UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HAROLDO MANTOVANI

Atividades sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões

SÃO CARLOS

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HAROLDO MANTOVANI

Atividades sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador

São Carlos

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M293as

Mantovani, Haroldo
Atividades sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões / Haroldo Mantovani. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
162 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Progressões aritméticas. 2. Reconhecimento de padrões. 3. Números figurados. 4. Sequências didáticas. 5. Folhas de atividades. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Haroldo Mantovani, realizada em 19/09/2015:

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

Jorge Manuel Vieira Capela

Prof. Dr. Jorge Manuel Vieira Capela
IBILCE/UNESP

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
UFSCar

A minha esposa pela grande paciência e motivação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela oportunidade de realizar um trabalho a qual tanto queria.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Antonio Salvador, pela competência, paciência e dedicação.

Aos meus pais Guilherme e Joana que, através dos exemplos, sempre me incentivaram.

A todos os colegas discentes da turma de 2013 do PROFMAT.

Aos professores Renato José, Márcio, Luciene, Grazieli Luiza, João Sampaio, Roberto, Ivo, Tomas Edson, Pedro Malagutti e Paulo Caetano, pelo ensino de excelência.

Ao meu amigo e companheiro de viagem Valdir, pelas boas conversas.

A colega de trabalho Francine Galvão, pela ajuda na escrita do *Abstract* do trabalho.

Especialmente à minha mulher Lucinéia Cristiane, pela infinita bondade e por todos os nossos sacrifícios em detrimento desse trabalho.

RESUMO

A importância do desenvolvimento de progressões aritméticas que são sequências no ensino fundamental foi observada em situações de aprendizagem que os alunos puderam investigar e identificar padrões em sequências numéricas e geométricas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-las. Esse trabalho contribui para que o aluno construa a ideia de álgebra como uma linguagem para expressar regularidades, que é um dos conteúdos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino de Matemática no quarto ciclo do ensino fundamental, o qual contrasta, atualmente, com a escassez de atividades envolvendo progressões aritméticas constatada em pelo menos doze anos de experiência como professor de matemática nesses ciclos. A elaboração de um produto de ensino, na forma de folhas de atividades que, através do reconhecimento de padrões numéricos ou geométricos levam o estudante à compreensão do conceito de progressão aritmética pôde ser conferida através da aplicação dessas folhas de atividades em duas salas de 9º ano do ensino fundamental de uma escola municipal. Os resultados obtidos dessas aplicações foram analisados e comparados com as análises prévias em hipóteses levantadas durante a elaboração das folhas de atividades, usando, como metodologia de investigação, a Engenharia Didática. Os alunos realizaram as atividades em duplas ou em trios, se sentiram bem motivados e participaram como protagonistas durante a aplicação de todas as etapas propostas nas folhas, o que garantiu o bom desenvolvimento das atividades. De acordo com a avaliação do aprendizado, os alunos atingiram os objetivos propostos e constatou-se que o material de ensino produzido e aplicado funciona. Acredita-se que o material elaborado possa ser útil a outros professores que desejarem desenvolver, em suas aulas, progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões, podendo adaptá-lo à realidade de suas turmas. Este trabalho contribuiu enormemente ao autor, trazendo uma grande evolução profissional que se iniciou na escolha do tema, permeou pela elaboração da sequência didática e pela aplicação das folhas de atividades e terminou pela reflexão sobre o que foi feito e se encontra registrado aqui.

Palavras chave: Progressões Aritméticas. Reconhecimento de padrões. Sequencia Didática. Folhas de Atividades.

ABSTRACT

The importance of the development of sequences that are arithmetic progressions in the high school was observed in learning situations which the students could investigate and identify patterns in numerical and geometric sequences, building the algebraic language to describe them. This work contributes for the student to build the idea of algebra as language to express irregularities, that is one of the proposed issues by the National Curricular Parameters (PCNs) for the math teaching in the fourth cycle of high school, which contrasts, nowadays, with the scarcity of activities involving observed arithmetic progressions in at least twelve years of experience as a math teacher in these cycles. The elaboration of a teaching product, in the way of activity sheets that, through the recognizing of numerical and geometric patterns, takes the student to the comprehension of the concept of arithmetic progression which could be tested through the application of these activity sheets in two classrooms of the ninth year of high school in a public municipally school. The obtained results of these applications were analyzed and compared to the previous analyzes in raised hypothesis during the elaboration of the activity sheets, using, as investigation methodology, the Didactic Engineering. The students did the activities in groups of two or three, were well motivated and participated as principal character during the application of all steps proposed in the paper, which guaranteed the good development of the activity. In according to the evaluation learning, the students reaching the proposed goals and noting that the produced teaching material works. It is believed that the elaborated material can be useful for other teachers who want to develop, in their classes, arithmetic progressions through the recognizing of patterns, adapting it to the reality of their classrooms. This work contributes hugely to the author, bringing a big professional evolution that starts with the issue choice, continued in the elaboration of the didactic sequence and the application of the activity sheets and finished with the reflection of what have been done and is registered here.

Keywords: Arithmetic Progressions; Patterns Recognizing; Didactic Sequence and Activity Sheets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das progressões aritméticas e o estudo das funções ocorrem nas escolas brasileiras sistematicamente nos anos iniciais do Ensino Médio, embora a noção de função, sequências e o reconhecimento de padrões numéricos e geométricos em sequências são conteúdos tratados no quarto ciclo do Ensino Fundamental.

Segundo os PCNs para o ensino de Matemática:

> Esse encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (BRASIL, 1998, p. 51)

Nesses doze anos de experiência como professor de Matemática dos anos finais do ensino fundamental e em contato com os livros didáticos e apostilas, basicamente é apresentado ao estudante dessas séries as expressões algébricas, relações entre duas grandezas, equações de primeiro e segundo graus, inequações, sequências e o conceito de função, bem como o estudo das funções elementares afim e quadrática, embora o desenvolvimento dos conceitos de equações do segundo grau e funções quadráticas não são objetivos dos PCN para o quarto ciclo do ensino fundamental:

> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve, dentre outros, visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema por meio de equações do primeiro grau, observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81)

A ideia central deste trabalho é desenvolver sequências didáticas sobre um assunto pouco valorizado no Ensino Fundamental – que são as sequências definidas recursivamente, em especial as Progressões Aritméticas (PA) – e, ao final do processo, conseguir responder à seguinte pergunta:

É possível que alunos do 9º ano do Ensino Fundamental construam conhecimento acerca das Progressões Aritméticas?

A escassez de tal assunto no Ensino Fundamental motivou a elaboração de um conjunto de atividades na forma de folhas de atividades envolvendo sequências, em particular, *Progressões Aritméticas,* com a finalidade de apresentar tais conceitos aos estudantes, conceitos estes inéditos para a maioria deles, despertar a ação investigativa para o reconhecimento e generalização de padrões, desenvolver o raciocínio recursivo e oferecer também oportunidades de estudar padrões de sequências de Números Figurados, testar conjecturas e utilizar notações matemáticas mais sofisticadas através do estudo das progressões aritméticas, promovendo a conexão entre padrões geométricos, o estudo de sequências e álgebra.

É importante destacar também que, essas sequências didáticas evitam o excesso de aulas expositivas, permitindo que os estudantes construam conceitos, discutam suas hipóteses com os colegas, elaborem seus caminhos e investiguem soluções.

O objetivo deste trabalho foi, inicialmente, propor quatro aulas envolvendo Progressões Aritméticas através do reconhecimento de padrões em sequências de figuras para alunos de duas salas do 9º ano do Ensino Fundamental.

Elaboramos, então, um produto de ensino, em forma de três aulas preparadas em formato de folhas de atividades e uma aula com conteúdo teórico impresso sobre o tema, que serve como base para uma aula expositiva e também como material de consulta para professores e estudantes. É importante destacar que a elaboração deste produto de ensino contribuiu na formação continuada do professor pesquisador autor deste trabalho.

Depois da elaboração das sequências didáticas, o objetivo seguinte foi aplicá-las em quatro aulas, três aulas com cem minutos cada e uma aula com cinquenta minutos, em cada uma das séries citadas e investigar os resultados obtidos.

Essa prática de investigação exigiu do autor um sólido conhecimento científico e o enfrentamento de alguns problemas práticos para os quais não existe teoria prévia, o que vai de encontro com a metodologia adotada, pois este trabalho é um relato da ação pedagógica investigativa com planejamento e aplicação de sequências didáticas para ensino de um tópico específico do campo da Aritmética e da Álgebra, as Progressões Aritméticas, no nível fundamental, com metodologia de trabalho inspirada nos princípios da Engenharia Didática.

A Engenharia Didática tem inspiração no trabalho dos engenheiros ao realizarem projetos e caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, partindo da concepção, passando pela elaboração, realização, observação e análise das aplicações das sequências didáticas.

De acordo com Carneiro (2005):

> O termo Engenharia Didática (Artigue, 1994, 1996), criado na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia — momentos em que é preciso construir soluções. (Carneiro, 2005, p. 2).

De modo geral, a Engenharia Didática foi criada para atender as relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino e, neste trabalho, designa uma metodologia específica de pesquisa baseada em experiências de sala de aula, articulada a prática de investigação.

Dessa forma, a teoria da Engenharia Didática serviu como um referencial para o desenvolvimento de um produto para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

As três aulas elaboradas em forma de folhas de atividades, cada uma com cem minutos de duração e a aula expositiva de cinquenta minutos foram planejadas tomando como referencial teórico os conteúdos estudados nas aulas de Aritmética, de Matemática Discreta, de Cálculo e de Números e Funções Elementares deste Mestrado Profissional relacionadas com o tema deste trabalho.

A seguir damos uma descrição de cada capítulo do trabalho.

O Capítulo 1 traz um breve comentário sobre sequências, recursividade, progressões aritméticas e números figurados e discorre sobre a importância do estudo de sequências, especialmente das progressões aritméticas no Ensino Fundamental.

O Capítulo 2 trata, exclusivamente, da Metodologia de Pesquisa utilizada nesse trabalho, que tem característica experimental inspirada nos princípios da Engenharia Didática. Tal metodologia, criada pela educadora francesa Michèle Artigue na década de 1980 para atender as relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino e, neste trabalho, tem papel fundamental, pois designa uma metodologia específica de pesquisa baseada em experiências de sala de aula, articulada com prática de investigação.

No Capítulo 3 é feita a apresentação da proposta do trabalho desenvolvido, cujo produto de ensino elaborado é composto de três folhas de atividades e o conteúdo teórico impresso sobre o tema. Nesse capítulo também foram feitas algumas suposições em relação ao que se espera ao criar uma determinada questão e também a importância que cada questão tem no contexto da atividade, de acordo com o autor deste trabalho.

O Capítulo 4 destina-se à descrição das aplicações das atividades nas duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental regular da E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando da cidade de Orlândia-SP. Este capítulo é o teste da proposta de ensino elaborada, pois ele traz a uma breve descrição das turmas e da escola, juntamente com a descrição das respostas dadas pelos alunos em cada questão de cada folha de atividade proposta do conjunto de folhas de atividades elaboradas.

No Capítulo 5 encontra-se a conclusão do trabalho, cuja avaliação mostra-se positiva, entendendo-se que atingiu o objetivo de elaborar um produto de ensino diferenciado que levasse o aluno, através da ação investigativa, a reconhecer e entender o processo de recursividade que há nas progressões aritméticas, generalizar esses padrões, desenvolver o raciocínio recursivo e aplicar esses conceitos em diversas situações, bem como em outros tipos de padrões como aqueles encontrados em sequências de Números Figurados, testando conjecturas e aprendendo a utilizar notações mais sofisticadas através do estudo de sequências. O produto de ensino permite afirmar que é possível que alunos do 9º ano do ensino fundamental se apropriem plenamente dos conceitos acerca das progressões aritméticas quando desenvolvidos através do reconhecimento de padrões e através do uso de folhas de atividades, mostrando que tais procedimentos didáticos são bastante eficazes quanto à compreensão e consequentemente ao aprendizado dos estudantes do Ensino Fundamental.

Essa metodologia de trabalho, produzindo materiais em forma de folha de atividades, já foi, em outras ocasiões, uma prática do autor destas notas, mas não com tamanha dedicação e aprendizado. Essa é mais uma contribuição pessoal deste trabalho.

Finaliza-se essa introdução relatando que a elaboração deste trabalho está centrada na construção de um material de ensino envolvendo progressões aritméticas, recursividade e números figurados, através da observação, reconhecimento e generalização de padrões, em associação à leitura, estudo e reflexão de textos da literatura disponível, cuja escrita foi uma tarefa que trouxe um grande amadurecimento ao autor em relação ao ensino de matemática.

1. SEQUÊNCIAS, PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E NÚMEROS FIGURADOS.

1.1 Introdução

O tempo todo, ao longo de nossa vida, estamos rodeados de fenômenos de toda natureza. Se prestarmos atenção, nos surpreenderemos com as regularidades que esses fenômenos apresentam. Como a aparição do Cometa Halley que se dá a cada 76 anos, a distribuição dos ramos e das folhas das plantas ao longo do caule buscando receber o máximo de luz, ou ainda a simples disposição de embalagens dos produtos expostos numa pilha em um mercado.

As regularidades e os padrões de comportamento dos fenômenos que nos cercam é objeto de estudo da Matemática, a qual transforma esses padrões em representações numéricas, algébricas ou geométricas. No caso das representações numéricas, os padrões podem ser descritos por sequências numéricas que se apresentam por meio de leis de formação de diversos tipos.

As progressões aritméticas constituem-se de sequências definidas recursivamente e são comuns na vida real por aparecerem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização constante de um bem ao longo do tempo.

1.2 Sequência e Progressão Aritmética

Uma *sequência* é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos (sequência infinita) ou o conjunto dos n primeiros números inteiros positivos, no caso de uma sequência finita com n elementos.

Uma *progressão aritmética (PA)* é uma sequência na qual é constante a diferença entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo termo. Essa diferença é chamada de *razão* da progressão e pode ser representada pela letra r.

De forma geral, em toda progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, teremos:

$$a_{n+1} - a_n = r, \text{ onde } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Donde $a_{n+1} = a_n + r$.

Essa ultima igualdade, permite descrever uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ através de um padrão, usado na elaboração deste trabalho, onde para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois ao passar de a_5 para a_{13}, avança-se oito termos. Desse modo, podemos determinar o termo geral de uma PA conhecendo qualquer um de seus temos a_k, $(1 < k < n)$ e a razão r:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot r$$

Pois, ao passar de a_k para a_n, avançamos $n - k$ termos.

Isso faz com que as progressões aritméticas constituem-se de sequências definidas recursivamente (por recorrência). A recursividade é um poderoso processo matemático para gerar sequências em que as condições iniciais são definidas e cada termo posterior da sequência é determinado a partir de um ou mais dos seus antecessores. Tal processo tem muitas aplicações em várias áreas da Matemática, como Combinatória, Matemática Discreta, Cálculo Numérico, Equações Discretas e Equações Diferenciais, sendo indispensável em áreas como a Computação e Engenharia.

As progressões Aritméticas são comuns na vida real por aparecerem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização constante de um bem ao longo do tempo.

Essa recursividade que as progressões aritméticas apresentam é o padrão que os alunos deverão reconhecer nas folhas de atividades, através da investigação de sequências de figuras geométricas formadas por palitos, pontos de uma malha ou círculos.

Com o reconhecimento desse padrão, o próximo objetivo é levar o aluno a se apropriar dele, reproduzi-lo nas atividades para calcular os próximos termos da progressão aritmética e também a calcular um termo qualquer, simplesmente observando que, para passar de a_k para a_n, avançamos $n-k$ termos, devendo somar $n-k$ vezes a razão r. Isso permitirá que o aluno desenvolva uma fórmula geral para calcular qualquer termo a_n da PA em função de n.

Depois disso, se a PA for não estacionária ($r \neq 0$), o aluno poderá fazer um caminho inverso e calcular n a partir de a_n, através da resolução de equações do primeiro grau em n, visto que a progressão aritmética é uma função do 1º grau em $n \in N$, $n \geq 1$. Conhecendo-se o k-ésimo termo a_k e a razão r da progressão aritmética, pode-se escrever:

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot r = a_k + nr - kr = r \cdot n + (a_k - kr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = r \cdot n + (a_k - kr)$$

Donde a_n é uma função do 1º grau em n e, ao determinar n quando $r \neq 0$, tem-se $n = \frac{a_n - a_k + kr}{r}$.

Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1 e a PA é dita de primeira ordem. Sendo a PA uma função $a_n \cdot : N \longrightarrow R$, que associa a cada número natural n, $n \geq 1$, o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma PA se e somente se os pontos do plano têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, etc. e estão em linha reta.

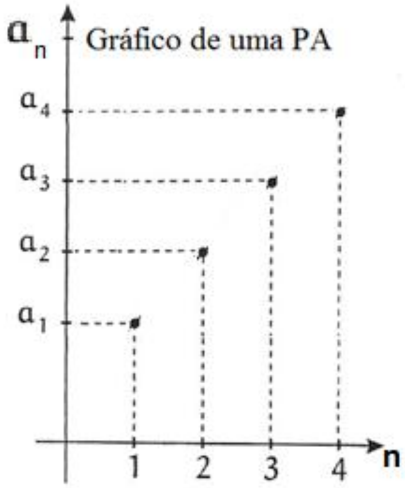


Figura 1: Gráfico de uma PA

Outra proposta de atividade é determinar a soma S_n dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, isto é:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{n}$$

Podemos fazer a soma do primeiro ao enésimo termo e do enésimo ao primeiro termo:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + \ \ a_2 + \ \ a_3 \ + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + \ \ a_3 + \ \ a_2 + \ a_1 \end{cases} +$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observe que ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{\text{n}} \Leftrightarrow S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da PA$(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ é $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Observe que S_n também pode ser escrito:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = [a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot \frac{n}{2} = [2a_1 + nr - r] \cdot \frac{n}{2} = \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n + \frac{r}{2} n^2$$

Portanto, se $r \neq 0$, então S_n é uma função do segundo grau em n com domínio nos naturais positivos.

Levar o estudante do Ensino Fundamental a desenvolver uma generalização para a soma dos n primeiros termos de uma PA é uma tarefa, *a priori*, um pouco mais trabalhosa, quando se trata de estudar PA através do reconhecimento de padrão. O aluno precisa determinar, inicialmente, o termo geral da PA e, somente depois determinar uma generalização para a soma dos seus n primeiros termos.

Embora seja uma tarefa um tanto trabalhosa, será muito útil no desenvolvimento das atividades que tratam das sequências de números figurados.

1.3 Números Figurados

Estudados desde a antiguidade pelos gregos, os *Números Figurados* constituem representações de pontos formando polígonos regulares, por isso também são denominados *Números Poligonais.*

Com eles, pode-se formular uma série de atividades interessantes, através das quais se propõe desenvolver várias competências em Matemática em alunos do Ensino Fundamental, como por exemplo, reconhecer padrões numéricos e geométricos em sequências e desenvolver uma generalização algébrica para esses padrões.

Os Números Figurados também são sequências definidas recursivamente, bem como exemplos interessantes e particularmente atrativos aos estudantes.

Citado por (Chiconello, 2013):

"Segundo Miller (1990), "*sequências envolvendo números poligonais são exemplos muito interessantes de sequências definidas recursivamente e que podem ajudar os estudantes investigarem o processo de recursão*". (Chiconello, 2013, p 21)".

Neste trabalho, duas sequências de números figurados foram acrescentadas. Além de questões sobre progressões aritméticas, uma das folhas de atividade traz os Números Poligonais Triangulares e outra folha de atividade traz os Números Poligonais Quadrados.

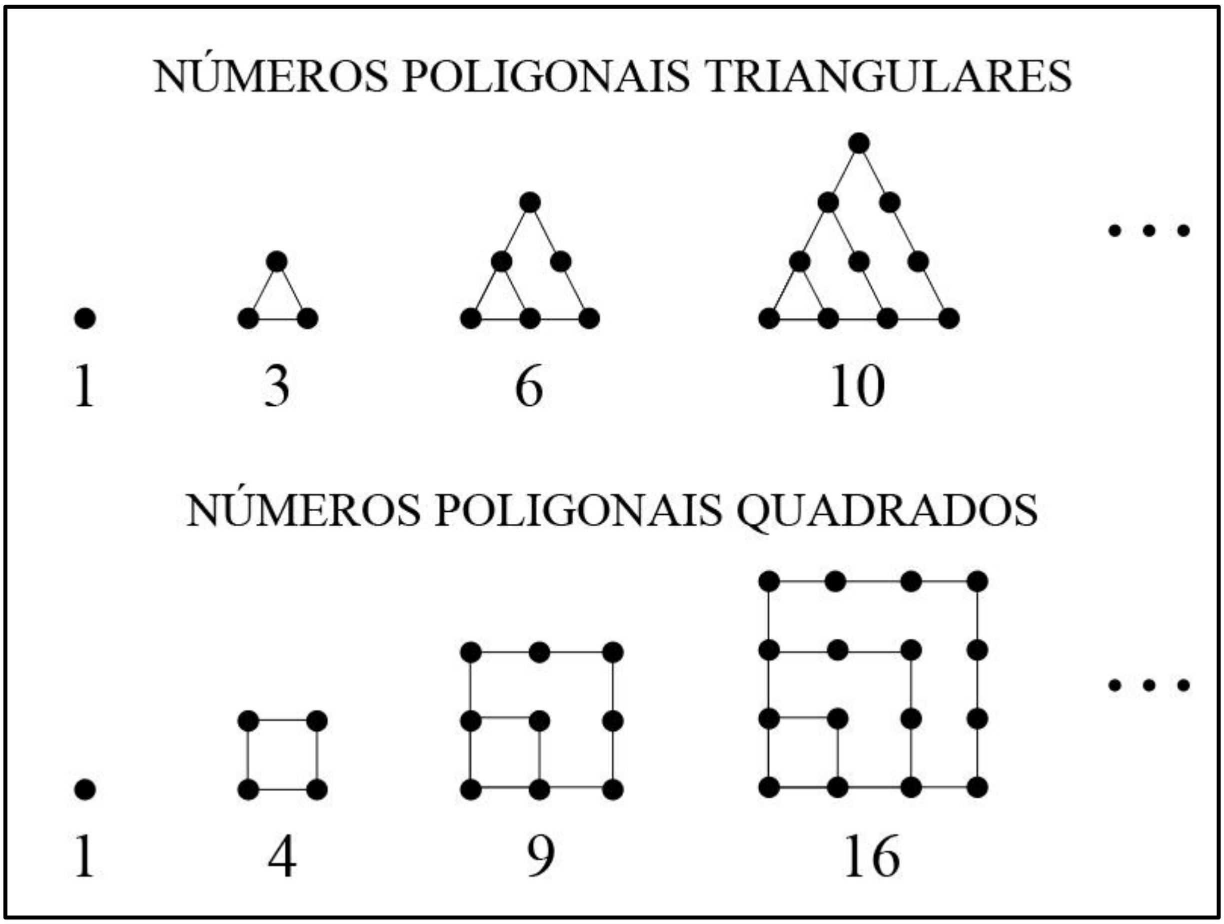


Figura 2: Números Triangulares e Números Quadrados

Nessas duas sequências de números poligonais, os seus termos gerais são dados pela soma dos termos de uma PA

No caso da sequência dos Números Triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, \cdots)$, sendo T_n o enésimo número triangular, pode-se levar o aluno a perceber a recursividade abaixo.

$$T_n = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ T_{n-1} + n, & se\ n = 2, 3, 4, \cdots \end{cases}$$

Donde

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Para todo inteiro positivo n.

A penúltima igualdade mostra que qualquer número triangular n é a soma dos n primeiros números naturais positivos, isto é, a soma de uma PA com primeiro termo igual a 1 e razão igual a 1.

A última igualdade permite ao aluno entender que, na sequência dos números triangulares, o termo geral T_n é uma função do segundo grau em n com domínio nos naturais positivos.

$$T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

O mesmo ocorre para a sequência dos Números Quadrados $(1, 4, 9, 16, 25, \cdots)$, sendo Q_n o enésimo número quadrado, tem-se a recursividade:

$$Q_n = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ Q_{n-1} + 2n - 1, & se\ n = 2, 3, 4, \cdots \end{cases}$$

Donde $Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$.

E Q_n é a soma dos n primeiros números ímpares positivos, isto é, a soma de uma PA com primeiro termo igual a 1 e razão igual a 2.

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_n = \frac{(2n - 1 + 1) \cdot n}{2} = \frac{2n \cdot n}{2} = n^2$$

Para todo inteiro positivo n.

Mostrando também ao aluno que, na sequência dos números quadrados, Q_n é uma função do segundo grau em n com domínio nos naturais positivos.

1.4 Progressões Aritméticas no Ensino Fundamental

O estudo das progressões aritméticas e o estudo das funções ocorrem nas escolas brasileiras sistematicamente nos anos iniciais do Ensino Médio, embora a noção de função, sequências e o reconhecimento de padrões numéricos e geométricos em sequências são conteúdos tratados no quarto ciclo do Ensino Fundamental (E. F.).

> Esse encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (BRASIL, 1998, p. 51)

Na nossa experiência como professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental observamos que os livros didáticos e apostilas destas séries, basicamente apresentam ao estudante as expressões algébricas, relações entre duas grandezas, equações de primeiro e segundo graus, inequações, sequências numéricas e o conceito de função, bem como o estudo das funções elementares afim e quadrática. Entretanto, o desenvolvimento dos conceitos de equações do segundo grau e funções quadráticas não são objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para e ensino de Matemática até o fim do quarto ciclo do ensino fundamental.

> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:
> (...)
> Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> * produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;
>
> * resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
>
> * observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.
> (BRASIL, 1998, p. 81)

Os PCNs de Matemática do Ensino Fundamental de 6º ao 9º anos declaram ainda que, a álgebra é um ótimo instrumento para que os alunos desenvolvam suas capacidades de generalização e abstração, embora a forma como os professores abordam esse ensino não garante a aprendizagem dos alunos.

A competência matemática que todo estudante deve desenvolver, inclui raciocínio algébrico e a compreensão das funções, sendo que o estudo de funções revela-se particularmente rico em oportunidades para estabelecer conexões entre os diversos domínios da matemática.

Formular e comunicar generalizações, assim como reconhecer e representar relações entre variáveis são processos essenciais do pensamento matemático, assim como a sua utilização para interpretar situações e resolver problemas de diversas disciplinas e na vida corrente.

O reconhecimento de regularidades, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras permitem que a aprendizagem da álgebra aconteça gradualmente ajudando a desenvolver a capacidade de abstração. Esta capacidade também é essencial no desenvolvimento da competência matemática.

Segundo Abrantes (1999), desde os primeiros anos de escolaridade, as crianças podem ser encorajadas a enxergar padrões, a representá-los geométrica e numericamente, estabelecendo conexões entre geometria e aritmética e coloca que:

> No seu quotidiano, os alunos encontram padrões com muita facilidade, no papel de embrulho, no lenço, no tapete ou em figuras que podem ser identificadas, descritas e desenhadas. A observação de sequências numéricas permite, igualmente, a procura e o reconhecimento de padrões e de diversas relações entre os números. Reconhecer padrões envolve conceitos como a forma, a cor, o tamanho, o número. (ABRANTES, 1999, p. 98)

Em síntese, a competência matemática que todos devem desenvolver, no seu percurso ao longo da educação básica, inclui, dentre outros, a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica.

Baseado nessas leituras, entre outras inferimos que a generalização de padrões é um ótimo caminho para desenvolver as progressões aritméticas no Ensino Fundamental, pois com a observação, o reconhecimento e a generalização de padrões os alunos são estimulados a construir suas próprias conjecturas, testando-as e dando significados a elas, além de ser uma boa forma de resgatar o interesse dos alunos pela matemática.

De acordo com nossa experiência com alunos de 9º ano do Ensino Fundamental é visível a importância do trabalho com investigação matemática e, em se tratando de reconhecimento de padrões, quando trabalhado em grupos, é notável também a valorização e a participação ativa dos alunos de forma a torná-los corresponsáveis pelo trabalho em sala de aula.

Percebe-se que, dessa forma, o professor deixa de ser o detentor e transmissor de conhecimento e os alunos passam a construir o próprio conhecimento, desenvolvendo as habilidades e competências matemáticas, internalizando-as e fazendo ligações com outras áreas. Apesar de os alunos passarem a desempenhar um papel de maior destaque durante o desenvolvimento de atividades de reconhecimento de padrões, o professor não deixa de desempenhar um papel de grande importância em sala de aula como mediador e orientador para o bom desenvolvimento dessas tarefas.

No desenvolvimento de atividades investigativas, como o reconhecimento de padrões em sequências, o livro didático é fundamental. Sobre essa perspectiva, no guia de livros didáticos – PNLD – 2014 encontramos:

> O Guia é fruto de um minucioso processo de avaliação que envolveu professores de diversas instituições educacionais de várias regiões do país. Todos eles compartilham da convicção de que o livro didático tem sido um apoio indispensável para o trabalho do professor e uma fonte permanente para a aprendizagem do aluno (BRASIL, 2014, p. 7). … No processo de ensino e aprendizagem, o livro didático é um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo mais eficaz de aprendê-lo. (BRASIL, 2014, p. 12)

Por vivenciar a dificuldade dos nossos alunos e também pela Álgebra ser uma área da Matemática que ocupa um lugar importante no currículo escolar, (Carmo, 2013) investiga o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos através da generalização de padrões, mediante a análise de alguns livros didáticos escolhidos no PNLD-2011.

> A realidade vivida e encontrada nas escolas me mostra que o livro didático é um instrumento de grande poder nas decisões que orientam as ações docentes e é um instrumento de fácil acesso tanto para professores quanto para alunos. A introdução da Álgebra através das atividades de generalizações de padrões tem sido analisada em diversas pesquisas tais como, a de Aquino (2008) que investigou 33 alunos do 6° ano EF com atividades que envolvem percepção e generalização de padrões em sequencias, como os alunos criam estratégias para resolver este tipo de atividade.

> Concluiu que os alunos foram sensibilizados e se apropriaram dos problemas possibilitando a observar, a analisar, a reconhecer e expressar regularidades de sequencias que apresentam padrão. Silva (2009) investigou como os professores de Matemática abordam atividades que envolvem a observação e a generalização de padrões nas oficinas de Matemática de algumas escolas de tempo integral, em São Paulo, através de entrevistas com 5 professores e verificou que este tipo de atividades são poucos trabalhadas e que alguns professores desconhecem o objetivo principal deste tipo de atividade. Santos (2008) investigou as mudanças de percepção de duas professoras sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em suas próprias aulas. As professoras notaram a importância do tema e houve uma mudança no olhar delas quanto à classificação de certo ou errado nas atividades de padrões, elas passaram a observar e compreender o raciocínio dos alunos durante a realização da atividade. A generalização de padrões tem se mostrado que é uma opção interessante de introduzir o pensamento algébrico, pois os alunos atribuem sentido aos símbolos e conseguem compreender equações algébricas semelhantes. (CARMO, 2013, p. 4-5)

E conclui, através de várias pesquisas e pela verificação de livros didáticos de Ensino Fundamental escolhidos no PNLD 2011, que a introdução da linguagem algébrica através da atividade de generalizações de padrões se torna mais significativa para os alunos.

> Os resultados preliminares vêm mostrando que alguns livros didáticos escolhidos no PNLD-2011, estão utilizando a estratégia de introdução à linguagem algébrica através de exercícios de generalização de padrões, pois a introdução da linguagem algébrica através da variável como incógnita tem mostrado ineficiência na aprendizagem dos alunos e esconde as várias possibilidades que a variável pode se apresentar. (CARMO, 2013, p. 8)

O Projeto GPEA *sobre observação e generalização de padrões: uma atividade matemática transversal* é um projeto da Pontifícia Universidade Católica – PUC de São Paulo ligado à linha de pesquisa denominada *Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores,* cujas pesquisas visam investigar o estatuto da observação e generalização de padrões no nível institucional (PCNs, Programas, NCTM, etc.), no docente (professores do Ensino Superior, Médio, Fundamental e Infantil) e discente (alunos de todos os segmentos). Os resultados dessas pesquisas visam contribuir para a sensibilização da comunidade escolar sobre a importância do desenvolvimento de habilidades e competências propiciadas por atividades da observação e generalização de padrões no equacionamento de problemas.

Devido à grande importância dada, pelos professores, pesquisadores, pelas instituições de fomento, pesquisa e formação, ao desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas através de atividades de reconhecimento e generalização de padrões, o autor destas notas propõe desenvolver *“Atividades sobre Progressões Aritméticas através do reconhecimento de padrões”* com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, embora o estudo de PA ocorra sistematicamente nas escolas brasileiras nos anos iniciais do Ensino Médio.

É importante ressaltar que, embora o tema seja bem conhecido na comunidade acadêmica e muito comum entre professores e pesquisadores, o estudo das progressões aritméticas não ocorre sistematicamente no Ensino Fundamental, o que torna esse trabalho ímpar e inovador, oferecendo novos caminhos e horizontes à Matemática do Ensino Fundamental, não pelo tema, mas sim pela série a qual a sequência didática foi aplicada.

A ideia central deste trabalho é desenvolver sequências didáticas sobre um assunto pouco valorizado no Ensino Fundamental – que são as sequências definidas recursivamente, em especial as Progressões Aritméticas – através do reconhecimento e generalização dos padrões apresentados pelas PA

A escassez de tal assunto no Ensino Fundamental motivou a elaboração de um conjunto de atividades na forma de folhas de atividades envolvendo *Sequências*, em particular *Progressões Aritméticas*, com a finalidade de apresentar tais conceitos aos estudantes.

Conceitos estes, com uma abordagem inédita para a maioria deles, promovem a conexão entre o estudo de sequências, álgebra e geometria, despertam a ação investigativa para o reconhecimento de padrões e através desse reconhecimento levam o aluno a construir generalizações de padrões, desenvolverem o raciocínio recursivo e, além disso, oferecem também oportunidades de estudar padrões em *Sequências de Números Figurados,* testar conjecturas e utilizar notações mais sofisticadas através do estudo dessas sequências.

2. METODOLOGIA DE PESQUISA

A Metodologia de Pesquisa utilizada nesse trabalho, que tem característica experimental, é inspirada nos princípios da Engenharia Didática. Tal metodologia, criada pela educadora francesa Michèle Artigue na década de 1980 para atender as relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino e, neste trabalho, tem papel fundamental, pois designa uma metodologia específica de pesquisa baseada em experiências de sala de aula, articulada com prática de investigação.

A Engenharia Didática tem inspiração no trabalho do engenheiro ao realizar um projeto e caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, partindo da concepção, passando pela elaboração, realização, observação e análise das aplicações das sequências didáticas.

Citado por (Carneiro, 2005): "*O termo Engenharia Didática (Artigue, 1994, 1996), criado na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia — momentos em que é preciso construir soluções. (Carneiro, 2005, p. 2)*".

De acordo com Carneiro (2005):

> A origem desta teoria está na preocupação com uma certa "ideologia da inovação" presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino. Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da *realização didática* na sala de aula como prática de investigação. (Carneiro, 2005, p. 3)

Dessa forma, a teoria da *Engenharia Didática* servirá como um referencial para o desenvolvimento de um produto para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

Inspirado nos princípios da *Engenharia Didática*, o produto de ensino elaborado, relatado e investigado nesta monografia é fruto da reflexão que associa o conhecimento teórico, obtido pela leitura e análise da literatura disponível, com a experiência adquirida em sala de aula em pelo menos doze anos de trabalho.

Acredita-se que a natureza destas notas vem de encontro com a proposta dos mestrados profissionalizantes, dirigidos para professores em exercício. Segundo Carneiro (2005):

> Também na direção da formação de professores, foi recentemente criada a área de Ensino de Ciências e Matemática, da CAPES, que tem incentivado a organização de Mestrados Profissionalizantes, dirigidos para professores em exercício. Esses cursos preveem a elaboração de um trabalho final de pesquisa profissional, aplicada, com desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando a melhoria do ensino na área específica. Ou seja, espera-se que o professor possa produzir conhecimento novo e reprodutível, tomando, como foco e alvo, seu próprio trabalho docente. (Carneiro, 2005, p. 2)

Seguindo os passos do referencial metodológico acima citado, este trabalho traz, inicialmente, as *análises prévias*, seguidas, num segundo momento, pela *construção e análise a priori* e, por fim, a *experimentação*, *análise a posteriori* e *validação* do produto de ensino elaborado.

Nas *análises prévias,* descritas no Capítulo 1, destacam-se a ausência do estudo de progressões aritméticas no Ensino Fundamental e sentimos um forte indicativo de que a observação, o reconhecimento e a generalização de padrões é um ótimo caminho para desenvolver o estudo das progressões aritméticas nesse nível de ensino.

Na *análise a priori* (Capítulo 3), destaca-se a importância de se produzir um material no qual os estudantes podem manipular objetos, tomar decisões, testar conjeturas, investigar e generalizar padrões com ou sem a interferência do professor, permitindo que os alunos sejam protagonistas na construção do conhecimento e não apenas sejam seres passivos em aulas expositivas. Num contexto mais específico, essa etapa do estudo fará a descrição passo a passo do material produzido, levantando hipóteses e questionando sobre a validação das mesmas.

No Capítulo 4, será feita a *análise a posteriori* e a *validação da experiência*. Esta etapa confrontará as hipóteses levantadas com os resultados efetivamente obtidos através da aplicação do material produzido. Nesse âmbito, espera-se gerar conclusões contendo resultados desejáveis ou indesejáveis, sendo estes últimos importantes para que se possa refletir sobre os insucessos e alterá-los através da interferência pedagógica quando possível.

Em síntese, esse trabalho tem por objetivo o ensino e a aprendizagem com relação ao estudo das progressões aritméticas, desenvolvido através do reconhecimento de padrões e utilizando a construção de sequências didáticas com a meta de proporcionar ao aluno condições para construir e compreender tais conceitos.

3. PROPOSTA DE TRABALHO

3.1 Introdução

Esse capítulo tem por meta descrever as folhas de atividades aplicadas aos alunos. A descrição das mesmas será feita na mesma ordem em que os alunos receberam suas folhas de atividades. Comentários explicativos são inseridos de forma a justificar a escolha do assunto abordado e as intenções a serem atingidas, bem como algumas suposições no que se refere às respostas esperadas.

Para uma visualização completa das folhas de atividades aplicadas foi criado o **Apêndice A**, as folhas de atividades alteradas encontram-se no **Apêndice B** e as respostas esperadas encontram-se no **Apêndice C** deste trabalho.

3.2 Descrevendo a atividade

As atividades foram aplicadas em duas salas de 9º ano do Ensino Fundamental, nas aulas de Álgebra, nas três últimas semanas de aula do ano de 2014, antes da recuperação final. Naquele ano, os alunos das duas séries citadas já tinham estudado equações de 1º e 2º graus, o conceito de função e as funções afim e quadrática.

As sequências didáticas preparadas foram compostas por três conjuntos de atividades chamadas de *Folhas de Atividades* e uma aula expositiva contendo a teoria envolvendo sequências e progressões aritméticas.

Os pré-requisitos que assumimos para aplicação das mesmas foram operações matemáticas com números inteiros, noção de sequência, funções, equações de primeiro e segundo graus. Entretanto, acreditamos que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental conseguiriam resolver as atividades mesmo sem o domínio destes pré-requisitos.

O material foi elaborado para que os alunos o fizessem em grupos com dois ou três elementos em cada equipe. Embora pudessem discutir e trocar informações com os colegas, cada aluno tinha que registrar suas respostas, individualmente, na própria folha de atividade.

O tempo de duração para cada folha de atividade foi estipulado em cem minutos e para a aula expositiva foi previsto duração de cinquenta minutos.

Junto com as folhas de atividades 1 e 4, cada grupo recebeu um saquinho contendo sessenta palitos de fósforos; junto com as folhas de atividades 3 e 4 cada grupo recebeu um saquinho contendo cinquenta peças de plástico em formato circular e junto com a folha de atividades 4 cada grupo recebeu uma cartela com cem adesivos autocolantes em formato de círculo.

As sequências didáticas foram divididas em quatro etapas – que são as quatro aulas – descritas abaixo, com seus respectivos objetivos. Todas as fichas tem o mesmo cabeçalho contendo os logotipos da UFSCar, do PROFMAT e do centenário da E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando, o nome da escola, a disciplina, a série, uma lacuna para a turma, o nome do professor, um local para o nome e outro para o número do aluno conforme Figura 2.

Figura 3: Cabeçalho

3.2.1 Folha de Atividades 1

A primeira aula, *Folha de Atividades 1 – Sequências* traz, logo no início, uma sequência de figuras em progressão aritmética, formadas com palitos de fósforo, como elemento central para despertar a ação investigativa tanto com relação à quantidade de palitos usados quanto na quantidade de figuras geométricas (quadrados) formados.

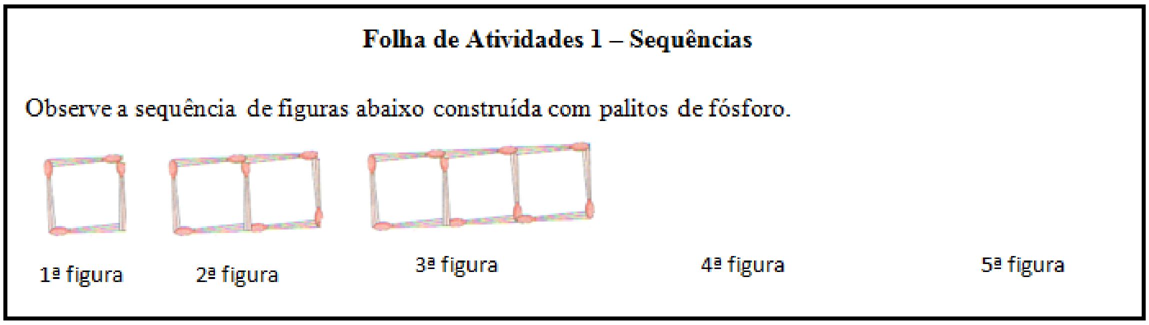


Figura 4: Sequência de Figuras – Folha 1

As atividades se dividem em duas partes. Na primeira parte são tratadas as questões de reconhecimento, recursividade e generalização de padrões encontrados na sequência de figuras e na segunda parte são tratadas as questões referentes à soma dos termos (número de palitos ou de figuras) da sequência. A finalidade dessa etapa é levar o aluno, através da observação, ao reconhecimento e a generalização dos padrões (número de palitos ou de quadrados) da sequência.

Na *Primeira Parte*, os sete primeiros itens convidam o aluno a observar e reconhecer os padrões geométrico e numérico na sequência apresentada.

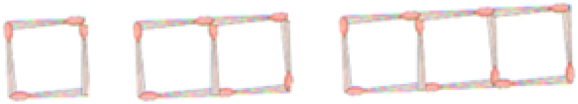
No item 1, os alunos devem desenhar as duas próximas figuras da sequência. Há neste ponto uma intervenção oral do professor, na qual aqueles que não conseguiram cumprir a atividade podiam fazer uso dos palitos de fósforo para reproduzir, sobre a carteira, a sequência de figuras e, depois de reconhecido o padrão, desenhar as próximas figuras.

No item 2 os alunos devem completar uma tabela com o número de quadrados e o respectivo número de palitos usados em cada uma das sete primeiras figuras da sequência. Já nesse item os alunos são convidados a recorrer ao pensamento abstrato e à recursividade que se apresenta para preencher as duas últimas linhas da tabela, que correspondem aos números de quadrados e palitos da 6ª e da 7ª figuras, as quais não se encontram desenhadas na sequência de figuras.

No item 3 o aluno deve descrever o padrão observado na sequência de figuras. O item

4 dá um indicativo de tal padrão, o qual o aluno deve responder qual é a diferença entre o número de palitos de duas figuras consecutivas. Nos itens 5, 6 e 7 os alunos devem calcular a diferença entre o número de palitos de duas figuras quaisquer da sequência.

Observe a sequência de figuras abaixo construída com palitos de fósforo.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura 5ª figura

Primeira Parte

1. Desenhe acima, a quarta figura e a quinta figura da sequência.
2. Complete a tabela abaixo.

Figura	Nº de quadrados	Nº de palitos
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		
7ª		

3. Você percebeu algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.

4. Qual é a diferença no número de palitos entre duas figuras consecutivas?

5. Qual é a diferença no número de palitos entre a 3ª figura e a 1ª figura?

6. Qual é a diferença no número de palitos entre a 7ª figura e a 1ª figura?

7. Qual é a diferença no número de palitos entre a 50ª figura e a 1ª figura?

Figura 5: Itens: 1 a 7 – Folha 1

Ao final desses sete itens, espera-se que o aluno reconheça o padrão da sequência de figuras pelo apelo visual (geométrico) e entenda a recursividade inserida nessa sequência, observando que, para obter a figura seguinte, basta acrescentar mais três palitos formando um novo quadrado e obtendo, portanto, uma figura com um quadrado a mais que a anterior.

Nesse sentido, espera-se que o aluno entenda que a diferença entre o número se palitos entre quaisquer duas figuras dessa sequência é igual a três vezes a diferença entre as ordens que essas duas figuras ocupam na sequência.

Nos quatro próximos itens, os alunos são convidados a reconhecer, utilizar e a generalizar o padrão encontrado na sequência de figuras com relação ao número de palitos.

O item 8 descreve, através de um exemplo, um padrão que pode ser usado para calcular o número de palitos de uma figura qualquer da sequência. Nesse item, os alunos devem calcular o número de palitos de quatro figuras da sequência.

No item 9 os alunos tem que apresentar uma expressão algébrica que represente o número de palitos da figura de ordem.

Nos itens 10 e 11 os alunos devem usar essa expressão algébrica e fazer o caminho inverso, resolvendo uma equação do 1º grau em n para determinar a ordem de uma figura a partir do número de palitos usados na construção da mesma.

Espera-se que os alunos, passem facilmente por esses quatro itens, reconhecendo, utilizando e generalizando o padrão encontrado na sequência de figuras com relação ao número de palitos.

8. Nicole fez essa atividade e percebeu um padrão para calcular o nº de palitos de uma figura qualquer. Por exemplo, para calcular o número de palitos da 9ª figura, ela escrevia:

$$1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 9 \cdot 3 = 1 + 27 = 28$$

Calcule o número de palitos usados para montar a:

a) 16ª figura. b) 30ª figura. c) 67ª figura. d) 100ª figura.

9. Escreva uma expressão algébrica que representa a quantidade de palitos usados para construir a figura de ordem n, $n = 1, 2, 3, \cdots$; isto é, a n^a figura.

10. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 1º grau. Use-o para determinar em qual figura foram usados 178 palitos.

11. Para construir uma figura da sequência, foram usados 382 palitos. Qual é a ordem dessa figura?

Figura 6: Itens 8 a 11 - Folha 1

A *Segunda Parte* explora, exclusivamente, a soma dos termos de duas sequências numéricas: uma formada pelo número de quadrados de cada figura e a outra formada pelo número de palitos de cada figura da sequência de figuras montadas por palitos de fósforo e apresentada no início da folha de atividades – ambas progressões aritméticas.

Nos itens 12 e 13 os alunos devem calcular quantos quadrados foram construídos e quantos palitos foram usados, respectivamente, nas oito primeiras figuras da sequência.

Segunda Parte

12. Quantos quadrados foram construídos nas 8 primeiras figuras?

13. Quantos palitos foram usados para construir as 8 primeiras figuras?

Figura 7: Itens 12 e 13 - Folha 1

Nos itens 14.a e 14.b os alunos devem elaborar uma maneira eficaz de somar o número de quadrados formado nas trinta primeiras e nas cem primeiras figuras, da sequência, respectivamente.

No item 15 os alunos tem que escrever uma expressão algébrica que represente a soma do número de quadrados formados nas n primeiras figuras da sequência e no item 16, que eles utilizem essa expressão algébrica para fazer o caminho inverso, resolvendo uma equação do 2º grau em n, para determinar o número de figuras, em sequência e a partir da 1ª figura, que foram construídas formando um total dado de quadrados.

Esses quatro itens foram elaborados com a intenção de que os alunos consigam desenvolver uma generalização para a soma dos primeiros termos da sequência numérica formada pelo número de quadrados de cada figura. Em seguida, resolver a equação do segundo grau obtida, embora seja esperado que a maioria dos alunos encontre dificuldades em resolvê-la. Para tanto, em todos os itens os alunos podem discutir e trocar informações com os colegas, sendo que no item 15 o professor pode participar da discussão e mediar um caminho para a resolução da atividade.

14. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de quadrados construídos nas 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de quadrados construídos nas 100 primeiras figuras da sequência.

15. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de quadrados construídos nas n primeiras figuras, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

16. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram construídos 78 quadrados?

Figura 8: Itens 14 a 16 - Folha 1

Os itens 17 a 19 desenvolvem os mesmos conteúdos através da mesma metodologia utilizada nos itens 14 a 16, sendo a mesma descrição e os mesmos objetivos esperados. A única diferença é que ao invés da sequência numérica ser formada pelo número de quadrados, ela agora é formada pelo número de palitos usados na montagem de cada figura.

17. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de palitos usados na construção das 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de palitos usados na construção das 100 primeiras figuras da sequência.

18. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de palitos usados na construção das n primeiras figuras da sequência, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

19. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram usados 175 palitos?

Figura 9: Itens 17 a 19 - Folha 1

3.2.2 Aula Expositiva

A segunda aula, *Aula Expositiva – Sequências e Progressões Aritméticas (PA)* foi elaborada em forma de uma folha contendo: definição, exemplos e termo geral de uma sequência; definição, exemplos, termo geral, gráfico e soma dos termos de uma progressão aritmética, tratando de maneira formal, sistemática e ponderando reflexões aos questionamentos desenvolvidos na primeira atividade, porém agora acrescentando as devidas notações e terminologias matemáticas.

Toda a aula expositiva foi elaborada com base no material teórico apresentado abaixo que os alunos receberam e acompanharam o desenvolvimento da aula pelo professor na lousa.

O material teórico traz *Sequências* como primeiro tópico a ser discutido. Inicialmente, é feita uma abordagem através de exemplos de sequência, descrevendo os diversos tipos de sequência, como representar uma sequência, como se referir aos seus elementos (termos), como representar um termo específico da sequência e como representar qualquer termo da sequência (termo geral).

Aula Expositiva – Sequências e Progressões Aritméticas (PA)

Sequências

Quando queremos determinar certos elementos de um conjunto, podemos ordenar esses elementos seguindo um determinado padrão. Dizemos que esse conjunto corresponde a uma ***sequência*** ou ***sucessão*** quando conseguimos associar cada número natural a um único elemento desse conjunto. Elementos de uma ***sequência*** podem ser de vários tipos. Veja alguns exemplos:

- A escalação de um time de futebol escrita em ordem alfabética: (Deola, Kleber, Marcio, Marcos, Valdívia,..., Victor).
- Sequência dos números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)
- A sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)
- A sequência de números pares positivos: (2, 4, 6, 8, 10, ...)

Cada elemento da sequência ou sucessão é denominado **termo**. Na sequência dos números pares **(2, 4, 6, 8, 10, ...)**, por exemplo, **2** é o primeiro termo, **4** é o segundo termo, **6** é o terceiro termo e assim por diante. De um modo geral, a representação dos termos de uma sequência é dada por uma letra e um índice que indica a posição do termo na sequência.

O **primeiro termo** da sequência, pode aparecer indicado como $\boldsymbol{a_1}$, o **segundo termo** por $\boldsymbol{a_2}$, o **terceiro termo** por $\boldsymbol{a_3}$ e assim sucessivamente. Além disso, indicamos também o **n-ésimo** termo da sequência por $\boldsymbol{a_n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. O elemento $\boldsymbol{a_n}$ (**termo geral**) pode representar qualquer termo da sequência.

Assim, na sequência dos números pares positivos **(2, 4, 6, 8, 10, ...)**, temos:

$\boldsymbol{a_1 = 2}$, $\boldsymbol{a_2 = 4}$, $\boldsymbol{a_3 = 6}$, e assim por diante. E o **termo geral** é $\boldsymbol{a_n = 2n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Figura 10: Sequência – Folha 2

Em seguida, o material teórico traz a D*efinição de Sequência*, com a intenção de levar o aluno a perceber que esse conceito é familiar, pois as sequências são funções com domínio nos inteiros positivos, e os alunos já tinham estudado função.

Definição de Sequência

Uma *sequência* de números reais é uma função (relação) $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um único número real $a_n = a(n)$, chamado n-ésimo termo da sequência.

Denotaremos por $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$, ou por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (a_n), a sequência $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Figura 11: Definição de Sequência - Folha 2

Depois o material traz um comentário sobre *Progressões Aritméticas (PA)*, o que são as PA e onde elas aparecem na vida real. Depois traz um exercício resolvido como um exemplo para fixar ideias e por último uma explicação sobre o que caracteriza as PA – que é a diferença constante entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência, chamada de razão.

Progressões Aritméticas (PA)

As progressões aritméticas (PA) constituem-se de sequências definidas recorrentemente. Elas são comuns na vida real por aparecerem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização de um bem ao longo do tempo. Para fixar idéias, consideremos o exemplo abaixo:

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos a fábrica produziu em junho?

Solução: Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são:

Janeiro	Fevereiro	Marco	Abril	Maio	Junho
400	430	460	490	520	550

Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta $5 \times 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo (constante). A sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550, . . .) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão da progressão. A razão da progressão acima é igual a 30.

Figura 12: Progressões Aritméticas - Folha 2

Na sequência, o material traz a *Definição de Progressão Aritmética (PA)*, a explicação, e depois um exemplo de um modo de calcular qualquer termo específico ou o termo geral da PA a partir da sua razão e de um termo conhecido baseado no padrão que essa progressão apresenta, com o intuito de levar o aluno a entender e utilizar esse padrão para determinar qualquer termo as PA – que é uma generalização de um padrão. O exemplo também tem o objetivo de levar o aluno a entender os cálculos e procedimentos matemáticos utilizados.

Definição de Progressão Aritmética (PA)

Uma *progressão aritmética* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos. Desse modo, podemos determinar o termo geral de uma PA conhecendo a_1 e r:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

Pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Por exemplo, a sequência (5, 8, 11, 14, . . .) é uma progressão aritmética de razão $r = 3$. Como o primeiro termo é $a_1 = 5$, podemos calcular, por exemplo, o sétimo termo, o vigésimo termo e o termo geral fazendo:

$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot r \qquad a_{20} = a_1 + (20-1)\cdot r \qquad a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

$$\Leftrightarrow a_7 = 5 + 6\cdot 3 \qquad \Leftrightarrow a_{20} = 5 + 19\cdot 3 \qquad \Leftrightarrow a_n = 5 + (n-1)\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow a_7 = 5 + 18 \qquad \Leftrightarrow a_{20} = 5 + 57 \qquad \Leftrightarrow a_n = 5 + 3n - 3$$

$$\Leftrightarrow a_7 = 23 \qquad \Leftrightarrow a_{20} = 62 \qquad \Leftrightarrow a_n = 3n + 2$$

Figura 13: Definição e Termo Geral da PA - Folha 2

Nessa parte é destacado que o termo geral da PA é um polinômio em n e traz explicações sobre o gráfico de uma progressão aritmética, com o objetivo de levar o aluno a entender que, se a PA for não estacionária, então ela é uma função do 1º grau em n e, consequentemente, seu gráfico é formado por pontos colineares do plano.

Em uma PA, o termo geral é dado por um polinômio em n, pois

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1 e a PA é de primeira ordem. Sendo a PA uma função $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma PA se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$ $(3, a_3)$, etc. estão em linha reta.

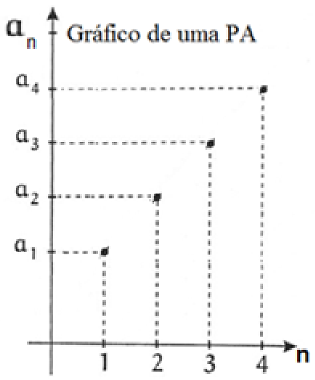


Figura 14: Gráfico de uma PA - Folha 2

O último conceito trabalhado no material teórico é *A Soma dos Termos de uma PA*, que é desenvolvido a partir de uma das atividades da *Folha de Atividades 1*, na qual o aluno deveria elaborar uma estratégia para somar os cem primeiros números inteiros positivos. Baseado numa estratégia para calcular essa soma, é deduzido uma generalização para a soma dos n primeiros termos de uma PA. Na sequência o material finaliza com um exemplo do cálculo da soma dos trinta primeiros termos de uma PA e ressalta que a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA é um polinômio do 2º grau em n.

Soma dos Termos de uma PA

Na folha de Atividades 1 uma das atividades era discutir com seus colegas e elaborar uma estratégia para calcular a soma $1+2+3+\cdots+98+99+100$. Vários alunos resolveram:

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+98+99+100}_{100} = \underbrace{101+101+\cdots+101}_{50} = 50 \times 101 = 5050$$

Baseado nessa estratégia, podemos calcular a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{n} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \underbrace{(a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) + \cdots}_{\frac{n}{2}}$$

Observe que ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Como são $\frac{n}{2}$ parênteses, temos:

$$S_n = \underbrace{(a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n)}_{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow S_n = (a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ é $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Por exemplo, na PA (5, 8, 11, 14, . . .) a razão é $r = 3$ e o primeiro termo é $a_1 = 5$. Para somar os 30 primeiros termos dela, primeiro calculamos a_{30} e depois calculamos S_{30}.

$$a_{30} = a_1 + (30-1)r$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = a_1 + 29r$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 5 + 29 \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 5 + 87$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 92$$

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{(5+92)\cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{97 \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = 97 \cdot 15$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = 1455$$

Observe que S_n também pode ser escrito:

$$S_n = (a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2} = [a_1 + a_1 + (n-1)\cdot r]\cdot\frac{n}{2} = [2a_1 + nr - r]\cdot\frac{n}{2} = \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n + \frac{r}{2}n^2$$

Portanto, se $r \neq 0$ (a PA for não estacionária), então S_n é um polinômio do segundo grau em n.

Figura 15: Soma dos Termos da PA - Folha 2

3.2.3 Folha de Atividades 3

A terceira aula, *Folha de Atividades 3 – Progressões Aritméticas e Números Figurados* – é composta de duas atividades investigativas.

A primeira atividade traz uma sequência de figuras formadas por pontos de uma malha, como elemento central para despertar a ação investigativa com relação à quantidade de pontos, tratando de questões de reconhecimento, recursividade, cálculos, representação gráfica e generalização de padrões encontrados na sequência.

A sequência em questão é a sequência conhecida como *Sequência dos Números Gnômons.* Ela é apresentada, de forma que cada um de seus elementos é uma figura formada por pontos numa malha quadriculada, cuja disposição lembra um Gnômon Astronômico ou uma haste vertical projetando uma sombra de mesmo tamanho no solo.

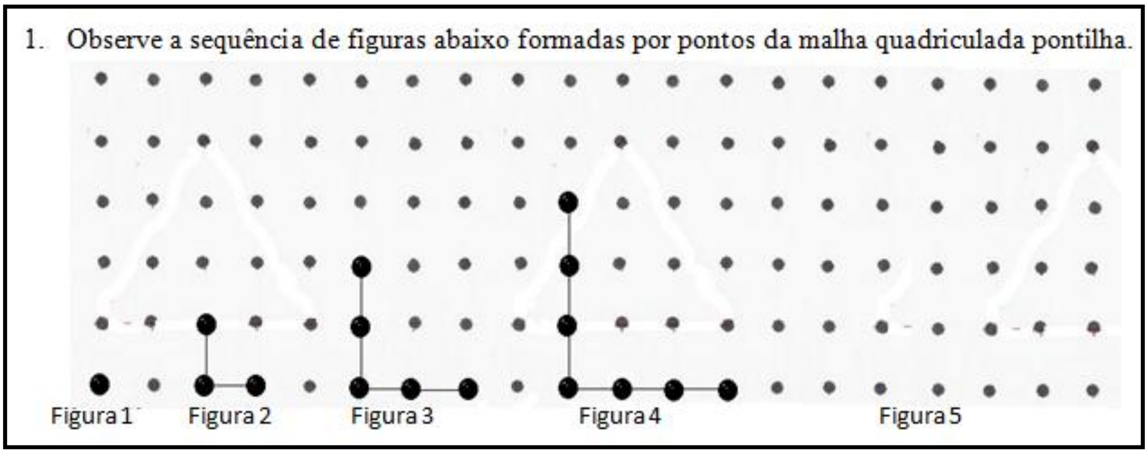


Figura 16: Sequência dos Números Gnômons - Folha 3

As investigações que se seguem sobre essa primeira atividade foram elaboradas considerando o número de pontos de cada figura da sequência, onde são tratadas as questões de reconhecimento, recursividade e generalização de padrões encontrados na sequência de figuras.

As cinco atividades iniciais – itens (a) ao (e) – convidam o aluno a observar e reconhecer os padrões numérico e geométrico na sequência apresentada. A finalidade dessa etapa é levar o aluno, através da observação, ao reconhecimento do padrão da sequência dos números gnomos como sendo uma progressão aritmética, calcular alguns termos dessa PA, a generalizar esse padrão, utilizá-lo para determinar qual número gnômon é representado por um número dado de pontos.

No item (a), os alunos devem desenhar a próxima figura da sequência. Há a previsão neste ponto de uma possível intervenção oral do professor, onde aqueles alunos que não conseguirem cumprir a atividade podem fazer uso dos círculos de madeira para reproduzir, sobre a carteira, a sequência de figuras e, depois de reconhecido o padrão, desenhar a próxima figura.

No item (a) os alunos devem, através do padrão reconhecido anteriormente, identificar que a sequência é uma progressão aritmética, justificando. Ainda reconhecendo padrões, no item (c) os alunos têm que escrever a sequência e identificar o nome do conjunto formado pelos seus elementos.

No item (d) os alunos devem calcular alguns elementos da sequência usando a recursividade e o padrão que se apresenta, bem como a generalizar esse padrão calculando o termo geral da sequência, No item (e) os alunos devem utilizar o termo geral para determinar qual número gnômon é representado por um número dado de pontos.

Ao final desses cinco itens, espera-se que o aluno reconheça o padrão da sequência de figuras pelo apelo visual (geométrico) e entenda a recursividade inserida nessa sequência, observando que, para obter a figura seguinte, basta acrescentar mais dois pontos formando uma figura na qual a altura (gnômon) tem um ponto a mais que a altura anterior, assim como a base (sombra) em relação à sombra anterior. Nesse sentido, espera-se que o aluno entenda que a diferença entre o número se pontos entre quaisquer dois números gnomons é igual a duas vezes a diferença entre as ordens que esses dois números gnômons ocupam na sequência.

1. Observe a sequência de figuras abaixo formadas por pontos da malha quadriculada pontilha.

Os gregos chamavam os elementos dessa sequência de *números gnômons.*

Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de pontos da figura n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quinta figura da sequência.

b) (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

c) Escreva a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ e o nome do conjunto formado pelos elementos dela.

d) Calcule:

➔ O 11º termo da sequência: $a_{11} =$

➔ O 50º termo da sequência: $a_{50} =$

➔ O termo geral da sequência, isto é, a_n, $n \in \mathbb{N}$: $a_n =$

e) Qual *número gnômon é formado por* 371 pontos?

Figura 17: Itens (1a) ao (1e) – Folha 3

No item (f) os alunos devem representar graficamente a sequência apresentada acima, completando uma tabela e desenhando os pontos do gráfico.

f) Complete a tabela e faça o gráfico de (a_n).

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	

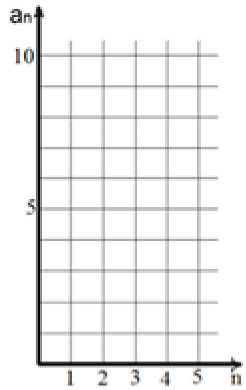


Figura 18: Item (1f) - Representação Gráfica dos Números Gnômons - Folha 3

No item (g) os alunos devem calcular a soma dos cinquenta primeiros termos da sequência e no item (h) devem calcular a soma dos n primeiros termos dessa sequência para mostrar que a soma dos n primeiros números gnômons é um quadrado perfeito

g) Calcule a soma dos 50 primeiros *números gnômons*.

h) Mostre que a soma dos n primeiros *números gnômons* é um quadrado perfeito.

Figura 19: Itens (1g) e (1h) – Folha 3

Em relação aos itens (g) e (h) espera-se que os alunos desenvolvam uma fórmula geral para a soma do n primeiros números gnômons.

A segunda atividade da *Folha de Atividades 3* traz a sequência dos números poligonais triangulares como elemento de investigação, com questões que levam o estudante, gradativamente, ao reconhecimento do padrão, à recursividade e à generalização do padrão. Traz ainda outras questões de aplicação dos conceitos e representação gráfica da sequência devendo utilizar a soma dos termos de uma PA para determinar uma generalização para a sequência dos números triangulares.

Antecedendo a atividade (2), há um comentário sobre os números figurados, sobre sua riqueza em propriedades e que eles representam um elo entre geometria e álgebra.

A atividade (2) traz, logo no início, a *Sequência dos Números Poligonais triangulares*, representada por uma sequência de figuras formadas por círculos. Essa sequência é o elemento central para despertar a ação investigativa com relação à quantidade de círculos de cada figura da sequência.

Números Figurados

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos dispostos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos, tais números e suas disposições geométricas são ricos em propriedades e representam um elo entre a geometria e a álgebra. Na questão seguinte, exploraremos os *Números Poligonais Triangulares*.

2. Considere a sequência (T_n) dos *Números Triangulares* representados abaixo.

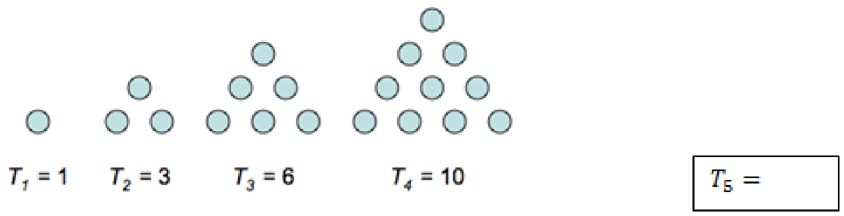


Figura 20: Sequência dos Números Poligonais Triangulares

O item (a) tem dupla finalidade: estudar a representação algébrica e a representação geométrica. Primeiro a representação geométrica dos pontos no papel. Essa atividade é bastante simples, pois o aluno deve seguir o modelo proposto com a finalidade de fazer os estudantes a reconhecer o padrão da sequência recorrendo ao apelo visual. Para aqueles que tiverem dificuldades, há a previsão de uma possível intervenção oral do professor, onde aqueles alunos que não conseguirem cumprir a atividade podem fazer uso das peças plásticas em formato circular para reproduzir, sobre a carteira, a sequência de figuras e, somente depois de reconhecido o padrão, desenhar a próxima figura.

Embaixo da figura que deverá ser desenhada pelo aluno, há um quadrinho a ser completado, onde o aluno deve fazer o trabalho algébrico de colocar a quantidade de pontos, como um convite à simbolização, pois o aluno deve perceber que, por exemplo, $T_4 = 10$ representa a quantidade de pontos da quarta configuração dos números triangulares.

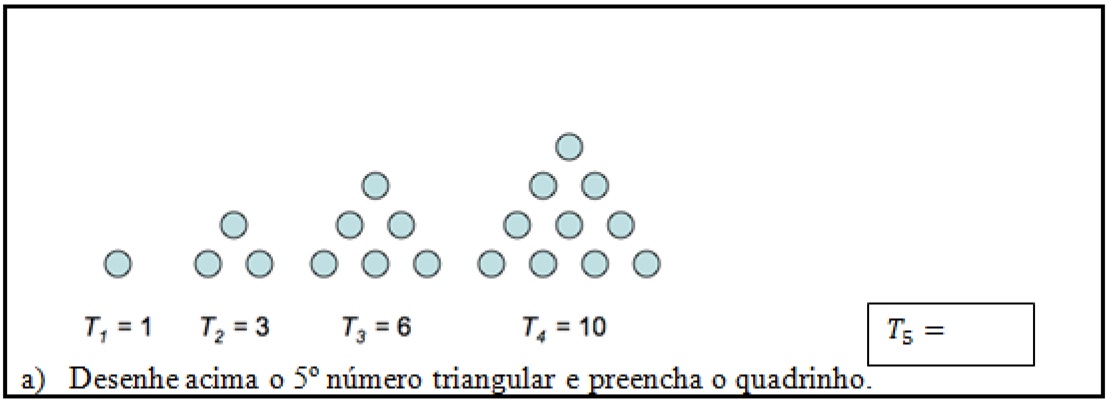


Figura 21: Item (2a) - Folha 3

Espera-se que os alunos consigam facilmente passar por essa atividade, que explora a capacidade de visualização, reconhecimento e representação do padrão apresentado pela sequência. Quanto à parte algébrica basta, após o desenho, contar o número de pontos desenhados e apresentar a resposta.

No item (b) os alunos devem completar uma tabela escrevendo os seis primeiros números triangulares e as cinco primeiras diferenças entre dois números triangulares consecutivos, correspondentes às seis primeiras figuras da sequência. Já nesse item os alunos são convidados a recorrer ao pensamento abstrato e à recursividade que se apresenta para preencher a última coluna da tabela, que corresponde ao sexto número triangular e a quinta diferenças (Δ) da 6ª figura, a qual não se encontra desenhada na sequência de figuras.

Vale ressaltar que a diferença Δ colocada na tabela, está ali, única e exclusivamente, para chamar a atenção dos alunos para o fato que essa sequência não é uma progressão aritmética, pois a variação Δ entre um termo da sequência e o anterior não é igual para quaisquer termos consecutivos.

Espera-se que, ao final da atividade (b), os alunos reconheçam que essa sequência não é uma progressão aritmética e, além disso, que o aumento de pontos para obter a próxima figura é a diferença Δ e que esse aumento Δ é igual à ordem da figura.

b) Compele a tabela abaixo, onde $\Delta = T_n - T_{n-1}$

n	1	2	3	4	5	6
T_n						
Δ						

Figura 22: Item (2b) - Folha 3

A atividade (c) traz o décimo número triangular ($T_{10} = 55$) e os alunos devem, a partir dele, calcular os dois números triangulares seguintes, isto é T_{11} e T_{12}. Na atividade (d) o aluno deve completar com o aumento $\Delta = n$ de forma a ter uma generalização do exercício anterior, baseado no padrão da sequência e na recursividade que se apresenta.

c) Sabendo que $T_{10} = 55$, calcule:

➔ $T_{11} =$

➔ $T_{12} =$

d) Complete:

➔ $T_n = T_{n-1} +$_______

Figura 23: Itens (2c) e (2d) - Folha 3

Espera-se que alguns alunos não consigam, de imediato, desenvolver os itens (c) e (d) ou encontrem algumas dificuldades, pois estes alunos podem ter dificuldades com a notação de sequência.

Algumas hipóteses no que se refere a essas dificuldades são:

- Alguns alunos podem se sentir inseguros com a notação e ficarão confusos com o que completar;
- Não perceberão que n é o sucessor de n-1;
- Não perceberão que T_n corresponde ao sucessor de T_{n-1}.

Espera-se, ainda, que alguns alunos não consigam desenvolver as os itens (c) e (d) por não reconhecerem o padrão e, portanto, não entenderem a recursividade que se apresenta. Para tanto, está previsto uma intervenção didática do professor que poderá propor que os alunos com dificuldades refaçam a atividade (b) sob a mediação do professor e em seguida continue calculando os quatro termos seguintes T_7, T_8, T_9 e T_{10} para familiarizar-se com a recursividade e estabelecer um padrão.

Na atividade (e) os alunos devem completar as etapas indicando as somas. Nesse ponto da atividade, o intuito é destacar a indicação das somas e tentar levar o aluno a perceber que se trata de somas de Progressões Aritméticas. Mesmo que ele não tenha conseguido fazer as atividades (c) e (d), ele pode fazer a atividade (e) seguindo o padrão apresentado nas duas primeiras etapas da atividade sem muitos problemas.

Na atividade (f) os alunos devem usar o raciocínio do exercício anterior para escrever a representação de T_n através de uma soma.

A atividade (g) é muito importante, pois tem como finalidade determinar uma expressão para a soma escrita na atividade anterior, generalizando assim uma expressão para T_n.

Espera-se que uma parcela dos alunos não consiga determinar a expressão desejada. A pouca habilidade em reconhecer padrões e consequentemente a não observação de que a soma em questão é a soma dos termos de uma progressão aritmética pode ser o agravante para o insucesso do aluno nessa atividade. Ainda, a dificuldade dos alunos em trabalhar com expressões literais também pode contribuir para que ele não consiga escrever a expressão geral para T_n.

e) Complete:

$T_1 = 1$

$T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1 + 2}_{T_2} + 3 = 6$

$T_4 = T_3 + \_\_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_3} + \_\_\_$

$T_5 = T_4 + \_\_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_4} + \_\_\_$

f) Seguindo o raciocínio do item anterior:

$T_n = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \cdots + \_\_\_\_$

g) Escreva uma expressão para a soma acima:

$T_n =$

Figura 24: Itens (2e) ao (2g) - Folha 3

O objetivo dessa atividade é mostrar que uma expressão geral é resultado final da construção de um conhecimento. Acredita-se que o estudante que consiga chegar até esse ponto da atividade e tenha tido sucesso na obtenção dessa expressão, terá uma satisfação muito grande principalmente pelo fato de ter, com suas próprias mãos, chegado a um resultado mais geral de algo que vinha manipulado de maneira mais particularizada.

Nas atividades (h) e (i) os alunos devem calcular dois termos específicos da sequência. A intenção dessas atividades é fazer com que o aluno se aproprie do conhecimento, fazendo uso do termo geral T_n da sequência dos números triangulares. Na atividade (h) os alunos devem calcular o trigésimo número triangular e na atividade (i) os alunos devem calcular o centésimo quadragésimo quinto número triangular.

h) Calcule T_{30}, isto é, o 30º número triangular.

i) Calcule T_{145}, isto é, o 145º número triangular.

Figura 25: Itens (2h) e (2i) - Folha 3

Na atividade (j) os alunos devem completar a tabela com os seis primeiros números triangulares e representar o gráfico de T_n.

j) Complete a tabela e represente o gráfico de T_n.

n	T_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	

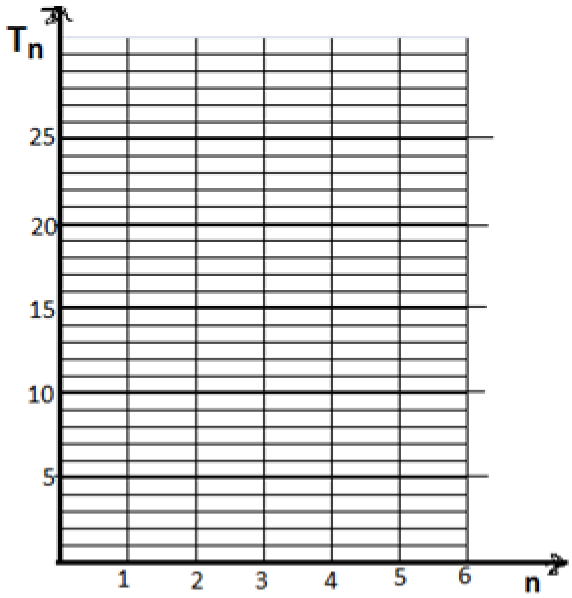


Figura 26: Item (2j) - Folha 3

Novamente fazendo uso do termo geral T_n da sequência dos números triangulares, na atividade (k) os alunos devem calcular a posição que um determinado número triangular ocupa na sequência dos números triangulares. Para isso, o aluno deverá resolver uma equação do 2º grau em n. O que não será nenhuma novidade, visto que já estudaram esse conteúdo.

k) O número $T_n = 153$ ocupa que posição na sequência dos números triangulares?

Figura 27: Item (2k) - Folha 3

Por fim, a descrição da *Folha de Atividades 3* encerra-se com a atividade (l) que traz uma aplicação dos números triangulares em forma de problema, na qual os alunos deverão fazer uso do termo geral T_n da sequência dos números triangulares. Nessa atividade, os alunos têm a opção de resolver o problema como na atividade anterior por meio da resolução de uma equação do 2º grau em n ou simplesmente observando em tabelas de exercícios anteriores que $T_6 = 21$ e a partir daí determinar por recorrência que $T_7 = T_6 + 7 = 28$ e $T_8 = T_7 + 8 = 36$, concluindo que 36 é o oitavo número triangular.

l) Carlos trabalha num supermercado repondo os produtos nas gôndolas. Seu chefe pediu que empilhasse 3 dúzias de latinhas de ervilha em formato de número triangular. Terminado o empilhamento, qual era a altura da pilha feita por Carlos?

Figura 28: Item (2l) - Folha 3

3.2.4 Folha de Atividades 4

A quarta aula aplicada foi a *Folha de Atividades 4 – Sequências, Progressões Aritméticas (PA) e Números Figurados, que* é composta de quatro atividades. As três primeiras tem o elemento da investigação centrado única e exclusivamente no estímulo, na produção e na construção do aluno.

Nesta folha de atividades os alunos trabalharam em grupos de dois ou três alunos como nas outras duas folhas de atividades, mas registravam os resultados numa única folha de atividades para o grupo, diferentemente das folhas de atividades anteriores.

PROFMAT

EMEB Coronel Francisco Orlando 100 anos ENSINANDO E EDUCANDO

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando
Álgebra *9º ano* _______
Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________
Nome: ____, **nº:** ________
Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 4 –

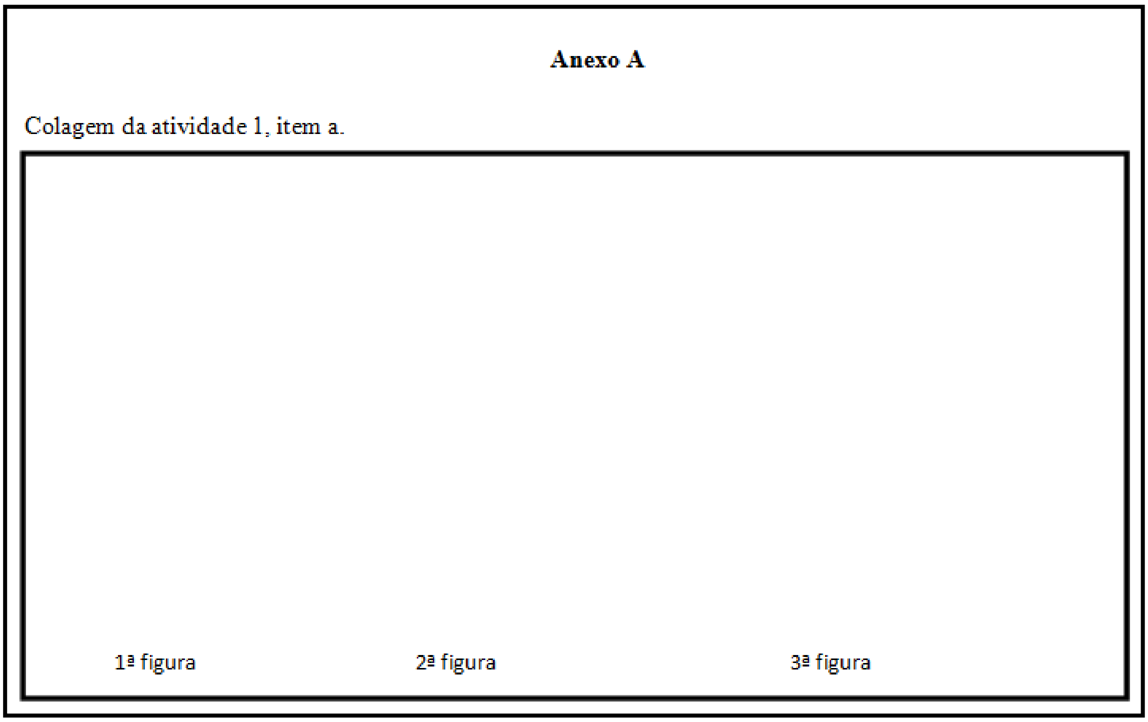
Sequências, Progressões Aritméticas (PA) e Números Figurados

Figura 29: Cabeçalho - Folha 4

A primeira atividade desafia os alunos a elaborar uma sequência com palitos de fósforos e a partir dessa construção responder a algumas questões sobre progressões aritméticas, relacionadas à sequência numérica (a_n) formada pelas quantidades de palitos das figuras da sequência.

A finalidade dessa primeira atividade é levar os alunos a descrever um padrão de uma sequência elaborado por eles, analisar esse padrão e identificar se essa sequência é ou não uma progressão aritmética.

Na atividade (a), o grupo deverá colar, em local indicado no anexo A da folha de atividades, as três primeiras figuras da sequência elaborada.


Anexo A

Colagem da atividade 1, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Figura 30: Colagem da Atividade 1 – Folha 4

No item (b) o grupo deve descrever o padrão que foi utilizado na elaboração da sequência de figuras.

No item (c) os alunos devem, de acordo com o padrão descrito anteriormente, responder se a sequência elaborada é uma PA ou não, justificando as respostas.

No item (d) o grupo deverá desenvolver a atividade de acordo com a resposta dada no item anterior. Caso a sequência elaborada seja uma PA, os alunos deverão calcular a razão r, o quinto termo a_5 e o termo geral a_n dessa sequência. Caso a sequência elaborada não seja uma PA, os alunos deverão completar uma tabela com os cinco primeiros termos da sequência elaborada pelo grupo.

Espera-se que, os grupos não encontrem dificuldades na elaboração da sequência e nem na colagem do item (a), porém espera-se que alguns grupos apresentem dificuldades em registrar a descrição do padrão requerido no item (b). Espera-se também que os alunos não encontrem dificuldades no item (c), analisando e respondendo corretamente se a sequência elaborada por eles é ou não uma progressão aritmética.

No item (d), espera-se que os grupos procedam em conformidade com o item (c), sendo que, no caso de (a_n)ser uma PA, espera-se que os grupos consigam desenvolver e chegar numa expressão para o termo geral da sequência.

1. Usando palitos de fósforo, elabore uma sequência de figuras.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de palitos da figura n, $n = 1, 2, 3, \cdots$

   b) Descreva o padrão usado para montar a sequência (a_n).

   c) A sequência (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

   d) Caso (a_n) seja uma progressão aritmética, faça o que se pede na **coluna 1**. Caso contrário, faça o que se pede na **coluna 2**.

Coluna 1

Calcule:

➔ A razão. $r =$

➔ O 5º termo. $a_5 =$

➔ O enésimo termo a_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$a_n =$

Coluna 2

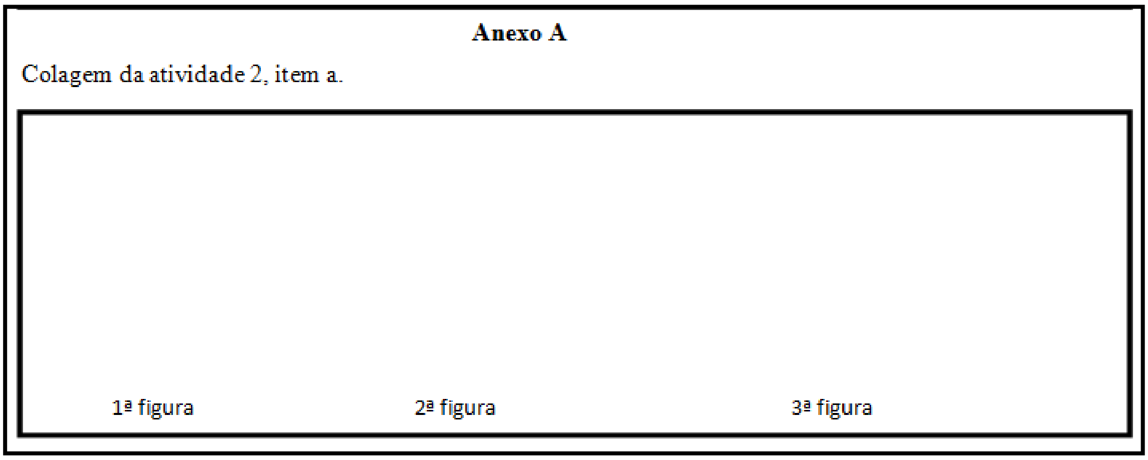
Complete a tabela:

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	

Figura 31: Item 1 - Folha 4

A segunda atividade desafia os alunos a elaborar uma sequência de figuras formadas por círculos, cuja sequência numérica (b_n)formada pelas quantidades de círculosdas figuras seja uma progressão aritmética, respondendo algumas questões relacionadas a ela.

Na atividade (a), o grupo deverá colar, em local indicado no anexo A da folha de atividades, as três primeiras figuras da PA elaborada.



Anexo A

Colagem da atividade 2, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Figura 32: Colagem da Atividade 2 – Folha 4

Na atividade (b) o grupo deverá responder qual é a razão da PA elaborada, na atividade (c) os alunos deverão calcular e apresentar uma expressão para o termo geral b_n da progressão aritmética elaborada por eles.

Na atividade (d) os alunos deverão completar uma tabela com os quatro primeiros termos, o sexto, o nono e o décimo quinto termo da PA elaborada por eles. A intenção aqui é levar o aluno a usar a recorrência que a PA elaborada apresenta para calcular alguns termos, pois na elaboração da sequência os alunos deveriam registrar nas colagens apenas as três primeiras figuras. Essa atividade já convida alguns dos alunos a utilizarem o termo geral b_n, calculado anteriormente, pois deverão completar a ultima linha da tabela com o décimo quinto termo da sequência.

Na atividade (e) os alunos deverão calcular o quinquagésimo termo da sequência. A intenção é fazer com que nessa atividade os alunos utilizem o termo geral b_n para realizar o cálculo.

No item (f), os alunos deverão calcular a ordem da figura da sequência por eles elaborada que pode ser montada com a maior quantidade de círculos que não ultrapasse 100 (cem) círculos. Aqui a intenção é que eles montem e resolvam uma equação do 1º grau em n cuja solução pode se apresentar na forma decimal, o que não serve como resposta, pois a ordem da figura é um número natural positivo. O que levará o aluno a pensar na situação e em como contorná-la para obter a resposta.

No item (g) os grupos deverão somar o número de círculos das três primeiras figuras da sequência elaborada por eles, podendo olhar as colagens e apenas contar o número de círculos. Já no item (h) os alunos deverão somar o número de círculos das dez primeiras figuras da sequência, portanto terão um pouco mais de trabalho que no item anterior.

2. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras forme uma progressão aritmética (b_n), $n = 1, 2, 3, \cdots$.

   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   b) Qual é a razão da PA?

   $r =$

   c) Calcule uma expressão para b_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

   $b_n =$

   d) Complete a tabela

n	b_n
1	
2	
3	
4	
6	
9	
15	

   e) Calcule o 50º termo da sequência.
   $b_{50} =$

   f) Se você tivesse apenas 100 círculos e tivesse que montar uma figura da sequência com o maior número de círculos. Qual seria a ordem dessa figura?

   g) Quantos círculos você usou nas três primeiras figuras?

   h) Se você fosse montar as dez primeiras figuras, de quantos círculos precisaria?

Figura 33: Item 2 - Folha 4

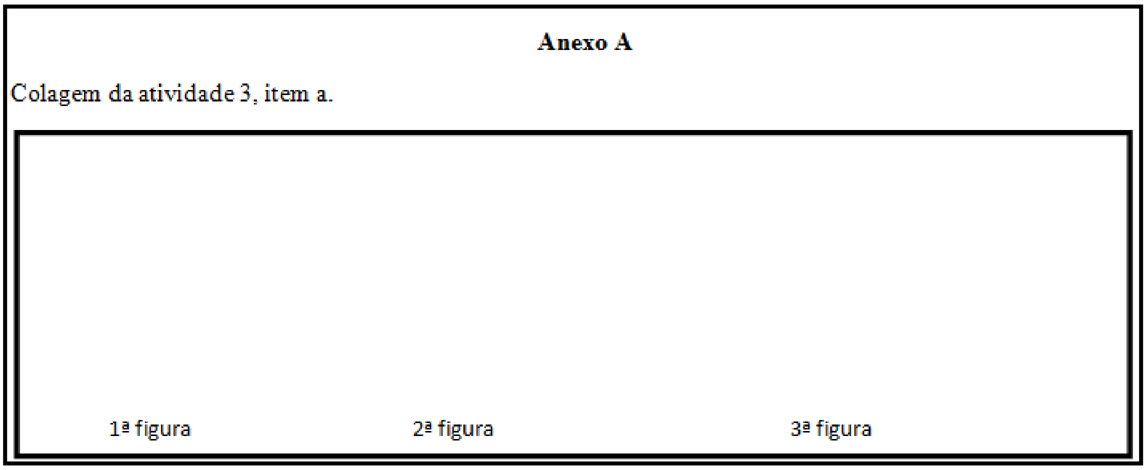
A finalidade desta segunda atividade é levar os alunos a elaborar uma sequência que seja uma progressão aritmética, fazer com que os alunos reflitam sobre o que é uma PA, pensar em como deve ser o padrão dessa sequência, levar os alunos a estabelecer uma diferença constante entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência para obter a PA, generalizar esse padrão utilizado, fazer alguns cálculos utilizando essa generalização e calcular a soma de alguns termos dessa progressão aritmética.

Espera-se que todos os grupos consigam passar pela segunda atividade, embora também seja esperado que alguns grupos apresentem dificuldades para resolver o item (f) corretamente.

A terceira atividade desafia os alunos a elaborar uma sequência de figuras formadas por círculos que não seja uma progressão aritmética, respondendo algumas questões relacionadas a ela.

A finalidade aqui é levar os alunos a elaborar uma sequência que não seja uma progressão aritmética, fazer com que os alunos pensem e reflitam sobre como não deve ser o padrão dessa sequência, levá-los a criação de uma sequência utilizando um padrão de recorrência diferente do padrão apresentado nas progressões aritméticas.

Na atividade (a), o grupo deverá colar, em local indicado no anexo A da folha de atividades, as três primeiras figuras da sequência elaborada.


Anexo A

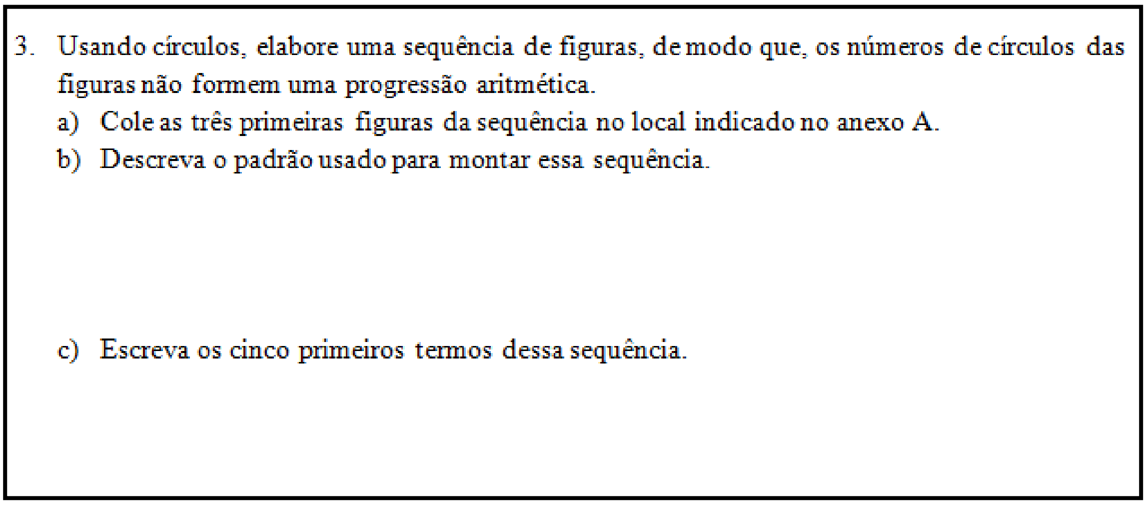
Colagem da atividade 3, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Figura 34: Colagem da Atividade 3 - Folha 4

No item (b) o grupo deve descrever o padrão que foi utilizado na elaboração da sequência de figuras e no item (c) os alunos deverão escrever os cinco primeiros termos da sequência elaborada por eles.

Espera-se que todos os grupos desenvolvam esta atividade corretamente, embora também seja esperado que alguns grupos apresentem dificuldades na descrição do padrão da sequência elaborada.



3. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, os números de círculos das figuras não formem uma progressão aritmética.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.
   b) Descreva o padrão usado para montar essa sequência.

   c) Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência.

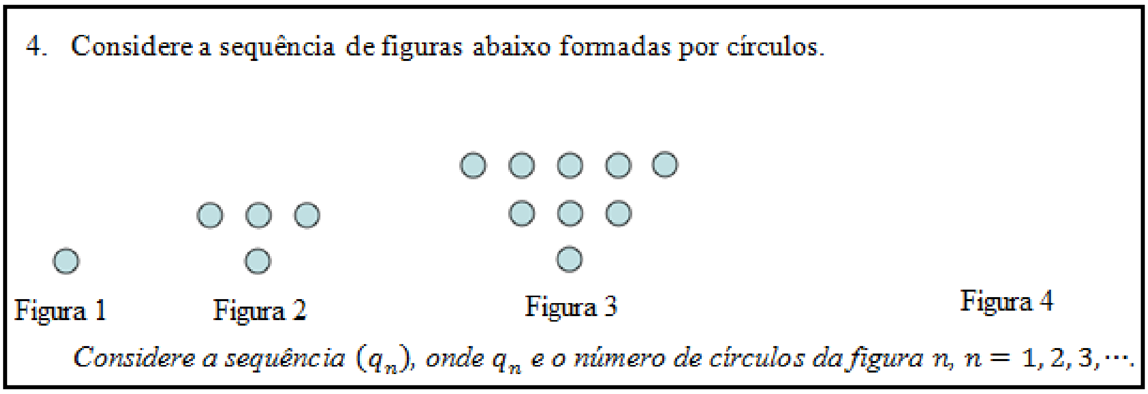
Figura 35: Item 3 - Folha 4

A atividade 4 traz uma sequência de figuras formadas por círculos que, embora os elementos das figuras dessa sequência não sejam apresentados geometricamente numa disposição quadrada, a sequência numérica formada pelo número de círculos de cada figura é exatamente a sequência dos números poligonais quadrados.

Essa sequência foi denotada por (q_n) e será o elemento central da atividade 4, de forma a despertar a ação investigativa com relação à quantidade de círculos de cada figura através de questões que levam o estudante, gradativamente, ao reconhecimento do padrão, à recursividade e à generalização do padrão.

Nesta atividade, a sequência é apresentada aos alunos de forma que cada figura é formada por círculos dispostos em linhas em formato de cone invertido, na qual cada linha é composta de uma quantidade ímpar de círculos sempre com dois círculos a mais que a linha imediatamente abaixo.

Esse modo de apresentar a sequência dos números poligonais quadrados foi elaborado pelo autor, intencionalmente, para que os alunos possam visualizar geometricamente que se trata de soma de números ímpares, que será objeto de estudo para levar os alunos a uma generalização para a sequência dos números poligonais quadrados.



4. Considere a sequência de figuras abaixo formadas por círculos.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considere a sequência (q_n), *onde* q_n *e o número de círculos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Figura 36: Sequência do Item 4 - Folha 4

No item (a), os grupos devem dar a representação geométrica da quarta figura da sequência desenhando os pontos no papel seguindo o modelo proposto.

A finalidade deste item é levar os estudantes a reconhecerem o padrão da sequência recorrendo ao apelo visual. Para aqueles que tiverem dificuldades, há a previsão de uma possível intervenção oral do professor, onde aqueles alunos que não conseguirem cumprir a atividade podem fazer uso das peças plásticas em formato circular para reproduzir, sobre a carteira, a sequência de figuras e, somente depois de reconhecido o padrão, desenhar a próxima figura.

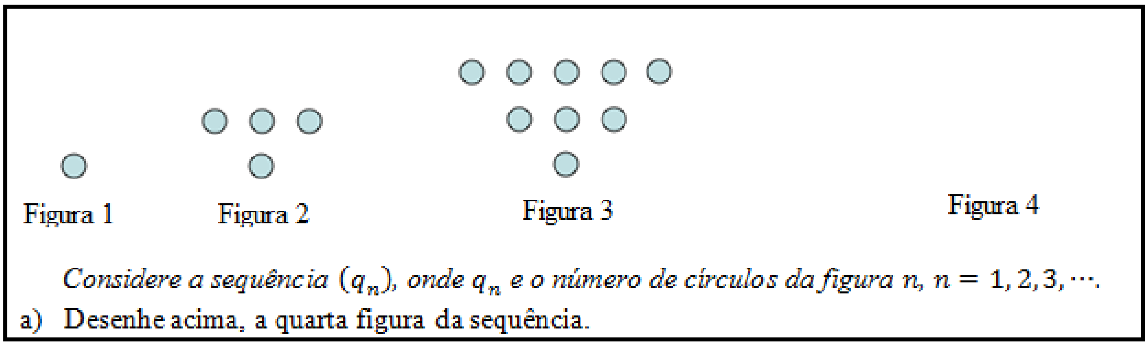


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considere a sequência (q_n), *onde* q_n *e o número de círculos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quarta figura da sequência.

Figura 37: Item (4a) - Folha 4

Espera-se que os alunos consigam facilmente passar por essa atividade, que explora a capacidade de visualização, reconhecimento e representação do padrão apresentado pela sequência.

No item (b) os grupos devem responder se a sequência apresentada é uma PA ou não, justificando as respostas. Para isso, os grupos precisarão investigar o padrão da sequência apresentada. Espera-se que eles percebam que tal sequência não é uma progressão aritmética munidos da correta justificativa de que a diferença entre a quantidade de círculos de quaisquer duas figuras consecutivas, a partir da segunda figura, não é constante.

b) (q_n) é uma progressão aritmética?
Justifique.

Figura 38: Item (4b) - Folha 4

No item (c) os alunos devem completar uma tabela escrevendo do quarto ao sexto termo da sequência (q_n) e calculando e escrevendo da terceira a sexta diferenças entre dois termos consecutivos desta sequência. Deste modo, a tabela completa terá os seis primeiros termos e as seis primeiras diferenças da sequência(q_n).

Nesse item, os alunos já são convidados a recorrer ao pensamento abstrato e à recursividade que se apresenta para preencher as três ultimas linhas da tabela, que correspondem ao quarto, quinto e sexto termo da sequência, os quais não se encontram desenhados na sequência de figuras.

Vale ressaltar que a diferença Δ_n colocada na tabela, está ali, exclusivamente, para chamar a atenção dos alunos para o fato que essa sequência não é uma progressão aritmética, pois a variação $\Delta_n = q_{n+1} - q_n$ não é igual para quaisquer termos consecutivos.

c) Complete a tabela abaixo, sabendo que $\Delta_n = q_{n+1} - q_n$.

n	q_n	$q_{n+1} - q_n$	Δ_n
1	1	$q_2 - q_1 = 4 - 1$	3
2	4	$q_3 - q_2 = 9 - 4$	5
3	9		
4			
5			
6			

Figura 39: Item (4c) - Folha 4

Espera-se que, mesmo com um pouco de dificuldade, os grupos consigam completar a tabela corretamente.

Na atividade (d) é apresentado aos grupos um padrão de recorrência para a sequência (q_n) através de um exemplo. No exemplo, o termo q_7 é calculado a partir da soma do termo anterior q_6 com o 7º número ímpar. Seguindo esse padrão, os grupos deverão calcular o 8º e o 9º termos da sequência.

A atividade (e) é uma extensão da atividade (d), pois nessa atividade, é fornecido o 15º termo e os alunos deverão calcular o 16º termo.

Na atividade (f) os alunos deverão completar uma expressão que é uma generalização do padrão de recorrência apresentado nos itens (d) e (e). Os alunos deverão completar tal expressão escrevendo o enésimo número ímpar.

d) Leonardo fez essa atividade e percebeu um padrão. Por exemplo, para calcular o número de círculos da 7ª figura, escrevia:

$$q_7 = q_6 + \underbrace{2 \cdot (7) - 1}_{7^{\underline{o}}\ \acute{\imath}mpar} = 36 + 13 = 49$$

Seguindo esse padrão, calcule:

➔ $q_8 =$

➔ $q_9 =$

e) Sabendo que $q_{15} = 225$, calcule q_{16}.

➔ $q_{16} =$

f) Complete: $q_n = q_{n-1} +$ ________

Figura 40: Itens (4d) ao (4f) - Folha 4

Espera-se que alguns grupos encontrem dificuldades nessas três atividades e que alguns deles não consigam completar a atividade (f), pois podem se sentir inseguros com a notação, ficando confusos em relação ao que completar, ou ainda não perceberão que $2n - 1$ é o enésimo número natural ímpar.

A atividade (g) apresenta um modelo de escrita e cálculo dos três primeiros termos da sequência e os grupos deverão seguir esse modelo para calcular os dois termos seguintes, completando com o número ímpar a ser somado, indicando as parcelas das somas, os resultados dessas somas e o quadrado perfeito que cada soma representa. Nesse ponto da atividade, o intuito é destacar a indicação das soma se tentar levar o aluno a perceber que se trata de somas de Progressões Aritméticas.

Na atividade (h) os alunos devem usar o raciocínio do exercício anterior para escrever a representação de q_n através de uma soma.

Essas duas atividades têm como finalidade levar os alunos a determinarem uma expressão para q_n.

g) Complete:

$q_1 = 1$

$q_2 = q_1 + 2 \cdot (\mathbf{2}) - 1 = 1 + 3 = 4 = \mathbf{2}^2$

$q_3 = q_2 + 2 \cdot (\mathbf{3}) - 1 = 1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3}^2$

$q_4 = q_3 + 2 \cdot (\underline{\quad}) - 1 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}^2$

$q_5 = q_4 + 2 \cdot (\underline{\quad}) - 1 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}^2$

h) Seguindo o raciocínio anterior:

$q_n = q_{n-1} + 2 \cdot (\underline{\quad}) - 1 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \cdots + \underline{\quad} = \underline{\quad}^2$

Figura 41: Itens (4g) e (4h) - Folha 4

Mesmo que alguns grupos não completem alguma das atividades de (d) a (f), espera-se que os grupos realizem a atividade (g) seguindo o padrão apresentado nas três primeiras linhas da atividade sem muitos problemas. Embora na atividade (h) é esperado que alguns alunos não consigam completar corretamente a soma por estarem inseguros com a notação ou por não reconhecerem que a ultima parcela da soma é $2n - 1$.

Na atividade (i), os grupos deverão calcular dois termos específicos dessa sequência, usando a expressão para o termo geral desenvolvida no item (h). Na atividade (j), os grupos deverão determinar qual termo da sequência em questão é formado por 196 círculos, usando novamente a expressão para o termo geral desenvolvida no item (h), montando e resolvendo uma equação do 2º grau incompleta.

Na atividade (k) os alunos deverão montar as três primeiras figuras dessa sequência com as peças plásticas em formato circular e depois colá-las em local indicado no anexo B usando os círculos autocolantes. Nessa atividade é acrescentada a condição de que as figuras da sequência devem ser representadas em disposição quadrada.

Anexo B

Colagem da atividade 4, item k.

1ª figura   2ª figura   3ª figura

Figura 42: Colagem da Atividade 4 - Folha 4

i) Usando o resultado acima, calcule:

➔ $q_{20} =$ ➔ $q_{32} =$

j) Qual termo da sequência é formado por 196 círculos?

k) Usando círculos, monte as 3 primeiras figuras da sequência, colando no anexo B, de forma que em cada uma das figuras os pontos estejam em disposição quadrada.

Figura 43: Itens (4i) ao (4k) - Folha 4

Espera-se que todos aqueles alunos que realizarem a atividade (h) e escreverem corretamente a expressão para o termo geral da sequência consigam realizar essas três ultimas atividades corretamente.

A elaboração e análise do produto de ensino descrito nesse capítulo é a proposta desse trabalho. Este não é um produto acabado e permite lapidações. O próximo passo é a aplicação do que foi elaborado e conjecturado, configurando como a experimentação do produto para posterior validação.

4. APLICAÇÃO DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

4.1 Introdução

Este capítulo é o teste da proposta de ensino elaborada e tem o objetivo de apresentar e descrever a escola e as salas onde foram aplicadas as sequências didáticas elaboradas e descritas nesse trabalho, apresentando ainda um breve histórico do professor aplicador autor destas notas.

Neste capítulo é apresentada uma descrição das aplicações das atividades nas duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental regular da E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando da cidade de Orlândia-SP. Na sequência temos uma análise das respostas obtidas pelos alunos em cada questão de cada folha de atividades proposta do conjunto de folhas de atividades elaboradas. A análise dessas respostas será feita de forma geral, embora esse produto tenha sido aplicado em duas turmas. A escolha das turmas se justifica por serem turmas nas quais os alunos estudaram juntos desde o 6º ano e onde o autor desse trabalho ministrava aulas naquele ano.

4.2 Descrevendo a Escola

A Escola Coronel Francisco Orlando foi construída entre 1911 e 1913, e inaugurada em 1914 com o nome de “Grupo Escolar de Orlândia”. As aulas iniciaram num sábado, dia 02 de maio de 1914. Havia aulas aos sábados e as classes eram separadas por sexo. Apenas em 1967, tornaram-se salas mistas.

Em 1948, em homenagem ao fundador da cidade de Orlândia e Patrono da Escola, Coronel Francisco Orlando Diniz Junqueira, passou a se chamar Grupo Escolar “Coronel Francisco Orlando”.

A escola fez parte do Projeto Escola-Padrão, em 1992 e em 20/12/96, através da Lei Federal 9394/96 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) – passou a ser denominada EEPG "Coronel Francisco Orlando".

A Escola foi municipalizada em 03/07/2002, pelo Decreto municipal nº 3.100/02, juntamente com todas as outras escolas públicas de Ensino Fundamental e Infantil de Orlândia-SP, passando a se chamar EMEF "Coronel Francisco Orlando".

Neste mesmo ano, o autor desse trabalho acabara de ser graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela UFSCar e cursava Bacharelado como complementação, quando no fim do ano ocorreu o concurso para provimento de cargos de professor em várias áreas no Município de Orlândia-SP, dentre elas Matemática. O autor destas notas foi aprovado nesse concurso cuja cidade é, por sorte, vizinha de Sales Oliveira-SP, cidade onde residiu a vida toda.

Desde sua efetivação nesse concurso em Abril de 2003 o professor Haroldo, como é tratado pelos alunos e conhecido na cidade de Orlândia, é professor de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental neste município e nesta escola; local onde foi realizada a experimentação desse trabalho.

Em 06/03/2006, passou a se chamar EMEB. "Coronel Francisco Orlando" e no ano de 2014, tivemos a comemoração do seu centenário com o projeto interdisciplinar "Os cem anos de minha escola". A abertura oficial do projeto e o descerramento da placa do centenário aconteceram no dia 05 de Maio de 2014.

Em todos os anos, desde a sua efetivação em 2003, o professor Haroldo ministra aulas de Matemática nas turmas de 9º ano na Escola Coronel, como é chamada.

A E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando localiza-se na Rua Quatro, 146 no centro de Orlândia, que é o bairro comercial da cidade com poucas residências no seu entorno. Atualmente oferece Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano a aproximadamente 500 alunos nos períodos matutino e vespertino. Em 2014 eram 21 turmas regulares, sendo: 5 turmas de 6º ano, 5 de 7º ano, 5 de 8º ano e 6 turmas de 9º ano com, no máximo, 30 alunos por turma.

O autor desse trabalho ministrava aulas em 5 turmas de 9º ano: A, B, C, D e E, das quais escolheu as turmas B e C para a experimentação das folhas de atividades elaboradas nesse trabalho.

A localização da escola facilita o acesso dos alunos ao Teatro Municipal, à Biblioteca, ao Museu e às praças públicas, que são espaços utilizados para desenvolver atividades de enriquecimento curricular.

São pouquíssimos os alunos que residem no centro, a maioria vem dos bairros que se localizam ao redor do centro ou da fazenda, portanto necessitam de transporte escolar.

A escola atende alunos de todas as classes sociais, mas a predominante é a de baixa renda, oriundos de famílias com baixo grau de escolaridade, onde a leitura não é hábito e a participação no cotidiano escolar é tímida.

Por não pertencerem à um mundo letrado, os alunos escrevem como falam e o vocabulário é pobre e repleto de gírias ou expressões regionais. Isto gera dificuldades na aprendizagem da linguagem culta.

Notamos atualmente que, a maioria dos alunos não dá muita importância aos estudos, não valorizam a educação como forma de transformação da realidade vivida e isto é motivo de grande preocupação; tornando-se até um desafio para nós educadores que é reverter este quadro fazendo com que a escola se torne um ambiente agradável onde os alunos tenham prazer em frequentar.

Em contrapartida, temos excelentes alunos que sempre participam de concursos e são premiados como na OBMEP, na Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA), EPTV na Escola e outros, além do alto índice de aprovação em vestibulinhos – 42 aprovações no Centro Paula Souza em 2014 – os quais honram a escola e os docentes, pois é fruto do trabalho coletivo desenvolvido nessa instituição.

A estrutura da escola é considerada excelente. Cada uma das 13 salas de aula contém lousas brancas com 6 metros de comprimento, um computador, um projetor multimídia e uma lousa digital iterativa. Além disso, a escola possui laboratório de informática, laboratório de ciências, sala de leitura, sala de Arte, sala de reforço, sala de plantão, biblioteca, sala de vídeo e duas quadras de esportes.

4.3 Descrevendo as Turmas de Aplicação

As aplicações das folhas de atividades aconteceram nas duas últimas semanas de aula, antes da recuperação final, em duas turmas do período da manhã: 9º ano B e 9º ano C.

O 9º ano B possui 24 alunos matriculados e o 9º ano C possui 27 alunos matriculados. Em ambas as turmas, quase todos os alunos são frequentes. A seguir apresentamos o cronograma das aplicações.

No 9º ano B a primeira aula ocorreu dia 17 de Novembro com duração de 100 minutos, a segunda aula e metade da terceira aula, ambas com duração de 50 minutos aconteceram dia 19 de Novembro, a outra metade da terceira aula com duração de 50 minutos ocorreu dia 21 de Novembro e a quarta aula com duração de 100 minutos ocorreu dia 24 de Novembro.

No 9º ano C a primeira aula ocorreu dia 17 de Novembro com duração de 100 minutos, a segunda aula e metade da terceira aula, ambas com duração de 50 minutos aconteceram dia 20 de Novembro, a outra metade a terceira aula com duração de 50 minutos ocorreu dia 21 de Novembro e a quarta aula com duração de 100 minutos ocorreu dia 24 de Novembro.

Observe que, em ambas as turmas, foram programadas intencionalmente para serem realizadas a aula expositiva (segunda aula) e metade da terceira aula (metade da Folha de atividades 3) no mesmo dia, para que os alunos também desenvolvam as atividades. Assim, os alunos deixaram de serem espectadores de uma aula expositiva e passaram a ser protagonistas na construção do conhecimento.

As duas turmas que participaram da experimentação das folhas de atividades são bem parecidas. Ambas eram heterogêneas, pois nelas havia alunos com nível de proficiência avançado e alunos com nível de proficiência abaixo do básico.

Essas duas salas já tinham estudado durante o ano equações de 1º e 2º graus e função; que são requisitos necessários ao desenvolvimento das folhas de atividades.

Durante as aplicações houve um grande envolvimento dos alunos. De modo geral, as duas turmas foram bem receptivas às atividades e seus alunos se mostraram muito participativos.

4.4 Aspectos Gerais das Aplicações

As aplicações das folhas de atividades ocorreram de maneira semelhante em ambas as turmas. Os alunos foram divididos em grupos de dois ou três para a realização das folhas de atividades. Nas realizações da primeira folha de atividades e da terceira folha de atividades, cada aluno deveria registrar suas respostas individualmente na sua própria folha. Na realização da quarta folha de atividades cada grupo deveria registrar as suas respostas numa única folha.

A interferência do professor aplicador nas respostas dos alunos ou dos grupos foi mínima. Somente quando precisava de alguma intervenção oral, já prevista e descrita anteriormente, como é o caso da atividade 15 da folha de atividades 1, em que o professor pode colaborar com a discussão e elaboração da estratégia de resolução.

Durante as aplicações não foi permitido que os alunos mudassem de grupos. Somente na realização dos itens 14, 15 e 18 da primeira folha de atividades, os grupos podiam trocar informações e discutir com outros grupos. As aplicações transcorreram normalmente e nos mesmos parâmetros disciplinares exigidos e observados durante o ano letivo.

4.5 Análises das Aplicações

Os relatos das aplicações e a análise das respostas são apresentados a seguir na ordem que ocorreram as aplicações das sequências didáticas.

Somente a segunda metade da terceira folha de atividades teve sua aplicação no 9º B num dia diferente do dia da aplicação do 9º C. As folhas de atividades restantes tiveram suas respectivas aplicações ocorrendo nas duas turmas nos mesmos dias. Isso garantiu que, nas aplicações das folhas de atividades, as rotinas das salas fossem parecidas e contribuiu para que não houvesse contratempos numa ou noutra turma.

Pelas turmas serem muito semelhantes e pelas aplicações das folhas de atividades terem ocorrido quase todas nos mesmos dias em ambas as salas, a análise das respostas foi feita de por questão, na ordem que aparecem nas folhas de atividades, sendo analisadas as respostas das duas turmas juntas.

4.6 Análises das Respostas

As análises das respostas de todas as questões em todas as folhas de atividades trazem consigo os índices de acertos, de erros e outros apresentados na forma de porcentagem. Todas as representações de porcentagem foram escritas com o número do percentual sendo inteiro. Sendo assim, em todas as representações de porcentagens em que ocorreram aproximações a palavra *aproximadamente* foi suprimida para evitar uma repetição enfadonha.

4.6.1 Folha de Atividades 1

Esta primeira folha de atividades foi realizada por 47 alunos, sendo 23 alunos do 9º ano B divididos em 7 trios e uma dupla; e 24 alunos do 9º ano C divididos em 8 trios.

Na atividade 1 somente dois alunos (4%) não desenharam as figuras. Os outros 45 alunos (96%) desenharam corretamente.

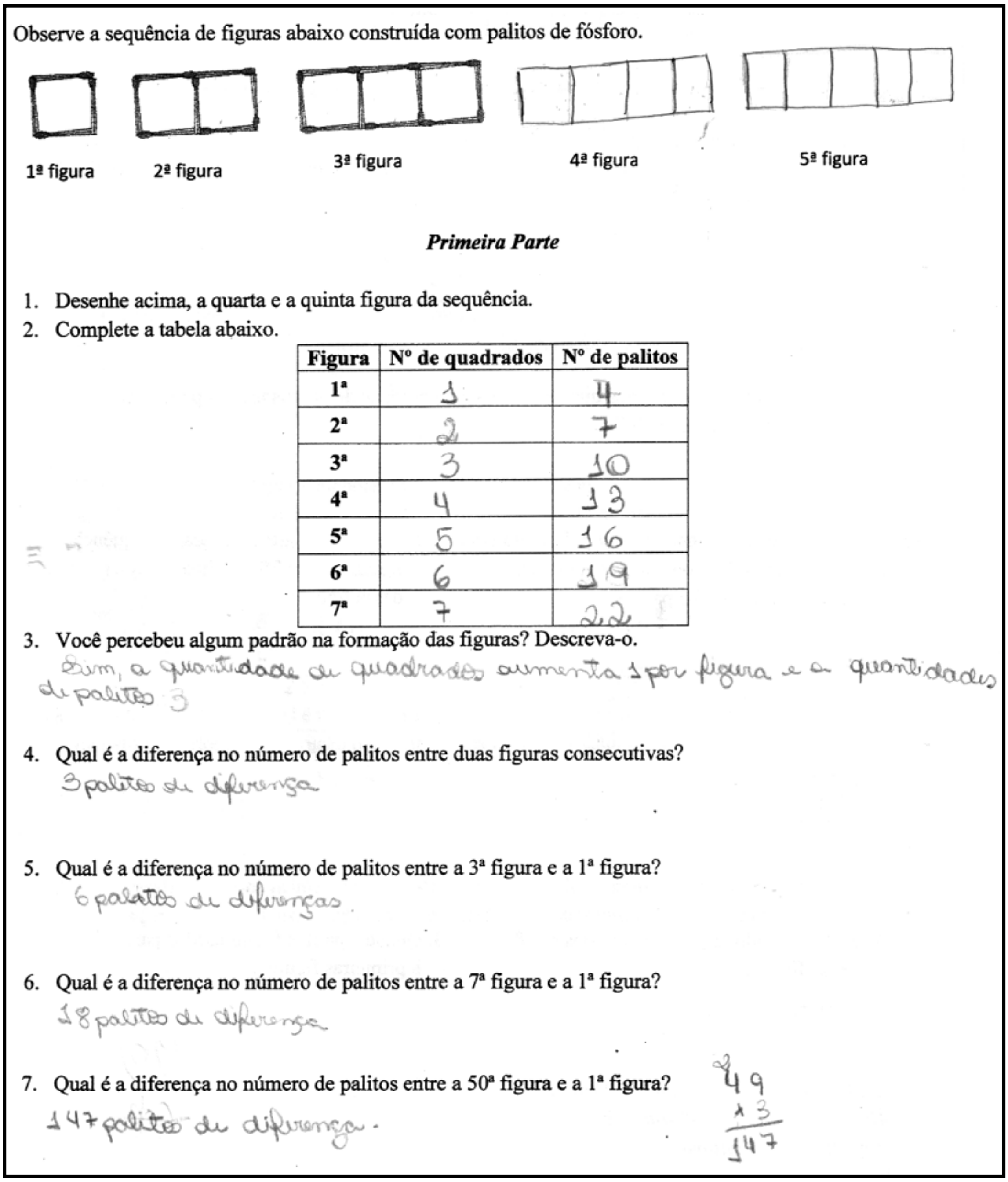
Na atividade 2 apenas um aluno (2%) preencheu parte da tabela. Todos os outros alunos (98%) completaram a tabela corretamente.

Na atividade 3 somente um aluno (2%) não percebeu o padrão e, portanto não respondeu. Todos os outros alunos (98%) perceberam o padrão da sequência apresentada e somente 2 alunos não conseguiu descrevê-lo corretamente.

As atividades 4, 5 e 6 também tiveram um alto índice de acertos. 46 alunos (98%) acertaram a atividade 4 e um aluno (2%) não a fez; 43 alunos (92%) acertaram a atividade 5, um aluno (2%) não a fez e 3 alunos (6%) erraram-na; e a atividade 6 foi realizada corretamente por 40 alunos (85%), um aluno (2%) não a fez e 6 alunos realizaram-na incorretamente.

A atividade 7 foi realizada corretamente por 30 alunos (64%), incorretamente por 14 alunos (30%) e 3 alunos (6%) não a realizaram.

Como esperado, os altos índices de acertos nessas sete primeiras questões indicam que quase todos os alunos reconheceram o padrão da sequência de figuras apresentada e entenderam a recursividade nela inserida.



Observe a sequência de figuras abaixo construída com palitos de fósforo.

1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura 5ª figura

Primeira Parte

1. Desenhe acima, a quarta e a quinta figura da sequência.
2. Complete a tabela abaixo.

Figura	Nº de quadrados	Nº de palitos
1ª	1	4
2ª	2	7
3ª	3	10
4ª	4	13
5ª	5	16
6ª	6	19
7ª	7	22

3. Você percebeu algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.
   Sim, a quantidade de quadrados aumenta 1 por figura e a quantidades de palitos 3
4. Qual é a diferença no número de palitos entre duas figuras consecutivas?
   3 palitos de diferença
5. Qual é a diferença no número de palitos entre a 3ª figura e a 1ª figura?
   6 palitos de diferenças.
6. Qual é a diferença no número de palitos entre a 7ª figura e a 1ª figura?
   18 palitos de diferença
7. Qual é a diferença no número de palitos entre a 50ª figura e a 1ª figura?
   147 palitos de diferença.
   $49 \times 3 = 147$

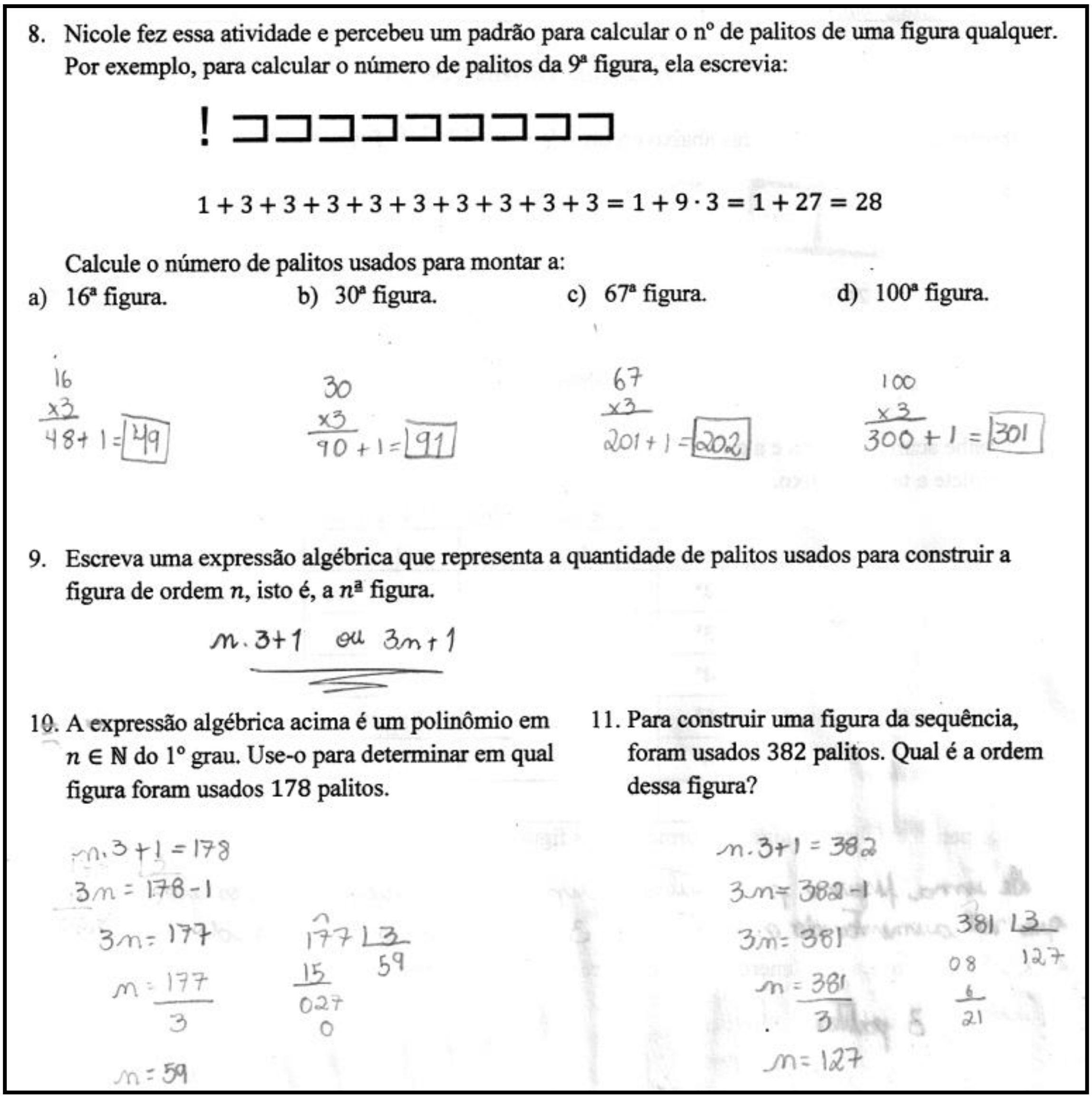
Figura 44: Resolução de aluno 1 a 7 - Folha 1

A atividade 8 foi totalmente acertada por 43 alunos (92%). Os outros 4 alunos (8%) não a realizaram, indicando que não reconheceram o padrão da sequência.

A atividade 9 foi acertada por 41 alunos (87%). Os outros 6 alunos (13%) não a realizaram. Dois deles reconheceram o padrão (acertaram a atividade 8), mas não conseguiram expressar o padrão algebricamente.

Tanto a atividade 10 como a atividade 11 tiveram 37 acertos (79%) e outros 10 alunos que não a realizaram.

Como previsto, pouquíssimos alunos não reconheceram o padrão da sequência e consequentemente não generalizaram tal padrão.



8. Nicole fez essa atividade e percebeu um padrão para calcular o nº de palitos de uma figura qualquer. Por exemplo, para calcular o número de palitos da 9ª figura, ela escrevia:

$$1+3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 1+9\cdot 3 = 1+27 = 28$$

Calcule o número de palitos usados para montar a:

a) 16ª figura. b) 30ª figura. c) 67ª figura. d) 100ª figura.

a) $16 \times 3 = 48$; $48+1=\boxed{49}$

b) $30 \times 3 = 90$; $90+1=\boxed{91}$

c) $67 \times 3 = 201$; $201+1=\boxed{202}$

d) $100 \times 3 = 300$; $300+1=\boxed{301}$

9. Escreva uma expressão algébrica que representa a quantidade de palitos usados para construir a figura de ordem n, isto é, a nª figura.

$n.3+1$ ou $3n+1$

10. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 1º grau. Use-o para determinar em qual figura foram usados 178 palitos.

$n.3+1=178$

$3n=178-1$

$3n=177$

$n=\frac{177}{3}$

$n=59$

177 ÷ 3 = 59 (15, 027, 0)

11. Para construir uma figura da sequência, foram usados 382 palitos. Qual é a ordem dessa figura?

$n.3+1=382$

$3n=382-1$

$3n=381$

$n=\frac{381}{3}$

$n=127$

381 ÷ 3 = 127 (08, 6, 21)

Figura 45: Resolução de aluno 8 a 11 – Folha 1

A atividade 12 foi realizada corretamente por 42 alunos (89%), os outros (11%) não a realizaram. A atividade 13 foi acertada por 28 alunos (60%), errada por 11 alunos (23%) e não realizada por 8 alunos (17%).

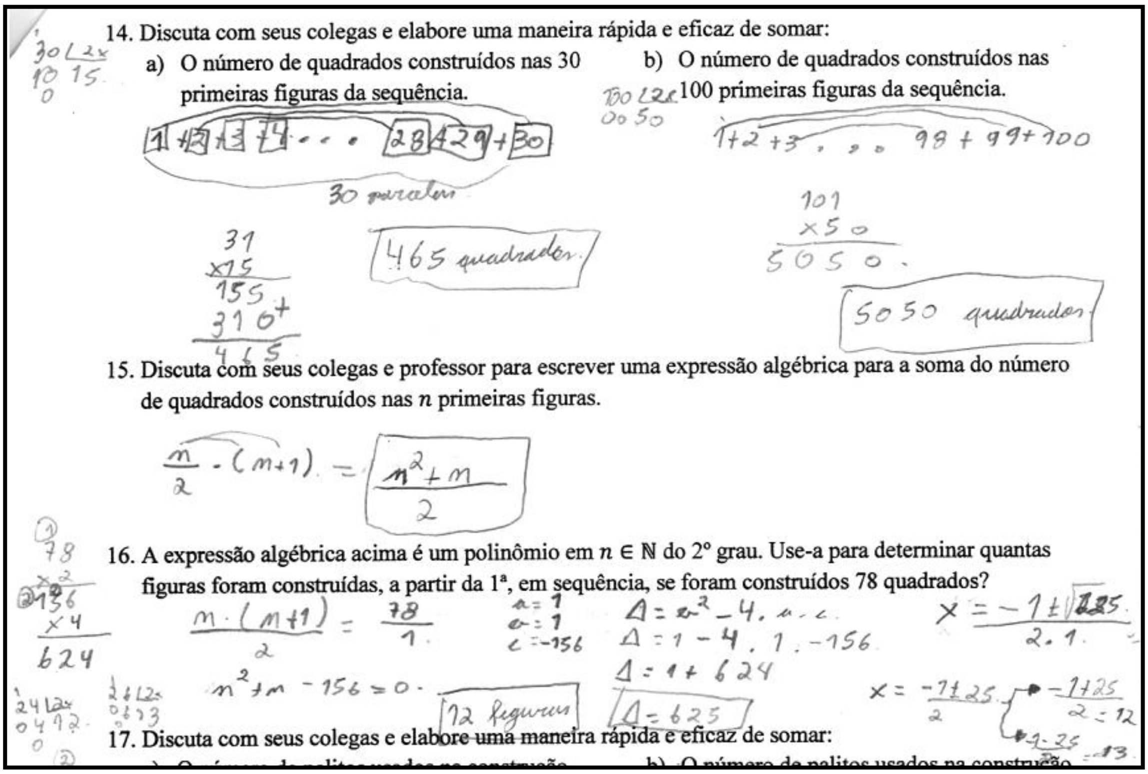
A atividade 14.a foi realizada corretamente por 37 alunos (79%), incorretamente por 3 alunos (6%) e não foi realizada por 7 alunos (15%).

A atividade 14.b foi realizada corretamente por 33 alunos (70%) e os outros 14 alunos (30%) não a fizeram.

A atividade 15 foi realizada corretamente por 34 alunos (72%) e não realizada por 13 alunos (28%).

Na atividade 16, um pouco menos que a metade dos alunos encontrou dificuldades, pois 24 alunos (51%) a realizaram corretamente, dois alunos (4%) montaram e não terminaram de resolver a equação do 2º grau, 1 aluno (2%) apenas montou a equação e os 20 alunos restantes (43%) não a realizaram.

Como previsto, os altos índices de acertos nas atividades 14.a, 14.b e 15 indicam que poucos alunos não conseguiram desenvolver uma generalização para a soma dos n primeiros termos da sequência numérica formada pelo número de quadrados das figuras. Entretanto, pouco menos da metade dos alunos (49%) encontraram dificuldades e não realizaram a atividade 16, contrariando a previsão, pois era esperado que a maioria encontrasse dificuldade na resolução da equação do 2º grau.



14. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de quadrados construídos nas 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de quadrados construídos nas 100 primeiras figuras da sequência.

465 quadrados

5050 quadrados

15. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de quadrados construídos nas n primeiras figuras.

$\frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n^2+n}{2}$

16. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram construídos 78 quadrados?

12 figuras

17. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

Figura 46: Resolução de aluno 14 a 16 - Folha 1

As atividades 17, 18 e 19 tiveram índices de realizações corretas abaixo de 50%, pois mais da metade dos alunos não conseguiram realizar tais atividades no tempo previsto.

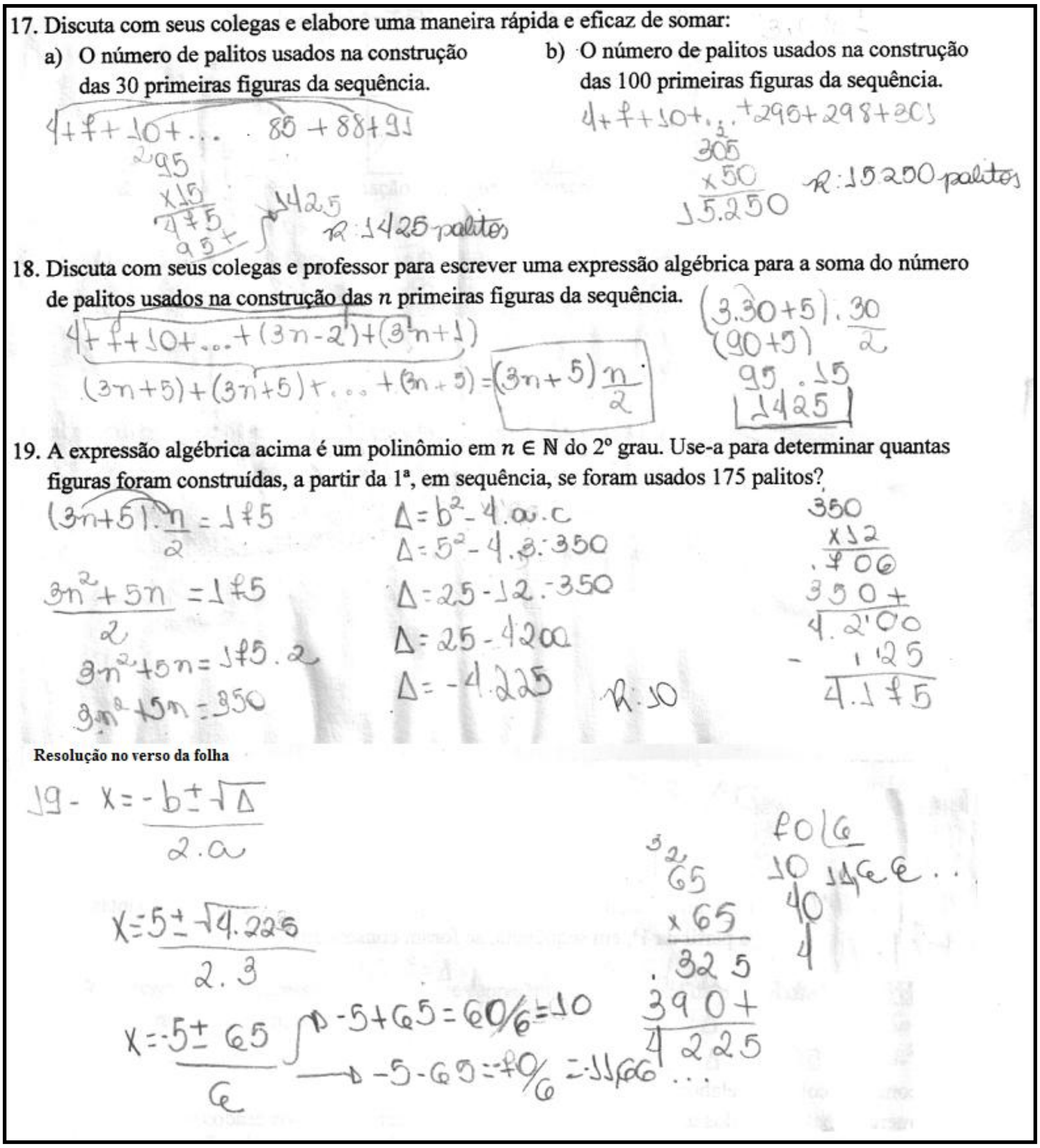
Durante a aplicação dessas folhas de atividades, foi observado pelo aplicador que talvez alguns grupos não realizariam as atividades no tempo previsto. Então, ao término da aplicação, o professor aplicador perguntava para cada aluno, no momento da entrega das folhas de atividades, se ele conseguiu terminá-la. Caso a resposta fosse não, a folha de atividades era colocada em separado. Desse modo, 34 dos 47 alunos (72%) que participaram da realização dessa folha de atividades não terminaram de fazer as atividades no tempo proposto.

Assim, apenas 19 alunos (40%) realizaram a atividade 17.a corretamente, 5 alunos (11%) realizaram incorretamente e 23 (49%) não a realizaram.

Apenas 18 alunos (38%) realizaram a atividade 17.b corretamente, 6 alunos (13%) realizaram incorretamente e 23 alunos (49%) não a realizaram.

Somente 18 alunos (38%) realizaram a atividade 18 corretamente, 1 aluno (2%) incorretamente e 28 alunos (60%) não a realizaram.

E a atividade 19 foi realizada corretamente por 12 alunos (26%), incorretamente por 1 aluno (2%) e não realizada por 34 alunos (72%).



17. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de palitos usados na construção das 30 primeiras figuras da sequência.

4+7+10+... 85+88+91

95

x15

475

95+

1425

R: 1425 palitos

b) O número de palitos usados na construção das 100 primeiras figuras da sequência.

4+7+10+...+295+298+301

305

x50

15.250

R: 15250 palitos

18. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de palitos usados na construção das n primeiras figuras da sequência.

4+7+10+...+(3n-2)+(3n+1)

(3n+5)+(3n+5)+...+(3n+5) = $\boxed{(3n+5)\frac{n}{2}}$

$(3.30+5).\frac{30}{2}$

$(90+5)$

95 . 15

$\boxed{1425}$

19. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram usados 175 palitos?

$(3n+5).\frac{n}{2} = 175$

$\frac{3n^2+5n}{2} = 175$

$3n^2+5n = 175.2$

$3n^2+5n = 350$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 5^2 - 4.3.-350$

$\Delta = 25 - 12.-350$

$\Delta = 25 - 4200$

$\Delta = -4.225$

R: 10

350 x12 = 4.200; 4.200 − 125 = 4.175

Resolução no verso da folha

19- $X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$X = \frac{5 \pm \sqrt{4.225}}{2.3}$

$X = \frac{-5 \pm 65}{6}$ → $-5+65 = 60/6 = 10$ → $-5-65 = -70/6 = -11,66...$

65 x 65 = 4225

70 | 6 = 11,66...

Figura 47: Resolução de aluno 17 a 19 - Folha 1

Em relação à avaliação dos alunos, essa folha de atividades constou como uma avaliação contínua de Álgebra do 4º bimestre. Nessa escola, o desempenho de cada aluno numa avaliação ou numa atividade é traduzido por uma nota numa escala de zero a dez.

Para a quantificação do desempenho dos alunos foram consideradas apenas as 16 primeiras atividades, pois 34 dos 47 alunos que realizaram a experimentação dessa primeira folha de atividades (72%) não conseguiram terminar toda a atividade no tempo estipulado e, reconhecidamente, 100 minutos foi um tempo curto para muitos destes alunos.

Acredito que, quantificar o desempenho dos alunos através das 16 primeiras atividades não trás nenhum problema de avaliação, pois as atividades 17 a 19 desenvolvem os mesmos conteúdos que as atividades 14 a 16 e através da mesma metodologia utilizada, sendo a mesma descrição e os mesmos objetivos esperados. A única diferença é que ao invés da sequência numérica ser formada pelo número de quadrados, ela é formada pelo número de palitos usados na montagem de cada figura da sequência.

Para quantificar o desempenho dos alunos e gerar as notas de cada um deles, foram atribuídos pesos às 16 atividades consideradas de acordo com a tabela a seguir.

Tabela 1: Pesos das atividades - Folha 1

Nº da Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	**Total**
Peso	1	5	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	2	1	2	**25**

Fonte: Elaborada pelo autor.

A nota de cada aluno referente a essa folha de atividades foi calculada somando-se os pesos referentes às questões por ele acertadas e dividindo-se por 25 para obter um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1. Como a nota de cada avaliação é dada numa escala de 0 a 10, multiplicamos o número obtido por 10 para obter a nota de cada aluno.

Desse modo, 8 alunos (17%) foram avaliados com nota inferior a 6,0 e 39 alunos (83%) foram avaliados com nota igual ou superior a 6,0.

4.6.2 Aula Expositiva

A avaliação da aula expositiva sobre PA se deu em dois momentos. Primeiro pela observação do professor em relação ao envolvimento dos alunos nas discussões e reflexões sobre a primeira folha de atividades e, posteriormente através do desempenho dos alunos nas folhas de atividades 3 e 4 que foram experimentadas na sequência.

Acredito que os alunos demonstraram grande interesse nas discussões e reflexões da aula expositiva devido a motivação despertada pelos desafios propostos na primeira folha de atividades, pois vários deles aproveitaram para fazer colocações sobre a folha de atividades 1 em comparação com os conteúdos discutidos acerca das progressões aritméticas.

Assim, somos levados a entendermos que, a aula expositiva funcionou bem porque os alunos foram desafiados, num primeiro momento, na folha de atividades 1. O que garantiu um grande envolvimento dos alunos e contribuiu para o aprendizado deles acerca das progressões aritmética.

Outro fato que me intrigou foi a grande quantidade de perguntas sobre as notações matemáticas utilizadas. Pela nossa experiência em sala de aula, era visível que alguns alunos estavam com dificuldades de entendimento e a quantidade de perguntas foi bem maior que a de costume.

A aula expositiva também contribuiu para a realização das tarefas propostas nas folhas de atividades 3 e 4 que se seguiram, conforme mostram as análises a seguir.

4.6.3 Folha de Atividades 3

A terceira folha de atividades foi realizada por 47 alunos, sendo 22 alunos do 9º ano B divididos em 6 trios e 2 duplas; e 25 alunos do 9º ano C divididos em 7 trios e 2 duplas.

A atividade 1 era composta dos itens (a) a (g).

No item (a) somente 1 aluno (2%) não conseguiu desenhar a figura seguinte da sequência. Os outros 46 alunos (98%) desenharam corretamente.

No item (b) 32 alunos (68%) responderam e justificaram corretamente; 8 alunos (17%) responderam corretamente, mas não justificaram ou justificaram incorretamente; e 7 alunos (15%) não responderam.

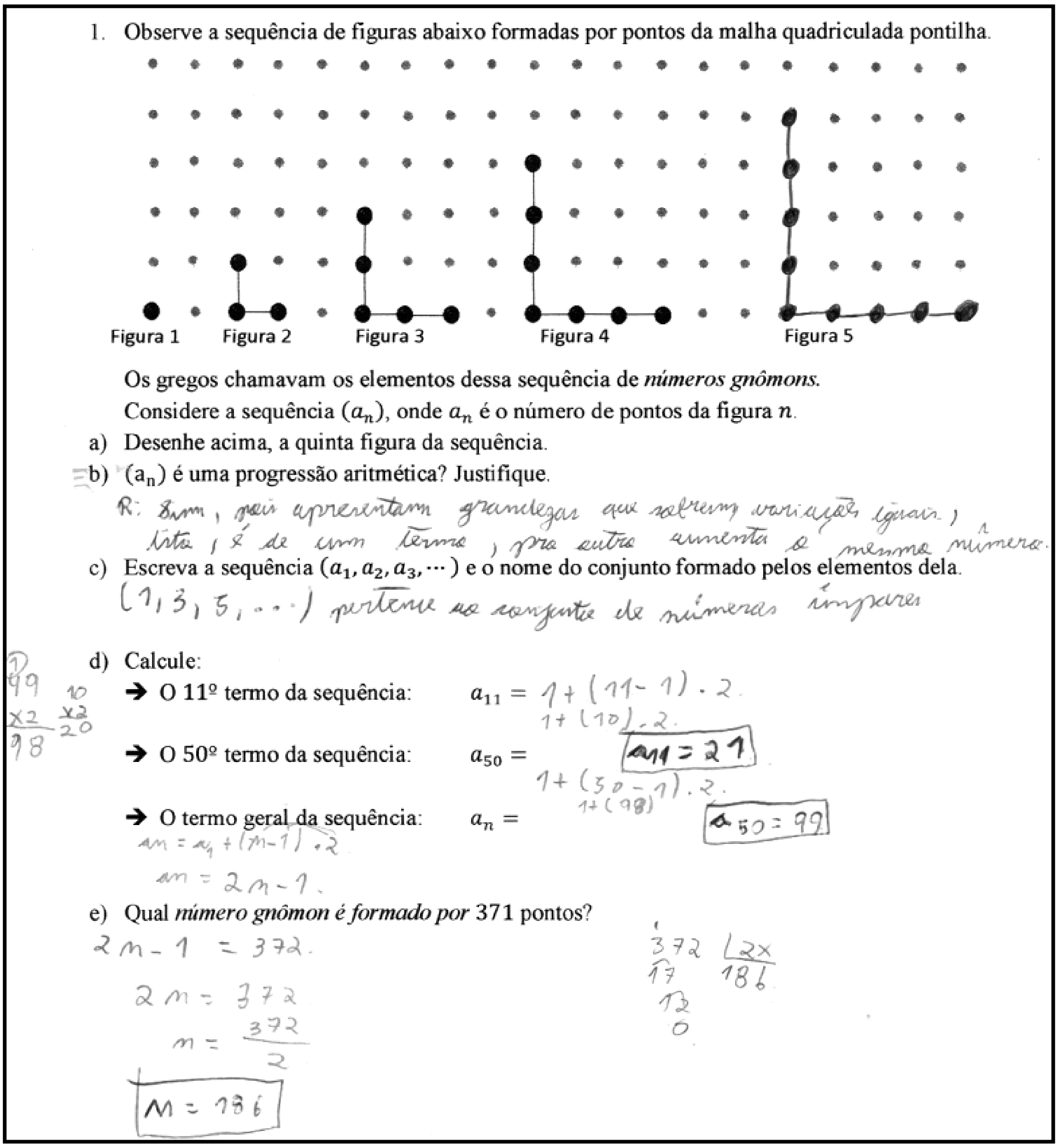
No item (c) 38 alunos (81%) realizaram corretamente, 3 alunos (6%) escreveram a sequência, mas não o nome do conjunto e os outros 6 alunos (13%) não responderam.

Na atividade (d) os alunos deveriam calcular a_{11},a_{50} e o termo geral a_n.

Os cálculos de a_{11} ea_{50} foram feitos corretamente por 34 alunos (72%), incorretamente por 12 alunos (26%) e não foram realizados por 1 aluno (2%).

A expressão para o termo geral a_n foi escrita corretamente por 24 alunos (51%), incorretamente por 19 alunos (40%) e 4 alunos não escreveram nada.

O item (e) foi realizado corretamente por 32 alunos (68%) e os outros 15 alunos não o realizaram.



1. Observe a sequência de figuras abaixo formadas por pontos da malha quadriculada pontilha.

Os gregos chamavam os elementos dessa sequência de *números gnômons*.

Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de pontos da figura n.

a) Desenhe acima, a quinta figura da sequência.

b) (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

R: Sim, pois apresentam grandezas que sofrem variações iguais, isto, é de um termo, pra outro aumenta o mesmo número.

c) Escreva a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ e o nome do conjunto formado pelos elementos dela.

(1, 3, 5, ...) pertence ao conjunto de números ímpares

d) Calcule:

99 ×2 98 10 ×2 20

➔ O 11º termo da sequência: $a_{11} = 1 + (11-1) \cdot 2$

$1 + (10) \cdot 2$

$\boxed{a_{11} = 21}$

➔ O 50º termo da sequência: $a_{50} = $

$1 + (50-1) \cdot 2$

$1 + (98)$

$\boxed{a_{50} = 99}$

➔ O termo geral da sequência: $a_n = $

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

$a_n = 2n - 1$.

e) Qual *número gnômon é formado por* 371 pontos?

$2n - 1 = 372$.

$2n = 372$

$n = \frac{372}{2}$

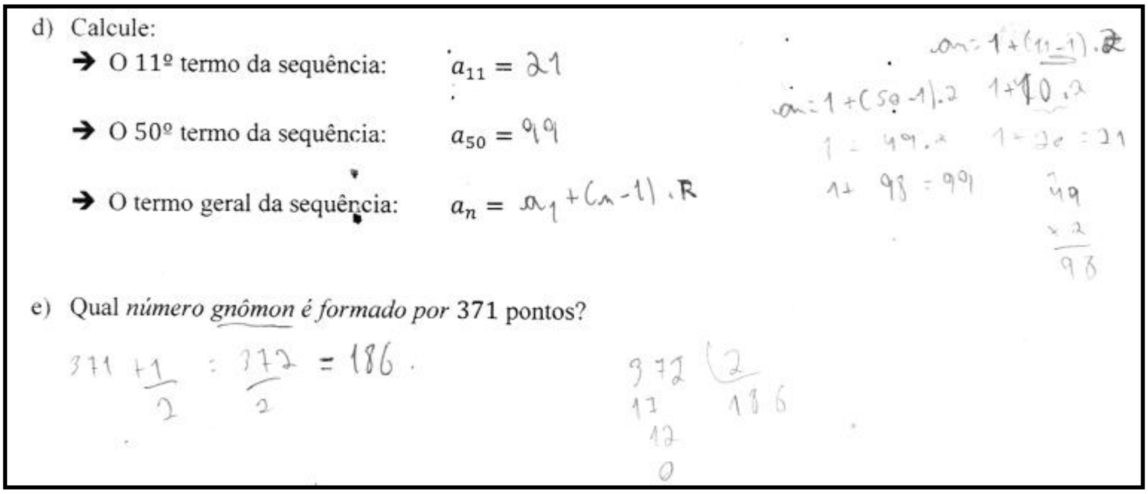
$\boxed{n = 186}$

372 | 2 ; 17 ; 12 ; 0 ; 186

Figura 48: Resolução de aluno (1a) a (1e) - Folha 3

Analisando estes cinco itens e, comparando o baixo índice de acertos na representação do termo geral com os altos índices de acertos nos demais itens, temos um indicativo de que quase 50% dos alunos reconheceram o padrão da sequência, entenderam a recursividade inserida nela, mas apresentaram alguma dificuldade em expressar esse padrão algebricamente.

Um fato interessante e que confirma a análise feita no parágrafo anterior é que: 6 dos alunos não conseguiram exibir uma expressão algébrica para o termo geral raciocinaram adequadamente e conseguiram realizar o item (e) corretamente sem utilizar uma equação de 1º grau. Eis um deles na figura abaixo.



d) Calcule:

➔ O 11º termo da sequência: $a_{11} = 21$

➔ O 50º termo da sequência: $a_{50} = 99$

➔ O termo geral da sequência: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot R$

$a_n = 1 + (11-1) \cdot 2$ $\quad 1 + 10 \cdot 2 \quad 1 + 20 = 21$

$a_n = 1 + (50-1) \cdot 2 \quad 1 + 49 \cdot 2 \quad 1 + 98 = 99$

e) Qual *número gnômon é formado por* 371 pontos?

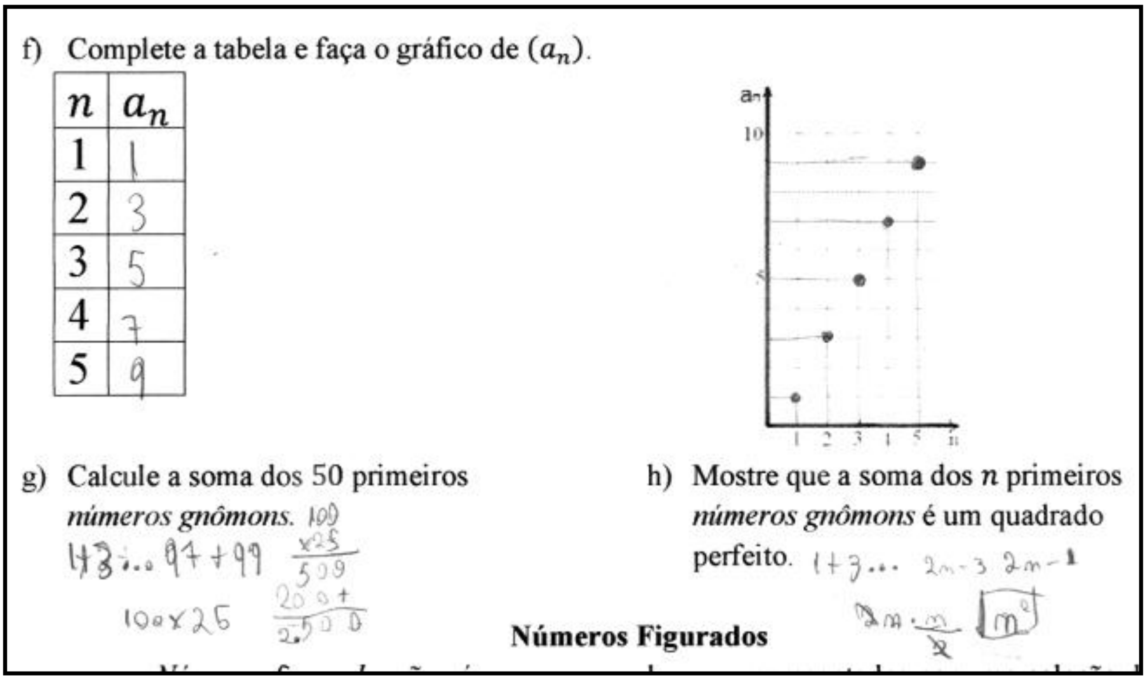
$\frac{371+1}{2} = \frac{372}{2} = 186.$

Figura 49: Resolução de aluno (1d) e (1e) – Folha 3

O item (f) foi realizado corretamente por 33 alunos (70%). Um aluno (2%) não realizou, 8 alunos (17%) acertaram apenas a tabela e 5 alunos (11%) erraram tudo.

O item (g) foi realizado corretamente por 30 alunos (64%), 6 alunos (13%) não realizaram e 11 alunos (23%) realizaram incorretamente embora 6 deles conseguiram escrever ao menos a soma.

O item (h) foi realizado corretamente por apenas 16 alunos (34%) e dos 13 alunos (28%) que erraram 5 escreveram a soma corretamente. Os outros 18 alunos (38%) não o realizaram.



f) Complete a tabela e faça o gráfico de (a_n).

n	a_n
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

g) Calcule a soma dos 50 primeiros *números gnômons*.

h) Mostre que a soma dos n primeiros *números gnômons* é um quadrado perfeito.

Números Figurados

Figura 50: Resolução de aluno (1f) a (1h) - Folha 3

Comparando os índices de realizações corretas dos itens (g) e (h) podemos afirmar que mais da metade dos alunos encontraram dificuldades em desenvolver uma fórmula geral para a soma dos$n$ primeiros números gnômons.

A atividade 2 era composta dos itens (a) ao (l).

O item (a) foi realizado corretamente por 46 alunos (98%). Apenas um aluno (2%) não o realizou.

O item (b) foi realizado corretamente por 44 alunos (94%) e não realizado por 3 alunos (6%).

O item (c) foi realizado corretamente por 44 alunos (94%), não realizado por 3 alunos (6%) e incorretamente por 1 alunos (2%).

O item (d) foi realizado corretamente por 28 alunos (60%), não realizado por 15 alunos (31%) e incorretamente por 4 alunos (9%).

O item (e) foi realizado corretamente por 32 alunos (68%), não realizado por 10 alunos (21%) e incorretamente por 5 alunos (11%).

O item (f) foi realizado corretamente por 34 alunos (72%) e não realizado por 13 alunos (28%).

Os itens (g) até o (l) foram realizados corretamente por apenas 16 alunos (34%) e não realizados por 31 alunos (66%).

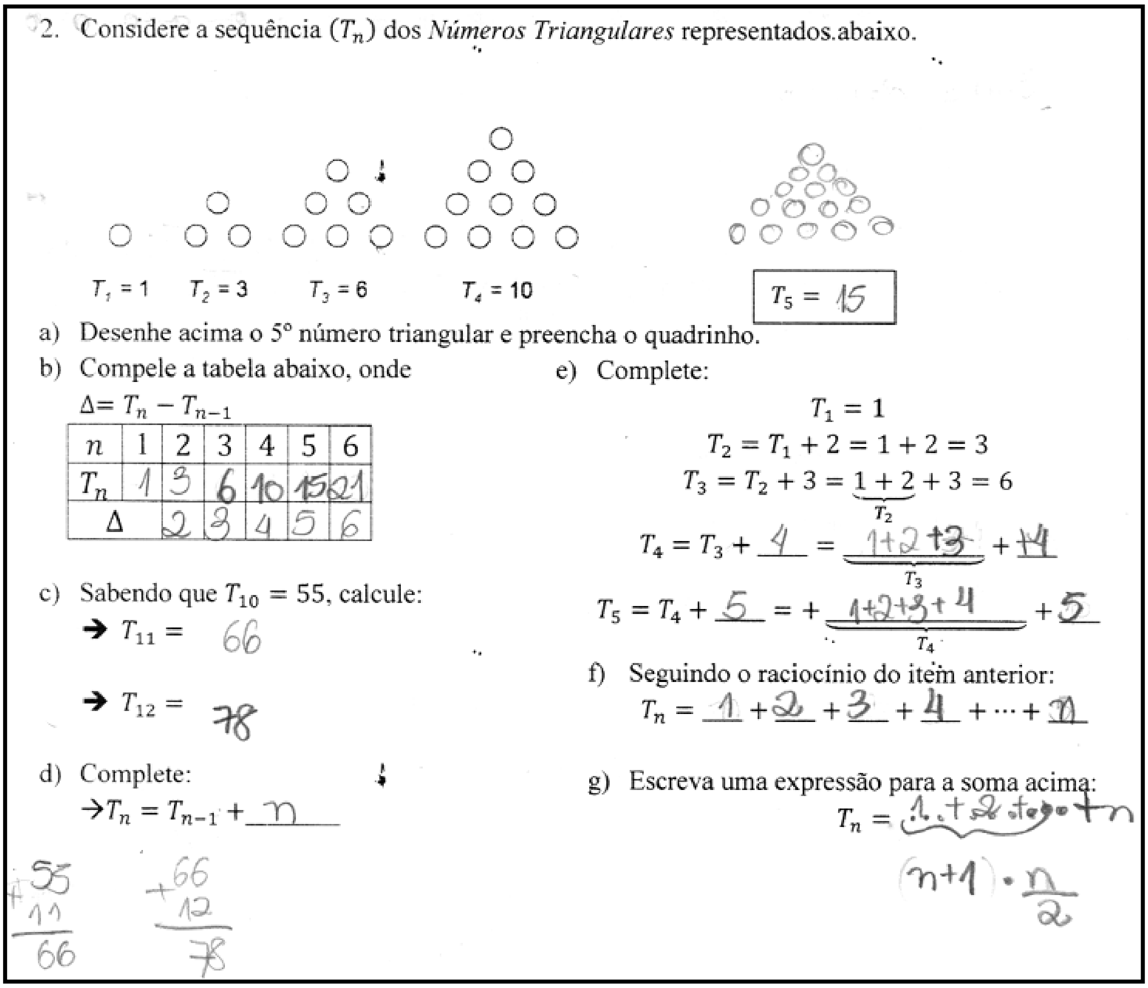
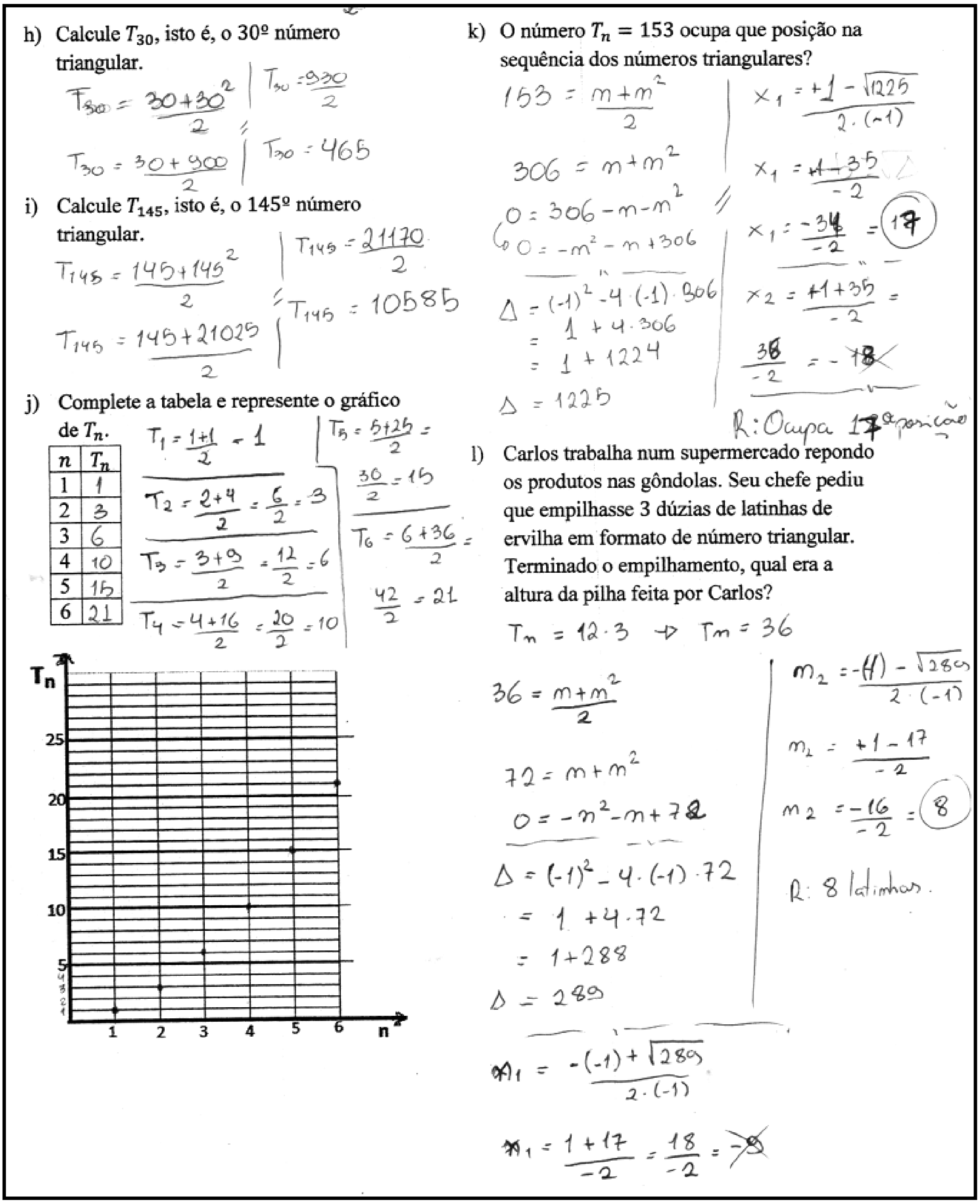


Figura 51: Resolução de aluno (2a) ao (2g) - Folha 3

Os altos índices de realizações corretas nos itens (a) a (f) comparados com o baixo índice de realizações corretas do item (g) indicam que 60% dos alunos ou mais reconheceram o padrão, entenderem a recursividade que se apresenta e escreveram a soma que representa o termo geralT_n. Contudo apenas 16 alunos (34%) escreveram uma expressão para a soma em questão.

A análise do parágrafo anterior vai de encontro com o esperado e mostra que os alunos que não conseguiram determinar a expressão desejada, não observaram que a soma em questão é a soma dos termos de uma progressão aritmética.



h) Calcule T_{30}, isto é, o 30º número triangular.

$T_{30} = \frac{30+30^2}{2}$ // $T_{30} = \frac{30+900}{2}$ // $T_{30} = \frac{930}{2}$ // $T_{30} = 465$

i) Calcule T_{145}, isto é, o 145º número triangular.

$T_{145} = \frac{145+145^2}{2}$ // $T_{145} = \frac{145+21025}{2}$ // $T_{145} = \frac{21170}{2}$ // $T_{145} = 10585$

j) Complete a tabela e represente o gráfico de T_n.

n	T_n
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21

$T_1 = \frac{1+1}{2} = 1$

$T_2 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$T_3 = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$T_4 = \frac{4+16}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$T_5 = \frac{5+25}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$T_6 = \frac{6+36}{2} = \frac{42}{2} = 21$

k) O número $T_n = 153$ ocupa que posição na sequência dos números triangulares?

$153 = \frac{m+m^2}{2}$

$306 = m+m^2$

$0 = 306 - m - m^2$

$0 = -m^2 - m + 306$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 306$

$= 1 + 4 \cdot 306$

$= 1 + 1224$

$\Delta = 1225$

$x_1 = \frac{+1 - \sqrt{1225}}{2 \cdot (-1)}$

$x_1 = \frac{+1 - 35}{-2}$

$x_1 = \frac{-34}{-2} = 17$

$x_2 = \frac{+1+35}{-2} = \frac{36}{-2} = -18$

R: Ocupa 17ª posição

l) Carlos trabalha num supermercado repondo os produtos nas gôndolas. Seu chefe pediu que empilhasse 3 dúzias de latinhas de ervilha em formato de número triangular. Terminado o empilhamento, qual era a altura da pilha feita por Carlos?

$T_n = 12 \cdot 3 \to T_m = 36$

$36 = \frac{m+m^2}{2}$

$72 = m+m^2$

$0 = -m^2 - m + 72$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 72$

$= 1 + 4 \cdot 72$

$= 1 + 288$

$\Delta = 289$

$m_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{289}}{2 \cdot (-1)}$

$m_1 = \frac{1+17}{-2} = \frac{18}{-2} = \cancel{-9}$

$m_2 = \frac{-(1) - \sqrt{289}}{2 \cdot (-1)}$

$m_2 = \frac{+1-17}{-2}$

$m_2 = \frac{-16}{-2} = 8$

R: 8 latinhas.

Figura 52: Resolução de aluno (2h) ao (2l) - Folha 3

Durante a aplicação dessa terceira folha de atividades, foi observado pelo aplicador que, 31 dos 47 alunos (66%) que participaram da realização dessa folha de atividades, não terminaram de fazer as atividades no tempo proposto.

Em relação à avaliação dos alunos, essa folha de atividades constou como avaliação bimestral de Álgebra do 4º bimestre. Para a quantificação do desempenho dos alunos foram considerados a atividade 1 e os itens (a) ao (g) da atividade 2, pois 31 alunos (66%) que realizaram a experimentação dessa terceira folha de atividades não conseguiram terminar toda a atividade no tempo estipulado.

Para quantificar o desempenho dos alunos e gerar as notas de cada um deles, foram atribuídos pesos às atividades consideradas de acordo com a tabela a seguir.

Tabela 2: Pesos das atividades - Folha 3

Atividades	1								2							**Total**
	a	b	c	d	e	f	g	h	a	b	c	d	e	f	g	
Peso	1	1	1	3	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	**20**

Fonte: Elaborada pelo autor.

A nota de cada aluno referente a essa folha de atividades foi calculada somando-se os pesos referentes às questões por ele acertadas e dividindo-se por 20 para obter um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1. Em seguida, multiplicamos o número obtido por 10 para obter a nota de cada aluno na escala de 0 a 10.

Desse modo, 12 alunos (26%) foram avaliados com nota inferior a 6,0 e 35 alunos (74%) foram avaliados com nota igual ou superior a 6,0.

4.6.4 Folha de Atividades 4

A quarta folha de atividades foi realizada por 41 alunos, sendo 23 alunos do 9º ano B divididos em 5 trios e 4 duplas; e 18 alunos do 9º ano C divididos em 6 trios.

Diferentemente das outras duas folhas de atividades, nessa folha de atividades cada grupo tinha sua própria folha de atividades onde os alunos deveriam registrar as respostas e as colagens.

Desse modo as análises foram feitas por grupos e no geral – juntando as duas turmas. Totalizando, assim, 15 grupos que realizaram a quarta folha de atividades.

A atividade 1 era composta dos itens (a) ao (d).

Todos os grupos (100%) realizaram o item (a), elaborando a sequência e colando suas três primeiras figuras, como era esperado.

No item (b), 2 grupos (13%) não descreveram o padrão da sequência e 2 grupos (13%) não descreveram corretamente o padrão, apenas escreveram a sequência. Isso confirma o esperado, que alguns grupos apresentassem dificuldades na descrição do padrão. Os outros 11 grupos (74%) realizaram corretamente.

Como esperado, apenas um grupo (7%) não realizou o item (c). Os outros grupos (93%) realizaram corretamente. Esse alto índice de acertos indica que os alunos aprenderam identificar quando uma sequência é uma progressão aritmética.

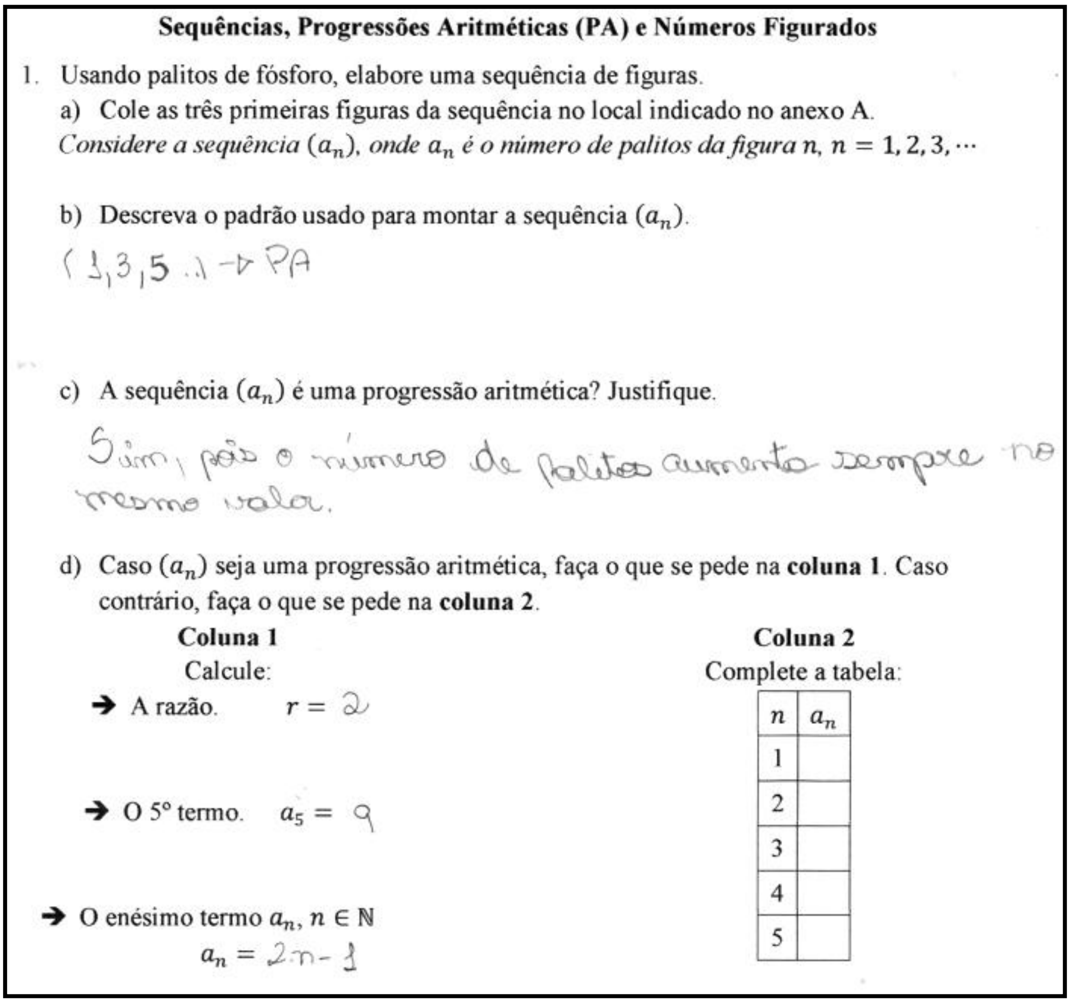
O que me intrigou foi que, o grupo que não realizou esse item conseguiu realizar corretamente a atividade (2a), elaborando uma PA Depois, analisando melhor as respostas desse grupo, pude observar que eles só elaboraram as sequências das três primeiras atividades e deixaram em branco todas as outras atividades. Esse é um indicativo de que eles não fizeram as outras atividades porque não quiseram, pois mostraram nas realizações corretas das atividades (2a) e (3a) que sabem o que é uma progressão aritmética.

No item (d), 1 grupo não realizou (7%) e 12 grupos (80%) realizaram tudo corretamente. Os outros 2 grupos (13%) realizaram parcialmente, não conseguindo calcular e escrever o termo geral a_n da sequência.

Como esperado, o alto índice de acertos nesse item mostra que quase todos os grupos conseguiram generalizar o padrão da sequência elaborada.

A seguir temos uma foto de um dos grupos realizando esta folha de atividades. A foto nos permite observar o anexo A, que contem a colagem da sequência de figuras formadas por palitos de fósforos – atividade (1a). Logo abaixo da foto tem todas as outras respostas desse grupo para a atividade 1.

Figura 53: Colagem de um grupo do item (1a) - Folha 4



Sequências, Progressões Aritméticas (PA) e Números Figurados

1. Usando palitos de fósforo, elabore uma sequência de figuras.

a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de palitos da figura n, $n = 1, 2, 3, \cdots$

b) Descreva o padrão usado para montar a sequência (a_n).

(1, 3, 5 ...) → PA

c) A sequência (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

Sim, pois o número de palitos aumenta sempre no mesmo valor.

d) Caso (a_n) seja uma progressão aritmética, faça o que se pede na **coluna 1**. Caso contrário, faça o que se pede na **coluna 2**.

Coluna 1

Calcule:

→ A razão. $r = 2$

→ O 5º termo. $a_5 = 9$

→ O enésimo termo a_n, $n \in \mathbb{N}$

$a_n = 2n - 1$

Coluna 2

Complete a tabela:

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	

Figura 54: Resolução de um grupo (1b) ao (1d) - Folha 4

A atividade 2 era composta dos itens (a) ao (h).

Todos os grupos (100%) realizaram o item (a), elaborando a progressão aritmética e colando suas três primeiras figuras, como era esperado.

O item (b) foi realizado corretamente por 13 grupos (86%), incorretamente por 1 grupo (7%) e não realizado por 1 grupo (7%).

O item (c) foi realizado corretamente por 11 grupos (73%) e não realizado por 4 grupos (27%).

O item (d) foi realizado corretamente por 13 grupos (86%), incorretamente por 1 grupo (7%) e não realizado por 1 grupo (7%).

O item (e) foi realizado corretamente por 11 grupos (73%), incorretamente por 1 grupo (7%) e não realizado por 3 grupos (20%).

O item (f) foi realizado corretamente por 11 grupos (73%) e não realizado por 4 grupos (27%).

Apenas 1 grupo (7%) não realizou o item (g). Os outros 14 grupos (93%) realizaram corretamente.

No item (h), 7 grupos (46%) realizaram corretamente, 4 grupos (27%) não realizaram e outros 4 grupos (27%) realizaram incorretamente.

Os altos índices de realizações corretas nas atividades (2a) a (2g) indicam que 11 grupos (73%) ou mais aprenderam o que é uma progressão aritmética, entenderam a recursividade que ela apresenta e conseguiram obter uma expressão para o termo geral da PA elaborada por eles e ainda a utilizá-la em alguns cálculos, confirmando o esperado. Já o baixo índice de realizações corretas na atividade (2h) indica que menos da metade (46%) dos grupos não conseguiram somar alguns termos dessa progressão, contrariando o esperado.

A seguir temos uma foto de um dos grupos realizando esta folha de atividades. A foto nos permite observar o anexo A, que contem a colagem da progressão aritmética de figuras formadas por círculos – atividade (2a). Logo abaixo da foto tem a colagem desse grupo para a atividade (2a). Na sequência, todas as outras respostas desse grupo para a atividade 2.

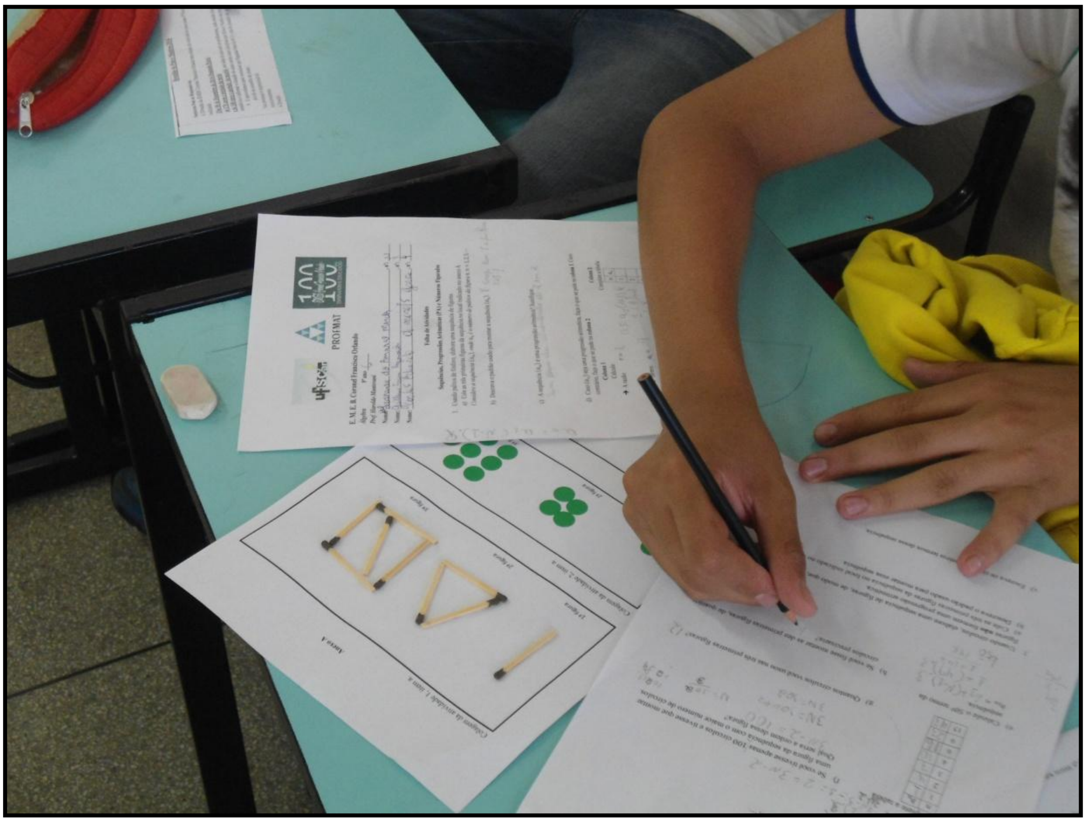


Figura 55: Grupo realizando a atividade 2 – Folha 4

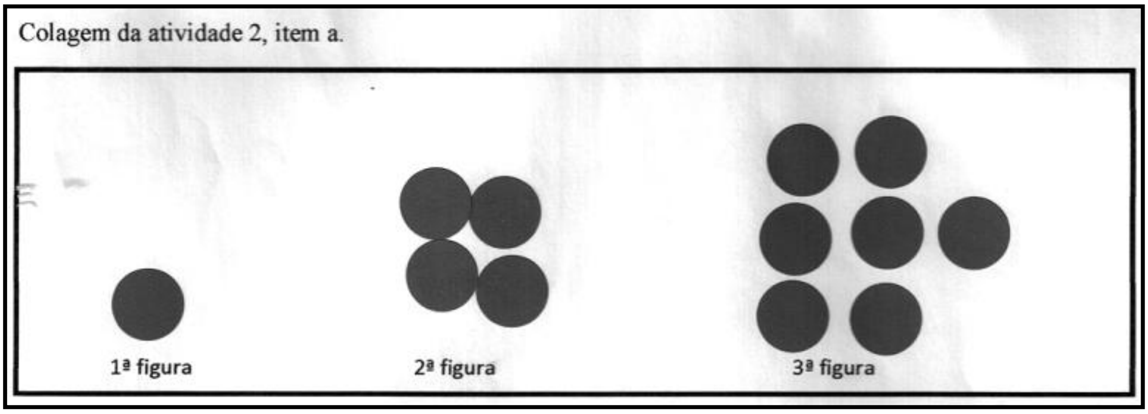
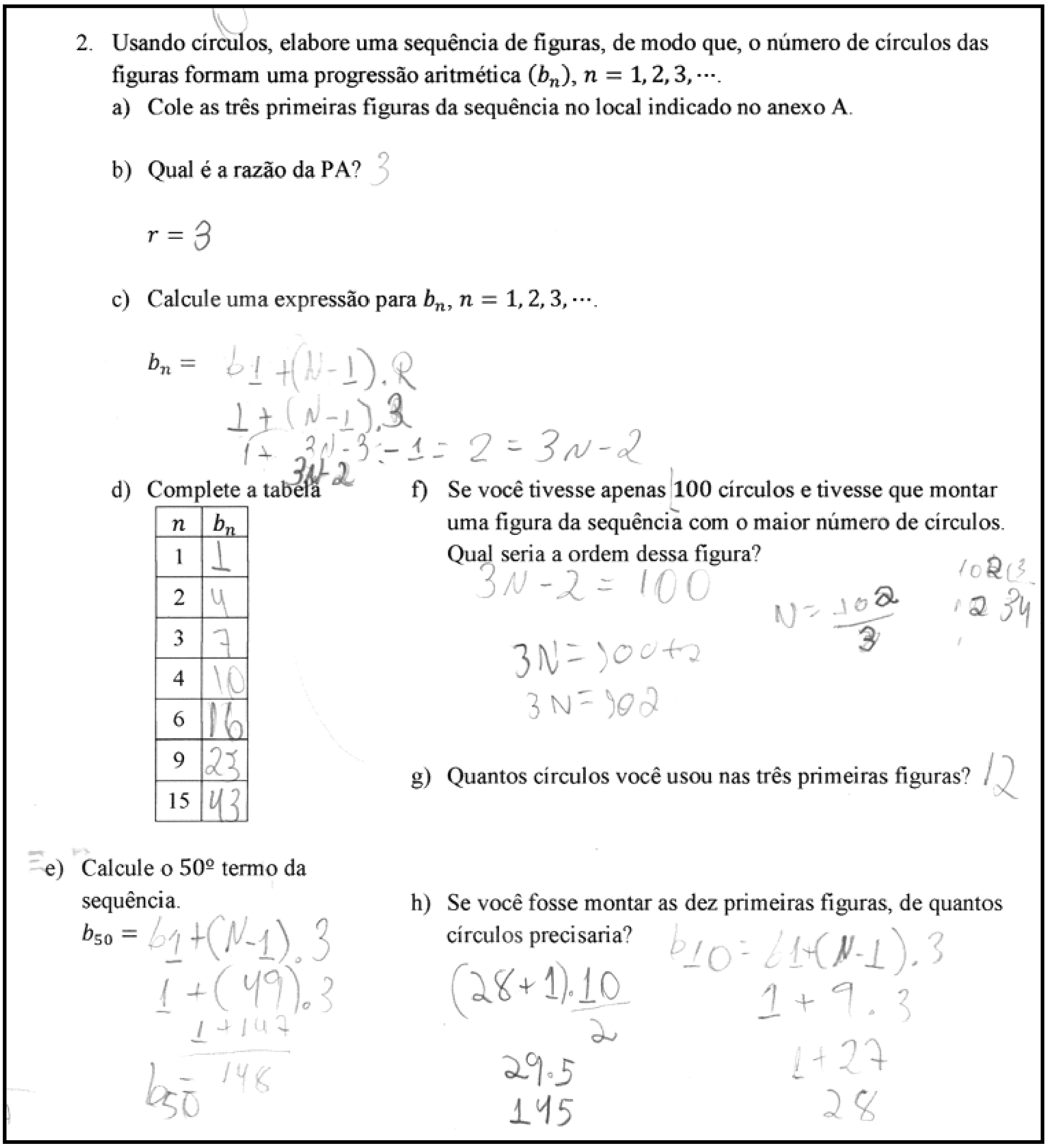


Figura 56: Colagem de um grupo da atividade (2a) - Folha 4



2. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras formam uma progressão aritmética (b_n), $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

b) Qual é a razão da PA? 3

$r = 3$

c) Calcule uma expressão para b_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

$b_n = b1 + (N-1).R$

$1 + (N-1).3$

$1 + 3N - 3 = -1 = 2 = 3N - 2$

$3N-2$

d) Complete a tabela

n	b_n
1	1
2	4
3	7
4	10
6	16
9	23
15	43

e) Calcule o 50º termo da sequência.

$b_{50} = b1 + (N-1).3$

$1 + (49).3$

$1 + 147$

$b50 = 148$

f) Se você tivesse apenas 100 círculos e tivesse que montar uma figura da sequência com o maior número de círculos. Qual seria a ordem dessa figura?

$3N - 2 = 100$

$3N = 100 + 2$

$3N = 102$

$N = \frac{102}{3}$

102 | 3

12 34

g) Quantos círculos você usou nas três primeiras figuras? 12

h) Se você fosse montar as dez primeiras figuras, de quantos círculos precisaria?

$\frac{(28+1).10}{2}$

29.5

145

$b10 = b1 + (N-1).3$

$1 + 9.3$

$1 + 27$

28

Figura 57: Resolução de um grupo (2b) ao (2h) - Folha 4

A atividade 3 era composta dos itens (a) ao (c).

O item (a) foi realizado corretamente por 11 grupos (73%) indicando que eles descobriram outros padrões, além do padrão apresentado na progressão aritmética. Os outros 4 grupos (27%) não realizaram a atividade.

O item (b) foi realizado corretamente por 4 grupos (27%), incorretamente por 3 grupos

(20%) e não realizado por 8 grupos (53%). O baixo índice de acertos nesse item indica que mais da metade dos grupos apresentaram dificuldades na descrição do padrão da sequência elaborada. O que confirma o esperado.

A atividade (c) foi realizada corretamente por 9 grupos (60%) e não realizada por 6 grupos (40%).

Em meio às 11 sequências elaboradas apareceram nove progressões geométricas, uma sequência de números triangulares iniciada em 3 e outra sequência que é mostrada a seguir como exemplo de resolução desta atividade.

A seguir temos uma foto de um dos grupos realizando esta folha de atividades. A foto nos permite observar o anexo A, que contem a colagem de uma sequência de figuras formadas por círculos que não é uma progressão aritmética– atividade (3a). Logo abaixo da foto tem a colagem desse grupo para a atividade (3a). Na sequência, as outras respostas desse grupo para a atividade 3.

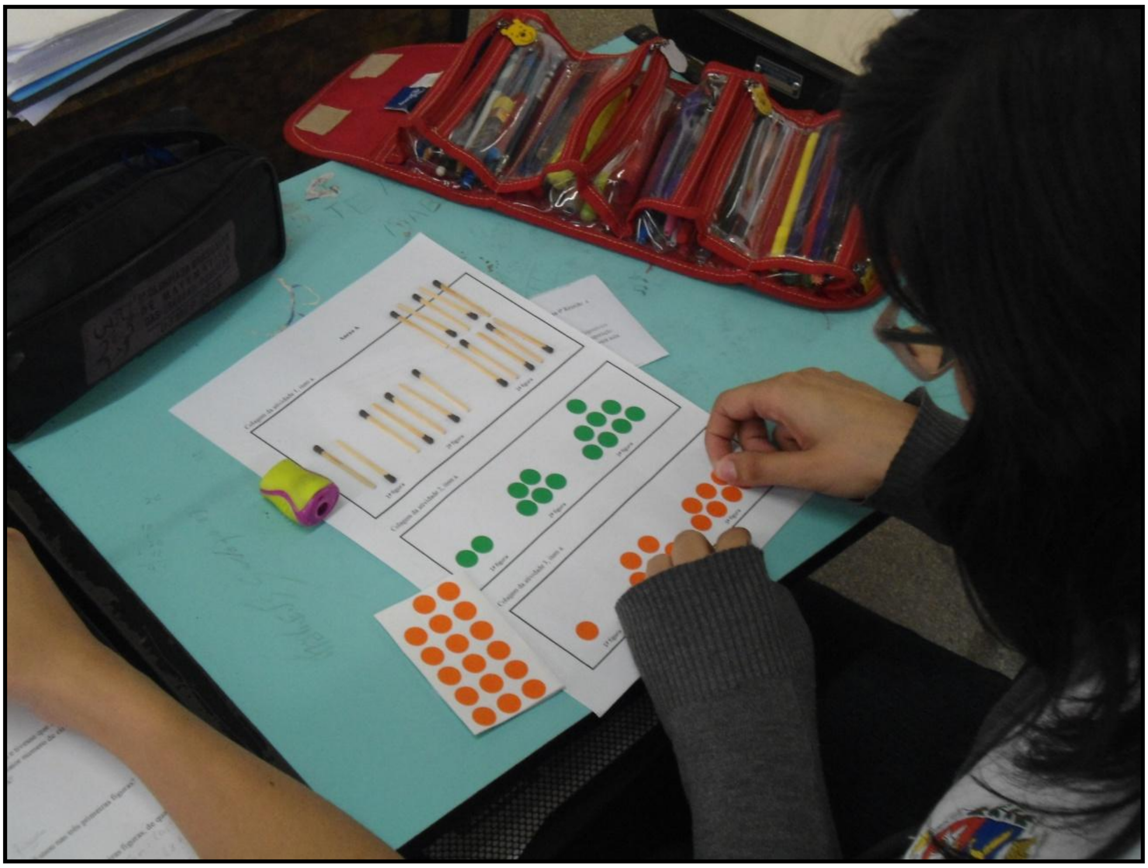


Figura 58: Grupo realizando a atividade 3 - Folha 4

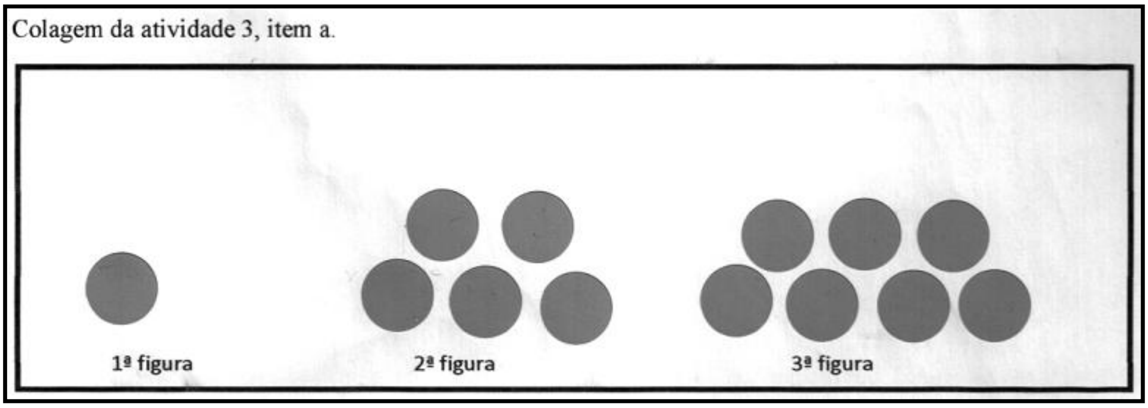
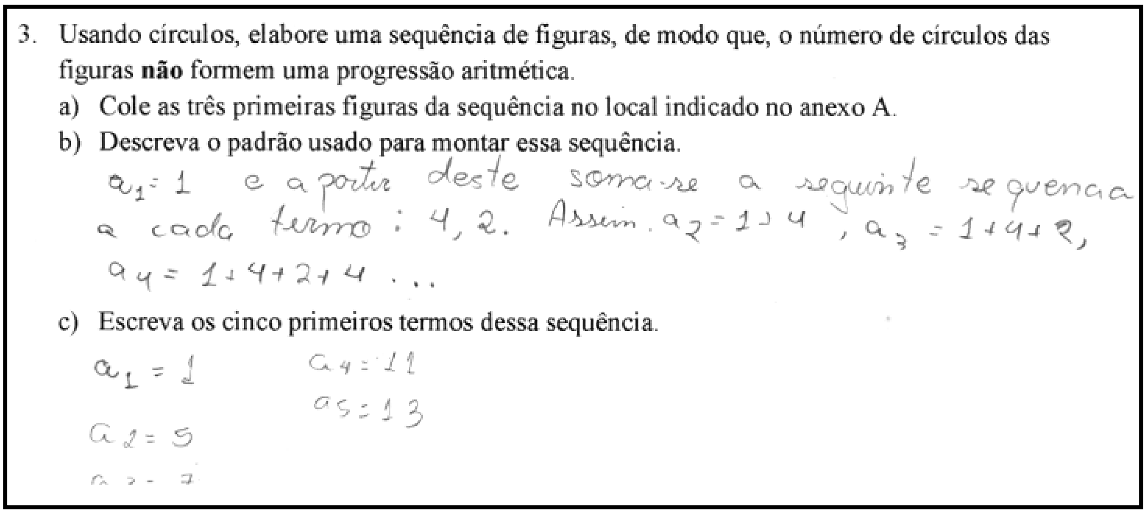


Figura 59: Colagem de um grupo da atividade (3a) - Folha 4



3. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras **não** formem uma progressão aritmética.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.
   b) Descreva o padrão usado para montar essa sequência.

   $a_1 = 1$ e a partir deste soma-se a seguinte sequencia a cada termo: 4, 2. Assim. $a_2 = 1+4$, $a_3 = 1+4+2$, $a_4 = 1+4+2+4$ . . .

   c) Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência.

   $a_1 = 1$ $a_4 = 11$
   $a_5 = 13$
   $a_2 = 5$
   $a_3 = 7$

Figura 60: Resolução de um grupo (3b) e (3c) – Folha 4

A atividade 4 era composta dos itens (a) ao (k).

É importante ressaltar que dois grupos não realizaram a atividade 4, sendo um grupo do 9º B e o outro do 9º C. Nas duas turmas, ao perceber que estes grupos não desenvolviam as atividades, o professor aplicador, considerando que os grupos tinham dificuldades, interviu e sugeriu que eles usassem os círculos de plástico para reproduzir a sequência de figuras sobre a carteira, mas ambos os grupos se recusaram em realizar a atividade. O grupo do 9º ano B justificou que estavam cansadas, pois tinham feito prova de outra matéria. O grupo do 9º ano C era formado por três meninos que estavam revoltados por algum motivo e disseram que não iam realizar a atividade.

Esse fato foi lamentável, sendo considerado pelo aplicador o ponto mais frustrante das aplicações.

Excetuando-se estes dois grupos que não a realizaram, a atividade 4 teve um alto índice de acertos.

No item (a) 13 grupos (87%) desenharam a figura corretamente e 2 grupos (13%) não realizaram.

No item (b) 13 grupos perceberam que a sequência não era uma PA, porém 11 grupos (74%) justificaram corretamente e 2 grupos (13%) erraram a justificativa. Os outros 2 grupos (13%) não realizaram.

No item (c), excetuando-se os 2 grupos (13%) que não realizaram, os outros 13 grupos (87%) realizaram corretamente.

O alto índice de acertos nesses três itens indica que, todos os 13 grupos (87%) que se propuseram a realizar a atividade, reconheceram o padrão da sequência, observaram que ela não é uma PA e entenderam a recursividade que se apresenta, conforme o esperado.

O item (d) foi realizado corretamente por 12 grupos (80%) e não realizado por 3 grupos (20%).

Os itens (e) e (f) foram realizados corretamente por 10 grupos (67%), incorretamente por 2 grupos (13%) e não realizados por 3 grupos (20%).

Como esperado, excetuando-se os 2 grupos que não as realizaram, 3 grupos (20%) não conseguiram completar corretamente as atividades (e) e (f).

Os itens (g) e (h) foram realizados corretamente por 13 grupos (87%) e não realizados por 2 grupos (13%).

O alto índice de realizações corretas nesses dois índices indica que (87%) dos grupos atingiram o objetivo proposto, determinando uma expressão para q_n.

O item (i) foi realizado corretamente por 12 grupos (80%), incorretamente por 1 grupo (7%) e não realizado por 2 grupos (13%).

Os itens (j) e (k) foram realizados corretamente por 13 grupos (87%) e não realizados por 2 grupos (13%).

Como esperado, os altos índices de acertos nesses três últimos itens indicam que no mínimo 80% dos grupos se apropriaram do conhecimento e utilizaram corretamente a generalização desenvolvida no item (h) para alguns cálculos.

4. Considere a sequência de figuras abaixo formadas por círculos.

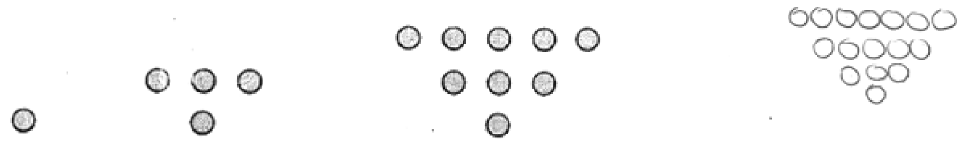


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considere a sequência (q_n), *onde* q_n *e o número de círculos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quarta figura da sequência.

b) (q_n) é uma progressão aritmética? Justifique. Não, o aumento é desigual

c) Complete a tabela abaixo, sabendo que $\Delta_n = q_{n+1} - q_n$.

n	q_n	$q_{n+1} - q_n$	Δ_n
1	1	$q_2 - q_1 = 4 - 1$	3
2	4	$q_3 - q_2 = 9 - 4$	5
3	9	$q_4 - q_3 = 16 - 9$	7
4	16	$q_5 - q_4 = 25 - 16$	9
5	25	$q_6 - q_5 = 36 - 25$	11
6	36	$q_7 - q_6 = 49 - 36$	13

d) Leonardo fez essa atividade e percebeu um padrão. Por exemplo, para calcular o número de círculos da 7ª figura, escrevia:

$$q_7 = q_6 + \underbrace{2 \cdot (7) - 1}_{7^{\circ}\ ímpar} = 36 + 13 = 49$$

Seguindo esse padrão, calcule:

➔ $q_8 = q_8 = q_7 + 2.(8) - 1 = 49 + 15 = 64$

➔ $q_9 = q_9 = q_8 + 2.(9) - 1 = 64 + 17 = 81$

e) Sabendo que $q_{15} = 225$, calcule q_{16}.

➔ $q_{16} = q_{15} = 2.(16) - 1 = 225 + 31 = 256$

f) Complete: $q_n = q_{n-1} + \underline{2.n-1}$

g) Complete:

$q_1 = 1$

$q_2 = q_1 + 2 \cdot (2) - 1 = 1 + 3 = 4 = \mathbf{2^2}$

$q_3 = q_2 + 2 \cdot (3) - 1 = 1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3^2}$

$q_4 = q_3 + 2 \cdot (\underline{4}) - 1 = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5} + \underline{7} = \underline{16} = \underline{4}^2$

$q_5 = q_4 + 2 \cdot (\underline{5}) - 1 = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5} + \underline{7} + \underline{9} = \underline{25} = \underline{5}^2$

h) Seguindo o raciocínio anterior:

$q_n = q_{n-1} + 2 \cdot (\underline{n}) - 1 = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5} + \cdots + \underline{2n-1} = \underline{n}^2$

i) Usando o resultado acima, calcule:

➔ $q_{20} = 20^2$ 20 × 20 = 400

➔ $q_{32} = 32^2$ 32 × 32 = 64 + 960 = 1024

j) Qual termo da sequência é formado por 196 círculos?

14

Figura 61: Resolução de aluno (4a) a (4j) – Folha 4

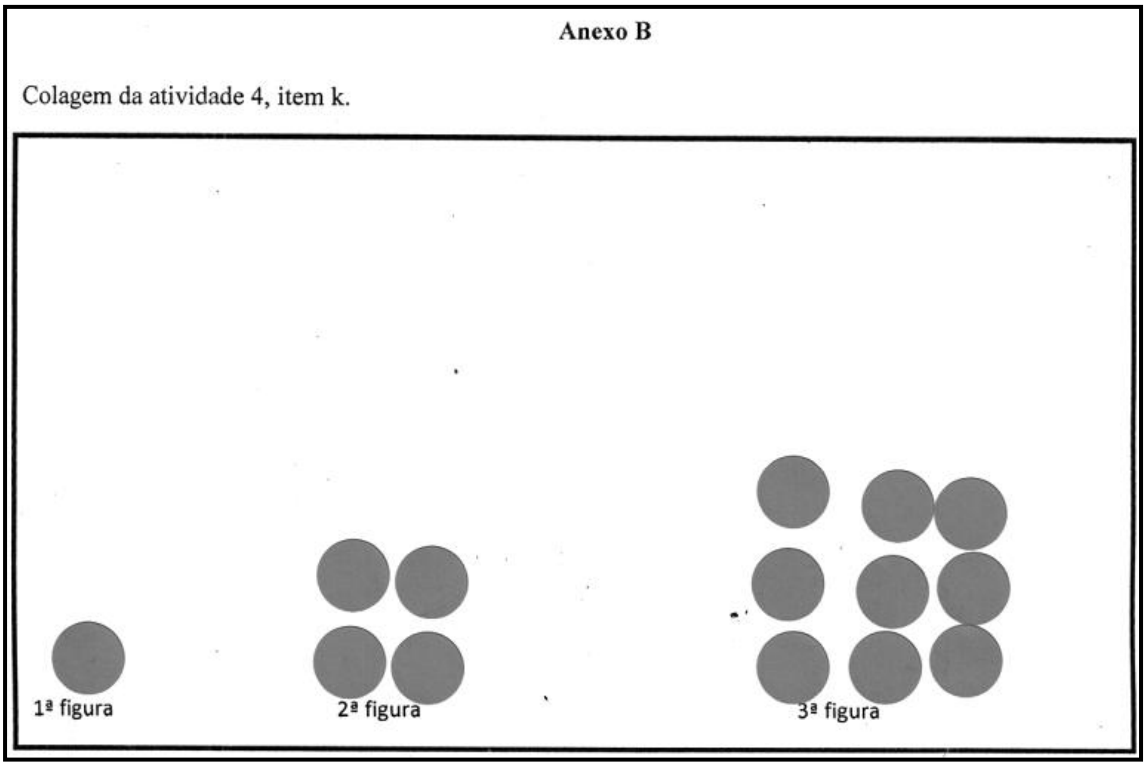


Figura 62: Colagem de um grupo da atividade (4k) - Folha 4

Em relação à avaliação dos alunos, essa folha de atividades constou como avaliação Contínua de Álgebra do 4º bimestre. Para a quantificação do desempenho dos grupos foram atribuídas pontuações diferentes para cada uma das atividades.

À atividade 1 foi atribuída uma pontuação de que varia de zero a dois, à atividade 2 foi atribuída uma pontuação de zero a três, à atividade 3 foi atribuída de zero a um e na atividade 4 de zero a quatro. Todas as variações de pontuações referentes a essas atividades dependem da avaliação do professor em relação a cada atividade realizada.

Desse modo, o somatório das pontuações das quatro atividades perfaz um total que pode variar de zero a dez. Esse total é a nota do grupo para essa folha de atividades.

Desse modo, 2 grupos (13%) foram avaliados com nota inferior a 6,0 e 13 grupos (87%) foram avaliados com nota igual ou superior a 6,0.

CONCLUSÃO

Observamos através das análises dos resultados obtidos pelos alunos nas folhas de atividades 1 e 3 e na análise dos resultados obtidos pelos grupos na folha de atividades 4, que as sequências didáticas atingiram o objetivo esperado.

As sequências didáticas elaboradas em formato de folhas de atividades constituem um produto de ensino bastante eficiente para o professor que deseja promover um aprendizado significativo.

Acreditamos que as folhas de atividades foram adequadas para as duas turmas e se mostraram um veículo interessante para o uso em sala de aula, pois se observou na experimentação que os estudantes mostraram-se bem interessados nas aulas e satisfeitos por conseguirem realizar as atividades propostas nas folhas de atividades.

Acreditamos ainda que os alunos demonstraram grande interesse nas discussões e reflexões da aula expositiva devido à motivação despertada pelos desafios propostos na primeira folha de atividades.

Sendo assim, entendermos que a aula expositiva funcionou bem porque os alunos foram desafiados, num primeiro momento, na folha de atividades 1. O que garantiu um grande envolvimento dos alunos e contribuiu para o aprendizado deles acerca das progressões aritmética.

Um indicativo de que os alunos se envolveram e aprenderam com a aula expositiva foi o bom desempenho deles nas folhas de atividades 3 e 4 que foram experimentadas na sequência.

A decisão de realizar as folhas de atividades em grupos de dois ou três foi acertada, pois os alunos puderam discutir com os colegas de grupo as melhores estratégias e, assim elaborarem suas próprias resoluções. Na experimentação era visível, nas duas turmas, a satisfação dos alunos na realização das atividades sozinhos, com quase nenhuma intervenção do professor.

Em ambas as turmas que realizaram a experimentação, a intervenção do professor aplicador foi mínima. Para não dizer que foi quase insignificante, aconteceram duas intervenções na primeira folha de atividades, porém tais intervenções já estavam previstas desde a elaboração dessa folha de atividades, como foi descrito.

As respostas dadas pelos alunos às folhas de atividades são materiais valiosos para o professor, de modo que, nesse trabalho, elas permitiram com que o autor e professor destas turmas fizesse a avaliação da aprendizagem dos alunos que participaram da realização dessas folhas de atividades, forneceram um diagnóstico das fragilidades das turmas e apontaram as dificuldades de cada aluno.

Nesse sentido, esse trabalho também contribuiu para uma reorientação no desenvolvimento das atividades de recuperação dessas e de outras turmas.

As aulas após a aplicação da quarta folha de atividades foram aulas de recuperação final para os alunos com baixo rendimento escolar durante o ano letivo. Nessas aulas foram feitos os comentários sobre as respostas dadas pelos alunos nas folhas de atividades, bem como as devidas correções e apresentações das respostas esperadas.

As sequências didáticas propostas mostraram-se claras e bem compreensíveis, pois durante a experimentação, a quantidade de alunos que apresentaram dúvidas quanto ao entendimento do que se pedia nas folhas de atividades foi pouco significativa.

Embora vários alunos não tenham conseguido realizar no tempo estipulado todas as atividades propostas nas folhas de atividades 1 e 3, o autor decidiu não modificar nenhuma questão das folhas de atividades por observar, durante a aplicação das mesmas, o fácil entendimento dos alunos face às atividades apresentadas.

As únicas alterações ocorridas nas folhas de atividades foram: uma correção ortográfica na folha 1 e uma correção de notação na folha 3.

O material teórico para a aula expositiva teve alteração na parte que versa sobre a soma da PA e na dedução da mesma.

Devido às pequenas alterações, foi inserido no trabalho o **Apêndice B – Folhas de Atividades Alteradas.**

Nesse sentido, este produto de ensino não é um material acabado, isento de arestas, e sim aceita várias modificações. Isso não impede que outros professores, interessados em desenvolver as progressões aritméticas através do reconhecimento e generalização de padrão, façam alterações e adaptem esse material para a realidade suas turmas.

O produto de ensino elaborado funcionou muito bem para essas turmas de 9º ano embora o tempo estipulado para a realização de todas as questões em cada uma das duas primeiras folhas de atividades foi insuficiente para vários alunos das duas turmas.

É importante ressaltar também que, nas folhas de atividades 3 e 4, as atividades foram apresentadas aos alunos com as devidas notações e terminologias, diferentemente da folha de atividades 1. Era esperado que os alunos apresentassem pequenas dificuldades nas notações referentes às sequências e aos seus termos, no entanto isso não foi empecilho para os alunos na realização dessas folhas de atividades. Acredita-se que essa foi uma contribuição da aula expositiva, assim como as discussões acerca das progressões aritméticas e reflexões feitas na aula expositiva em relação à primeira folha de atividades.

As folhas de atividades, elaboradas nesse trabalho, são materiais de ensino pouco veiculados nas escolas brasileiras de Ensino Fundamental, nível de ensino a que foram destinadas. Essas atividades mostraram-se bastante positivas em vários sentidos:

- ✓ Reduz a quantidade de aulas expositivas, nas quais o professor mostra como se faz;
- ✓ Permite que o professor enxergue melhor os pontos de fragilidade das turmas;
- ✓ Desenvolve a autoconfiança e melhora a autoestima do aluno, pois o torna protagonista na construção do próprio conhecimento;
- ✓ Desenvolve a autonomia do aluno e melhora a capacidade de tomar decisões.
- ✓ As sequências didáticas levam os alunos, gradualmente, as generalizações partindo do mais elementar para o mais sofisticado.
- ✓ Promove a discussão e a socialização nas tomadas de decisões quando realizadas em grupos.

O assunto estudado pelos alunos, raramente desenvolvido pelos livros didáticos de Ensino Fundamental, progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões, foi importante no desenvolvimento de competências matemáticas, tais como a aptidão para raciocinar matematicamente, explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica.

Guiado pelas ideias da Engenharia Didática, o autor pôde organizar este trabalho de maneira mais objetiva e com melhor adaptação às turmas nas quais ocorreram as experimentações. O problema didático levantado nas análises prévias apontou a elaboração das atividades em formato de folhas de atividades, que culminaram na produção desse trabalho e foram bem aceitas pelos alunos de ambas as turmas.

O material de ensino também permite que alunos do Ensino fundamental aprendam, de forma simples e gradual, conceitos de recursividade através das progressões aritméticas e dos números figurados.

A avaliação do trabalho mostra-se positiva, entendendo-se que atingiu o objetivo de elaborar um produto de ensino diferenciado que levasse o aluno, através da ação investigativa, a reconhecer e entender o processo de recursividade que há nas progressões aritméticas, generalizar esses padrões, desenvolver o raciocínio recursivo e aplicar esses conceitos em diversas situações, bem como em outros tipos de padrões como aqueles encontrados em sequências de Números Figurados, testando conjecturas e aprendendo a utilizar notações mais sofisticadas através do estudo de sequências.

O produto de ensino permite afirmar que é possível que alunos do 9º ano do ensino fundamental se apropriem plenamente dos conceitos acerca das progressões aritméticas quando desenvolvidos através do reconhecimento de padrões e através do uso de folhas de atividades, mostrando que tais procedimentos didáticos são bastante eficazes quanto à compreensão e consequentemente ao aprendizado dos estudantes do Ensino Fundamental.

Este trabalho contribuiu enormemente ao autor, trazendo uma grande evolução profissional que se iniciou na escolha do tema, permeou pela decisão sobre a metodologia adotada, pelas leituras de artigos e dissertações, pela elaboração da sequência didática e pela aplicação das folhas de atividades e terminou pela reflexão sobre o que foi feito e se encontra registrado aqui.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica.** Lisboa. Ministério da Educação/Departamento de Educação Básica, 1999, p. 98. Disponível em http://www.researchgate.net/publication/263807597_A_Matemtica_na_Educao_Bsica

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões.** 2008. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 89 p. Disponível em http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/13/TDE-2008-08-20T12:45:59Z-6248/Publico/Sebastiao%20Archilia.pdf

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

CARMO, P. F. do. **A generalização de padrões nos livros didáticos do ensino fundamental – Uma análise do desenvolvimento do pensamento algébrico.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba – Paraná, 2013. 10 p. Disponível em http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/265_1344_ID.pdf

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática.** Zetetike. Campinas-SP. UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118. Disponível em www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2458.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O. **Matemática Discreta.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT). Em preparação.

CHICONELLO, L. A. **Números Figurados e as Sequências Recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional) – UFSCar, São Carlos. 86 p.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações.** São Paulo-SP: Ática, 2010, p. 292-335.

LIMA, E. L. et. al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2006. 65p. (Coleção Professor de Matemática).

MACHADO, S. D. A.. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução.** 3ª ed. São Paulo: [s.n.], 2008. Capítulo: Engenharia Didática. 233-247 p. ISBN 978-85-283-0373-5.

MILLER, W. A. **Polygonal Numbers and Recursion**. Mathematics Teacher. Mount Pleasant, vol. 83, nº 7, p. 555-562, 1990.

MODANES, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico.** 2003. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT). Em preparação.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT). Em preparação.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática. São Paulo: SEE/SP, 2014.

SÃO PAULO. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo**: Caderno do Professor – Matemática/Ensino Médio – 1º ano – Volume 1. São Paulo: SEE/SP, 2014.

ZAGO, L. de A. **Números Figurados.** 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. UFSCar. São Carlos-SP.

Site http://www.pucsp.br/pesquisa-seleta-2011/projetos/357.php. Acesso em: 21 julho 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FOLHAS DE ATIVIDADES APLICADAS NA ESCOLA

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra ***9º ano*** _______

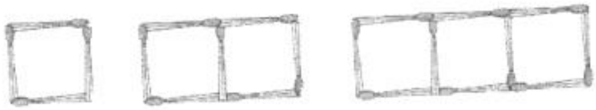
Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 1 – Sequências

Uma atividade sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões

Observe a sequência de figuras abaixo construída com palitos de fósforo.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura 5ª figura

Primeira Parte

1. Desenhe acima, a quarta figura e a quinta figura da sequência.
2. Complete a tabela abaixo.

Figura	Nº de quadrados	Nº de palitos
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		
7ª		

3. Você percebeu algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.

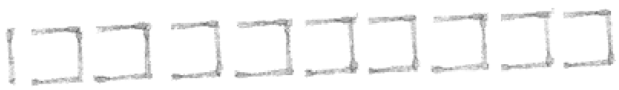
4. Qual é a diferença no número de palitos entre duas figuras consecutivas?

5. Qual é a diferença no número de palitos entre a 3ª figura e a 1ª figura?

6. Qual é a diferença no número de palitos entre a 7ª figura e a 1ª figura?

7. Qual é a diferença no número de palitos entre a 50ª figura e a 1ª figura?

8. Nicole fez essa atividade e percebeu um padrão para calcular o nº de palitos de uma figura qualquer. Por exemplo, para calcular o número de palitos da 9ª figura, ela escrevia:



$$1+3+3+3+3+3+3+3+3+3=1+9\cdot 3=1+27=28$$

Calcule o número de palitos usados para montar a:

a) 16ª figura. b) 30ª figura. c) 67ª figura. d) 100ª figura.

9. Escreva uma expressão algébrica que representa a quantidade de palitos usados para construir a figura de ordem n, $n=1,2,3,\cdots$; isto é, a n^a figura.

10. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 1° grau. Use-o para determinar em qual figura foram usados 178 palitos.

11. Para construir uma figura da sequência, foram usados 382 palitos. Qual é a ordem dessa figura?

Segunda Parte

12. Quantos quadrados foram construídos nas 8 primeiras figuras?

13. Quantos palitos foram usados para construir as 8 primeiras figuras?

14. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de quadrados construídos nas 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de quadrados construídos nas 100 primeiras figuras da sequência.

15. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de quadrados construídos nas n primeiras figuras, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

16. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram construídos 78 quadrados?

17. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de palitos usados na construção das 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de palitos usados na construção das 100 primeiras figuras da sequência.

18. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de palitos usados na construção das n primeiras figuras da sequência, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

19. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram usados 175 palitos?

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra *9º ano* _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Aula Expositiva – Sequências e Progressões Aritméticas (PA)

Sequências

Quando queremos determinar certos elementos de um conjunto, podemos ordenar esses elementos seguindo um determinado padrão. Dizemos que esse conjunto corresponde a uma ***sequência*** ou ***sucessão*** quando conseguimos associar cada número natural a um único elemento desse conjunto. Elementos de uma ***sequência*** podem ser de vários tipos. Veja alguns exemplos:

- A escalacão de um time de futebol escrita em ordem alfabética: (Deola, Kleber, Marcio, Marcos, Valdívia,...,Victor).
- Sequência dos números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)
- A sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)
- A sequência de números pares positivos: (2, 4, 6, 8, 10, ...)

Cada elemento da sequência ou sucessão é denominado **termo**. Na sequência dos números pares **(2, 4, 6, 8, 10, ...)**, por exemplo, **2** é o primeiro termo, **4** é o segundo termo, **6** é o terceiro termo e assim por diante. De um modo geral, a representação dos termos de uma sequência é dada por uma letra e um índice que indica a posição do termo na sequência.

O **primeiro termo** da sequência, pode aparecer indicado como $\boldsymbol{a_1}$, o **segundo termo** por $\boldsymbol{a_2}$, o **terceiro termo** por $\boldsymbol{a_3}$ e assim sucessivamente. Além disso, indicamos também o **n-ésimo** termo da sequência por $\boldsymbol{a_n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. O elemento $\boldsymbol{a_n}$ (**termo geral**) pode representar qualquer termo da sequência.

Assim, na sequência dos números pares positivos **(2, 4, 6, 8, 10, ...)**, temos:

$\boldsymbol{a_1 = 2}$, $\boldsymbol{a_2 = 4}$, $\boldsymbol{a_3 = 6}$, e assim por diante. E o **termo geral** é $\boldsymbol{a_n = 2n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Definição de Sequência

Uma *sequência* de números reais é uma função (relação) $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um único número real $a_n = a(n)$, chamado n-ésimo termo da sequência.

Denotaremos por $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$, ou por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente por (a_n), a sequência $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Progressões Aritméticas (PA)

As progressões aritméticas (PA) constituem-se de sequências definidas recorrentemente. Elas são comuns na vida real por aparecerem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização de um bem ao longo do tempo. Para fixar idéias, consideremos o exemplo abaixo:

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos a fábrica produziu em junho?

Solução: Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são:

Janeiro	Fevereiro	Marco	Abril	Maio	Junho
400	430	460	490	520	550

Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta $5 \times 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo (constante). A sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550, . . .) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão da progressão. A razão da progressão acima é igual a 30.

Definição de Progressão Aritmética (PA)

Uma *progressão aritmética* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos. Desse modo, podemos determinar o termo geral de uma PA conhecendo a_1 e r:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

Por exemplo, a sequência (5, 8, 11, 14, . . .) é uma progressão aritmética de razão $r = 3$. Como o primeiro termo é $a_1 = 5$, podemos calcular, por exemplo, o sétimo termo, o vigésimo termo e o termo geral fazendo:

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r \quad \Leftrightarrow a_7 = 5 + 6 \cdot 3 \quad \Leftrightarrow a_7 = 5 + 18 \quad \Leftrightarrow a_7 = 23$$

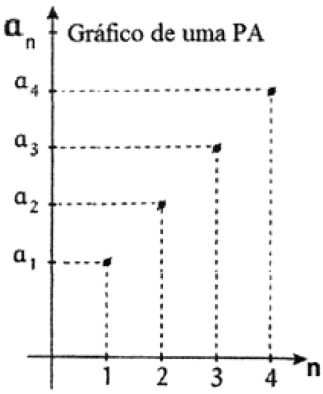
$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r \quad \Leftrightarrow a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 \quad \Leftrightarrow a_{20} = 5 + 57 \quad \Leftrightarrow a_{20} = 62$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad \Leftrightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 \quad \Leftrightarrow a_n = 5 + 3n - 3 \quad \Leftrightarrow a_n = 3n + 2$$

Em uma PA, o termo geral é dado por um polinômio em n, pois

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1 e a PA é de primeira ordem. Sendo a PA uma função $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.



Em outras palavras, (a_n) é uma PA se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$ $(3, a_3)$, etc. estão em linha reta.

Soma dos Termos de uma PA

Na folha de Atividades 1 uma das atividades era discutir com seus colegas e elaborar uma estratégia para calcular a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$. Vários alunos resolveram:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100}_{100} = \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101}_{50} = 50 \times 101 = 5050$$

Baseado nessa estratégia, podemos calcular a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{n} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots}_{\frac{n}{2}}$$

Observe que ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Como são $\frac{n}{2}$ parênteses, temos:

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Por exemplo, na PA (5, 8, 11, 14, . . .) a razão é $r = 3$ e o primeiro termo é $a_1 = 5$. Para somar os 30 primeiros termos dela, primeiro calculamos a_{30} e depois calculamos S_{30}.

$$a_{30} = a_1 + (30-1)r$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = a_1 + 29r$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 5 + 29 \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 5 + 87$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 92$$

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{(5 + 92) \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{97 \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = 97 \cdot 15$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = 1455$$

Observe que S_n também pode ser escrito:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = [a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot \frac{n}{2} = [2a_1 + nr - r] \cdot \frac{n}{2} = \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n + \frac{r}{2}n^2$$

Portanto, se $r \neq 0$ (a PA for não estacionária), então S_n é um polinômio do segundo grau em n.

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra ***9º ano*** _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 3 – Progressões Aritméticas e Números Figurados

1. Observe a sequência de figuras abaixo formadas por pontos da malha quadriculada pontilha.

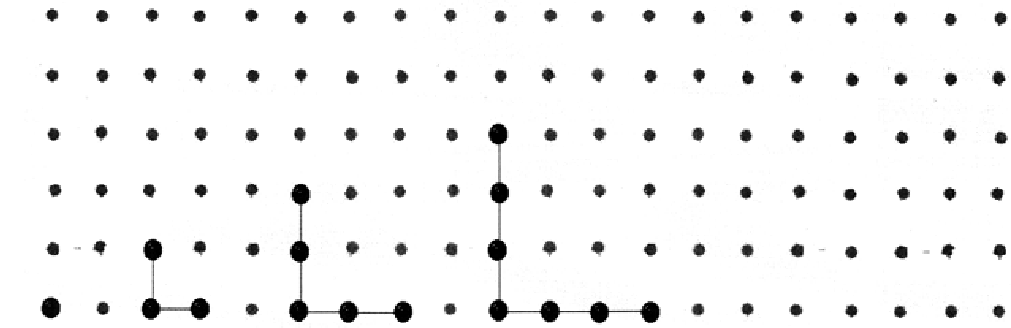


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Os gregos chamavam os elementos dessa sequência de *números gnômons*.

Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de pontos da figura n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quinta figura da sequência.

b) (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

c) Escreva a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ e o nome do conjunto formado pelos elementos dela.

d) Calcule:

➔ O 11º termo da sequência: $a_{11} =$

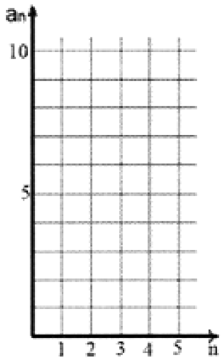
➔ O 50º termo da sequência: $a_{50} =$

➔ O termo geral da sequência, isto é, a_n, $n \in \mathbb{N}$: $a_n =$

e) Qual *número gnômon é formado por* 371 pontos?

f) Complete a tabela e faça o gráfico de (a_n).

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	



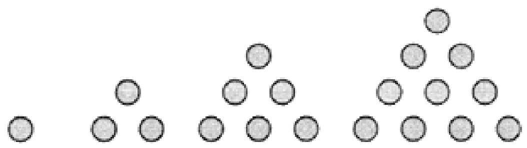
g) Calcule a soma dos 50 primeiros *números gnômons.*

h) Mostre que a soma dos n primeiros *números gnômons* é um quadrado perfeito.

Números Figurados

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos dispostos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos, tais números e suas disposições geométricas são ricos em propriedades e representam um elo entre a geometria e a álgebra. Na questão seguinte, exploraremos os *Números Poligonais Triangulares.*

2. Considere a sequência (T_n) dos *Números Triangulares* representados abaixo.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

$T_5 =$

a) Desenhe acima o 5° número triangular e preencha o quadrinho.

b) Compele a tabela abaixo, onde $\Delta_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 2$

n	1	2	3	4	5	6
T_n						
Δ						

c) Sabendo que $T_{10} = 55$, calcule:

➔ $T_{11} =$

➔ $T_{12} =$

d) Complete:

➔$T_n = T_{n-1} +$_______

e) Complete:

$T_1 = 1$

$T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1 + 2}_{T_2} + 3 = 6$

$T_4 = T_3 +$ ___ $= \underbrace{\qquad\qquad}_{T_3} +$ ___

$T_5 = T_4 +$ ___ $= + \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{T_4} +$ ___

f) Seguindo o raciocínio do item anterior:
$T_n =$ ____ $+$ ____ $+$ ____ $+$ ____ $+ \cdots +$ ____

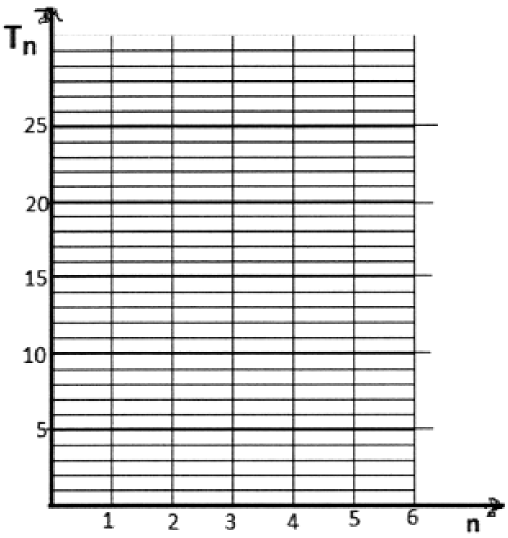
g) Escreva uma expressão para a soma acima:
$T_n =$

h) Calcule T_{30}, isto é, o 30º número triangular.

i) Calcule T_{145}, isto é, o 145º número triangular.

j) Complete a tabela e represente o gráfico de T_n.

n	T_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	



k) O número $T_n = 153$ ocupa que posição na sequência dos números triangulares?

l) Carlos trabalha num supermercado repondo os produtos nas gôndolas. Seu chefe pediu que empilhasse 3 dúzias de latinhas de ervilha em formato de número triangular. Terminado o empilhamento, qual era a altura da pilha feita por Carlos?

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra ***9º ano*** _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Nome: ____, **nº:** ________

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 4 –

Sequências, Progressões Aritméticas (PA) e Números Figurados

1. Usando palitos de fósforo, elabore uma sequência de figuras.

   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   Considere a sequência (a_n), *onde* a_n *é o número de palitos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$

   b) Descreva o padrão usado para montar a sequência (a_n).

   c) A sequência (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

   d) Caso (a_n) seja uma progressão aritmética, faça o que se pede na **coluna 1**. Caso contrário, faça o que se pede na **coluna 2**.

Coluna 1

Calcule:

➔ A razão. $r =$

➔ O 5º termo. $a_5 =$

➔ O enésimo termo a_n, $n \in \mathbb{N}$

$a_n =$

Coluna 2

Complete a tabela:

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	

2. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras forme uma progressão aritmética (b_n), $n = 1, 2, 3, \cdots$.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   b) Qual é a razão da PA?

      $r =$

   c) Calcule uma expressão para b_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

      $b_n =$

   d) Complete a tabela

n	b_n
1	
2	
3	
4	
6	
9	
15	

   e) Calcule o 50º termo da sequência.
      $b_{50} =$

   f) Se você tivesse apenas 100 círculos e tivesse que montar uma figura da sequência com o maior número de círculos. Qual seria a ordem dessa figura?

   g) Quantos círculos você usou nas três primeiras figuras?

   h) Se você fosse montar as dez primeiras figuras, de quantos círculos precisaria?

3. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras **não** formem uma progressão aritmética.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.
   b) Descreva o padrão usado para montar essa sequência.

   c) Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência.

4. Considere a sequência de figuras abaixo formadas por círculos.

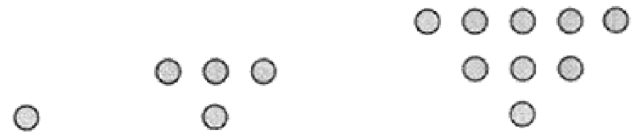


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considere a sequência (q_n), *onde* q_n *e o número de círculos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quarta figura da sequência.

b) (q_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

c) Complete a tabela abaixo, sabendo que $\Delta_n = q_{n+1} - q_n$.

n	q_n	$q_{n+1} - q_n$	Δ_n
1	1	$q_2 - q_1 = 4 - 1$	3
2	4	$q_3 - q_2 = 9 - 4$	5
3	9		
4			
5			
6			

d) Leonardo fez essa atividade e percebeu um padrão. Por exemplo, para calcular o número de círculos da 7ª figura, escrevia:

$$q_7 = q_6 + \underbrace{2 \cdot (7) - 1}_{7^{\underline{o}}\ ímpar} = 36 + 13 = 49$$

Seguindo esse padrão, calcule:

➔ $q_8 =$

➔ $q_9 =$

e) Sabendo que $q_{15} = 225$, calcule q_{16}.

➔ $q_{16} =$

f) Complete: $q_n = q_{n-1} + \_\_\_\_\_\_$

g) Complete:

$q_1 = 1$

$q_2 = q_1 + 2 \cdot (\,\mathbf{2}\,) - 1 = 1 + 3 = 4 = \mathbf{2}^2$

$q_3 = q_2 + 2 \cdot (\,\mathbf{3}\,) - 1 = 1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3}^2$

$q_4 = q_3 + 2 \cdot (\_\_) - 1 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_^2$

$q_5 = q_4 + 2 \cdot (\_\_) - 1 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_^2$

h) Seguindo o raciocínio anterior:

$q_n = q_{n-1} + 2 \cdot (\_\_) - 1 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \cdots + \_\_\_ = \_\_\_^2$

i) Usando o resultado acima, calcule:

➔ $q_{20} =$

➔ $q_{32} =$

j) Qual termo da sequência é formado por 196 círculos?

k) Usando círculos, monte as 3 primeiras figuras da sequência, colando no anexo B, de forma que em cada uma das figuras os pontos estejam em disposição quadrada.

Anexo A

Colagem da atividade 1, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Colagem da atividade 2, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Colagem da atividade 3, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Anexo B

Colagem da atividade 4, item k.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

APÊNDICE B – FOLHAS DE ATIVIDADES ALTERADAS

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra *9º ano* ______

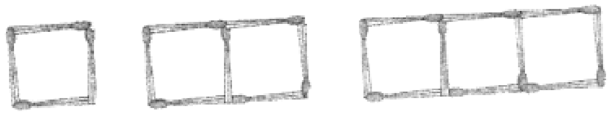
Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 1 – Sequências

Atividades sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões

Observe a sequência de figuras abaixo construída com palitos de fósforo.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura 5ª figura

Primeira Parte

1. Desenhe acima, a quarta figura e a quinta figura da sequência.
2. Complete a tabela abaixo.

Figura	Nº de quadrados	Nº de palitos
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		
7ª		

3. Você percebeu algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.

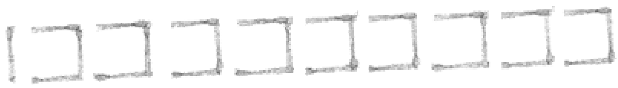
4. Qual é a diferença no número de palitos entre duas figuras consecutivas?

5. Qual é a diferença no número de palitos entre a 3ª figura e a 1ª figura?

6. Qual é a diferença no número de palitos entre a 7ª figura e a 1ª figura?

7. Qual é a diferença no número de palitos entre a 50ª figura e a 1ª figura?

8. Nicole fez essa atividade e percebeu um padrão para calcular o nº de palitos de uma figura qualquer. Por exemplo, para calcular o número de palitos da 9ª figura, ela escrevia:



$$1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 9 \cdot 3 = 1 + 27 = 28$$

Calcule o número de palitos usados para montar a:

a) 16ª figura. b) 30ª figura. c) 67ª figura. d) 100ª figura.

9. Escreva uma expressão algébrica que representa a quantidade de palitos usados para construir a figura de ordem n, $n = 1, 2, 3, \cdots$; isto é, a n^a figura.

10. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 1º grau. Use-o para determinar em qual figura foram usados 178 palitos.

11. Para construir uma figura da sequência, foram usados 382 palitos. Qual é a ordem dessa figura?

Segunda Parte

12. Quantos quadrados foram construídos nas 8 primeiras figuras?

13. Quantos palitos foram usados para construir as 8 primeiras figuras?

14. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de quadrados construídos nas 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de quadrados construídos nas 100 primeiras figuras da sequência.

15. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de quadrados construídos nas n primeiras figuras, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

16. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram construídos 78 quadrados?

17. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de palitos usados na construção das 30 primeiras figuras da sequência.

b) O número de palitos usados na construção das 100 primeiras figuras da sequência.

18. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de palitos usados na construção das n primeiras figuras da sequência, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

19. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram usados 175 palitos?

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra *9º ano* _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Aula Expositiva – Sequências e Progressões Aritméticas (PA)

Sequências

Quando queremos determinar certos elementos de um conjunto, podemos ordenar esses elementos seguindo um determinado padrão. Dizemos que esse conjunto corresponde a uma ***sequência*** ou ***sucessão*** quando conseguimos associar cada número natural a um único elemento desse conjunto. Elementos de uma ***sequência*** podem ser de vários tipos. Veja alguns exemplos:

- A escalacão de um time de futebol escrita em ordem alfabética: (Deola, Kleber, Marcio, Marcos, Valdívia,...,Victor).
- Sequência dos números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)
- A sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)
- A sequência de números pares positivos: (2, 4, 6, 8, 10, ...)

Cada elemento da sequência ou sucessão é denominado **termo**. Na sequência dos números pares **(2, 4, 6, 8, 10, ...)**, por exemplo, **2** é o primeiro termo, **4** é o segundo termo, **6** é o terceiro termo e assim por diante. De um modo geral, a representação dos termos de uma sequência é dada por uma letra e um índice que indica a posição do termo na sequência.

O **primeiro termo** da sequência, pode aparecer indicado como $\boldsymbol{a_1}$, o **segundo termo** por $\boldsymbol{a_2}$, o **terceiro termo** por $\boldsymbol{a_3}$ e assim sucessivamente. Além disso, indicamos também o **n-ésimo** termo da sequência por $\boldsymbol{a_n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. O elemento $\boldsymbol{a_n}$ (**termo geral**) pode representar qualquer termo da sequência.

Assim, na sequência dos números pares positivos **(2, 4, 6, 8, 10, ...)**, temos:

$\boldsymbol{a_1 = 2}$, $\boldsymbol{a_2 = 4}$, $\boldsymbol{a_3 = 6}$, e assim por diante. E o **termo geral** é $\boldsymbol{a_n = 2n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Definição de Sequência

Uma *sequência* de números reais é uma função (relação) $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um único número real $a_n = a(n)$, chamado n-ésimo termo da sequência.

Denotaremos por $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$, ou por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente por (a_n), a sequência $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Progressões Aritméticas (PA)

As progressões aritméticas (PA) constituem-se de sequências definidas recorrentemente. Elas são comuns na vida real por aparecerem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização de um bem ao longo do tempo. Para fixar idéias, consideremos o exemplo abaixo:

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos a fábrica produziu em junho?

Solução: Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são:

Janeiro	Fevereiro	Marco	Abril	Maio	Junho
400	430	460	490	520	550

Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta $5 \times 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo (constante). A sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550, . . .) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão da progressão. A razão da progressão acima é igual a 30.

Definição de Progressão Aritmética (PA)

Uma *progressão aritmética* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos. Desse modo, podemos determinar o termo geral de uma PA conhecendo a_1 e r:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Por exemplo, a sequência (5, 8, 11, 14, . . .) é uma progressão aritmética de razão $r = 3$. Como o primeiro termo é $a_1 = 5$, podemos calcular, por exemplo, o sétimo termo, o vigésimo termo e o termo geral fazendo:

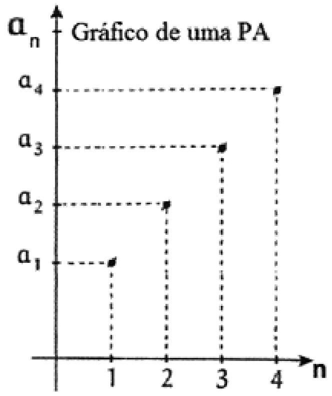
$$\begin{array}{ccc}
a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r & a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r & a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \\
\Leftrightarrow a_7 = 5 + 6 \cdot 3 & \Leftrightarrow a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 & \Leftrightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 \\
\Leftrightarrow a_7 = 5 + 18 & \Leftrightarrow a_{20} = 5 + 57 & \Leftrightarrow a_n = 5 + 3n - 3 \\
\Leftrightarrow a_7 = 23 & \Leftrightarrow a_{20} = 62 & \Leftrightarrow a_n = 3n + 2
\end{array}$$

Em uma PA, o termo geral é dado por um polinômio em n, pois

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1 e a PA é de primeira ordem. Sendo a PA uma função $a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma PA se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$ $(3, a_3)$, etc. estão em linha reta.



Soma dos Termos de uma PA

Na folha de Atividades 1 uma das atividades era discutir com seus colegas e elaborar uma estratégia para calcular a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$. Vários alunos resolveram:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100}_{100} = \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101}_{50} = 50 \times 101 = 5050$$

Baseado nessa estratégia, podemos calcular a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{n}$$

Podemos fazer:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} S_n = a_1 + \ a_2 + \ a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + \ a_3 + \ a_2 + \ a_1 \end{cases} + \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observe que ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n} \Leftrightarrow S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Por exemplo, na PA (5, 8, 11, 14, . . .) a razão é $r = 3$ e o primeiro termo é $a_1 = 5$. Para somar os 30 primeiros termos dela, primeiro calculamos a_{30}e depois calculamos S_{30}.

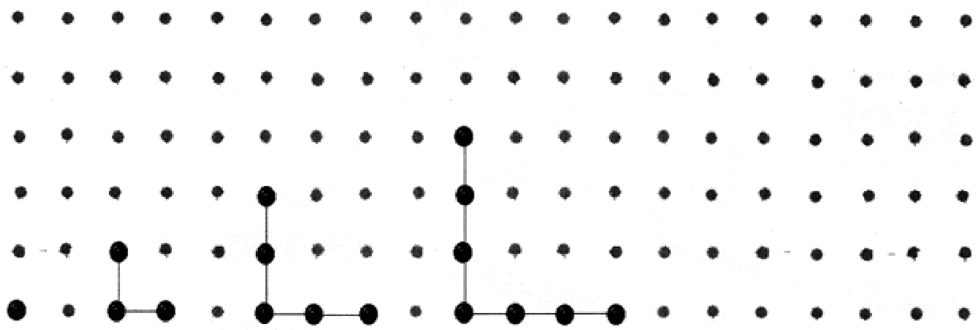
$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)r$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = a_1 + 29r$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 5 + 29 \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 5 + 87$$
$$\Leftrightarrow a_{30} = 92$$

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{(5 + 92) \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{97 \cdot 30}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = 97 \cdot 15$$
$$\Leftrightarrow S_{30} = 1455$$

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando
Álgebra ***9º ano*** _______
Prof. Haroldo Mantovani
Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 3 – Progressões Aritméticas e Números Figurados

1. Observe a sequência de figuras abaixo formadas por pontos da malha quadriculada pontilha.



Os gregos chamavam os elementos dessa sequência de *números gnômons.*
Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de pontos da figura n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quinta figura da sequência.

b) (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

c) Escreva a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ e o nome do conjunto formado pelos elementos dela.

d) Calcule:

➔ O 11º termo da sequência: $a_{11} =$

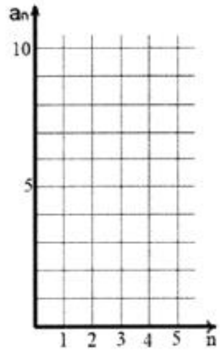
➔ O 50º termo da sequência: $a_{50} =$

➔ O termo geral da sequência, isto é, a_n, $n \in \mathbb{N}$: $a_n =$

e) Qual *número gnômon é formado por* 371 pontos?

f) Complete a tabela e faça o gráfico de (a_n).

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	



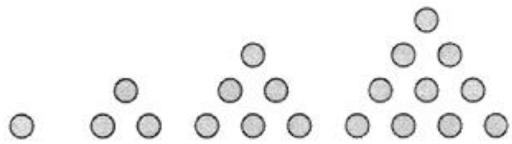
g) Calcule a soma dos 50 primeiros *números gnômons.*

h) Mostre que a soma dos n primeiros *números gnômons* é um quadrado perfeito.

Números Figurados

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos dispostos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos, tais números e suas disposições geométricas são ricos em propriedades e representam um elo entre a geometria e a álgebra. Na questão seguinte, exploraremos os *Números Poligonais Triangulares.*

2. Considere a sequência (T_n) dos *Números Triangulares* representados abaixo.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$ $\boxed{T_5 = \quad}$

a) Desenhe acima o 5º número triangular e preencha o quadrinho.

b) Compele a tabela abaixo, onde $\Delta_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 2$

n	1	2	3	4	5	6
T_n						
Δ_n						

c) Sabendo que $T_{10} = 55$, calcule:

➔ $T_{11} =$

➔ $T_{12} =$

d) Complete:

➔$T_n = T_{n-1} +$_______

e) Complete:

$T_1 = 1$

$T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1 + 2}_{T_2} + 3 = 6$

$T_4 = T_3 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_3} + \_\_\_$

$T_5 = T_4 + \_\_\_ = + \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_4} + \_\_\_$

f) Seguindo o raciocínio do item anterior:
$T_n =$ _____ + _____ + _____ + _____ + ⋯ + _____

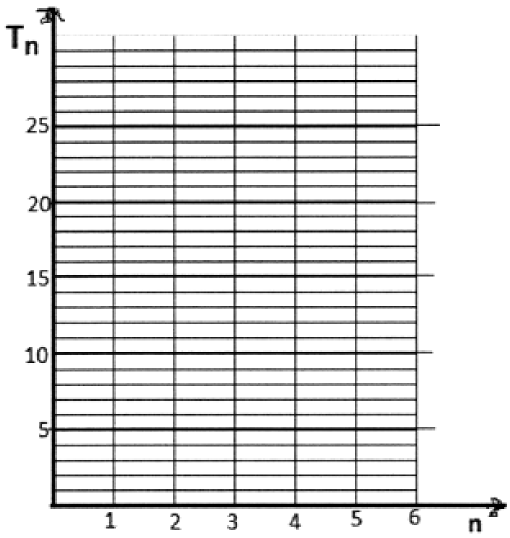
g) Escreva uma expressão para a soma acima:
$T_n =$

h) Calcule T_{30} , isto é, o 30º número triangular.

i) Calcule T_{145} , isto é, o 145º número triangular.

j) Complete a tabela e represente o gráfico de T_n.

n	T_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	



k) O número $T_n = 153$ ocupa que posição na sequência dos números triangulares?

l) Carlos trabalha num supermercado repondo os produtos nas gôndolas. Seu chefe pediu que empilhasse 3 dúzias de latinhas de ervilha em formato de número triangular. Terminado o empilhamento, qual era a altura da pilha feita por Carlos?

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra ***9º ano*** _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Nome: ____, **nº:** ________

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 4 –

Sequências, Progressões Aritméticas (PA) e Números Figurados

1. Usando palitos de fósforo, elabore uma sequência de figuras.

   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   Considere a sequência (a_n), *onde* a_n *é o número de palitos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$

   b) Descreva o padrão usado para montar a sequência (a_n).

   c) A sequência (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

   d) Caso (a_n) seja uma progressão aritmética, faça o que se pede na **coluna 1**. Caso contrário, faça o que se pede na **coluna 2**.

Coluna 1

Calcule:

➔ A razão. $r =$

➔ O 5º termo. $a_5 =$

➔ O enésimo termo a_n, $n \in \mathbb{N}$

$a_n =$

Coluna 2

Complete a tabela:

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	

2. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras forme uma progressão aritmética (b_n), $n = 1, 2, 3, \cdots$.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   b) Qual é a razão da PA?

   $r =$

   c) Calcule uma expressão para b_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

   $b_n =$

   d) Complete a tabela

n	b_n
1	
2	
3	
4	
6	
9	
15	

   e) Calcule o 50º termo da sequência.
   $b_{50} =$

   f) Se você tivesse apenas 100 círculos e tivesse que montar uma figura da sequência com o maior número de círculos. Qual seria a ordem dessa figura?

   g) Quantos círculos você usou nas três primeiras figuras?

   h) Se você fosse montar as dez primeiras figuras, de quantos círculos precisaria?

3. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras **não** formem uma progressão aritmética.
   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.
   b) Descreva o padrão usado para montar essa sequência.

   c) Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência.

4. Considere a sequência de figuras abaixo formadas por círculos.

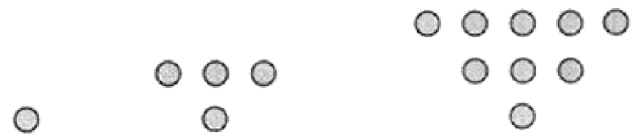


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considere a sequência (q_n), *onde* q_n *e o número de círculos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quarta figura da sequência.

b) (q_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

c) Complete a tabela abaixo, sabendo que $\Delta_n = q_{n+1} - q_n$.

n	q_n	$q_{n+1} - q_n$	Δ_n
1	1	$q_2 - q_1 = 4 - 1$	3
2	4	$q_3 - q_2 = 9 - 4$	5
3	9		
4			
5			
6			

d) Leonardo fez essa atividade e percebeu um padrão. Por exemplo, para calcular o número de círculos da 7ª figura, escrevia:

$$q_7 = q_6 + \underbrace{2 \cdot (7) - 1}_{7^{\underline{o}}\ ímpar} = 36 + 13 = 49$$

Seguindo esse padrão, calcule:

➔ $q_8 =$

➔ $q_9 =$

e) Sabendo que $q_{15} = 225$, calcule q_{16}.

➔ $q_{16} =$

f) Complete: $q_n = q_{n-1} +$ ________

g) Complete:

$q_1 = 1$

$q_2 = q_1 + 2 \cdot (\,\mathbf{2}\,) - 1 = 1 + 3 = 4 = \mathbf{2}^2$

$q_3 = q_2 + 2 \cdot (\,\mathbf{3}\,) - 1 = 1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3}^2$

$q_4 = q_3 + 2 \cdot (\_\_) - 1 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_^2$

$q_5 = q_4 + 2 \cdot (\_\_) - 1 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_^2$

h) Seguindo o raciocínio anterior:

$q_n = q_{n-1} + 2 \cdot (\_\_) - 1 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \cdots + \_\_\_ = \_\_\_^2$

i) Usando o resultado acima, calcule:

➔ $q_{20} =$ ➔ $q_{32} =$

j) Qual termo da sequência é formado por 196 círculos?

k) Usando círculos, monte as 3 primeiras figuras da sequência, colando no anexo B, de forma que em cada uma das figuras os pontos estejam em disposição quadrada.

Anexo A

Colagem da atividade 1, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Colagem da atividade 2, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Colagem da atividade 3, item a.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

Anexo B

Colagem da atividade 4, item k.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

APÊNDICE C – FOLHAS DE ATIVIDADES RESOLVIDAS – RESPOSTAS ESPERADAS

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra *9º ano* ______

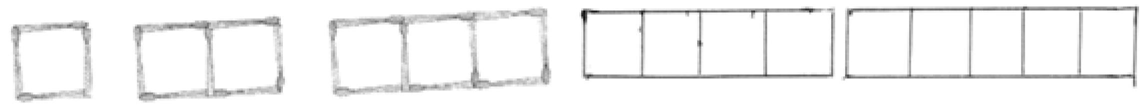
Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 1 – Sequências

Atividades sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões

Observe a sequência de figuras abaixo construída com palitos de fósforo.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura 5ª figura

Primeira Parte

1. Desenhe acima, a quarta figura e a quinta figura da sequência.
2. Complete a tabela abaixo.

Figura	Nº de quadrados	Nº de palitos
1ª	1	4
2ª	2	7
3ª	3	10
4ª	4	13
5ª	5	16
6ª	6	19
7ª	7	22

3. Você percebeu algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.

R: Sim, A diferença entre o número de palitos de duas figuras consecutivas é 3 e entre o número de quadrados é 1.

4. Qual é a diferença no número de palitos entre duas figuras consecutivas?

R: 3 palitos

5. Qual é a diferença no número de palitos entre a 3ª figura e a 1ª figura?

$(3-1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$ ou $10 - 4 = 6$.

R: 6 palitos

6. Qual é a diferença no número de palitos entre a 7ª figura e a 1ª figura?

$(7-1) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$ ou $22 - 4 = 18$

R: 18 palitos

7. Qual é a diferença no número de palitos entre a 50ª figura e a 1ª figura?

$(50-1) \cdot 3 = 49 \cdot 3 = 147$

R: 147 palitos

8. Nicole fez essa atividade e percebeu um padrão para calcular o nº de palitos de uma figura qualquer. Por exemplo, para calcular o número de palitos da 9ª figura, ela escrevia:

$$1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 9 \cdot 3 = 1 + 27 = 28$$

Calcule o número de palitos usados para montar a:

a) 16ª figura.

$1 + \underbrace{3 \cdot 16} =$
$= 1 + 48 = 49$

R: 49 palitos

b) 30ª figura.

$1 + \underbrace{3 \cdot 30} =$
$= 1 + 90 = 91$

R: 91 palitos

c) 67ª figura.

$1 + \underbrace{3 \cdot 67} =$
$= 1 + 201 = 202$

R: 202 palitos

d) 100ª figura.

$= 1 + \underbrace{3 \cdot 100}$
$= 1 + 300 = 301$

R: 301 palitos

9. Escreva uma expressão algébrica que representa a quantidade de palitos usados para construir a figura de ordem n, $n = 1, 2, 3, \cdots$; isto é, a n^a figura.

R: $1 + 3 \cdot n$ ou $3n + 1$

10. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 1º grau. Use-o para determinar em qual figura foram usados 178 palitos.

$3n + 1 = 178$
$\Leftrightarrow 3n = 178 - 1$
$\Leftrightarrow 3n = 177$
$\Leftrightarrow n = \frac{177}{3}$
$\Leftrightarrow n = 59$

R: Na 59ª figura.

11. Para construir uma figura da sequência, foram usados 382 palitos. Qual é a ordem dessa figura?

$3n + 1 = 382$
$\Leftrightarrow 3n = 382 - 1$
$\Leftrightarrow 3n = 381$
$\Leftrightarrow n = \frac{381}{3}$
$\Leftrightarrow n = 127$

R: 127ª figura.

Segunda Parte

12. Quantos quadrados foram construídos nas 8 primeiras figuras?

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

R: 36 quadrados

13. Quantos palitos foram usados para construir as 8 primeiras figuras?

$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 116$

R: 116 palitos.

14. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de quadrados construídos nas 30 primeiras figuras da sequência.

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+28+29+30}_{30} = $$
$$= \underbrace{31+31+\cdots+31}_{15} = 31\cdot 15 = \underline{465}$$

R: 465 quadrados

b) O número de quadrados construídos nas 100 primeiras figuras da sequência.

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+98+99+100}_{100} = $$
$$= \underbrace{101+101+\cdots+101}_{50} = 101\cdot 50 = \underline{5050}$$

R: 5050 quadrados.

15. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de quadrados construídos nas n primeiras figuras, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}_{n \text{ parcelas}} = \underbrace{(1+n)+(1+n)+\cdots+(n+1)}_{\frac{n}{2}} = \boxed{(n+1)\cdot\frac{n}{2}}$$

16. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram construídos 78 quadrados?

$$(n+1)\cdot\frac{n}{2} = 78$$
$$\Leftrightarrow n^2+n = 156$$
$$\Leftrightarrow n^2+n-156 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 1^2-4.1.(-156)$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 1+624$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 625$$

$$n = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-1\pm\sqrt{625}}{2.1}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-1\pm 25}{2}$$
$$n_1 = \frac{24}{2} = \boxed{12}$$
$$n_2 = \frac{-26}{2} = \cancel{-13}$$

R: Foram construídas 12 figuras.

17. Discuta com seus colegas e elabore uma maneira rápida e eficaz de somar:

a) O número de palitos usados na construção das 30 primeiras figuras da sequência.

A 30ª figura tem $3\cdot 30+1 = 91$ palitos

Assim: $4+7+10+\cdots+88+91 =$

$= (91+4).15 = 95\cdot 15 = \underline{1425}$

R: 1425 palitos

b) O número de palitos usados na construção das 100 primeiras figuras da sequência.

A 100ª figura tem $3\cdot 100+1 = 301$ palitos.

Assim: $4+7+10+\cdots+298+301 =$

$= (301+4).50 = 305\cdot 50 = \underline{15\,250}$

R: 15250 palitos.

18. Discuta com seus colegas e professor para escrever uma expressão algébrica para a soma do número de palitos usados na construção das n primeiras figuras da sequência, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

$$\underbrace{4+7+10+\cdots+(3n-2)+(3n+1)}_{n} = \underbrace{(3n+1+4)+(3n-2+7)+\cdots}_{\frac{n}{2}} =$$
$$= \underbrace{(3n+5)+(3n+5)+\cdots+(3n+5)}_{n/2} = \boxed{\frac{n}{2}.(3n+5)}$$

19. A expressão algébrica acima é um polinômio em $n \in \mathbb{N}$ do 2º grau. Use-a para determinar quantas figuras foram construídas, a partir da 1ª, em sequência, se foram usados 175 palitos?

$$\frac{n}{2}.(3n+5) = 175$$
$$\Leftrightarrow 3n^2+5n = 350$$
$$\Leftrightarrow 3n^2+5n-350 = 0$$

Resolvendo:

$$\Delta = 5^2-4.3.(-350)$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 25+4200$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 4225$$

$$n = \frac{-5\pm\sqrt{4225}}{2.3}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-5\pm 65}{6}$$
$$\frac{60}{6} = \boxed{10}$$
$$\frac{-70}{6} = \cancel{\frac{-35}{3}}$$

R: 10 figuras.

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra ***9º ano*** _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 3 – Progressões Aritméticas e Números Figurados

1. Observe a sequência de figuras abaixo formadas por pontos da malha quadriculada pontilha.

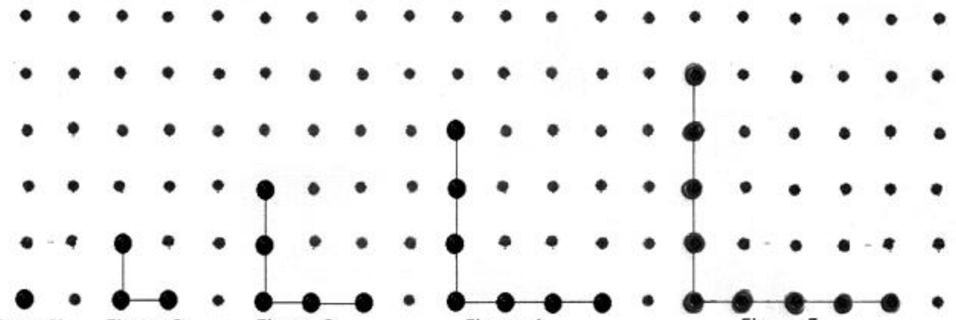


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Os gregos chamavam os elementos dessa sequência de *números gnômons*.

Considere a sequência (a_n), onde a_n é o número de pontos da figura n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quinta figura da sequência.

b) (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

Sim, pois a diferença entre quaisquer duas figuras consecutivas é sempre dois pontos.

c) Escreva a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ e o nome do conjunto formado pelos elementos dela.

$(1, 3, 5, 7, \ldots)$. Conjunto dos números ímpares.

d) Calcule:

➔ O 11º termo da sequência: $a_{11} = a_1 + 10r = 1 + 10 \cdot 2 = 21$

➔ O 50º termo da sequência: $a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 = 99$

➔ O termo geral da sequência, isto é, a_n, $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = \underline{2n-1}$

e) Qual *número gnômon é formado por* 371 pontos?

$2n - 1 = 371$

$\Leftrightarrow 2n = 371 + 1$

$\Leftrightarrow 2n = 372$

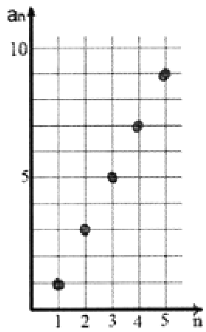
$\Leftrightarrow n = \frac{372}{2}$

$\Leftrightarrow n = 186$

R: 186º número gnômon.

f) Complete a tabela e faça o gráfico de (a_n).

n	a_n
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9



g) Calcule a soma dos 50 primeiros *números gnômons.*

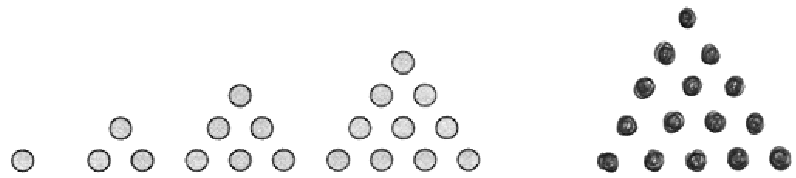
$\underbrace{1+3+5+\cdots+97+99}_{50} = 100\cdot 25 = 2500$

h) Mostre que a soma dos n primeiros *números gnômons* é um quadrado perfeito. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = [(2n-1)+1]\cdot\frac{n}{2} = 2n\cdot\frac{n}{2} = \boxed{n^2}$

Números Figurados

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos dispostos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos, tais números e suas disposições geométricas são ricos em propriedades e representam um elo entre a geometria e a álgebra. Na questão seguinte, exploraremos os *Números Poligonais Triangulares.*

2. Considere a sequência (T_n) dos *Números Triangulares* representados abaixo.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$ $\boxed{T_5 = 15}$

a) Desenhe acima o 5º número triangular e preencha o quadrinho.

b) Compele a tabela abaixo, onde $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 2$

n	1	2	3	4	5	6
T_n	1	3	6	10	15	21
Δ_n		2	3	4	5	6

c) Sabendo que $T_{10} = 55$, calcule:

➔ $T_{11} = 55 + 11 = 66$

➔ $T_{12} = 66 + 12 = 78$

d) Complete:

→$T_n = T_{n-1} +$ n

e) Complete:

$T_1 = 1$

$T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1+2}_{T_2} + 3 = 6$

$T_4 = T_3 + 4 = \underbrace{1+2+3}_{T_3} + 4$

$T_5 = T_4 + 5 = + \underbrace{1+2+3+4}_{T_4} + 5$

f) Seguindo o raciocínio do item anterior:
$T_n =$ 1 + 2 + 3 + 4 + ⋯ + n

g) Escreva uma expressão para a soma acima:
$T_n = (n+1)\cdot\frac{n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

h) Calcule T_{30}, isto é, o 30º número triangular.

$T_{30} = (30+1)\cdot\frac{30}{2} = 31\cdot 15 = 465$

R: $T_{30} = 465$

i) Calcule T_{145}, isto é, o 145º número triangular.

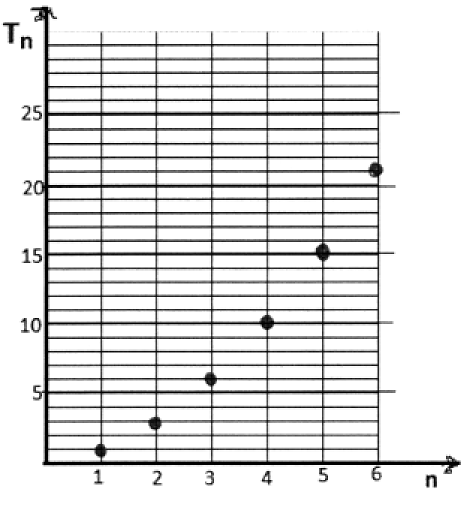
$T_{145} = (145+1)\cdot\frac{145}{2} = 146\cdot\frac{145}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T_{145} = 73\cdot 145 = 10585$

R: $T_{145} = 10585$

j) Complete a tabela e represente o gráfico de T_n.

n	T_n
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21



k) O número $T_n = 153$ ocupa que posição na sequência dos números triangulares?

$\frac{n^2+n}{2} = 153$

$n^2 + n = 306$

$n^2 + n - 306 = 0$

Resolvendo:

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-306)$

$\Leftrightarrow \Delta = 1 + 1224$

$\Leftrightarrow \Delta = 1225$

$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1225}}{2\cdot 1}$

$n = \frac{-1 \pm 35}{2}$ → $\frac{34}{2} = 17$; $\frac{-36}{2} = \cancel{-18}$

$n = 17$

R: Posição 17.

l) Carlos trabalha num supermercado repondo os produtos nas gôndolas. Seu chefe pediu que empilhasse 3 dúzias de latinhas de ervilha em formato de número triangular. Terminado o empilhamento, qual era a altura da pilha feita por Carlos?

$3\times 12 = 36$

$T_n = 36 \Leftrightarrow \frac{n^2+n}{2} = 36$

$\Leftrightarrow n^2 + n = 72$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0$

Resolvendo:

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-72)$

$\Leftrightarrow \Delta = 1 + 288$

$\Leftrightarrow \Delta = 289$

$n = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{2\cdot 1}$

$n = \frac{-1 \pm 17}{2}$ → $\frac{16}{2} = 8$; $\frac{-18}{2} = \cancel{-9}$

R: 8 latinhas.

E. M. E. B. Coronel Francisco Orlando

Álgebra *9º ano* _______

Prof. Haroldo Mantovani

Nome: ____, **nº:** ________

Nome: ____, **nº:** ________

Nome: ____, **nº:** ________

Folha de Atividades 4 –

Sequências, Progressões Aritméticas (PA) e Números Figurados

1. Usando palitos de fósforo, elabore uma sequência de figuras.

   a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

   Considere a sequência (a_n), *onde* a_n *é o número de palitos da figura* n, $n = 1, 2, 3, \cdots$

   b) Descreva o padrão usado para montar a sequência (a_n).

   Cada figura, a partir da 3ª figura, tem o número de palitos igual a soma de palitos das duas figuras anteriores.

   c) A sequência (a_n) é uma progressão aritmética? Justifique.

   Não, pois a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos não é constante.

   d) Caso (a_n) seja uma progressão aritmética, faça o que se pede na **coluna 1**. Caso contrário, faça o que se pede na **coluna 2**.

Coluna 1

Calcule:

➔ A razão. $r =$

➔ O 5º termo. $a_5 =$

➔ O enésimo termo a_n, $n \in \mathbb{N}$

$a_n =$

Coluna 2

Complete a tabela:

n	a_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5

2. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras forme uma progressão aritmética (b_n), $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

b) Qual é a razão da PA?

$r = 2$

c) Calcule uma expressão para b_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

$b_n = b_1 + (n-1) \cdot r$

$\Leftrightarrow b_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = \cancel{2} + 2n - \cancel{2} = \underline{2n}$

d) Complete a tabela

n	b_n
1	2
2	4
3	6
4	8
6	12
9	18
15	30

e) Calcule o 50º termo da sequência.

$b_{50} = 2 \cdot 50 = \underline{100}$

f) Se você tivesse apenas 100 círculos e tivesse que montar uma figura da sequência com o maior número de círculos. Qual seria a ordem dessa figura?

$2n = 100$

$\Leftrightarrow n = \frac{100}{2}$

$\Leftrightarrow n = 50$

R: Seria a 50ª figura.

g) Quantos círculos você usou nas três primeiras figuras?

$2 + 4 + 6 = 12$

R: 12 círculos.

h) Se você fosse montar as dez primeiras figuras, de quantos círculos precisaria?

$\underbrace{2 + 4 + 6 + \cdots + 18 + 20}_{10} = 22 \cdot \frac{10}{2} = 22 \cdot 5 = \underline{110}$

R: Precisaria de 110 círculos.

3. Usando círculos, elabore uma sequência de figuras, de modo que, o número de círculos das figuras **não** formem uma progressão aritmética.

a) Cole as três primeiras figuras da sequência no local indicado no anexo A.

b) Descreva o padrão usado para montar essa sequência.

Cada figura da sequência, a partir da segunda, é obtida multiplicando-se o número de círculos da figura anterior por 2.

c) Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência.

$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$

4. Considere a sequência de figuras abaixo formadas por círculos.

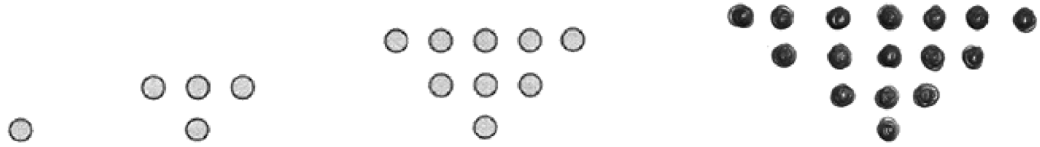


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considere a sequência (q_n)*, onde* q_n *e o número de círculos da figura n,* $n = 1, 2, 3, \cdots$.

a) Desenhe acima, a quarta figura da sequência.

b) (q_n) é uma progressão aritmética? Justifique.
Não, pois a diferença entre duas figuras consecutivas não é constante.

c) Complete a tabela abaixo, sabendo que $\Delta_n = q_{n+1} - q_n$.

n	q_n	$q_{n+1} - q_n$	Δ_n
1	1	$q_2 - q_1 = 4 - 1$	3
2	4	$q_3 - q_2 = 9 - 4$	5
3	9	$q_4 - q_3 = 16 - 9$	7
4	16	$q_5 - q_4 = 25 - 16$	9
5	25	$q_6 - q_5 = 36 - 25$	11
6	36	$q_7 - q_6 = 49 - 36$	13

d) Leonardo fez essa atividade e percebeu um padrão. Por exemplo, para calcular o número de círculos da 7ª figura, escrevia:

$$q_7 = q_6 + \underbrace{2 \cdot (7) - 1}_{7^{\underline{o}}\ ímpar} = 36 + 13 = 49$$

Seguindo esse padrão, calcule:

➔ $q_8 = q_7 + \underbrace{2 \cdot 8 - 1}_{15} = 49 + 15 = 64$

➔ $q_9 = q_8 + \underbrace{2 \cdot 9 - 1}_{17} = 64 + 17 = 81$

e) Sabendo que $q_{15} = 225$, calcule q_{16}.

➔ $q_{16} = q_{15} + \underbrace{2 \cdot 16 - 1}_{31} = 225 + 31 = 256$

f) Complete: $q_n = q_{n-1} + \underline{2n - 1}$

g) Complete:

$q_1 = 1$

$q_2 = q_1 + 2 \cdot (\mathbf{2}) - 1 = 1 + 3 = 4 = \mathbf{2}^2$

$q_3 = q_2 + 2 \cdot (\mathbf{3}) - 1 = 1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3}^2$

$q_4 = q_3 + 2 \cdot (\underline{4}) - 1 = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5} + \underline{7} = \underline{16} = \underline{4}^2$

$q_5 = q_4 + 2 \cdot (\underline{5}) - 1 = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5} + \underline{7} + \underline{9} = \underline{25} = \underline{5}^2$

h) Seguindo o raciocínio anterior:

$q_n = q_{n-1} + 2 \cdot (\underline{n}) - 1 = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5} + \cdots + \underline{2n-1} = \underline{n}^2$

i) Usando o resultado acima, calcule:

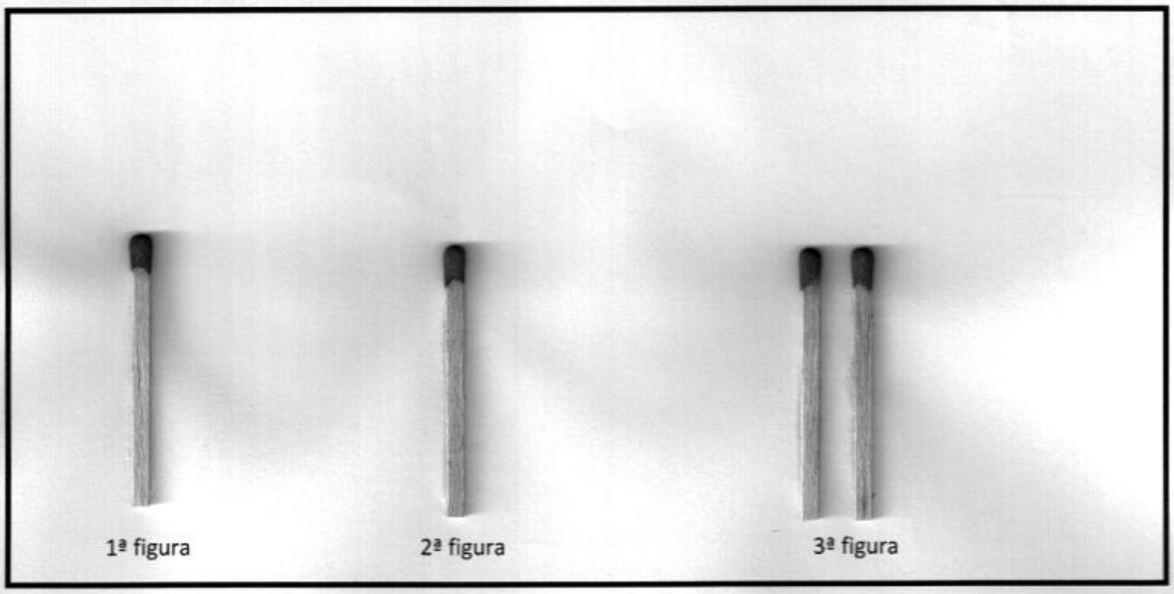
➔ $q_{20} = 20^2 = 400$ ➔ $q_{32} = 32^2 = 1024$

j) Qual termo da sequência é formado por 196 círculos? $n^2 = 196 \Rightarrow n = \sqrt{196} = \underline{14}$
R: O 14º termo.

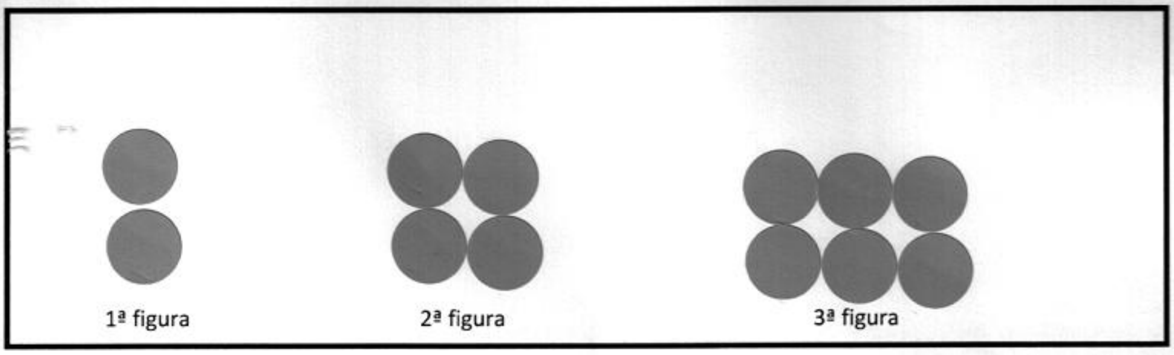
k) Usando círculos, monte as 3 primeiras figuras da sequência, colando no anexo B, de forma que em cada uma das figuras os pontos estejam em disposição quadrada.

Anexo A

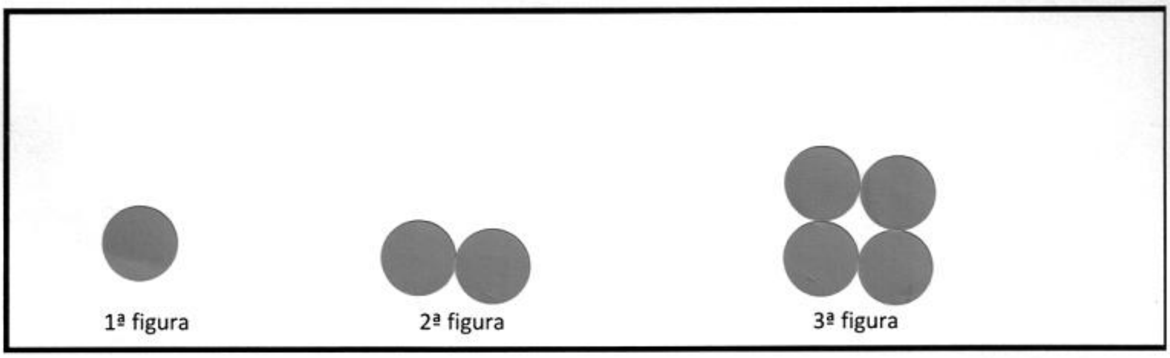
Colagem da atividade 1, item a.



Colagem da atividade 2, item a.

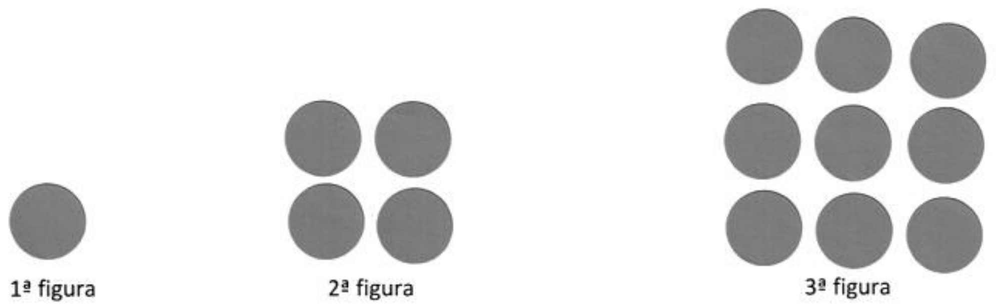


Colagem da atividade 3, item a.



Anexo B

Colagem da atividade 4, item k.



PREFEITURA MUNICIPAL DE ORLÂNDIA
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO

E.M.E.B. CORONEL FRANCISCO ORLANDO - FONE (16) 3820-8166
Rua Quatro, Nº. 146-Centro-Orlândia/SP-CEP 14620-000
emebcforlando@orlandia.sp.gov.br

AUTORIZAÇÃO

Eu, Marlei de Oliveira, RG 17.355.890-2, diretora da EMEB Coronel Francisco Orlando, autorizo o professor Haroldo Mantovani a usar o nome desta escola em sua dissertação de mestrado profissional, intitulada "Atividades Sobre Progressões Aritméticas Através do Reconhecimento de Padrões". Autorizo ainda, a inserir uma breve descrição da escola e das salas de aula, bem como a colocar o nome da escola no cabeçalho das folhas de atividades aplicadas nos 9º anos B e C do ano de 2014.

Orlândia, 11 de novembro de 2015.

Marlei de Oliveira
Diretora de Escola
RG: 17.355.890-2