{\boldsymbol{2R+\sqrt{{S_n}^2+4R^2}}}.$$

Usando as expressões deduzidas acima, vamos agora demonstrar as fórmulas (1) e (2) utilizadas por Arquimedes. Mostraremos inicialmente a fórmula (1), isto é$P_{2n} = \frac{2\,p_nP_n}{p_n+P_n}$, em que P_n e p_n correspondem aos perímetros dos polígonos regulares de lados n circunscrito e inscrito no círculo de raio R.

De fato. Por (4) temos que

$$P_{2n} = 2n\,.S_{2n} = 2\,n\,\frac{2\,R\,S_n}{2\,R + \sqrt{{S_n}^2 + 4\,R^2}} = 2\,n\,\frac{2\,R\,S_n}{2\,R + \frac{2\,R\,S_n}{s_n}} = \frac{4\,n\,R\,S_n\,s_n}{2\,R\,s_n + 2\,R\,S_n}$$

$$= \frac{2\,n\,S_n s_n}{s_n + S_n} = \frac{2\,n\,S_n\,n\,s_n}{n\,s_n + n\,S_n} = \frac{2\,p_nP_n}{p_n + P_n}$$

Vamos agora demonstrar a fórmula $p_{2n} = (p_n.P_{2n})^{1/2}$.

Já sabemos que

$$s_n = \frac{2\,R\,S_n}{\sqrt{4R^2 + {S_n}^2}} \Longrightarrow \sqrt{4R^2 + {S_n}^2} = \frac{2\,R\,S_n}{s_n} \quad (5)$$

$$S_n = \frac{2\,R\,s_n}{\sqrt{4\,R^2 - {s_n}^2}} \Rightarrow \sqrt{4\,R^2 - {s_n}^2} = \frac{2\,R\,s_n}{S_n} \quad (6)$$

$$\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2} = \sqrt{4\,R^2 + \frac{4\,R^2 s_n{}^2}{4\,R^2 - \,s_n{}^2}} = \sqrt{\frac{16\,R^4 - \,4R^2 s_n{}^2 + \,4\,R^2 s_n{}^2}{4\,R^2 - \,s_n{}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{16\,R^4}{4\,R^2 - \,s_n{}^2}} = \frac{4\,R^2}{\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}} \Rightarrow$$

$$4\,R^2 = \sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}\,\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}\ . \qquad (7)$$

Assim

$$s_n{}^2 = \frac{4\,R^2 S_n{}^2}{4\,R^2 + \,S_n{}^2} \Leftrightarrow 4\,R^2 s_n{}^2 + \,s_n{}^2\,S_n{}^2 = 4\,R^2 S_n{}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\,R^2\,S_n}{s_n} = \frac{4\,R^2 s_n}{S_n} + \frac{s_n S_n{}^2}{S_n}$$

$$\Leftrightarrow 4\,R^2\,\frac{2\,R\,S_n}{s_n} = 4\,R^2\,\frac{2\,R s_n}{S_n} + \,S_n{}^2\,\frac{2\,R\,s_n}{S_n}$$

$$\Leftrightarrow 4\,R^3\,\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2} = 4\,R^3\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}\; + \,S_n{}^2\,R\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}$$

$$\Leftrightarrow\; 4\,R^3\,\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2} - \,4\,R^3\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2} - \,S_n{}^2\,R\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4R^3\sqrt{4R^2 + S_n{}^2} + 8R^4 - 8R^4 - 4R^3\sqrt{4R^2 - s_n{}^2} - S_n{}^2 R\sqrt{4R^2 - s_n{}^2} + 2R^2 S_n{}^2 = 2R^2 S_n{}^2.$$

Substituindo a equação (7) temos

$$4\,R^3\,\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2} + 8\,R^4 + 2\,R^2 S_n{}^2 - \,2\,R^2\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}\,\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}$$

$$-\,4\,R^3\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2} - \,S_n{}^2\,R\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}\; = 2\,R^2 S_n{}^2$$

$$\Leftrightarrow 2R^2\left(2R\sqrt{4R^2 + S_n{}^2} + 4R^2 + S_n{}^2\right) - R\sqrt{4R^2 - s_n{}^2}\,\left(2R\sqrt{4R^2 + S_n{}^2} + 4R^2 + S_n{}^2\right) = 2R^2 S_n{}^2$$

$$\Leftrightarrow \left(2R\sqrt{4R^2 + S_n{}^2} + 4R^2 + S_n{}^2\right)\left(2R^2 - \,R\sqrt{4\,R^2 - \,s_n{}^2}\right) = 2R^2 S_n{}^2$$

$$\Leftrightarrow\; \sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}\;\left(2R + \,\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}\right)\,(S_{2n})^2 = 2\,R^2 S_n{}^2$$

$$\Leftrightarrow\; (S_{2n})^2 = \frac{2\,R^2 S_n{}^2}{\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}\;\left(2R + \,\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}\right)} =$$

$$\frac{R\,S_n}{\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}}\,.\,\frac{2\,R\,S_n}{2R + \,\sqrt{4\,R^2 + \,S_n{}^2}} = \frac{s_n}{2}\,.\,S_{2n}.$$

Portanto $(S_{2n})^2 = \frac{s_n}{2}.S_{2n}$, o que nos leva a

$$4\,n^2\,(s_{2n})^2 = 4\,n^2\,\frac{s_n}{2}S_{2n}$$

$$\Leftrightarrow\ (2ns_{2n})^2 = n\,s_n.\,2n\,S_{2n}$$

$$\Leftrightarrow\ (p_{2n})^2 = p_n.P_{2n}$$

$$\Leftrightarrow\ p_{2n} = (p_n\,P_{2n})^{\frac{1}{2}}$$

concluindo assim a demonstração.

Voltando aos cálculos de Arquimedes, vamos determinar o valor de π para os polígonos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Para o polígono hexágono temos

$$p_6 < A_c < P_6$$

ou seja,

$$6\,R < 2\,\pi\,R < 4\,R\,\sqrt{3},$$

e dividindo por 2R concluímos, com 4 casas decimais de aproximação, que

$$3 < \pi < 3{,}4641.$$

Para o polígono de 12 lados, temos

$$P_{12} = \frac{2\,.6\,R.4\,R\,\sqrt{3}}{6\,R + 4\,R\,\sqrt{3}} = \frac{24\,R\,\sqrt{3}}{3 + 2\,\sqrt{3}} = \frac{24\,R\,\sqrt{3}\left(3 - 2\sqrt{3}\right)}{9 - 12} = 8R\sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\right)$$
$$= 48R - 24\,R\sqrt{3}$$

$$p_{12} = \left[6R\left(48R - 24R\sqrt{3}\right)\right]^{1/2} = \sqrt{144\,R^2\left(2 - \sqrt{3}\right)} = 12\,R\,\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Assim

$$p_{12} < A_c < P_{12}$$

levando a

$$12\,R\,\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 2\,\pi\,R < 48R - 24\,R\sqrt{3}\,.$$

Dividindo tudo por 2R obtemos

$$6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < \pi < 24 - 12\,\sqrt{3}\,,$$

Usando 6 casas decimais de aproximação obtemos

$$3{,}105828 < \pi < 3{,}21539.$$

Para o polígono de 24 lados, temos

$$P_{24} = \frac{2\,.24\,R\left(2-\sqrt{3}\right).12\,R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{24R\left(2-\sqrt{3}\right)+\,12\,R\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{48\,R\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$= 48\,R\,\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}.\,\left[2\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{4\left(2-\sqrt{3}\right)-1} = 48R\,\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{7-4\sqrt{3}}$$

$$= 48R\,\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left[2\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\left(7+4\sqrt{3}\right)}{49-48} = 48R\left(2+\sqrt{3}\right)\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right].$$

Agora, para o polígono p_{24} temos

$$p_{24} = \left[12\,R\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.48R\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{576R^2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$$24R\sqrt{2(4-3)-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$24R\sqrt{2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, como $p_{24} < A_c < P_{24}$ então

$$24\,R\sqrt{2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}} < 2\,\pi\,R < 48R\left(2+\sqrt{3}\right)\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right]$$

onde segue que

$$12\sqrt{2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}} < \pi < 24\left(2+\sqrt{3}\right)\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right],$$

o que nos dá, com 9 casas decimais de aproximação

$$3{,}132628631 < \pi < 3{,}159716334.$$

Repetindo o argumento para o polígono de 48 lados, temos:

$$P_{48} = \frac{2\,.\,6{,}265257262R\ .\,6{,}319432668R}{6{,}265257262R + 6{,}319432668R} = \frac{79{,}18574283\,R^2}{12{,}58468993\,R} = 6{,}291123885R$$

e

$$p_{48} = \left(6{,}265257262R\,.\,6{,}291123885R\right)^{1/2} = 6{,}278177252\,R\,.$$

Uma vez que $p_{48} < A_c < P_{48}$

e, para evitar maiores equações aproximando as expressões obtemos que

$$6{,}278177252R \; < \; 2\,\pi\,R \; < 6{,}291123885$$

ou seja

$$3{,}139088626 \; < \; \pi \; < 3{,}145561943.$$

Para o polígono de 96 lados temos

$$P_{96} = \frac{2\,.\,6{,}278177252\,R\,.\,6{,}291123885R}{6{,}278177252\,R + \; 6{,}291123885R} = \frac{78{,}99358173R^2}{12{,}56930114R} = 6{,}284643899R$$

e

$$p_{96} = \; (6{,}278177252\,R \; .\,6{,}284643899R\,)^{\frac{1}{2}} = 6{,}281409743R$$

Portanto $p_{96} \; < A_c \; < \; P_{96}$ e

$$6{,}281409743R \quad < 2\,\pi\,R \; < \; 6{,}284643899R$$

e divindo por 2R, nos dá a aproximação, com 9 casas decimais

$$3{,}140704872 \; < \; \pi \; < 3{,}14232195.$$

Podemos continuar o processo para obtermos uma aproximação do valor do número π com a precisão desejada.

APÊNDICE D

Algumas definições importantes relativas ao número π

Neste apêndice apresentamos, como dois teoremas, duas importantes características a respeito do número π, ser irracional e transcendente. Não é o objeto de estudo tais demonstrações, as quais podem ser encontradas em Figueiredo,1985.

Números irracionais

Definição: Seja $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é racional se $\exists\, a,\ b \in \mathbb{Z},\ com\, b \neq 0$ tal que $x = \frac{a}{b}$. Caso contrário, x será irracional.

Teorema: O número π é um número irracional.

Tal resultado foi demonstrado inicialmente por Johann Heinrich Lambert em 1761, no qual ele provou que se um número x não nulo é um número racional, então $\tan x$ não é um número racional. Em particular, como $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, conclui-se que $\frac{\pi}{4}$ não é um número racional.

Números Transcendentais

Definição: Um número real é dito algébrico se é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Um número que não é algébrico é transcendente.

Exemplo: O número $\sqrt{2}$ é algébrico pois é solução da equação $x^2 - 2 = 0$.

Teorema: O número π é um número transcendente.

APÊNDICE E

Trabalho dos alunos

Neste apêndice apresentamos algumas imagens das atividades realizadas pelos alunos, referente a primeira parte do trabalho.

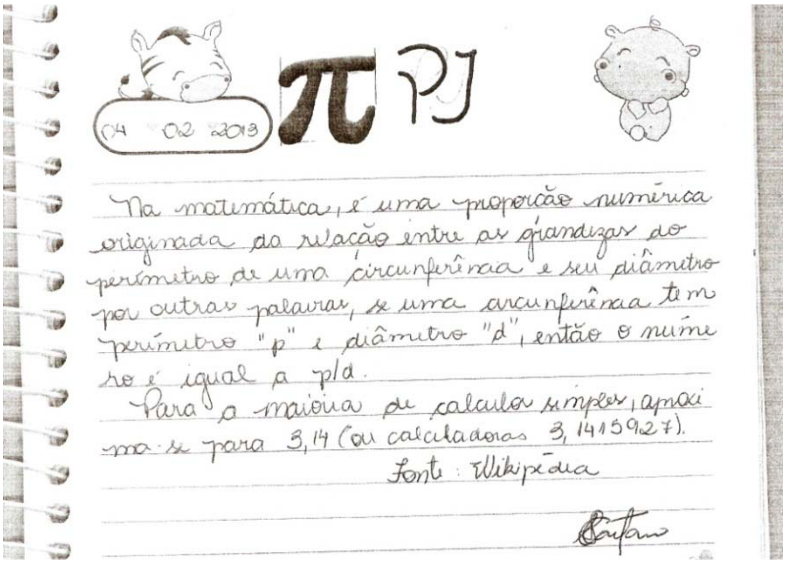

Figura 24: Pesquisa da aluna I sobre o π

06/02/2013
2

Raphael Felippe / Nº 18 / 8ª série / 9º ano

Número π ou número PI

Na matemática π é uma proporção numérica organizada entre a relação do perímetro e da circunferência dum círculo.

Esse conceito foi criado em 1706 por William Jones, derivado da palavra grega περίμετρος (perímetro), o π foi popularizado por Leonhard Euler, anos mais tarde.

Bem o π é uma constante matemática:
3,141592653589793238462643383279502884197169399375 1058 com 52 casas decimais.

Na antiguidade muitos povos chegaram próximos ao π, como os egípcios $\left[\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^3\right]$; os hebreus [π = 3 aprox.] os babilônios $\left[\pi = 3\frac{1}{8} \text{ aprox.}\right]$

O método de Arquimedes para obter o π é =
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$$

Apesar do π só ser oficializado e determinado corretamente em 1706, muitos estudiosos já haviam chegado próximo antes, como François Viète (1593), John Wallis (1655), Leibniz (1682), Johann Heinrich Lambert (1770), Arquimedes, Liu Hui, Ptolomeu, Hermite e outros.

Até hoje o nosso conhecimento diz que π é o resumo de que o perímetro da circunferência é 3,1416... vezes maior que o diâmetro

Figura 25: Pesquisa realizada sobre o π.

O que eu aprendi	O que eu ainda tenho dúvida
π é quantas vezes o diâmetro cabe no contorno de uma circunferência. Ele é um número irracional, infinito	Não me lembro de nenhuma dúvida agora.

Figura 26: Autoavaliação realizada.

O que eu aprendi	O que eu ainda tenho dúvida
Aprendi sobre π e os números irracionais, além de aprender calcular a área e o circunferência dos circulos.	Nada

Figura 27: Autoavaliação realizada após atividade.

De acordo com as atividades realizadas pelo seu professor, descreva o que você lembra sobre o número PI.

O número PI é representando pelo símbolo π e é utilizado para calcular o comprimento e a área de um círculo. Ele representa aproximadamente 3,14, é irracional porque apresenta (até hoje) infinitas casas decimais nunca se repetem.

O PI é um número racional ou irracional? Por que?

π é um número irracional, porque tem infinitas casas decimais que nunca se repetem (até hoje), é uma dízima não periódica.

Calcule o comprimento de uma circunferência de:

a) raio = 3 cm. $(3.2).\pi = 6\pi$ cm

b) raio = 1,2 cm. $(1,2.2).\pi = 2,4\pi$ cm

c) diâmetro = 7 cm. $7.\pi = 7\pi$ cm

d) diâmetro = 10,6 cm. $10,6.\pi = 10,6\pi$ cm

Figura 28 Atividade realizada após experiências

De acordo com as atividades realizadas pelo seu professor, descreva o que você lembra sobre o número PI.

π é um número irracional, uma dízima que não se repete, infinito, começa com 3,14

O PI é um número racional ou irracional? Por que?

Irracional, pois ele não pode ser colocado em forma de fração.

Calcule o comprimento de uma circunferência de:

a) raio = 3 cm.

b) raio = 1,2 cm.

c) diâmetro = 7 cm.

d) diâmetro = 10,6 cm.

$C = D.\pi$

a) 6π cm

b) $2,4\pi$ cm

c) 7π cm

d) $10,6\pi$ cm

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \times\ 2 \\ \hline 2,4 \end{array}$$

Figura 29: Atividade realizada após aplicação da sequência didática

O que você achou da utilização do software Geogebra?

Achei muito bom a utilização do software Geogebra, pois facilitou a aprendizagem em relação ao cálculo do comprimento de uma circunferência.

O que mais lhe chamou atenção na atividade desenvolvida sobre comprimento do círculo?

Me chamou a atenção a forma com que foi fácil entender a fórmula para cálculo de comprimento.

Figura 30: Avaliação da sequência didática

O que você achou da utilização do software Geogebra?

É um programa muito bom, pois explica corretamente, é mais prático do que escrever a mão e é muito fácil de se usar

O que mais lhe chamou atenção na atividade desenvolvida sobre comprimento do círculo?

Os métodos que nós usamos e o resultado

Figura 31: Avaliação da sequência didática realizada.

Atividade com o círculo – Em sala

Objeto	Comprimento do diâmetro	Medida da circunferência	Valor da divisão do comprimento pelo diâmetro
prato	43,5 cm	13,6 cm	3,20
tampa 1	17,3 cm	5,5 cm	3,15
tampa 2	69,5 cm	22,1 cm	3,14

Figura 32: Tabela com as medidas dos objetos circulares.

Atividade no Geogebra

Círculo	Comprimento do diâmetro	Medida da circunferência	Valor da divisão do comprimento pelo diâmetro
1	19,0	6,04	3,1456453
2	18,86	6,0	3,1433333...
3	20,0	6,36	3,144654

Figura 33: Tabela com as medidas dos círculos no Geogebra.