

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Ações e folheações polares
em variedades de Hadamard**

Francisco Carlos Caramello Junior

São Carlos - SP

Março de 2014

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ações e folheações polares em variedades de Hadamard

Francisco Carlos Caramello Junior
Bolsista CNPq

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Banca Examinadora durante a defesa em 27/02/2014.

São Carlos - SP

Março de 2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C259af

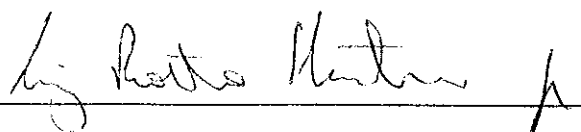
Caramello Junior, Francisco Carlos.
Ações e folheações polares em variedades de Hadamard
/ Francisco Carlos Caramello Junior. -- São Carlos : UFSCar,
2014.
79 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2014.

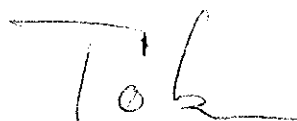
1. Geometria riemanaiana. 2. Ação polar. 3. Folheação
riemanaiana singular com seções. 4. Curvatura não positiva.
5. Variedade de Hadamard. I. Título.

CDD: 516.373 (20^a)

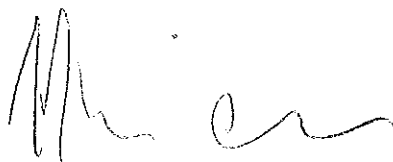
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Júnior
DM- UFSCar



Prof. Dr. Dirk Töben
DM- UFSCar



Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva
IME- USP

“A reductio ad absurdum é uma das minhas bebidas predilectas.”

Fernando Pessoa

Agradecimentos

Agradeço ao professor Luiz Hartmann por sua douta orientação, pela amizade e pela confiança que depositou em minha capacidade. Agradeço também aos professores Alexandre Paiva, Dirk Töben e Marcos Alexandrino pela solicitude e inestimáveis horas (e *e-mails*) de discussão, as quais foram de grande valia para o desenvolvimento deste trabalho.

No âmbito pessoal, agradeço à minha família pelo amor, compreensão, paciência e inspiração, em especial à minha mãe, Adriana, e à minha namorada, Thais.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar alguns resultados recentes na teoria de folheações polares, também chamadas de folheações riemannianas singulares com seções, em variedades de curvatura não positiva, presentes no artigo [24]. As ações polares também são estudadas, pois são objetos de pesquisa ativa que motivam e ilustram o estudo das folheações polares. Fornecemos uma demonstração de que não existem folheações polares próprias em variedades compactas de curvatura não positiva. Além disso, apresentamos um resultado que descreve globalmente as folheações polares próprias em variedades de Hadamard. Abordamos este resultado também no contexto particular das ações polares, utilizando a teoria de subvariedades *taut*. As ações adjunta e por conjugação são brevemente estudadas como exemplos clássicos de ações polares.

Palavras-chave: ação polar; folheação polar; folheação riemanniana singular com seções; curvatura não positiva; variedade de Hadamard.

Abstract

This work aims at presenting some recent results on the theory of polar foliations, also known as singular riemannian foliations with sections, on nonpositively curved manifolds, as seen in Töben [24]. Polar actions are also studied, for they are an active research subject that motivates and illustrates polar foliations. We give a proof of the nonexistence of proper polar foliations on compact manifolds of nonpositive curvature. Then we present a result that globally describes proper polar foliations on Hadamard manifolds. We prove this same result in the special case of polar actions by using the theory of taut submanifolds. The adjoint and conjugation actions are briefly presented as classical examples of polar actions.

Keywords: polar action; polar foliation; singular riemannian foliations with sections; nonpositive curvature; Hadamard manifold.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	9
1.1 Teoria de Morse	9
1.2 Grupos de Lie	12
1.3 Variedades riemannianas	19
2 Ações polares em variedades de Hadamard	36
2.1 Ações próprias	36
2.2 Ações isométricas e órbitas principais	41
2.3 Ação adjunta e ação por conjugação	45
2.4 Ações polares	49
2.5 Ações polares em variedades de Hadamard	52
3 Folheações polares em variedades de curvatura não positiva	57
3.1 Folheações riemannianas singulares	57
3.2 Folheações polares e isoparamétricas	61
3.3 Holonomia transversal	64
3.4 Folheações polares em variedades de curvatura não positiva	70
Referências Bibliográficas	74
Índice Remissivo	77

Lista de Figuras

1.1	A álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é isomorfa ao espaço tangente T_eG	14
1.2	A aplicação exponencial de Lie.	16
1.3	Campo de vetores induzido por uma ação.	18
1.4	A segunda forma fundamental.	25
1.5	Campos de Jacobi são variações infinitesimais.	26
1.6	Funções coordenadas em um fibrado.	29
1.7	Geodésicas do espaço hiperbólico.	34
2.1	Curva de Kronecker no toro.	38
2.2	Vizinhança tubular de uma órbita.	40
2.3	Campo equivariante normal.	44
2.4	A ação do grupo de Weyl em \mathfrak{t} se relaciona com a ação adjunta.	48
2.5	A ação de $SO(3)$ em \mathbb{R}^3 é polar.	50
2.6	Argumento da Afirmação 2.34, com $i_0 = 2$	54
3.1	Uma folheação da faixa de Möbius.	59
3.2	Transformação homotética de Molino.	61
3.3	A folheação \mathcal{G}	64
3.4	A aplicação Φ_τ	65
3.5	Domínios de Dirichlet vizinhos.	68
3.6	A aplicação Φ	72

Introdução

Folheações singulares generalizam a noção de folheações em variedades no sentido de permitir que a dimensão de das folhas varie. Um exemplo clássico desse objeto é a partição de uma variedade pelas componentes conexas de órbitas de uma ação de um grupo de Lie. Em uma variedade riemanniana, se uma geodésica perpendicular a alguma folha permanece perpendicular a todas as folhas que ela encontra, então dizemos que a folheação é riemanniana. Novamente, o exemplo clássico é a decomposição pelas componentes conexas de órbitas de uma ação, desta vez própria e isométrica.

Não é difícil ver que qualquer reta passando pela origem interseca ortogonalmente todas as órbitas da ação de $SO(n)$ em \mathbb{R}^n . Ações polares são ações isométricas que possuem uma devida generalização desta propriedade, isto é, admitem uma subvariedade imersa e completa, chamada de seção, que interseca ortogonalmente todas as órbitas. Folheações polares são folheações riemannianas singulares com seções (subvariedades com propriedades análogas às das seções de uma ação polar) e, portanto, uma generalização natural da partição pelas componentes conexas de órbitas de ações polares.

Neste trabalho, estudaremos as ações e as folheações polares em variedades de Hadamard, seguindo o artigo [24]. O texto está dividido em três partes. A primeira consiste da reunião dos principais pré-requisitos necessários à leitura, incluídos com o intuito de deixar o texto auto-contido. Na segunda parte estudamos as ações de grupos de Lie em variedades suaves. Partindo desde a definição destas, o texto progride se especificando na direção das ações polares em variedades de Hadamard, culminando no Teorema 2.32. Este teorema dá uma descrição da folheação por órbitas de uma ação polar própria em uma variedade de Hadamard, utilizando, em

essência, a teoria de subvariedades *taut*. A última parte se dedica às folheações polares. A apresentação é feita buscando ressaltar o fato das folheações singulares generalizarem as partições pelas componentes conexas de órbitas de ações. Neste sentido, o que foi coletado na segunda parte é usado para ilustrar e motivar as noções definidas na terceira. Os principais resultados desta parte são os Teoremas 3.18 e 3.20. O primeiro mostra que uma folheação polar própria em uma variedade riemanniana M compacta com curvatura não positiva não possui folhas singulares. O Teorema 3.20 é um resultado análogo ao Teorema 2.32 no novo contexto das folheações polares, isto é, ele dá uma descrição global das folheações polares próprias em variedades de Hadamard.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos algumas noções e resultados de teoria de Morse, geometria riemanniana e teoria de Lie que serão usados posteriormente. Alguns destes resultados são parte elementar de tais teorias, que incluímos por questão de completude do texto e fixação de notação. Noções básicas das teorias de variedades topológicas e suaves serão assumidas como pré-requisito (referências nestes assuntos são Lee [13] e [14]). Nossas referências principais para o material abordado neste capítulo foram Milnor [16] e Cecil e Chern [7], para a Seção 1.1, Lee [15] e o apêndice em Berndt, Console e Olmos [4] para a Seção 1.3, e Alexandrino e Bettioli [3] para as Seções 1.2 e 1.3. Resultados que não estão nestas referências são acompanhados de referências específicas.

Utilizaremos a notação $\mathcal{T}(M)$ para o espaço dos campos de vetores suaves¹ em uma variedade M , motivados pela notação $\mathcal{T}_l^k(M)$ para o espaço dos campos suaves de (k, l) -tensores em M , da qual aquela é o caso particular $\mathcal{T}_1^0(M)$.

1.1 Teoria de Morse

Seja M uma variedade suave e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto $p \in M$ é um **ponto crítico de f** se $\ker(df_p) = T_pM$. Se escolhermos um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) em uma vizinhança U de p , então p é ponto crítico de f

¹ao invés da mais comum, $\mathfrak{X}(M)$.

se, e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0.$$

Chamamos $f(p)$ de **valor crítico de f** . Utilizaremos as notações $M_{\leq}^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ e $M^a = \{x \in M \mid f(x) < a\}$. Segue do Teorema da função implícita que, se a não é um valor crítico de f , então M_{\leq}^a é uma variedade suave com bordo. O bordo $\partial M_{\leq}^a = f^{-1}(a)$ é uma subvariedade de M .

Seja p um ponto crítico de f e sejam $X, Y \in T_p M$. Considere \tilde{X} e \tilde{Y} extensões suaves de X e Y , respectivamente. Definimos $d^2(f) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ por $d^2(f)(X, Y) = \tilde{X}_p(\tilde{Y}(f))$. Mostra-se que $d^2(f)$ não depende das extensões \tilde{X} e \tilde{Y} e é simétrica. Se (x^1, \dots, x^n) são coordenadas em uma vizinhança U de p ,

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{e} \quad \tilde{Y} = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p,$$

onde Y^j são funções constantes tais que $Y = \sum Y^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$, então

$$d^2(f)(X, Y) = X(\tilde{Y}(f))(p) = X \left(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p),$$

e portanto a matriz $\text{hess}(f)_p$ representa o funcional bilinear $d^2(f)$ com relação à base $(\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p)$. Dizemos que o ponto crítico p é **não degenerado** quando

$$\dim\{X \in T_p M \mid d^2(f)(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in T_p M\} = 0,$$

isto é, quando o funcional $d^2(f)$ tem nulidade 0.

Um ponto crítico $p \in M$ é não degenerado se, e somente se,

$$\det(\text{hess}(f)_p) = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right) \neq 0,$$

para uma escolha qualquer de coordenadas (x^1, \dots, x^n) em uma vizinhança U de p .

Dizemos que uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função de Morse em M** se os pontos críticos de f são todos não degenerados. O **índice de Morse de f em p** é a dimensão maximal de um subespaço de $T_p M$ no qual $d^2(f)$ é negativa definida.

Lema 1.1 (Morse). *Seja M uma variedade suave de dimensão n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $p \in M$ um ponto crítico não degenerado de f . Então existem coordenadas locais (x^1, \dots, x^n) numa vizinhança U de p , satisfazendo $x^k(p) = 0$ para todo k , nas quais f se escreve como*

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(0) - (x^1)^2 - \dots - (x^i)^2 + (x^{i+1})^2 + \dots + (x^n)^2, \quad (1.1)$$

onde i é o índice de Morse de f em p .

O índice de f em p pode ser definido de maneira equivalente como sendo i , com a notação do Lema 1.1, caso se obtenha as coordenadas (x^1, \dots, x^n) nas quais vale (1.1).

Corolário 1.2. *Pontos críticos não degenerados de uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são isolados.*

O interesse nos pontos críticos de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é que eles se relacionam de várias maneiras com a topologia de M . Um exemplo disso é o resultado a seguir:

Teorema 1.3. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave e sejam $a < b$ tais que o conjunto $f^{-1}([a, b])$ é compacto e não possui pontos críticos de f . Então M_{\leq}^a é difeomorfa a M_{\leq}^b , e a inclusão $M_{\leq}^a \rightarrow M_{\leq}^b$ é uma equivalência homotópica.*

Observação 1.4. A demonstração do Teorema 1.3 pode ser vista em [16]. A estratégia da demonstração é munir M de uma métrica riemanniana e estudar o campo gradiente² de f , cujo fluxo provê o difeomorfismo procurado. Essa estratégia também pode ser usada para demonstrarmos que, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse própria com precisamente um ponto crítico, o qual é de máximo ou de mínimo, então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim(M)}$.

Desigualdades de Morse

Outra relação entre os pontos críticos de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e a topologia de M é uma desigualdade entre o número de pontos críticos de f de índice

²cf. Observação 1.20.

i , que denotaremos por $\mu_i(f)$, e os números de Betti de M . Relembremos que, se X é um espaço topológico e \mathbb{F} um corpo, o **i -ésimo número de Betti de X com respeito a \mathbb{F}** , denotado por $b_i(X, \mathbb{F})$, é a dimensão do i -ésimo grupo de homologia simplicial de X com coeficientes em \mathbb{F} . Isto é, $b_i(X, \mathbb{F}) = \dim(H_i(X, \mathbb{F}))$.

Teorema 1.5 (Desigualdades de Morse). *Seja M uma variedade suave de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com um número finito de pontos críticos. Então*

$$b_i(M, \mathbb{F}) \leq \mu_i(f),$$

para todo i e todo corpo \mathbb{F} .

Suponha que f seja uma função de Morse em uma variedade M tal que M_{\leq}^s é compacto, para todo $s \in \mathbb{R}$. Pelo Corolário 1.2 mais o fato de M_{\leq}^s ser compacto, podemos aplicar as desigualdades de Morse a $f|_{M^s}$, obtendo $b_i(M^s, \mathbb{F}) \leq \mu_i(f|_{M^s})$, para todo i , todo $s \in \mathbb{R}$ e todo corpo \mathbb{F} . Em particular, para M compacta temos $b_i(M, \mathbb{F}) \leq \mu_i(f)$ para qualquer função de Morse f .

Uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é **perfeita** se existe um corpo \mathbb{F} tal que valha a igualdade $b_i(M^s, \mathbb{F}) = \mu_i(f|_{M^s})$, para todo i e todo $s \in \mathbb{R}$.

1.2 Grupos de Lie

Uma variedade suave G é um **grupo de Lie** se G é um grupo e a aplicação $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh^{-1} \in G$ é suave. Esta última suposição equivale a $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ e $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ serem suaves.

Um homomorfismo de grupos $\varphi : G \rightarrow H$ entre grupos de Lie G e H é um **homomorfismo de Lie** se φ é suave. Se φ for um difeomorfismo, então φ^{-1} é também um homomorfismo de Lie e, neste caso, dizemos que φ é um **isomorfismo de Lie**.

É fácil ver que o produto cartesiano de grupos de Lie é um grupo de Lie com a operação definida componente a componente. Em particular, o **toro** $\mathbb{T}^k \doteq \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ é um grupo de Lie abeliano, conexo e compacto. O interessante teorema a seguir é uma recíproca para este fato.

Teorema 1.6. *Seja G um grupo de Lie abeliano conexo de dimensão n . Então G é isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Em particular, se G é também compacto, então G é isomorfo a um toro.*

Exemplo 1.7. Suponha que \mathbb{K} denota \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} . Os seguintes grupos matriciais são grupos de Lie:

- (1) $GL(n, \mathbb{K})$, o **grupo linear geral** das matrizes $n \times n$ não singulares sobre \mathbb{K} ;
- (2) $SL(n, \mathbb{K}) = \{M \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$, o **grupo linear especial**;
- (3) $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M^T M = I\}$, o **grupo ortogonal** e $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, o **grupo ortogonal especial**;
- (4) $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M^* M = I\}$, o **grupo unitário** e $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$, o **grupo unitário especial**.

Seja G um grupo de Lie e $g \in G$. Os difeomorfismos de G dados por $L_g(x) = gx$ e $R_g(x) = xg$ são chamados, respectivamente, de **translação à esquerda** e **translação à direita**. Um campo de vetores X em G é dito **invariante à esquerda** se para todo $g \in G$, $dL_g \circ X = X \circ L_g$. Analogamente se define campos invariantes à direita. Um campo de vetores simultaneamente invariante à esquerda e à direita é dito **bi-invariante**. Prova-se que campos de vetores invariantes à esquerda (ou à direita) são suaves.

Uma **álgebra de Lie** \mathfrak{g} é um espaço vetorial real munido de uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, chamada de **colchete de Lie**, satisfazendo, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

- (1) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Uma aplicação linear $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ entre álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} é um **homomorfismo de álgebras de Lie** se, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[\psi(X), \psi(Y)] = \psi([X, Y]).$$

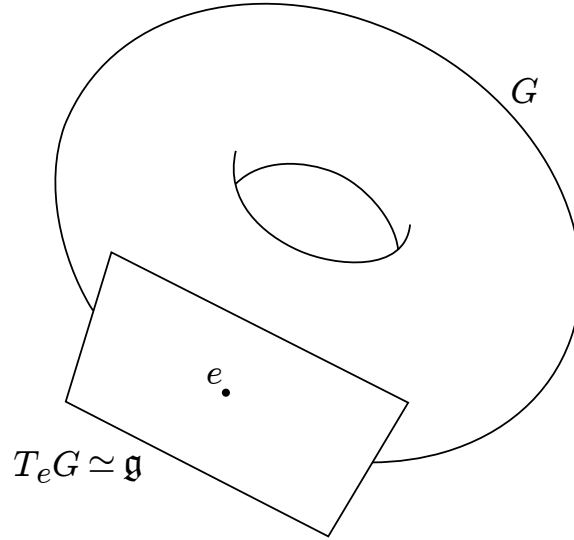


Figura 1.1: A álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é isomorfa ao espaço tangente $T_e G$.

Teorema 1.8. *Seja \mathfrak{g} o conjunto de campos de vetores invariantes à esquerda em um grupo de Lie G . Então*

- (1) \mathfrak{g} munido do colchete de Lie de campos de vetores é uma álgebra de Lie;
- (2) *Seja $T_e G$ com o colchete de Lie definido como segue: se $X^1, X^2 \in T_e G$, definimos $[X^1, X^2] = [\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2]_e$, onde $\widetilde{X}_g^i = d(L_g)_e X^i$. Então $\psi : \mathfrak{g} \ni X \mapsto X_e \in T_e G$ é um isomorfismo de álgebras de Lie, onde \mathfrak{g} está munido do colchete de Lie de campos de vetores.*

Note, portanto, que um grupo de Lie G provê uma álgebra de Lie \mathfrak{g} canonicamente determinada. Definimos, assim, a **álgebra de Lie de um grupo de Lie** G como sendo a álgebra de Lie \mathfrak{g} dos campos de vetores invariantes à esquerda em G . De acordo com o Teorema 1.8, poderíamos definir \mathfrak{g} de forma equivalente como sendo o espaço tangente $T_e G$, com o colchete de Lie definido como no item (2) (v. Figura 1.1).

Exemplo 1.9. As álgebras de Lie de $GL(n, \mathbb{K})$, $O(n)$ e $SU(n)$ são, respectivamente,

- (1) $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, o espaço das matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{K} ;
- (2) $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^\top + X = 0\}$;
- (3) $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0 \text{ e } X^* + X = 0\}$.

Subgrupos de Lie

Um **subgrupo de Lie** H de um grupo de Lie G é um subgrupo H de G tal que H é subvariedade imersa de G e $H \times H \ni (h, k) \mapsto hk^{-1} \in H$ é suave. Uma **subálgebra de Lie** \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ fechado com relação ao colchete de Lie.

Demonstra-se que se H é uma subvariedade mergulhada de um grupo de Lie G que também é um grupo com a operação de G , então H é um subgrupo de Lie fechado de G . O (surpreendente) resultado seguinte se assemelha a uma recíproca deste fato.

Teorema 1.10. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então H é um subgrupo de Lie mergulhado de G .*

Seja G um grupo de Lie. A componente conexa de G que contém o elemento neutro e , denotada por G^0 , é um subgrupo de Lie normal de G . Além disso, as componentes conexas de G são da forma gG^0 , para algum $g \in G$.

Há, como era de se esperar, uma profunda relação entre subgrupos e subálgebras de Lie. No que segue destacamos algumas que nos são mais relevantes:

Proposição 1.11. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie. Então a inclusão $i : H \rightarrow G$ induz um isomorfismo di_e entre a álgebra de Lie \mathfrak{h} de H e uma subálgebra de Lie $di_e(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{g} .*

No sentido inverso, temos:

Proposição 1.12. *Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie de um grupo de Lie G e \mathfrak{h} uma subálgebra de \mathfrak{g} . Então existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ com álgebra de Lie \mathfrak{h} .*

Outra relação entre grupos e álgebras de Lie é a seguinte:

Teorema 1.13. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente, e $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Se G é conexo e simplesmente conexo, então existe um único homomorfismo de Lie $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi_{e_G} = \theta$.*

O próximo teorema é uma adaptação de um resultado sobre grupos topológicos ao nosso contexto:

Teorema 1.14 (Malcev-Iwasawa). *Seja G um grupo de Lie tal que G/G^0 é compacto. Então*

- (1) *Existe um subgrupo compacto maximal K em G ;*
- (2) *Todos os subgrupos compactos maximais em G são conjugados;*
- (3) *Existe um natural n tal que G/K é homeomorfo a \mathbb{R}^n , para qualquer subgrupo compacto maximal K de G .*

Note que a condição de G/G^0 ser compacto significa que G possui um número finito de componentes conexas. O enunciado da versão geral do teorema acima para grupos topológicos, bem como algumas referências para a sua demonstração, podem ser vistos em Stroppel [21].

Exponencial de Lie

Seja G um grupo de Lie. Um **subgrupo a um parâmetro de G** é um homomorfismo de Lie $\theta : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$. Se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G e $X \in \mathfrak{g}$, então $\theta : \mathbb{R} \ni t \mapsto tX \in \mathbb{R}X$ é homomorfismo de álgebras de Lie. Utilizando o Teorema 1.13, vê-se que existe um único subgrupo a um parâmetro $\lambda_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ com $\lambda'_X(0) = X$. Além disso, λ_X é a curva integral passando por $e \in G$ do campo invariante à esquerda \tilde{X} .

A **aplicação exponencial de Lie** de um grupo de Lie G é a aplicação dada por $\exp : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \lambda_X(1) \in G$ (v. Figura 1.2).

Proposição 1.15. *Pra todo $X \in \mathfrak{g}$ e todo $s, t \in \mathbb{R}$, temos:*

- (1) $\exp(tX) = \lambda_X(t)$;
- (2) $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$;
- (3) $\exp(sX + tX) = \exp(sX) \exp(tX)$;
- (4) \exp é suave e $d(\exp)_0 = \text{id}_{T_e G}$.

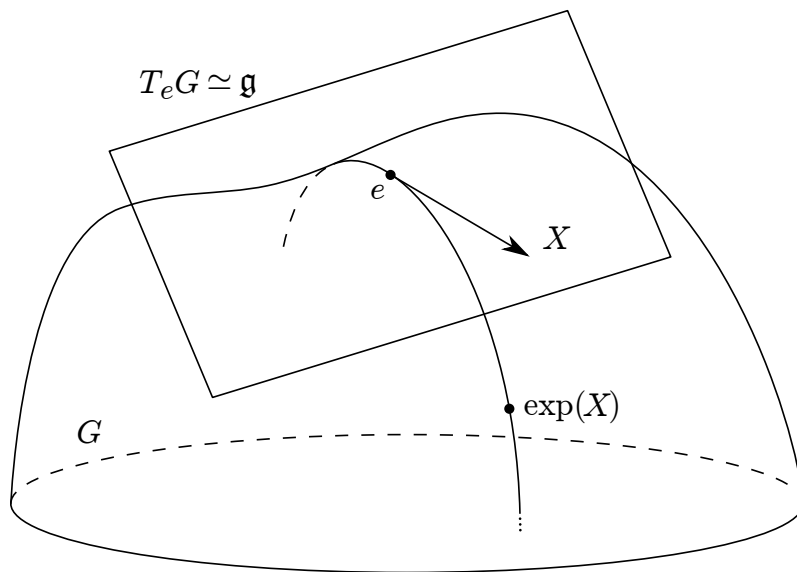


Figura 1.2: A aplicação exponencial de Lie.

Exemplo 1.16. Em $GL(n, \mathbb{K})$, onde \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , a exponencial de Lie coincide com a exponencial usual de matrizes.

Ações de grupos de Lie

Seja G um grupo de Lie e M uma variedade suave. Uma **ação à esquerda de G em M** é uma aplicação suave $\mu : G \times M \rightarrow M$ satisfazendo

- (1) $\mu(e, x) = x$ para todo $x \in M$;
- (2) $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$, para todo $g, h \in G, x \in M$.

Analogamente se define ações à direita de G em M (e o que enunciarmos aqui para ações à esquerda também vale para ações à direita). Usaremos as notações $\mu^g : M \ni x \mapsto \mu(g, x) \in M$ e $\mu_x : G \ni g \mapsto \mu(g, x) \in M$.

Exemplo 1.17. Seja G um grupo de Lie. A ação $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ de G em sua álgebra de Lie \mathfrak{g} dada por

$$\text{Ad}(g, X) = d(L_g)_{g^{-1}} \circ d(R_{g^{-1}})_e X,$$

chamada de **ação adjunta de G em \mathfrak{g}** . Estudaremos esta ação mais a fundo na Seção 2.3.

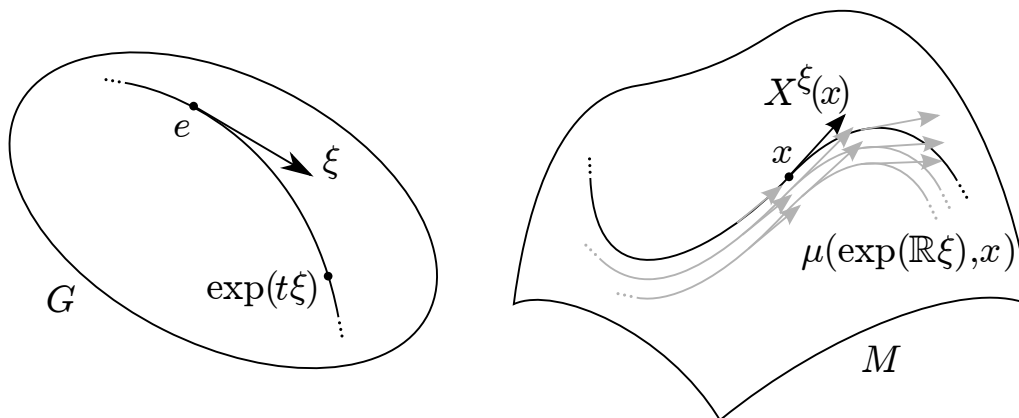


Figura 1.3: Campo de vetores induzido por uma ação.

Dadas ações $\mu_1 : G \times M \rightarrow M$ e $\mu_2 : G \times N \rightarrow N$, uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita **G -equivariante** se, para todo $x \in M$ e $g \in G$, vale $\mu_2(g, f(x)) = f(\mu_1(g, x))$.

Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação e $x \in M$. O subgrupo fechado $G_x = \{g \in G \mid \mu(g, x) = x\}$ é chamado de **estabilizador de x** e o conjunto $G(x) = \{\mu(g, x) \mid g \in G\}$ é chamado de **órbita de x** . Se $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$, a ação é dita ser **efetiva**, e se $G_x = \{e\}$ para todo $x \in M$, a ação é dita **livre**. Se, dados quaisquer $x, y \in M$, existir $g \in G$ tal que $\mu(g, x) = y$, a ação é dita **transitiva**.

É fácil ver que se $G(x)$ e $G(y)$ têm interseção não trivial, então $G(x) = G(y)$. Portanto as órbitas de uma ação constituem uma partição de M , e podemos considerar o espaço quociente desta partição, que denotamos por M/G , chamado de **espaço das órbitas**.

Observação 1.18. Para qualquer ação $\mu : G \times M \rightarrow M$, vale $G_{\mu(g,x)} = gG_xg^{-1}$.

Proposição 1.19. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação. Cada $\xi \in \mathfrak{g}$ induz um campo de vetores suave X^ξ em M dado por*

$$X^\xi(x) = \left. \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi), x) \right|_{t=0},$$

cujo fluxo é $\varphi_t^{X^\xi}(\cdot) = \mu(\exp(t\xi), \cdot)$ (v. Figura 1.3).

Se $\mu : G \times M \rightarrow M$ é uma ação, então, para cada $x \in M$, podemos obter uma ação de G_x em T_xM por $(g, v) \mapsto d(\mu^g)_x v$, que chamamos de **linearização de μ em x** . A associação $G_x \ni g \mapsto d(\mu^g)_x \in \text{GL}(T_xM)$ é chamada de **representação**

isotrópica de G_x .

1.3 Variedades riemannianas

Uma **variedade riemanniana** é uma variedade M munida de uma **métrica riemanniana**, isto é, um campo de tensores $g \in \mathcal{T}^2(M)$ satisfazendo:

- (1) $g(X, Y) = g(Y, X)$, para todo $X, Y \in TM$;
- (2) $g(X, X) > 0$ se $x \neq 0$.

Observação 1.20. Uma métrica riemanniana determina um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em cada espaço tangente $T_p M$ por $\langle X, Y \rangle_p = g_p(X, Y)$ para todo $X, Y \in T_p M$. Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir o campo **gradiente de f** , $\text{grad}(f)$, como sendo o campo de vetores dual a df com respeito aos produtos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Isto é, $\text{grad}(f)$ fica caracterizado por

$$\langle \text{grad}(f), X \rangle = X(f) = df(X).$$

Sejam M e N variedades Riemannianas. Em cada ponto $(p, q) \in M \times N$, o espaço tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$ é canonicamente isomorfo à soma direta $T_p M \oplus T_q N$. Com isso obtém-se uma métrica Riemanniana em $M \times N$ dada por

$$g_{(p,q)}(X, Y) = g_p^M(X_1, Y_1) + g_q^N(X_2, Y_2).$$

Com essa métrica, $M \times N$ é chamada de **produto Riemanniano de M e N** .

Sejam (M, g^M) e (N, g^N) variedades riemannianas. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é uma **isometria local** quando $f^*g^N = g^M$, ou seja, quando $g_p^M(X, Y) = g_{f(p)}^N(df_p X, df_p Y)$, para todo $p \in M$, $X, Y \in T_p M$. Se f for também um difeomorfismo, dizemos que f é uma **isometria**.

O interessante resultado que segue nos permite relacionar isometrias com ações de grupos de Lie. Uma demonstração pode ser encontrada em Kobayashi [12].

Teorema 1.21 (Myers-Steenrod). *Seja M uma variedade riemanniana e $\text{Iso}(M)$ o grupo de isometrias de M . Então todo subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$ com a topologia compacto-aberto é um grupo de Lie. Em particular, $\text{Iso}(M)$ é um grupo de Lie.*

Relembremos que um subconjunto $G \subset \text{Iso}(M)$ é fechado na topologia compacto-aberto se vale a propriedade seguinte: seja $\{f_n\}$ uma sequência de isometrias em G tal que, para cada compacto $K \subset M$, $\{f_n\}$ converge uniformemente em K para uma função contínua (com respeito à distância d) $f : M \rightarrow M$. Então $f \in G$.

Em vista do Teorema 1.21 podemos considerar a ação de um subgrupo G de $\text{Iso}(M)$ (em particular, a ação do próprio $\text{Iso}(M)$) em M dada por $G \times M \ni (g, x) \mapsto g(x) \in M$. Neste caso dizemos que a ação de G é uma **ação isométrica**. Abordaremos este tópico em maiores detalhes na Seção 2.2.

Ações isométricas de grupos de Lie G e H em variedades riemannianas M e N , respectivamente, são ditas **órbita-equivalentes** se existe uma isometria entre M e N que leva órbitas da ação de G em órbitas da ação de H .

Geodésicas

Seja M uma variedade suave, $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e $\mathcal{E}(M)$ o espaço das seções suaves de E . Uma **conexão em E** é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \ni (X, Y) \mapsto \nabla_X Y \in \mathcal{E}(M)$$

satisfazendo:

- (1) $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$, para toda $f, g \in C^\infty(M)$;
- (2) $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$;
- (3) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$, para toda $f \in C^\infty(M)$.

É interessante lembrar que, para $p \in M$, $\nabla_X Y|_p$ depende apenas dos valores de Y em uma vizinhança de p e do valor de X em p .

As conexões mais comuns são aquelas no fibrado tangente de uma variedade. Uma tal conexão é chamada de **conexão linear em M** . Se M é uma variedade riemanniana com métrica g , uma conexão linear ∇ em M é dita **compatível com a métrica g** se $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$. Dizemos, ainda, que ∇ é **simétrica** se $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ para todo $X, Y \in \mathcal{T}(M)$.

Teorema 1.22 (Levi-Civita). *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Existe uma única conexão linear ∇ em M que é compatível com a métrica g e simétrica.*

A conexão dada pelo Teorema 1.22 é chamada de **conexão de Levi-Civita**.

Seja M uma variedade suave com uma conexão linear ∇ . Existe uma única correspondência que, a cada campo de vetores X sobre uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, associa outro campo de vetores $\frac{D}{dt}X$ sobre γ , chamado de **derivada covariante de X sobre γ** , satisfazendo:

- (1) $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$, para todo $X, Y \in \mathcal{T}(M)$;
- (2) $\frac{D}{dt}fX = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}X$ para todo $X \in \mathcal{T}(M)$ e toda $f \in C^\infty(I)$;
- (3) Se X é induzido de um campo $\tilde{X} \in \mathcal{T}(M)$, isto é, $X(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$, então $\frac{D}{dt}X = \nabla_{\gamma'}\tilde{X}$.

Um campo de vetores $X(t)$ sobre uma curva suave por partes $\gamma(t)$ em uma variedade riemanniana M é **paralelo** se $\frac{D}{dt}X(t) \equiv 0$. Esta igualdade implica que $\langle X(t), Y(t) \rangle$ é constante quando X e Y são paralelos sobre γ . Demonstra-se que para cada $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, $t_0 \in I$, existe um único campo de vetores paralelo $X_v(t)$ sobre $\gamma(t)$ tal que $X_v(t_0) = v$. Para cada $t \in I$ fica bem definida, então, uma isometria linear $\tau^\gamma(t) : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ dada por $\tau^\gamma(t)(v) = X_v(t)$, chamada de **transporte paralelo sobre γ** .

Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** se $\frac{D}{dt}\gamma' \equiv 0$. Para quaisquer $p \in M$, $v \in T_pM$ existe uma única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, onde I_v é um intervalo maximal contendo 0. Seja $V = \{v \in TM \mid 1 \in I_v\}$. Mostra-se que V é um aberto de TM contendo a seção nula. Definimos a **aplicação exponencial** (também chamada de **aplicação exponencial de Riemann**, caso haja confusão com a exponencial de Lie) por $\exp : V \ni v \rightarrow \gamma_v(1) \in M$. Para cada $p \in M$, definimos também a **aplicação exponencial restrita** \exp_p como a restrição de \exp a $V_p = V \cap T_pM$.

Proposição 1.23. *A aplicação exponencial possui as seguintes propriedades:*

- (1) Para cada $v \in TM$ a geodésica γ_v é dada por $\gamma_v(t) = \exp(tv)$;

(2) \exp é suave;

(3) Se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma isometria, então $\exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi = \varphi \circ \exp_p$, para todo $p \in M$;

(4) Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança $U \ni p$ e uma vizinhança V da origem em $T_p M$ tais que $\exp_p|_V : V \rightarrow U$ é um difeomorfismo.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva suave por partes, definimos o **comprimento de γ** por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

As geodésicas minimizam ℓ localmente. Quando M é conexa, definimos a **distância riemanniana entre $p, q \in M$** por

$$d(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ é suave por partes e conecta } p \text{ a } q\},$$

que faz de (M, d) um espaço métrico. A topologia induzida pela métrica d coincide com a topologia original de M .

Dizemos que uma variedade riemanniana é **geodesicamente completa** se toda geodésica maximal está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.24 (Hopf-Rinow). *Seja M uma variedade riemanniana conexa e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) \exp_p está definida em todo o $T_p M$;

(2) Todo conjunto fechado e limitado em M é compacto;

(3) (M, d) é um espaço métrico completo;

(4) M é geodesicamente completa.

Se M satisfaz uma (e portanto todas) das propriedades acima, então quaisquer dois pontos de M podem ser ligados por um segmento de geodésica minimizante. Em particular, $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ é sobrejetiva.

Campos de Killing

Uma importante classe de campos de vetores em uma variedade riemanniana M , intimamente relacionada com o grupo de isometrias $\text{Iso}(M)$, é a dos campos de Killing. Um **campo de Killing em M** é um campo de vetores em M cujo fluxo é uma isometria local.

Exemplo 1.25. Para uma ação isométrica $\mu : G \times M \rightarrow M$, os campos induzidos X^ξ (vide Proposição 1.19) são campos de Killing. Dizemos que um campo deste tipo é um **campo G -Killing em M** .

Teorema 1.26. *O conjunto $\text{iso}(M)$ dos campos de Killing em M é uma álgebra de Lie e, se M é completa, então $\text{iso}(M)$ é a álgebra de Lie de $\text{Iso}(M)$.*

Uma caracterização para campos de Killing é a seguinte:

Proposição 1.27. *Seja M uma variedade riemanniana. Um campo de vetores $X \in \mathcal{T}(M)$ é um campo de Killing se, e somente se, $g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$, para todo $Y, Z \in \mathcal{T}(M)$.*

Curvatura

Seja (M, g) uma variedade riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita de g . O **tensor de curvatura em M** é o campo de tensores $R \in \mathcal{T}_1^3(M)$ definido, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$, por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Dizemos que uma variedade riemanniana M é *flat* quando seu tensor de curvatura é identicamente nulo. Isto é equivalente a M ser localmente isométrica ao espaço euclidiano.

Utilizando a métrica g , é possível lidar com o tensor de curvatura como um campo de tensores em $\mathcal{T}^4(M)$ (que também denotaremos por R), definido, para todo $X, Y, Z, W \in \mathcal{T}(M)$, por $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$. Uma possível interpretação geométrica para a curvatura é que esta “mede” o quanto as derivadas covariantes segundas falham em comutar.

Seja M uma variedade riemanniana, $p \in M$, e sejam $X, Y \in T_p M$ vetores linearmente independentes. Usando o tensor de curvatura, definimos a **curvatura seccional associada a X e Y** por

$$\kappa(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2},$$

e é possível provar que $\kappa(X, Y)$ depende apenas do plano σ gerado por X e Y , e não dos vetores X e Y diretamente. É fato que o conjunto $G_2(TM)$ (conhecido por **fibrado Grassmanniano sobre M**) de todos os 2-planos tangentes a M pode ser munido de uma estrutura diferenciável natural. Com esta estrutura, a aplicação $\kappa : G_2(TM) \ni \sigma \mapsto \kappa(\sigma) \in \mathbb{R}$, chamada de **função curvatura seccional de M** , está bem definida e é suave.

Subvariedades riemannianas

Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Uma subvariedade $i : L \rightarrow M$ com a métrica induzida $g_L = i^*g$ é chamada de **subvariedade riemanniana de M** . Campos de vetores X e Y em L podem ser estendidos localmente a campos \tilde{X} e \tilde{Y} de M e é possível provar que a conexão associada a g_L coincide com $(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\top$, isto é, a componente de $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ tangente a L . Definimos a **segunda forma fundamental de L** como sendo a forma bilinear simétrica $II(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\perp$ (v. Figura 1.4). Se II é identicamente nula, dizemos que L é uma **subvariedade totalmente geodésica**. Esta propriedade é equivalente a toda geodésica de L ser uma geodésica de M . A fórmula seguinte é conhecida por *fórmula de Gauß*, e relaciona os tensores de curvatura de L e M : para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$,

$$\begin{aligned} R^M(X, Y, Z, W) &= R^L(X, Y, Z, W) \\ &\quad + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle. \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental também pode ser usada para calcular derivadas covariantes de campos de vetores normais a L , pela *equação de Weingarten*: se X e Y são campos tangentes a L e N é um campo normal a L , quando X, Y e N são

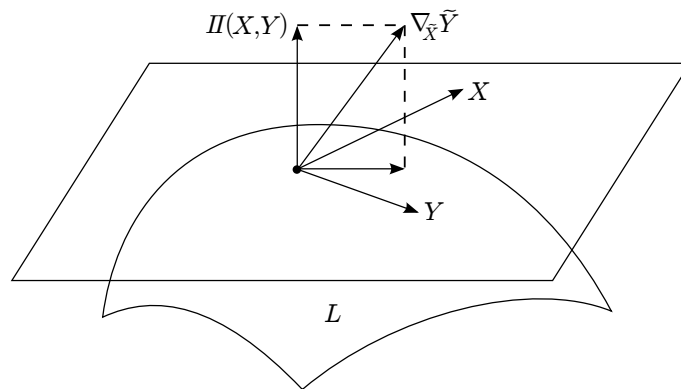


Figura 1.4: A segunda forma fundamental.

estendidos arbitrariamente a campos de M , a equação

$$\langle \nabla_X N, Y \rangle = - \langle N, II(X, Y) \rangle$$

vale nos pontos de L .

Para cada vetor ξ normal a L em $p \in L$, podemos considerar também a aplicação bilinear simétrica

$$B_\xi(X, Y)_p = g_p(\xi, II(X, Y)),$$

chamada de **segunda forma fundamental de L em p com respeito a ξ** .

Como B_ξ é simétrica, existe um operador auto-adjunto \mathcal{S}_ξ com respeito a g , chamado de **operador forma de L** , tal que $g(\mathcal{S}_\xi X, Y) = B_\xi(X, Y)$. O operador forma satisfaz $\mathcal{S}_\xi(X) = (-\nabla_X \tilde{\xi})^\top$, onde $\tilde{\xi}$ é qualquer campo normal suave que estende ξ . Chamamos os autovalores e os autovetores de $\mathcal{S}_\xi(X)$ de **curvaturas principais de L** e **direções principais de L** , respectivamente.

Campos de Jacobi

Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica. Uma **variação de γ por geodésicas** é uma família de geodésicas $\gamma_s : I \rightarrow M$ suave em $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\gamma_0 = \gamma$. Uma tal família induz um campo J dado por

$$J(t) = \left. \frac{d}{ds} \gamma_s(t) \right|_{s=0} = 0,$$

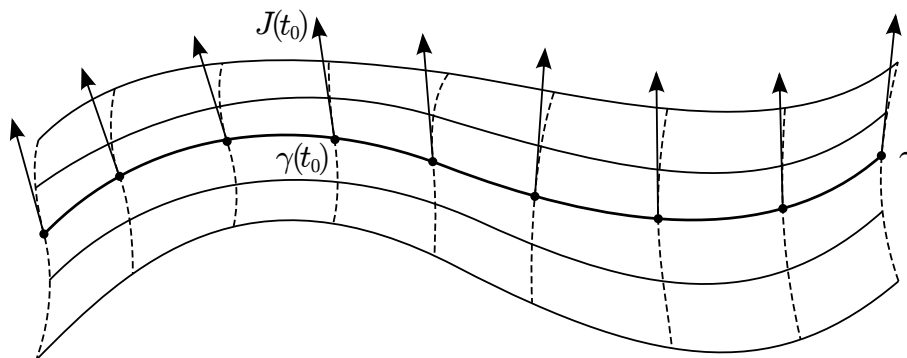


Figura 1.5: Campos de Jacobi são variações infinitesimais.

chamado de **variação infinitesimal de γ** (v. Figura 1.5). Uma variação infinitesimal de γ deve satisfazer a *equação de Jacobi*:

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{dt} J + R(\gamma', J)\gamma' = 0, \quad (1.2)$$

sendo $\frac{D}{dt}$ a derivada covariante ao longo de γ . Um campo sobre γ satisfazendo a equação 1.2 é chamado de **campo de Jacobi**.

Proposição 1.28. *Um campo de vetores J sobre uma geodésica γ é um campo de Jacobi se, e somente se, é uma variação infinitesimal de uma variação de γ por geodésicas.*

Dizemos que dois pontos $p, q \in M$ são **conjugados** se existe uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e existe um campo de Jacobi sobre γ não identicamente nulo tal que $J(0) = 0 = J(1)$. Mostra-se que o conjunto dos pontos conjugados em uma geodésica é discreto.

Vamos agora generalizar a noção de pontos conjugados no sentido de substituir um dos pontos por uma subvariedade. Seja L uma subvariedade imersa de M e γ uma geodésica ortogonal a L , isto é, $\gamma(0) \in L$ e $\gamma'(0) \in \nu_{\gamma(0)}L$. Um **campo L -Jacobi sobre γ** é um campo de Jacobi que é uma variação infinitesimal de uma variação de γ por geodésicas ortogonais a L .

Seja νL o fibrado normal de L e $\exp^\perp : \nu L \rightarrow M$ a restrição da aplicação exponencial. Dizemos que $p \in M$ é um **ponto focal de L** se p é um valor crítico de \exp^\perp , isto é, se existe $(q, v) \in \nu L$ tal que $\exp_q^\perp(v) = p$ e $w \in T_{(q,v)}\nu L$ tal que

$d\exp_{(q,v)}^\perp(w) = 0$. Pelo Teorema de Sard, o conjunto dos pontos focais tem medida nula em M .

As demonstrações das três proposições seguintes podem ser vistas em Sakai [20].

Proposição 1.29. *Seja γ uma geodésica ortogonal a uma subvariedade imersa L de uma variedade riemanniana M . Um ponto $\gamma(t)$ é um ponto focal de L se, e somente se, existe um campo L -Jacobi J não trivial sobre γ tal que $J(t) = 0$.*

Proposição 1.30. *Os pontos focais de uma subvariedade L sobre uma geodésica normal a L são isolados.*

Proposição 1.31. *Seja $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ uma geodésica emanando ortogonalmente de uma subvariedade imersa L de uma variedade riemanniana M . Considere $\gamma(b)$ o primeiro ponto focal de L sobre γ . Então, para todo $t > b$, $\gamma|_{[0,t]}$ não é uma geodésica minimizante de L a $\gamma(b)$, isto é, $\ell(\gamma|_{[0,t]}) > d(L, \gamma(t))$.*

Submersões riemannianas e fibrados

Relembremos que uma aplicação suave $\pi : M \rightarrow B$ entre variedades suaves M e B é uma **submersão** se $\text{rank}(d\pi_p) = \dim(B)$ em todo $p \in M$. Fixado $p \in M$, chamamos a subvariedade $F_p \doteq \pi^{-1}(\pi(p))$ de **fibra de π por p** . Além disso, o subespaço $V_p \doteq T_p F_p = \ker(d\pi_p) \subset T_p M$ é chamado de **subespaço vertical em p** . Caso as variedades M e B sejam riemannianas, o subespaço $H_p = V_p^\perp$ é chamado de **subespaço horizontal em p** .

As distribuições suaves $\mathcal{V} = \{V_p\}_{p \in M}$ e $\mathcal{H} = \{H_p\}_{p \in M} = \ker(d\pi)^\perp$ são ditas **distribuição vertical** e **distribuição horizontal de π** , respectivamente.

Note que $d\pi_p|_{H_p} : H_p \rightarrow T_{\pi(p)}B$ é isomorfismo linear, para todo $p \in M$. Dizemos que π é uma **submersão riemanniana** quando $d\pi_p|_{H_p}$ é uma isometria, para todo $p \in M$.

Dados um campo X em B e $p \in M$, um vetor horizontal $\widehat{X}_p \in H_p \subset T_p M$ fica determinado pela condição $d\pi_p \widehat{X}_p = X_{\pi(p)}$. A associação $p \mapsto \widehat{X}_p$ é um campo de vetores suave em M π -relacionado a X , chamado de **levantamento horizontal de X** .

Também podemos levantar horizontalmente curvas em B :

Proposição 1.32. *Seja $\pi : M \rightarrow B$ uma submersão riemanniana e γ uma curva suave em B . Então, para quaisquer $t_0 \in I$ e $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$, existe uma única curva suave $\widehat{\gamma}$ em M satisfazendo $\pi \circ \widehat{\gamma} = \gamma$, $\widehat{\gamma}(t_0) = p_0$ e $\widehat{\gamma}'(t) \in H_{\gamma(t)}$ para todo t .*

A curva $\widehat{\gamma}$ é chamada de **levantamento horizontal de γ a partir de p_0** .

Uma ideia correlata a esta se dá no contexto de fibrados, os quais relembremos agora. Sejam E , B e F variedades suaves e G um grupo de Lie. Suponha que $G \times F \rightarrow F$ é uma ação efetiva, $\pi : E \rightarrow B$ é uma submersão, $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de B e que existem difeomorfismos $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ satisfazendo:

- (1) $\pi \circ \psi_\alpha = \pi_1$, onde $\pi_1(b, f) = b$;
- (2) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(b, f) = (b, \theta_{\alpha,\beta}(b)f)$, sendo que $\theta_{\alpha,\beta} \in G$ e $\theta_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ é suave.

Então $(E, \pi, B, F, G, \{U_\alpha\}, \{\psi_\alpha\})$ é chamado de **fibrado coordenado**. Dizemos que $(E, \pi, B, F, G, \{U_\alpha\}, \{\psi_\alpha\})$ e $(E, \pi, B, F, G, \{V_\beta\}, \{\varphi_\beta\})$ são **equivalentes** se $\varphi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(b, f) = (b, \widetilde{\theta}_{\alpha,\beta}(b)f)$, onde $\widetilde{\theta}_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap V_\beta \rightarrow G$ é suave. Uma classe de equivalência de fibrados coordenados, denotada por (E, π, B, F, G) , é chamada de **fibrado**. Dizemos que E é o **espaço total**, π a **projeção**, B o **espaço base**, F a **fibra** e G o **grupo estrutural**. Além disso, as aplicações ψ_α e $\theta_{\alpha,\beta}$ são chamadas respectivamente de **funções coordenadas** e **funções de transição** (v. Figura 1.6).

Exemplo 1.33. Fibrados vetoriais são fibrados com fibra \mathbb{R}^n e grupo estrutural $GL(n, \mathbb{R})$. Em particular, temos o fibrado tangente TM de uma variedade M .

Podemos generalizar a noção de conexão para fibrados, seguindo de perto a construção dos espaços verticais e horizontais feita para submersões riemannianas. Isto nos dará, também, uma generalização da idéia de transporte paralelo. Seja (E, π, B, F, G) um fibrado. O subfibrado $\mathcal{V} \rightarrow E$ de $TE \rightarrow E$, onde $\mathcal{V} = \{\xi \in TE \mid d\pi(\xi) = 0\}$, é chamado de **fibrado vertical**. Suas fibras $V_p E \subset T_p E$ são chamadas de **subespaços verticais**.

Uma **conexão em $\pi : E \rightarrow B$** é uma distribuição suave \mathcal{H} em TE tal que $H_p E \oplus V_p E = T_p E$ para todo $p \in E$. As fibras $H_p E$ são chamadas de **subespaços**

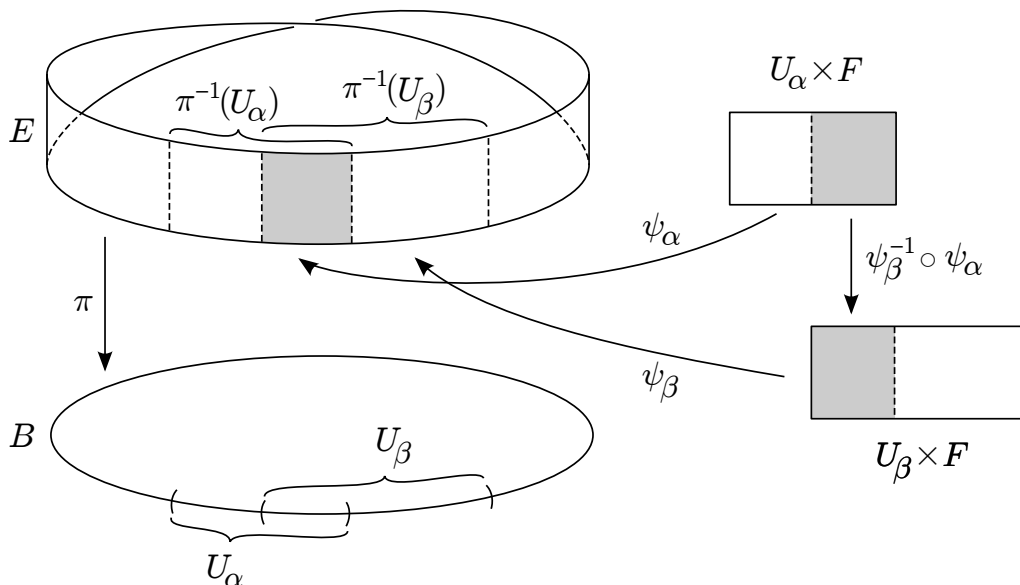


Figura 1.6: Funções coordenadas em um fibrado.

horizontais. Fixada uma conexão, para cada $x \in B$ e $p \in F_x$, a aplicação $d\pi : T_p E \rightarrow T_x B$ se restringe a um isomorfismo $H_p E \rightarrow T_x B$. Sua inversa $\text{hor}_p : T_x B \rightarrow H_p E$ é chamada de **levantamento horizontal**.

Caso o fibrado $\pi : E \rightarrow B$ seja vetorial, para que possamos explorar a estrutura linear das fibras, exigimos também que uma conexão \mathcal{H} satisfaça $H_{\lambda v} E = d(m_\lambda)H_v E$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, onde $m_\lambda : E \ni v \mapsto \lambda v \in E$. Neste caso dizemos que \mathcal{H} é uma **conexão linear**.

Uma curva $\gamma : I \rightarrow E$ é dita **horizontal** se $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)} E$ para todo $t \in I$. Similarmente ao caso das submersões, escolhidos $x_0 \in B$ e $p_0 \in E$, qualquer curva $\gamma : I \rightarrow B$, se levanta unicamente a uma curva horizontal $\hat{\gamma}(t)$ em E satisfazendo $\hat{\gamma}(0) = p_0$, chamada de **levantamento horizontal de γ começando em p_0** . Os vetores tangentes a $\hat{\gamma}$ satisfazem

$$\frac{d}{dt} \hat{\gamma}(t) = \text{hor}_{\hat{\gamma}(t)}(\gamma'(t)).$$

Considerando levantamentos horizontais para todos os possíveis $p \in F_{x_0}$, obtemos uma família de difeomorfismos $P_\gamma^t : F_{x_0} \rightarrow F_{\gamma(t)}$. Dado $p_0 \in F_{x_0}$, o ponto $P_\gamma^{t_1}(p_0)$ é chamado de **transporte paralelo de p_0 sobre γ** , sendo $I = [t_0, t_1]$. Para o caso de fibrados vetoriais com conexões lineares, os difeomorfismos P_γ^t são isomorfismos

lineares. Para o caso do fibrado tangente TM de uma variedade suave M , esta nova definição de conexão linear é equivalente a que já tínhamos, e os isomorfismos P_γ^t coincidem com o transporte paralelo usual $\tau^\gamma(t) : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$.

Um fibrado (E, π, B, F, G) é chamado de **fibrado principal** se $F = G$ e a ação de G em si mesmo é por translações à esquerda.

Exemplo 1.34. O **fibrado referencial** de uma variedade M é dado por

$$B(TM) = \bigcup_{p \in M} B(T_pM),$$

onde $B(T_pM)$ é o conjunto de todas as bases ordenadas de T_pM , o qual é difeomorfo a $GL(n, \mathbb{R})$. Temos que $(B(TM), \rho, M, GL(n, \mathbb{R}))$ é um fibrado principal, onde ρ é a projeção dada por $\rho(\xi_p) = p$, ξ_x base ordenada de T_pM .

Outro exemplo é dado por $(\widetilde{M}, \rho, M, \text{Aut}(\rho))$, sendo \widetilde{M} o recobrimento universal de M , ρ a aplicação de recobrimento associada e $\text{Aut}(\rho)$ o grupo discreto dos automorfismos de recobrimento, isomorfo a $\pi_1(M)$.

Subvariedades isoparamétricas

Seja L uma subvariedade imersa de uma variedade riemanniana M . Uma seção X do fibrado normal νL é um **campo normal paralelo sobre L** se $\nabla^\perp X$ for identicamente nulo, onde ∇^\perp é a conexão normal³.

Dizemos que L tem **fibrado normal flat** quando qualquer vetor normal pode ser estendido localmente a um campo normal paralelo.

Lembremos que uma **forma espacial** $M(k)$ é uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante k .

Seja L uma subvariedade de uma forma espacial $M(k)$. Dizemos que L é **isoparamétrica** quando seu fibrado normal é *flat* e suas curvaturas principais sobre qualquer campo normal paralelo são constantes.

Seja L uma subvariedade isoparamétrica de $M(k)$ e ξ um campo normal paralelo ao longo de L . Então $L_\xi \doteq \{\eta_\xi(p) \mid p \in L\}$ é uma subvariedade de $M(k)$, onde

³i.e., $\nabla^\perp X$ é a componente de ∇X normal a L

$\eta_\xi : L \ni p \mapsto \exp_p^\perp(\xi_p)$ é a chamada **aplicação ponto final na direção ξ** . Se L_ξ tem a mesma dimensão que L , dizemos que L_ξ é uma **variedade paralela**. Caso contrário, L_ξ é uma **variedade focal de L** .

Proposição 1.35. *Uma variedade paralela a uma variedade isoparamétrica é isoparamétrica.*

Holonomia e decomposição de De Rham

Por simplicidade, vamos considerar aqui o grupo de holonomia do fibrado normal de uma variedade riemanniana com a conexão de Levi-Civita. Ressaltamos que a mesma construção se aplica para um fibrado vetorial qualquer munido de uma conexão linear. Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\Omega(p)$ o conjunto de todas as curvas suaves por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p = \gamma(1)$. Então o transporte paralelo sobre qualquer curva $\gamma \in \Omega(p)$ de $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ é uma transformação ortogonal de T_pM . O conjunto destas transformações forma um subgrupo $\text{Hol}_p(M)$ de $O(T_pM)$, chamado de **grupo de holonomia de M em p** . A componente conexa da identidade $\text{Hol}_p^0(M)$ de $\text{Hol}_p(M)$ com relação à topologia induzida de $O(T_pM)$ é chamada de **grupo de holonomia restrito de M em p** .

O grupo de holonomia restrito $\text{Hol}_p^0(M)$ consiste das transformações provenientes de curvas homotopicamente nulas em $\Omega(p)$. Se M é conexa, então todos os grupos de holonomia (restritos) de M são congruentes, e fala-se, então, do grupo de holonomia (restrito) de M , que denotaremos por $\text{Hol}(M)$ e $\text{Hol}^0(M)$, respectivamente. O grupo $\text{Hol}^0(M)$ é fechado no grupo ortogonal e, portanto, é um grupo de Lie. Além disso, $\text{Hol}^0(M)$ é sempre compacto.

Uma variedade Riemanniana M é **reduzível** se seu recobrimento universal \widetilde{M} é isométrico ao produto Riemanniano de pelo menos duas variedades Riemannianas de dimensão maior que ou igual a 1. Caso contrário dizemos que M é **irreduzível**.

Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $p \in M$. Como $\text{Hol}^0(M)$ é compacto, existe uma decomposição $T_pM = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$ de T_pM em subespaços $\text{Hol}^0(M)$ -invariantes, onde V_0 é o conjunto dos pontos fixos da ação de $\text{Hol}^0(M)$ em T_pM e V_1, \dots, V_k são $\text{Hol}^0(M)$ -módulos irreduzíveis. Tal decomposição é única a

menos da ordem dos fatores e determina distribuições integráveis V_0, \dots, V_k em M .

A versão global do Teorema da decomposição de De Rham diz que uma variedade Riemanniana M conexa, simplesmente conexa e completa é redutível se, e somente se, $T_p M$ é redutível como um $\text{Hol}^0(M)$ -módulo, para algum $p \in M$.

Se M é redutível e $T_p M = V_0 \oplus \dots \oplus V_k$ é a decomposição de $T_p M$ descrita acima, então M é isométrica ao produto Riemanniano das variedades integrais maximais M_0, \dots, M_k por p das distribuições V_0, \dots, V_k . Neste caso, $M = M_0 \times \dots \times M_k$ é chamada de **decomposição de De Rham de M** . A variedade M_0 é isométrica a um espaço Euclidiano (possivelmente de dimensão 0).

Espaços simétricos e s -representações

Uma variedade suave M na qual um grupo de Lie G age transitivamente é dita um **espaço homogêneo**. Segue da Observação 1.18 que os estabilizadores de uma ação transitiva são todos conjugados a G_p , onde $p \in M$ é um ponto qualquer fixado. Como veremos no Corolário 2.6, podemos equipar G/G_p com uma estrutura suave tal que $G/G_p \ni gG_p \mapsto \mu(g, p) \in M$ é um difeomorfismo. Assim, podemos identificar M com G/K , onde K é um estabilizador da ação de G .

Sejam, agora, M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\varepsilon > 0$ tal que \exp_p é difeomorfismo local em $B_\varepsilon(0)$. A aplicação $s_p : B_\varepsilon(p) \ni \exp(tv) \mapsto \exp(-tv) \in B_\varepsilon(p)$ reverte as geodésicas por p e é chamada de **simetria geodésica local em p** . Uma variedade Riemanniana conexa M é um **espaço simétrico** se, para cada ponto $p \in M$, a simetria geodésica local em p se estende a uma isometria global $s_p : M \rightarrow M$. Neste caso mostra-se que M é um espaço homogêneo com $M = G/K$, onde G é a componente conexa de $\text{Iso}(M)$ que contém a identidade e K o estabilizador de algum ponto $p \in M$ fixado. O par (G, K) é chamado de **par simétrico**.

Exemplo 1.36. Qualquer grupo de Lie conexo e compacto é um espaço simétrico. De fato, veremos na Proposição 1.40 que G admite uma métrica apropriada que faz de $s_e : G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ uma simetria em e . Com isso, para cada $g \in G$, a aplicação $s_g = L_g \circ s_e \circ L_{g^{-1}}$ se torna uma simetria em g .

Seja M um espaço simétrico, \widetilde{M} seu recobrimento universal e $\widetilde{M}_0 \times \dots \times \widetilde{M}_k$

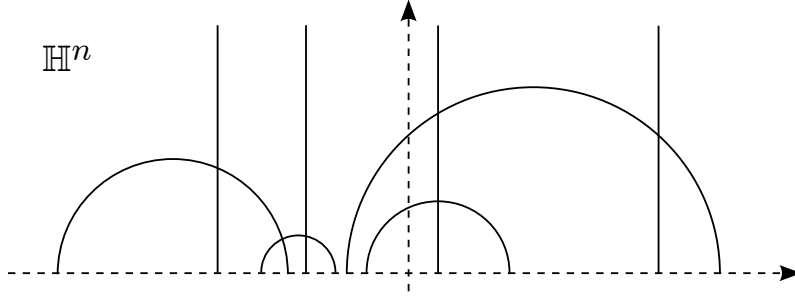


Figura 1.7: Geodésicas do espaço hiperbólico.

a decomposição de De Rham de \widetilde{M} . Cada \widetilde{M}_i , $i > 0$, é um espaço simétrico simplesmente conexo irredutível. Um **espaço simétrico semissimples** é um espaço simétrico cujo fator \widetilde{M}_0 tem dimensão 0.

Uma **s-representação** é uma representação isotrópica de um espaço simétrico simplesmente conexo e semissimples $M = G/K$, ou seja, a ação induzida de K em T_pM , para $p \in M$.

Variedades de Hadamard

Uma **variedade de Hadamard** é uma variedade riemanniana M conexa, completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional não positiva⁴.

Exemplo 1.37. O **espaço hiperbólico** (\mathbb{H}^n, h) é um exemplo canônico de variedade de Hadamard, onde $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n \mid y > 0\}$ e

$$h = \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

A curvatura seccional de \mathbb{H}^n é constante $\kappa = -1$ e suas geodésicas são as semirretas verticais e as semicircunferências com centro no hiperplano $y = 0$ (v. Figura 1.7).

Teorema 1.38 (Hadamard). *Seja M uma variedade de Hadamard e $p \in M$. Então a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

Mais geralmente, pode-se demonstrar que se M é uma variedade riemanniana conexa, completa e com curvatura seccional não positiva, então $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ é

⁴i.e., a imagem da função curvatura seccional de M está contida em $[0, +\infty)$.

uma aplicação de recobrimento. Do Teorema de Hadamard 1.38, mais do fato que um ponto $p = \gamma(0)$ em uma geodésica γ é conjugado a $\gamma(t_0)$ se, e somente se, $t_0\gamma'(0)$ é ponto crítico de \exp_p , segue que variedades de Hadamard não possuem pontos conjugados.

Teorema 1.39 (Cartan). *Seja G um grupo de Lie compacto agindo em uma variedade de Hadamard M por isometrias. Então G fixa algum ponto de M .*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Helgason [11].

Métricas bi-invariantes

Se quisermos munir um grupo de Lie G com uma métrica riemanniana, é interessante que tal métrica se relacione bem com a estrutura de grupo de G . Para tanto, exigiremos que as translações L_g e R_g sejam isometrias. Mais precisamente, dizemos que uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em um grupo de Lie G é **invariante à esquerda** se $\langle d(L_g)_h X, d(L_g)_h Y \rangle_{gh} = \langle X, Y \rangle_h$, para todo $g, h \in G$ e todo $X, Y \in T_h G$. Analogamente se define uma métrica **invariante à direita**. Uma **métrica bi-invariante** é uma métrica riemanniana simultaneamente invariante à esquerda e à direita.

Proposição 1.40. *Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite uma métrica bi-invariante.*

Algumas propriedades de métricas bi-invariantes são dadas na proposição a seguir:

Proposição 1.41. *Seja G um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Então*

$$(1) \quad \langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle;$$

$$(2) \quad R(X, Y, X, Y) = \frac{1}{4} \| [X, Y] \|^2;$$

(3) *A exponencial de Lie e a exponencial de Riemann coincidem.*

Segue do ítem (3) acima, aplicando do Teorema de Hopf-Rinow 1.24, que a exponencial de Lie de um grupo de Lie compacto e conexo é sempre sobrejetiva.

Capítulo 2

Ações polares em variedades de Hadamard

O objetivo principal deste capítulo é o Teorema 2.32, que dá uma descrição global da partição de uma variedade de Hadamard por órbitas de uma ação polar própria. Para isso, estudaremos diversos conceitos e resultados da teoria de ações próprias que, apesar de apresentados como ferramentas, são relevantes por si só. Damos ênfase, também, a certos resultados que servem de motivação e ilustração para alguns conceitos do Capítulo 3, por exemplo o grupo de Weyl, que motiva o grupo de holonomia transversal. A Seção 1.2 contém rudimentos sobre ações de grupos de Lie necessários para este capítulo.

As principais referências para este capítulo são Alexandrino e Bettiol [3], Palais e Terng [19], Berndt, Console e Olmos [4], e Duistermaat e Kolk [10].

2.1 Ações próprias

Uma ação $\mu : G \times M \rightarrow M$, de um grupo de Lie G em uma variedade suave M é **própria** se a aplicação $G \times M \ni (g, x) \mapsto (\mu(g, x), x) \in M \times M$ é própria.

Exemplo 2.1. A ação $G \times H \rightarrow G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ de um subgrupo fechado H de um grupo de Lie G é livre e própria.

Uma ação $G \times M \rightarrow M$ é dita **propriamente descontínua** se, para todo $x \in M$,

existe uma vizinhança $U \ni x$ tal que, para todo $g \in G \setminus \{e\}$, vale $gU \cap U = \emptyset$. Uma ação de um grupo discreto é propriamente descontínua se, e somente se, é livre e própria.

Proposição 2.2. *Uma ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ é própria se, e somente se, vale a propriedade a seguir: se $\{g_n\}$ é uma sequência qualquer em G e $\{x_n\}$ é uma sequência convergente em M , com $\{\mu(g_n, x_n)\}$ convergente, então $\{g_n\}$ admite uma subsequência convergente.*

Corolário 2.3. *Ações de grupos compactos são sempre próprias.*

Ações próprias se relacionam intimamente com fibrados. De fato, temos o seguinte:

Proposição 2.4. *Fibrados principais (P, ρ, B, G) possuem uma ação livre e própria $\mu : P \times G \rightarrow P$ subjacente, cujas órbitas são as fibras. Reciprocamente, se $\mu : M \times G \rightarrow M$ é uma ação livre e própria, então M/G admite uma estrutura suave tal que $(M, \rho, M/G, G)$ é um fibrado principal, sendo $\rho : M \rightarrow M/G$ a projeção canônica.*

A estrutura suave em M/G possui as seguintes propriedades, que garantem sua unicidade:

- (1) $\rho : M \rightarrow M/G$ é suave;
- (2) Para qualquer variedade N e qualquer aplicação $h : M/G \rightarrow N$, h é suave se, e somente se, $h \circ \rho$ é suave.

Com a Proposição 2.4, demonstra-se os dois úteis resultados a seguir:

Corolário 2.5. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado agindo em G por multiplicação à direita. Então G/H é uma variedade suave e $(G, \rho, G/H, H)$ é um fibrado principal, onde $\rho : G \rightarrow G/H$ é a projeção canônica. Além disso, se H é subgrupo normal, então G/H é um grupo de Lie e $\rho : G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo de Lie.*

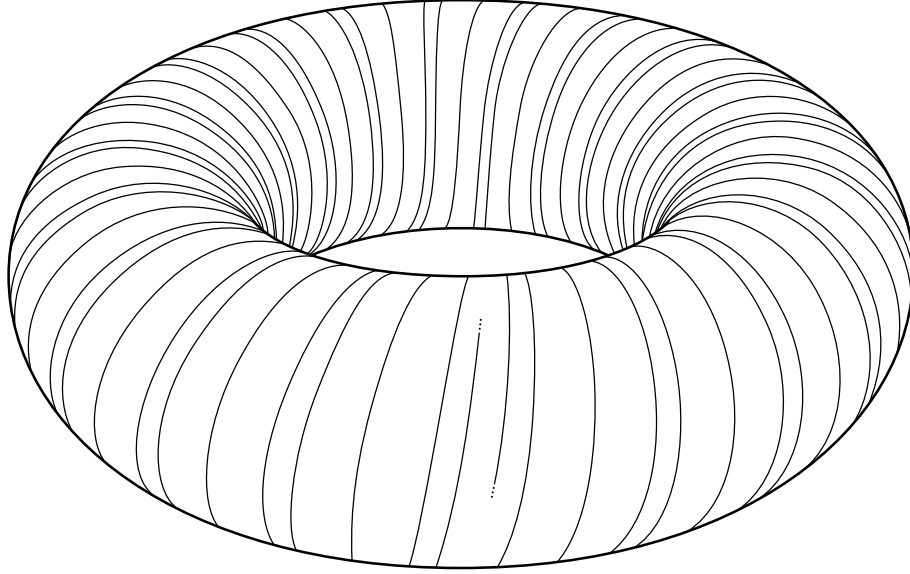


Figura 2.1: Curva de Kronecker no toro.

Corolário 2.6. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação. Então $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$, definida por $\tilde{\mu}_x \circ \rho = \mu_x$, onde $\rho : G \rightarrow G/G_x$ é a projeção canônica, é uma imersão injetora cuja imagem é $G(x)$. Em particular, $G(x)$ é uma subvariedade imersa de M . Ainda, se μ é própria, então $G(x)$ é uma subvariedade mergulhada e fechada de M .*

Exemplo 2.7. Considere o toro *flat* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Para cada $\lambda \in (0, +\infty)$, o grupo de Lie \mathbb{R} age isometricamente em \mathbb{T}^2 por

$$\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \ni (t, [x, y]) \mapsto [x + t, y + \lambda t] \in \mathbb{T}^2,$$

onde $[x, y]$ denota a imagem de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pela projeção canônica $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Quando λ é irracional, cada órbita desta ação é densa em \mathbb{T}^2 e, portanto, não é uma subvariedade mergulhada. Uma tal órbita é também chamada de **curva de Kronecker em \mathbb{T}^2** (v. Figura 2.1. Em vista do Corolário 2.6, μ não é própria quando λ é irracional.

Um conceito fundamental na teoria de ações próprias é o de fatia. Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação e $x \in M$. Uma **fatia em x** é uma subvariedade mergulhada S_x que contém x e satisfaz:

- (1) $T_x M = d\mu_x \mathfrak{g} \oplus T_x S_x$ e $T_y M = d\mu_y \mathfrak{g} + T_y S_x$, para todo $y \in S_x$;
- (2) S_x é invariante por G_x , isto é, se $y \in S_x$ e $g \in G_x$, então $\mu(g, y) \in S_x$;

(3) Se $y \in S_x$ e $g \in G$ são tais que $\mu(g, y) \in S_x$, então $g \in G_x$.

Exemplo 2.8. Considere a ação de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ dada por $\mu((s, l), (z, t)) = (sz, t + l)$. Para $x = (z_0, t_0)$ com $z_0 \neq 0$, G_x é trivial, a órbita $G(x)$ é um cilindro de eixo $A = \{(0, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$ e uma fatia S_x em x é um segmento da reta que passa por x e $(0, t_0)$ e que não intersecta A .

Se $x = (0, t_0)$, então $G_x = \mathbb{S}^1$, $G(x) = A$ e uma fatia S_x em x é um disco $\{(z, t_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \|z\| \leq \varepsilon\}$.

Teorema 2.9. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria e $x \in M$. Então existe uma fatia S_x em x .*

Para apresentarmos o principal resultado desta seção, relembremos a noção de fibrado com fibra F associado a um fibrado principal (P, ρ, B, G) . Seja $\mu_1 : P \times G \rightarrow P$ a ação à direita livre e própria dada pela Proposição 2.4 e $\mu_2 : G \times F \rightarrow F$ uma ação à esquerda. Então a ação

$$\begin{aligned} \mu : G \times (P \times F) &\longrightarrow P \times F \\ (g, (p, f)) &\longmapsto (\mu_1(p, g^{-1}), \mu_2(g, f)) \end{aligned}$$

é uma ação à esquerda própria. Seja $P \times_G F$ o espaço das órbitas de μ e $B = P/G$. É possível provar que $P \times_G F$ é uma variedade suave, chamada de **espaço torcido**, e $(P \times_G F, \pi, B, F, G)$ é um fibrado, sendo $\pi : P \times_G F \rightarrow B$ definida por $\pi([p, f]) = \rho(p)$, onde $\rho : P \rightarrow B = P/G$ é a projeção canônica. O fibrado $(P \times_G F, \pi, B, F, G)$ é chamado de **fibrado com fibra F associado ao fibrado principal (P, ρ, B, G)** .

Exemplo 2.10. O fibrado tangente TM de uma variedade M é associado ao fibrado principal $B(TM)$ ¹.

A existência de fatias para ações próprias, garantida pelo Teorema 2.9, nos permite considerar uma **vizinhança tubular** de cada órbita $G(x)$, definida por $\text{Tub}(G(x)) = \mu(G, S_x)$ (v. Figura 2.2).

¹cf. Exemplo 1.34.

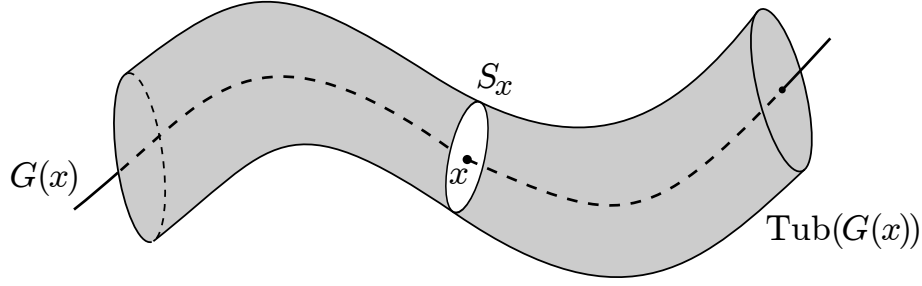


Figura 2.2: Vizinhança tubular de uma órbita.

Teorema 2.11 (Teorema da vizinhança tubular). *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria e $x \in M$. Então existe um difeomorfismo G -equivariante entre $\text{Tub}(G(x))$ e o espaço total do fibrado com fibra S_x associado ao fibrado principal $(G, \rho, G/G_x, G_x)$. Em outras palavras, $\text{Tub}(G(x)) = G \times_{G_x} S_x$.*

Observação 2.12. A ação $G \times (G \times_{G_x} S_x) \rightarrow G \times_{G_x} S_x$ considerada é dada por $h \cdot [g, s] = [hg, s]$.

Demonstração: Defina a aplicação $\varphi : G \times S_x \rightarrow G(S_x)$ por $\varphi(g, s) = \mu(g, s)$ e note que $d\varphi_{(e,s)}$ é sobrejetora. Como $d\varphi_{(g,s)}(X, Y) = d(\mu^g)_s \circ d\varphi_{(e,s)}(dL_{g^{-1}}X, Y)$, segue que $d\varphi_{(g,s)}$ é sobrejetora para todo $(g, s) \in G \times S_x$, ou seja, φ é submersão. Assim, φ é uma aplicação aberta e, portanto, $\text{Tub}(G(x)) = G(S_x)$ é uma vizinhança aberta de $G(x)$ que é, obviamente, G -invariante.

Afirmção 2.13. $\varphi(g, s) = \varphi(h, t)$ se, e somente se, $h = gk^{-1}$ e $t = \mu(k, s)$, onde $k \in G_x$.

De fato, se $\varphi(g, s) = \varphi(h, t)$, então $\mu(g, s) = \mu(h, t)$, donde $t = \mu(k, s)$, com $k = h^{-1}g$. Como $s, t \in S_x$, temos $k \in G_x$. Reciprocamente, se $h = gk^{-1}$ e $t = \mu(k, s)$, então $\varphi(h, t) = \mu(gk^{-1}, \mu(k, s)) = \mu(g, s) = \varphi(g, s)$.

Pela Afirmção 2.13, fica bem definida e é injetora a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : G \times_{G_x} S_x &\longrightarrow \text{Tub}(G(x)) \\ [g, s] &\longmapsto \mu(g, s). \end{aligned}$$

Como $\pi : G \times S_x \rightarrow G \times_{G_x} S_x$ é projeção de um fibrado, temos ainda que ψ é sobrejetora e suave.

Afirmação 2.14. ψ é difeomorfismo G -equivariante.

De fato, como $d\pi$ e $d\varphi$ são sobrejetoras, e $\varphi = \psi \circ \pi$, segue que $d\psi$ é sobrejetora. Além disso, como $(G \times_{G_x} S_x, \pi, G/G_x, S_x, G_x)$ é fibrado, temos $\dim(G \times_{G_x} S_x) = \dim(G/G_x) + \dim(S_x)$. Como S_x é fatia, $T_x M = d\mu_x \mathfrak{g} \oplus T_x S_x$. Em vista do Corolário 2.6, $\dim(d\mu_x \mathfrak{g}) = \dim(G/G_x)$. Portanto $\dim(G/G_x) + \dim(S_x) = \dim(M) = \dim(\text{Tub}(G(x)))$, sendo esta última igualdade válida pois $\text{Tub}(G(x))$ é aberto de M .

Temos então que $\dim(G \times_{G_x} S_x) = \dim(\text{Tub}(G(x)))$. Isto, mais o fato de $d\psi$ ser sobrejetora nos dá que $d\psi$ é isomorfismo. Como ψ é, portanto, difeomorfismo local bijetor, segue que ψ é difeomorfismo.

Por fim, $\mu(h, \psi([g, s])) = \mu(h, \mu(g, s)) = \mu(hg, s) = \psi([hg, s]) = \psi(h \cdot [g, s])$, logo ψ é G -equivariante. \square

Com o Teorema 2.11 mostra-se que $S_{\mu(g,x)} = \mu(g, S_x)$.

2.2 Ações isométricas e órbitas principais

Exploraremos agora uma importante relação entre ações isométricas e ações próprias. Veremos também alguns resultados sobre a geometria das órbitas de ações isométricas.

Teorema 2.15. *Seja M uma variedade riemanniana e G um subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$. Então a ação $\mu : G \times M \ni (g, x) \mapsto g(x) \in M$ é uma ação própria.*

Seja uma ação $\mu : G \times M \rightarrow M$. Dizemos que a uma métrica riemanniana em M é G -invariante se μ^g é uma isometria, para todo $g \in G$. Ou seja, se $\langle X, Y \rangle_x = \langle d(\mu^g)_x X, d(\mu^g)_x Y \rangle_{\mu(g,x)}$, para todo $g \in G$, $x \in M$ e $X, Y \in T_x M$.

Teorema 2.16. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria. Então existe uma métrica G -invariante em M tal que $\mu^G = \{\mu^g \mid g \in G\}$ é um subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$.*

Se a ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ é efetiva, o Teorema 2.16 implica que podemos identificar G com um subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$ (para alguma métrica particular). Neste sentido, o Teorema 2.16 é uma recíproca do Teorema 2.15. Ações próprias

efetivas e ações de subgrupos fechados de $\text{Iso}(M)$ são, portanto, essencialmente o mesmo tópico.

No que segue, veremos alguns resultados geométricos sobre órbitas de ações isométricas. Uma órbita $G(x)$ de uma ação isométrica $\mu : G \times M \rightarrow M$ é uma **órbita principal** se existe uma vizinhança U de x em M tal que, para cada $y \in U$, existe $g \in G$ satisfazendo $G_x \subset G_{\mu(g,y)}$.

Proposição 2.17. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria. São equivalentes:*

- (1) $G(x)$ é órbita principal;
- (2) Se S_x é uma fatia em x então $G_y = G_x$, para todo $y \in S_x$.

Órbitas principais são abundantes, como mostra o resultado seguinte.

Teorema 2.18 (Teorema das órbitas principais). *Seja M uma variedade conexa e $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria.*

- (1) O conjunto M_{princ} dos pontos de M contidos em órbitas principais é um aberto denso de M ;
- (2) Os estabilizadores de pontos em órbitas principais são conjugados.

Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria isométrica e $\nu_x G(x)$ o espaço normal a $G(x)$ em $x \in M$. Não é difícil ver que a imagem por \exp_x de uma vizinhança de 0 em $\nu_x G(x)$ na qual \exp_x é difeomorfismo é uma fatia S_x em x . Em outras palavras, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$S_x = \{\exp_x(\xi) \mid \xi \in \nu_x G(x) \text{ e } \|\xi\| < \varepsilon\}.$$

Uma fatia construída dessa maneira será chamada de **fatia normal em x** .

Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria isométrica e S_x uma fatia normal em $x \in M$. A **representação na fatia de G_x em S_x** é definida por

$$\Psi : G_x \ni g \longmapsto d(\mu^g|_{S_x})_x \in \text{O}(\nu_x G(x)).$$

Note que, pela definição de S_x , temos $T_x M = T_x G(x) \oplus T_x S_x$ e $T_x S_x = \nu_x(G(x))$. Isso, mais o fato que, se $g \in G_x$, então $\mu^g|_{S_x} : S_x \rightarrow S_x$, nos garante que $d(\mu^g|_{S_x})_x \in \text{GL}(\nu_x G(x))$. Como μ é ação isométrica, $d(\mu^g|_{S_x})_x \in \text{O}(\nu_x G(x))$. Se $g, h \in G_x$, então $\mu^{gh} = \mu^g \circ \mu^h$ e $\mu^g(x) = \mu^h(x) = x$, donde $d(\mu^{gh}|_{S_x})_x = d(\mu^g|_{S_x})_x \circ d(\mu^h|_{S_x})_x$. Portanto Ψ é, de fato, uma representação linear de G_x .

Com a representação na fatia, obtemos uma ação de G_x em $\nu_x G(x)$ definindo $(g, v) \mapsto d(\mu^g|_{S_x})_x v$. Nos referiremos a esta ação por **ação induzida pela representação na fatia**.

Não é difícil ver que, se $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria isométrica e S_x uma fatia normal em x , então $G(x)$ é órbita principal se, e somente se, a representação na fatia de G_x em S_x é trivial.

Teorema 2.19. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria isométrica e $G(x)$ uma órbita principal. Então*

- (1) *Uma geodésica γ ortogonal a uma órbita $G(\gamma(0))$ é ortogonal a qualquer outra órbita $G(\gamma(t))$ (v. Figura 2.3);*
- (2) *Dado $\xi \in \nu_x G(x)$, o campo $\widehat{\xi}_{\mu(g,x)} \doteq d(\mu^g)_x \xi$, é um campo normal sobre $G(x)$ bem definido, chamado de **campo equivariante normal** (v. Figura 2.3);*
- (3) $\mathcal{S}_{\widehat{\xi}_{\mu(g,x)}} = d\mu^g \mathcal{S}_{\widehat{\xi}_x} d\mu^{g^{-1}}$, onde $\mathcal{S}_{\widehat{\xi}}$ é o operador forma de $G(x)$;
- (4) *As curvaturas principais de $G(x)$ sobre um campo equivariante normal são constantes;*
- (5) $\{\exp(\widehat{\xi}_y) \mid y \in G(x)\}$ é órbita de μ .

Demonstração: Pela Proposição 1.19, cada $\xi \in \mathfrak{g}$ induz um campo suave X^ξ , cujo fluxo é $\varphi_t^{X^\xi}(\cdot) = \mu(\exp(t\xi), \cdot)$. Como, neste caso, a ação é isométrica, cada campo X^ξ é de Killing. Além disso, para toda órbita $G(y)$ e todo $v \in T_y G(y)$, existe $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que $X^\xi(y) = v$. Assim, para mostrarmos (1), basta mostrarmos que, se um campo de Killing X é ortogonal a $\gamma'(0)$, então X é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo t no intervalo de definição de γ .

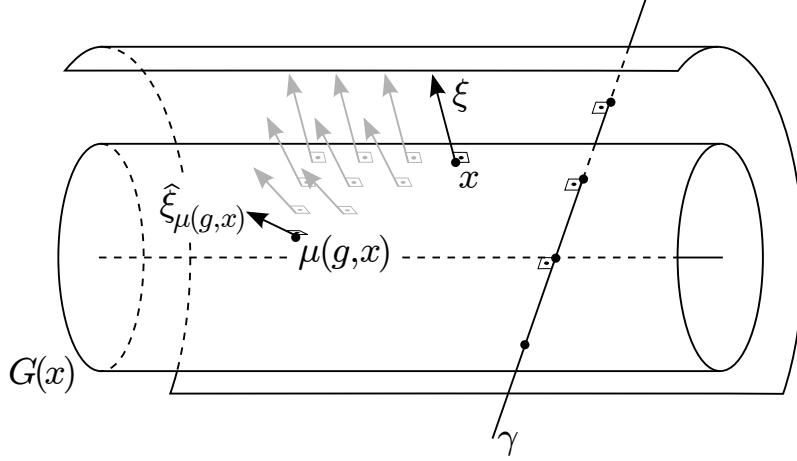


Figura 2.3: Campo equivariante normal.

Pela Proposição 1.27, temos $\langle \nabla_{\gamma'(t)} X, \gamma'(t) \rangle = 0$. Como γ é geodésica,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle X_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} X_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \right\rangle + \left\langle X_{\gamma(t)}, \frac{D}{dt} \gamma'(t) \right\rangle \\ &= \langle \nabla_{\gamma'(t)} X, \gamma'(t) \rangle + \langle X_{\gamma(t)}, 0 \rangle \\ &= \langle 0, \gamma'(t) \rangle + \langle X_{\gamma(t)}, 0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

portanto $\langle X_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle$ é constante. Por hipótese, $\langle X_{\gamma(0)}, \gamma'(0) \rangle = 0$. Logo X é ortogonal a γ' e demonstramos o item (1).

Como $G(x)$ é órbita principal, a representação na fatia de G_x em S_x é trivial. Isto implica que, se $\mu(g, x) = \mu(h, x)$, então $d(\mu^g|_{S_x})_x = d(\mu^h|_{S_x})_x$. Portanto $\widehat{\xi}_{\mu(g, x)} \doteq d(\mu^g)_x \xi$, para $\xi \in \nu_x G(x)$, é um campo suave bem definido. Como a ação é isométrica, $\widehat{\xi}_{\mu(g, x)}$ é normal. Assim, fica demonstrado o item (2).

O item (3) segue de

$$\begin{aligned} \left\langle d\mu^{g^{-1}} \mathcal{S}_{\widehat{\xi}_{\mu(g, x)}} d\mu^g(W), Z \right\rangle_x &= \left\langle \mathcal{S}_{\widehat{\xi}_{\mu(g, x)}} d\mu^g(W), d\mu^g(Z) \right\rangle_{\mu(g, x)} \\ &= \left\langle -\nabla_{d(\mu^g)_x W} d(\mu^g)_x \xi, d(\mu^g)_x Z \right\rangle_{\mu(g, x)} \\ &= \left\langle -\nabla_W \widehat{\xi}, Z \right\rangle_x = \left\langle \mathcal{S}_{\widehat{\xi}_x} W, Z \right\rangle_x. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{S}_{\widehat{\xi}} X = \lambda X$, então, pelo item (3), temos $d\mu^{g^{-1}} \mathcal{S}_{\widehat{\xi}_{\mu(g, x)}} d\mu^g(X) = \lambda X$, logo $\mathcal{S}_{\widehat{\xi}_{\mu(g, x)}} d\mu^g(X) = \lambda d\mu^g(X)$, donde segue (4).

Finalmente, como $\exp_{\mu(g, x)}(\widehat{\xi}_{\mu(g, x)}) = \exp_{\mu(g, x)}(d\mu^g \xi_x) = \mu^g(\exp_x(\xi))$, o item (5)

fica demonstrado. □

2.3 Ação adjunta e ação por conjugação

Nestas seção estudaremos duas ações particulares, tanto a título de exemplo dos conceitos que já vimos, como de motivação para algumas noções posteriores.

A ação $a : G \times G \ni (g, h) \mapsto ghg^{-1}$, de um grupo de Lie G em si mesmo é chamada de **ação por conjugação**. É claro que o elemento neutro $e \in G$ é um ponto fixo desta ação, isto é, $G_e = G$.

A linearização da ação por conjugação em e induz uma ação de G em sua álgebra de Lie \mathfrak{g} . Mais precisamente, a ação $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $\text{Ad}(g, X) = d(a^g)_e X = d(L_g)_{g^{-1}} \circ d(R_{g^{-1}})_e X$ é chamada de **ação adjunta de G em \mathfrak{g}** . As ações adjunta e por conjugação se relacionam por $\exp(\text{Ad}(g)X) = g \exp(X) g^{-1}$.

A diferencial de Ad é denotada por $\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \mapsto d\text{Ad}_e X \in \text{End}(\mathfrak{g})$, isto é,

$$\text{ad}(X)Y = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tX))Y \right|_{t=0},$$

e satisfaz $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$. Além disso, Ad e ad se relacionam por $\text{Ad}(\exp(X)) = \exp(\text{ad}(X))$.

Relembremos que um grupo de Lie T é um **toro** se T é isomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ e que, neste caso, T é abeliano e sua álgebra de Lie \mathfrak{t} é isomorfa a \mathbb{R}^n . Um subgrupo $T \subset G$ é um **toro máximo** se T é um toro e, para qualquer outro toro S tal que $T \subset S$, vale $T = S$. Um elemento $p \in T$ é um **gerador de T** se $\{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em T . Analogamente, um vetor $X \in \mathfrak{t}$ é um **gerador infinitesimal de T** quando $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ é denso em T . Cada toro possui tanto um gerador quanto um gerador infinitesimal².

Lema 2.20. *Seja G um grupo de Lie conexo e compacto com álgebra de Lie \mathfrak{g} e $T \subset G$ um toro maximal com álgebra de Lie \mathfrak{t} . Se $X \in \mathfrak{t}$ é um gerador infinitesimal de T , então $\mathfrak{t} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$.*

O próximo teorema generaliza um conhecido resultado de álgebra linear que diz

²cf. Exemplo 2.7.

que toda matriz $g \in \text{SU}(n)$ é conjugada a alguma matriz do subgrupo D das matrizes diagonais em $\text{SU}(n)$. Note que o Teorema 1.6 implica que D é um toro.

Teorema 2.21 (Teorema do toro máximo). *Seja G um grupo de Lie conexo e compacto. Então:*

- (1) *Existe um toro máximo $T \subset G$;*
- (2) *Se T_1 e T_2 são toros máximos então existe $g \in G$ tal que $gT_1g^{-1} = T_2$;*
- (3) *Para cada toro máximo T e cada $g \in G$, existe $h \in G$ tal que $ghg^{-1} \in T$. Em particular, cada elemento de G pertence a algum toro máximo;*
- (4) *Para cada métrica bi-invariante em G , as órbitas da ação por conjugação intersectam cada toro máximo ortogonalmente.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra abeliana maximal da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Da Proposição 1.12, segue que existe um único subgrupo conexo $T \subset G$ com com álgebra de Lie \mathfrak{t} . Como G é compacto, o fecho \overline{T} de T é um grupo de Lie abeliano, conexo e compacto. Logo, pelo Teorema 1.6, \overline{T} é um toro. Note que a álgebra de Lie de \overline{T} é \mathfrak{t} e, como \mathfrak{t} é maximal, $\overline{T} = T$.

Seja H um subgrupo de G tal que H é um toro e $\overline{T} \subset H$. Então, para cada X na álgebra de Lie \mathfrak{h} de H , temos $[X, Z] = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{t}$. Pela maximalidade de \mathfrak{t} , segue que $X \in \mathfrak{t}$. Portanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ e, pela unicidade garantida pela Proposição 1.12, $H = T$. Isso mostra (1).

Para (2), sejam X_1 e X_2 geradores infinitesimais de T_1 e T_2 , respectivamente. Pela Proposição 1.40, existe uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em G . Defina $f : G \ni g \mapsto \langle \text{Ad}(g)X_1, X_2 \rangle \in \mathbb{R}$. Como G é compacto, f possui um mínimo em algum

ponto $g_0 \in G$. Então, para todo $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d}{dt} f \circ (\exp(tY)g_0) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \langle \text{Ad}(\exp(tY))\text{Ad}(g_0)X_1, X_2 \rangle \right|_{t=0} \\
&= \left\langle \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tY))\text{Ad}(g_0)X_1 \right|_{t=0}, X_2 \right\rangle \\
&= \langle \text{ad}(Y)\text{Ad}(g_0)X_1, X_2 \rangle \\
&= \langle [Y, \text{Ad}(g_0)X_1], X_2 \rangle \\
&= \langle Y, [\text{Ad}(g_0)X_1, X_2] \rangle.
\end{aligned}$$

Segue, então, do Lema 2.20, que $\text{Ad}(g_0)X_1 \in \mathfrak{t}_2$, e logo $\exp(\text{Ad}(g_0)tX_1) = g_0 \exp(tX_1)g_0^{-1} \in T_2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica $g_0T_1g_0^{-1} \subset T_2$. Pela maximalidade de T_1 concluímos $g_0T_1g_0^{-1} = T_2$.

Para (3), note que, pela Proposição 1.41, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é sobrejetiva. Portanto, dado $g \in G$, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(Y) = g$. Seja T_2 o toro máximo que contém $\overline{\{\exp(tY) \mid t \in \mathbb{R}\}}$. Segue do item (2) que existe $h \in G$ tal que $hT_2h^{-1} = T$. Em particular, $hgh^{-1} \in T$.

Por fim, para (4), seja $p \in T$ e $G(p)$ a órbita de p pela ação por conjugação. Note que $T_pG(p) = \{dR_pY - dL_pY \mid Y \in \mathfrak{g}\}$ e $T_pT = \{dR_pZ \mid Z \in \mathfrak{t}\}$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bi-invariante temos que

$$\begin{aligned}
\langle dR_pY - dL_pY, dR_pZ \rangle &= \langle dR_pY, dR_pZ \rangle - \langle dL_pY, dR_pZ \rangle \\
&= \langle Y, Z \rangle - \langle Y, \text{Ad}(p)Z \rangle = 0
\end{aligned}$$

uma vez que, para todo $Z \in \mathfrak{t}$, vale $\text{Ad}(p)Z = Z$. Isto, mais as expressões de $T_pG(p)$ e T_pT , terminam a demonstração. \square

Corolário 2.22. *Seja G um grupo de Lie conexo e compacto com uma métrica bi-invariante e \mathfrak{t} a álgebra de Lie de um toro máximo $T \subset G$. Então cada órbita da ação adjunta intersesta \mathfrak{t} ortogonalmente.*

É claro que, se G é compacto, tanto a ação por conjugação como a ação adjunta

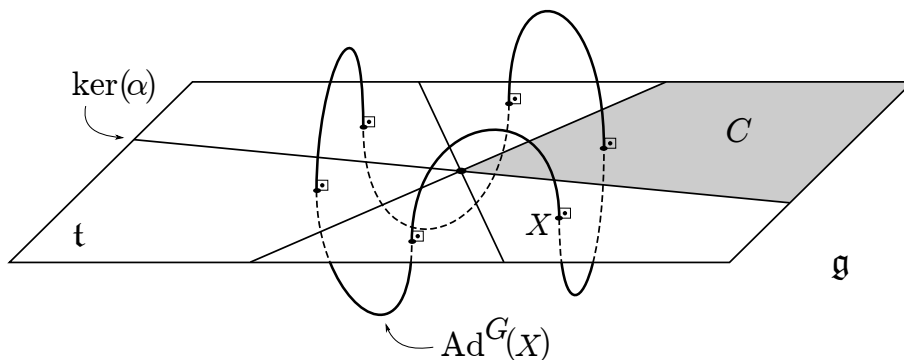


Figura 2.4: A ação do grupo de Weyl em \mathfrak{t} se relaciona com a ação adjunta.

são próprias³.

A seguir vamos introduzir o chamado grupo de Weyl, que motivará alguns conceitos posteriores. Para isso vejamos brevemente o sistema de raízes de um grupo compacto⁴. Suponha que G é um grupo de Lie conexo e compacto e considere a complexificação da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Se $T \subset G$ um toro máximo fixado e \mathfrak{t} sua álgebra de Lie, é possível obter uma única (a menos de permutações) decomposição de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ em soma direta de subespaços complexos

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [X, Y] = i\alpha(X)Y, \forall X \in \mathfrak{t}\},$$

onde $\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear que chamamos de **raíz de G** . Denotaremos o conjunto das raízes de G por $\text{Root}(G)$.

Uma componente conexa C de $\mathfrak{t}^{\vee} \doteq \mathfrak{t} \setminus \bigcup_{\alpha \in \text{Root}(G)} \ker(\alpha)$ é chamada de **câmara de Weyl**.

Seja G nas hipóteses acima e com uma métrica bi-invariante. Considere

$$\begin{aligned} N_{\mathfrak{t}} &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}\}, \\ Z_{\mathfrak{t}} &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)Y = Y, \forall Y \in \mathfrak{t}\}. \end{aligned}$$

É claro que $Z_{\mathfrak{t}}$ é subgrupo normal de $N_{\mathfrak{t}}$. Definimos então o **grupo de Weyl de G** por $W = N_{\mathfrak{t}}/Z_{\mathfrak{t}}$. Note que W depende, *a priori*, da escolha do toro máximo T . No entanto, como os toros máximos são conjugados, os grupos de Weyl resultantes são

³cf. Corolário 2.3.

⁴mais detalhes em Alexandrino e Bettiol [3].

todos isomorfos.

O fato interessante é que a ação $W \times \mathfrak{t} \ni (wZ, X) \mapsto \text{Ad}(w)X$ é isométrica efetiva e guarda muita informação da ação adjunta. Por exemplo, suas órbitas coincidem com a interseção de \mathfrak{t} com as órbitas da ação adjunta.

Se α é uma raiz e φ_α denota a reflexão ortogonal por $\ker \alpha$, mostra-se que $\varphi_\alpha \in W$. Mais que isso, é possível demonstrar que W é gerado por tais reflexões e que cada câmara de Weyl C é um domínio fundamental para a ação de W em \mathfrak{t} , isto é, cada órbita da ação adjunta intersesta \overline{C} exatamente uma vez. Além disso, o grupo de Weyl atua permutando as câmaras de Weyl em \mathfrak{t} (v. Figura 2.4).

Exemplo 2.23. No nosso exemplo do início, o grupo de Weyl de $SU(n)$ é o grupo simétrico de n elementos, S_n . A ação de S_n pode ser vista como a permutação das entradas de uma matriz diagonal, o que representa as diferentes formas de se diagonalizar uma dada matriz.

2.4 Ações polares

Sejam (ρ, θ) coordenadas polares em $\mathbb{R}^2/\{0\}$ e considere a ação de $SO(2)$ em \mathbb{R}^2 por multiplicação. Um ponto qualquer $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ pertence à órbita $SO(2)_{(\rho,0)}$. Portanto a reta $\theta = 0$ (ou qualquer reta passando pela origem) intersesta ortogonalmente todas as órbitas de $SO(2)$. É fácil ver que isto também vale para a ação de $SO(n)$ em \mathbb{R}^n (v. Figura 2.5). Ações polares são ações isométricas que possuem uma devida generalização desta propriedade.

Uma ação isométrica μ de um grupo de Lie G em uma variedade riemanniana M é **polar** se existe uma subvariedade imersa e completa Σ de M , chamada de **seção**, que intersesta ortogonalmente todas as órbitas de μ . Quando a seção é *flat*, dizemos que a ação é **hiperpolar**.

É trivial que, se Σ é uma seção de uma ação μ , então $\mu^g(\Sigma)$ é, também, uma seção de μ , para todo $g \in G$. Como Σ intersesta todas as órbitas de μ , temos que $\mu^G(\Sigma) = M$. Logo, para cada $x \in M$, existe uma seção contendo x . Além disso, se $x \in M$ é principal e Σ é a seção que contém x , é possível demonstrar que $\Sigma = \exp(\nu_x G(x))$.

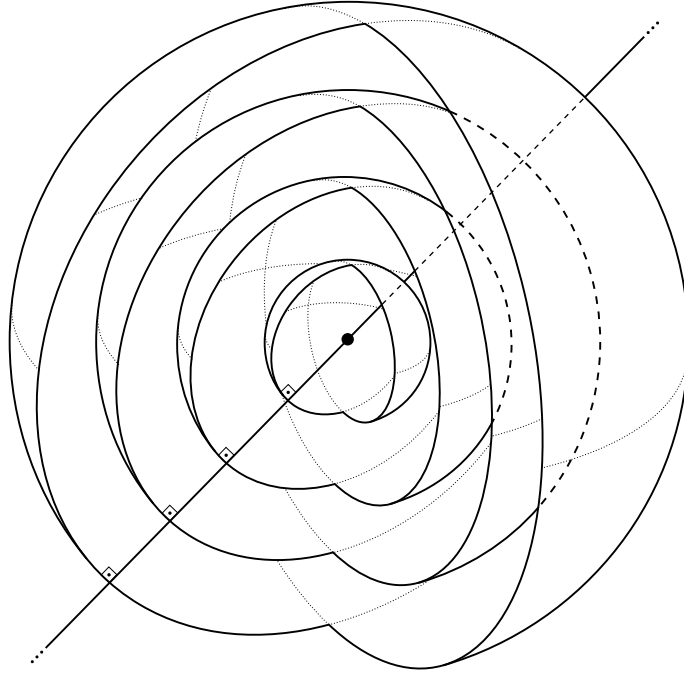


Figura 2.5: A ação de $SO(3)$ em \mathbb{R}^3 é polar.

Há também um resultado semelhante ao Teorema das órbitas principais que diz que $M_{\text{princ}} \cap \Sigma$ é um aberto denso de Σ .

Seja K um grupo de Lie compacto. Uma representação $\rho : K \rightarrow SO(n)$ é uma **representação polar** se a ação de $\rho(K)$ em \mathbb{R}^n é polar.

Exemplo 2.24. Note que o Teorema do toro máximo 2.21 mostra que a ação por conjugação de um grupo de Lie conexo e compacto com uma métrica bi-invariante é polar. Neste caso, seções são toros máximos. Mais que isso, a ação por conjugação é hiperpolar. Isto segue da Proposição 1.41, que implica que a curvatura seccional pelo plano gerado pelos vetores X e Y é

$$\kappa(X, Y) = \frac{1}{4} \frac{\|[X, Y]\|^2}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Como \mathfrak{t} é comutativa, isso mostra que T é *flat*.

Analogamente, o Corolário 2.22 mostra que a ação adjunta de um grupo de Lie conexo e compacto é polar. Este é um caso particular do resultado a seguir:

Proposição 2.25. *Representações isotrópicas de ações polares são polares.*

O próximo resultado nos dá uma importante informação geométrica a respeito

das seções de uma ação polar.

Proposição 2.26. *Toda seção de uma ação polar é totalmente geodésica.*

Demonstração: Seja Σ uma seção e Σ_{princ} o conjunto dos pontos principais em Σ . Seja $x \in \Sigma_{\text{princ}}$ e $\xi \in \nu_x \Sigma$. Então a ação induz um campo de Killing X em uma vizinhança aberta de x , com $X_x = \xi$, e a polaridade da ação implica que X é perpendicular a Σ . Seja \mathcal{S} o operador forma de Σ . Como X é campo de Killing, $\langle \mathcal{S}_\xi v, v \rangle = -\langle \nabla_v X, v \rangle = \langle \nabla_v X, v \rangle$, para todo $v \in T_x \Sigma$. Ou seja, $\langle \mathcal{S}_\xi v, v \rangle = 0$ para todo $v \in T_x \Sigma$. Pela equação de Weingarten, $\langle \mathcal{S}_\xi v, v \rangle = -\langle X, II(v, v) \rangle$, logo a segunda forma fundamental de Σ é identicamente nula em x . Portanto Σ é totalmente geodésica nos pontos em Σ_{princ} . Como Σ_{princ} é aberto denso de Σ , o resultado segue por continuidade. \square

Podemos definir uma generalização do grupo de Weyl da ação por conjugação no contexto de ações polares. Se temos uma ação polar $\mu : G \times M \rightarrow M$ e Σ é uma seção, sejam

$$N(\Sigma) = \{g \in G \mid \mu(g, \Sigma) \subset \Sigma\},$$

$$Z(\Sigma) = \{g \in G \mid \mu(g, x) = x, \forall x \in \Sigma\}.$$

Então $W(\Sigma) = N(\Sigma)/Z(\Sigma)$ é um grupo de Lie que age efetivamente em Σ , chamado de **grupo de Weyl generalizado**.

Se M é um grupo de Lie compacto, μ é a ação adjunta e Σ é um toro maximal, então o grupo de Weyl generalizado de Σ é o grupo de Weyl de M usual. O grupo de Weyl generalizado de uma seção Σ é um grupo discreto e, se Σ' é outra seção, então $W(\Sigma)$ é isomorfo a $W(\Sigma')$. Quando a ação é própria, vale ainda que $G(x) \cap \Sigma = W(x)$ quando $x \in \Sigma$ e, uma vez que Σ intersesta todas as órbitas, temos uma equivalência entre os quocientes Σ/W e M/G .

Teorema 2.27. *Seja μ uma ação polar própria de G em M , $x \in M$ e $\Sigma \ni x$ uma seção de μ . Então a ação $\tilde{\mu}$ de G_x em $\nu_x(G(x))$ induzida pela representação na fatia de G_x em S_x é polar, sendo $T_x \Sigma$ uma seção de $\tilde{\mu}$.*

Uma demonstração para o teorema acima pode ser vista em Palais e Terng [19].

Exemplo 2.28. Mais exemplos de ações polares são dados pelos espaços simétricos. Seja $M = G/K$ um espaço simétrico, $x \in M$ um ponto fixado e Σ uma subvariedade *flat* totalmente geodésica maximal contendo x . Então a ação de K em M é hiperpolar e Σ é uma seção. Tal ação é chamada de **ação isotrópica**.

Representações isotrópicas de espaços simétricos (portanto, em particular, as s -representações) também dão exemplos de ações hiperpolares. Neste caso, $T_x\Sigma$ é uma seção (sendo Σ a subvariedade *flat* anterior).

O teorema a seguir, por Dadok [9], classifica as representações polares via uma correspondência com as s -representações.

Teorema 2.29 (Dadok). *Toda representação polar em \mathbb{R}^n é órbita-equivalente a uma s -representação.*

2.5 Ações polares em variedades de Hadamard

Nesta seção demonstraremos o Teorema 2.32, um dos principais objetivos desse trabalho. Para isso, vejamos primeiro alguns resultados que utilizaremos em tal demonstração.

Uma ação isométrica de um grupo de Lie G em uma variedade riemanniana completa M é **variacionalmente completa** se, para toda órbita $G(x)$ e toda geodésica normal γ , todo campo $G(x)$ -Jacobi sobre γ que é tangente a alguma outra órbita é a restrição de um campo G -Killing a γ .

Seja μ uma ação polar própria de um grupo de Lie G em uma variedade de Hadamard M e Σ uma seção. Como Σ é totalmente geodésica, segue pela fórmula de Gauß que Σ é, também, uma variedade de Hadamard. Assim, como observamos na seção 1.3, Σ não possui pontos conjugados e, portanto, o teorema seguinte se aplica:

Teorema 2.30 (Conlon). *Uma ação polar própria cujas seções não possuem pontos conjugados é variacionalmente completa.*

A demonstração deste teorema é, em essência, devida a Conlon [8]. Ele supõe que as seções são *flat* e que a ação é de um grupo compacto, porém sua demonstração

pode ser adaptada para o caso enunciado acima.

Seja, agora, L uma subvariedade mergulhada e fechada de uma variedade de Hadamard M e $x \in M$ um ponto não focal de L . É possível provar que a função $f_x \doteq d^2(\cdot, x) : L \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse própria. Seja $L^t = f_x^{-1}([0, t])$, para $t \in [0, \infty)$. Pelas desigualdades de Morse 1.5, temos $b_i(L^t, \mathbb{F}) \leq \mu_i(f_x|_{L^t})$ para todo corpo \mathbb{F} , sendo $\mu_i(f_x|_{L^t})$ o número de pontos críticos de índice i de $f_x|_{L^t}$. Dizemos que L é **taut** em M se, para todo ponto x que não seja ponto focal de L , f_x é perfeita, isto é, se existe \mathbb{F} tal que $b_i(L^t, \mathbb{F}) = \mu_i(f_x|_{L^t})$ para todo $t \in [0, \infty)$. É demonstrado por Wiesenndorf [26] que, se uma subvariedade L é *taut* com respeito a um corpo \mathbb{F} , então L é *taut* com respeito a \mathbb{Z}_2 . Podemos considerar, portanto, apenas subvariedades \mathbb{Z}_2 -*taut*.

Por um resultado em Bott e Samelson [5], ações variacionalmente completas possuem órbitas *taut*:

Teorema 2.31 (Bott-Samelson). *Órbitas de ações variacionalmente completas são taut.*

Vamos, agora, ao nosso objetivo.

Teorema 2.32 (Töben). *Seja G um grupo de Lie tal que G/G^0 é compacto, μ uma ação polar própria de G em uma variedade de Hadamard M e $K \subset G$ um subgrupo compacto maximal. Então existe um difeomorfismo G -equivariante entre M e $G \times_K \mathbb{R}^n$, onde $n = \dim(M) - \dim(G/K)$. A ação de K em \mathbb{R}^n é polar.*

Demonstração: Pelo Teorema de Cartan 1.39, K fixa algum ponto $x \in M$, logo $K \subset G_x$ e, pela maximalidade, $K = G_x$.

Pelo Teorema de Malcev-Iwasawa 1.14, $G(x) \cong G/K$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim G(x)}$ e, em vista dos Teoremas 2.30 e 2.31, cada órbita de μ é *taut*. Portanto, para todo ponto $y \in M$ não focal de $G(x)$, temos

$$\mu_i(f_y|_{G(x)^t}) = b_i(\mathbb{R}^{\dim G(x)}, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0, \\ 0 & \text{se } i > 0, \end{cases}$$

para todo $t \in [0, \infty)$. Ou seja, $f_y|_{G(x)^t}$ tem apenas um ponto crítico, sendo este um ponto de mínimo.

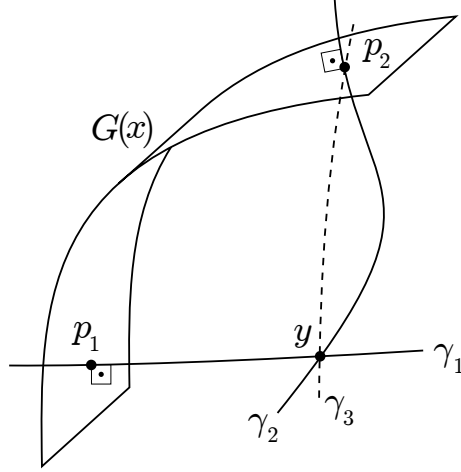


Figura 2.6: Argumento da Afirmação 2.34, com $i_0 = 2$.

Afirmação 2.33. *Seja $\gamma : [0, r] \rightarrow M$ um segmento de geodésica minimizante ligando um ponto $y \in M$ a um ponto $p \in G(x)$, com γ ortogonal a $G(x)$ em p . Então p é um ponto crítico da função $d_y^2|_{G(x)^{r+\epsilon}} : G(x)^{r+\epsilon} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $r = d(y, p)$ e $\epsilon > 0$.*

De fato, tome S a imagem da esfera de raio r centrada em 0 em $T_y M$ pelo difeomorfismo $\exp_y : T_y M \rightarrow M$. Então $p \in G(x) \cap S$. Como γ é ortogonal a $G(x)$, temos $T_p G(x) \subset \gamma'(r)^\perp = T_p S$. Mas $d_y^2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante sobre S , logo $T_p S \subset \ker(d_y^2)_p$. Portanto $d(d_y^2)_p(T_p G(x)) = \{0\}$. Para qualquer $\epsilon > 0$, então, p é ponto crítico de $d_y^2|_{G(x)^{r+\epsilon}}$.

Afirmação 2.34. *Todo ponto $y \in M$ que não é ponto focal de $G(x)$ tem exatamente uma pré imagem por $\exp^\perp : \nu G(x) \rightarrow M$.*

Suponha que y possui duas pré imagens (p_1, v_1) e (p_2, v_2) por \exp^\perp . Denotemos por γ_i a geodésica $\exp_{p_i}(tv_i)$, $t \in \mathbb{R}$. Como as órbitas são *taut*, $d_y^2|_{G(x)^s}$ tem apenas um ponto crítico, para todo $s \in [0, \infty)$. Logo, pela Afirmação 2.33, para algum $i_0 \in \{1, 2\}$, γ_{i_0} não é minimizante entre y e p_{i_0} . Como M é variedade de Hadamard, existe algum segmento de geodésica minimizante γ_3 entre y e p_{i_0} . Mas então temos duas geodésicas distintas passando por y e p_{i_0} , o que contradiz o fato de M ser de Hadamard (v. Figura 2.6).

Afirmação 2.35. \exp^\perp é difeomorfismo.

Seja $y \in M$ e B uma bola geodésica fechada de raio $d^2(G(x), y) + 1$ centrada em y . Pelo Corolário 2.6, $G(x)$ é propriamente mergulhada, logo $G(x) \cap B$ é um compacto.

Minimizando $d^2(\cdot, y)$ em $G(x) \cap B$ segue que \exp^\perp é sobrejetora. Já sabemos que \exp^\perp é injetora nos pontos não focais de $G(x)$. Suponha que $\gamma(t_0) \in M$ é um ponto focal de $G(x)$, sendo γ uma geodésica ortogonal a $G(x)$. Pela Proposição 1.30, existe um ponto não focal $\gamma(t_1)$, com $t_1 > t_0$. Pela Proposição 1.31, γ não minimiza a distância entre $\gamma(t_1)$ e $G(x)$, o que contradiz o fato de \exp^\perp ser injetora em $\gamma(t_1)$. Segue então que $G(x)$ não possui pontos focais e, portanto, \exp^\perp é um difeomorfismo local bijetor, ou seja, um difeomorfismo.

Sejam $S \doteq \exp(\nu_x G(x))$ e $n = \dim(S)$. Então S é fatia normal em x e temos $\text{Tub}(G(x)) = M$. Pelo Teorema da vizinhança tubular 2.11, existe um difeomorfismo G -equivariante entre $G \times_K S$ e M .

Via a representação na fatia, K age em $\nu_x(G(x)) \cong \mathbb{R}^n$. Perceba que $\exp_x^\perp : \nu_x(G(x)) \rightarrow S$ é K -equivariante, pois $\exp_x^\perp(d\mu^k|_S(v)) = \mu^k \exp_x^\perp(v)$. Isto nos permite definir $\Phi : G \times_K \mathbb{R}^n \ni [g, v] \mapsto [g, \exp_x^\perp(v)] \in G \times_K S$.

Afirmção 2.36. Φ é um difeomorfismo G -equivariante.

De fato, temos $[g, v] = [h, w]$ se, e somente se, existe $k \in K$ tal que $(g, v) = (hk^{-1}, d\mu^k|_S(w))$. Donde

$$\begin{aligned} \Phi[g, v] &= [g, \exp_x^\perp(v)] = [hk^{-1}, \exp^\perp d\mu^k|_S(w)] \\ &= [hk^{-1}, \mu^k \exp_x^\perp(w)] = k \cdot [h, \exp_x^\perp(w)] = [h, \exp_x^\perp(w)] \\ &= \Phi[h, w], \end{aligned}$$

logo Φ está bem definida e é injetora. É claro que Φ é sobrejetiva. Como $\Phi \circ \tilde{\pi} = \pi \circ (\text{id}_G \times \exp^\perp)$, onde $\pi : G \times S \rightarrow G \times_K S$ e $\tilde{\pi} : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow G \times_K \mathbb{R}^n$ são projeções de fibrados, temos que Φ é suave. Pelos mesmos argumentos obtém-se as mesmas conclusões para Φ^{-1} . Obviamente Φ é G -equivariante.

Compondo com o difeomorfismo dado pelo Teorema da vizinhança tubular 2.11, obtemos o difeomorfismo G -equivariante entre M e $G \times_K \mathbb{R}^n$ procurado.

A ação de K em \mathbb{R}^n , induzida pela representação na fatia de K em S , é polar, pelo Teorema 2.27. □

Observação 2.37. Podemos obter mais um fato sobre a ação de K em \mathbb{R}^n , uti-

lizando um pouco da teoria do Capítulo 3. De fato, o Exemplo 3.7 mostra que a decomposição de uma variedade riemanniana M pelas componentes conexas das órbitas de uma ação polar própria μ de um grupo de Lie G é uma folheação polar⁵ \mathcal{F}_G . É fácil ver que a folheação \mathcal{F}_{G^0} de M , obtida pela restrição de μ à componente conexa da identidade G^0 de G , e \mathcal{F}_G são iguais. Para o nosso caso, como K^0 é conexo, sua representação na fatia tem imagem em $\text{SO}(n)$ e é, portanto, uma representação polar. Podemos, daí, aplicar o Teorema de Dadok 2.29, obtendo que a ação de K_0 em \mathbb{R}^n é órbita-equivalente a uma s -representação. Concluimos, então, que há uma isometria de \mathbb{R}^n que leva as folhas de \mathcal{F}_K sobre as folhas da folheação dada pela s -representação. Obviamente, para o caso em que K é conexo, podemos concluir diretamente que a ação de K em \mathbb{R}^n é órbita-equivalente a uma s -representação.

⁵cf. Seção 3.2.

Capítulo 3

Folheações polares em variedades de curvatura não positiva

Neste capítulo introduziremos as folheações polares, também chamadas de folheações riemannianas singulares com seções. Como veremos, folheações singulares são uma generalização natural da partição de uma variedade por órbitas de uma ação suave. Nosso objetivo principal é demonstrar os Teoremas 3.18 e 3.20. O Teorema 3.20 é o resultado análogo ao Teorema 2.32 neste novo contexto.

As principais referências para este capítulo são Molino [18], Töben [24] e Alexandrino e Bettiol [3].

3.1 Folheações riemannianas singulares

Seja M uma variedade riemanniana e \mathcal{F} uma partição de M por subvariedades imersas conexas, chamadas de **folhas**. Para cada $p \in M$, seja L_p a (única) folha que contém p e seja $T\mathcal{F} = \bigsqcup_{p \in M} T_p L_p$. O conjunto $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ dos campos de vetores suaves em M com valores em $T\mathcal{F}$ forma um módulo sobre $C^\infty(M)$. Dizemos que \mathcal{F} é uma **folheação singular de M** se $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ age transitivamente em $T\mathcal{F}$, isto é, para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p \mathcal{F}$, existe $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ tal que $X(p) = v$. Esta propriedade é chamada de **condição de diferenciabilidade**.

Quando a dimensão de uma folha L é máxima, dizemos que L é uma **folha regular**. Caso contrário, L é uma **folha singular**. Analogamente, um ponto p é

um **ponto regular** se L_p for regular e, caso contrário, p é um **ponto singular**.

Classificando os pontos de M pela dimensão de suas folhas, obtemos uma decomposição

$$M = \bigcup_{i=0}^{\dim(M)} \mathfrak{S}_i,$$

onde \mathfrak{S}_i é a união dos pontos de M em folhas de dimensão i , chamado de **estrato de dimensão i de \mathcal{F}** .

Se as folhas de uma folheação \mathcal{F} de M forem de mesma dimensão, dizemos que \mathcal{F} é uma **folheação regular**. Neste caso uma definição equivalente de \mathcal{F} , através de um atlas especial em M , é mais comum. Mais precisamente, um **atlas folheado de dimensão k em M** é um atlas $(\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k})_{i \in I}$ de M tal que as mudanças de carta ψ_{ij} são localmente da forma $\psi_{ij}(x, y) = (f_{ij}(x, y), h_{ij}(y))$.

As cartas de um atlas folheado são chamadas de **cartas folheadas**. Um roteiro para obtermos uma carta folheada a partir da nossa definição é o seguinte. Seja \mathcal{F} uma folheação regular de dimensão k . Tome $p \in M$ e escolha uma base de $T_p L_p$. Nossa definição nos fornece campos $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ que, em p , coincidem com a base escolhida e, portanto, são linearmente independentes em um aberto $U \ni p$. Seja N_p uma subvariedade de dimensão $n - k$ transversa à L_p que contém p e está contida em U e considere φ_t^i o fluxo de X_i . Defina, para ε suficientemente pequeno,

$$f : B_\varepsilon(0) \times N_p \ni ((t_1, \dots, t_k), y) \mapsto \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_k}^k(y).$$

A menos de diminuir U , f é um difeomorfismo que leva $B_\varepsilon(0) \times \{y\}$ na componente conexa de $L_{f(0,y)}$ restrita a U que contém $F(0, y)$.

Exemplo 3.1. Qualquer submersão $f : M \rightarrow N$ define uma folheação $\mathcal{F}(f)$ de M , cujas folhas são as componentes conexas das fibras de f . Um atlas folheado para $\mathcal{F}(f)$ pode ser obtido utilizando-se a forma local canônica de f .

Exemplo 3.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento canônica da faixa de Möbius (aberta) M , isto é, $f(x, y) = f(x', y')$ se, e somente se, $x' - x \in \mathbb{Z}$ e $y' = (-1)^{x'-x}y$. A folheação trivial \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 por retas paralelas ao eixo Ox induz

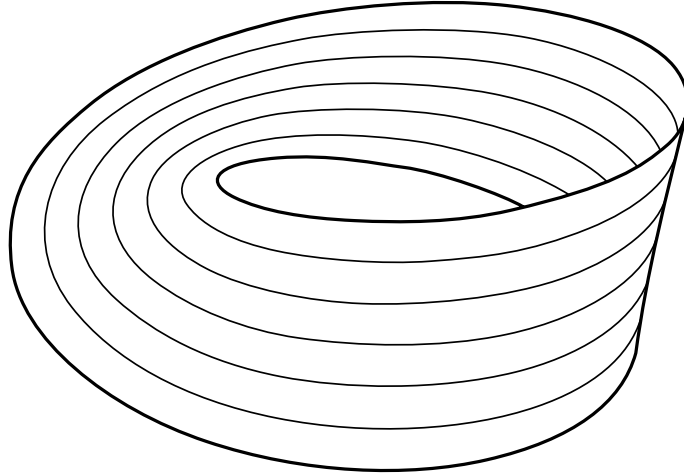


Figura 3.1: Uma folheação da faixa de Möbius.

uma folheação \mathcal{F} de M : se φ é uma carta folheada de \mathcal{T} tal que $f|_{\text{Dom}(\varphi)}$ é injetora, então $\varphi \circ (f|_{\text{Dom}(\varphi)})^{-1}$ é uma carta folheada de \mathcal{F} (v. Figura 3.1).

Outras definições equivalentes para folheações regulares podem ser encontradas em Moerdijk e Mrčun [17].

Exemplo 3.3. Como vimos no Corolário 2.6, as órbitas $G(x)$ de uma ação de um grupo de Lie G numa variedade M são subvariedades imersas sem auto-interseções. Além disso, como $G(x)$ é imagem de G/G_x por uma imersão injetora, para cada $v \in T_x G(x)$, existe $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que $d(\mu_x)_e \xi = v$. Pela Proposição 1.19, o campo X^ξ induzido pela ação é tangente às órbitas e satisfaz $X_x^\xi = v$. Isso mostra que a decomposição de uma variedade pelas componentes conexas das órbitas de uma ação é uma folheação singular.

Dadas (M_i, \mathcal{F}_i) , $i = 1, 2$, folheações singulares, obtemos uma folheação singular \mathcal{F} em $M_1 \times M_2$ definindo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \doteq \{L_1 \times L_2 \mid L_i \in \mathcal{F}_i\},$$

chamada de **folheação produto de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2** . Sejam $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ e $v = (v_1, v_2) \in T_p(L_{p_1} \times L_{p_2}) \cong T_{p_1}L_{p_1} \oplus T_{p_2}L_{p_2}$. Como \mathcal{F}_i é folheação singular, existe um campo $X_i \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_i)$ tal que $X_i(p_i) = v_i$. A folheação \mathcal{F} tem a condição de diferenciabilidade satisfeita para v , portanto, pelo campo $X = (X_1, X_2)$.

No caso de uma folheação singular em uma variedade riemanniana, é interessante que a folheação se relacione com a métrica riemanniana de alguma forma. Este é nosso assunto no restante desta seção.

Uma métrica riemanniana em uma variedade M é **adaptada** à uma folheação singular \mathcal{F} se toda geodésica de M que é ortogonal a alguma folha é ortogonal a todas as folhas que ela intersecta. Neste caso, dizemos que \mathcal{F} é **transnormal**.

A transnormalidade implica que as folhas sejam **localmente equidistantes**: se $L, L' \in \mathcal{F}$ e $p \in L$, então existe uma vizinhança $U \subset L$ de p tal que $d(q, L') = d(p, L')$, para todo $q \in U$. Além disso, se as folhas de \mathcal{F} forem propriamente mergulhadas¹, dizemos que \mathcal{F} é **própria**, e, neste caso, vale que as folhas são (globalmente) equidistantes.

Uma folheação singular transnormal \mathcal{F} em uma variedade riemanniana M é chamada de **folheação riemanniana singular**. Se todas as folhas de \mathcal{F} são regulares, dizemos simplesmente que \mathcal{F} é uma **folheação riemanniana**.

Exemplo 3.4. Já vimos no Exemplo 3.3 que a decomposição de uma variedade por órbitas de uma ação é uma folheação singular. O item (1) do Teorema 2.19 mostra que a partição de uma variedade pelas componentes conexas das órbitas de uma ação própria isométrica é uma folheação riemanniana singular. Note ainda que o item (5) do mesmo teorema nos diz que podemos reconstruir tal folheação a partir de uma órbita principal, tomando todas as subvariedades paralelas a esta.

Uma importante ferramenta para o estudo de folheações riemannianas é um resultado que fornece, para qualquer ponto, uma vizinhança com propriedades bastante convenientes, que apresentaremos agora. Mais detalhes neste tópico são encontrados em Molino [18]. Seja \mathcal{F} uma folheação riemanniana singular em M e $p \in M$. Tome $\varepsilon > 0$ e P um aberto de L_p conexo e relativamente compacto que contém p . Chamamos P de **placa contendo** p . Sejam $N^\varepsilon(P) = \{X \in \nu P \mid \|X\| < \varepsilon\}$ e $T = \exp^\perp(N^\varepsilon(P))$. Para ε suficientemente pequeno, \exp^\perp é um difeomorfismo em $N^\varepsilon(P)$.

Seja $\pi : T \rightarrow P$ a projeção ortogonal. Para cada $q \in P$, chamamos $S_q = \pi^{-1}(q)$ de **fatia em** q . Observe que, para todo $r \in T$, $\pi^{-1}(\pi(r))$ é uma fatia que contém r .

¹i.e., mergulhadas e fechadas.

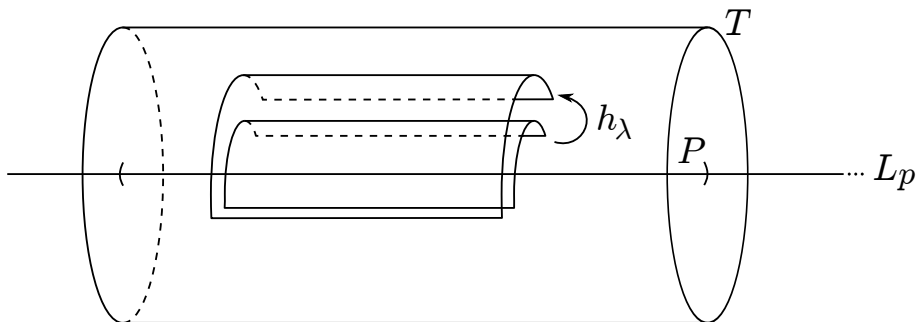


Figura 3.2: Transformação homotética de Molino.

A condição de diferenciabilidade para folheações singulares garante que, a menos de diminuir ε , as folhas intersectam as fatias S_q transversalmente. Neste caso, dizemos que a vizinhança T de P é uma **vizinhança distinguida**.

Lema 3.5. *A projeção π é uma submersão sobrejetora e induz uma folheação em T , cujas folhas são as fatias.*

Em uma vizinhança distinguida T de P podemos definir uma aplicação tipo homotetia h_λ dada por

$$h_\lambda(\exp^\perp(v)) = \exp^\perp(\lambda v),$$

para todo $v \in N^\varepsilon(P)$.

Lema 3.6 (Transformação homotética de Molino). *A aplicação h_λ , para $\lambda \neq 0$, leva placas em placas e, portanto, preserva \mathcal{F} em T (v. Figura 3.2).*

3.2 Folheações polares e isoparamétricas

Seja \mathcal{F} uma folheação riemanniana em uma variedade riemanniana M e $p \in M$ um ponto regular. Uma **seção em p** é subvariedade imersa, completa e totalmente geodésica Σ_p satisfazendo $T_p\Sigma = \nu_p L_p$ e que intersecta ortogonalmente todas as folhas.

Dizemos que \mathcal{F} é uma **folheação polar**², quando \mathcal{F} admite uma seção para todo ponto regular. Mais precisamente, para todo $p \in M$ regular, $\Sigma_p \doteq \exp_p(\nu_p L_p)$ é uma seção.

²ou folheação riemanniana singular com seções.

Exemplo 3.7. Como já sabemos, a partição \mathcal{F} de uma variedade pelas componentes conexas das órbitas de uma ação própria isométrica $\mu : G \times M \rightarrow M$ é uma folheação riemanniana singular. Observamos também que, se $x \in M$ é principal, então $G(x)$ tem dimensão máxima e, portanto, suas componentes conexas são folhas regulares de \mathcal{F} . Além disso, se μ for polar, vimos que $\Sigma_x = \exp(\nu_x G(x))$, onde Σ_x é a seção que contém x . Logo, temos $T_x \Sigma_x = \nu_x L_x$, para cada ponto regular $x \in M$. Em vista da Proposição 2.26, as seções de μ são totalmente geodésicas. Portanto a partição de uma variedade riemanniana pelas componentes conexas das órbitas de uma ação polar própria é uma folheação polar.

Uma classe bastante estudada da folheações polares é a das folheações isoparamétricas. Seja L uma subvariedade isoparamétrica em uma forma espacial $M(k)$. Uma partição dada por $\mathcal{F} = \{L_\xi \mid \xi \text{ campo normal paralelo sobre } L\}$ é uma folheação polar. Uma tal folheação é chamada de **folheação isoparamétrica**. Quando as folhas de \mathcal{F} são compactas, dizemos que \mathcal{F} é uma **folheação isoparamétrica compacta**. Vale também, como recíproca do fato de \mathcal{F} ser polar, que folheações polares em formas espaciais são isoparamétricas. A definição de subvariedade isoparamétrica pode ser vista como boas condições para que a partição \mathcal{F} acima seja, de fato, uma folheação.

Vejamos agora uma generalização do conceito de subvariedade isoparamétrica, introduzida por Terng e Thorbergsson [22]. Uma subvariedade imersa e conexa L de uma variedade riemanniana completa M é **equifocal** se as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) O fibrado normal $\nu(L)$ é (globalmente) *flat*, isto é, $\nu(L)$ tem holonomia trivial;
- (2) Para cada $p \in L$, existe uma subvariedade imersa, completa e totalmente geodésica σ tal que $\nu_p L = T_p \sigma$;
- (3) Para cada campo normal paralelo ξ em L , a diferencial da aplicação ponto final $\eta_\xi : L \rightarrow M$ tem posto constante.

Dizemos que L é **localmente equifocal** se, para cada $p \in L$, existe uma vizinhança $U \subset L$ de p tal que U é uma subvariedade equifocal. Alexandrino [2] mostra que as folhas regulares de folheações polares possuem esta propriedade:

Teorema 3.8. *As folhas regulares de uma folheação polar em uma variedade riemanniana completa M são localmente equifocais.*

Uma consequência disso é o resultado a seguir.

Corolário 3.9. *Seja \mathcal{F} uma folheação polar em uma variedade completa M , L uma folha regular, $\tau : [0, 1] \rightarrow L$ uma curva suave por partes em L e ξ um campo normal paralelo³ sobre τ . Então a curva $\exp_{\tau(t)}(\xi)$ pertence a $L_{\exp_{\tau(0)}(\xi)}$.*

Seja \mathcal{F} uma folheação polar em uma variedade riemanniana completa M . Sejam $p \in M$, P uma placa contendo p , T uma vizinhança distinguida de P e S_p uma fatia em p . Se Σ é uma seção de \mathcal{F} , chamamos cada componente conexa σ de $T \cap \Sigma$ de **seção local**. As interseções transversais $L \cap S_p$, onde $L \in \mathcal{F}$, induzem uma folheação singular em S_p , e a codimensão de uma folha $L \cap S_p$ é igual à codimensão de L em M . Mais que isso, temos os seguintes resultados, que também podem ser vistos em Alexandrino [2].

Proposição 3.10. *Seja \mathcal{F} uma folheação polar em uma variedade riemanniana completa M e $p \in M$. Então:*

- (1) $S_p = \bigcup_{\sigma \in \Lambda(p)} \sigma$, onde $\Lambda(p)$ é o conjunto das seções locais que contém p ;
- (2) $S_x \subset S_p$ para todo $x \in S_p$;
- (3) $\mathcal{F} \cap S_p = \{L \cap S_p \mid L \in \mathcal{F}\}$ é uma folheação polar de S_p com a métrica induzida de M .

Podemos levantar $\mathcal{F} \cap S_p$ a uma folheação singular \mathcal{G} de uma bola $\mathbb{B}_\varepsilon \subset T_p S_p = \nu_p L_p$ onde a aplicação \exp_p^\perp seja um difeomorfismo (v. Figura 3.3). A folheação \mathcal{G} é invariante por homotetias, pelo Lema da transformação homotética de Molino 3.6 aplicado a \mathcal{F} em p . Podemos, então, estender \mathcal{G} a todo o espaço $\nu_p L_p$. A folheação singular assim obtida é denotada por \mathcal{F}_p . O teorema a seguir, por Alexandrino [2], nos diz que \mathcal{F}_p é bem mais que uma folheação singular:

Teorema 3.11 (Teorema da fatia). *A folheação \mathcal{F}_p é isoparamétrica. As seções de \mathcal{F}_p são da forma $T_p \Sigma$, onde Σ é uma seção de \mathcal{F} .*

³com respeito à conexão normal

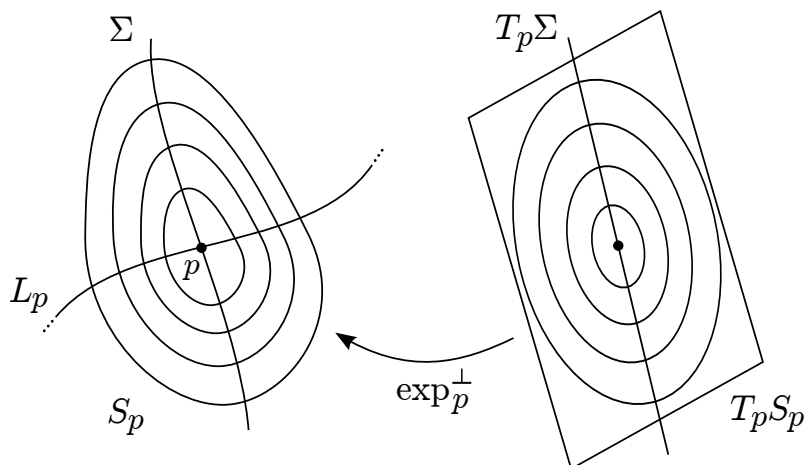


Figura 3.3: A folheação \mathcal{G} .

Seja $T_p\Sigma$ uma seção de \mathcal{F}_p . É também demonstrado em Alexandrino [2] que o conjunto dos pontos singulares em $T_p\Sigma$ é uma união finita de hiperplanos pela origem. Definimos o **grupo de Weyl generalizado** $W(T_p\Sigma)$ como sendo o grupo gerado pelas reflexões por estes hiperplanos. Assim definido, $W(T_p\Sigma)$ é um exemplo de grupo de Coxeter, que veremos logo à frente. Denotemos por $\text{Fix}(W(T_p\Sigma))$ o conjunto dos pontos fixos pela ação do grupo de Weyl generalizado $W(T_p\Sigma)$ em $T_p\Sigma$.

Lema 3.12. *Seja \mathcal{F} uma folheação isoparmétrica compacta de \mathbb{R}^n e Σ uma seção. Se I denota a interseção de todas as seções de \mathcal{F} pela origem e \mathfrak{S}_0 o estrato das folhas de dimensão 0, então $\text{Fix}(W(\Sigma)) = I = \mathfrak{S}_0$.*

3.3 Holonomia transversal

Nesta seção veremos como obter uma generalização da idéia do grupo de Weyl generalizado, no contexto de folheações polares. Esta ferramenta nos será de grande valia no estudo das folheações polares em variedades de curvatura não positiva.

Seja L uma folha regular de uma folheação polar \mathcal{F} e $\tau : [0, 1] \rightarrow L$ uma curva suave por partes. Se Σ é uma seção de \mathcal{F} e τ satisfaz $\tau(0), \tau(1) \in L \cap \Sigma$, via o transporte paralelo com respeito à conexão normal em L , obtemos uma aplicação $\Phi_\tau : T_{\tau(0)}\Sigma = \nu_{\tau(0)}L \rightarrow \nu_{\tau(1)}L = T_{\tau(1)}\Sigma$ (v. Figura 3.4). O Teorema 3.8 mostra que as folhas regulares de uma folheação polar em uma variedade completa são

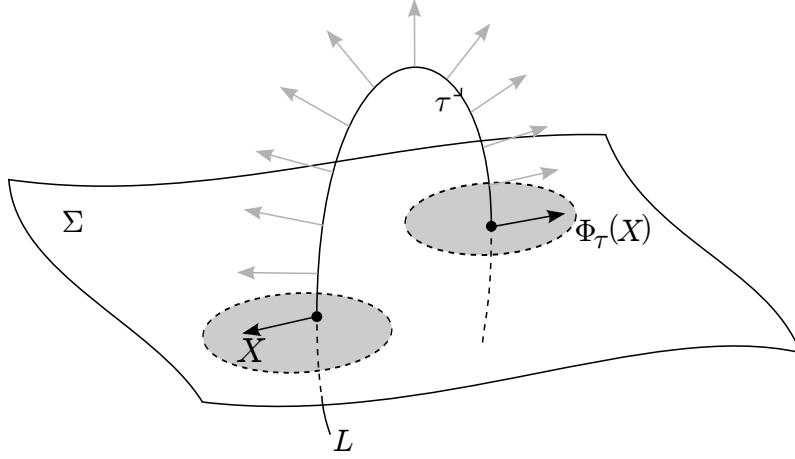


Figura 3.4: A aplicação Φ_τ .

localmente equifocais, o que implica, em particular, que a conexão normal ∇^\perp em νL é localmente *flat*, donde Φ_τ depende apenas da classe de homotopia $[\tau]$ de τ .

Em vista do Corolário 3.9, para $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante, aplicando a exponencial obtemos uma aplicação $\exp_{\tau(0)}^\perp(B_\varepsilon(0)) \rightarrow \exp_{\tau(1)}^\perp(B_\varepsilon(0))$ que preserva as folhas. Verifica-se ainda que esta aplicação é uma isometria e que ela pode ser estendida a uma isometria $\varphi_{[\tau]} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ que continua preservando as folhas⁴.

O conjunto

$$\Gamma_\Sigma = \{\varphi_{[\tau]} \mid \tau : [0, 1] \rightarrow L \text{ satisfaz } \tau(0), \tau(1) \in L \cap \Sigma\}$$

é, então, um subgrupo de $\text{Iso}(\Sigma)$, que chamamos de **grupo de holonomia transversal**.

Proposição 3.13. *Seja \mathcal{F} uma folheação polar em uma variedade completa M , L uma folha regular, Σ uma seção e Γ_Σ o respectivo grupo de holonomia transversal. Então:*

- (1) Γ_Σ não depende da escolha da folha regular L ;
- (2) Para todo $p \in \Sigma$ vale $\Gamma(p) = L_p \cap \Sigma$;
- (3) Se Σ' é outra seção então $\Gamma_{\Sigma'}$ e Γ_Σ são conjugados por uma isometria $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ que preserva as folhas;

⁴mais detalhes em Töben [23].

(4) No caso de uma folheação por órbitas de uma ação polar, Γ_Σ coincide com o grupo de Weyl generalizado $W(\Sigma)$.

Observação 3.14. Além das propriedades acima, o grupo Γ_Σ se relaciona com o grupo de Weyl generalizado $W(T_p\Sigma)$ da folheação isoparamétrica \mathcal{F}_p , para $p \in \Sigma$. De fato, $W(T_p\Sigma)$ pode ser visto com um subgrupo de Γ_Σ por meio da extensão de seus elementos a isometrias de Σ . Um roteiro de como isso é feito é o seguinte⁵: é possível mostrar que $W(T_p\Sigma)$ coincide com o grupo de holonomia de uma folha regular de \mathcal{F}_p . Um elemento de $W(T_p\Sigma)$ corresponde, então, à aplicação de holonomia \tilde{h} ao longo de uma curva $\tilde{\gamma}$ em uma folha regular \tilde{L} . Aplicando a exponencial, obtemos uma curva γ em uma folha $L \cap \mathbb{B}$ de $\mathcal{F} \cap \mathbb{B}$, onde \mathbb{B} é uma bola centrada em x suficientemente pequena. A aplicação de holonomia h de $L \cap \mathbb{B}$ ao longo de γ coincide com \tilde{h} (a menos de conjugação com \exp). Seja H a aplicação de holonomia de L ao longo de γ . De acordo com Töben [23], h é uma isometria de Σ e se restringe a \tilde{h} em $\mathbb{B} \cap \Sigma$. Neste sentido, escrevemos $W(T_x\Sigma) \subset \Gamma_\Sigma$.

Quando \mathcal{F} é própria, o conjunto $\{x_i\}_{i \in I} = L \cap \Sigma$ é discreto. Chamamos

$$\mathcal{D}_{x_i} = \{q \in \Sigma \mid d_\Sigma(x_i, q) < d_\Sigma(x_j, q) \text{ para todo } j \neq i\}$$

de **domínio de Dirichlet de x_i** .

Proposição 3.15. *A ação de Γ em Σ é propriamente descontínua. Além disso, Γ age transitivamente no conjunto dos domínios de Dirichlet $\{\mathcal{D}_{x_i}\}_{i \in I}$ e efetivamente se L tem holonomia normal trivial⁶.*

Os domínios de Dirichlet, portanto, desenvolvem papéis análogos às câmaras de Weyl nesse novo contexto.

Vejamos agora algumas propriedades do grupo de holonomia transversal para o caso específico de folheações polares em variedades de Hadamard.

Seja H um hiperplano de \mathbb{R}^n , isto é, uma translação de um subespaço linear de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}^n . Denotamos por $R_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a reflexão por H . Um **grupo**

⁵cf. Alexandrino [3] para as definições de aplicação e grupo de holonomia de uma folha.

⁶i.e., o grupo de holonomia de L com respeito à conexão normal ∇^\perp é trivial.

de Coxeter é um subgrupo W de $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ gerado por uma família de reflexões $\{R_{H_i}\}_{i \in I}$ tal que a topologia induzida em W (de $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$) é discreta e a ação de W em \mathbb{R}^n é própria. Também diremos que uma família de hiperplanos “gera” W , ficando subentendido que nos referimos às reflexões pelos hiperplanos H_i . Seja v_i um vetor normal a H_i , para cada i . Definimos o **posto de** $\{H_i\}$ (assim como o posto do grupo de Coxeter gerado por $\{H_i\}$, se for o caso) como sendo $\dim(\text{span}\{v_i\}_{i \in I})$. Mostra-se que um grupo de Coxeter de posto k é sempre isomorfo a um subgrupo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^k)$.

As reflexões por uma coleção localmente finita de hiperplanos sempre geram um grupo de Coxeter W , cuja ação permuta tais hiperplanos.

Seja W um grupo de Coxeter de posto k em $\text{Iso}(\mathbb{R}^k)$ gerado por $\{H_i\}_{i \in I}$ e U uma componente conexa de $\mathbb{R}^k \setminus \bigcap_{i \in I} H_i$. Então U é um domínio fundamental⁷ de W , chamado de **câmara de** W .

Vejam um pouco sobre a fronteira de um domínio de Dirichlet. Seja \mathcal{F} uma folheação polar própria em uma variedade de Hadamard M , Σ uma seção e Γ o respectivo grupo de holonomia transversal. Para $x, y \in \Sigma$, seja $H_{x,y} \doteq \{z \in \Sigma \mid d(x, z) = d(y, z)\}$ o conjunto dos pontos equidistantes de x e y . Então $H_{x,y}$ é uma superfície que bissecta Σ .

Seja $\{x_i\}_{i \in I} = L \cap \Sigma$, onde L é uma folha regular. O conjunto $F = H_{x_i, x_j} \cap \overline{\mathcal{D}_{x_i}}$ é chamado de **parede** de \mathcal{D}_{x_i} quando F contém um aberto não vazio de H_{x_i, x_j} . Dois domínios de Dirichlet são ditos **vizinhos** quando eles possuem uma parede em comum (v. Figura 3.5).

Fixado x_i , seja \mathcal{D}_{x_j} um domínio de Dirichlet vizinho de \mathcal{D}_{x_i} e suponha que L tem holonomia normal trivial. Pela Proposição 3.15, existe um único elemento $g \in \Gamma$ tal que $g(\mathcal{D}_{x_i}) = \mathcal{D}_{x_j}$. Neste caso, $H_{x_i, g(x_i)}$ é o conjunto dos pontos fixos de g , e Γ é gerado pelos elementos g_j tais que $\{g_j(\mathcal{D}_{x_i})\}_j$ é o conjunto dos domínios vizinhos de \mathcal{D}_{x_i} .

Proposição 3.16. *Seja \mathcal{F} uma folheação polar própria em uma variedade de Hadamard M , Σ uma seção e Γ o grupo de holonomia transversal agindo em Σ . Então*

(1) Γ é isomorfo a um grupo de Coxeter finito;

⁷i.e., cada órbita de W intersecta \overline{U} exatamente uma vez.

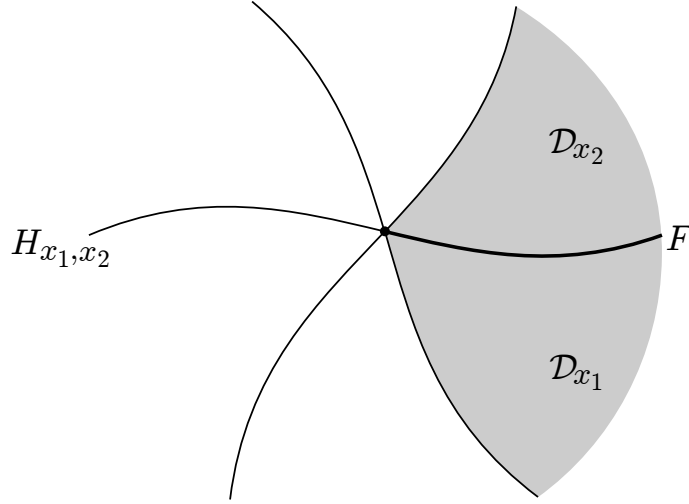


Figura 3.5: Domínios de Dirichlet vizinhos.

(2) O conjunto $\text{Fix}(\Gamma)$, dos pontos fixos por Γ , é uma subvariedade conexa e totalmente geodésica de Σ .

A Proposição 3.16 é uma reunião de resultados em Töben [24] com uma aplicação do Teorema 2.8 em [1].

Proposição 3.17. *Seja \mathcal{F} uma folheação polar própria em uma variedade de Hadamard M e \mathfrak{S} o estrato das folhas de menor dimensão de \mathcal{F} . Seja Σ uma seção e Γ o respectivo grupo de holonomia transversal. Então $\mathfrak{S} \cap \Sigma = \text{Fix}(\Gamma)$. Além disso, qualquer folha $L \in \mathfrak{S}$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim(L)}$ e $\exp^\perp : \nu L \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: Seja $p \in \text{Fix}(\Gamma)$. Como Σ intersesta todas as folhas, existe $x \in \mathfrak{S} \cap \Sigma$. Considere \mathcal{F}_x a folheação isoparamétrica de $\nu_x L_x$ induzida por \mathcal{F} e seja $W(T_x \Sigma)$ seu grupo de Weyl generalizado. Estendendo os elementos de $W(T_x \Sigma)$ a isometrias de Σ temos⁸ $W(T_x \Sigma) \subset \Gamma_x \subset \Gamma_p = \Gamma$. Seja I_x a interseção de todas as seções por x . Pelo Teorema da fatia 3.11 mais o Lema 3.12, temos $I_x = \text{Fix}(W(T_x \Sigma))$, logo I_x contém a geodésica γ_{px} . Isto é, toda seção que contém x também contém p . Sejam S_p e S_x fatias em p e x , respectivamente. Pela Proposição 3.10 (1), $S_x = \bigcup_{\sigma \in \Lambda(x)} \sigma$. Logo $\dim(S_p) = \dim(S_x)$ e, portanto, $p \in \mathfrak{S}$. Isso mostra que $\text{Fix}(\Gamma) \subset \mathfrak{S} \cap \Sigma$.

Seja L uma folha que contém um ponto fixo $p \in \text{Fix}(\Gamma)$. Já sabemos que L é de dimensão mínima. Mostremos que $\exp^\perp : \nu L \rightarrow M$ é um difeomorfismo. A

⁸cf. Observação 3.14.

sobrejetividade segue pois as folhas são propriamente mergulhadas⁹. Suponha que $\exp_{x_1}^\perp(v_1) = \exp_{x_2}^\perp(v_2) = q$ e sejam Σ_1 e Σ_2 seções às quais v_1 e v_2 são, respectivamente, tangentes. Então $q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Seja Γ^i o grupo de holonomia transversal relativo a Σ_i . Então x_i é ponto fixo de Γ^i . De fato, pela Proposição 3.13 (3), se $\varphi \in \Gamma^i$ então $\varphi = \Psi \circ \tilde{\varphi} \circ \Psi^{-1}$, onde $\tilde{\varphi} \in \Gamma$ e $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma_i$ é uma isometria que preserva as folhas (em particular, $\Psi(x_i) = p$). Seja $W(T_q\Sigma_1)$ o grupo de Weyl generalizado de \mathcal{F}_q agindo em $T_q\Sigma_1$. Como acima, podemos considerar $W(T_q\Sigma_1) \subset \Gamma_q^1$. Agora, $W(T_q\Sigma_1) \subset \Gamma_q^1 \subset \Gamma_{x_1}^1 = \Gamma^1$. Logo a geodésica γ_{x_1q} é fixa pela ação de Γ_q^1 e, portanto, também pela ação de $W(T_q\Sigma_1)$. Mas $\text{Fix}(W(T_q\Sigma_1))$ é a interseção de todas as seções contendo q . Em particular, temos que γ_{x_1q} está contida em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, o que implica que $x_1 \in \Sigma_2$. Então L intersesta Σ_2 em x_1 e x_2 . Mas $L \cap \Sigma_2 = \Gamma^2(x_2) = \{x_2\}$, pois $x_2 \in \text{Fix}(\Gamma^2)$, logo $x_1 = x_2$. Como Σ_2 é uma variedade de Hadamard, $\gamma_{x_1q} = \gamma_{x_2q}$ e, portanto, $v_1 = v_2$ e \exp^\perp é injetora.

Tendo a injetividade de \exp^\perp , o mesmo argumento da Afirmação 2.35 mostra que M não possui pontos focais. Assim, $\exp^\perp : \nu L \rightarrow M$ é um difeomorfismo.

Fixemos $q \in M$. Então a função $f_q \doteq d^2(\cdot, q) : L \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse própria satisfazendo as condições da Observação 1.4, portanto L é difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim(L)}$.

Resta mostrar que $\mathfrak{S} \cap \Sigma \subset \text{Fix}(\Gamma)$. Seja $q \in \mathfrak{S} \cap \Sigma$ e escolha $p \in \text{Fix}(\Gamma)$. Já sabemos que $\exp^\perp : L_p \rightarrow M$ é um difeomorfismo, logo M é uma vizinhança distinguida (global) de L_p . Em particular, qualquer folha intersesta as fatias de L_p transversalmente. É fácil ver que a restrição ρ da projeção ortogonal $M \rightarrow L_p$ a L_q é uma aplicação sobrejetora suave. Queremos mostrar que ρ é um difeomorfismo. Para $p' \in L_p$ temos $\rho^{-1}(p') = S_{p'} \cap L_q$, sendo $S_{p'} = \exp^\perp(\nu_{p'}L_p)$ a fatia global de L_p por p' . Pela Proposição 3.10 (1), segue que $S_{p'}$ é a união de todas as seções por p' . Seja Σ' um tal seção. Então $L_q \cap \Sigma' = \Gamma'(q')$, onde Γ' é o grupo de holonomia transversal agindo em Σ' e $q' \in L_q \cap \Sigma'$. Seja $I_{p'}$ a interseção de todas as seções por p' e suponha que existe um ponto em $\Gamma'(q')$ que não está em $I_{p'}$. Então temos $\dim(S_{p'} \cap L_q) > 0$, o que contradiz o fato da dimensão de L_q ser mínima. Logo $S_{p'} \cap L_q \subset I_{p'}$ e, portanto, $S_{p'} \cap L_q = \Gamma'(q')$. Isso implica que $\rho : L_q \rightarrow L_p$ é

⁹cf. Afirmação 2.35.

uma aplicação de recobrimento de grau finito $\#\Gamma'(q') = \#\Gamma(q)$. Mas, como L_p é difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim(L_p)}$, segue que ρ é um difeomorfismo. Em particular, $\#\Gamma(q) = 1$, ou seja, $\Gamma(q) = \{q\}$, logo $q \in \text{Fix}(\Gamma)$. \square

3.4 Folheações polares em variedades de curvatura não positiva

Esta seção encerra este trabalho com as demonstrações dos Teoremas 3.18 e 3.20, como foi proposto.

Teorema 3.18. *Uma folheação polar própria em uma variedade riemanniana compacta com curvatura não positiva M não possui folhas singulares.*

Demonstração: Suponhamos *ad absurdum* que \mathcal{F} é uma folheação polar própria em M com folhas singulares. O recobrimento universal \widetilde{M} de M é uma variedade de Hadamard com a métrica induzida pela aplicação de recobrimento $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$.

Afirmção 3.19. *Podemos levantar \mathcal{F} a uma folheação polar $\widetilde{\mathcal{F}}$ em \widetilde{M} via π .*

De fato, para cada $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ em \widetilde{M} , existe uma vizinhança $\widetilde{U} \ni \tilde{p}$ tal que $\pi|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \rightarrow U \doteq \pi(\widetilde{U})$ é uma isometria. Considere $V_{\tilde{p}} \doteq (\pi|_{\widetilde{U}})^{-1}(U \cap L_p)$ a placa que contém \tilde{p} . É fácil ver que se $V_{\tilde{p}} \cap V_{\tilde{q}} \neq \emptyset$, então p e q pertencem à mesma folha de \mathcal{F} . Colamos as placas para obter uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}$, como segue. Definimos $L_{\tilde{p}}$ como sendo o conjunto dos pontos \tilde{q} para os quais existe um conjunto de placas $\{V_i\}_{i=1, \dots, k_{\tilde{q}}}$ tais que $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, $V_1 = V_{\tilde{p}}$ e $V_{k_{\tilde{q}}} = V_{\tilde{q}}$. Como \mathcal{F} é própria, suas folhas são mergulhadas. A composição de π com cartas fatiadas para L_p dão cartas fatiadas para $L_{\tilde{p}}$. Logo as folhas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ são, de fato, subvariedades mergulhadas de \widetilde{M} . Dado $v \in T_{\tilde{p}}L_{\tilde{p}}$, sabemos que existe um campo $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ que estende $d\pi_{\tilde{p}}(v)$. Definindo \widetilde{X} localmente como $\widetilde{X}|_{\widetilde{U}} = d(\pi|_{\widetilde{U}})^{-1}(X|_U)$ obtemos um campo suave em $\mathcal{T}(\widetilde{\mathcal{F}})$ que estende v . Por fim, como M é de Hadamard, qualquer seção Σ de \mathcal{F} é mergulhada, e a mesma construção para a obtenção das folhas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ se aplica para obtermos uma seção $\widetilde{\Sigma}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Seja $L_p \in \widetilde{\mathcal{F}}$ uma folha de dimensão mínima, digamos ℓ . Uma vez que M é compacta, podemos tomar $B_r(p)$ uma bola geodésica centrada em p com $r > \text{diam}(M)$. Então as translações de $B_r(p)$ pela ação de

$$\text{Aut}(\pi) = \{\rho : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \mid \pi \circ \rho = \pi\} \cong \pi_1(M)$$

cobrem \widetilde{M} . Note que $\text{Aut}(\pi)$ preserva $\widetilde{\mathcal{F}}$ por definição, logo L_p é sempre aplicada sobre uma folha do estrato singular \mathfrak{S} das folhas de dimensão mínima ℓ .

Seja Σ uma seção por p . Pelas Proposições 3.16 e 3.17, $\mathfrak{S} \cap \Sigma$ é uma subvariedade conexa e totalmente geodésica de Σ . Note que $\text{codim}(\mathfrak{S} \cap \Sigma) \geq 1$, uma vez que \mathcal{F} possui folhas regulares e singulares. Existe, então, $q \in \Sigma$ tal que $d_\Sigma(q, \mathfrak{S} \cap \Sigma) > r$. A distância de q à órbita $\text{Aut}(\pi)(p)$ atinge seu mínimo em um ponto $p' \in \text{Aut}(\pi)(p)$. Temos, portanto,

$$d(q, \text{Aut}(\pi)(p)) = d(q, p') \geq d(q, L_{p'}). \quad (3.1)$$

Por outro lado, existe também $p'' \in L_{p'}$ tal que $d(q, L_{p'}) = d(q, p'')$. Como $\Sigma \ni q$ é totalmente geodésica e $L_{p'} \cap \Sigma \neq \emptyset$, temos $p'' \in \Sigma$, donde

$$d(q, p'') \geq d_\Sigma(q, \mathfrak{S} \cap \Sigma) > r. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2) segue que $d(q, \text{Aut}(\pi)(p)) > r$. Então $q \notin \text{Aut}(\pi)(B_r(p)) = \{\rho(B_r(p)) \mid \rho \in \text{Aut}(\pi)\}$, o que contradiz o fato de $\text{Aut}(\pi)(B_r(p))$ cobrir \widetilde{M} . \square

Por fim, vamos ao resultado análogo ao Teorema 2.32 para o presente contexto, que descreve globalmente as folheações polares próprias em variedades de Hadamard.

Teorema 3.20. *Seja \mathcal{F} uma folheação polar própria em uma variedade de Hadamard (M, g) . Então \mathcal{F} é difeomorfa a folheação produto de uma folheação isoparamétrica compacta com a folheação trivial $\{\mathbb{R}^m\}$ de \mathbb{R}^m .*

Demonstração: Seja L uma folha de dimensão mínima ℓ . Pela Proposição 3.17, $\exp^\perp : \nu L \rightarrow M$ é um difeomorfismo, logo está bem definida a projeção ortogonal $\rho : M \rightarrow L$. Seja \mathcal{H} a distribuição horizontal de ρ . Vamos mudar a métrica em L e M a fim de que ρ se torne uma submersão riemanniana. Pela Proposição 3.17,

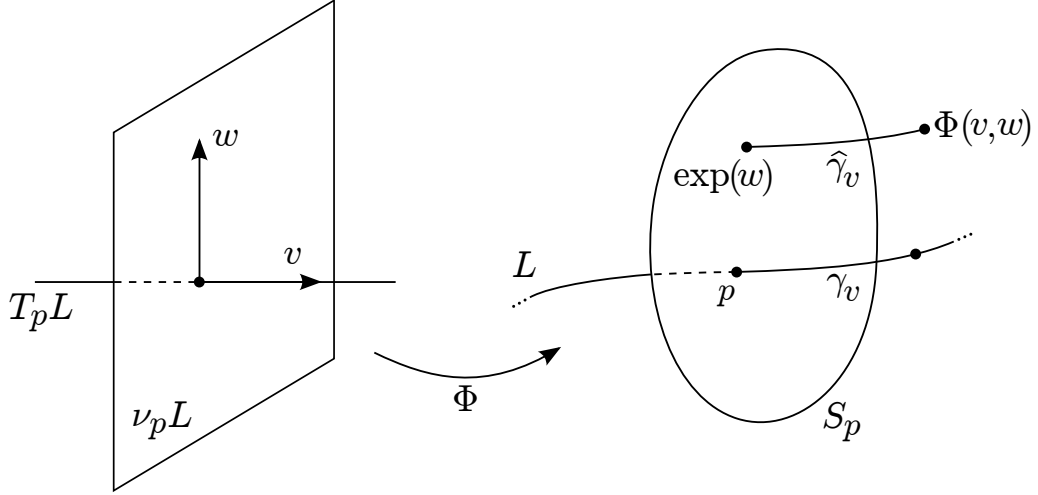


Figura 3.6: A aplicação Φ .

L é difeomorfa a \mathbb{R}^ℓ , logo podemos tomar a métrica *flat* \bar{g} em L induzida por tal difeomorfismo. Mudamos a métrica em M da seguinte maneira: mantemos a métrica induzida nas fibras de ρ por g e exigimos que as fibras de ρ sejam ortogonais a \mathcal{H} . Além disso, em \mathcal{H} tomamos a métrica induzida de L por ρ . Isto é, a nova métrica é dada por

$$\langle w_1, w_2 \rangle_q = g_q(w_1^V, w_2^V) + \bar{g}_{\rho(q)}(d\rho_q w_1^H, d\rho_q w_2^H),$$

onde $w_i = w_i^H + w_i^V$ é a decomposição de w_i em $H_q \oplus V_q$. É claro que, assim, ρ é submersão riemanniana.

Seja $p \in L$ e tome a fatia global $S_p = \exp(\nu_p L)$ de \mathcal{F} . Pela Proposição 3.10 (2), para qualquer $q \in S_p$ temos $S_q \subset S_p$, o que implica que $H_q \subset T_q Lq$. Concluimos, então, que levantamentos horizontais de curvas em L permanecem nas folhas de \mathcal{F} .

Fixe $p \in L$ e identifique L e $T_p L$ (uma vez que $L \cong \mathbb{R}^\ell$). A distribuição horizontal \mathcal{H} de ρ induz uma conexão $\hat{\mathcal{H}}$ em νL dada por

$$\hat{\mathcal{H}} = \{d(\exp_{(p,w)}^\perp)^{-1}(H_{\exp_{(p,w)}^\perp})\}.$$

Considere a aplicação $\Phi : T_p L \times \nu_p L \rightarrow M$ que associa (v, w) ao ponto final $\hat{\gamma}_v(1)$ do levantamento horizontal do segmento $\gamma_v : [0, 1] \ni t \mapsto tv \in T_p M$ por ρ começando em $\exp(w) \in S_p$ (v. Figura 3.6). O ponto $\hat{\gamma}_v(1)$ pode ser escrito como $\exp^\perp(P_{\gamma_v}^1(w))$, onde $P_{\gamma_v}^t : \nu_p L \rightarrow \nu_{\gamma_v(t)} L$ é o transporte paralelo sobre γ_v com relação

à conexão $\widehat{\mathcal{H}}$ em νL . A família de difeomorfismos $\{P_{\gamma_v}^t\}$ varia suavemente com v e t . Portanto Φ é suave.

Podemos expressar a inversa de Φ como segue. Seja $x \in M$ qualquer e v o vetor em $T_p L$ identificado com $\rho(x)$. Existe um único $w \in \nu_p L$ tal que $\exp^\perp(w)$ é o ponto final do levantamento horizontal do segmento $\gamma_v : [0, 1] \ni t \mapsto (1 - t)v \in T_p M$ por ρ . Segue que $\Phi(v, w) = x$ e que a inversa Φ^{-1} também é suave.

Em $\nu_p L$ temos a folheação isoparamétrica \mathcal{F}_p e em $T_p L$ a folheação trivial $\{T_p L\}$. Por construção, Φ leva folhas de $\{T_p L\} \times \mathcal{F}_p$ difeomorficamente em folhas de \mathcal{F} . \square

Referências Bibliográficas

- [1] Alekseevsky, D. et al., *Reflection groups on riemannian manifolds*, Annali di Matematica **186**, 25-58, 2006.
- [2] Alexandrino, M. M., *Singular riemannian foliations with sections* Illinois Journal of Mathematics **48**, 1163-1182, 2004.
- [3] Alexandrino, M. M., Bettiol, R. G., *Introduction to Lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations*, preprint, 2010. Disponível em <http://arxiv.org/abs/0901.2374>, acessado em 10 out. 2013.
- [4] Berndt, J., Console, S., Olmos, C., *Submanifolds and holonomy*, Chapman and Hall, 2003.
- [5] Bott, R., Samelson, H., *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*, American Journal of Mathematics **80**, 964-1029, 1958.
- [6] Briquet, R., *Folheações infinitesimalmente polares*, dissertação de mestrado sob orientação de M. M. Alexandrino no IME-USP, 2011.
- [7] Cecil, T. E., Chern, S., *Tight and taut submanifolds*, MSRI Publications **32**, 1997.
- [8] Conlon, L., *Variational completeness and K -transversal domains*, Journal of Differential Geometry **5**, 135-147, 1971.
- [9] Dadok, J., *Polar coordinates induced by actions of compact Lie Groups*, Transactions of the American Mathematical Society **288**, 125-137, 1985.
- [10] Duistermaat, J., Kolk, J., *Lie groups*, Springer-Verlag, 2000.

- [11] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press Inc., 1978.
- [12] Kobayashi, S., *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag, 1995.
- [13] Lee, J. M., *Introduction to topological manifolds* second edition, Springer-Verlag, 2011.
- [14] Lee, J. M., *Introduction to smooth manifolds* second edition, Springer-Verlag, 2013.
- [15] Lee, J. M., *Riemannian geometry - An introduction to curvature*, Springer-Verlag, 1997.
- [16] Milnor, J., *Morse theory*, Princeton University Press, 1973.
- [17] Moerdijk, I., Mrčun, J. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge University Press, 2003.
- [18] Molino, P., *Riemannian foliations*, Birkhäuser, 1988.
- [19] Palais, R. S., Terng, C.-L., *Critical point theory and submanifold geometry*, Springer-Verlag, 1988.
- [20] Sakai, T., *Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, 1997.
- [21] Stroppel, M. *Locally compact groups*, European Mathematical Society, 2006.
- [22] Terng, C.-L., Thorbergsson, G., *Submanifold geometry in symmetric spaces*, Journal of Differential Geometry **42**, 665-718, 1995.
- [23] Töben, D., *Parallel focal structure and singular riemannian foliations*, Transactions of the American Mathematical Society **358**, 1677-1704, 2005.
- [24] Töben, D., *Singular riemannian foliations on nonpositively curved manifolds*, Mathematische Zeitschrift **255**, 427-436, 2007.

- [25] Warner, F. W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [26] Wiesendorf, S., *Taut submanifolds and foliations*, preprint, 2012. Disponível em <http://arxiv.org/abs/1112.5965>, acessado em 5 jan. 2013.

Índice Remissivo

ação

adjunta, 18, 45

de um grupo de Lie

à direita, 17

à esquerda, 17

efetiva, 18

hiperpolar, 49

induzida na fatia, 43

isométrica, 20

isotrópica, 52

livre, 18

órbita-equivalente, 20

polar, 49

por conjugação, 45

propriamente descontínua, 36

própria, 36

transitiva, 18

variacionalmente completa, 52

álgebra de Lie, 13

de um grupo de Lie, 14

aplicação

G -equivariante, 18

exponencial

de Lie, 17

de Riemann, 21

ponto final, 31

atlas folheado, 58

câmara

de um grupo de Coxeter, 67

de Weyl, 48

campo de vetores

bi-invariante, 13

de Jacobi, 26

de Killing, 23

equivariante normal, 43

G -Killing, 23

invariante à direita, 13

invariante à esquerda, 13

L -Jacobi, 27

normal paralelo, 30

paralelo, 21

carta folheada, 58

colchete de Lie, 13

comprimento de uma curva, 22

condição de diferenciabilidade, 57

conexão, 20

de Levi-Civita, 21

em um fibrado, 29

linear, 20

compatível, 21

em um fibrado, 29

- simétrica, 21
- curva
 - de Kronecker, 38
 - horizontal, 29
- curvatura
 - principal, 25
 - seccional, 24
- decomposição de De Rham, 32
- derivada covariante, 21
- direção principal, 25
- distância riemanniana, 22
- distribuição
 - horizontal, 27
 - vertical, 27
- domínio de Dirichlet, 66
 - vizinho, 67
- equação
 - de Jacobi, 26
 - de Weingarten, 25
- espaço
 - das órbitas de uma ação, 18
 - homogêneo, 32
 - simétrico, 32
 - semisimples, 33
 - torcido, 39
 - total (de um fibrado), 28
- estabilizador, 18
- estrato, 58
- fatia, 60
 - de uma ação, 38
 - de uma folheação, 60
 - normal, 42
- fibrado
 - normal flat, 30
- fibra
 - de um fibrado, 28
 - de uma submersão, 27
- fibrado, 28
 - associado a um fibrado principal, 39
 - coordenado, 28
 - Grasmanniano, 24
 - principal, 30
 - referencial, 30
 - vertical, 29
- folha, 57
 - regular, 57
 - singular, 57
- folheação
 - isoparamétrica, 62
 - compacta, 62
 - polar, 61
 - produto, 59
 - própria, 60
 - regular, 58
 - riemanniana, 60
 - com seções, 61
 - singular, 60
 - singular, 57
 - transnormal, 60
- forma espacial, 31
- fórmula de Gauß, 24

função
 coordenada, 28
 curvatura seccional, 24
 de Morse, 10
 perfeita, 12
 de transição, 28
 geodésica, 21
 gerador
 de um toro, 45
 infinitesimal (de um toro), 45
 gradiente, 19
 grupo
 de Coxeter, 67
 de holonomia, 31
 restrito, 31
 transversal, 65
 de Lie, 12
 de Weyl, 48
 generalizado, 51
 generalizado (de uma folheação iso-
 paramétrica), 64
 estrutural, 28
 linear especial, 13
 linear geral, 13
 ortogonal, 13
 especial, 13
 unitário, 13
 especial, 13
 homomorfismo
 de álgebras de Lie, 13
 de Lie, 12
 índice de Morse, 10
 isometria, 19
 local, 19
 isomorfismo de Lie, 12
 levantamento horizontal
 de curva, 28, 29
 de vetor, 28, 29
 linearização de uma ação, 19
 métrica riemanniana, 19
 adaptada a uma folheação, 60
 bi-invariante, 34
 G-invariante, 41
 invariante à direita, 34
 invariante à esquerda, 34
 número de Betti, 12
 operador forma, 25
 órbita, 18
 principal, 42
 par simétrico, 33
 parede de um domínio de Dirichlet, 67
 placa, 60
 ponto
 conjugado, 26
 crítico, 9
 não degenerado, 10
 focal, 27
 regular, 58
 singular, 58

posto de um grupo de Coxeter, 67
 produto riemanniano, 19
 projeção, 28
 raíz de um grupo de Lie, 48
 representação
 isotrópica, 19
 na fatia, 42
 polar, 50
 seção
 de uma ação, 49
 de uma folheação, 61
 local, 63
 segunda forma fundamental, 24
 simetria local, 32
 s -representação, 33
 subálgebra de Lie, 15
 subespaço
 horizontal, 27, 29
 vertical, 27, 29
 subgrupo
 a um parâmetro, 16
 de Lie, 15
 submersão, 27
 riemanniana, 27
 subvariedade
 equifocal, 62
 isoparamétrica, 31
 localmente equifocal, 62
 riemanniana, 24
 taut, 53
 totalmente geodésica, 24
 tensor de curvatura, 23
 toro, 12, 45
 máximo, 45
 translação
 à direita, 13
 à esquerda, 13
 transporte paralelo, 21, 30
 valor crítico, 10
 variação
 infinitesimal, 26
 por geodésicas, 26
 variedade
 de Hadamard, 33
 focal, 31
 paralela, 31
 riemanniana, 19
 geodesicamente completa, 22
 irreduzível, 32
 reduzível, 32
 vizinhança
 distinguida, 61
 tubular, 39