

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE
CAMPUS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

AINÁ MONTESSANTI SELINGARDI

**O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM NO ENSINO MÉDIO COM
APOIO DE UMA ATIVIDADE EXPERIMENTAL**

São Carlos

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE
CAMPUS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

AINÁ MONTESSANTI SELINGARDI

**O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM NO ENSINO MÉDIO COM
APOIO DE UMA ATIVIDADE EXPERIMENTAL**

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós Graduação em Ensino
de Ciências Exatas como exigência
parcial para obtenção do título de Mestre
em Ensino de Ciências Exatas à
Universidade Federal de São Carlos,
UFSCar, sob orientação do Professor
Doutor Roberto Ribeiro Paterlini.

São Carlos

2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S465ef Selingardi, Ainá Montessanti.
O estudo da função afim no ensino médio com apoio de
uma atividade experimental / Ainá Montessanti Selingardi. --
São Carlos : UFSCar, 2015.
140 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2015.

1. Modelagem matemática. 2. Experimentos. 3.
Engenharia didática. I. Título.

CDD: 511.8 (20ª)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Ainá Montessanti Selingardi, realizada em 30/04/2015:

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
UFSCar

Prof.ª. Dra. Edna Maura Zuffi
USP

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

*Dedico esse trabalho à minha
família, particularmente ao meu filho
Bernardo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir viver essa experiência em um momento tão importante de minha vida e ao lado de pessoas tão especiais.

Agradeço a meu filho Bernardo por me trazer muitas felicidades e motivação para a realização desse trabalho.

Agradeço ao meu esposo Julio por cuidar do nosso filho durante minha ausência, por dirigir tantas vezes a caminho de São Carlos e por compartilhar as experiências acadêmicas. Tudo isso com muita paciência, amor e carinho, sempre!

Agradeço a meus pais Carmen e Werlison e a minha irmã Tamara pela compreensão e apoio em todos os momentos e por acreditarem nos meus sonhos!

Agradeço a todos da família que ofereceram condições para eu concretizar esse trabalho, Silvia, Miguel, Sofia, Luis Miguel, Jandyra e Antônio.

Agradeço aos amigos que ganhei, Altair e Natalia por todas as sextas-feiras, sábados e férias. Sem a amizade de vocês não teria sido tão bom. Espero reencontrá-los sempre!

Agradeço minhas amigas Fernanda e Priscila que encontrei com menos frequência nos últimos anos, mas que me fazem sentir que esse tempo não passou.

Um agradecimento especial ao meu orientador Professor Roberto Ribeiro Paterlini pela dedicação, pela paciência e principalmente por tudo que me ensinou nos últimos anos. Agradeço também a toda família do Professor que me recebeu com tanto carinho.

Agradeço aos Professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas que durante esses anos me ensinaram muito sobre ser Professora: Adriana, Dulcinei, Grazielle, Pedro Malagutti, João Sampaio e Salvador.

Agradeço à direção, coordenação, professores, funcionários e alunos da Escola Interativa por acreditarem no meu trabalho e possibilitarem a elaboração da proposta com tanto entusiasmo e disposição.

RESUMO

Para contribuir com a superação das dificuldades relativas ao ensino do conceito de função e suas aplicações, construí uma proposta didática interdisciplinar. Delimitei meu trabalho escolhendo o tema função afim, que geralmente é apresentado aos estudantes no 1º ano do Ensino Médio. Para a validação do produto pedagógico apresentado, utilizei as orientações básicas propostas pela Engenharia Didática. Desenvolvi uma atividade experimental da área de Química da qual a função resultante é do tipo afim. No decorrer da aplicação do experimento os estudantes se organizaram em grupos. Cada grupo executou o experimento, coletou os dados numéricos compondo uma tabela. A análise desses dados se inicia com a disposição dos dados como pontos em um plano cartesiano. Foi observado o padrão linear desses pontos e, usando recursos algébricos, os estudantes obtiveram a expressão de uma função afim. Numa segunda fase os mesmos dados foram manipulados com o auxílio de uma ferramenta computacional. A aplicação foi encerrada com a socialização dos resultados de cada grupo. Notei que essas atividades proporcionaram aos estudantes uma oportunidade de construir melhor o conceito de função. Vi que eles tiveram que perceber por si mesmos quais eram as variáveis envolvidas, qual era a variável independente e qual era a dependente. Além disso tiveram oportunidade de transitar entre vários tipos de representação em um contexto interdisciplinar, observando o motivo de cada passagem. Outra dificuldade encontrada pelos estudantes foi a manipulação de grandezas não inteiras e que apresentavam valores absolutos diferentes e, portanto, construíram um gráfico que exigiu cuidados em relação à escala adotada. Concluí que a aplicação desse produto pedagógico alcançou os objetivos desejados e que os estudantes demonstraram muito interesse em participar dessa atividade. Percebo também que, após a aplicação do experimento, o meu relacionamento com a turma se tornou mais próximo e espontâneo, melhorando muito o nosso diálogo. Aos colegas professores que queiram aplicar esse produto pedagógico em suas classes, observo que não é fácil conduzir um experimento de Química, principalmente por quem não foi treinado para isso. Isso exige de um professor de Matemática muita determinação e paciência. Por isso considero que a situação ideal é combinar com os professores das disciplinas experimentais de forma que eles possam fazer experimentos e obter os dados. O professor de Matemática ficaria com a parte de analisar esses dados. Concluo que minha proposta didática está validada e é muito enriquecedora para o ensino de funções.

Palavras-chave: Função Afim. Experimento. Modelagem Matemática. Interdisciplinaridade. Engenharia Didática.

ABSTRACT

To contribute to overcoming the difficulties related to the teaching of the concept of function and its applications, build an interdisciplinary didactic proposal. I delimited my job choosing the theme affine function, which is usually presented to students in the 1st year of high school. To validate the pedagogical product presented, I used the basic guidelines proposed by the Didactic Engineering. I developed an experimental activity of chemistry in which the resulting function is the type order. During the experiment of applying students have organized themselves into groups. Each group performed the experiment, collected the figures composing a table. The data analysis begins with the layout of the data as points on a Cartesian plane. The linear pattern was observed and these points using algebraic resources, students obtained an expression of affine function. In a second phase the same data is handled with the help of a computational tool. The application has ended with socializing the results of each group. I noticed that these activities give students a chance to better build the concept of function. I saw that they had to see for themselves what were the variables involved, and what was the independent variable and which was dependent. Also they had transit of opportunity between various types of representation in an interdisciplinary context, noting the reason for each passage. Another difficulty faced by students was handling not whole greatness and who had different absolute values and therefore built a chart that required care in relation to the adopted scale. I concluded that the application of this pedagogical product achieved the desired goals and that students were very interested in participating in this activity. I realize also that, after application of the experiment, my relationship with the class became closer and spontaneous, greatly improving our dialogue. To fellow teachers who want to apply this product in their teaching classes, I note that it is not easy to conduct a chemistry experiment, especially for those who have not been trained for this. This requires a mathematics teacher a lot of determination and patience. So I believe that the ideal situation is to combine with the teachers of the experimental subjects so that they can experiment and get the data. The math teacher would get the part to analyze this data. I conclude that my didactic proposal is validated and is very enriching for teaching functions.

Keywords: Function In order. Experiment. Mathematical Modeling. Interdisciplinarity. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Imagem do esquema com as etapas da modelagem matemática.....	58
FIGURA 2 – Foto da ureia utilizada como fertilizante.....	63
FIGURA 3 – Foto da vista lateral da balança.....	64
FIGURA 4 – Foto da vista superior da balança.....	65
FIGURA 5 – Foto do béquer.....	65
FIGURA 6 – Foto da seringa.....	66
FIGURA 7 – Gráfico que traz a representação dos pontos no plano cartesiano de dados que foram obtidos através da atividade experimental com Ureia na mistura.....	67
FIGURA 8 – Gráfico que mostra a linha de tendência e expressão algébrica que relaciona a Densidade da Mistura e a Massa de Ureia.....	68
FIGURA 9 – Imagem da apresentação do material fornecido para a realização da Atividade Experimental.....	71
FIGURA 10 – Imagem do procedimento sugerido aos estudantes para a realização da Atividade Experimental.....	72
FIGURA 11 – Imagem de algumas observações sobre os cuidados relativos à Atividade Experimental.....	73
FIGURA 12 – Imagem dos Objetivos da Atividade Experimental.....	74
FIGURA 13 – Imagem do recurso que “plota” os pontos no plano cartesiano.....	76
FIGURA 14 – Imagem do recurso que liga os pontos no plano cartesiano.....	77
FIGURA 15 – Imagem do recurso que fornece a linha de tendência.....	78
FIGURA 16 – Imagem do recurso que permite a obtenção da expressão algébrica da função.....	78
FIGURA 17 – Foto com vista panorâmica do Laboratório da Escola Interativa.....	83
FIGURA 18 – Foto da demonstração de como manusear a balança de equilíbrio.....	84
FIGURA 19 - Grupo de estudantes realizando a atividade experimental.....	86
FIGURA 20 - Foto com destaque para o indicador da massa na balança.....	87
FIGURA 21 – Gráfico que contempla as expectativas da atividade.....	91
FIGURA 22 – Gráfico em que a interseção da reta com o eixo Oy não é evidenciada...	92
FIGURA 23 – Gráfico que mostra alteração da origem dos eixos. Os estudantes perceberam que se a massa de ureia fosse 0g a densidade da mistura seria 1g/mL.....	93
FIGURA 24 – Gráfico onde a reta da função parte da origem dos eixos do plano cartesiano.....	94
FIGURA 25 – Cálculos realizados pelos estudantes.....	95

FIGURA 26 – Cálculos realizados para obter a expressão da função afim a partir de pontos da reta aproximada.....	96
FIGURA 27 – Gráfico da função obtido com sucesso a partir das ferramentas do aplicativo computacional.....	99
FIGURA 28 – Gráfico em que os estudantes não utilizaram corretamente as ferramentas do aplicativo computacional.....	99
FIGURA 29 – Comentário dos estudantes acerca da aplicação dos conhecimentos adquiridos.....	100
FIGURA 30 – Comentário dos estudantes sobre a atividade experimental complementar uma aula tradicional.....	101
FIGURA 31 – Comentário dos estudantes relacionado a aplicar o que foi desempenhado na atividade em outros problemas e sobre ser divertido realizar a atividade experimental.....	102
FIGURA 32 – Comentário em que os estudantes relatam se sentirem à vontade para participar da atividade fazendo questionamentos e comentários.....	102

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Dados obtidos no planejamento com a mistura de ureia e água.....	66
TABELA 2 – Tabela que será preenchida pelos estudantes durante a realização da Atividade Experimental.....	74
TABELA 3 – Tabela com os dados obtidos pelos estudantes na segunda etapa.....	88
TABELA 4 – Tabela com resultados sobre os procedimentos da Atividade Experimental.....	103

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- PPGECE - Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas
- UFSCar - Universidade Federal de São Carlos
- PCNEM - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio bases legais
- PCN+ - Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio + Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

Introdução.....	17
Capítulo 1: A presença da função afim na Matemática e no Ensino.....	23
1.1. Introdução.....	23
1.2. A Matemática e o ensino de funções segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio.....	24
1.3. Proposta Curricular da Secretaria do Estado de São Paulo.....	31
1.4. A importância das funções no ensino da Matemática.....	33
1.5. Breve abordagem da história das funções.....	34
1.6. Conceitos e notações da função afim.....	37
1.7. O conceito de função afim segundo alguns livros didáticos.....	44
1.7.1. DANTE, L.R., Matemática: volume único – 1ª edição – São Paulo: Ática 2005. 464 p.....	45
1.7.2. IEZZI, G.; DOLCE O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. Matemática: volume único – 5ª edição – São Paulo: Atual, 2011. 720p.....	46
1.7.3. M PAIVA, M.R., Matemática: Conceitos, Linguagem e Aplicações – Volume 1. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2002.368p.....	47
1.7.4. Sobre a análise dos livros didáticos.....	47
1.8. Algumas observações sobre o ensino de funções e função afim.....	48
1.8.1. Como apresento função afim para os estudantes.....	48
1.8.2. Observações de alguns autores sobre a abordagem do tema funções.....	49
Capítulo 2: Construção da proposta didática.....	55
2.1. Introdução.....	55
2.2. Ideias e motivações presentes no uso de um experimento.....	56
2.3. Bases da construção do experimento e considerações pedagógicas.....	59
2.4. Descrição e realização da atividade experimental.....	63
2.5. Algumas observações sobre o experimento.....	68

2.6. Planejamento da aplicação da Atividade Experimental.....	70
2.6.1. Primeira Etapa.....	70
2.6.2. Segunda Etapa.....	71
2.6.3. Terceira Etapa.....	75
2.6.4. Quarta Etapa.....	75
2.6.5. Quinta Etapa.....	79
Capítulo 3: Aplicação da Proposta Didática	81
3.1. Introdução.....	81
3.2. A escolha da turma.....	81
3.3 Sobre a escola e os estudantes.....	82
3.4. Primeira Etapa: Apresentação da Atividade Experimental.....	82
3.5. Segunda Etapa: Os estudantes realizam a Atividade Experimental.....	85
3.6. Terceira Etapa: Confeção dos gráficos e obtenção da expressão algébrica da função.....	89
3.6.1. Determinação dos pontos e da reta da função.....	89
3.6.2. Avaliação sobre os gráficos construídos na terceira etapa.....	91
3.6.3. Sobre como obter a expressão algébrica de uma função afim.....	94
3.6.4. Avaliação das expressões algébricas obtidas pelos estudantes.....	96
3.7. Quarta Etapa: Utilização de um aplicativo computacional para verificação dos dados obtidos na etapa anterior.....	97
3.7.1. Resultados da quarta etapa.....	98
3.8. Quinta Etapa: Conclusão dos estudantes acerca dos conhecimentos adquiridos e experiência vivenciada.....	100
3.9. Resultados apresentados em cada procedimento.....	103
Capítulo 4: Validação da experiência e considerações finais.....	105
4.1. Introdução.....	105

4.2. Ideias principais da proposta didática.....	105
4.3. Breve relato sobre a aplicação da proposta didática.....	106
4.4. Modificações sugeridas a partir do que foi observado durante a aplicação da proposta didática.....	107
4.5. Observações sobre a construção dos gráficos.....	109
4.6. Sugestões para pesquisas futuras.....	110
4.7. Conclusão.....	111
4.8. Observações Pessoais.....	111
Referências Bibliográficas.....	113
Apêndice A: Roteiro do Professor.....	117
Apêndice B: Roteiro do Estudante.....	129

INTRODUÇÃO

Apresento minha Dissertação de Mestrado Profissional realizada junto ao Programa de Ensino em Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).

Descrevo neste trabalho as atividades desenvolvidas em uma turma de estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada em Itapira - SP. Esses procedimentos consistiram da realização de um experimento interdisciplinar e da análise dos dados com o objetivo de apoiar o ensino da função afim.

A motivação para escolha do tema desse trabalho e da metodologia adotada surgiu das observações que tenho feito no exercício da minha profissão. Desde o ano de 2006, trabalho como professora do Ensino Médio da rede privada, no Estado de São Paulo.

Desde o início da minha prática docente, percebo que grande parte dos estudantes apresentam dificuldades no aprendizado de funções. Muitos não conseguem interpretar situações que envolvem expressões algébricas ou estabelecer uma expressão que generaliza um problema apresentado. Acredito que essas dificuldades tenham relação com o ensino usual, que se apoia muito em aulas expositivas, e poucas vezes trabalha com experimentos, análise de situações-problema e pouco cultiva a interdisciplinaridade.

Mesmo no que diz respeito ao aprendizado das aulas expositivas, os estudantes trazem dificuldades várias. Por exemplo, dada uma tabela de valores de uma função afim, eles não conseguem achar os dois coeficientes dessa função usando um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas. Eles deveriam ter aprendido isso no 8º ou no 9º ano do Ensino Fundamental. Como não aprenderam, atribuem valores aleatórios aos coeficientes da função procurando assim obter esses coeficientes em algum momento. Esse procedimento revela que não fizeram um aprendizado significativo de sistemas de equações lineares. Possivelmente esse aprendizado foi apenas teórico, desconectado de aplicações. Revela também que os livros didáticos frequentemente usam valores inteiros e pequenos ao construir exemplos e exercícios. Com isso os estudantes “aprendem” que podem encontrar os coeficientes de uma função afim tentando alguns valores inteiros de valor absoluto pequeno.

Observo, ainda, muitos outros problemas de aprendizagem. Por exemplo, os estudantes apresentam dificuldades na compreensão dos conceitos de variável e confundem os significados de função e equação.

Outras dificuldades importantes ocorrem quanto à interpretação e construção de gráficos de funções no plano cartesiano. Noto que alguns estudantes não localizam corretamente os pontos no plano cartesiano a partir de suas coordenadas e vice-versa. Ao observar um gráfico, nem sempre notam propriedades qualitativas das grandezas envolvidas, por exemplo se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Também não conseguem identificar por meio de seu gráfico se a função é crescente, decrescente ou constante. Todas essas propriedades são vistas no Ensino Fundamental, mas é preciso retomar seu estudo no Ensino Médio.

Parte dessas dificuldades advêm das deficiências normais trazidas do Ensino Fundamental, como alguma hesitação com a manipulação de propriedades de números e do sistema cartesiano.

Nas minhas atividades pedagógicas com estudantes do Ensino Médio percebo que o uso exclusivo de aulas expositivas teóricas não é suficiente para que os estudantes façam a construção segura do conceito de função. Ocorre também que a abordagem teórica tradicional dificulta o diálogo com as outras ciências.

Para ajudar a superar esses obstáculos pedagógicos tive como meta, na construção desse produto pedagógico, elaborar uma atividade experimental em cuja modelagem ocorre uma função afim. Pretendia assim adotar um caráter interdisciplinar nesse ensino, contextualizar o conceito de função afim e, ao mesmo tempo, buscar uma metodologia de ensino mais atraente para os estudantes.

O estudo de funções é iniciado nas séries finais do Ensino Fundamental e retomado no 1º ano do Ensino Médio. O conceito de funções é muito importante na Matemática, pois através delas podemos descrever relações entre conjuntos e obter um método para estudar propriedades dos números e das formas.

Ao optar pelo uso de um experimento, já tinha a clareza das dificuldades que poderia encontrar. Em geral, os professores de Matemática não têm o costume de realizar experimentos, que ficam, por assim dizer, a cargo dos colegas das ciências experimentais. Parece que a situação ideal seria aquela em que o professor de Matemática aproveita esses

experimentos para trabalhar com Modelagem Matemática. Mas na escola em que leciono os experimentos são mais de observação e não fazem coleta de dados numéricos. Como estava determinada a trabalhar numa atividade interdisciplinar, resolvi fazer eu mesma um experimento. Solicitei o auxílio de um professor de Química, que sugeriu um experimento e explicou como conduzi-lo. O experimento foi aplicado para uma classe do 1º ano do Ensino Médio.

Para a apresentação desse trabalho e sua validação, segui os passos principais da metodologia proposta pela Engenharia Didática. Com isso espero comprovar a eficiência das aulas que conduzi com meus estudantes. Essa proposta de aulas constitui o produto didático do meu trabalho de Dissertação de Mestrado.

Passo a descrever os capítulos dessa Dissertação de Mestrado. Observo inicialmente que para organizar a apresentação, segui as quatro fases principais da proposta da Engenharia Didática, segundo o que li em Carneiro (2005).

As quatro fases da Engenharia Didática são:

1) análises prévias: são as referências utilizadas como ponto de partida para o desenvolvimento de uma proposta didática. Constam dessas análises as dificuldades apresentadas pelos estudantes e a forma como habitualmente o conteúdo é apresentado a eles. É bom ler o que sugerem as propostas curriculares e autores pesquisadores. A partir dessa análise são destacados os objetivos que se pretende alcançar com a proposta didática a ser construída.

2) concepção e análise *a priori*: construção da proposta didático-pedagógica a ser desenvolvida em sala de aula de Matemática que contribua com a superação das dificuldades observadas;

3) implementação da experiência: a proposta construída é aplicada em classes de estudantes.

4) análise *a posteriori* e validação da experiência: é feito um estudo da aplicação do produto, considerando os sucessos ou insucessos e, eventualmente, a proposta inicial é modificada para se obter um resultado melhor.

O primeiro capítulo dessa Dissertação de Mestrado acompanha a primeira fase da Engenharia Didática, que é a apresentação das análises prévias que fiz de toda a

problemática envolvida no meu trabalho. Início estudando a abordagem do assunto feita pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio e pela Proposta Curricular da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Serão destacadas também a importância do estudo de funções na Matemática e a importância histórica do tema. Apresento ainda, nesse capítulo, os conceitos, notações e exemplos relativos à função afim na forma adotada pela Matemática acadêmica. Finalmente, cito algumas situações em que o tema funções é abordado em sala de aula e como são apresentados em livros didáticos e publicações, como artigos e dissertações.

No Capítulo 2 considero a segunda fase da Engenharia Didática que é a concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula. Exponho as justificativas e as motivações relativas à escolha da metodologia empregada. Discorro sobre a aplicação de atividades experimentais no ensino. Enumero as etapas da proposta didática, que consiste em utilizar uma atividade experimental como apoio ao ensino da função afim. Finalizo o Capítulo descrevendo cada etapa, sugiro as orientações e o material necessário para realização da mesma. Os resultados obtidos na realização prévia da atividade experimental são apresentados junto ao planejamento da proposta didática.

O Capítulo 3 refiro-me à terceira fase da Engenharia Didática. Reúno nesse capítulo as informações sobre a aplicação da atividade experimental. São apontados os itens significativos do trabalho realizado pelos estudantes. Examinando o material produzido pelos estudantes, identifico as dificuldades encontradas por eles em cada etapa e a proposta de intervenção utilizada por mim em cada situação. Faço no capítulo reflexões acerca do desempenho dos estudantes na realização da proposta didática.

No Capítulo 4 faço a análise a *posteriori* e validação da experiência, referente à quarta fase da Engenharia Didática. Neste Capítulo exponho a conclusão da experiência realizada e comentários referentes às expectativas e o resultado final do trabalho desenvolvido.

No Apêndice A, apresento o roteiro completo da proposta didática para que um professor possa realizar a aplicação da mesma. Também disponibilizo no Apêndice B

roteiros com instruções para os estudantes seguirem em cada etapa da proposta didática. Os roteiros estão apresentados em um formato pronto para impressão.

Destaco aqui a importância de tratar situações interdisciplinares. Com os conhecimentos adquiridos nas aulas expositivas de Matemática e Química os estudantes puderam refletir sobre um experimento realizado por eles no laboratório. A elaboração e aplicação da proposta didática trouxe uma experiência inédita que me fez refletir sobre a minha prática docente. Escrever esse trabalho me proporcionou uma visão mais ampla sobre como preparar aulas, atividades e avaliações que trago para os estudantes em sala de aula, pensando sempre em proporcionar questionamentos e reflexões construtivas acerca dos conhecimentos aprendidos.

CAPÍTULO 1

A PRESENÇA DA FUNÇÃO AFIM NA MATEMÁTICA E NO ENSINO

1.1. INTRODUÇÃO

Dedico esse capítulo ao estudo da função afim sob os pontos de vista da Matemática e seu ensino. Observo a importância dessa função na teoria Matemática e descrevo um pouco de sua história. Destaco as propostas para o ensino dessa função que se encontram em documentos oficiais, livros e artigos, e faço observações sobre a situação atual do ensino.

Faço uma resenha sobre como a Proposta Curricular da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, lançada em 2011, sugere a abordagem de conteúdos da Matemática. Destaco os temas funções e função afim presentes nessa proposta.

Ainda neste capítulo, apresento os conceitos e notações sobre a função afim do ponto de vista da Matemática. Faço assim uma abordagem formal do conteúdo que será trabalhado em minha proposta didática. Incluo neste capítulo observações sobre o desenvolvimento e a importância das funções na história da Matemática.

Termino o presente capítulo com um breve estudo das propostas para o ensino da função afim apresentadas por autores de livros didáticos e por pesquisadores de Ensino da Matemática.

1.2. A MATEMÁTICA E O ENSINO DE FUNÇÕES SEGUNDO OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO

O papel da Educação na sociedade é bastante complexo e sua compreensão exige um profundo estudo do ser humano e da sociedade. Uma das vertentes desse estudo consiste em observar que Educação tem, entre suas finalidades, que preparar o indivíduo para contribuir com a sociedade. A respeito disso posso citar a seguinte passagem do PCNEM (p.40):

“... é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.”

Sobre a Matemática, o PCNEM observa que seu ensino se insere, antes de mais nada, em uma proposta mais geral de desenvolvimento do ser humano e de sua relação com a sociedade e com os processos produtivos. Sobre isso o PCNEM, cita na página 40, que:

“... a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o

desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.”

Relacionando as competências e habilidades desenvolvidas no Ensino Fundamental que devem ser mais elaboradas no Ensino Médio, o PCNEM (p.41) afirma que:

“A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a idéia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.”

Na página 41, o PCNEM continua expressando quais as expectativas em relação ao estudante do Ensino Médio, discorrendo sobre as habilidades que ele pode adquirir considerando ainda aspectos gerais no Ensino da Matemática:

“... habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.”

Na sequência o PCNEM discorre sobre habilidades mais específicas fundamentadas nos objetivos do domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. O PCNEM (p.41) afirma que:

“Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.”

Listo a seguir, em tópicos, as finalidades do Ensino de Matemática no nível Médio, de acordo com o PCNEM (p.42).

“• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;*
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;*
- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.”*

A partir das habilidades, competências e finalidades relacionadas ao Ensino de Matemática são elaboradas as propostas curriculares. A respeito da organização curricular, o Ministério da Educação elaborou juntamente com equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica, Brasil (2006). Essas orientações devem ser utilizadas pelo professor como instrumento de apoio em favor do aprendiz. O principal objetivo é oferecer educação básica de qualidade para inserção do aluno na sociedade.

A proposta curricular de uma instituição de ensino é elaborada a partir da Base Nacional Comum, que assegura para o estudante a formação básica comum. A Base Nacional Comum e o que é particular de cada sistema de ensino, no que se refere à organização curricular, devem atender às necessidades dos alunos. Assim, deve-se inserir no currículo outros temas que abordem as especificidades regionais e locais da sociedade, cultura e economia, além das necessidades do próprio aluno.

Os conteúdos referentes aos conhecimentos de Matemática são divididos em quatro blocos, em Brasil (2006): Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de dados e Probabilidade.

Para o aprendizado de funções, são necessários como pré-requisitos alguns conhecimentos inseridos no tema Números e Operações. O estudante deve ser capaz de

resolver problemas do cotidiano e saber realizar operações entre os diferentes conjuntos numéricos, interpretar gráficos e tabelas, além de saber operar alguns instrumentos tecnológicos. Para a utilização de calculadoras e computadores, é necessário que o estudante tenha familiaridade com os algoritmos envolvidos no estudo do problema em questão.

No bloco referente a Funções há destaque para a maneira como o tema deve ser apresentado ao estudante. Para que o estudante entenda o conceito de função, o professor não deve limitar-se a apresentar situações que permitam interpretar uma expressão algébrica e simplesmente fazer a transposição para outra linguagem (gráfica ou descrita). É necessário que ele investigue problemas contextualizados ou interdisciplinares. Segundo Brasil (2006, p.72):

“O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. O modelo periódico será discutido no tópico referente às funções trigonométricas, mais adiante. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.). Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.”

Em relação a temas complementares, BRASIL (2006) sugere ao professor a possibilidade de implementar alguns temas relacionados aos conhecimentos matemáticos. Trabalhos que envolvam situações contextualizadas e interdisciplinares favorecem a

atribuição de significados aos conhecimentos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem.

Destaco aqui uma frase da página 111 do PCN+ em que se nota uma preocupação maior com a interdisciplinaridade:

“Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.”

Segundo o PCN+ são três as competências relativas à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, são: representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização das ciências no âmbito sociocultural, e são descritas na página 113:

“- Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

- Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

- Contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das

questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.”

Existem algumas habilidades inseridas em cada uma das competências. Sobre as habilidades desenvolvidas dentro da competência de Representação e Comunicação, o estudante deverá transformar e traduzir adequadamente as unidades básicas apresentadas das diferentes formas. A leitura e interpretação de dados enunciados deverão ser transformados em outras formas de linguagem como, por exemplo, em gráficos, tabelas ou expressões algébricas e vice-versa. Além disso, o estudante deve aprender a expor as resoluções utilizando argumentos e justificativas claras para a solução de uma situação-problema.

Em relação à competência de Investigação e Compreensão o estudante desenvolverá habilidades que permitam questionar os processos naturais e tecnológicos. Ele será estimulado a desenvolver métodos eficientes para a sistematização de informações relevantes para a solução de um problema e assim será capaz de formular hipóteses e prever resultados. Dessa forma poderá interpretar e criticar resultados utilizando os conhecimentos relativos às ciências e os dados obtidos em seus experimentos e demonstrações.

Finalmente, a competência que insere a contextualização sociocultural é importante para que o estudante compare os resultados e o material obtido por ele com os gerados com o auxílio de uma ferramenta, como o computador ou a calculadora. Os estudantes devem desenvolver o raciocínio matemático com o intuito de compreender e saber julgar os resultados obtidos a partir das aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos.

O PCN+ faz, na página 121, uma menção às habilidades que o estudante adquire a partir do aprendizado acerca dos conceitos de funções:

“O estudo das funções permite ao aluno adquirir linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar e relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e

permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.”

Portanto ao elaborar uma proposta relativa ao ensino de funções, o professor deve se atentar a desenvolver as competências e habilidades envolvidas e citadas anteriormente. Desta maneira, o estudante participará de um processo enriquecedor que se distingue de práticas de sistematização e aplicações diretas de regras e fórmulas utilizadas habitualmente.

1.3. PROPOSTA CURRICULAR DA SECRETARIA DO ESTADO DE SÃO PAULO

Examino agora alguns aspectos da Proposta Curricular da Secretaria do Estado de São Paulo, tendo em vista que o experimento que conduzi foi aplicado em um município deste Estado.

Esse documento tem como objetivo que o estudante desenvolva as mesmas competências apresentadas nos Parâmetros Nacionais. Isso fica evidente na página 18:

“Este Currículo adota como competências para aprender aquelas que foram formuladas no referencial teórico do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem, 1998). Entendidas como desdobramentos da competência leitora e escritora, para cada uma das cinco competências do Enem ...”

Essa proposta atribui grande importância à resolução de problemas no Ensino de Matemática. Com o conhecimento dessa metodologia o professor pode exercer um fazer pedagógico mais enriquecedor, contrastando com os métodos tradicionais que se limitam

à resolução de exercícios. Os exercícios que simplesmente aplicam definições e técnicas podem ser importantes, mas o ensino da Matemática não pode se limitar a eles. É fundamental o uso de problemas que contemplam a contextualização e a interdisciplinaridade. Isso é explicitado na página 30 da proposta:

“A Matemática nos currículos deve constituir, em parceria com a língua materna, um recurso imprescindível para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações-problema, uma contextualização significativa dos temas estudados. Quando os contextos são deixados de lado, os conteúdos estudados deslocam-se sutilmente da condição de meios para a de fins das ações docentes. E, sempre que aquilo que deveria ser apenas meio transmuta-se em fim, ocorre o fenômeno da mediocrização.”

Segundo minha experiência, a falta desses problemas torna o ensino não muito atrativo para os estudantes e resulta numa formação da qual não faz parte um domínio de situações-problema.

A Proposta Curricular da Secretaria do Estado de São Paulo propõe que o conceito de função seja apresentado aos estudantes no 9º ano do Ensino Fundamental. Inicialmente o estudante aprende noções básicas de funções, observa a variação entre grandezas e aprende a construir gráficos de funções lineares e quadráticas. O tema volta a ser apresentado aos estudantes no 1ª ano do Ensino Médio e os mesmos conceitos do Ensino Fundamental são retomados, porém são acrescentados alguns detalhes em relação aos conteúdos anteriores.

Segundo a Proposta, as habilidades que o estudante deve desenvolver ao estudar as funções podem ser encontradas na página 65:

“• Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções

- *Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decréscimo e a taxa de variação*

- *Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decréscimo, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo)*

- *Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos”*

Vejo ao longo das propostas apresentadas, o destaque que é dado à importância do conceito de função e da construção de suas representações.

1.4. A IMPORTÂNCIA DAS FUNÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A partir do que foi visto nas seções anteriores, discorro agora sobre a importância do conceito de função e de suas representações no ensino da Matemática. As funções expressam relações entre grandezas e permitem ao estudante observar o comportamento de modelos matemáticos em diversas áreas do conhecimento, como na Física, Química e Biologia. O estudo contextualizado de funções possibilita ao estudante a observação, descrição e compreensão de fenômenos a partir de suas regularidades.

O estudo de funções é iniciado no 9º ano do Ensino Fundamental. Nesse momento o estudante observa relações entre as grandezas e verifica se há proporcionalidade entre elas. Ainda nessa série, aprende a expressar e utilizar em problemas contextualizados as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de função afim e faz a construção dos gráficos das funções por meio da atribuição de valores à variável nas expressões algébricas e obtenção de pontos do gráfico.

No Ensino Médio são inicialmente trabalhados com os estudantes os conceitos de conjunto e suas operações. A seguir são apresentados conceitos formais acerca de funções, como a relação binária, domínio, contradomínio e imagem de funções e suas classificações. Encerrada essa introdução mais formal ao estudo de funções, são apresentados aos estudantes alguns exemplos de relações entre variáveis expressas por vários tipos de função. Só a partir daí é feito um estudo da função afim.

O tema principal da proposta didática descrito nessa dissertação é a função afim, portanto devo ressaltar a sua importância. A partir da função afim, o estudante observa modelos lineares, que envolvem ideia de proporcionalidade direta entre duas grandezas. Quando duas grandezas não são diretamente proporcionais mas sua relação pode ser descrita por uma função afim, então a variação de uma grandeza é diretamente proporcional à variação da outra, ou seja, há uma taxa de variação que pode ser determinada pelo estudante e, além disso, ele pode obter o coeficiente linear da reta que representa o comportamento entre elas.

O estudo da função afim no Ensino Médio inclui: a compreensão de que a sua taxa de variação é constante e qual o significado desse conceito; a determinação do tipo de monotonicidade da função; o estudo do sinal da função e das propriedades de seu gráfico, por exemplo, a determinação dos pontos em que o gráfico encontra os eixos.

Aplicações da função afim são observadas em outras áreas do conhecimento como por exemplo, na Matemática Financeira, na Cinemática, na Estática, na Termostática, entre outras.

1.5. BREVE ABORDAGEM DA HISTÓRIA DAS FUNÇÕES

Nicole Oresme foi talvez o primeiro matemático a contribuir para a construção do conceito de função e para a sua representação gráfica. Seu trabalho mais conhecido é o “*Tractatus de latitudinibus formarum*”, onde abordou latitudes e suas variações. Nesse trabalho ele descreve graficamente a dependência entre duas grandezas utilizando linhas verticais (longitude) e linhas horizontais (latitude).

Oresme pode ser considerado precursor da Geometria Analítica de Fermat e Descartes. Ele também é considerado um pioneiro no estudo da cinemática, relacionando por meio de gráficos a distância percorrida e o tempo decorrido em um movimento. Apesar de representar graficamente a relação entre grandezas, não utilizava escalas, ou seja, os gráficos obtidos eram aproveitados somente para ilustrar a situação descrita.

Para descrever fenômenos da natureza por métodos matemáticos, Galileu Galilei (1564-1643) utilizou grandezas físicas que se relacionavam para obter funções que expressavam uma das variáveis em função da outra. Foi assim que fundou a ciência da Cinemática. Muitas das ideias de Galileu sobre Cinemática encontram-se em seu *“Discorsi e Dimonstrazioni Matematiche intorno a Duo Nuove Scienze”* publicado em Leyden 1638. (EVES, 2011, p 355).

O maior matemático francês do século XVI foi François Viète. Sua vasta obra compreende trabalhos de Geometria, Álgebra e Trigonometria. Seu mais famoso trabalho *“In artem”* se refere ao desenvolvimento do simbolismo algébrico, e nele Viète inova utilizando vogais para representar incógnitas e consoantes para representar as constantes.

Galileu observara que o conjunto dos inteiros poderia ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros pares positivos (EVES, 2011, p 662). A ideia de correspondência biunívoca pode ter sido precursora do conceito de funções. Expressando regularidades de um fenômeno por meio de leis quantitativas, Galileu estabeleceu as primeiras ideias do conceito de função.

A única publicação matemática de René Descartes (1596-1650) foi o *“La Géométrie”*. Os demais trabalhos eram relativos a ideias filosóficas, leis imprecisas da natureza e teoria cosmológica. *“La Géométrie”* é dividido em três partes. Na primeira parte Descartes marcava x num eixo indicado e então um comprimento y , formando um ângulo fixo com esse eixo, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfizessem uma relação dada. Ele mostrava interesse especial em obter relações como essa para curvas descritas cinematicamente. A segunda parte de *“La Géométrie”* traz a classificação de curvas e métodos para construir tangentes a curvas. A terceira parte de *“La Géométrie”* trata da resolução de equações de grau maior que 2. Descartes não utilizava os eixos coordenados explicitamente em seus trabalhos, as palavras

coordenadas, abscissa e ordenada, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692. (EVES, 2011, p 388)

A equação geral da reta e da circunferência aparece nos trabalhos de Fermat (1601-1665), onde se encontra também uma discussão sobre hipérbolas, elipses e parábolas. Enquanto Descartes sugeriu umas poucas curvas novas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat propôs muitas delas, definidas por equações algébricas. (EVES, 2011, p 389)

Newton (1642-1727) utilizou ideias primitivas sobre limites, demonstrou habilidades relativas à integração de algumas equações diferenciais e um eficaz método de aproximação para determinação dos valores das raízes de uma equação numérica, algébrica ou transcendente. Segundo EVES (2011, p 439)

“Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas.”

Jean Bernoulli (1667 – 1748) contribuiu muito para o desenvolvimento do conceito de função, introduzindo notações muito úteis. Além disso, contribuiu para o estudo das funções contínuas, aprimorou a regra de L'Hôpital e ampliou o campo da Geometria Diferencial utilizando as geodésicas.

Leonard Euler (1707-1783) foi o primeiro a implantar a notação $f(x)$ para designar uma função. Diferenciou as “variáveis” e “constantes” e funções “contínuas” e “descontínuas”. Euler contribuiu para os campos da Geometria Diferencial, Cálculo das Diferenças Finitas e Cálculo de Variações.

Acredita-se que Leibniz foi o primeiro matemático a utilizar o termo “função” para designar uma relação entre quantidades.

Na matemática grega, os números estavam, por este fato, associados a quantidades geométricas, não se concebiam operações abstratas e arbitrarias sobre eles. A esse

respeito Gauss (1777- 1855) defendia uma concepção mais abstrata da Matemática. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p 299)

A definição de função como expressão analítica começou a mudar somente com os trabalhos de Fourier (1768-1830), o qual desenvolveu as séries trigonométricas, que envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis do que as que haviam sido estudadas anteriormente (EVES, 2011, p 661).

O problema das séries de Fourier foi abordado por Cauchy (1789-1857) e por Dirichlet (1805-1859). Uma grande contribuição de Cauchy relacionada a funções é a teoria das funções reais e complexas (EVES, 2011, p 531). Talvez a realização de Dirichlet mais celebrada tenha sido a análise penetrante que fez das séries de Fourier. Além disso, nota-se nos trabalhos de Dirichlet a aplicação de métodos infinitesimais à teoria dos números. (EVES, 2011, p 537).

Na segunda parte do século XIX e início do século XX, com o desenvolvimento da noção de conjunto, Dirichlet juntamente com Riemann (1826-1866) e Dedekind (1831-1916) abriram caminho para a abordagem conjuntista. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p 299)

Outros estudiosos famosos contribuíram com estudos essenciais para a construção do conceito de função no século XIX, como por exemplo, Bernard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897), George Cantor (1858-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932).

1.6. CONCEITOS E NOTAÇÕES DA FUNÇÃO AFIM

Apresento nesta seção a definição e propriedades da função afim como ela é considerada na matemática acadêmica. Minha principal referência é o Capítulo de Funções Afins, de Lima (2006, páginas 87 a 113).

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

São exemplos de função afim as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ (identidade), $f(x) = x + b$ (translações), $f(x) = ax$ (funções lineares) e $f(x) = b$ (funções constantes).

A função afim pertence ao conjunto das funções reais de uma variável, ou seja, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ que tem como domínio $X \subset \mathbb{R}$ e, cujos valores de $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ são números reais.

Destaco agora as principais propriedades da função afim. A primeira delas é que essa função é determinada pelos valores em dois pontos.

Seja $f(x) = ax + b$ uma função afim, da qual conheço os valores $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$. Portanto $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. Olhando essas expressões como um sistema de equações nas incógnitas a e b , determino

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Essas relações mostram de imediato que a razão $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ é constante, quaisquer que sejam os pontos x_1 e x_2 . Em geral, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a razão acima chama-se taxa de variação da função. Com isso se vê que a taxa de variação da função afim é constante. O número a da expressão $f(x) = ax + b$ de uma função afim chama-se taxa de variação.

Uma característica imediata da taxa de variação de uma função afim é que ela determina o crescimento ou decrescimento da função. Lembro que uma função $f(x)$ é crescente quando dados $x_1 < x_2$ no seu domínio se tem $f(x_1) < f(x_2)$. Por outro lado $f(x)$ é decrescente quando dado $x_1 < x_2$ no seu domínio $f(x_1) > f(x_2)$.

Seja $f(x) = ax + b$ uma função afim com $a > 0$. Dados $x_1 < x_2$, como $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$ tenho $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) > 0$. Portanto f é crescente. Se $a < 0$ tenho $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) < 0$, e nesse caso f é decrescente. Se $a = 0$ já sabemos que $f(x) = b$ é constante.

O gráfico de uma função é um importante recurso de representação. O gráfico da função afim é uma reta, propriedade indicada pelo fato já observado de que dois valores dessa função a determinam. Posso justificar essa propriedade da seguinte forma:

Considero três pontos quaisquer do gráfico de $f(x) = ax + b$ dados por $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_2 = (x_2, f(x_2))$ e $P_3 = (x_3, f(x_3))$ com $x_1 < x_2 < x_3$. Agora calculo as distâncias entre os pontos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \end{aligned}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (f(x_3) - f(x_2))^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (f(x_3) - f(x_1))^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Manipulando essas relações, tenho que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$, portanto os pontos estão na mesma reta, caso de colinearidade na desigualdade triangular.

Sobre o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ destaco ainda que b é o valor da ordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo Oy . De fato se $x = 0$ tenho $f(0) = b$, portanto o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico. Ainda a é a inclinação ou coeficiente angular dessa reta.

Em resumo, usando conhecimentos de Geometria Analítica, o gráfico de qualquer função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo Oy , e, reciprocamente, toda reta não vertical tem equação $y = ax + b$, e, portanto, é o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$.

Um processo importante no tratamento de funções é o trânsito de uma representação para a outra. As três principais representações de uma função, pelo menos em um nível elementar, são: tabela, fórmula e gráfico.

A representação na forma de tabela pode advir de um experimento, e nesse caso, precisamos ter métodos para distinguir qual a melhor função a ser usada para representar os dados da tabela e refletir as propriedades do fenômeno que está sendo estudado. Em situações mais simples, pode-se plotar os pontos da tabela em um gráfico e, a partir da

distribuição desses pontos, propor um tipo de função. Por exemplo, se os pontos plotados estão em uma linha aproximadamente reta, essa função poderá ser uma função afim. Nesse caso podemos lançar mão de um algoritmo de aproximação para obter a fórmula da função afim. Em uma situação mais simplista pode-se escolher dois pontos bem posicionados e com eles obter a fórmula da função.

Um método mais acurado consiste em examinar os dados da tabela e procurar propriedades de caracterização de funções que eventualmente eles possam refletir. A função afim tem uma caracterização baseada no Teorema que vem a seguir:

Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Pondo $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Considero $\varphi(x)$ uma função crescente. O caso em que $\varphi(x)$ é decrescente pode ser tratado de forma análoga análogo.

Para a demonstração vou seguir a sequência (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1).

Suponho inicialmente que (1) seja verdadeiro. Vou primeiro estender a condição (1) provando que $\varphi(rx) = r\varphi(x)$ para todo número racional r e para todo número real x . Seja $r = m/n$, com m e n inteiros, e n diferente de 0. Tenho que:

$$n\varphi(rx) = \varphi(nrx) = \varphi(mx) = m\varphi(x),$$

portanto

$$\varphi(rx) = \frac{m}{n}\varphi(x) = r\varphi(x).$$

Seja $a = \varphi(1)$. Como $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 1) = 0 \cdot \varphi(1) = 0$, a monotonicidade de φ resulta em $a = \varphi(1) > \varphi(0) = 0$. Portanto a é positivo. Ainda, $\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r \cdot \varphi(1) = r \cdot a = a \cdot r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Para provar que (1) \Rightarrow (2), preciso mostrar que $\varphi(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vou usar o método da contradição.

Suponho que exista um número real x (necessariamente irracional) tal que $\varphi(x) \neq ax$. Admito que $\varphi(x) < ax$ (o caso $\varphi(x) > ax$ é estudado da mesma forma). Tenho que $\frac{\varphi(x)}{a} < x$. Então existe um número racional r tal que $\frac{\varphi(x)}{a} < r < x$. Portanto $\varphi(x) < ar$, ou seja, $\varphi(x) < \varphi(r)$. Isso é uma contradição, pois φ é uma função crescente e $r < x \Rightarrow \varphi(r) < \varphi(x)$. Isso conclui a demonstração de que (1) \Rightarrow (2).

Vou provar agora que (2) \Rightarrow (3). Tenho que $\varphi(x) = ax$ para todo x real. Portanto:
 $\varphi(x + y) = a(x + y) = ax + ay = \varphi(x) + \varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Dessa forma posso afirmar que (2) \Rightarrow (3).

Finalmente estudando o caso (3) \Rightarrow (1), vou verificar a implicação inicialmente para $n \in \mathbb{N}$. Sei que $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ por (3). Assim para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $\varphi(nx) = \varphi(x) + \varphi(x) + \dots + \varphi(x) = n\varphi(x)$.

Portanto vale (1) para $n \in \mathbb{N}$.

Noto agora que $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = 0$. Portanto
 $0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x)$ e, conseqüentemente,
 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja então $n \in \mathbb{Z}_-$. Tenho $\varphi(nx) = \varphi(-(-nx)) =$
 $= -\varphi((-n)x) = -(-n)\varphi(x) = n\varphi(x)$, portanto a relação vale também para inteiros negativos.

Dessa forma posso confirmar que (1) \Rightarrow (2), que (2) \Rightarrow (3) e que (3) \Rightarrow (1) e obter a validação do Teorema da Proporcionalidade.

Segue agora um resultado que permite caracterizar funções afins:

Teorema: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h , mas não de x , então f é uma função afim.

Demonstração: A demonstração desse teorema depende da aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, verificado anteriormente.

Suponho que a função f seja crescente. Noto que

$$\begin{aligned} h_1 < h_2 &\Rightarrow x + h_1 < x + h_2 \Rightarrow f(x + h_1) < f(x + h_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x + h_1) - f(x) < f(x + h_2) - f(x) \Rightarrow \varphi(h_1) < \varphi(h_2) \end{aligned}$$

Então $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é crescente. Também tenho que $\varphi(0) = f(x + 0) - f(x) = 0$.

Para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\begin{aligned} \varphi(h + k) &= f(x + h + k) - f(x) = \\ &= f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + k) - f(x) = \\ &= \varphi(h) + \varphi(k). \end{aligned}$$

Portanto φ satisfaz a condição (3) do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Pondo $a = \varphi(1)$, tenho que $\varphi(h) = ah$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Ou seja, $f(x + h) - f(x) = \varphi(h) = ah$. Chamo $f(0) = b$. Fazendo $x = 0$ na expressão tenho:

$$f(0 + h) - f(0) = ah \Rightarrow f(h) - b = ah \Rightarrow f(h) = ah + b$$

Logo $f(x)$ é afim.

Se a função f for decrescente, a demonstração é análoga. Com isso termino a demonstração do teorema.

A aplicação desses resultados pode ocorrer em várias situações. Do ponto de vista das ciências experimentais uma experiência de laboratório ou medições feitas na natureza podem gerar uma tabela relacionando duas variáveis. Se a relação for unívoca, preciso de uma propriedade que possa indicar se os dados da tabela correspondem a uma função afim. Para essa finalidade observo o resultado a seguir:

Teorema: Se uma função monótona $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots$ então f é uma função afim.

Demonstração: Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = f(x) - f(0)$. Sei que $\varphi(0) = 0$, pois $\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0$.

Vou observar agora que $\varphi(x)$ também transforma uma progressão aritmética (PA) $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ em outra PA $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_i), \dots)$. Por hipótese, $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), \dots)$ é uma PA, então

$$f(x_i) = f(x_1) + (i - 1)r,$$

em que $r \in \mathbb{R}$ é a razão da PA.

Isso implica que $\varphi(x_i) = f(x_i) - f(0) \Rightarrow \varphi(x_i) = f(x_1) + (i - 1)r - f(0) \Rightarrow \varphi(x_i) = (f(x_1) - f(0)) + (i - 1)r \Rightarrow \varphi(x_i) = \varphi(x_1) + (i - 1)r$.

Assim posso afirmar que $\varphi(x)$ transforma uma PA em PA de mesma razão r .

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $(-x, 0, x)$ são termos de uma PA. Como f e φ transformam PA em PA, então $(f(-x), f(0), f(x))$ e $(\varphi(-x), \varphi(0), \varphi(x))$ são PA's. Tenho

$$f(0) - f(-x) = f(x) - f(0) \Rightarrow 2f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(0) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Usando esse valor de $f(0)$ obtenho:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - f(0) \Rightarrow \varphi(x) = f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varphi(x) &= 2f(x) - f(x) - f(-x) \Rightarrow 2\varphi(x) = f(x) - f(-x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= f(-x) - f(0) \Rightarrow \varphi(-x) = f(-x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varphi(-x) &= 2f(-x) - f(x) - f(-x) \Rightarrow 2\varphi(-x) = f(-x) - f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi(-x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} \end{aligned}$$

Concluo que $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fixo $x \in \mathbb{R}$. Considero a sequência $(0, x, 2x, \dots, nx, \dots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que é uma PA de razão igual a x . Suas imagens por φ : $0, \varphi(x), \varphi(2x), \dots, \varphi(nx)$ formam uma PA de razão $\varphi(x)$. Segue que $\varphi(nx) = n\varphi(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $n \in \mathbb{Z}_-$ tenho que $-n \in \mathbb{N}$ e logo vale $\varphi(nx) = -\varphi(-nx) = -(-n\varphi(x)) = n\varphi(x)$.

Concluo que a igualdade $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade segue que φ é linear, ou seja, $\varphi(x) = ax$. Tomando $f(0) = b$, tenho

$$\varphi(x) = f(x) - f(0) \Rightarrow f(x) = \varphi(x) + f(0) \Rightarrow f(x) = ax + b, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, se tenho uma tabela expressando dados na forma de pares ordenados (x, y) com valores em x igualmente espaçados, e se os valores correspondentes em y forem igualmente espaçados dentro de uma boa aproximação, posso propor uma função afim como modelo do fenômeno estudado. Para achar essa função posso utilizar algum algoritmo que permita obter a função que melhor se aproxima dos valores médios dos dados. Um dos algoritmos mais utilizados é o chamado método dos mínimos quadrados cuja descrição pode ser vista em Ruggiero (1988).

1.7. O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM SEGUNDO ALGUNS LIVROS DIDATICOS

Nessa seção faço uma análise de como alguns autores de livros didáticos desenvolvem o estudo dos conceitos e propriedades da função afim.

1.7.1. DANTE, L.R., Matemática: volume único – 1ª edição – São Paulo: Ática 2005. 464 p.

O autor aborda a função afim passo a passo, apresentando a cada vez um pouco de teoria seguida de exemplo e exercícios. A abordagem do conceito de função afim é feita através de exemplos de expressões que envolvem grandezas da matemática financeira e da cinemática. A seguir explora o fato de $f(x)$ poder ser representado por y ou receber outro nome como $s(x)$. Nesse ponto o autor procura esclarecer bem as notações que está usando. A função afim é então apresentada na forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ e são citados e exemplificados alguns tipos de função afim (constante, identidade, linear e translação).

Na sequência o autor destaca o que ele denomina valor inicial da função, a saber, $f(0)$. Explica também como obter a expressão de uma função afim dados dois valores distintos. Explica também o que é taxa de variação de uma função afim, e que essa taxa é o valor a da expressão $f(x) = ax + b$. O autor cita também que uma função afim transforma uma progressão aritmética em outra progressão aritmética.

Em seguida apresenta gráficos de função afim e faz uma reflexão acerca do seu comportamento. Para isso usa perguntas como “Qual o formato?”, “Onde o gráfico intercepta o eixo?”, “A função é crescente ou decrescente?”, “Qual a declividade do gráfico?”, e aproveita cada pergunta para explicar o conceito. Na sequência faz o estudo do sinal e, para encerrar, explica a relação entre proporcionalidade e função afim.

Ao fim de cada assunto o autor apresenta exercícios para que o estudante aplique sistematicamente o que foi apresentado. E usa também exercícios contextualizados para proporcionar uma conexão entre a teoria e a prática. Os contextos apresentados são relativos à Geometria, valores de serviços que possuem custo inicial e custo adicional de acordo com o consumo, deslocamento de um móvel, depreciação do valor de um bem, transformação de unidades de medida, entre outros.

O texto traz também exercícios sobre gráficos de função afim, alguns pedem que os estudantes construam tais gráficos no plano cartesiano a partir de suas expressões. Outros exercícios solicitam que sejam determinados os pontos onde o gráfico da função

intercepta os eixos do plano cartesiano ou que seja determinada a expressão da função a partir do seu gráfico. Também são utilizadas funções definidas por partes e é solicitada a construção dos gráficos das mesmas. Situações contextualizadas são utilizadas em menor quantidade nos problemas sobre gráficos.

1.7.2. IEZZI, G.; DOLCE O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. Matemática: volume único – 5ª edição – São Paulo: Atual, 2011. 720p.

Esse autor apresenta a função afim com exemplos do dia-a-dia na forma textual e, a partir de algumas informações, transcreve o problema para a linguagem algébrica e comenta várias propriedades como qual o valor do coeficiente angular e qual o termo independente de x . A seguir usa a expressão algébrica de uma função afim para construir uma tabela de valores com colunas correspondentes a x e a y . Essa tabela contém os pontos de interseção com os eixos do plano cartesiano. Usando essa tabela constrói o gráfico da função.

Depois propõe exercícios de aplicação direta das propriedades vistas, destacando o coeficiente angular e o coeficiente independente. Pede para construir o gráfico a partir da expressão de funções afim e pede para obter a expressão da função a partir de seu gráfico, pede também determinar o ponto em que o gráfico das duas funções se interceptam.

O autor apresenta o conceito de proporcionalidade entre duas grandezas e também destaca que a função afim descreve grandezas proporcionais. Nos tópicos seguintes o autor faz o estudo do sinal das funções afim e apresenta alguns problemas contextualizados. Para o estudo da proporção são utilizadas algumas situações-problema como cálculo da densidade demográfica, custo total de um serviço dado o preço fixo e o variável, crescimento de produção estudado por meio de uma função afim, entre outros.

Os gráficos das funções são construídos a partir de suas expressões algébricas. São apresentadas técnicas para se obter a raiz da função afim e se observa que o termo independente é o valor em que o gráfico intercepta o eixo Oy . A classificação de uma função afim em relação a seu comportamento (crescente ou decrescente) é associada ao sinal do coeficiente angular a na expressão $f(x) = ax + b$. São apresentados exercícios

de fixação com aplicação direta do que foi estudado e o autor propõe uma série de problemas para que o estudante consiga utilizar os conhecimentos de função afim em contextos interdisciplinares.

1.7.3. PAIVA, M.R., Matemática: Conceitos, Linguagem e Aplicações – Volume 1. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2002.368p.

O capítulo referente à função afim é iniciado com o que o autor denomina conceituação. Faz aí uma abordagem formal das propriedades da função afim. Para esse autor uma função é afim quando for da forma $f(x) = ax + b$ com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Depois apresentada uma tabela com pontos de uma função afim, plota esses pontos num sistema cartesiano e desenha a reta que os contém.

São citados exemplos com aplicações da função afim no cotidiano e nos exemplos se faz um estudo do gráfico das retas que representam as funções apresentadas. Assim como outros autores, após a construção do gráfico da função afim, faz o estudo do sinal da mesma e insere problemas contextualizados após a realização de exercícios teóricos.

1.7.4. SOBRE A ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Ao analisar os livros apresentados anteriormente, percebo que a abordagem do conceito de função afim é feita de forma muito similar pelos autores. O conceito é visto de forma teórica e são inseridas algumas situações com contexto para exemplificar o que foi apresentado. Os exercícios inicialmente exploram a aplicação de técnicas para obter um gráfico, uma expressão ou para que o estudante note alguma propriedade da função afim. No fim do capítulo ou da série de exercícios, são apresentados problemas que trazem situações cotidianas ou das outras ciências.

Não há nenhuma referência, nos livros didáticos consultados, sobre o possível uso de uma atividade experimental. Não há sugestões de atividades ou experimentos para que o estudante investigue e encontre num problema proposto propriedades da função afim.

1.8. ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES E FUNÇÃO AFIM

Seguem algumas considerações importantes relativas ao ensino de função, em particular da função afim, presentes na minha prática docente e na experiência de alguns autores de publicações especializadas.

1.8.1. COMO APRESENTAVA A FUNÇÃO AFIM PARA OS ESTUDANTES

Durante minha prática docente apresento as funções aos estudantes a partir de uma aula sobre noções intuitivas de função, na qual são analisados alguns problemas que podem ser expressos através de gráficos, tabelas ou expressões matemáticas. Em seguida é feito o reconhecimento de uma função através da relação entre conjuntos, nesse momento também identifico o domínio, o contradomínio e a imagem de funções representadas por diagramas de flechas. Outros aspectos vistos na introdução a funções são as formas de obter as raízes de uma função, a imagem de um valor apresentado para a variável e o valor da variável para uma imagem apresentada. É feito o estudo de alguns gráficos para que o estudante entenda algumas propriedades das funções, como a classificação em função crescente, decrescente e constante, visualização de uma raiz no plano cartesiano, relação entre o par ordenado que representa um ponto e os valores da variável x e sua imagem $f(x)$, entre outros. São propostos exercícios onde há apenas a aplicação direta do conceito apresentado e também alguns problemas referentes a situações contextualizadas da Matemática e das outras áreas do conhecimento. Enquanto apresento as explicações procuro estabelecer um diálogo com os estudantes, fazendo perguntas com vários exemplos.

A partir do que foi estudado sobre função de forma geral apresento aos estudantes a função constante. São observadas suas representações gráfica e algébrica. Após o estudo da função constante inicio o estudo da função afim apresentada na forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Primeiro dou exemplos usando situações cotidianas, como cálculo do custo

da conta de telefone ou de uma corrida de táxi, e proponho que eles resolvam situações semelhantes e sempre peço para que eles mesmos construam a forma algébrica da função. A partir do raciocínio desenvolvido pelos estudantes acerca nos exemplos apresentados passo a usar a expressão algébrica $f(x) = ax + b$ aproveito as funções que apareceram nos exemplos para construir seus gráficos.. Solicito que os estudantes façam reflexões acerca do comportamento do gráfico e atribuição de significado aos pontos obtidos, como por exemplo “o que significa para esse problema a interseção do gráfico com os eixos?” ou “qual a relação entre os valores apresentados no par ordenado que representa um ponto do gráfico obtido?”. Outra característica importante do gráfico é que ele permite a visualização da função afim como crescente ou decrescente e sua relação com o problema proposto.

A seguir desenvolvo com os estudantes o processo inverso, dado o gráfico de uma função afim seleciono dois pontos da reta e, a partir de um sistema que envolve duas equações e duas incógnitas, determino os valores dos coeficientes da expressão algébrica que define a função afim representada.

Após o estudo de cada uma das partes apresentadas sobre a função afim, proponho uma série de exercícios que envolve situações de aplicação direta e situações contextualizadas, que trazem exemplos das outras áreas do conhecimento.

1.8.2. OBSEVAÇÕES DE ALGUNS AUTORES SOBRE A ABORDAGEM DO TEMA FUNÇÕES

Essa seção traz algumas observações que autores pesquisadores fazem sobre o ensino de funções. Algumas das deficiências relativas ao ensino de funções são provenientes da maneira como os professores abordam o tema funções em suas aulas, outras são consequência das falhas de formação desses alunos em relação aos conteúdos estudados no Ensino Fundamental.

Uma dificuldade relativa ao ensino de funções pode estar associada à ausência das práticas interdisciplinares e contextualizadas, ou seja, à segmentação existente entre o “prático” e o “teórico”. Segundo Zuffi & Pacca (2000), na introdução dos conteúdos, os

estudantes são apresentados ao que é denominado “teórico”. Esse é o momento em que o conceito é apresentado de maneira formal. Numa segunda parte da exposição o conceito é relacionado ao “prático”, e aí são inseridas as situações-problemas. Na pesquisa desenvolvida pelas autoras, constata-se que os professores acreditam que o entendimento do conceito de função só é efetivado no momento em que os exemplos práticos são estudados.

Outros aspectos a serem considerados, que podem dificultar a interdisciplinaridade relativa ao ensino de funções, são os obstáculos encontrados pelo professor de Matemática diante dos conteúdos próprios das outras ciências (Física, Química e Biologia). Esses obstáculos podem impedir que o professor relacione conceitos matemáticos e conceitos das outras ciências. Em algumas situações a relação é muito direta. Por exemplo a função $s(t) = s_0 + vt$ do movimento retilíneo uniforme é claramente uma função afim, mas o estudante pode não perceber esse vínculo se isso não for trabalhado pelo professor.

A dificuldade relativa aos conceitos de outras ciências pode acarretar outro problema. Trata-se da ausência, no ensino de funções, do uso de experimentos. Sobre isso Zuffi (2010) comenta na página 8:

“..., não foi evidenciada com os professores nenhuma intenção em usar materiais concretos para introduzir ou justificar a apresentação do conceito de função aos seus alunos. Entretanto alguns deles demonstravam uma leve preocupação em apresentar “situações concretas”, relacionadas a problemas da vida diária, em que a noção de função pudesse ser empregada. Mas o que se verifica em sala de aula é uma apresentação de pouquíssimas dessas “situações concretas”, que ocorrem apenas no início do tratamento do conceito, e que depois são abandonadas. O que segue é uma linguagem de algoritmos usada no tratamento do conceito, com o objetivo de resolver os problemas dos cálculos com as expressões algébricas.”

Angotti et al.(2003) ressaltam a dificuldade que os estudantes têm de transitar entre as diferentes representações e de aplicar os conteúdos estudados de maneira interdisciplinar:

“Entretanto, apesar das inúmeras pesquisas envolvendo o ensino e a aprendizagem do conceito de função, ainda são grandes as dificuldades apresentadas pelos educandos do ensino fundamental e médio no seu aprendizado como meio e fim universais. Dentre estas está a inabilidade de construir conexões entre as diferentes representações de funções: fórmulas, tabelas, diagramas, gráficos, expressão verbal das relações, e, ainda, em estabelecer interações com outras áreas do conhecimento que fazem uso dessas mesmas representações, situadas em contextos diferentes.”

Ao propor uma atividade contextualizada e interdisciplinar, Macedo (2011) desenvolve um experimento na construção de sua proposta pedagógica. Em sua dissertação traz os registros dessa atividade experimental, que consiste na observação do escoamento de um líquido. Após a realização da atividade experimental, os estudantes obtiveram a função matemática que descreve o escoamento do líquido.

Na proposta de Macedo (2011), após a obtenção dos dados discretos a partir da experimentação, os estudantes realizaram a transposição dos mesmos para o contínuo através das funções. Observaram a partir do estudo desses dados, que uma função quadrática poderia descrevê-los e utilizaram um aplicativo computacional para determinar sua expressão algébrica. Após a construção dos gráficos fizeram a construção dos mesmos.

Macedo (2011, p.42) resalta em sua proposta pedagógica a ausência de situações experimentais interdisciplinares nos livros didáticos e justifica a necessidade da utilização dessas situações:

“Um aluno dedicado que esteja decidido a estudar pode aprender o que está em quaisquer dos livros analisados sem

auxílio do professor, tal é a clareza como os assuntos são desenvolvidos. A apresentação de gráficos e tabelas facilitam o entendimento do que é uma função, todavia, em nenhum momento o aluno participa da elaboração de seu conhecimento, não existe proposta para que o aluno realize um experimento prático envolvendo outras disciplinas, ele não é estimulado a desenvolver qualquer tipo de atividade prática onde ele possa fazer descobertas, em que possa interagir com seus colegas.

A ideia de iniciar o estudo de funções com história da matemática e com exemplos do cotidiano atende às sugestões dos PCN's descritas no item 2.3, contudo, acreditamos que seria mais interessante para o aluno comprovar esse fato realizando um experimento.”

Silva (2014) desenvolveu um produto pedagógico onde, através de folhas de atividades, relacionou os conceitos de função afim e quadrática com a cinemática. Dessa forma o conteúdo não foi apresentado aos estudantes através de fórmulas e aplicações diretas das mesmas. A autora apresentou nessas folhas de atividades, situações problemas contextualizadas e cotidianas acerca das funções afim e quadrática. As situações gráficas também foram exploradas em seu trabalho; os alunos fizeram a interpretação de gráficos em algumas situações e construção de gráficos em outras.

Silva (2014, p.47) destaca a necessidade da preocupação em apresentar situações que envolvam diferentes representações para que os estudantes aprendam significativamente os conteúdos relativos às funções:

“Nossa preocupação é de proporcionar aos estudantes oportunidades de realizar uma construção significativa do conceito de função e adquirir algumas técnicas para reconhecer esses objetos e transitar de um tipo de representação para outra.”

Prospero (2013) comenta que existem poucas situações em sala de aula que permitam discussão e observação de detalhes acerca do que compõe uma função. Em situações-problema os estudantes geralmente não identificam quais são as variáveis, o domínio e a imagem. Cita a participação dos estudantes em atividades práticas como algo que permite um aprendizado com significados.

Em sua proposta pedagógica aquele autor realiza com seus estudantes a construção de caixas a partir de folhas de papelão e, a seguir, eles observam o que acontecia com o volume da caixa de acordo com os recortes que fizessem para a confecção da mesma.

A relação de dependência entre os recortes da folha de papelão e o volume da caixa construída foi explorada pelos estudantes de forma prática. Em seguida foi obtida uma fórmula que apresentava o volume em função da variável envolvida no recorte.

Prospero (2013) implementou essa proposta para amenizar as dificuldades relativas a um ensino sem significado prático para os estudantes. Segundo ele, as dificuldades relacionadas à compreensão dos conceitos de funções podem ser consequência da maneira como ela é abordada. Ainda afirma que as dificuldades relativas ao aprendizado de funções podem ser consequência da maneira como o tema é apresentado aos estudantes, através de aulas expositivas e de maneira abstrata.

Bernardini (2013) enfatiza que as funções são apresentadas como fórmulas e definições e que ao final dessa apresentação são aplicados inúmeros exercícios em que o estudante pode realizar cálculos excessivos, havendo a possibilidade de que nenhum significado relativo ao conceito de funções seja atribuído ao que foi feito.

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

2.1. INTRODUÇÃO

Nesse segundo capítulo, discorro sobre a construção do produto didático. Apresento inicialmente as justificativas sobre a escolha da metodologia empregada na proposta, a do uso de um experimento. Em seguida, detalho as bases pedagógicas dessa proposta, discorrendo sobre os procedimentos que devem ser executados pelos estudantes e o que espero que eles aprendam em cada uma das etapas que compõem o experimento. Depois descrevo o experimento em si e apresento o roteiro de sua execução a ser seguido em sala de aula.

Este capítulo corresponde à segunda fase da proposta de validação da Engenharia Didática, que trata da concepção e análise a priori da proposta didática. Essa é a proposta de intervenção que aplicarei em sala de aula e se destina a contribuir com a superação de alguns problemas que observei em minhas análises prévias sobre o ensino da função afim.

Estão presentes no atual capítulo observações sobre as motivações das escolhas feitas para a composição da proposta pedagógica. Além disso, é destaque desse capítulo a justificativa da utilização de uma atividade experimental.

O capítulo é finalizado com o planejamento da aplicação da atividade experimental. Inclui as orientações sobre o que o estudante deve fazer para executar o experimento, e os métodos que devem ser utilizados, por exemplo, os diferentes recursos de representação gráfica e de representação algébrica da relação entre as grandezas envolvidas no experimento.

2.2. IDEIAS E MOTIVAÇÕES PRESENTES NO USO DE UM EXPERIMENTO

Discorro nessa seção sobre o uso de experimentos científicos no Ensino Médio. Observo inicialmente que essa proposta é, em geral, adotada para as áreas de ciências experimentais, que são a Física, a Química e a Biologia. Mas, conforme coloco mais à frente, os experimentos são, em geral, completados por uma Modelagem Matemática. Portanto eles também são do interesse do ensino de Matemática. O estudante precisa tomar contato com a arte de usar a Matemática para explicar fenômenos naturais. Por outro lado, essa atividade pode servir de instrumento para o ensino de conceitos e técnicas matemáticas.

Os professores em geral acreditam que as atividades experimentais enriquecem o ensino de Ciências. Isso foi constatado pela pesquisa de Galliazzi et al (2001). Por outro lado, esses mesmos autores concluem, diante de uma pesquisa realizada com professores do Ensino Médio, que as atividades experimentais são pouco aplicadas na escola.

Os autores supracitados propõem o uso de experimentos no ensino de Ciências. Para isso apresentam vários motivos para a realização de atividades experimentais. Alguns desses motivos são: estimular a observação acurada e o registro cuidadoso dos dados; promover métodos de pensamento científico simples e de senso comum; desenvolver habilidades manipulativas; trabalhar com resolução de problemas; esclarecer a teoria e promover sua compreensão; vivenciar o processo de encontrar regularidades por meio da investigação; motivar e manter o interesse na matéria.

Galliazzi et al (2001) ainda destacam os objetivos educacionais no uso de experimentos, alguns deles são: melhorar a aprendizagem da teoria; aprender, por meio da prática, conceitos científicos; verificar fatos e princípios estudados teoricamente; aprender a natureza e os métodos da Ciência e as complexas interações entre Ciência, tecnologia, sociedade e ambiente; descobrir as leis científicas por meio da experiência; apreciar o papel do cientista em uma investigação; ter uma visão de conjunto das diferentes ciências.

Quanto aos objetivos educacionais relativos ao saber e ao saber fazer destaco: julgar a qualidade de um plano experimental; propor hipóteses para solucionar problemas sugeridos; desenvolver a observação; desenvolver habilidades manipulativas; recolher

rigorosamente os dados; analisar dados para obter conclusões; expor resultados e conclusões; desenvolver o raciocínio; usar computadores para compilação e manipulação de dados.

Finalmente, quanto aos objetivos educacionais relativos ao ser, destaco: ficar motivado; desenvolver atitudes científicas, como a consideração às ideias de outras pessoas, e com a objetividade e a cautela para não emitir juízos apressados; desenvolver a iniciativa pessoal; manter um contato menos formal com os docentes; desenvolver a capacidade de trabalhar em grupo.

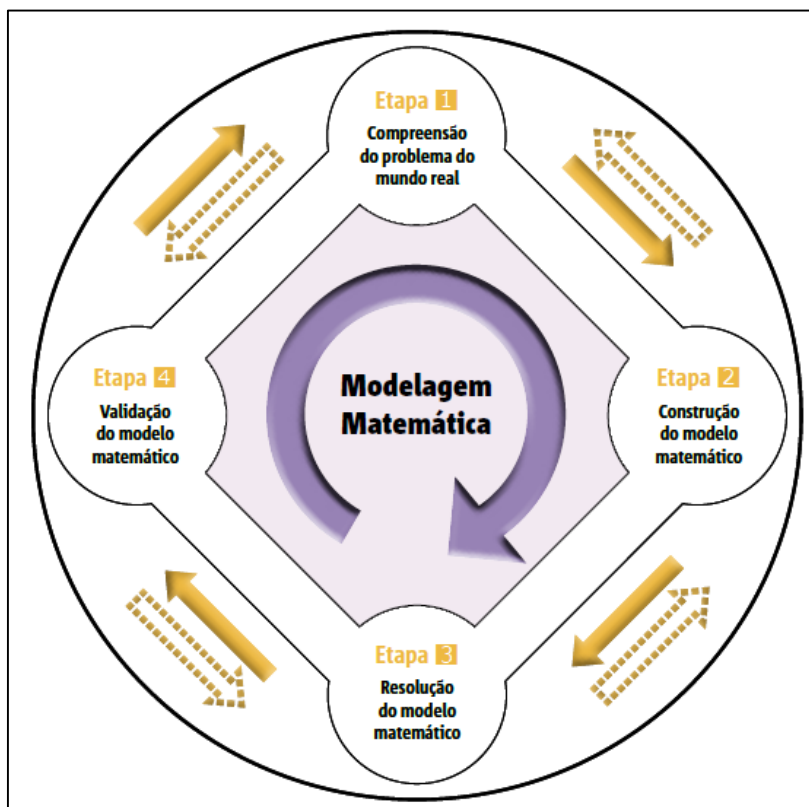
Observo que os experimentos são muito importantes também para o ensino da Matemática, e não apenas para o ensino das Ciências. Um experimento, em geral, faz uso de medidas, e é uma oportunidade para o estudante aprender, ou mesmo recordar, os sistemas de medida. Pode mesmo ocorrer a necessidade de serem usadas transformações de um sistema de medida para outro. Os números que assim surgem são, geralmente, representados no sistema decimal, e o estudante tem uma oportunidade de manipular esses números. O registro desses números deve ser feito de forma cuidadosa e bem organizada, resultando, por exemplo, em uma tabela. Aqui aparece a oportunidade do estudante observar padrões numéricos, distinguir grandezas envolvidas no experimento e relações entre essas grandezas, perguntar se essa relação é uma função. Tudo isso colabora no processo de aprendizagem da Matemática e enriquece o ensino de seus conceitos.

A fase de um experimento em que concorrem conceitos e técnicas matemáticas é chamada genericamente de “Modelagem Matemática”. Vou discorrer um pouco sobre o significado dessa ideia devido à sua importância para o ensino da Matemática.

Alguns fenômenos naturais podem ser descritos através de um processo chamado Modelagem Matemática. Aplicando ferramentas matemáticas adequadas no gerenciamento de dados obtidos na análise de um fenômeno natural pode-se entender melhor o seu comportamento e fazer previsões de propriedades que não haviam sido notadas inicialmente.

A Modelagem Matemática pode ser compreendida observando-se suas quatro etapas principais. Essas etapas estão descritas em um diagrama extraído de Malagutti e Giraldo (2013):

FIGURA 1 – Imagem do esquema com as etapas da modelagem matemática



Fonte: Malagutti e Giraldo (2013)

Na minha proposta pedagógica a etapa 1 consiste na realização da atividade experimental e na observação dos fenômenos envolvidos. A etapa 2 depende dos registros realizados na atividade experimental e da observação do fenômeno. Nesse momento os estudantes vão utilizar conhecimentos matemáticos prévios para escolher o modelo que relaciona as grandezas envolvidas. Em seguida, na etapa 3, o estudante faz a generalização a partir das relações investigadas e do modelo obtido na segunda etapa. Finalmente na etapa 4, o estudante compara o que foi obtido matematicamente com o problema real apresentado inicialmente e ocorre então a validação do modelo matemático.

Segundo Malagutti e Giraldo (2013) as atividades que envolvem Modelagem Matemática têm sido negligenciadas na formação dos estudantes. Os autores afirmam que essas atividades podem oferecer a oportunidade para o estudante vivenciar matérias

interdisciplinares, uma vez que atividades experimentais permitem o estudo de situações contextualizadas que interligam várias disciplinas.

Nem todas as turmas de Ensino Médio têm aulas no laboratório. Conforme foi observado, nas escolas brasileiras os estudantes de Ensino Médio têm poucas aulas com experimentos. Mesmo se a escola tiver laboratório, ele é pouco utilizado.

Pelo que foi comentado anteriormente, pode-se compreender porque é muito adequado realizar experimentos no ensino da Matemática e porque adotei esse procedimento na construção da minha proposta pedagógica. Ocorre também que vivenciar uma atividade experimental é muito atraente aos estudantes. A aplicação de técnicas experimentais traz a oportunidade para os estudantes exercerem habilidades diferentes daquelas utilizadas nas aulas de Matemática, e resulta um aspecto motivacional importante. Alguns estudantes que possuem dificuldades no aprendizado da Matemática podem se sentir estimulados a participar de uma proposta que não envolve apenas cálculos na resolução de exercícios. A atividade experimental pode trazer desafios para alguns estudantes, que se sentem estimulados por uma curiosidade natural e criam ideias próprias para superar algumas dificuldades que possam ocorrer.

Ao aplicar o experimento o professor não deve se colocar atento apenas nos aspectos técnicos. É muito importante que ele desenvolva um diálogo crítico com os estudantes e estimule o trabalho em grupo ou mesmo coletivo.

2.3. BASES DA CONSTRUÇÃO DO EXPERIMENTO E CONSIDERAÇÕES PEDAGÓGICAS

Motivada a elaborar uma proposta didática de caráter interdisciplinar fundamentada em utilizar como objeto de estudo os dados de uma atividade experimental, procurei o professor de Química de uma das escolas em que leciono e pedi ao colega sugestões sobre atividades experimentais. Essas atividades seriam realizadas em turmas de 1º ano do Ensino Médio e sua aplicação deveria ser simples, sem a utilização de recursos muito sofisticados. Outra condição para a atividade experimental é que ela deveria permitir a obtenção de uma função afim a partir da relação entre as grandezas envolvidas no experimento.

O professor de Química sugeriu um experimento que envolve a medida da densidade de uma mistura e sua relação com a quantidade de um componente da mistura. Ele propôs o uso de materiais de baixo custo para compor as misturas, e os instrumentos necessários para a obtenção dos dados seriam apenas uma balança e um recipiente graduado. Assim, a primeira etapa da proposta didática consiste em uma atividade experimental em que o estudante obtém a massa de um dos componentes, a massa e o volume da mistura obtida e, através de alguns cálculos, a densidade da mistura. Utilizando a massa e o volume da mistura calcula-se a densidade da mesma, a relação entre a densidade da mistura e a massa ou volume de um dos componentes presente na mistura estabelece uma função afim.

A atividade experimental proposta não depende de instrumentos sofisticados. Os recursos necessários são simples, inofensivos e de baixo custo. Como é indispensável o uso de balança no experimento, foram adquiridas pequenas balanças cuja precisão é obtida através de equilíbrio. Para aferir o volume pode-se utilizar qualquer recipiente que apresente marcações em dezenas de mililitros. O experimento não oferece riscos à saúde dos estudantes. Pode ser realizado mesmo se a escola não tiver um laboratório, são necessárias apenas pequenas mesas.

Passo a descrever cada etapa do experimento, relatando qual a ideia predominante e o que se espera que os estudantes aprendam.

A primeira fase do experimento consiste na obtenção de dados numéricos. É preparada uma certa mistura com medidas previamente especificadas, e a partir da mistura, obtém-se o valor de uma grandeza. Chamarei de u o valor inicial usado para construir a mistura, e de D o valor obtido com a mistura. Assim a primeira tarefa dos estudantes consiste em compreender que o experimento relaciona essas duas grandezas, com D em função de u . Considerando valores igualmente espaçados de u , e usando os instrumentos do experimento, obtém-se os valores correspondentes de D . Isso fornece uma tabela de valores com duas colunas, uma com os valores de u e outra com os valores correspondentes de D . Os estudantes devem compreender que essa tabela de valores numéricos é o resultado imediato do experimento, que fica descrito por esse sistema de representação.

Na segunda parte dos trabalhos entra o que chamo de Modelagem Matemática. Os estudantes devem compreender que é necessário usar algum método de análise dos dados numéricos. A proposta é que a tabela seja convertida em um gráfico. Os valores são plotados em um sistema cartesiano com a variável u no eixo horizontal e a variável D no eixo vertical. Aqui é o momento em que o estudante poderá perceber um padrão, pois os pontos se distribuem muito próximos de uma linha reta.

No terceiro momento da análise o estudante deve compreender que a proposta é a de buscar uma função cujo gráfico inclui ou esteja bem próximo dos pontos obtidos anteriormente. É um ponto delicado do processo. Por que obter a expressão algébrica de uma função? Pode ser que nesse momento o estudante não compreenda o motivo, mas esse motivo deverá ficar claro mais adiante. Basicamente o que ocorre é que a função fornece uma descrição mais compacta do fenômeno, e sua expressão algébrica pode ser usada para fazer previsões e comparar o fenômeno com outros similares.

Para encontrar a expressão algébrica da função são utilizadas algumas técnicas que já foram ensinadas, ou, alternativamente, pode ser um momento em que o professor aproveita para comentar essas técnicas.

No quarto momento da experiência, o professor mostrará como observar outras propriedades do fenômeno usando a função.

De certo modo, o experimento pode ser encerrado aqui. Espera-se que o estudante compreenda o mecanismo básico da Modelagem Matemática e veja a utilidade das funções afim. Entretanto, tendo condições propícias, o professor pode estender os trabalhos levando os estudantes para um laboratório de informática. Ali ele pode mostrar que os dados obtidos no experimento podem ser tratados através de aplicativos computacionais que fornecem diretamente a expressão da função e seu gráfico.

Espera-se que, ao final desse estudo, o estudante aprenda a transitar por diferentes representações de uma função e como cada representação permite uma interpretação diferente. O estudante poderá também aprender ou recordar outras técnicas matemáticas, como plotar pontos no sistema cartesiano, como usar dois pontos para obter uma reta, como obter a expressão algébrica de uma função afim usando dois valores, e qual é o significado dos coeficientes de uma função afim. Verá também que o uso de aplicativos

computacionais pode facilitar a aplicação de conceitos e técnicas matemáticas no estudo de um fenômeno natural.

Para encerrar essa seção comento sobre os conhecimentos prévios que espero que os estudantes tenham para participar do experimento.

Dos conhecimentos relacionados à Química é ideal que estudante saiba o que é densidade, massa e volume de uma substância. Se não souber pode aprender nesse momento. Deve ter aprendido que a densidade de uma mistura é definida pela razão entre a massa e o volume. É bom também que tenham alguma familiaridade com o uso de um béquer para medir volume e como usar uma balança de equilíbrio para medir a massa. Entretanto a experiência prévia com esses instrumentos não é totalmente necessária, pois seu uso pode ser explicado antes do experimento.

Quanto aos conhecimentos matemáticos que serão utilizados nos trabalhos podemos esperar que tenham familiaridade com o uso de números em representação decimal com pelo menos duas casas após a vírgula, e que saibam as regras de aproximação para esses números. Suponho também que conheçam o plano cartesiano e saibam *plotar* os pontos obtidos a partir dos dados de uma tabela com duas colunas. Outros conhecimentos de Matemática podem ser usados durante o experimento, por exemplo, o uso de sistemas lineares para encontrar a expressão algébrica de uma função afim a partir de dois valores. O experimento pode ser feito antes de ser dada a definição de função afim, e seu desenrolar ocorrer concomitantemente com a apresentação dessa definição. No meu caso, abordo esses conhecimentos previamente e após a exposição da definição da função afim alterno as aulas da proposta didática com aulas de resolução de problemas.

2.4. DESCRIÇÃO E REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Nesta seção descrevo a atividade experimental e ao mesmo tempo relato como realizei a atividade pela primeira vez. O uso de uma atividade experimental no ensino requer um planejamento detalhado por parte do professor, particularmente na primeira vez em que ele vai aplicá-lo. Naturalmente o primeiro passo desse planejamento consiste na realização do experimento pelo próprio professor.

Seguindo a orientação do colega professor de Química, preparei misturas compostas por água e ureia. Os volumes das misturas foram mantidos constantes e iguais a 50mL, mas cada mistura tinha uma quantidade variável de ureia, de 5 a 30 g, com variação de 5 em 5 gramas. Dessa forma foram preparadas seis misturas, cada uma etiquetada com a quantidade de ureia.

A ureia foi escolhida para a realização da mistura porque se trata de um produto que se mistura bem com a água. A ureia foi comprada em uma casa de produtos agrícolas pois esse produto é vendido como fertilizante. Esse material é bastante conveniente devido ao baixo custo e à facilidade com que pode ser adquirido. Além disso, se usado em pequenas quantidades e por pouco tempo, não apresenta riscos à saúde. Pode ser encontrada em qualquer região do país. É verdade que se trata de uma substância com algumas impurezas, mas isso não impede a realização do experimento.

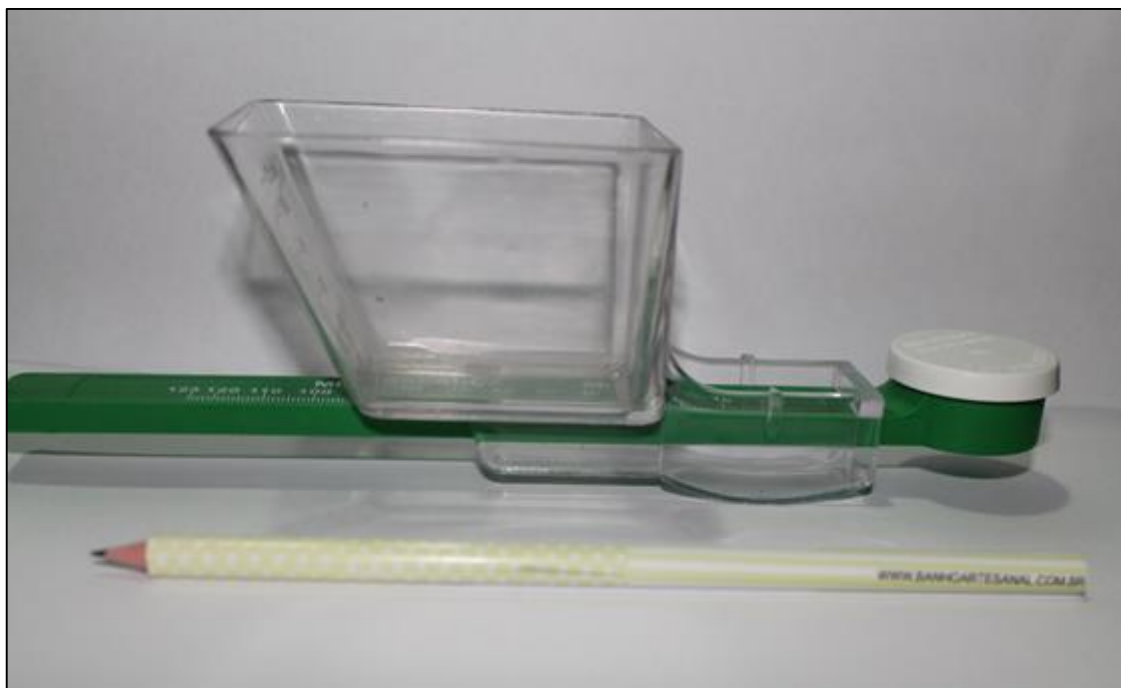
FIGURA 2 – Foto da ureia utilizada como fertilizante



Fonte: Internet

Na sequência do experimento o objetivo é calcular a densidade de cada uma das misturas. Para isso usei uma balança que permite estimar a massa de cada mistura preparada previamente. Como não havia uma balança digital disponível, e o custo da mesma é alto, foram utilizadas pequenas balanças de equilíbrio para determinação da massa. Essas balanças também podem ser adquiridas em casas de produtos agrícolas. Como as balanças são pequenas o experimento precisa utilizar volumes reduzidos de mistura.

FIGURA 3 – Foto da vista lateral da balança



Fonte: Arquivo Pessoal

FIGURA 4 – Foto da vista superior da balança

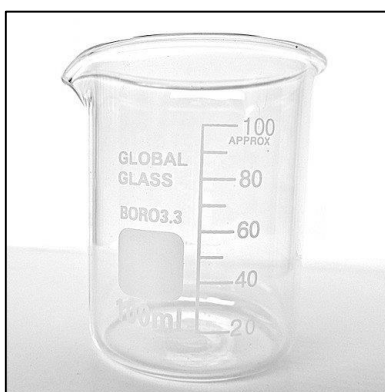


Fonte: Arquivo Pessoal

No experimento a balança é utilizada para duas finalidades. Ela serve para aferir as diferentes quantidades de ureia. Depois que a ureia é misturada com água em um béquer até o volume desejado, essa mistura é colocada no recipiente da balança para se obter a sua massa.

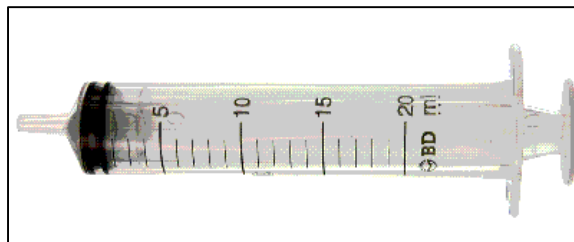
Uma seringa é utilizada para completar o volume da mistura com água e é usado uma colher para misturar os componentes para que a mesma fique homogênea e para que a substância não precipite no fundo do recipiente.

FIGURA 5 – Foto do béquer



Fonte: Internet

FIGURA 6 – Foto da seringa



Fonte: Internet

A partir de um conhecimento prévio da Química é possível calcular a densidade da mistura pela fórmula $d = \frac{m}{V}$, sendo m a massa em gramas da mistura e V corresponde ao volume em mililitros da mesma. Em uma tabela com quatro colunas dispus os dados numéricos obtidos. Segue na tabela 1 os dados do experimento realizado previamente com a mistura de ureia e água no planejamento da proposta didática:

TABELA 1 – Dados obtidos no planejamento com a mistura de ureia e água.

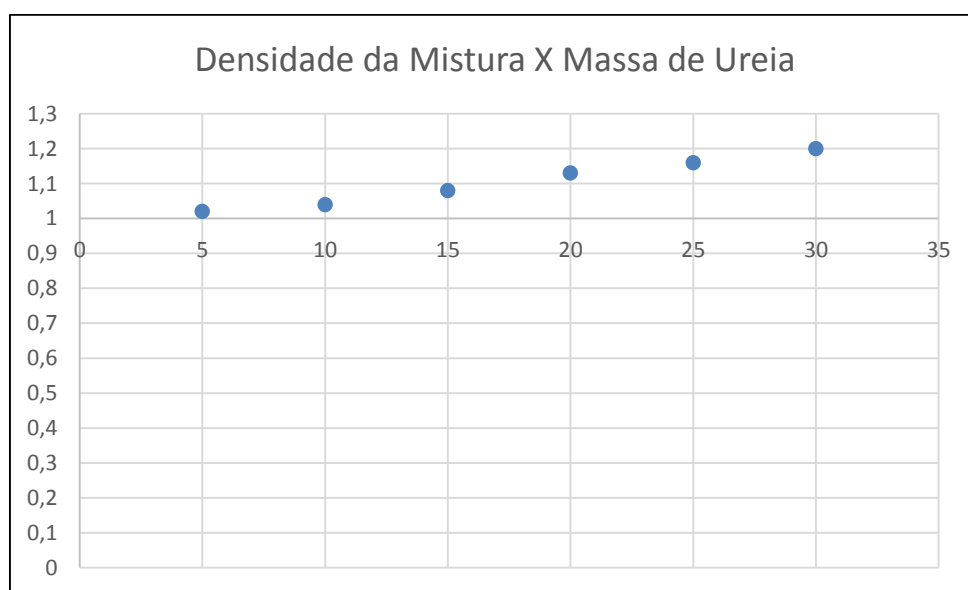
Massa de Ureia (em g)	Massa da Mistura (em g)	Volume da Mistura (em mL)	Densidade da Mistura (em g/mL)
5	51	50	1,02
10	52	50	1,04
15	54	50	1,08
20	56,5	50	1,13
25	58	50	1,16
30	60	50	1,2

Fonte: Arquivo Pessoal

O próximo passo do experimento consiste em examinar a tabela e perceber relações entre as grandezas envolvidas. No caso a proposta é examinar a relação entre as quantidades de ureia, dispostas na primeira coluna da tabela com as respectivas densidades das misturas, dispostas na quarta coluna da tabela.

Uma forma de examinar essa relação consiste em dispor os dados numéricos como pontos de um sistema cartesiano. Veja o resultado disso na figura a seguir. o eixo Ox corresponde à variável que indica a quantidade de ureia e o eixo Oy corresponde à densidade da mistura obtida com as diferentes quantidades da substância.

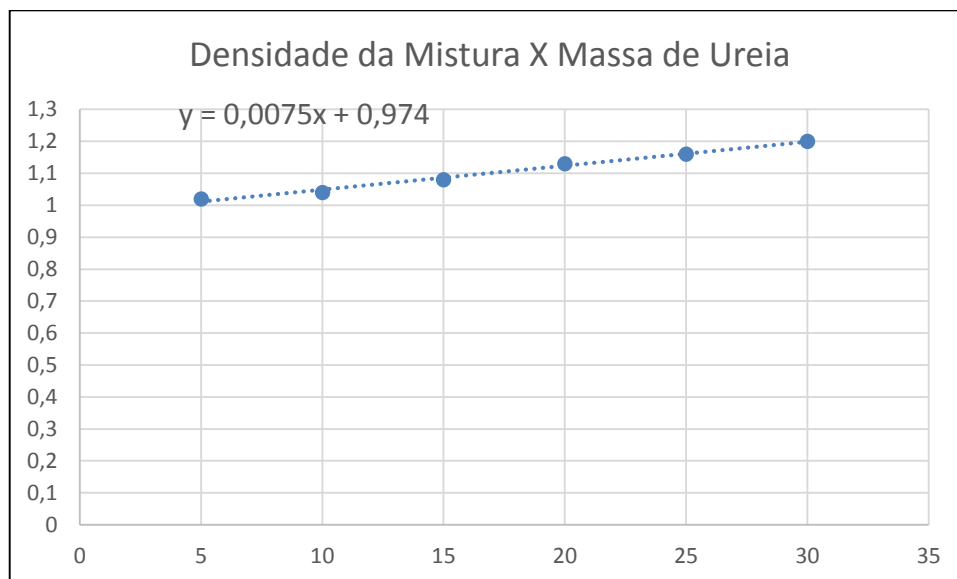
FIGURA 7 – Gráfico que traz a representação dos pontos no plano cartesiano de dados que foram obtidos através da atividade experimental com Ureia na mistura.



Fonte: Arquivo Pessoal

Utilizando um recurso do *software* Excel denominado linha de tendência visualizei a reta que representa a função afim determinada pelos pontos obtidos anteriormente. Utilizando outro recurso do *software* é possível obter a expressão algébrica da função.

FIGURA 8 – Gráfico que mostra a linha de tendência e expressão algébrica que relaciona a Densidade da Mistura e a Massa de Ureia



Fonte: Arquivo Pessoal

A realização previa da atividade experimental serviu para que eu pudesse observar muitos detalhes que deveriam ser colocados no planejamento do experimento.

2.5. ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE O EXPERIMENTO

Durante o planejamento das atividades experimentais da proposta pedagógica a ser realizada com estudantes do 1º ano do Ensino Médio pude constatar algumas dificuldades relativas à realização das mesmas.

Na composição da mistura, se a ureia entrar em contato com a água antes de aferir-se a massa a composição da mesma se altera pelo fato da ureia ser muito higroscópica. Assim foi necessário enfatizar no roteiro que os estudantes inicialmente separassem todas as quantidades de ureia, para depois utilizar a balança para medir a massa de mistura ou se a cada quantidade medida eles adicionassem água e medissem a massa da mistura, que secassem bem o recipiente da mini balança afim de não alterar as propriedades da ureia utilizada na atividade experimental.

Outro fator muito importante relativo à atividade experimental é ressaltar o cuidado para que a ureia não precipite no fundo do recipiente, é necessário misturar a água e a ureia conforme o líquido é acrescido para que a mistura composta permaneça homogênea. O cuidado com o manuseio da ureia também deve ser destacado, já que o contato com a pele, olhos ou trato respiratório pode causar irritação, portanto os alunos devem utilizar luvas para o manuseio e devem evitar a aproximação da mesma com o rosto.

No planejamento também considerei a possibilidade de realizar a atividade experimental utilizando álcool etílico e água para compor a mistura. Ao refletir sobre o gráfico e expressões obtidos na atividade com o álcool etílico e o custo da realização da mesma decidi por não realizar o experimento. Como eu gostaria que os alunos realizassem manualmente o que fiz com o auxílio do *software* Excel, fazer isso nas duas situações experimentais tornaria muito extensa a realização da proposta pedagógica, assim optei por realizar a atividade apenas com a mistura de água e ureia

O tempo necessário para a realização da proposta didática foi também um critério para a eliminação da atividade experimental com álcool etílico. Para realizar as duas atividades experimentais e solicitar aos estudantes que construíssem os gráficos relativos às duas situações manualmente utilizando os conhecimentos matemáticos para depois realizar os mesmos procedimentos utilizando o *software* Excel iria tornar o número de aulas para a aplicação da proposta pedagógica inviável.

Dessa forma optei por realizar a atividade experimental utilizando apenas a ureia e a partir dos dados obtidos os estudantes construiriam o gráfico manualmente para depois obter o mesmo por meio de um recurso computacional. Assim, para fins de planejamento, a proposta pedagógica ficou dividida em 1 aula para apresentação e utilização dos instrumentos de laboratório, 2 aulas para a atividade experimental, 1 aula para a construção do gráfico e obtenção da expressão algébrica relativa ao mesmo utilizando os conhecimentos matemáticos, 1 aula para utilizar o recurso computacional e 1 aula para a conclusão, portanto 6 aulas para a realização da proposta, segundo o planejamento.

2.6. PLANEJAMENTO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Nessa seção faço a apresentação do planejamento da aplicação da atividade experimental. Esse texto constitui a minha proposta pedagógica. Ela se desenvolve em cinco etapas, incluindo a apresentação do material utilizado no experimento, a realização em si do experimento, a construção dos gráficos e obtenção da função afim que descreve a relação entre as grandezas, a realização desses procedimentos no laboratório de informática e a conclusão dos trabalhos com uma reflexão sobre toda a atividade. A proposta é que essas cinco etapas sejam realizadas em seis aulas com duração de cinquenta minutos cada uma.

2.6.1. PRIMEIRA ETAPA

A primeira etapa da proposta pedagógica consiste em apresentar os instrumentos que os estudantes utilizarão na atividade e trazer a eles uma sugestão para a realização da atividade experimental, assim saberão como utilizar cada um dos instrumentos anteriormente apresentados.

Primeiramente deve-se explicar aos estudantes que a atividade experimental consiste em obter a densidade de diferentes misturas compostas de ureia e água. A partir dessa informação faz-se uma reflexão acerca do material que ele vai utilizar para determinar a massa e o volume de cada mistura afim de obter a densidade da mesma.

Entre os instrumentos apresentados estão a balança para aferir a massa da ureia que será acrescida de água e a massa da mistura, a seringa (ou pipeta) que será utilizada para adicionar a água à ureia anteriormente reservada, a colher utilizada para misturar os componentes e evitar que a ureia precipite no fundo do vasilhame utilizado para a mistura. Os itens de segurança também serão apresentados, deve-se sugerir que utilizem luvas para proteger as mãos do contato com a ureia e máscara para que eles não inalem a substância, evitando assim qualquer risco à saúde dos estudantes.

Depois de apresentados os instrumentos para a realização da atividade experimental e os instrumentos de segurança, o professor deve realizar a atividade

experimental para que os estudantes tenham um modelo para realizar a mesma na segunda etapa.

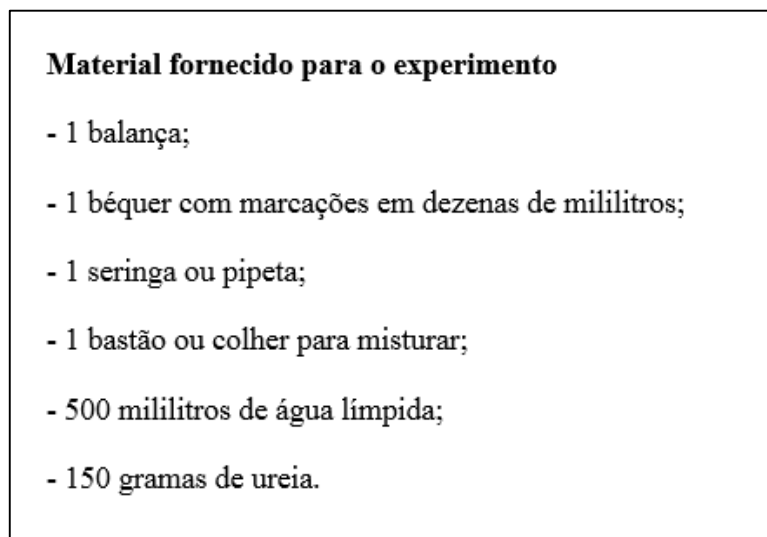
Duração da etapa: 1 aula de 50 minutos.

2.6.2. SEGUNDA ETAPA

Na segunda etapa os estudantes realizarão a atividade experimental em grupos de até 5 integrantes, para isso foi elaborado um roteiro, que é apresentado no Apêndice, com informações relevantes.

No roteiro consta o material que será utilizado, os procedimentos e instruções para obter os dados, os cuidados relativos à atividade experimental, uma tabela que será preenchida pelos estudantes conforme obtém os dados da atividade experimental e os objetivos da atividade experimental.

FIGURA 9 – Imagem da apresentação do material fornecido para a realização da Atividade Experimental



Fonte: Arquivo Pessoal

No roteiro é sugerido um procedimento para que os estudantes obtenham os dados necessários para a realização das etapas subsequentes da proposta pedagógica.

FIGURA 10 – Imagem do procedimento sugerido aos estudantes para a realização da Atividade Experimental

Procedimento Sugerido

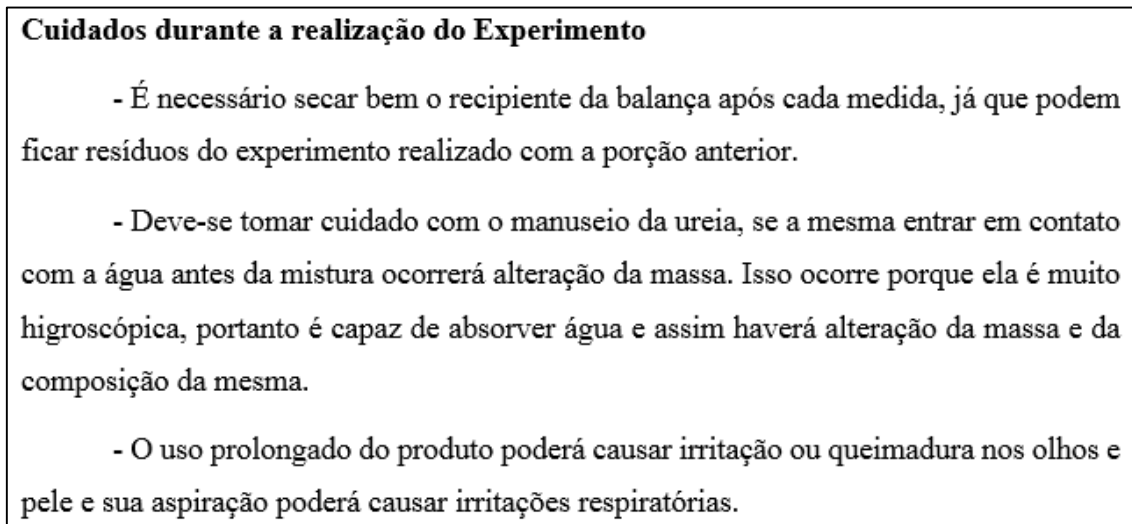
Inicialmente separe as massas de ureia (5g, 10g, 15g, 20g, 25g e 30g) para realizar as medidas, reserve as quantidades para a experimentação em diferentes recipientes (bêqueres ou pires de porcelana) identificados de acordo com a massa contida.

Em seguida, em um recipiente (bêquer) adicione uma das porções reservadas de ureia e acrescente água até completar um volume equivalente a 50mL (para haver maior precisão no volume utilize a seringa) e meça a massa para a mistura composta por cada uma das porções. Misture os componentes com uma colher ou bastão enquanto a água é acrescentada para que a ureia não fique precipitada no fundo do recipiente.

Fonte: Arquivo Pessoal

Ainda são feitas no roteiro algumas observações relativas à manipulação do material para que realizem a atividade experimental de forma satisfatória e alguns cuidados relativos segurança dos estudantes para realização da atividade experimental.

FIGURA 11 – Imagem de algumas observações sobre os cuidados relativos à Atividade Experimental



Fonte: Arquivo Pessoal

Os estudantes devem medir e reservar as diferentes massas de ureia que irão compor as misturas, a seguir adicionarão a água afim de obter misturas com quantidades de ureia diferentes e mesmo volume. Após a coleta dos dados deverão calcular a densidade de cada uma das misturas utilizando os dados obtidos experimentalmente e os conhecimentos prévios que relacionam os dados obtidos experimentalmente e a densidade da mistura e preencher a tabela que servirá para a realização da terceira etapa.

TABELA 2 – Tabela que será preenchida pelos estudantes durante a realização da Atividade Experimental

Massa de Ureia (em g)	Massa da Mistura (em g)	Volume da Mistura (em mL)	Densidade da Mistura (em g/mL)

Fonte: Arquivo Pessoal

Registre algumas observações acerca dos objetivos da atividade experimental, acredito que com os objetivos em mãos foi mais fácil orientar os estudantes durante a coleta de dados.

FIGURA 12 – Imagem dos Objetivos da Atividade Experimental

Objetivos da Atividade Experimental
<p>Através da atividade experimental o estudante poderá notar que ao misturar diferentes quantidades de certo material, alteramos a densidade de uma mistura.</p>
<p>O estudante utilizará as informações da atividade experimental para preencher uma tabela que fornecerá diferentes valores acerca das misturas realizadas.</p>
<p>Os dados da tabela serão utilizados para a confecção de um gráfico que mostra o comportamento da densidade da mistura de acordo com a quantidade de um dos componentes da mistura.</p>
<p>O estudante poderá refletir acerca das informações obtidas para determinar pontos relativos às quantidades que não foram utilizadas na atividade experimental a partir do tratamento dos dados da obtidos através da modelagem matemática.</p>

Fonte: Arquivo Pessoal

Duração da etapa: 2 aulas seguidas de 50 minutos.

2.6.3. TERCEIRA ETAPA

A implementação da terceira etapa depende diretamente dos resultados obtidos na etapa anterior. A partir dos dados da tabela, que contém as informações acerca das misturas obtidas, os estudantes construirão um gráfico que relaciona a quantidade de ureia presente em cada uma das misturas e a densidade correspondente. Ao construir o gráfico respectivo às massas de ureia e à densidade de mistura deverá perceber que existe uma tendência em relação ao alinhamento dos pontos obtidos. Foi escolhida a relação da massa de ureia com a densidade para que os estudantes notem que o gráfico interceptará o eixo Oy no valor correspondente a densidade da água (1g/ml).

Ao notar a regularidade quanto ao alinhamento dos pontos obtidos no gráfico, os estudantes vão determinar uma reta que melhor aproxima a função que relaciona a massa da ureia e a densidade da mistura. Após a construção da reta aproximada da função deverão determinar, a partir dela, a lei da função afim obtida.

Duração da terceira etapa: 1 aula de 50 minutos.

2.6.4. QUARTA ETAPA

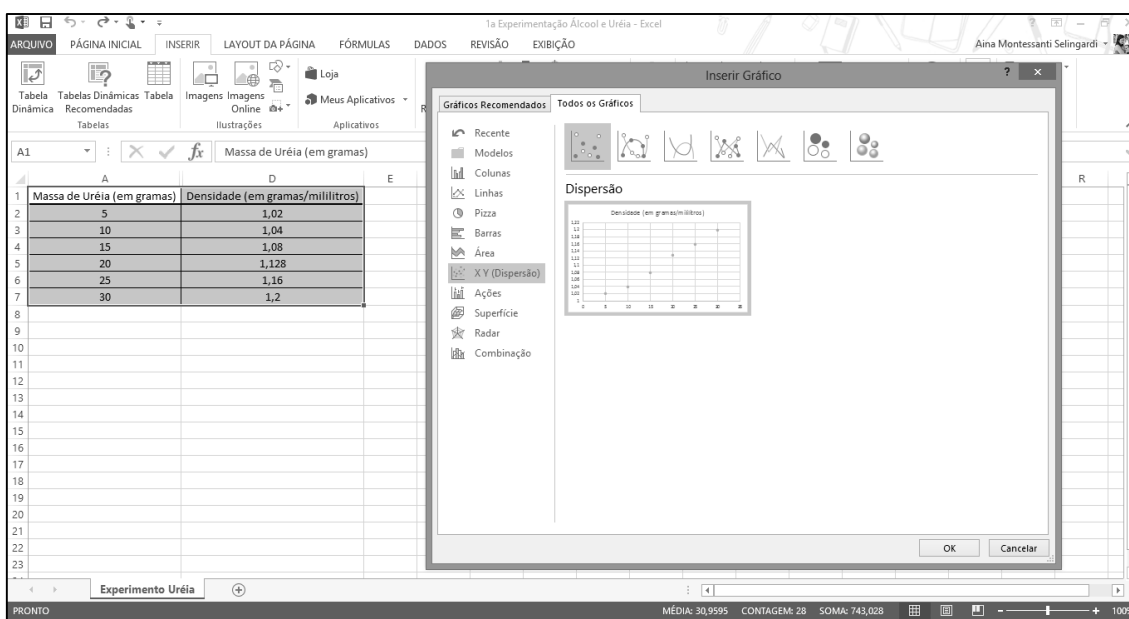
O ambiente para a implementação da quarta etapa é o laboratório de informática. Todos os procedimentos realizados pelos estudantes na etapa anterior serão realizados novamente através de uma ferramenta computacional.

Devido à falta de aulas de informática e aulas dedicadas ao uso de *softwares* na grade curricular elaborei um roteiro para que os estudantes realizassem os procedimentos da quarta etapa de forma mais independente do professor.

O primeiro passo consiste em o estudante transferir para uma planilha eletrônica do *software* Excel a tabela com os dados obtidos experimentalmente. Após o registro dos dados os estudantes vão plotar os pontos referentes aos dados da planilha que são interessantes para o estudo da função afim em um plano cartesiano utilizando o recurso inserir gráfico.

A partir da planilha com os dados do experimento, o estudante deve destacar no plano cartesiano os pontos que relacionam a massa da ureia com a densidade da mistura.

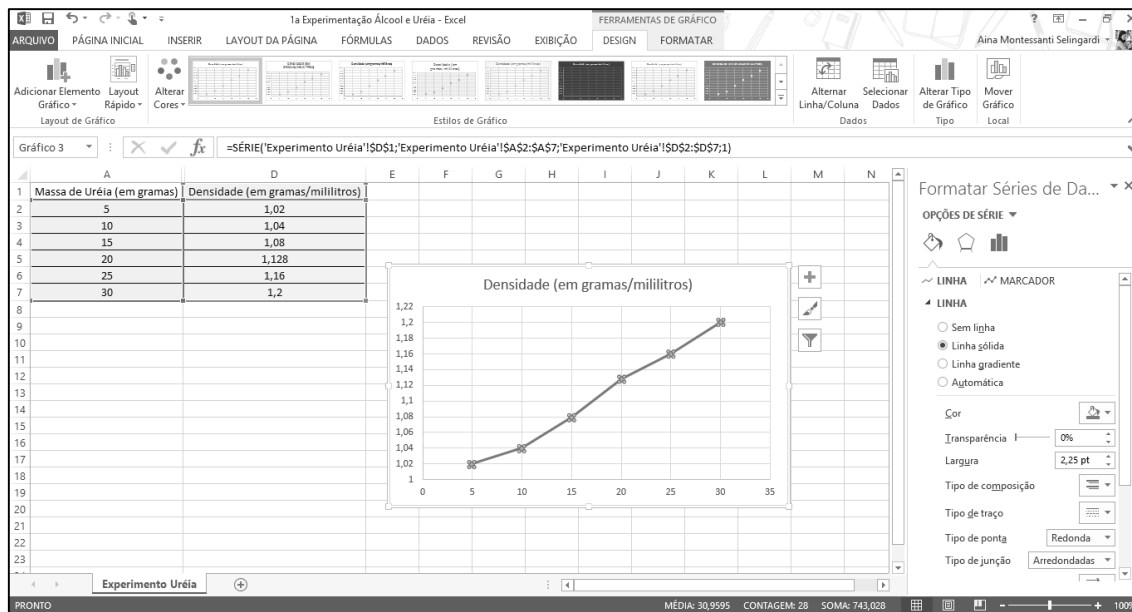
FIGURA 13 – Imagem do recurso que “plota” os pontos no plano cartesiano



Fonte: Arquivo Pessoal

Ao selecionar os pontos no sistema cartesiano o estudante deve clicar com o botão direito do mouse e utilizar o recurso disponível entre outros, denominado “formatar série de dados” do *software* Excel. Assim serão traçados segmentos entre os pontos utilizados como referência, seguem o procedimento e o gráfico obtido por meio do recurso aplicado.

FIGURA 14 – Imagem do recurso que liga os pontos no plano cartesiano

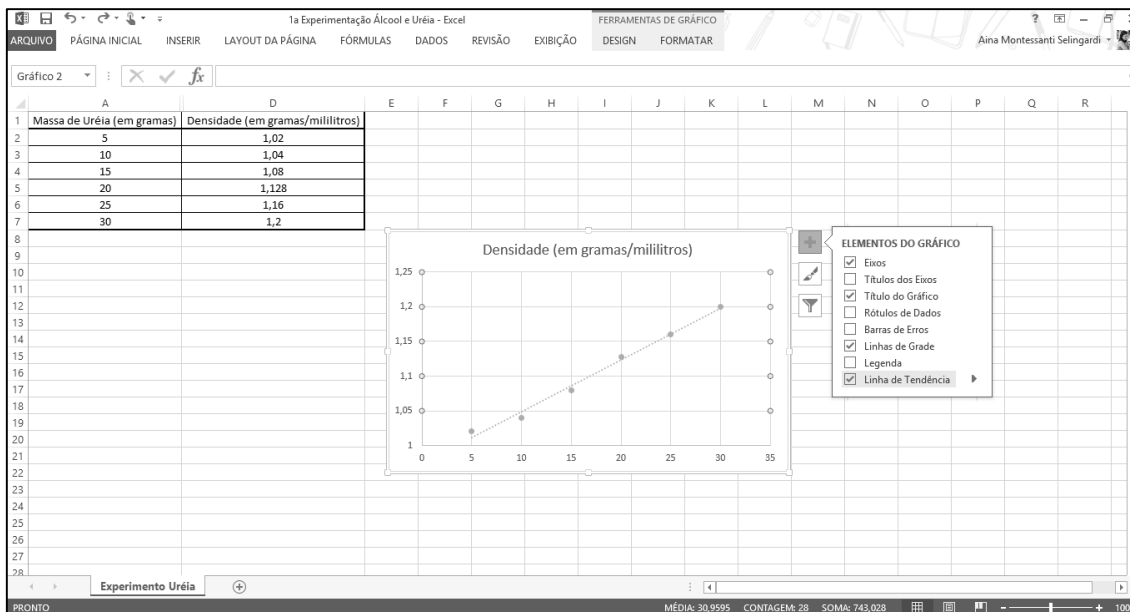


Fonte: Arquivo Pessoal

Ao observar o gráfico obtido e as anotações da terceira etapa da proposta pedagógica, o estudante deverá utilizar o recurso que aproxima o gráfico anterior a uma linha de tendência que é a reta aproximada da função. O recurso é encontrado ao lado do gráfico no botão indicado pelo símbolo +.

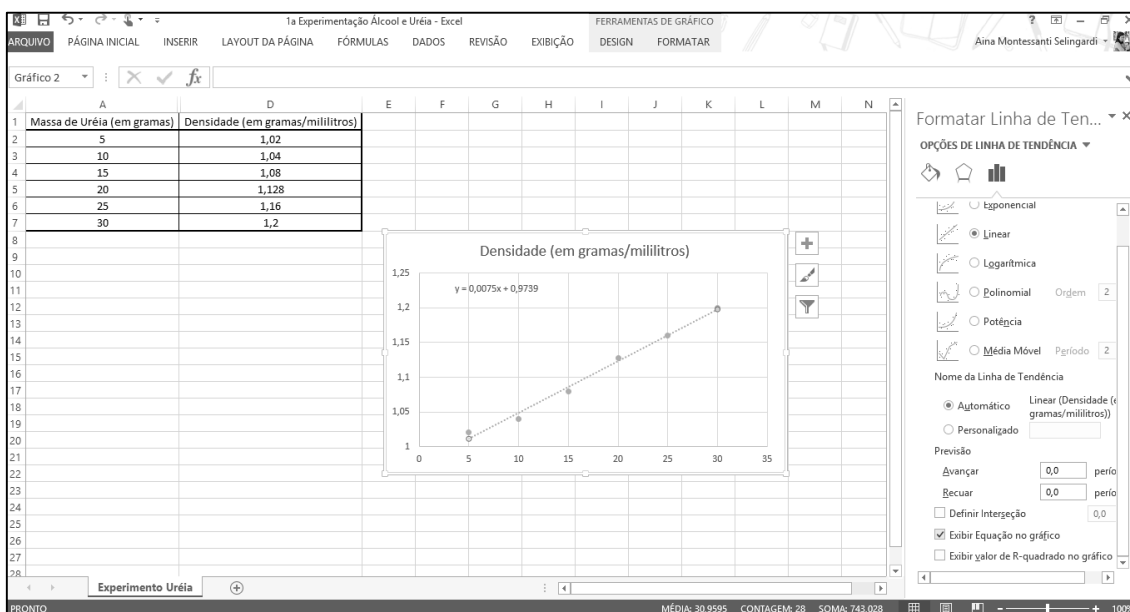
Utilizando o Excel também é possível obter a fórmula da função a partir formatação da linha de tendência. Basta selecionar a função Exibir equação no gráfico que o *software* calcula a fórmula que define a reta aproximada da função.

FIGURA 15 – Imagem do recurso que fornece a linha de tendência



Fonte: Arquivo Pessoal

FIGURA 16 – Imagem do recurso que permite a obtenção da expressão algébrica da função.



Fonte: Arquivo Pessoal

Ao final do experimento, os alunos observarão que é linear a variação da densidade da mistura em função da massa de ureia. Além da experimentação, eles vão aprender a confeccionar tabelas e gráficos a partir dos resultados do experimento. Depois de obtido o gráfico, vão ajustar uma reta aos pontos encontrados e determinar um padrão a partir de uma fórmula.

Através dos pontos plotados poderão obter a linha de tendência que relaciona as grandezas estudadas e uma ferramenta do *software* fornece a expressão da função afim correspondente a essa linha de tendência. Obtidas as informações anteriores poderão estabelecer um comparativo entre o que foi obtido por eles na terceira etapa e na quarta etapa para enriquecer a discussão acerca dos resultados que será feita a seguir.

Duração da etapa: 1 aula de 50 minutos.

2.6.5. QUINTA ETAPA

A quinta e última etapa da proposta didática consiste na reflexão acerca do que foi obtido pelos grupos na atividade experimental, na construção do gráfico e na obtenção da expressão da função que relaciona as grandezas.

É desejável que nesse momento que cada grupo de estudantes reflita sobre a relação entre a densidade da mistura e cada uma das quantidades de ureia utilizada na composição da mesma e que consiga prever o que acontece conforme a ureia é colocada em maior ou menor quantidade na mistura e que em seguida comparem suas conclusões com as conclusões dos outros grupos.

Para finalizar a proposta pedagógica é interessante questionar o estudante em relação ao que ele achou de participar da atividade e realizar as etapas do processo. Cabe nesse momento uma avaliação pessoal acerca do aprendizado de conteúdos referentes às etapas da proposta pedagógica.

Duração da etapa: 1 aula de 50 minutos.

Em todas as etapas da proposta pedagógica os estudantes estão distribuídos em grupos compostos por até 5 componentes, optei por essa disposição em grupos para estimular a capacidade desses estudantes trabalharem coletivamente, explorarem as habilidades que cada indivíduo pode proporcionar ao grupo e incentivar que eles demonstrem as iniciativas pessoais diante das propostas apresentadas.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

3.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo descrevo o perfil dos estudantes e da escola onde foi aplicada a proposta didática “O estudo da função afim no Ensino Médio com apoio de uma atividade experimental”. Ainda relato como foram desenvolvidas as aulas da proposta didática e o que ocorreu durante a aplicação da mesma em uma turma de 1º ano do Ensino Médio.

3.2. A ESCOLHA DA TURMA

A proposta foi aplicada na turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada na cidade de Itapira, onde leciono matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Escolhi essa turma para a aplicação da proposta porque desenvolvo com esses estudantes a frente de Álgebra e assim poderia utilizar esse trabalho para enriquecer os conteúdos abordados em minhas aulas.

Também leciono em séries de Ensino Fundamental e Médio a partir do 8º ano em uma escola privada da cidade de Amparo. Como desenvolvo com os estudantes a frente de Geometria, a aplicação da proposta não estaria diretamente relacionada com os conteúdos que desenvolvo em sala de aula, por isso a proposta não foi utilizada com as turmas de 1º ano de Ensino Médio dessa escola.

3.3. SOBRE A ESCOLA E OS ESTUDANTES

A proposta didática foi aplicada em uma escola localizada na cidade de Itapira no interior do Estado de São Paulo, que fica num bairro próximo ao distrito industrial da cidade e foi fundada em setembro de 1997. A Escola] possui turmas de Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio e os pais matriculam os filhos visando proporcionar a eles uma formação crítica e voltada para prepará-los frente às necessidades da atual sociedade.

O Ensino Fundamental adota o sistema de ensino Pueri Domus e o Ensino Médio adota o sistema de ensino COC. Desde 2010 leciono matemática para turmas de 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio da Escola.

A proposta pedagógica foi aplicada para a turma do 1º ano do Ensino Médio em 2013 que era composta de 22 alunos. A maior parte deles já estudava na escola desde o Ensino Fundamental, portanto eram meus alunos no 9º ano do Ensino Fundamental também.

Apresentei à diretora e à coordenadora pedagógica da Escola a proposta pedagógica e expliquei sua importância diante do processo de aprendizagem. Como a proposta é relacionada a um conteúdo referente ao 1º ano do Ensino Médio e sua aplicação não comprometeria o cumprimento da programação anual, a aplicação da mesma foi autorizada por elas. A única condição imposta era que eu atribuísse uma nota ao trabalho realizado para ressaltar a importância do mesmo para os estudantes. Atualmente a proposta faz parte do planejamento anual do 1º ano do Ensino Médio da Escola.

3.4. PRIMEIRA ETAPA: APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Para realizar a aula de apresentação dos instrumentos, preparei o laboratório da escola e separei o material que seria utilizado na mesma. Apresentei aos estudantes cada instrumento e realizei a atividade experimental para mostrar como obter o que é solicitado na mesma.

FIGURA 17 – Foto com vista panorâmica do Laboratório da Escola Interativa.



Fonte: Arquivo Pessoal

Foi destinada a essa etapa uma aula de 50 minutos e os estudantes ficaram bastante atentos às informações que receberam durante a apresentação. Como já citei, essa turma participa de atividades no laboratório onde somente observam aquilo que um professor aplica a um conhecimento relativo às ciências. Acredito que demonstraram interesse em participar da atividade experimental pois dessa vez poderiam manusear os instrumentos e aferir as medidas na etapa seguinte.

Durante a primeira etapa da proposta, expliquei os objetivos da atividade experimental e sugeri que eles observassem o que seria feito e pensassem nas estratégias que utilizariam para a realização da mesma nas aulas subsequentes.

Utilizei os instrumentos que tinha à disposição para realizar a atividade experimental. Separei a massa de ureia utilizando a balança, ressaltando que deveriam tomar cuidado com o indicador de massa da balança e com o equilíbrio da mesma.

Também expliquei que não poderiam deixar a ureia entrar em contato com a água antes de medir sua massa. Depois utilizei a ureia separada e com uma seringa completei com água em um béquer até que atingisse um volume pré-estabelecido. Conforme a água era acrescentada, misturei os componentes utilizando uma colher. Em seguida, com o auxílio da balança determinei a massa da mistura obtida.

FIGURA 18 – Foto da demonstração de como manusear a balança de equilíbrio.



Fonte: Arquivo Pessoal

Percebi que os estudantes estavam um pouco preocupados em relação a obter bons resultados na prática. Eles tinham receio que a nota do trabalho fosse prejudicada caso não conseguissem realizar a atividade experimental de maneira satisfatória. Nesse momento expliquei que o desenvolvimento da proposta seria avaliado qualitativamente, uma vez que combinei com a direção e coordenação da escola que haveria uma nota atribuída ao desempenho dos alunos na aplicação da proposta didática.

Num segundo momento, deixei os estudantes à vontade para conhecerem e manusearem os instrumentos que seriam utilizados, eles ficaram curiosos em relação ao funcionamento da mini balança, já que conheciam os demais instrumentos.

Alguns estudantes perguntaram sobre a ureia que seria utilizada, queriam saber para que servia e onde poderia ser encontrada. A grande maioria deles queria saber o que fariam com as informações que seriam obtidas na atividade experimental e demonstraram grande interesse por participar das próximas etapas. Respondi às perguntas relacionadas aos instrumentos e ao material utilizado. Depois expliquei que as demais dúvidas seriam esclarecidas no decorrer das próximas etapas e assim encerrei a primeira etapa.

3.5. SEGUNDA ETAPA: OS ESTUDANTES REALIZAM A ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Antes de levar os estudantes ao laboratório, separei para cada grupo o material que seria utilizado por eles na segunda etapa. Deixei sobre as bancadas do laboratório os seguintes materiais: um pote com ureia em quantidade maior do que seria necessária para a realização da atividade experimental (aproximadamente 200g), seringa para acrescentar água à ureia, colher para tornar a mistura homogênea, béquer (com capacidade para 250mL) para armazenar a mistura e verificar o volume e a balança para medir as massas de ureia e de mistura. Como as bancadas possuem pias não foi necessário separar água para a realização da atividade experimental, apenas verifiquei se havia água disponível nas torneiras.

Entrei na sala de aula e pedi que os estudantes se organizassem nos grupos antes de irmos ao laboratório. Não foram impostas restrições às divisões dos estudantes em grupo, a única condição é que cada grupo poderia ter no máximo 5 integrantes. Os estudantes se dividiram em grupos com autonomia e compuseram 3 grupos com 4 integrantes e 2 grupos com 5 integrantes. Solicitei que levassem ao laboratório material para realizar as anotações e entreguei aos grupos o roteiro com a tabela que deveria ser preenchida durante a segunda etapa.

Quando chegamos ao laboratório, cada grupo foi encaminhado a uma bancada, e a partir do roteiro, realizaram a atividade experimental. Como já haviam assistido a apresentação da atividade anteriormente, iniciaram a mesma a partir das instruções recebidas.

FIGURA 19 - Grupo de estudantes realizando a atividade experimental.



Fonte: Arquivo Pessoal

A primeira dificuldade encontrada durante a atividade experimental foi relativa à utilização da balança de equilíbrio. O indicador possui uma marca no meio da janela de visualização e os estudantes de um dos grupos confundiram, acharam que o início da janela trazia a massa da substância. Orientei o grupo, mostrando qual era a marcação correta da massa na balança. A partir daí passaram a verificar corretamente a massa da ureia e da mistura. Devido ao erro cometido ao observar a massa esse grupo não realizou todas as medidas no período determinado para a terceira etapa.

FIGURA 20 - Foto com destaque para o indicador da massa na balança



Fonte: Arquivo Pessoal

Outro problema encontrado foi relativo à quantidade de água que seria acrescentada à ureia. Mesmo após a explicação do experimento na primeira etapa, percebi que os integrantes de um dos grupos mediram a massa de ureia e em seguida acrescentaram 50 mL de água, nesse momento intervi e ressaltéi que o volume da água e da ureia juntas deveria ser 50mL. Devido ao erro cometido, o grupo não conseguiu realizar todas as medições durante o tempo planejado para a atividade experimental.

Um dos grupos não conseguiu realizar as medidas. Acredito que não conseguiram devido a um desnível apresentado pela bancada do laboratório em que os mesmos realizaram o experimento. O desnível da bancada alterou a posição de equilíbrio da balança e, dessa forma, foi indicada na balança um valor de massa diferente do esperado.

Um dos grupos era composto por estudantes que trazem muitos problemas relativos à desempenho escolar e indisciplina. Quando percebi esses estudantes no mesmo grupo imaginei que a participação dos mesmos na atividade poderia ser prejudicada. Porém esses estudantes me surpreenderam positivamente, demonstraram muito interesse em

realizar a atividade experimental e também muita habilidade em manusear os instrumentos. Enquanto alguns grupos encontraram problemas durante a atividade, eles coletaram os dados da atividade experimental duas vezes. Realizaram um eficiente trabalho em grupo, cada componente teve uma função atribuída e atuaram de maneira conjunta durante toda a segunda etapa.

Como apenas 2 grupos conseguiram elaborar de forma completa a atividade experimental, no final da aula sugeri àqueles que não conseguiram realizar a atividade experimental que voltassem no período contrário às aulas regulares para repetir a realização da atividade experimental e completar a tabela antes da realização da terceira etapa.

No contra período os 3 grupos de estudantes terminaram a atividade experimental. Dois grupos realizaram apenas as medidas que faltaram no período da manhã. Solucionado o problema da bancada, o grupo que não havia feito as medidas conseguiu obter os dados para a realização da terceira etapa.

Outro detalhe que notei, durante a segunda etapa, foi que nem todos os grupos conseguiram completar a tabela com o valor da densidade e realizaram esse cálculo no início da terceira etapa a partir dos dados obtidos no experimento.

TABELA 3 – Tabela com os dados obtidos pelos estudantes na segunda etapa.

Massa de Ureia (em gramas)	Massa Total (em gramas)	Volume Total (em mililitros)	Densidade (em gramas/mililitros)
5g	53g	50 ml	1,02 g/ml
10g	53g	50 ml	1,06 g/ml
15g	54g	50 ml	1,08 g/ml
20g	57g	50 ml	1,14 g/ml
25g	61g	50 ml	1,22 g/ml
30g	62g	50 ml	1,24 g/ml

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Nas aulas de Química do 1º ano do Ensino Médio esses estudantes já haviam estudado o conceito de densidade, mesmo assim precisei trazer a fórmula para dois grupos para que conseguissem obter os dados suficientes para a realização da terceira etapa. Acredito que eles tenham solicitado a fórmula para terem certeza de estarem calculando corretamente a densidade. Inicialmente expliquei que o cálculo da densidade é feito da mesma forma em Química e em Matemática e depois mostrei a fórmula $d = \frac{m}{V}$, em que m é a massa da mistura e V é o volume da mistura.

3.6. TERCEIRA ETAPA: CONFECÇÃO DOS GRÁFICOS E OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO ALGÉBRICA DA FUNÇÃO

A terceira etapa consiste na obtenção do gráfico da função que representa a relação entre a massa de ureia e a densidade da mistura constituída. Os estudantes tinham como referências as anotações dos dados obtidos na atividade experimental.

3.6.1. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS E DA RETA DA FUNÇÃO

Ao completarem a tabela entregue no início da atividade experimental, orientei que os grupos representassem numa folha de papel quadriculado um plano cartesiano e marcassem nesse plano os pontos que apresentassem como coordenadas a massa de ureia utilizada na mistura e a densidade da mistura respectiva.

Percebi nessa etapa que os estudantes têm dificuldades em determinar qual é a variável em uma função, isso ficou claro quando apresentaram dúvidas sobre qual eixo representaria a massa de ureia e qual representaria a densidade. Sugeri que refletissem sobre as situações que estudaram nos problemas apresentados em aula, que tentassem relacionar a massa e a densidade da mesma forma que relacionavam as grandezas apresentadas naqueles problemas. Então os estudantes discutiram coletivamente sobre como representar as grandezas nos eixos e concluíram que a massa de ureia seria correspondente ao eixo Ox e a densidade da mistura ao eixo Oy .

Em relação à utilização de escala para a construção do gráfico e como determinar os pontos no plano cartesiano, os estudantes demonstraram bastante habilidade e rapidamente obtiveram os pontos após decidir qual grandeza estaria em cada eixo.

Depois de resolver sobre a posição das grandezas nos eixos do plano cartesiano os estudantes determinaram os pontos obtidos experimentalmente no mesmo. Foram marcados seis pontos. Pedi que observassem os pontos e verificassem se havia algum padrão na disposição dos mesmos.

Um dos grupos sugeriu que os pontos fossem ligados e então os estudantes perceberam que a figura obtida era próxima a um segmento retilíneo. Solicitei então que tentassem desenhar no plano cartesiano uma reta que aproximasse os resultados obtidos experimentalmente. Após representarem os pontos no plano cartesiano, os grupos conseguiram aproximar uma reta aos pontos obtidos sem a minha intervenção.

Após confeccionarem as retas aproximadas surgiu uma dúvida relativa ao ponto onde a mesma interceptaria o eixo Oy . Intervi pedindo que refletissem sobre o significado do valor da massa de ureia ser igual a zero para estimar a interseção da reta com o eixo Oy . Alguns grupos construíram retas que partiam da origem e outros retas que interceptariam o eixo Oy em um valor maior do que zero.

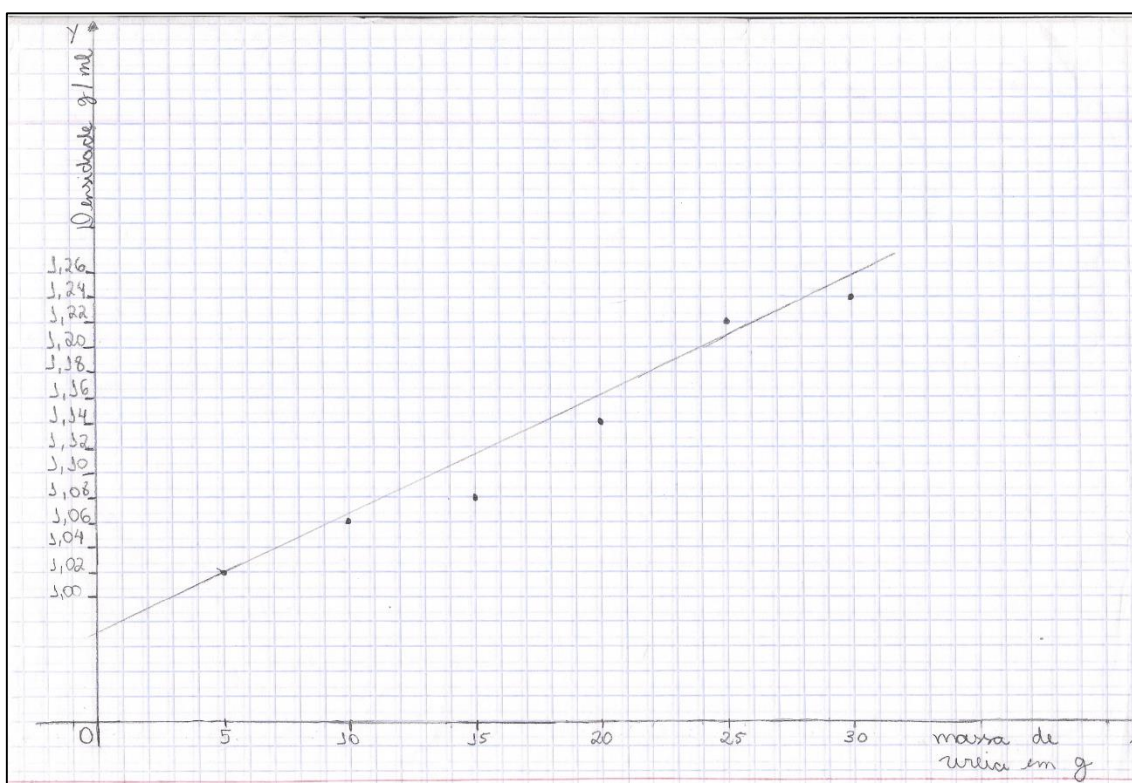
Alguns estudantes que haviam apresentado dúvidas sobre a interseção da reta com o eixo y concluíram que se a massa da ureia fosse igual a zero não haveria mistura, e portanto o volume seria totalmente composto por água, assim o valor onde a reta intercepta o eixo Oy seria próximo à densidade da água.

Após a discussão e reflexão do problema apresentado, alguns estudantes achavam que se a massa de ureia fosse igual a zero, então a massa da mistura também seria nula. Pedi que eles refletissem sobre a composição dos 50mL caso não houvesse ureia na mistura. Mesmo assim notei que nos trabalhos apresentados alguns mantiveram o gráfico interceptando a origem.

3.6.2. AVALIAÇÃO SOBRE OS GRÁFICOS CONSTRUÍDOS NA TERCEIRA ETAPA

Durante a terceira etapa da atividade experimental apenas 1 grupo (20% do total) conseguiu contemplar todas as expectativas em relação à construção do gráfico. Distribuíram os pontos corretamente no plano cartesiano, encontraram a reta aproximada e determinaram o ponto onde a reta intercepta o eixo Oy , além disso perceberam que não poderia ser atribuído um valor negativo à massa da ureia.

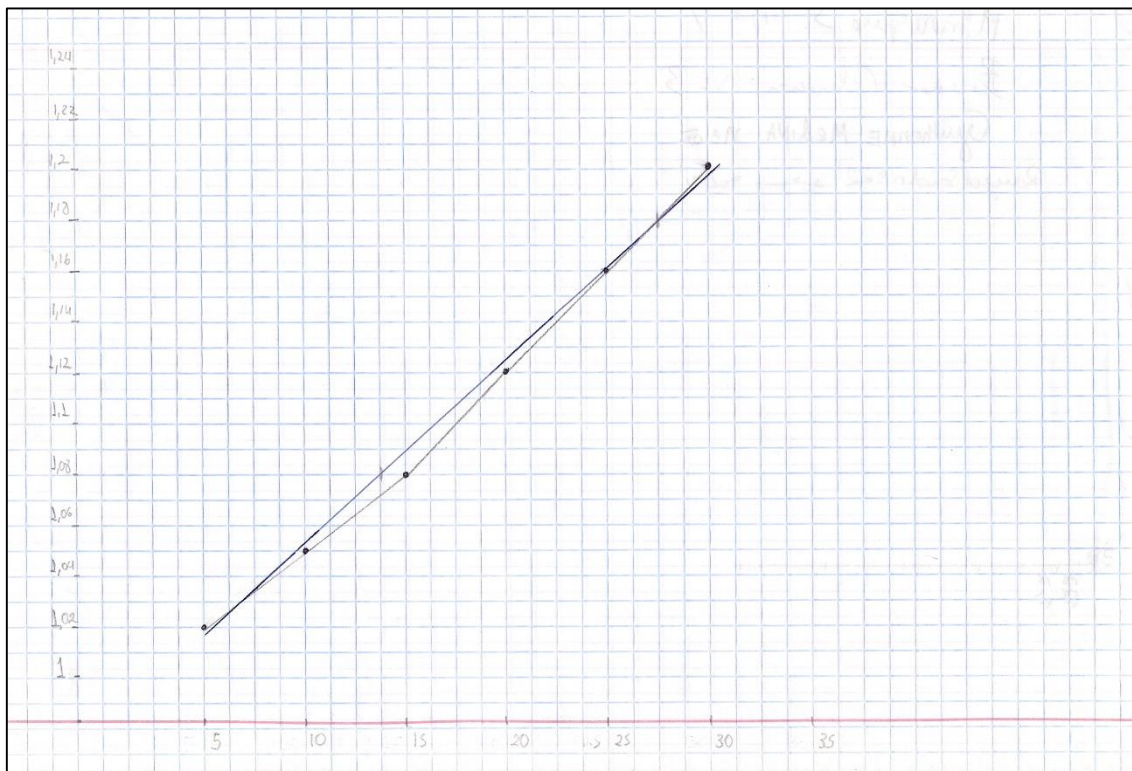
FIGURA 21 – Gráfico que contempla as expectativas da atividade



Fonte: Material produzido pelos estudantes

Um dos grupos (20% do total) não determinou graficamente o ponto de interseção da reta aproximada com o eixo Oy , aproximou a reta da função sem interceptar o eixo Oy .

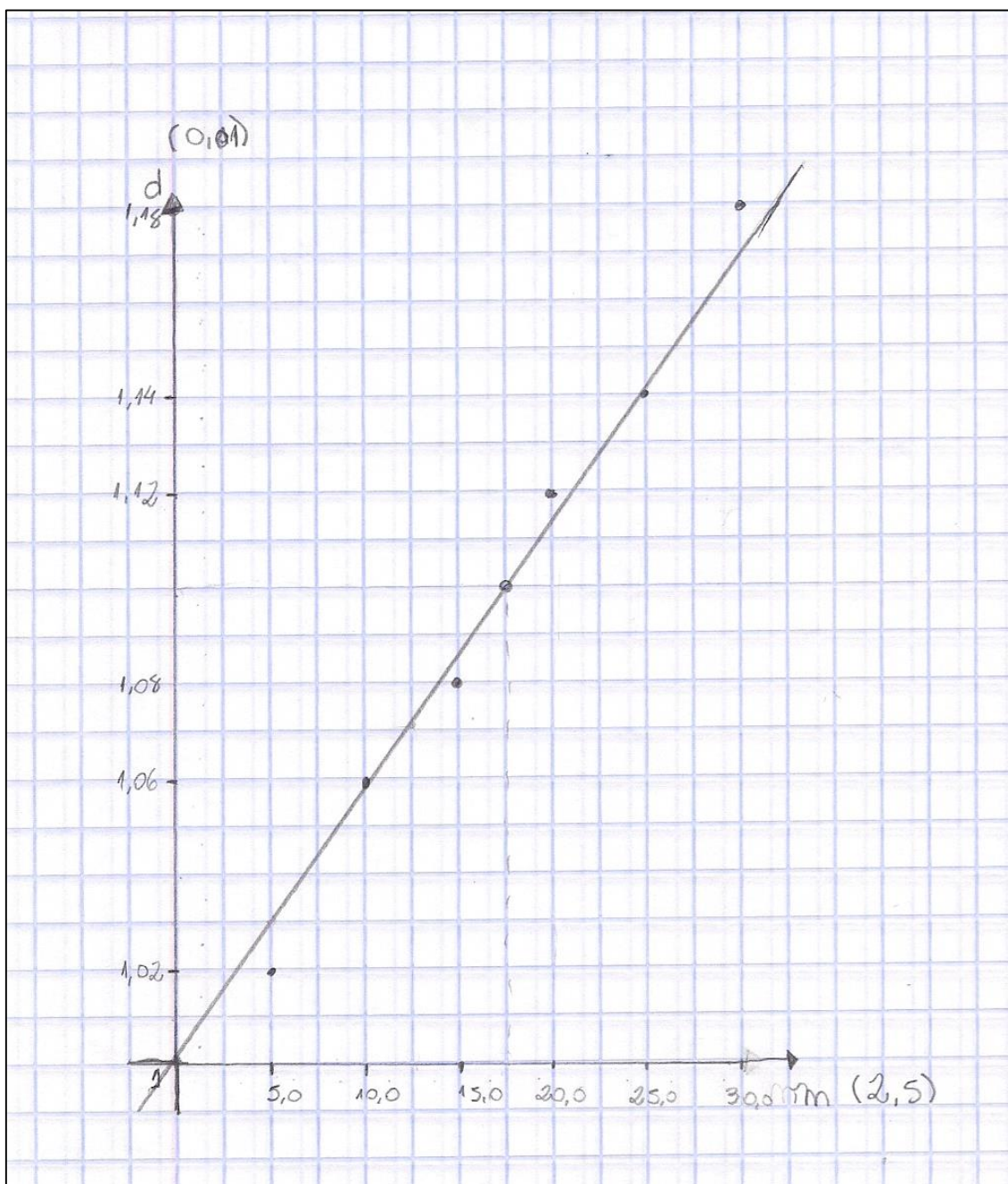
FIGURA 22 – Gráfico em que a interseção da reta com o eixo Oy não é evidenciada.



Fonte: Material produzido pelos estudantes

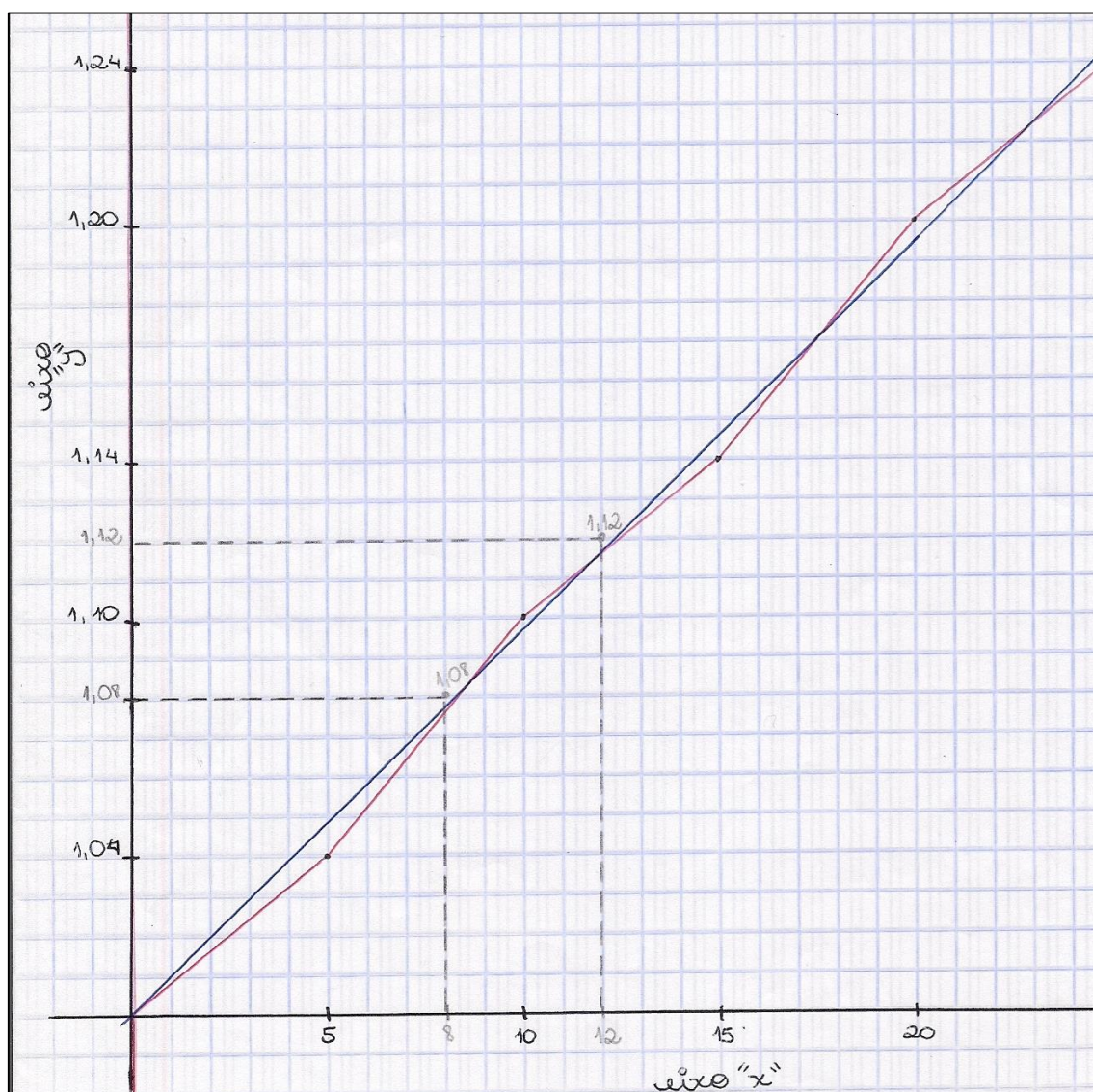
Outro grupo (20% do total) percebeu que o gráfico não partiria da origem após a representação do mesmo no plano e então alteraram o valor da intersecção dos eixos, como pode ser observado na figura a seguir. Dois dos grupos (40% do total) concluíram graficamente que se a massa da ureia fosse igual a zero então a densidade da mistura também seria nula, ou seja, o gráfico partiu da origem do plano cartesiano.

FIGURA 23 – Gráfico que mostra alteração da origem dos eixos. Os estudantes perceberam que se a massa de ureia fosse 0g a densidade da mistura seria 1g/mL.



Fonte: Material produzido pelos estudantes

FIGURA 24 – Gráfico onde a reta da função parte da origem dos eixos do plano cartesiano.



Fonte: Material produzido pelos estudantes

3.6.3. SOBRE COMO OBTER A EXPRESSÃO ALGÉBRICA DE UMA FUNÇÃO AFIM

Optei por não intervir nas decisões e soluções apresentadas graficamente pelos estudantes e, a partir do que foi obtido, solicitei que encontrassem a expressão algébrica que relacionasse as grandezas. Ao determinar a expressão algébrica orientei-os para que

comparassem o gráfico e a expressão algébrica obtidos a partir dos dados fornecidos pela tabela.

Alguns grupos demonstraram dificuldades em determinar a expressão algébrica da reta apresentada. Lembrei os estudantes que a função afim é representada por uma reta e, com essa informação conseguiram esboçar as primeiras ideias acerca da expressão que relaciona a massa de ureia e a densidade da mistura.

Os dados obtidos experimentalmente contêm valores não inteiros. A partir dos cálculos efetuados os estudantes preferiram fazer aproximações em algumas situações para os valores de a e b da função $f(x) = ax + b$ que representa a relação entre as grandezas. Percebi que alguns estudantes pretendiam realizar os cálculos com o auxílio de calculadoras. Não permiti o uso das calculadoras nesse momento para que esses estudantes percebessem que é possível realizar os cálculos sem a mesma. Expliquei que na etapa seguinte da proposta didática seria permitido o uso de computador para construir o gráfico e para efetuar os cálculos.

FIGURA 25 – Cálculos realizados pelos estudantes

The image shows two columns of handwritten mathematical work on a grid background. The left column shows a system of two equations: $1,04 = 8A + B$ and $1,08 = 13A + B$. The second equation is subtracted from the first, resulting in $-0,04 = -5A$. This is then solved for A , yielding $A = 0,008$. The right column shows the same first equation, $1,04 = 8A + B$, with A substituted as $0,008$, resulting in $1,04 = 0,064 + B$. This is then solved for B , yielding $B = 0,976$.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Os estudantes demonstraram um pouco de dificuldade em transformar os dados obtidos graficamente em um sistema de equações, o que tornou demorada a realização da terceira etapa. Eu havia planejado utilizar uma aula de 50 minutos para a elaboração da mesma, porém alguns fatores prejudicaram a aplicação da mesma de acordo com o planejamento.

FIGURA 26 – Cálculos realizados para obter a expressão da função afim a partir de pontos da reta aproximada.

Dados experimentais

$f(x) = ax + b$ $f(8) = a \cdot 8 + b$ $1,08 = 8a + b$	$f(x) = ax + b$ $f(12) = a \cdot 12 + b$ $1,12 = 12a + b$
$1,12 = 12a + b$ $1,08 = 8a + b$ <hr style="width: 50%; margin: auto;"/> $0,04 = 4a$ $0,04 = a$ $\frac{0,04}{4}$ $0,01 = a$	$1,12 = 12 \cdot 0,01 + b$ $1,12 = 0,12 + b$ $1,12 - 0,12 = b$ $1,00 = b$
$f(x) = ax + b$ $f(8) = 0,01 \cdot 8 + 1$ $1,08 = 0,08 + 1$ $1,08 = 1,08$	$f(x) = ax + b$ $f(12) = 0,01 \cdot 12 + 1$ $1,12 = 0,12 + 1$ $1,12 = 1,12$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

O primeiro fator que impediu a elaboração da terceira etapa no tempo estimado foi decorrente do atraso dos alunos em relação ao preenchimento da tabela. Alguns grupos não haviam calculado a densidade e o fizeram antes de confeccionar o gráfico. Os demais fatores são relativos às dificuldades dos estudantes diante da confecção do gráfico e da obtenção da expressão algébrica que representa a reta aproximada. Assim a terceira etapa foi concluída em duas aulas de 50 minutos.

3.6.4. AVALIAÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS OBTIDAS PELOS ESTUDANTES

Na reta que aproximava os pontos obtidos experimentalmente os estudantes escolheram pontos convenientes para a obtenção da expressão algébrica. Esses pontos

deveriam se apresentar nas interseções de segmentos do papel quadriculado utilizado para a confecção do gráfico.

Ressaltei que para obter uma reta eram necessários dois pontos distintos e assim os estudantes escolheram dois pontos da reta para construir um sistema de equações que forneceria os valores de a e b da função $f(x) = ax + b$.

Após descobrirem como estruturar o sistema de equações todos os grupos conseguiram obter a equação algébrica correspondente à reta aproximada. Em alguns casos acredito que a escolha dos pontos não foi bem feita, uma vez que optaram por coletar dois pontos próximos à reta e que se apresentavam abaixo da mesma.

Três grupos (60% do total) escolheram dois pontos pertencentes à reta aproximada para montar o sistema de equações e após a realização dos cálculos obtiveram a expressão algébrica que representa a mesma de forma satisfatória.

Os demais grupos (40% do total) não escolheram bem os pontos, selecionaram pontos abaixo da reta para determinar a expressão algébrica. Para utilizar pontos fora da reta, o ideal era escolher pontos em posições diferentes em relação à reta, ou seja, que um dos pontos estivesse acima e o outro estivesse abaixo da reta. Assim a expressão algébrica obtida por esses estudantes não é feita com a melhor aproximação dos resultados obtidos experimentalmente. Apesar de não escolherem os melhores pontos para compor o sistema de equações, os estudantes conseguiram determinar de forma satisfatória a expressão algébrica da função afim obtida.

3.7. QUARTA ETAPA: UTILIZAÇÃO DE UM APLICATIVO COMPUTACIONAL PARA VERIFICAÇÃO DOS DADOS OBTIDOS NA ETAPA ANTERIOR

A quarta etapa foi realizada no laboratório de informática. Antes da aula preparei os computadores e abri o *software* Excel para que os alunos entrassem na sala e a atividade fosse iniciada. Fiz dessa forma porque o técnico responsável pelo laboratório estava fazendo a manutenção da rede da escola e não estava disponível durante a realização da atividade no laboratório de informática.

Percebi que alguns computadores não tinham o *software* Excel instalado e outros estavam com o monitor queimado. Acredito que organizar o laboratório antes dos estudantes entrarem foi fundamental para evitar problemas técnicos e garantir o bom andamento da atividade proposta. Consegui preparar 11 computadores e então os estudantes se organizaram em duplas para realizar os procedimentos. Os integrantes de cada grupo precisaram permanecer próximos pois precisavam compartilhar as informações obtidas nas etapas anteriores.

Através de uma tela de projeção, instruí os estudantes a confeccionar as planilhas, a construir o gráfico e a obter a expressão algébrica. Eles realizaram passo a passo os procedimentos com bastante facilidade. Percebi que esses estudantes possuem familiaridade com o aplicativo escolhido. Quando questionei se já haviam realizado trabalhos com o auxílio do Excel eles me disseram que no Ensino Fundamental, durante as aulas de informática, fizeram algumas atividades com o aplicativo. A experiência que os estudantes tinham facilitou a implementação das ferramentas, uma vez que já tinham noções de como aplicá-las.

O tempo dedicado à quarta etapa foi suficiente para que os estudantes realizassem toda a atividade proposta e também que personalizassem os gráficos obtidos. Alguns nomearam o gráfico e os eixos, também coloriram os pontos, a reta obtida e o plano cartesiano. Pedi que cada grupo me entregasse um documento eletrônico do que foi construído no laboratório de informática.

3.7.1. RESULTADOS DA QUARTA ETAPA

Com o material produzido pelos estudantes e do que observei no laboratório de informática, posso afirmar que a quarta etapa ocorreu de acordo com as expectativas do planejamento.

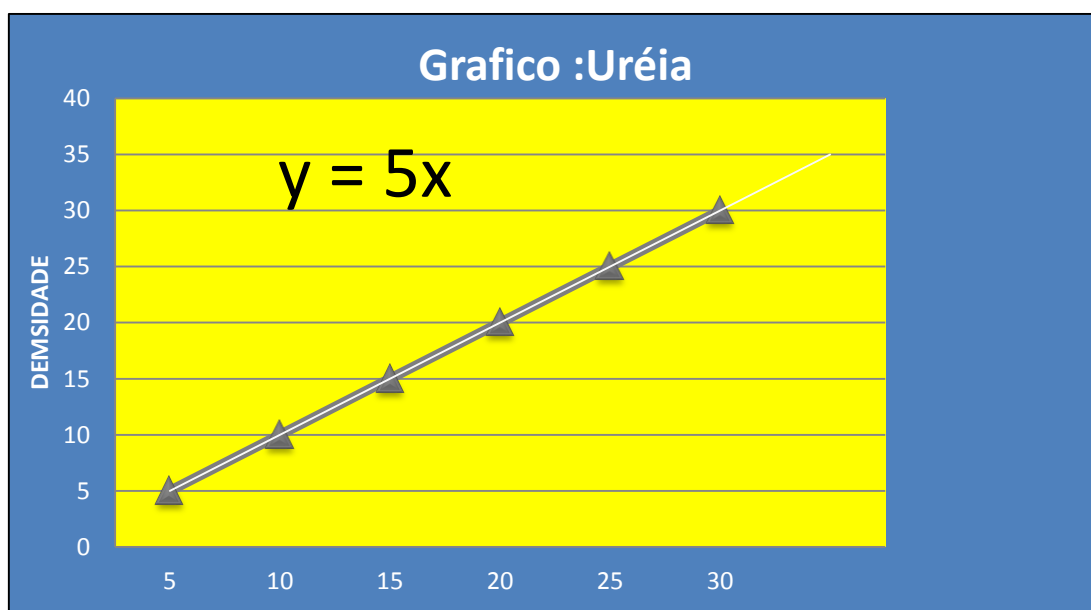
Quatro grupos (80% do total) realizaram com êxito a atividade e conseguiram obter o gráfico e a expressão algébrica da função representada graficamente com o auxílio do aplicativo. Portanto apenas um grupo (20% do total) não conseguiu obter o gráfico e a expressão algébrica solicitados na atividade.

FIGURA 27 – Gráfico da função obtido com sucesso a partir das ferramentas do aplicativo computacional



Fonte: Material produzido pelos estudantes

FIGURA 28 – Gráfico em que os estudantes não utilizaram corretamente as ferramentas do aplicativo computacional



Fonte: Material produzido pelos estudantes

Percebi que o grupo que não conseguiu realizar a atividade selecionou apenas a coluna da massa de ureia para confeccionar o gráfico, ou seja, os dois eixos apresentavam valores correspondente à massa de ureia. Quando utilizaram a linha de tendência obtiveram uma expressão para a função dada por $f(x) = x$ e, em seguida, manualmente alteraram a função digitando o número 5 junto ao x e apresentaram o gráfico apresentado anteriormente.

3.8. QUINTA ETAPA: CONCLUSÃO DOS ESTUDANTES ACERCA DOS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS E EXPERIÊNCIA VIVENCIADA

Para concluir a atividade experimental questionei os estudantes em relação à experiência vivenciada e aos conhecimentos adquiridos durante as etapas anteriores. Como as etapas da atividade foram aplicadas em diferentes semanas, eles precisaram fazer uma reflexão para descrever o que perceberam diante da mesma.

Após observarem o que foi obtido durante as aulas dedicadas à atividade experimental iniciamos uma discussão acerca do que foi vivenciado pelos estudantes. Também sugeri que os grupos fizessem registro de comentários que julgassem importantes relativos à atividade desenvolvida.

Sobre a primeira etapa os estudantes mostraram satisfação em participar ativamente de uma atividade prática. Questionaram quando haveria uma nova atividade em que pudessem observar um fenômeno para depois estudarem a matemática envolvida. Mesmo aqueles que encontraram dificuldades ao realizar a atividade do laboratório gostariam de participar de outras atividades semelhantes.

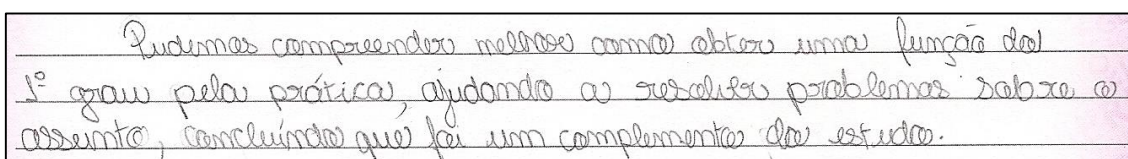
FIGURA 29 – Comentário dos estudantes acerca da aplicação dos conhecimentos adquiridos.

<p>* Gostamos muito da experiência colocando novos conhecimentos em prática.</p>
--

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Em relação à segunda etapa, os estudantes disseram encontrar algumas dificuldades, como estipular a variável de uma função, como escolher os dados para aproximar os resultados obtidos a uma função e, principalmente em como determinar a expressão algébrica de uma função a partir de seu gráfico.

FIGURA 30 – Comentário dos estudantes sobre a atividade experimental complementar uma aula tradicional



Podemos compreender melhor como obter uma função do 1º grau pela prática, ajudando a superar problemas sobre o assunto, concluindo que foi um complemento do estudo.

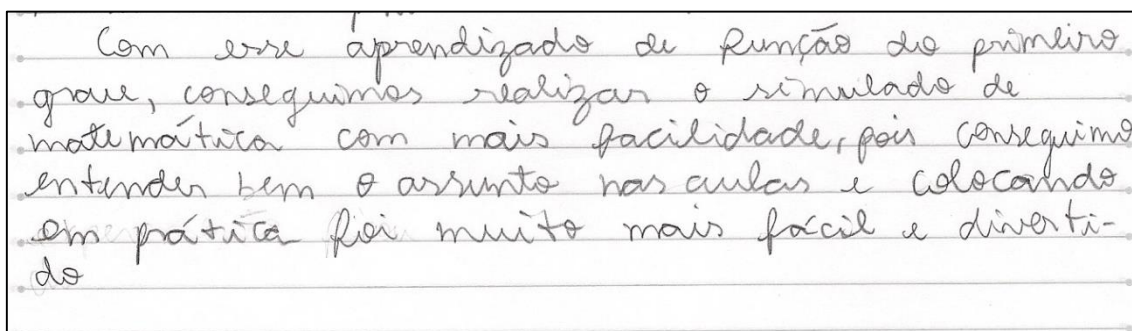
Fonte: Material produzido pelos estudantes

A partir dos gráficos e expressões obtidos na segunda etapa, os estudantes concluíram que a reta da função intercepta o eixo Oy no valor equivalente à densidade da água (1g/mL) e que conforme a ureia fosse adicionada a densidade aumentaria em uma taxa próxima a 0,008g/mL para cada grama de ureia presente na mistura. Portanto deveriam obter uma função próxima a $D(u) = 0,008u + 1$, em que D é a densidade da ureia que varia de acordo com a massa de ureia representada por u na expressão.

Sobre a terceira etapa, após comparar o que foi obtido manualmente e o que foi obtido com o auxílio do aplicativo, apenas um grupo (20% do total) apresentou resultados muito distintos na confecção manual do gráfico e cálculo de sua expressão algébrica e com o aplicativo. Os demais grupos apresentaram resultados próximos dos encontrados experimentalmente com o auxílio da ferramenta computacional.

Pedi que argumentassem sobre o que aprenderam durante a atividade experimental. Alguns estudantes ressaltaram a importância de tratar a Matemática na prática, e disseram que as dificuldades encontradas na realização da atividade experimental foram importantes para que entendessem os conceitos envolvidos.

FIGURA 31 – Comentário dos estudantes relacionado a aplicar o que foi desempenhado na atividade em outros problemas e sobre ser divertido realizar a atividade experimental.



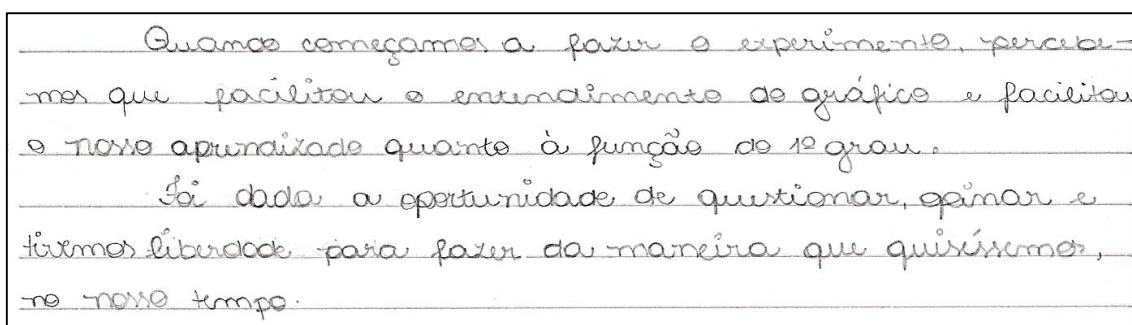
Com esse aprendizado de funções de primeiro grau, conseguimos realizar o simulado de matemática com mais facilidade, pois conseguimos entender bem o assunto nas aulas e colocando em prática foi muito mais fácil e divertido.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Outros destacaram que a partir do que foi feito na atividade experimental conseguiram aplicar os conhecimentos adquiridos em problemas de um simulado que realizaram no mesmo período em que desenvolvemos a atividade experimental e, dessa forma, conseguiram solucionar os mesmos.

Um dos grupos relatou a importância de realizar a atividade experimental com autonomia. Os integrantes do mesmo grupo citaram que, a partir da atividade experimental, se sentem mais seguros para a confeccionar o gráfico e fazer o estudo da função afim.

FIGURA 32 – Comentário em que os estudantes relatam se sentirem à vontade para participar da atividade fazendo questionamentos e comentários.



Quando começamos a fazer o experimento, percebemos que facilitou o entendimento de gráficos e facilitou o nosso aprendizado quanto à função de 1º grau.
Foi dada a oportunidade de questionar, opinar e tivemos liberdade para fazer da maneira que quiséssemos, no nosso tempo.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

A etapa teve duração de uma aula de 50 minutos. Apesar de os estudantes iniciarem a etapa com a exposição dos dados obtidos nas etapas anteriores, discutirem sobre o que foi obtido e fazerem comentários gerais sobre a atividade experimental e sobre o que aprenderam, percebi que os alunos ficaram ociosos no final da aula.

3.9.RESULTADOS APRESENTADOS EM CADA PROCEDIMENTO

Após a quarta etapa, em que discutimos acerca do trabalho desempenhado pelos estudantes, fiz um levantamento para verificar se a proposta pedagógica atingiu as expectativas. Segue na tabela as informações de acordo com o desempenho dos grupos em cada procedimento da proposta.

TABELA 4 – Tabela com resultados sobre os procedimentos da Atividade Experimental

Procedimento	Expectativas atingidas	Expectativas parcialmente atingidas	Expectativas não atingidas
Realizar o Experimento	40%	60%	0%
Confeccionar o Gráfico	20%	80%	0%
Determinar a Expressão Algébrica	60%	40%	0%
Utilizar o Aplicativo Computacional	80%	0%	20%

Fonte: Arquivo Pessoal

Ao analisar os dados da tabela e refletir sobre o que foi desempenhado pelos estudantes nas aulas dedicadas à proposta didática, concluo que os estudantes

apresentaram bom desempenho. Acredito que a atividade experimental tenha contribuído no processo de aprendizagem dos conceitos relativos às funções, em particular à função afim.

Como foi combinado com a direção e coordenação da Escola Interativa, foi atribuída uma nota de 0 a 10 ao trabalho apresentado por cada grupo no decorrer das aulas. Essa nota faria parte de um conjunto de avaliações contínuas que possui peso 6 na nota final do 2º bimestre. As notas foram atribuídas de acordo com o que os estudantes atingiram em relação às expectativas de cada procedimento.

Quando analisei os registros dos estudantes acerca do que vivenciaram na atividade experimental, concluo que se sentiram motivados durante as aulas dedicadas à proposta e que gostaram de aplicar os conhecimentos adquiridos durante as aulas expositivas que assistiram antes de participar da atividade. Alguns citam ter conseguido resolver problemas presentes em uma prova e que se sentiram seguros para isso devido às manipulações de dados realizadas a partir de uma atividade prática.

CAPÍTULO 4

VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA E CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1. INTRODUÇÃO

No presente Capítulo são apresentadas as ideias principais da proposta pedagógica, juntamente com a síntese de sua implementação em uma turma do 1º ano do Ensino Médio. São comentadas algumas modificações que foram induzidas a partir da aplicação da proposta com essa turma. Comento algumas observações adicionais sobre o uso do sistema cartesiano no ensino de funções. Faço algumas considerações pessoais sobre o que foi realizado e sobre o que acho que pode ser estudado em pesquisas futuras relativas à uma proposta didática no Ensino de Matemática, como a que desenvolvi nesse trabalho.

4.2. IDEIAS PRINCIPAIS DA PROPOSTA DIDÁTICA

A proposta de intervenção produzida por mim nesse trabalho visa apoiar o ensino de funções, particularmente no ensino da função afim. Os estudantes realizaram uma atividade experimental, da qual resultaram dados numéricos. Esses dados foram representados em um sistema cartesiano, através do que foi percebido o padrão de um gráfico de uma função afim. Um tratamento algébrico permitiu a obtenção da fórmula de uma função. Os dados também foram tratados com um aplicativo computacional.

Optei por desenvolver uma atividade experimental buscando algo diferente do que encontrei nos materiais didáticos pesquisados. A intenção foi de adotar uma proposta interdisciplinar para desenvolver com os estudantes o tema função afim. Os estudantes se organizaram em grupos para executar o experimento e realizar a sua análise. Isso permitiu

que eles discutissem e atuassem coletivamente em relação aos procedimentos escolhidos, à coleta dos dados e à análise dos resultados obtidos na atividade experimental.

Para validar essa pesquisa, que incluiu elaboração, aplicação e avaliação do desfecho dessa proposta didática, utilizei a metodologia sugerida pela Engenharia Didática. Essa validação se desenvolveu em quatro fases, cada uma descrita em um capítulo da dissertação. Este capítulo corresponde à quarta fase que é a conclusão.

4.3. BREVE RELATO SOBRE A APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A proposta foi organizada em cinco etapas. Na etapa inicial levei os estudantes ao laboratório da escola e apresentei os materiais que seriam utilizados no experimento e como deveriam proceder para obter os dados solicitados na forma de tabela. Os estudantes ouviram atentamente as instruções e assistiram a realização do experimento que fiz nessa apresentação.

Na segunda etapa os estudantes se dividiram em grupos e realizaram o experimento. Os dados obtidos no experimento foram organizados em uma tabela. Como esses estudantes não têm aula de laboratório, apresentaram algumas dificuldades para manusear os instrumentos e fazer as anotações. Alguns grupos não conseguiram terminar a coleta dos dados durante a atividade experimental e foi necessário que eles voltassem no contra período para realizar as medidas que faltavam.

Notei que a tabela que os estudantes deveriam preencher durante a segunda etapa ficou incompleta. Eles deixaram de preencher a coluna que relacionava dois dados obtidos experimentalmente por meio de uma fórmula. Isso prejudicou a realização da terceira etapa no tempo previsto segundo o planejamento.

Na terceira etapa os estudantes analisaram os dados da tabela com o objetivo de perceber algum padrão. Com minha ajuda escolheram duas grandezas ali descritas, decidindo qual seria a variável independente e qual seria a variável dependente. Sugeri que os valores dessas grandezas fossem dispostos em um gráfico cartesiano. Superada a dificuldade de decidir sobre o que seria representado em cada eixo do plano cartesiano, os estudantes inseriram os pontos obtidos na atividade experimental. Percebendo que

esses pontos estavam alinhados, desenharam uma reta que melhor aproximava os pontos. Após isso utilizaram um sistema de equações para determinar a expressão algébrica da reta. Alguns estudantes não sabiam como proceder para transformar a reta numa expressão algébrica, por isso foi necessária minha intervenção nesse momento.

Na quarta etapa os procedimentos anteriores foram repetidos, mas agora com o auxílio de um aplicativo computacional de gerenciamento de planilhas. Os estudantes demonstraram bastante familiaridade com o *software* utilizado pois já haviam realizado algumas atividades com o mesmo durante as aulas de informática do Ensino Fundamental. Orientei-os sobre quais ferramentas utilizar e eles obtiveram a reta aproximada aos dados experimentais e a expressão algébrica correspondente à mesma.

A quinta etapa consistiu de uma conversa com os estudantes e uma reflexão sobre as atividades realizadas. Os estudantes demonstraram muita satisfação em participar de uma atividade diferente das tradicionais aulas expositivas e concluíram se sentir mais seguros para resolver situações problema interdisciplinares que envolvam as funções afim.

4.4. MODIFICAÇÕES SUGERIDAS A PARTIR DO QUE FOI OBSERVADO DURANTE A APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Para que os estudantes desempenhem os procedimentos da atividade experimental com tempo suficiente, houve a necessidade de alterar a duração das etapas da proposta didática. Segue uma sugestão que parece atender as necessidades quanto ao tempo para elaboração das etapas:

- Primeira Etapa “Apresentação dos Instrumentos”: 1 aula de 50 minutos;
- Segunda Etapa “Realização da Atividade Experimental”: 2 aulas de 50 minutos;
- Terceira Etapa: “Confecção dos Gráficos e obtenção da Expressão Algébrica”: 2 aulas de 50 minutos;
- Quarta Etapa e Quinta Etapa: “Uso do Aplicativo Computacional” e “Conclusões”: 1 aula de 50 minutos.

Sugiro essas modificações em relação à duração das etapas a partir do que pude verificar na elaboração das mesmas com os grupos de estudantes.

Os grupos não conseguiram construir os gráficos e realizar os cálculos para obter a expressão algébrica durante o período estipulado no planejamento (1 aula de 50 minutos). Uma causa desse atraso na terceira etapa é decorrente de os estudantes trazerem a tabela da segunda etapa incompleta. Alguns grupos não haviam calculado a densidade da mistura durante a atividade no laboratório e, portanto utilizaram o início da aula para calcular a densidade da mistura. Outro problema apresentado foi a dificuldade que os estudantes têm de utilizar os gráficos para obter uma expressão algébrica. Além disso, os valores não inteiros dificultaram a obtenção e resolução do sistema de equações que forneceria a expressão algébrica.

Sobre as quarta e quinta etapas, acredito que uma aula para cada permitiu que os grupos ficassem ociosos esperando o fim da aula. Durante a quarta etapa, além de confeccionar os gráficos e obter a expressão os estudantes tiveram tempo para personalizar os gráficos. A quinta etapa permitiu a comparação dos dados obtidos pelos grupos e a discussão referente à todas as etapas da atividade experimental e ainda sobrou tempo. Acredito que uma aula de 50 minutos seja suficiente para que os grupos de estudantes, familiarizados com as ferramentas disponíveis no aplicativo computacional, consigam realizar o que é proposto nas 4^a e 5^a etapas da proposta didática.

Como a proposta didática envolve a disponibilidade de muitas aulas, uma sugestão é que os professores de Matemática e Química atuem conjuntamente na implementação da mesma. O professor de Química possui maior habilidade com os instrumentos utilizados na parte experimental, talvez conseguisse finalizar as etapas relativas ao experimento em menos aulas do que foi sugerido na proposta. Assim, a partir do que os estudantes obtêm nas aulas experimentais com o professor de Química, o professor de Matemática realiza os procedimentos seguintes e a proposta não despenderia de tanto tempo dentro das aulas de um só professor e a programação anual dos professores não seria prejudicada. O fato da atividade ser elaborada conjuntamente pelos professores de Matemática e Química pode reforçar o significado da interdisciplinaridade e sua importância.

No Apêndice B apresento roteiros para a implementação de cada uma das etapas a serem entregues aos estudantes. Durante o desenvolvimento das etapas com os estudantes entreguei apenas um roteiro da segunda etapa e para a realização das etapas seguintes passei as instruções na lousa ou utilizei o projetor (na sala de informática). Acredito que com um roteiro para cada etapa em mãos os estudantes se sintam mais seguros sobre como proceder em cada uma delas. É muito importante que a cada aula o material produzido seja entregue ao professor, assim pode-se evitar que os estudantes percam ou esqueçam os mesmos nas aulas em que a proposta é desenvolvida.

4.5. OBSERVAÇÕES SOBRE A CONSTRUÇÃO DOS GRÁFICOS

Durante a construção dos gráficos notei que os estudantes apresentaram dúvidas sobre como posicionar os eixos do plano cartesiano. As dúvidas surgiram da necessidade de trabalhar com números que apresentam variação muito pequena para os valores da densidade da mistura.

Ao determinar que cada “quadrado” do papel quadriculado utilizado na confecção do gráfico determinaria no eixo horizontal 1g de ureia, não apresentaram dificuldades porque a massa de ureia variou de 5g a 30g. A densidade da mistura apresentou valores entre 1 g/mL e 1,30 g/mL e isso deixou os estudantes confusos sobre qual seria o valor atribuído a cada “quadrado” quando a referência fosse o eixo vertical.

Para representar os valores de densidade utilizando como unidade no gráfico 0,01g/mL os estudantes precisariam de uma folha muito grande para representar todos os valores de densidade desde a origem dos eixos cartesianos. Diante dessa dificuldade muitos optaram por iniciar a representação onde a densidade era igual a 1g/mL.

Percebi que os estudantes ficaram inseguros para representar no gráfico apenas uma parte dos valores do eixo correspondente à densidade. Eles concluíram que se omitissem alguns valores poderiam alterar os dados do experimento.

Acredito que essas dificuldades são provenientes da resolução de problemas que envolvem números inteiros com valores absolutos pequenos. Recentemente vivenciei uma situação onde os dados relativos à variável independente eram dados pelo ano. Os anos apresentados no eixo variavam de 2010 a 2014 e os estudantes não se sentiram seguros para alterar a representação das datas e realizaram os cálculos utilizando $x = 2010$ e $x = 2014$. Após realizar os cálculos poucos estudantes conseguiram determinar o que era solicitado no problema. Sugeri que em 2010 adotassem o $x = 0$ e em 2014 adotassem o $x = 4$, dessa forma os números adotados apresentaram cálculos mais simples e então foi possível resolver o problema de maneira mais eficiente.

Os problemas com números muito grandes ou com números muito pequenos envolvendo funções são pouco frequentes nos livros didáticos. Por não se habituarem com essas situações, os estudantes apresentam muita dificuldade na resolução de problemas que expõe essa situação.

4.6. SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Considerando a importância da interdisciplinaridade no Ensino de Matemática pretendo desenvolver outros projetos dessa natureza. Tenho também a intenção de reaplicar o presente projeto, o que já está ocorrendo nesse 1º semestre letivo. Pretendo também ficar mais atenta aos professores das disciplinas de Ciências, sempre perguntando se eles têm algum experimento a serem executados de modo que eu possa utilizar os dados obtidos.

Sinto que essa proposta permitiu aos estudantes um aprendizado significativo diante dos temas envolvidos. Sugiro aos meus colegas professores de Matemática que reapliquem o projeto didático aqui proposto, e que participem da construção de projetos semelhantes. Caso haja disponibilidade dos professores das áreas científicas, é ainda mais interessante atuar em conjunto para ressaltar o caráter interdisciplinaridade de nossas matérias. Para que o professor de Matemática não fique muito desanimado em aplicar meu projeto lembro que se ele for feito com um professor de Química, a aplicação é muito mais fácil e envolverá menos da metade do tempo que utilizei no meu trabalho.

4.7. CONCLUSÃO

Observando a participação dos estudantes e analisando o material produzido por eles durante as etapas da proposta didática, posso concluir que os resultados apresentados condizem com as expectativas.

Acredito que a atividade experimental permitiu um diálogo mais rico com a turma em questão. Após a implementação da proposta sinto que os estudantes se sentem mais à vontade para fazer apontamentos e questionamentos durante as aulas expositivas.

Disponibilizo no Apêndice A um roteiro para o professor com as cinco etapas envolvidas na proposta didática. No Apêndice B forneço os roteiros que devem ser entregues aos estudantes e recolhidos ao final de cada etapa. Os roteiros trazem algumas informações sobre o experimento, algumas observações sobre o material utilizado, sobre as grandezas envolvidas e também indica os objetivos de cada etapa da proposta didática.

4.7. OBSERVAÇÕES PESSOAIS

Elaborar a proposta didática e participar junto com os estudantes de sua aplicação me fez refletir sobre a minha prática docente. Desde então percebo que algumas coisas que parecem simples de observar diante dos olhos do professor podem ser a origem das dificuldades dos estudantes. Além disso, passei a buscar atividades que permitam a participação direta dos estudantes para aplicar em diferentes anos letivos.

As disciplinas que cursei no Mestrado e a elaboração da Dissertação me deram acesso a materiais produzidos por outros docentes e, sempre que possível, utilizo os mesmos em minhas aulas. Considero essa uma atividade que pode ser aplicada em diferentes realidades. Em alguns casos podem ser necessárias algumas adaptações, como realizar o experimento fora de um laboratório ou deixar de realizar a etapa que envolve o uso de computadores. Ministras as aulas referentes às cinco etapas da proposta didática foi um trabalho que exigiu muita dedicação e paciência, mesmo assim, adoraria que o material produzido por mim servisse de referência para que outros professores

desempenhassem em suas aulas uma atividade experimental como apoio ao ensino de Matemática.

Agradeço a atenção de todos que disponibilizaram seu tempo para a leitura dessa dissertação de Mestrado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGOTTI, JOSÉ A. P., LOPES, JANICE P., MORETTI, MÉRICLES T. Função afim e conceitos unificadores: O ensino de Matemática e Física numa perspectiva conceitual e unificadora – IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, Bauru 2003. 11p.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (nº. 9394/96), 1996. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

BRASIL, 2006 Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)

CAETANO, P. A. S., PATERLINI, R.R. Funções elementares: módulo II - Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013. -- (Matemática na prática. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio). 153p.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike**, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118

DANTE, L.R., Matemática: volume único – 1ª edição – São Paulo: Ática 2005. 464 p.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. 5ª Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.843p.

IEZZI, G. Fundamentos de Matemática elementar 1: conjuntos, funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. – 9. Ed. – São Paulo: Atual, 2013. 410p.

IEZZI, G.; DOLCE O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. Matemática: volume único – 5ª edição – São Paulo: Atual, 2011. 720p.

LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P, WAGNER, E., MORGADO, A.C.A matemática do Ensino Médio – Volume 1. 9ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 237p.

MACEDO, J.C.A. Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido/ José Clovis Adão Macedo. – São Carlos: UFSCar, 2011.183f.

MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido, GIRALDO, Vitor Augusto. Modelo de despoluição: módulo I. -- Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013. -- (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)

PAIVA, M.R., Matemática: Conceitos, Linguagem e Aplicações – Volume 1. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2002.368p.

PCN+, Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio + Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasília 144p. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859. Acesso em 14 de julho de 2014.

PCNEM. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio bases legais. Brasília 58p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> . Acesso em 07 de julho de 2014.

PROSPERO, M. B. R. Uma atividade experimental para o estudo de funções no ensino fundamental / Matheus de Barros Ramos Prospero. -- São Carlos: UFSCar, 2013. 73 f.

ROQUE, T. e CARVALHO, J.B.P. Tópicos de História da Matemática. 1ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. 452p.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R., *Cálculo numérico – Aspectos teóricos e computacionais*. Rio de Janeiro: Makron Books, 1988.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2011.72p.Disponível em <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf> . Acesso em 14 de julho de 2014.

SELINGARDI, J.A., Comunicação Pessoal sobre o experimento.

SILVA, R. A. Utilização de Folhas de Atividades no Ensino de Função Afim e Quadrática / Roberta Angela da Silva – São Carlos: UFSCar, 2014. 162 páginas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2014.

SOUZA, V. R. de. Funções no Ensino Médio: História e Modelagem. 2011. 173f. Tese (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) –Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

ZUFFI, E.M. Linguagem na Educação Matemática – X Encontro Nacional de Educação Matemática – Salvador- BA, 7 a 9 de julho de 2010. 12 p.

ZUFFI, E.M., PACCA, J., L., A. Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio. ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP – V.5 – NO 13/14, P7-28 – Jan./Dez de 2000.

APÊNDICE A

Apresento no Apêndice A os roteiros sugeridos ao professor para a realização da proposta didática.

Roteiro para o Professor – Atividade no Laboratório

Inicialmente o professor deverá apresentar aos estudantes os instrumentos que serão utilizados na atividade experimental. Após a apresentação dos instrumentos, sugiro que o professor realize o procedimento sugerido para que os estudantes façam as observações e a partir do que foi observado, que consigam realizar a atividade experimental.

Material necessário para a Atividade Experimental no Laboratório

Para realizar a atividade experimental no laboratório e obter os valores de massa e volume, o professor precisará disponibilizar o seguinte material para cada grupo de estudantes:

- 1 balança;
- 1 béquer com marcações em dezenas de mililitros;
- 1 seringa ou pipeta;
- 1 bastão ou colher para misturar;
- 500 mililitros de água límpida;
- 150 gramas de ureia.

Procedimento Sugerido

Inicialmente separe as massas de ureia (5g, 10g, 15g, 20g, 25g e 30g) para realizar as medidas, reserve as quantidades para a experimentação em diferentes recipientes (béqueres ou pires de porcelana) identificados de acordo com a massa contida.

Em seguida, em um recipiente (béquer) adicione uma das porções reservadas de ureia e acrescente água até completar um volume equivalente a 50mL (para haver maior precisão no volume utilize a seringa) e meça a massa para a mistura composta por cada

uma das porções. Misture os componentes com uma colher ou bastão enquanto a água é acrescentada para que a ureia não fique precipitada no fundo do recipiente.

Cuidados durante a realização do Experimento

- É necessário secar bem o recipiente da balança após cada medida, já que podem ficar resíduos do experimento realizado com a porção anterior.
- Deve-se tomar cuidado com o manuseio da ureia, se a mesma entrar em contato com a água antes da mistura ocorrerá alteração da massa. Isso ocorre porque ela é muito higroscópica, portanto é capaz de absorver água e assim haverá alteração da massa e da composição da mesma.
- O uso prolongado do produto poderá causar irritação ou queimadura nos olhos e pele e sua aspiração poderá causar irritações respiratórias.

Informações sobre a tabela fornecida aos estudantes

A partir das informações extraídas do experimento, é possível calcular a densidade da mistura através da fórmula $d = \frac{m}{V}$, onde m é a massa da mistura e V o volume da mesma. Assim os estudantes podem completar a tabela que segue:

Tabela 1 – Tabela com dados relevantes para a elaboração das etapas seguintes da Atividade Experimental.

Massa de Ureia (em g)	Massa da Mistura (em g)	Volume da Mistura (em mL)	Densidade da Mistura (em g/mL)

--	--	--	--

Fonte: Arquivo Pessoal

Objetivos da Atividade Experimental

Através da atividade experimental o estudante poderá notar que ao misturar diferentes quantidades de certo material, alteramos a densidade de uma mistura.

O estudante utilizará as informações da atividade experimental para preencher uma tabela que fornecerá diferentes valores acerca das misturas realizadas.

Os dados da tabela serão utilizados para a confecção de um gráfico que mostra o comportamento da densidade da mistura de acordo com a quantidade de um dos componentes da mistura.

O estudante poderá refletir acerca das informações obtidas para determinar pontos relativos às quantidades que não foram utilizadas na atividade experimental a partir do tratamento dos dados da obtidos através da Modelagem Matemática.

Roteiro para o Professor – Modelagem dos dados Experimentais

Nessa etapa os estudantes construirão um gráfico que representa a relação entre a massa de ureia que compõe a mistura com a densidade da mistura obtida. Após marcar os pontos obtidos experimentalmente os estudantes irão aproximar uma reta aos mesmos. Obtida a reta aproximada os estudantes deverão determinar a expressão algébrica que representa a mesma.

Material necessário para o tratamento dos dados experimentais

- Folha de papel quadriculado;
- Régua;
- Lápis, borracha e caneta;
- Tabela da etapa experimental preenchida.

Procedimento Sugerido

O professor deve solicitar aos estudantes que construam um plano cartesiano com coordenadas correspondentes à massa de ureia e à densidade da mistura referente à cada quantidade de ureia.

Construído o plano cartesiano, os estudantes deverão determinar sobre o mesmo os pontos correspondentes aos valores obtidos experimentalmente e que estão registrados na tabela preenchida na etapa anterior.

Após localizar os pontos no plano cartesiano o professor deverá questionar os estudantes acerca da tendência apresentada pelos pontos obtidos.

Concluindo que os pontos aproximam uma reta, os estudantes deverão construir com o auxílio da régua a reta que melhor aproxima esses pontos.

A partir da reta obtida os estudantes deverão escolher dois pontos favoráveis para estruturar um sistema de equações que forneça os coeficientes a e b da expressão da função afim $f(x) = ax + b$ correspondente à reta aproximada.

Roteiro para o Professor – Uso de um Aplicativo Computacional

Nessa etapa os estudantes utilizarão um aplicativo computacional para obter o gráfico construído anteriormente e a expressão algébrica da reta aproximada pela ferramenta linha de tendência.

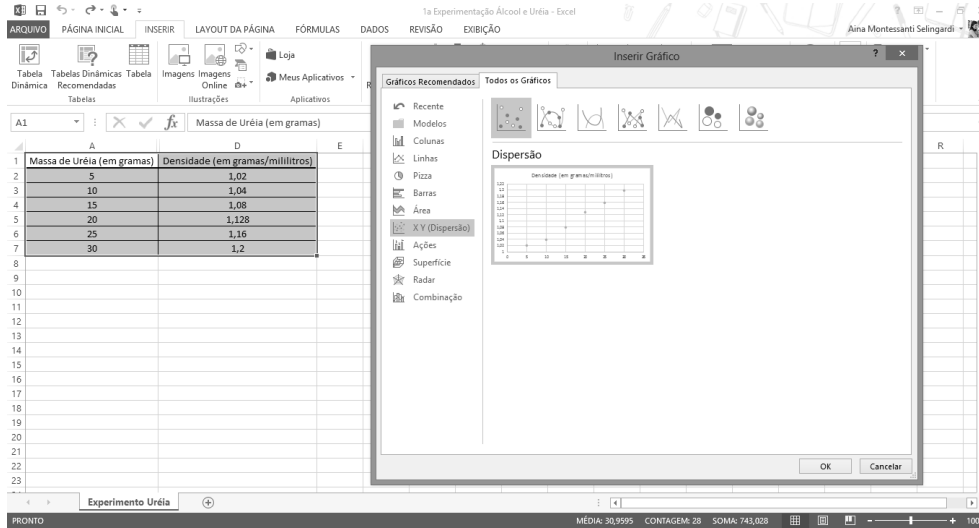
Material necessário para o uso de Aplicativo Computacional

- Computadores com o *software* Excel (ou similar) instalado e em número suficiente para que os grupos realizem a atividade com o auxílio do computador;
- Tabela da etapa experimental preenchida.

Procedimento Sugerido

Orientar os estudantes na elaboração de uma planilha eletrônica que indique a massa de ureia presente em uma mistura e a densidade da respectiva mistura. Após a elaboração da planilha orientá-los a aplicar o recurso inserir gráfico e escolher a opção que dispersa os pontos no plano cartesiano, como na figura a seguir:

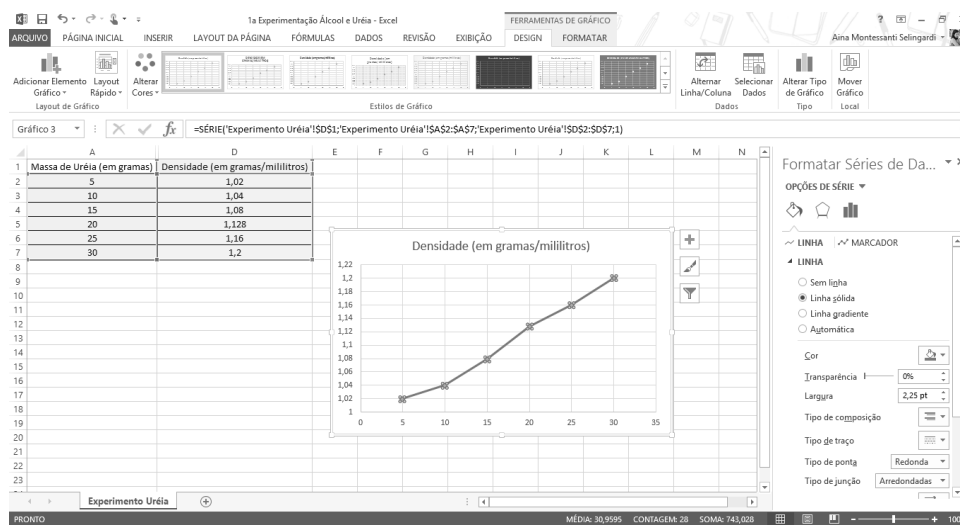
Figura 1 – Como inserir o gráfico a partir de uma planilha.



Fonte: Arquivo Pessoal

Para verificar a tendência assumida pelos pontos obtidos instruir os estudantes a aplicar o recurso “formatar série de dados”, que apresenta no plano cartesiano os segmentos entre os pontos obtidos, como na figura:

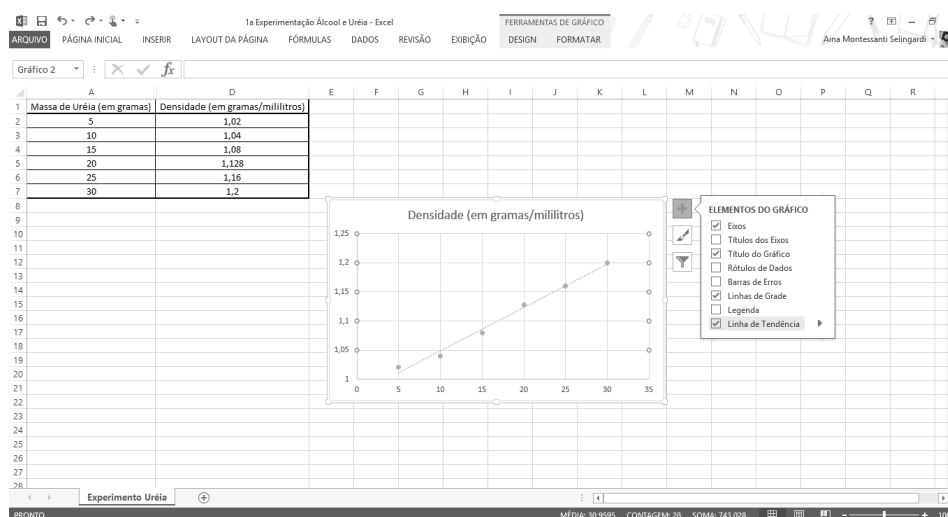
Figura 2 – “Ligar” os pontos obtidos através dos dados inseridos na planilha.



Fonte: Arquivo Pessoal

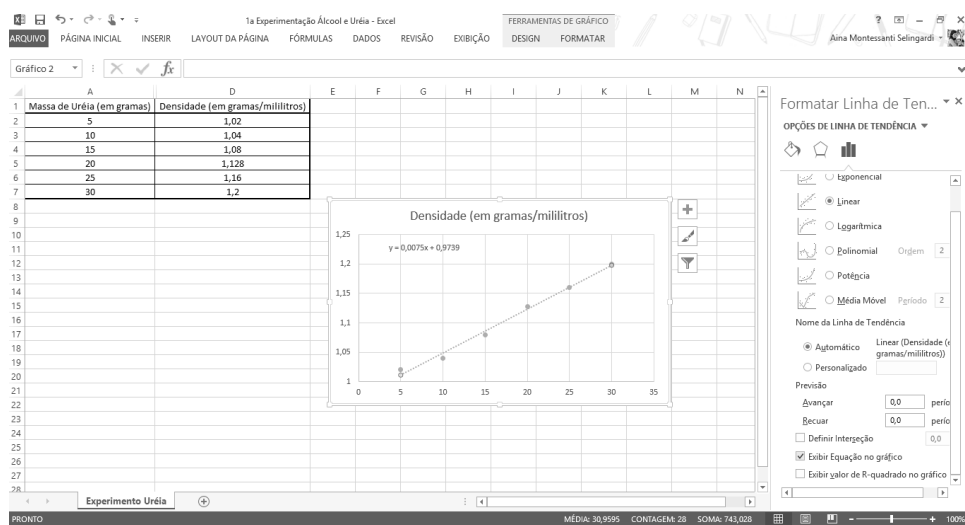
Após observar juntamente com os estudantes o que foi obtido ao determinar os segmentos inserir a linha de tendência linear e solicitar ao aplicativo que apresente a expressão algébrica correspondente. As figuras a seguir indicam como obter a linha de tendência e sua equação.

Figura 3 - Como inserir Linha de Tendência a partir de alguns pontos.



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 4 – Verificar se a linha de tendência escolhida é linear e exibir a expressão da função no gráfico.



Fonte: Arquivo Pessoal

Roteiro para o Professor – Discussão dos Resultados

Na última etapa da atividade os estudantes realizarão a discussão dos resultados obtidos por cada grupo. Inicialmente os grupos preencherão o questionário abaixo e depois o professor deverá mediar uma discussão acerca dos resultados obtidos e ao final do debate os estudantes apresentarão a conclusão.

Questionário Proposto aos Estudantes para Conclusão da Proposta Didática

1) Preencha o campo a seguir com a expressão obtida utilizando os dados experimentais através do gráfico construído no papel quadriculado.



2) Preencha o campo a seguir com a expressão obtida utilizando os dados experimentais através do aplicativo computacional.



3) Reflita sobre as expressões que você escreveu em 1) e em 2). As expressões são semelhantes? As expressões deveriam apresentar valores próximos? Justifique

4) A expressão obtida para a função que relaciona a massa de ureia e a densidade da mistura é dada por $f(x) = ax + b$, qual o significado de a em relação ao fenômeno observado na atividade experimental?

5) Ainda sobre a expressão obtida, qual o significado de b em relação ao fenômeno observado na atividade experimental?

6) Descreva em poucas palavras o fenômeno da atividade experimental.

7) O que você aprendeu durante a realização da atividade experimental?

8) Você gostou de participar dessa atividade experimental?

9) Você gostaria de participar de outras atividades experimentais como esta? Por que?

10) Espaço destinado a sugestões e comentários acerca da atividade experimental.

APÊNDICE B

Apresento no Apêndice B os roteiros sugeridos aos estudantes para a realização da proposta didática.

Roteiro para os Estudantes – Realização do Experimento

Material necessário para a Atividade Experimental no Laboratório

Para realizar a atividade experimental no laboratório e obter os valores de massa e volume, será disponibilizado o seguinte material para cada grupo de estudantes:

- 1 balança;
- 1 béquer com marcações em dezenas de mililitros;
- 1 seringa ou pipeta;
- 1 bastão ou colher para misturar;
- 500 mililitros de água límpida;
- 150 gramas de ureia.

Procedimento Sugerido

Inicialmente separe as massas de ureia (5g, 10g, 15g, 20g, 25g e 30g) para realizar as medidas, reserve as quantidades para a experimentação em diferentes recipientes (béqueres ou pires de porcelana) identificados de acordo com a massa contida.

Em seguida, em um recipiente (béquer) adicione uma das porções reservadas de ureia e acrescente água até completar um volume equivalente a 50mL (para haver maior precisão no volume utilize a seringa) e meça a massa para a mistura composta por cada uma das porções. Misture os componentes com uma colher ou bastão enquanto a água é acrescentada para que a ureia não fique precipitada no fundo do recipiente.

A partir dos dados obtidos experimentalmente e dos conhecimentos de Química os estudantes deverão preencher a tabela que segue:

Tabela 1 – Tabela com dados relevantes para a elaboração das etapas seguintes da Atividade Experimental.

Massa de Ureia (em g)	Massa da Mistura (em g)	Volume da Mistura (em mL)	Densidade da Mistura (em g/mL)

Fonte: Arquivo Pessoal

Cuidados durante a realização do Experimento

- É necessário secar bem o recipiente da balança após cada medida, já que podem ficar resíduos do experimento realizado com a porção anterior.
- Deve-se tomar cuidado com o manuseio da ureia, se a mesma entrar em contato com a água antes da mistura ocorrerá alteração da massa. Isso ocorre porque ela é muito higroscópica, portanto é capaz de absorver água e assim haverá alteração da massa e da composição da mesma.
- O uso prolongado do produto poderá causar irritação ou queimadura nos olhos e pele e sua aspiração poderá causar irritações respiratórias.

Roteiro para os Estudantes – Modelagem dos dados experimentais

Nessa etapa os estudantes construirão um gráfico que representa a relação entre a massa de ureia que compõe a mistura com a densidade da mistura obtida. Após marcar os pontos obtidos experimentalmente os estudantes irão observar a tendência dos mesmos.

Observada a tendência dos pontos, os estudantes deverão aproximar o gráfico e, em seguida obter a expressão algébrica relativa ao mesmo.

Material necessário para o tratamento dos dados experimentais

- Folha de papel quadriculado;
- Régua;
- Lápis, borracha e caneta;
- Tabela da etapa experimental preenchida.

Resultados

Anexe a esse roteiro a folha de papel quadriculado em que você construiu o gráfico. Calcule no espaço abaixo a expressão algébrica da função obtida.

Escreva aqui a expressão algébrica obtida:

Roteiro para os Estudantes – Uso de um aplicativo computacional

Nessa etapa os estudantes utilizarão um aplicativo computacional para obter o gráfico construído anteriormente no papel quadriculado e a expressão algébrica da reta aproximada pela ferramenta linha de tendência.

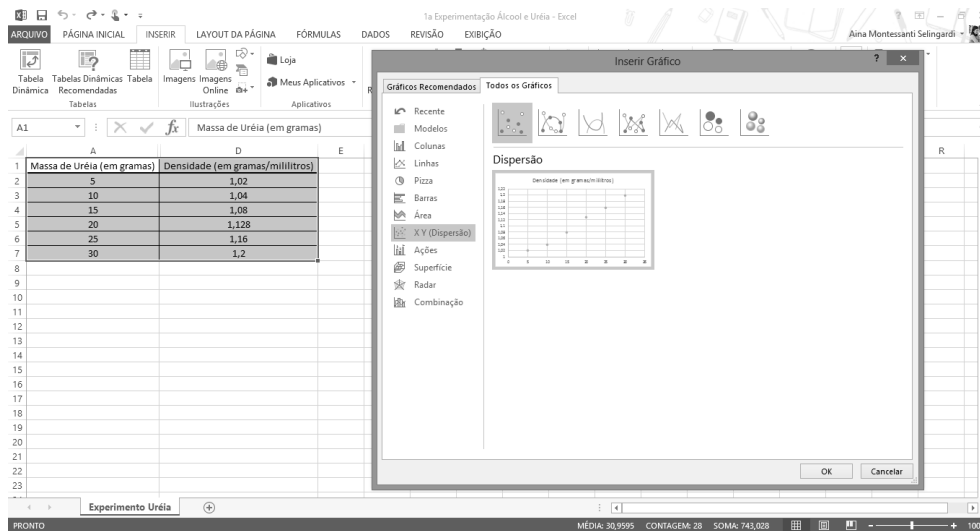
Material necessário para o uso de Aplicativo Computacional

- Computadores com o *software* Excel (ou similar) instalado e em número suficiente para que os grupos realizem a atividade com o auxílio do computador;
- Tabela da etapa experimental preenchida.

Procedimento Sugerido

Elabore uma planilha eletrônica que indique a massa de ureia presente em uma mistura e a densidade da respectiva mistura. Após a elaboração da planilha aplique o recurso inserir gráfico e escolha a opção que dispersa os pontos no plano cartesiano, como na figura a seguir:

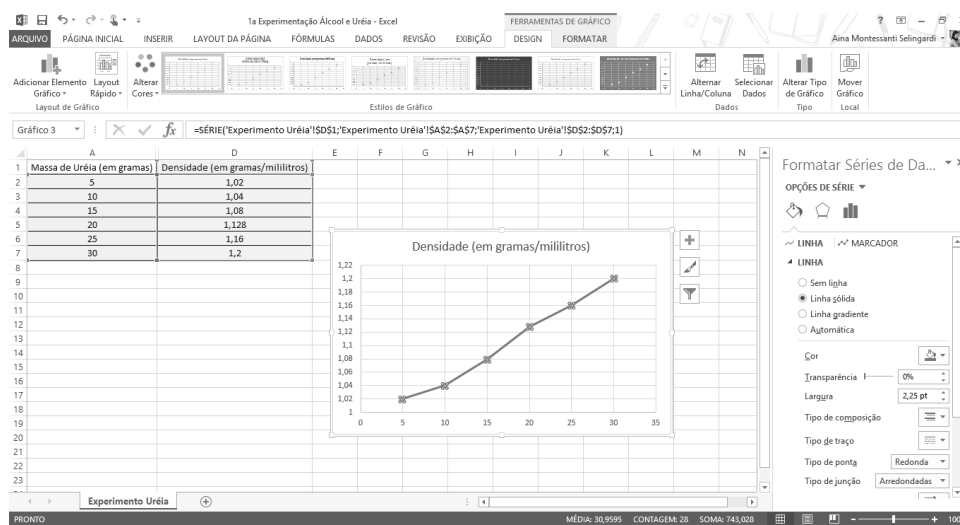
Figura 1 – Como inserir o gráfico a partir de uma planilha.



Fonte: Arquivo Pessoal

Para verificar a tendência assumida pelos pontos obtidos aplique o recurso “formatar série de dados”, que apresenta no plano cartesiano os segmentos entre os pontos obtidos, como na figura:

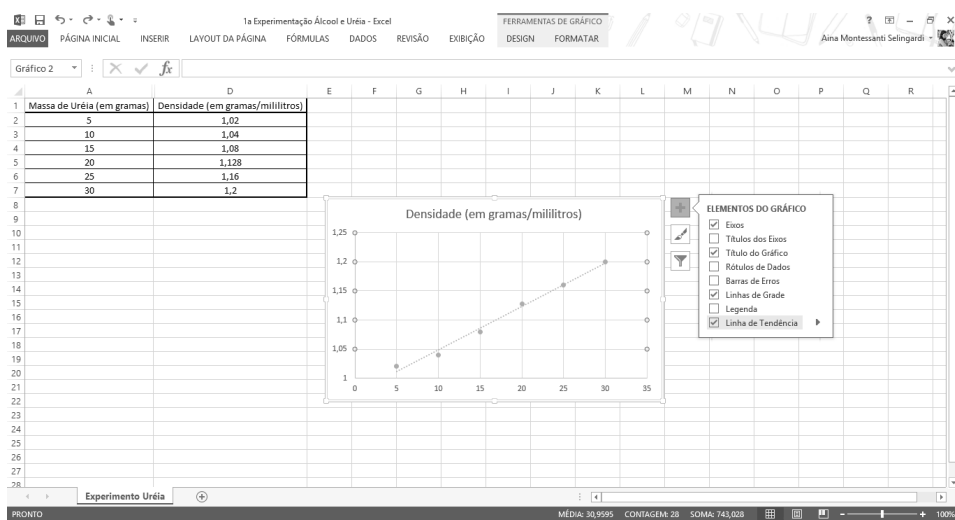
Figura 2 – “Ligar” os pontos obtidos através dos dados inseridos na planilha.



Fonte: Arquivo Pessoal

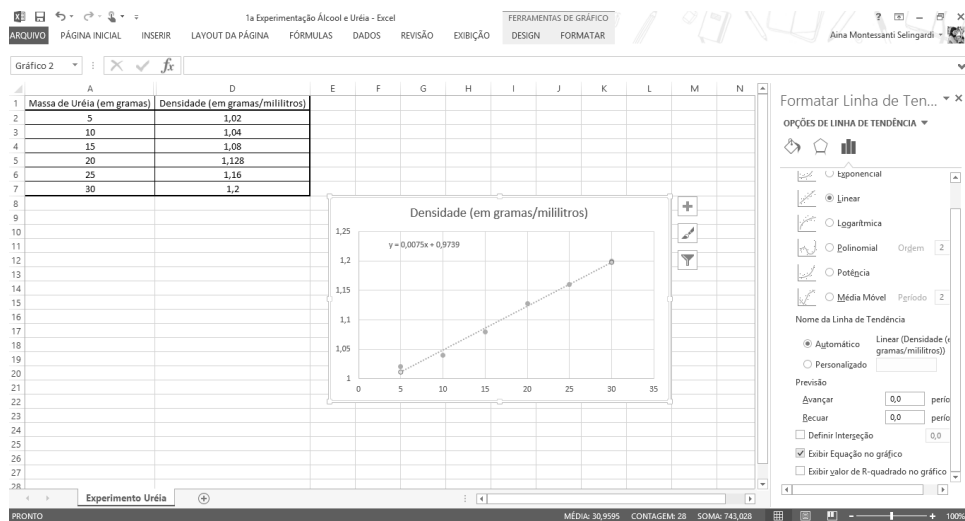
Após observar o que foi obtido ao determinar os segmentos inserir a linha de tendência, escolha seu modelo e solicite ao aplicativo que apresente a expressão algébrica correspondente. As figuras a seguir indicam como obter a linha de tendência e sua equação.

Figura 3 - Como inserir Linha de Tendência a partir de alguns pontos.



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 4 – Verificar se a linha de tendência escolhida é linear e exibir a expressão da função no gráfico.



Fonte: Arquivo Pessoal

Imprima e cole aqui o gráfico e a expressão algébrica obtidos com auxílio do aplicativo.

Roteiro para os Estudantes – Conclusão da atividade experimental

1) Preencha o campo a seguir com a expressão obtida utilizando os dados experimentais através do gráfico construído no papel milimetrado.

2) Preencha o campo a seguir com a expressão obtida utilizando os dados experimentais através do aplicativo computacional.

3) Reflita sobre as expressões que você escreveu em 1) e em 2). As expressões são semelhantes? As expressões deveriam apresentar valores próximos? Justifique

4) A expressão obtida para a função que relaciona a massa de ureia e a densidade da mistura é dada por $f(x) = ax + b$, qual o significado de a em relação ao fenômeno observado na atividade experimental?

5) Ainda sobre a expressão obtida, qual o significado de b em relação ao fenômeno observado na atividade experimental?
