

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLASSIFICAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES
LORENTZIANAS DE \mathbb{R}_1^n PARA \mathbb{R}_1^{n+1}

Claudia Evelyn Escobar Montecino

Orientador: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

São Carlos - SP
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLASSIFICAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES
LORENTZIANAS DE \mathbb{R}_1^n PARA \mathbb{R}_1^{n+1}

Claudia Evelyn Escobar Montecino

Dissertação apresentada ao PPG-M
da UFSCar como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

São Carlos - SP
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M773c Escobar Montecino, Claudia Evelyn
Classificação das hipersuperfícies lorentzianas de R_{n1} PARA R_{n1+1} / Claudia Evelyn Escobar Montecino. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
55 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Geometria. 2. Geometria Diferencial. 3. Semi-riemanniana. 4. Lorentziana. 5. Isometrias. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

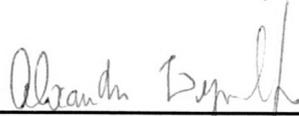
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Claudia Evelyn Escobar Montecino, realizada em 16/12/2015:



Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
UFSCar



Prof. Dr. Alexandre LyMBERopoulos
USP



Profa. Dra. Barbara Corominas Valério
USP

Ao nosso futuro, meus anjinhos sorridentes que alegraram o meu processo de formação: Ignacio, Titina, Vale, Guilherme, Gatita e Javier.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar força, valentia e companhia todos esses anos.

Agradeço aos meus avós (in memoriam) Papi-Javier e Mamaria, pois eles me acompanharam dos meus primeiros passos para escolinha, até a universidade. E foram como pais para mim e os meus irmãos em momentos difíceis.

Agradeço a minha família, a minha mãe Olga, por sempre ter me apoiado e lutado por todos nós. Ao meu pai Juan, pelo apoio e valores entregados. Aos meus irmãos Ana e Rodrigo pelo apoio e carinho.

Agradeço ao meu esposo Caio, por estar do meu lado sem importar os obstáculos e me ajudar a nunca desistir, e por termos construído o nosso sonho juntos.

Agradeço ao professor Sergio Vega, que foi o primeiro que me incentivou a tomar o caminho da matemática. Ao professor Sergio Plaza (in memoriam), por ser minha inspiração no caminho da geometria, pela dedicação e compromisso comigo até seus últimos dias. E por ter compartilhado comigo, os fractais.

Agradeço ao professor Rafael Labarca, pelo apoio e sábios conselhos. Aos professores que talvez sem saber marcaram minha carreira com suas palavras: Enrique Reyes, Hernán Henríquez, Guillermo Palma, Ruy Tojeiro e Cezar Kondo.

Agradeço ao meu orientador Guillermo Lobos, pelo apoio desde minha chegada ao Brasil e pela infinita paciência para me ensinar e compreender em momentos difíceis.

Agradeço aos meus amigos Malu, Talitha, Gabriel e Thays pela força para concluir este trabalho.

Agradeço a todos os professores, funcionários da Universidade de Santiago do Chile e da Universidade Federal de São Carlos.

Agradeço a todos que me conhecem, e que às vezes com uma palavra me fizeram sentir acolhida aqui no Brasil, em especial à família do Caio e a Katherine Coaguila.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

“Não se preocupem com os vossos problemas com a matemática. Posso assegurar-vos que os meus ainda são maiores”.

ALBERT EINSTEIN.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um resultado de classificação das hipersuperfícies isométricas entre espaços de Lorentz-Minkowski devida a L. K. Graves [5], o qual generaliza um teorema clássico de Hartman e Nirenberg [7], em que foram classificadas as hipersuperfícies isométricas entre espaços euclidianos. A técnica que usamos na classificação dessas hipersuperfícies é estudar primeiro a completitude da folheação de nulidade relativa e dividir a demonstração em dois casos dependendo da folheação ser degenerada ou não degenerada.

Abstract

In this dissertation we present a result of classification of isometric hypersurfaces between Lorentz-Minkowski spaces due to L. K. Graves [5], which generalizes a classic theorem of Hartman and Nirenberg [7], where hypersurfaces were classified among Euclidean spaces. The technique we use in this classification of hypersurfaces is to first study the completeness of the relative nullity foliation, and split the demonstration in two cases depending of the foliation be degenerate or not degenerate.

Sumário

Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Espaço de Lorentz-Minkowski	1
1.2 Propriedades dos vetores de \mathbb{R}_1^n segundo o caráter causal	4
1.3 Grupo das transformações Lorentzianas.	8
1.4 Curvas nulas em \mathbb{R}_1^3	10
1.5 Fórmulas e equações para hipersuperfícies Lorentzianas	17
1.6 Exemplos de hipersuperfícies Lorentzianas	18
2 Completitude da folheação de nulidade relativa	22
2.1 A distribuição de nulidade relativa	25
2.2 Caso não degenerado	27
2.3 Caso degenerado	35
3 Teorema de Classificação	44
3.1 Caso não degenerado ($G = W$)	45
3.1.1 Teorema de Classificação, parte (a)	48
3.2 Caso degenerado ($G = \emptyset$)	49
3.2.1 Teorema de Classificação, parte (b)	53
Referências Bibliográficas	54

Introdução

Nesta dissertação exporemos uma classificação das hipersuperfícies Lorentzianas entre \mathbb{R}_1^n e \mathbb{R}_1^{n+1} seguindo o artigo “*Codimension one isometric immersions between Lorentz Spaces*” de L.K. Graves [5].

No capítulo 1, apresentaremos o espaço de Lorentz-Minkowski, com algumas propriedades dos seus elementos. Enunciaremos as fórmulas de Gauss e Weingarten, bem como as equações de Gauss e Codazzi para hipersuperfícies Lorentzianas. Falaremos de curvas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3, para depois definir as *b*-scroll junto com outros exemplos de hipersuperfícies Lorentzianas, que serão necessárias para o objetivo deste trabalho.

No capítulo 2, a partir do espaço de nulidade relativa, definiremos a distribuição de nulidade relativa e provaremos que é totalmente geodésica e completa sobre certo conjunto de \mathbb{R}_1^n .

E por último, no capítulo 3 apresentaremos um resultado que generaliza o Teorema de Hartman e Nierenberg.

Teorema de Hartman e Nierenberg. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície isométrica, então a menos de isometrias ela pode se escrever da seguinte forma*

$$id \times c : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$$

em que $c : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva unitária no plano Euclidiano, e $id : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é a função identidade.[7]

Dito resultado será provado em duas partes, segundo se o espaço de nulidade relativa é não degenerado ou degenerado.

Teorema 1. *Seja $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície isométrica, então a menos de isometrias de \mathbb{R}_1^{n+1} temos que*

(a) *se o espaço de nulidade relativa é não degenerado, então*

(i) $f = id \times c : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_1^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_1^2$, com $c : \mathbb{R}_1^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva unitária de tipo tempo, e $id : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ a função identidade; ou

(ii) $f = id \times c : \mathbb{R}_1^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^{n-1} \times \mathbb{R}^2$, com $c : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva unitária no plano Euclidiano, e $id : \mathbb{R}_1^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n-1}$ a função identidade.

(b) *E se o espaço de nulidade relativa é degenerado, então*

$f = id \times g : \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^3$, com $g : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma b -scroll e $id : \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ a função identidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo definiremos o espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão n e apresentaremos algumas propriedades dos seus elementos e subespaços. Provaremos alguns resultados para curvas no grupo das transformações Lorentzianas, que serão utilizados para definir os referenciais e as curvas nulas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3. Exporemos algumas fórmulas e equações fundamentais de geometria para o caso de hipersuperfícies Lorentzianas. E finalizaremos com alguns exemplos de hipersuperfícies Lorentzianas de dimensão n .

1.1 Espaço de Lorentz-Minkowski

Para esta dissertação, sejam M uma variedade diferenciável, p um ponto em M , e os seguintes conjuntos sobre M :

- $\mathfrak{X}(M)$: todos os campos vetoriais diferenciáveis sobre M .
- $\mathfrak{F}(M)$: todas as funções reais diferenciáveis definidas em M .
- T_pM : todos os vetores tangentes a M em p .

Como $\mathfrak{X}(M)$ é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$ e T_pM é um módulo sobre \mathbb{R} , poderemos definir sobre eles um *tensor*.

Definição 1.1.1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Se V é um módulo sobre o corpo K , a função bilinear $g : V \times V \rightarrow K$ é um *tensor do tipo* $(0, 2)$ (Na notação: tipo $(0, 2)$, o 0 corresponde à quantidade de vezes em que aparece o fator dual de V , V^* , e o 2 corresponde à quantidade de vezes que aparece o fator V no domínio da função g).

O tensor do tipo $(0, 2)$ sobre o $\mathfrak{F}(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$ é um *campo tensorial* sobre M .

Definição 1.1.2. A forma bilinear simétrica $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é

- *definida positiva (negativa)* se $v \neq 0$ implica que $g(v, v) > 0$ ($g(v, v) < 0$) para todo $v \in V$,
- *semidefinida positiva (negativa)* se $g(v, v) \geq 0$ ($g(v, v) \leq 0$) para todo $v \in V$,
- *não degenerada* se $g(u, v) = 0$ para todo $u \in V$ implica que $v = 0$.

Se g é definida (semidefinida) positiva ou negativa então ela é *definida (semidefinida)*. Por outro lado, se g é definida então ela também é semidefinida e não degenerada.

Definição 1.1.3. O *índice* i de uma forma bilinear simétrica g sobre V é o maior inteiro que é dimensão de um subespaço $W \subset V$, tal que $g|_W$ é definida negativa.

Uma *métrica* g sobre uma variedade M é um campo tensorial não degenerado do tipo $(0, 2)$ sobre M de índice constante.

Consideremos \mathbb{R}^n o espaço vetorial real de dimensão n com a base canônica dada por $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Seja \langle, \rangle a métrica sobre \mathbb{R}^n de índice 1, com a matriz associada:

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} \langle e_0, e_0 \rangle & \langle e_0, e_1 \rangle & \dots & \langle e_0, e_{n-1} \rangle \\ \langle e_1, e_0 \rangle & \langle e_1, e_1 \rangle & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \langle e_{n-1}, e_0 \rangle & & & \langle e_{n-1}, e_{n-1} \rangle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{array} \right),$$

\langle, \rangle é a *métrica Lorentziana* sobre \mathbb{R}^n , e $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ é o *espaço de Lorentz-Minkowski* de dimensão n o qual denotaremos por \mathbb{R}_1^n . O subíndice 1 na notação anterior corresponde ao índice da métrica.

Definição 1.1.4. Um vetor $v \in T_p\mathbb{R}_1^n \approx \mathbb{R}_1^n$ é

- do *tipo espaço* se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$,
- do *tipo luz* (ou vetor nulo) se $\langle v, v \rangle = 0$ com $v \neq 0$,
- do *tipo tempo* se $\langle v, v \rangle < 0$,
- um vetor *unitário* se $|\langle v, v \rangle| = 1$.

Dado U subespaço de \mathbb{R}_1^n , consideremos a métrica induzida \langle, \rangle_U

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle; \quad u, v \in U.$$

A métrica sobre U se classifica em um dos seguintes tipos (ver [10] pg. 140.):

- (i) a métrica é definida positiva e U é do tipo espaço,
- (ii) a métrica tem índice 1 e U é do tipo tempo,
- (iii) a métrica é degenerada e U é do tipo luz.

Cabe destacar que o conjunto de todos os vetores do tipo luz é o *cone de luz* e a categoria em que um vetor (subespaço) se encontra é o *caráter causal* do vetor (subespaço).

Seja U^\perp é o conjunto complemento ortogonal de U , ou seja, $U^\perp = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}$, notemos que esse complemento ortogonal é diferente do complemento ortogonal conhecido proveniente do produto interno usual do \mathbb{R}^n , pois nesse caso por exemplo $\langle e_0 + e_1, e_0 + e_1 \rangle = 0$, ou seja $e_0 + e_1$ é ortogonal a si mesmo, o que não ocorre com o produto interno usual em \mathbb{R}^n . Com esse exemplo podemos entender melhor que um subespaço U de V é disjunto do seu complemento ortogonal U^\perp , só no caso em que U é um subespaço não degenerado de V . Como nesta dissertação trabalharemos com métricas tanto degeneradas como não degeneradas, só poderemos afirmar para qualquer subespaço que:

Lema 1.1.1. *Se U é subespaço de V , então*

$$(i) \dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

$$(ii) (U^\perp)^\perp = U.$$

Demonstração. Ver [10] pg.49. □

Lema 1.1.2. *Um subespaço U de V é não degenerado se e somente se $V = U \oplus U^\perp$*

Demonstração. Ver [10] pg.49. □

1.2 Propriedades dos vetores de \mathbb{R}_1^n segundo o caráter causal

Consideremos o espaço \mathbb{R}_1^n , logo cada vetor unitário do tipo tempo z determina uma decomposição ortogonal de \mathbb{R}_1^n [6]. Esta decomposição, é formada por um subespaço de dimensão $n - 1$, cujos elementos são vetores do tipo espaço, e um subespaço de dimensão 1 gerado por z . Assim, cada vetor $x \in \mathbb{R}_1^n$ pode se decompor unicamente na forma

$$x = \lambda z + y; \quad \langle z, y \rangle = 0 \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

e como

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle &= \langle \lambda z + y, z \rangle \\ &= \lambda \langle z, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ &= -\lambda, \end{aligned}$$

segue que $\lambda = -\langle x, z \rangle$.

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= \langle \lambda z + y, \lambda z + y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle z, z \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= -\lambda^2 + \langle y, y \rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\text{se } x \text{ é do tipo espaço} &\Rightarrow \lambda^2 < \langle y, y \rangle, \\ \text{se } x \text{ é do tipo tempo} &\Rightarrow \lambda^2 > \langle y, y \rangle, \\ \text{se } x \text{ é do tipo luz} &\Rightarrow \lambda^2 = \langle y, y \rangle.\end{aligned}$$

Desta decomposição derivam as seguintes propriedades para vetores em \mathbb{R}_1^n :

Proposição 1.2.1. *Seja $z \in \mathbb{R}_1^n$ um vetor do tipo tempo e consideremos a decomposição de \mathbb{R}_1^n dada por z definida acima. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *dois vetores do tipo tempo nunca são ortogonais,*
- (b) *um vetor do tipo tempo nunca é ortogonal a um vetor do tipo luz,*
- (c) *dois vetores do tipo luz são ortogonais se e somente se são linearmente dependentes,*
- (d) *o complemento ortogonal de um vetor do tipo luz é um subespaço de \mathbb{R}^n de dimensão $n - 1$ em que o produto interno é semidefinido positivo e de posto $n - 2$.*

Demonstração.

- (a) Seja z_1 outro vetor do tipo tempo, então

$$z_1 = \lambda z + y \text{ com } \langle y, z \rangle = 0,$$

assim $\lambda^2 > \langle y, y \rangle > 0$ pois z_1 é do tipo tempo e y é do tipo espaço.

Logo

$$\begin{aligned}\langle z, z_1 \rangle &= \lambda \langle z, z \rangle + \langle z, y \rangle \\ &= \lambda \langle z, z \rangle \\ &= -\lambda \neq 0.\end{aligned}$$

Portanto, z e z_1 não são ortogonais. Logo dois vetores do tipo tempo não podem ser ortogonais.

(b) Seja $l = \lambda z + y$ um vetor do tipo luz com $\langle z, y \rangle = 0$.

Então

$$\lambda^2 = \langle y, y \rangle > 0,$$

pois l é do tipo luz e y do tipo espaço, logo

$$\begin{aligned}\langle z, l \rangle &= \lambda \langle z, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ &= \lambda \langle z, z \rangle \\ &= -\lambda \neq 0.\end{aligned}$$

Portanto, um vetor do tipo luz e um do tipo tempo nunca são ortogonais.

(c) (\Rightarrow) Sejam $l_1 = \lambda_1 z + y_1$ e $l_2 = \lambda_2 z + y_2$ dois vetores do tipo luz ortogonais, isto é

$$\begin{aligned}0 &= \langle l_1, l_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \langle z, z \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 + \langle y_1, y_2 \rangle.\end{aligned}$$

Mas, como l_1 e l_2 são do tipo luz, segue que $\langle y_1, y_1 \rangle \langle y_2, y_2 \rangle = \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \langle y_1, y_2 \rangle^2$.

E como y_1 e y_2 estão contidos no complemento ortogonal de z , espaço em que o produto interno é definido positivo, segue que o ângulo entre y_1 e y_2 é 0, logo

y_1 e y_2 são linearmente dependentes e portanto l_1 e l_2 também são linearmente dependentes.

(\Leftarrow) Sejam dois vetores do tipo luz $l_1 = \lambda z + y$ e l_2 linearmente dependentes, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} l_2 &= kl_1 \\ \Downarrow \\ \langle l_2, l_1 \rangle &= k \langle l_1, l_1 \rangle = k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, l_1 e l_2 são ortogonais.

(d) Seja l um vetor do tipo luz e E o complemento ortogonal de l .

Da parte (b) segue que E não contém vetores do tipo tempo. Então o produto interno em E é semidefinido positivo.

Desta última afirmação segue que existe $y_1 \neq 0$ em E tal que $\langle y_1, y \rangle = 0$ para todo $y \in E$, em particular $\langle y_1, y_1 \rangle = 0$.

Logo, $\langle y_1, l \rangle = 0$ pois $y_1 \in E$, que é complemento ortogonal de l . Portanto como y_1 e l são do tipo luz, da parte (c) segue que $y_1 = kl$ para algum $k \in \mathbb{R}$, o que implica que o espaço nulo de E é gerado por l , logo tem dimensão 1, portanto a métrica no complemento ortogonal E de l tem posto $n - 2$.

□

Como consequência da Proposição 1.2.1, um subespaço de \mathbb{R}_1^n só pode tomar uma de três formas citadas no Teorema a seguir.

Teorema 1.2.1. *Seja P um subespaço de dimensão k de \mathbb{R}_1^n . Então uma das seguintes afirmações para P é verdadeira*

(i) $P = \mathbb{R}_1^k$, e $\langle, \rangle|_P$ é não degenerado;

(ii) $P = \mathbb{R}^k$, e $\langle, \rangle|_P$ é não degenerado;

(iii) $\langle, \rangle|_P$ é degenerado, e (só neste caso) $P = \mathbb{R}^{k-1} \oplus \text{Span}\{l\}$ onde $\langle l, l \rangle = 0$ e l é ortogonal a \mathbb{R}^{k-1} .

1.3 Grupo das transformações Lorentzianas.

Seja $O(1, n-1)$ o subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ que consiste das transformações que preservam a métrica Lorentziana. Em termos de matrizes escrevemos

$$O(1, n-1) = \{U \in GL(n, \mathbb{R}) : USU^T = S\}$$

em que U^T denota a trasposta de U .

Definição 1.3.1. $O(1, n-1)$ é o grupo das transformações Lorentzianas sobre \mathbb{R}^n .

Definição 1.3.2. Um *referencial* é uma base ordenada para \mathbb{R}_1^n .

Observação 1.3.1. Consideremos a base canônica de \mathbb{R}^n , $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ como nosso referencial padrão.

Definição 1.3.3. Um *referencial ortonormal* para \mathbb{R}_1^n é a imagem do referencial padrão sobre uma transformação Lorentziana.

O subgrupo $SO^+(1, n-1)$ de $O(1, n-1)$ cujos elementos U satisfazem $\det U = 1$ e $\langle Ue_0, e_0 \rangle \leq -1$, é a componente identidade de $O(1, n-1)$ (componente conexa do grupo $O(1, n-1)$ que contém a identidade do grupo).

Definição 1.3.4. $SO^+(1, n-1)$ é o grupo das transformações Lorentzianas próprias.

Seja $\mathfrak{o}(1, n-1)$ o conjunto das matrizes Y de $n \times n$ que satisfaz $SY^T S = -Y$. Este conjunto é a algebra de Lie de $SO^+(1, n-1)$ e cada elemento dele tem a forma

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline x & K \end{array} \right), \quad (1.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e K é uma matriz antissimétrica de $(n-1) \times (n-1)$.

Lema 1.3.1. *Seja $U(s)$ uma curva em $O(1, n - 1)$. Então*

$$\frac{dU}{ds} S U^T + U S \frac{dU^T}{ds} = 0.$$

Demonstração. Seja $U(s)$ uma curva em $O(1, n - 1)$, então $U S U^T = S$. Logo, derivando esta expressão, usando a regra do produto e lembrando que S é constante temos

$$\frac{dU}{ds} S U^T + U S \frac{dU^T}{ds} = \frac{d}{ds} (U S U^T) = \frac{d}{ds} S = 0.$$

□

Proposição 1.3.1. *Seja $U(s)$ uma curva em $GL(n, \mathbb{R})$. Então $U(s)$ é um elemento de $O(1, n - 1)$ se e somente se $U(s_0) \in O(1, n - 1)$ para algum $s_0 \in \mathbb{R}$ e $U^{-1} dU/ds \in o(1, n - 1)$.*

Demonstração. Seja $U(s)$ uma curva $O(1, n - 1)$, então pelo Lema 1.3.1

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} S U^T &= -U S \frac{dU^T}{ds} \\ -U^{-1} \frac{dU}{ds} S U^T &= S \frac{dU^T}{ds} \\ -U^{-1} \frac{dU}{ds} &= S \frac{dU^T}{ds} (U^T)^{-1} S \\ -U^{-1} \frac{dU}{ds} &= S \left(U^{-1} \frac{dU}{ds} \right)^T S, \end{aligned}$$

ou seja, $U^{-1} dU/ds \in o(1, n - 1)$.

Além disso, em particular existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $U(s_0) \in O(1, n - 1)$.

A recíproca é direta, pois se $V = U^{-1} dU/ds \in o(1, n - 1)$ então $S V^T S = -V$, logo

$$\frac{dU}{ds} S U^T + U S \frac{dU^T}{ds} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{d}{ds}(USU^T) = 0 = \frac{dS}{ds}$$

o que implica que $USU^T = S + c$ em que c é uma constante, e como $U(s_0) \in O(1, n-1)$, segue que $c = 0$. Portanto, $U(s) \in O(1, n-1)$. \square

1.4 Curvas nulas em \mathbb{R}_1^3

Vamos considerar curvas e referenciais no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3, para mais adiante definir um “tipo especial” de hipersuperfícies Lorentzianas em \mathbb{R}_1^3 , as *b-scroll*, que servirão na classificação das hipersuperfícies Lorentzianas entre \mathbb{R}_1^n e \mathbb{R}_1^{n+1} .

Definição 1.4.1. Um *referencial nulo* é um trio ordenado de vetores $a, b, c \in \mathbb{R}_1^3$ tal que a e b são vetores nulos que satisfaz $\langle a, b \rangle = -1$, c é um vetor unitário do tipo espaço ortogonal ao plano gerado por a e b , e a matriz formada por $\{a, b, c\}$ tem determinante 1 ou -1.

Observação 1.4.1. Também podemos chamar de *referencial nulo* a matriz F formada pelos vetores $\{a, b, c\}$ tal que esses vetores verificam a Definição 1.4.1. Ou seja, se

$$F = (a, b, c) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

é um referencial nulo, então ele satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\langle a, a \rangle &= -a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0 \\
\langle b, b \rangle &= -b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 0 \\
\langle a, b \rangle &= -a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = -1 \\
\langle c, c \rangle &= -c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1 \\
\langle a, c \rangle &= -a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 = 0 \\
\langle b, c \rangle &= -b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 = 0 \\
\det F &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Proposição 1.4.1. Para qualquer referencial nulo, existe um único referencial ortonormal associado definido por

$$L(F) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b), \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b), c \right). \quad (1.3)$$

Demonstração. Com efeito

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(a \pm b), c \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle a, c \rangle \pm \langle b, c \rangle \} = 0 \\
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(a \pm b), \frac{1}{\sqrt{2}}(a \pm b) \right\rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle a, a \rangle \pm \langle a, b \rangle \pm \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle \} = \mp 1 \\
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b), \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) \right\rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle - \langle b, b \rangle \} = 0 \\
\langle c, c \rangle &= 1.
\end{aligned}$$

Logo, $L(F)$ é de fato ortonormal. □

Definição 1.4.2. Se $L(F) \in SO^+(1, 2)$, o referencial nulo F é dito *próprio*.

Definição 1.4.3.

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é o referencial nulo padrão.

Observação 1.4.2. *O referencial ortonormal associado a N é*

$$L(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

logo $\det L(N) = 1$ e $\langle L(N)e_0, e_0 \rangle = \langle e_0, e_0 \rangle = -1$, o que implica que $L(N) \in SO^+(1, 2)$, e assim N é um referencial nulo próprio.

Lema 1.4.1. *Se F é um referencial nulo, então $L(F) = F \cdot N^{-1}$.*

Demonstração. Notemos que $N = N^{-1}$, logo

$$\begin{aligned} F \cdot N^{-1} &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_0+b_0}{\sqrt{2}} & \frac{a_0-b_0}{\sqrt{2}} & c_0 \\ \frac{a_1+b_1}{\sqrt{2}} & \frac{a_1-b_1}{\sqrt{2}} & c_1 \\ \frac{a_2+b_2}{\sqrt{2}} & \frac{a_2-b_2}{\sqrt{2}} & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c \right) \\ &= L(F). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.2. *O conjunto de referenciais nulos próprios é precisamente a classe lateral à direita de $SO^+(1, 2)$ em $GL(3, \mathbb{R})$ determinada por N .*

Demonstração. Segue do Lema 1.4.1, pois se F é um referencial nulo próprio, então $L(F) \in SO^+(1, 2)$. □

Proposição 1.4.3. *Seja $F(s)$ uma curva em $GL(3, \mathbb{R})$. Então $F(s) \in SO^+(1, 2) \cdot N$ se e somente se $F(s_0) \in SO^+(1, 2) \cdot N$ para algum $s_0 \in \mathbb{R}$ e $F^{-1}dF/ds$ tem a forma*

$$\begin{pmatrix} k_1(s) & 0 & k_3(s) \\ 0 & -k_1(s) & k_2(s) \\ k_2(s) & k_3(s) & 0 \end{pmatrix}$$

com $k_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.4.4. Se a curva $F(s)$ é um elemento de $SO^+(1, 2) \cdot N$, então $F(s)$ é uma *curva referencial*.

Observação 1.4.3. *Pela Proposição 1.4.3, se $F(s)$ é uma curva referencial, então ela satisfaz*

$$\frac{dF}{ds} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ 0 & -k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 & 0 \end{pmatrix}$$

\Updownarrow

$$\left(\frac{da}{ds}, \frac{db}{ds}, \frac{dc}{ds} \right) = \begin{pmatrix} a_0k_1 + c_0k_2 & -b_0k_1 + c_0k_3 & a_0k_3 + b_0k_2 \\ a_1k_1 + c_1k_2 & -b_1k_1 + c_1k_3 & a_1k_3 + b_1k_2 \\ a_2k_1 + c_2k_2 & -b_2k_1 + c_2k_3 & a_2k_3 + b_2k_2 \end{pmatrix}$$

\Updownarrow

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} &= k_1(s)a(s) + k_2(s)c(s) \\ \frac{db}{ds} &= -k_1(s)b(s) + k_3(s)c(s) \\ \frac{dc}{ds} &= k_3(s)a(s) + k_2(s)b(s). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definição 1.4.5. As Equações em (1.4) são as *equações de Frenet* para $F(s)$.

Dado um referencial nulo próprio F e um sistema (1.4), existe uma única curva referencial $F(s)$ que satisfaz $F(0) = F$ e que tem (1.4) como equações de Frenet.

Definição 1.4.6. Seja I um aberto em \mathbb{R} , uma *curva nula* em \mathbb{R}_1^3 é uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ em que todos seus vetores tangentes são do tipo luz.

Definição 1.4.7. O conjunto de todos os vetores do tipo luz e do tipo tempo de \mathbb{R}_1^n é o *cone causal* de \mathbb{R}_1^n .

Proposição 1.4.4. Seja $x(s)$ uma curva nula em \mathbb{R}_1^3 tal que $x(0) = 0$. Então a imagem da curva está cone causal de \mathbb{R}_1^3

Demonstração. Como $x(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s))$ é uma curva nula, então

$$\left\langle \left(\frac{dx_0}{ds}, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right), \left(\frac{dx_0}{ds}, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2$$

Também temos que $x(0) = (x_0(0), x_1(0), x_2(0)) = (0, 0, 0)$ e podemos assumir que $dx_0/ds > 0$ (o caso $dx_0/ds < 0$ é análogo, e o caso $dx_0/ds = 0$ não se tem, pois se $dx_0/ds = 0$ então $dx/ds = 0$).

Seja $\tau(s)$ a projeção da curva $x(s)$ sobre o plano Euclidiano gerado por $\{e_1, e_2\}$. Então a longitude de arco desde $\tau(0)$ até $\tau(s)$ é

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\| \frac{d\tau}{du} \right\| du &= \int_0^s \left(\left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 \right)^{1/2} du \\ &= \int_0^s \frac{dx_0}{du} du = x_0(s) \end{aligned}$$

Notemos que esta deve ser maior ou igual à longitude de arco do segmento de linha de $\tau(0)$ até $\tau(s)$.

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1(s))^2 + (x_2(s))^2} = \|\tau(s)\| \leq x_0(s) \Rightarrow (x_1(s))^2 + (x_2(s))^2 \leq (x_0(s))^2.$$

Portanto $x(s)$ está no cone causal de \mathbb{R}_1^3 . □

Definição 1.4.8. Um referencial para uma curva nula $x(s)$ é uma curva referencial $F(s) = (a(s), b(s), c(s))$ tal que dx/ds é um escalar positivo múltiplo de $a(s)$, ou seja, $dx/ds = k_0(s)a(s)$ com $k_0(s) > 0$.

Observação 1.4.4. Os referenciais para curvas nulas não são únicos, por exemplo se $(a(s), b(s), c(s))$ é o referencial de uma curva $x(s)$ dada, $(1/2a(s), 2b(s), c(s))$ também é referencial de $x(s)$. Portanto, o referencial e a curva tem que ser dados juntos.

Definição 1.4.9. Chamaremos a curva nula $x(s)$ com seu referencial $F(s)$ de curva nula referencial (x, F) .

Observação 1.4.5. Se (x, F) é uma curva nula referencial, então se verificam as equações de Frenet mais a última equação dada para a curva $x(s)$. Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= k_0(s)a(s); \quad k_0(s) > 0 \\ \frac{da}{ds} &= k_1(s)a(s) + k_2(s)c(s) \\ \frac{db}{ds} &= -k_1(s)b(s) + k_3(s)c(s) \\ \frac{dc}{ds} &= k_3(s)a(s) + k_2(s)b(s). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dados um ponto y , um referencial nulo próprio F e funções $k_i(s)$ ($i = 0, \dots, 3$) com $k_0(s) > 0$, existe uma única curva nula referencial (x, F) que satisfaz $x(0) = y$, $F(0) = F$ e que verifica (1.5) com $F(s) = (a(s), b(s), c(s))$.

Exemplo 1.4.1. Curva nula referencial.

Usando as coordenadas com respeito a base canônica de \mathbb{R}_1^3 , definamos (x, F) como segue

$$F(s) : \begin{cases} x(s) = \left(\frac{4}{3}s^3 + s, \frac{4}{3}s^3 - s, 2s^2 \right), \\ a(s) = (4s^2 + 1, 4s^2 - 1, 4s), \\ b(s) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \\ c(s) = (-2s, -2s, -1). \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= (4s^2 + 1, 4s^2 - 1, 4s) \\ \frac{da}{ds} &= (8s, 8s, 4) \\ \frac{db}{ds} &= (0, 0, 0) \\ \frac{dc}{ds} &= (-2, -2, 0)\end{aligned}$$

Portanto $k_0 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ e $k_3 = 0$, logo notemos que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= a(s) \\ \frac{da}{ds} &= -4c(s) \\ \frac{db}{ds} &= 0c(s) \\ \frac{dc}{ds} &= 0a(s) - 4b(s)\end{aligned}$$

Se reordenamos, vemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{ds} \\ \frac{dc}{ds} \\ \frac{db}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Assim, podemos considerar a como a tangente, c a normal e b a binormal da curva x e obtemos uma analogia às equações de Frenet para curvas em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.4.10. Uma *curva referencial de Cartan* é uma curva nula referencial (x, F) cujas equações de Frenet satisfazem (1.6) com $dx/ds = a(s)$

Observação 1.4.6. (x, F) do Exemplo 1.4.1 é uma curva referencial de Cartan.

1.5 Fórmulas e equações para hipersuperfícies Lorentzianas

Uma hipersuperfície M em \mathbb{R}_1^{n+1} é uma *hipersuperfície Lorentziana* se o espaço tangente a M em cada ponto de M herda a métrica Lorentziana de \mathbb{R}_1^{n+1} . Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ é uma hipersuperfície isométrica, então $f(M)$ é uma hipersuperfície Lorentziana em \mathbb{R}_1^{n+1} que pode ser simplesmente denotada por M . A métrica Lorentziana sobre M , $f(M)$ e \mathbb{R}_1^{n+1} será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e o contexto resolverá qualquer ambiguidade. Cada ponto de uma hipersuperfície Lorentziana M tem uma vizinhança em M sobre a qual é definido um campo vetorial, usualmente definido por ξ consistindo de normais unitárias do tipo espaço.

Seja D a conexão usual sobre \mathbb{R}_1^{n+1} . A *conexão de Levi Civita* ∇ sobre M é dada pela *fórmula de Gauss*

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi, \quad (1.7)$$

em que X e Y são campos vetoriais tangentes sobre M , e ξ é um campo normal unitário do tipo espaço (local) sobre M .

Em (1.7) $h : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ é a forma bilinear simétrica, dita *segunda forma fundamental*. E associado a h temos o *operador da segunda forma fundamental* (ou operador de Weingarten) $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, simétrico em relação à métrica Lorentziana, definido por

$$D_X \xi = -A_\xi X, \quad (1.8)$$

que também satisfaz

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = h(X, Y) \quad (1.9)$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X, \quad (1.10)$$

em que $(\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y)$.

As equações (1.8) e (1.10) para o operador da segunda forma fundamental, são chamadas de *fórmula de Weingarten* e *equação de Codazzi* respetivamente.

Por outro lado, o *tensor curvatura* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é dado pela segunda forma fundamental e pela *equação de Gauss*

$$R(X, Y) = AX \wedge AY$$

em que $X \wedge Y$ denota o endomorfismo do espaço tangente definido por:

$$(X \wedge Y)Z = \langle Z, Y \rangle X - \langle Z, X \rangle Y.$$

Como nesta dissertação estamos trabalhando com funções $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$, ou seja $M = \mathbb{R}_1^n$, devemos considerar $R \equiv 0$.

Definição 1.5.1. Seja $p \in M$, $T_0(p) = \ker A_p = \{v \in T_p M : (Av)_p = 0\}$ é o *espaço de nulidade relativa* em p .

Observação 1.5.1. Na definição anterior, omitimos o campo normal unitário ξ pois estamos trabalhando com *hipersuperfícies*, ou seja, o campo normal tem dimensão 1, logo não há confusão em escrever A no lugar de A_ξ .

1.6 Exemplos de hipersuperfícies Lorentzianas

Nesta seção apresentaremos três exemplos de hipersuperfícies Lorentzianas. Mais adiante veremos que toda hipersuperfície Lorentziana entre \mathbb{R}_1^n e \mathbb{R}_1^{n+1} pode se decompor unicamente utilizando esses três exemplos.

Exemplo 1.6.1. $M \times \mathbb{R}$

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g e \mathbb{R} é a reta real. Um vetor tangente a $M \times \mathbb{R}$ é da forma $(v, a\partial/\partial t)$ em que v é tangente a M e $a \in \mathbb{R}$. Logo

$$\langle (v, a\partial/\partial t), (w, b\partial/\partial t) \rangle = g(v, w) - ab$$

é uma métrica Lorentziana sobre $M \times \mathbb{R}$. Ainda mais, se $M \subset \mathbb{R}_1^n$, então $M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Exemplo 1.6.2. *Cilindros sobre curvas do tipo tempo*

Seja $c(t)$ uma curva do tipo tempo e velocidade unitária em \mathbb{R}_1^2 , e \mathbb{R} a reta real com a métrica usual $(dt)^2$ (definida positiva), e \mathbb{R}_1^1 denotando a reta real com a métrica $-(dt)^2$ definida negativa. Então c é uma hipersuperfície isométrica de \mathbb{R}_1^1 em \mathbb{R}_1^2 , e se os produtos são produtos Riemannianos diretos,

$$c \times id : \mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}$$

define uma hipersuperfície isométrica: $\mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$.

Exemplo 1.6.3. *b-scroll*

Seja $(x(s), F(s))$ uma curva referencial de Cartan em \mathbb{R}_1^3 . A *b-scroll* de (x, F) é parametrizado por $f(s, u) = x(s) + ub(s)$. Então

$$\begin{aligned} f_*(\partial/\partial s) &= dx/ds + udb/ds = a(s) + uk_3(s)c(s) \\ f_*(\partial/\partial u) &= b(s) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial s) \rangle &= \langle a(s), a(s) \rangle + 2uk_3(s)\langle a(s), c(s) \rangle + (uk_3(s))^2\langle c(s), c(s) \rangle \\ &= (uk_3(s))^2 \\ \langle f_*(\partial/\partial u), f_*(\partial/\partial u) \rangle &= \langle b(s), b(s) \rangle = 0 \\ \langle f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial u) \rangle &= \langle a(s), b(s) \rangle + uk_3(s)\langle c(s), b(s) \rangle = -1. \end{aligned}$$

Assim, a métrica em $f(s, u)$ com respeito a base $\{f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial u)\}$ tem a matriz

$$\begin{pmatrix} (uk_3(s))^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E como esta matriz tem determinante -1 , segue que a métrica é Lorentziana.

O seguinte teorema nos dá uma relação entre uma b -scroll e superfícies Lorentzianas planas.

Teorema 1.6.1. *Uma b -scroll é plana se e somente se $k_3(s) = 0$ para todo s .*

Demonstração. Se $k_3(s) = 0$, então a métrica em $f(s, u)$ tem a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

em relação à base $\{f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial u)\}$.

Por outro lado, se consideremos em \mathbb{R}_1^2 o referencial nulo dado pelos vetores $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$, então f define uma isometria local entre a b -scroll e \mathbb{R}_1^2 , portanto a b -scroll é plana.

Inversamente, se a b -scroll é plana, então $R \equiv 0$.

Logo

$$\begin{aligned} 0 &= R\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial u} \\ &= \left(A \frac{\partial}{\partial u} \wedge A \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial u} \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, A \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle A \frac{\partial}{\partial u} - \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, A \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle A \frac{\partial}{\partial s} \\ &= \nabla_u \nabla_s \frac{\partial}{\partial u} - \nabla_s \nabla_u \frac{\partial}{\partial u} \\ &= \nabla_u \left(-uk_3(s)^2 \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= -k_3(s)^2 \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Portanto $k_3(s) = 0$ para todo s . □

Observação 1.6.1. *A curva nula referencial do Exemplo 1.4.1 define uma b -scroll plana.*

Assim, as b -scroll são superfícies Lorentzianas planas só no caso em que b é paralela ao longo da curva c . Notemos também que c é normal unitária do tipo espaço e é paralela ao longo de b , segue que $f_*(\partial/\partial u) = b(s)$ gera o espaço de nulidade relativa em cada ponto $f(s, u)$ tal que $k_2(s) \neq 0$ (ver (1.11) a continuação).

Uma curva referencial de Cartan em que b é paralelo ao longo da curva x é chamado *cubo nulo generalizado* (CNG). Para entender a origem deste nome, lembremos que as equações de Frenet para um CNG $(x(s), F(s))$ satisfazem

$$\frac{dx}{ds} = a(s); \quad \frac{da}{ds} = k_2(s)c(s); \quad \frac{db}{ds} = 0; \quad \frac{dc}{ds} = k_2(s)b(s) \quad (1.11)$$

Se $k_2(s) = 1$ para todo s , então a curva $x(s)$ com condições iniciais $x(0) = 0$ e $F(0) = N$ pode ser calculada, pois $b(s) = b(0)$. Logo obtemos c , a e x ao integrarmos b , c e a respetivamente, assim

$$x(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6}s^3 + s \right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6}s^3 - s \right), \frac{1}{2}s \right).$$

A curva anterior é chamada por Bonnor em [2] de *cubo nulo*. Daí deriva o nome de cubo nulo generalizado para quando k_2 não necessariamente é 1.

O exemplo 1.4.1 é um CNG, portanto o Teorema 1.6.1 implica que a b -scroll parametrizada por

$$f(s, u) = \left(\frac{4}{3}s^3 + s + \frac{1}{2}u, \frac{4}{3}s^3 - s + \frac{1}{2}u, 2s^2 \right)$$

define uma superfície Lorentziana plana em \mathbb{R}_1^3 ((s, u) são coordenadas com respeito ao referencial nulo para \mathbb{R}_1^2 tal que $\langle \partial/\partial s, \partial/\partial s \rangle = \langle \partial/\partial u, \partial/\partial u \rangle = 0$ e $\langle \partial/\partial s, \partial/\partial u \rangle = -1$. As coordenadas em \mathbb{R}_1^3 são com respeito à base canônica ortogonal).

Capítulo 2

Completitude da folheação de nulidade relativa

Neste capítulo estudaremos o comportamento do espaço de nulidade relativa num ponto, e destacaremos dois casos importantes, ou seja, quando o espaço de nulidade relativa herda uma métrica não degenerada ou degenerada. A partir do espaço de nulidade relativa, definiremos uma função T_0 e provaremos que ela é uma distribuição totalmente geodésica e completa de certo conjunto em \mathbb{R}_1^n .

Sejam $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície isométrica, $p \in \mathbb{R}_1^n$ e $T_0(p)$ o espaço de nulidade relativa em p . Como $R \equiv 0$, da Equação de Gauss (1.7) segue que a dimensão de $T_0(p)$ é $n - 1$ ou n .

Definição 2.0.1. $p \in \mathbb{R}_1^n$ é um *ponto umbílico* se $\dim T_0(p) = n$.

Cabe observar que o caso interessante de estudar são os pontos $p \in \mathbb{R}_1^n$ em que $\dim T_0(p) = n - 1$, por isso seja W o conjunto de todos os pontos não umbílicos em \mathbb{R}_1^n .

$$W = \{p \in \mathbb{R}_1^n : p \text{ não é um ponto umbílico}\}.$$

Proposição 2.0.1. W é um subconjunto aberto de \mathbb{R}_1^n .

Demonstração. Basta notar que $W = \{p \in \mathbb{R}_1^n : A \neq 0\}$. □

Observação 2.0.2. *Seja $p \in W$. Então $T_0(p)$ é um subespaço de dimensão $n - 1$ de $T_p\mathbb{R}_1^n \approx \mathbb{R}_1^n$. Portanto pelo Teorema 1.2.1, só uma das seguintes afirmações é verdadeira*

- (i) $T_0(p)$ é um subespaço Lorentziano de dimensão $n - 1$ e a métrica herdada por $T_0(p)$ é não degenerada.
- (ii) $T_0(p)$ é um subespaço Euclidiano de dimensão $n - 1$ e a métrica herdada por $T_0(p)$ é não degenerada.
- (iii) $T_0(p) \simeq E \oplus \text{Span}\{l\}$ em que E é um subespaço Euclidiano de dimensão $n - 2$, l é um vetor do tipo luz, $\langle y, l \rangle = 0$ para todo $y \in E$ e a métrica herdada por $T_0(p)$ é degenerada.

Definição 2.0.2. Diremos que o espaço de nulidade relativa é *degenerado* ou *não degenerado* se a métrica por ele herdada é degenerada ou não degenerada.

Teorema 2.0.2. *Seja $p \in W$. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) $T_0(p)$ é degenerado.
- (ii) A imagem de A_p é uma reta do tipo luz.
- (iii) $A_p^2 \equiv 0$.

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii) Sabemos que $T_0(p)$ é um subespaço de dimensão $n - 1$ de \mathbb{R}_1^n , logo existe η tal que $\mathbb{R}_1^n = T_0(p) \oplus \text{Span}\{\eta\}$, com $A\eta \neq 0$ (pois $p \in W$).

Por outro lado $T_0(p)$ é degenerado o que implica que $T_0(p) = E \oplus \text{Span}\{l\}$. Assim $\mathbb{R}_1^n = E \oplus \text{Span}\{l\} \oplus \text{Span}\{\eta\}$. (pela Observação 2.0.2).

Então, se $y \in \mathbb{R}_1^n$, $y = \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + bl + c\eta$.

$$\Rightarrow Ay = \sum_{i=1}^{n-2} a_i A e_i + bAl + cA\eta = cA\eta.$$

Portanto $ImA_p = Span\{A\eta\}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\langle A\eta, e_i \rangle &= \langle \eta, Ae_i \rangle = 0 \\ \langle A\eta, l \rangle &= \langle \eta, Al \rangle = 0\end{aligned}$$

Logo, $A\eta$ é ortogonal a E e a l . Mas $A\eta \notin E$, pois se $A\eta = \sum_{j=1}^{n-2} a_j e_j$ então $0 = \langle A\eta, e_i \rangle = a_i$ para todo i , o que contradiz o fato de $A\eta \neq 0$.

Assim $\{e_1, \dots, e_{n-2}, A\eta\}$ geram o complemento ortogonal do vetor do tipo luz l .

Pela Proposição 1.2.1 (d), o produto interno em $E \oplus Span\{A\eta\}$ é semidefinido positivo e tem posto $n - 2$, portanto $A\eta$ é do tipo luz. Logo, pela Proposição 1.2.1 (c), l e $A\eta$ são linearmente dependentes, de modo que $Span\{l\} = Span\{A\eta\} = ImA_p$.

(ii) \Rightarrow (iii) Seja $y \in \mathbb{R}_1^n$, $y \neq 0 \Rightarrow A_p y$ é do tipo luz.

$$\Rightarrow 0 = \langle A_p y, A_p y \rangle = \langle A_p^2 y, y \rangle$$

Como y é arbitrário, segue que $A_p^2 \equiv 0$.

(iii) \Rightarrow (i) Se $A_p^2 \equiv 0 \Rightarrow ImA_p$ está em $T_p(0)$

Como na prova de (i) \Rightarrow (ii) podemos provar que existe $\eta \in \mathbb{R}_1^n$ tal que $ImA_p = Span\{A\eta\}$ em que $A\eta \neq 0$.

$$\text{Se } y \in T_0(p) \Rightarrow \langle y, A\eta \rangle = \langle Ay, \eta \rangle = 0.$$

Portanto $\langle y, A\eta \rangle \neq 0$ para todo $y \in T_0(p)$ e como $A\eta \in T_0(p)$ é diferente de zero, segue que $T_0(p)$ é degenerado.

□

Seja G o subconjunto de W definido por $G = \{p \in W : T_0(p) \text{ é não degenerado}\}$

Corolário 2.0.1. G é um subconjunto aberto de W , e portanto de \mathbb{R}_1^n .

Demonstração. Pelo Teorema 2.0.2 $G = \{p \in W : A_p^2 \neq 0\}$

□

2.1 A distribuição de nulidade relativa

Uma folheação de dimensão k de uma variedade diferenciável M é uma decomposição em uma única união disjunta de subvariedades conexas de dimensão k chamadas de folhas. Os planos tangentes a essas folhas definem uma distribuição ou um campo de k -planos. Este último é uma aplicação π que associa a cada $p \in M$ um subespaço π_p de dimensão k de T_pM . Logo, uma subvariedade imersa $F \subset M$ é dita subvariedade integral de π , se para todo $p \in F$ temos $\pi_p \subset T_pF$.

Quando por cada ponto de M passa uma única subvariedade integral de dimensão k , dizemos que π é completamente integrável ou que π define uma folheação de dimensão k de M . Neste caso as subvariedades integrais conexas e maximais pela ordem de inclusão serão as folhas da folheação.

Notemos que a decomposição da variedade define a distribuição, ou a distribuição pode definir a decomposição, logo podemos chamar de folheação à mesma distribuição.

Definição 2.1.1. Uma *distribuição* de posto k em uma variedade diferenciável M é uma correspondência π que associa a cada ponto $p \in M$ um subespaço vetorial $\pi(p)$, de dimensão k , de T_pM .

Decorre da definição anterior que para qualquer ponto $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$ e k campos vetoriais X_1, X_2, \dots, X_k definidos em U tais que

$$\pi(q) = \text{Span}\{X_1(q), X_2(q), \dots, X_k(q)\} \quad (2.1)$$

para todo q em U . Diremos que uma distribuição π é diferenciável se é possível escolher campos vetoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, que satisfazem (2.1) em uma vizinhança U de cada ponto $p \in M$.

Definição 2.1.2. Uma *folheação* de um subconjunto aberto de uma variedade é uma distribuição diferenciável e integrável sobre o subconjunto. Uma distribuição

diferenciável, em particular, uma folheação é totalmente geodésica se $\nabla_X Y$ pertence à imagem da distribuição, cada vez que X e Y pertencem à mesma.

Observação 2.1.1. *Lembremos que o transporte paralelo ao longo de curvas cujos vetores tangentes pertencem à imagem de uma folheação totalmente geodésica preserva a folheação.*

Teorema 2.1.1. (Frobenius) *Seja π um campo de k -planos de classe \mathcal{C}^r ($r \geq 1$) em M . As seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) π é completamente integrável.
- (ii) *Dados dois campos \mathcal{C}^r X, Y definidos num aberto $U \subset M$, tais que para todo $p \in U$, $X(p), Y(p) \in \pi(p)$, então $[X, Y](p) \in \pi(p)$. Para abreviar diremos que X e Y são tangentes a π .*
- (iii) *Para cada $p_0 \in M$ existem uma vizinhança U de p_0 e um difeomorfismo \mathcal{C}^r $f : U \rightarrow (-1, 1)^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, tal que os subconjuntos de U definidos por $F_p = \{q \in U : f_j(q) = f_j(p), j = k + 1, \dots, n\}$ são subvariedades integrais de π .*

Demonstração. Ver [3] pg.15. □

Definição 2.1.3. As subvariedades integrais conexas maximais dadas pela folheação segundo o Teorema 2.1.1 de Frobenius serão chamadas de *folhas* da folheação.

Definição 2.1.4. Uma folheação totalmente geodésica é *completa* se qualquer geodésica com parâmetro afim, pode ser estendida a todos os valores de parâmetro e ainda se encontrar na folha da folheação.

Definição 2.1.5. Sobre W definimos a *distribuição de nulidade relativa* de dimensão $n - 1$, como sendo $T_0 : p \mapsto T_0(p)$.

Nosso objetivo será provar que T_0 é uma folheação totalmente geodésica completa de W . Para isto, primeiro provaremos que $T_0|_G$ é uma folheação totalmente geodésica completa de G (segundo [9], que é uma adaptação de [1] e [4]). Depois mostraremos

que $W \setminus G$ é aberto em W e posteriormente que $T_0|_{W \setminus G}$ é uma folheação totalmente geodésica completa de $W \setminus G$. E finalmente concluiremos que $G = \emptyset$ ou $G = W$, assim T_0 é uma folheação totalmente geodésica de W .

2.2 Caso não degenerado

Nesta seção, consideremos a restrição da distribuição de nulidade relativa a G , que corresponde aos pontos onde $T_0(p)$ é não degenerado. Portanto, para cada $p \in G$ $T_0(p)$ é um subespaço de dimensão $n - 1$ Lorentziano ou Euclidiano de \mathbb{R}_1^n , e existe um complemento ortogonal unicamente determinado para $T_0(p)$ em \mathbb{R}_1^n , que será denotado por $T_0^\perp(p)$ (o que não necessariamente ocorre se $T_0(p)$ é degenerado).

$$\mathbb{R}_1^n = T_0(p) \oplus T_0^\perp(p)$$

Proposição 2.2.1. $T_0^\perp(p)$ é um autoespaço não trivial para A_p

Demonstração. Pelo Lema 1.1.1 $\dim T_0^\perp(p) = 1$, logo existe $z_p \neq 0$ tal que

$$\text{Span}\{z_p\} = T_0^\perp(p).$$

Como $T_0(p)$ é do tipo espaço ou tempo, $T_0^\perp(p)$ é do tipo tempo ou espaço respectivamente. Logo,

$$\langle z_p, z_p \rangle \neq 0.$$

Por outro lado se $y \in T_0(p)$,

$$0 = \langle z_p, A_p y \rangle = \langle A_p z_p, y \rangle,$$

assim $A_p z_p \in T_0^\perp(p)$ e portanto existe $\lambda(p)$ tal que $A_p z_p = \lambda(p) z_p$.

Como $\lambda(p)$ não depende de z , segue que $T_0^\perp(p)$ é um autoespaço não trivial de A_p . □

Observação 2.2.1. Já que a função $\lambda(p)$ é um autovalor não nulo de A_p para cada $p \in G$, a função λ é diferenciável.

Proposição 2.2.2. T_0 e T_0^\perp são distribuições diferenciáveis sobre G .

Demonstração. Sejam $p_0 \in G$, $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ uma base de $T_0(p_0)$ e $\{X_n\}$ uma base de $T_0^\perp(p_0)$.

Considere

$$\begin{aligned} Y_i &= (A - \lambda I)X_i; & 1 \leq i \leq n-1 \\ Y_n &= AX_n. \end{aligned}$$

em que I denota a transformação identidade.

Em p_0 temos $Y_i = -\lambda X_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $Y_n = \lambda X_n$.

Assim, Y_1, \dots, Y_n são linearmente independentes em p_0 e portanto numa vizinhança U de p_0 .

Logo, em cada ponto de U temos

$$\begin{aligned} AY_i &= A(A - \lambda I)X_i = 0; & 1 \leq i \leq n-1 \\ (A - \lambda I)Y_n &= (A - \lambda I)AX_n = A^2X_n - \lambda AX_n = 0. \end{aligned}$$

Portanto $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in T_0$ e $Y_n \in T_0^\perp$, logo $\{Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ é uma base para T_0 , e Y_n é uma base para T_0^\perp . Ou seja, T_0 e T_0^\perp são diferenciáveis. \square

Proposição 2.2.3. T_0 é integrável.

Demonstração. Pelo Teorema de Frobenius 2.1.1, basta provar que se para todo $p \in G$, $X(p), Y(p) \in T_0(p)$, tem-se $[X, Y](p) \in T_0(p)$.

Com efeito, pela Equação de Codazzi (1.10) temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)Y &= (\nabla_Y A)X \\ \Rightarrow \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y) &= \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X) \end{aligned}$$

Mas $AY = AX = 0$ pois $X(p), Y(p) \in T_0(p)$ para todo $p \in G$. Logo $A(\nabla_X Y) = A(\nabla_Y X)$.

$$\Rightarrow A(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = A([X, Y]) = 0$$

Portanto $[X, Y](p) \in T_0(p)$ para todo $p \in G$. □

Proposição 2.2.4. T_0 é folheação totalmente geodésica de G .

Demonstração. Se temos X, Y dois campos vetoriais pertencentes a T_0 , queremos provar que $\nabla_X Y$ pertence também a T_0 . Para isto, se Z é um campo vetorial pertencente a T_0^\perp , basta provar que $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$.

Pela Equação de Codazzi (1.10) temos que

$$\nabla_X(AZ) - A(\nabla_X Z) = \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X). \quad (2.2)$$

Se U é um vetor tangente, podemos decompor ele nas componentes T_0 e T_0^\perp , $U = U_0 + U^\perp$.

Então $AU = AU_0 + AU^\perp = \lambda U^\perp$ e $(A - \lambda I)U = AU - \lambda U = \lambda U^\perp - \lambda(U_0 + U^\perp) = -\lambda U_0$. Usando isto para AZ e $A(\nabla_Z X)$ e substituindo em (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} (X\lambda)Z + \lambda\nabla_X Z - A(\nabla_X Z) &= \nabla_Z(AX) - \lambda(\nabla_Z X)^\perp \\ (X\lambda)Z + -(A - \lambda I)\nabla_X Z &= \nabla_Z(AX) - \lambda(\nabla_Z X)^\perp \\ (X\lambda)Z + \lambda(\nabla_X Z)_0 &= 0 - \lambda(\nabla_Z X)^\perp \end{aligned}$$

Tomando as componentes T_0 e T_0^\perp , como $\lambda \neq 0$ segue

$$\lambda(\nabla_X Z)_0 = 0 \Rightarrow (\nabla_X Z)_0 = 0 \Rightarrow \nabla_X Z \in T_0^\perp \quad (2.3)$$

$$(X\lambda)Z + \lambda(\nabla_Z X)^\perp = 0 \Rightarrow (\nabla_Z X)^\perp = 0. \quad (2.4)$$

Se Y é um campo vetorial arbitrário pertencente a T_0 então $\langle Y, Z \rangle = 0$. Portanto,

$$0 = X \cdot \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle.$$

□

Definição 2.2.1. Dizemos que $M_0(p)$ é a folha de T_0 que passa pelo ponto p .

Da Proposição 2.2.4 segue que $M_0(p)$ é uma parte de um hiperplano, pois estamos num espaço de Lorentz-Minkowski com a conexão plana.

Para mostrar que T_0 é uma folheação completa de G , consideremos uma curva p_t com parâmetro afim $0 \leq t < b$, começando num ponto $p_0 \in G$ e contida em $M_0(p_0)$. Como \mathbb{R}_1^n é completo, p_t pode ser estendida indefinidamente em \mathbb{R}_1^n , então basta provarmos que $p_t \in M_0(p)$ para todo t .

Seja y um ponto da geodésica $y = p_{t_1}$ onde $0 < t_1 < b$. Seja X uma extensão do campo vetorial tangente \vec{p}_t para um T_0 -campo numa vizinhança de y em \mathbb{R}_1^n (T_0 -campo quer dizer que $AX = 0$). Se Z_t é um T_0^\perp campo ao longo de p_t , seja Z uma extensão de Z_t a um T_0^\perp -campo numa vizinhança de y em \mathbb{R}_1^n . Definimos $P : T_0 \times T_0^\perp \rightarrow T_0^\perp$, sendo $P(X, Z) = (\nabla_Z X)^\perp$, numa vizinhança V de y .

Lema 2.2.1. *Existe um campo vetorial Z_t ao longo de p_t para $0 \leq t \leq b$ tal que $Z_t \in T_0^\perp(p_t)$ e $\nabla_t Z_t = P(X, Z_t)$ para $0 \leq t < b$.*

Demonstração. Suponha que Z_t é uma solução da equação diferencial $\nabla_{p'_t(t)} Z_t := \nabla_t Z_t = P_{p_t}(\vec{p}_t, Z_t)$ ao longo de p_t satisfazendo uma T_0^\perp condição inicial em $t = 0$.

Se $y = p_{t_1}$ é um ponto sobre a geodésica, então sejam X e Z extensões de \vec{p}_t e Z_t perto de y . Então, segue que sobre cada y na geodésica temos

$$\nabla_X Z = P(X, Z)$$

Portanto, da definição de P temos

$$\nabla_X^2 Z = \nabla_X(P(X, Z)) = \nabla_X(\nabla_Z X)^\perp = (\nabla_X \nabla_Z X)^\perp,$$

pois $X \in T_0$ e T_0 é totalmente geodésica.

Agora, já que não existe torsão $[X, Z] = \nabla_X Z - \nabla_Z X$. Logo, obtemos

$$\nabla_X^2 Z = (\nabla_Z \nabla_X X)^\perp + (\nabla_{\nabla_X Z} X)^\perp - (\nabla_{\nabla_Z X} X)^\perp. \quad (2.5)$$

Como $X \in T_0$, $\nabla_X X \in T_0$, em particular $(\nabla_X X)_y = (\nabla_t \vec{p}_t)_{t_1} = 0$

Logo se $Y \in T_0^\perp$,

$$\langle \nabla_Z \nabla_X X, Y \rangle_y = Z \langle \nabla_X X, Y \rangle_y - \langle (\nabla_X X)_y, \nabla_Z Y \rangle = 0.$$

O que implica que $\nabla_Z \nabla_X X \in T_0$, portanto $(\nabla_Z \nabla_X X)^\perp = 0$ ao longo da geodésica.

Já que $X \in T_0$ e $Z \in T_0^\perp$, $\nabla_X Z \in T_0^\perp$ (ver 2.3).

E portanto por definição

$$(\nabla_{\nabla_X Z} X)^\perp = P(X, \nabla_X Z)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\nabla_Z X} X)^\perp &= (\nabla_{(\nabla_Z X)_0 + (\nabla_Z X)^\perp} X)^\perp \\ &= (\nabla_{(\nabla_Z X)^\perp} X)^\perp \\ &= P(X, (\nabla_Z X)^\perp) \\ &= P(X, P(X, Z)). \end{aligned}$$

Assim, ao longo da geodésica

$$\begin{aligned} (\nabla_X^2 Z) &= P(X, \nabla_X Z) - P(X, P(X, Z)) \\ &= P(X, \nabla_X Z - P(X, Z)) \\ &= P(X, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Agora, já que $P : T_0 \times T_0^\perp \rightarrow T_0^\perp$ é bilinear, a equação diferencial $\nabla_t Z_t$ admite

uma única solução Z_t , $0 \leq t < b$, correspondente para qualquer condição inicial $Z_0 \in T_0^\perp(p_0)$. Tal solução deve verificar $\nabla_t^2 Z_t = 0$.

Se \mathfrak{Z} é um T_0^\perp -campo paralelo ao longo de p_t , com $0 \leq t < b$, então para qualquer função diferenciável $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos $Z_t = \Phi(t)\mathfrak{Z}$ e $d^2\Phi/dt^2 = 0$. Portanto $\Phi(t) = \gamma t + \beta$, em que

$$\begin{aligned} Z_0 &= \beta\mathfrak{Z} \\ \gamma\mathfrak{Z} &= (\nabla_t Z_t)|_{t=0} = P(\vec{p}_t, Z_t)|_{t=0} = P(\vec{p}_0, \beta\mathfrak{Z}) \end{aligned}$$

Já que \mathfrak{Z} pode ser estendida como um campo vetorial paralelo ao longo de p_t além de $t = b$, o campo $Z_t = (\gamma t + \beta)\mathfrak{Z}$ pode também ser estendido além de $t = b$. Se $0 \leq t < b$, então $Z_t \in T_0^\perp(p_t)$. \square

Lema 2.2.2. $p_b \in W$.

Demonstração. Sejam Y_t um campo vetorial paralelo ao longo de p_t , tal que $Y_b \in T_0(p_b)$, e Z_t do lema anterior

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle AZ_t, Y_t \rangle &= \langle \nabla_t(\lambda Z_t), Y_t \rangle \\ &= \langle (X\lambda)Z + \lambda(\nabla_t Z_t), Y_t \rangle \\ &= \langle (X\lambda)Z + \lambda(\nabla_{Z_t} X)^\perp, Y_t \rangle = 0. \end{aligned}$$

Já que $\langle AZ_b, Y \rangle = \langle Z_b, AY_b \rangle = 0$, segue que $\langle AZ_t, Y_t \rangle = 0$ para todo $t \in [0, b]$, em particular para $t = 0$. Mas $\langle AZ, Y \rangle_{p_0} = \lambda(p_0)\langle Z, Y \rangle_{p_0}$ implica que $\langle Z_0, Y_0 \rangle = 0$, pois $\lambda(p_0) \neq 0$.

Assim, Y_0 é ortogonal a $T_0^\perp(p_0) \Rightarrow Y_0 \in T_0(p_0)$.

Portanto, o isomorfismo transporte paralelo aplica $T_0(p_0)$ de dimensão $n-1$ sobre $T_0(p_b)$, logo $\dim T_0(p_b) = n-1 \Rightarrow p_b \in W$. \square

Lema 2.2.3. Se $p_b \in W$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $p_t \in M_0(p_0)$ para todo $t \in [0, b + \varepsilon)$.

Demonstração. Como T_0 é paralelo ao longo da curva p_t ($D_{p_t}X = 0$ para todo X na imagem de T_0) podemos escolher campos vetoriais paralelos ortogonais Y_i^t com $i = 1, \dots, n - 1$ tal que

$$T_0(p_t) = \text{Span}\{Y_1^t, \dots, Y_{n-1}^t\},$$

e estender paralelamente esses campos em \mathbb{R}_1^n para todo t . Assim $\text{Span}\{Y_1^t, \dots, Y_{n-1}^t\}$ é um subespaço, de dimensão $n - 1$, de \mathbb{R}_1^n .

Mais ainda

$$AY_b^j = \lim_{t \rightarrow b} Y_t^j = 0 \text{ para } j = 1, \dots, n - 1,$$

o que implica que

$$\text{Span}\{Y_1^b, \dots, Y_{n-1}^b\} \subseteq T_0(p_b),$$

mas como $p_b \in W$, $T_0(p_b)$ tem dimensão $n - 1$, segue que

$$\text{Span}\{Y_1^b, \dots, Y_{n-1}^b\} = T_0(p_b).$$

E como a métrica é preservada por transporte paralelo, $T_0(p_b)$ tem a mesma métrica que $T_0(p_t)$ para $t < b$, logo $T_0(p_b)$ é não degenerado, portanto $p_b \in G$. Mas G é aberto, logo existe $\delta > 0$ tal que $p_t \in G$ para $0 \leq t < b + \delta$.

Escolhamos um sistema de coordenadas y^i sobre p_t tal que a subvariedade integral de T_0 seja dada por

$$y^n = c, \text{ em que } c \text{ é uma constante.}$$

Em particular, $M_0(p_b)$ é a fatia $y^n = 0$.

A geodésica p_t está contida numa fatia $y^n = c$ que corresponde a $M_0(p_0)$ perto de p_b . Mas

$$c = \lim_{t \rightarrow b} p_t^n = p_b^n = 0,$$

assim $M_0(p_0) = M_0(p_b)$. Portanto, $M_0(p_0)$ é uma parte de um hiperplano aberto que contém p_b , logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $p_t \in M_0(p_0)$ para $0 \leq t < b + \varepsilon$. \square

Teorema 2.2.1. T_0 é uma folheação totalmente geodésica completa de G .

Demonstração. Seja $b = \sup\{u : p_t \in M_0(p_0) \text{ para } 0 \leq t < u\}$, então $b > 0$.

Suponhamos que b é finito, pelo Lema 2.2.3, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p_t \in M_0(p_0)$ para $0 \leq t < b + \varepsilon$, o que é uma contradição. Portanto b é infinito.

Logo $p_t \in M_0(p_0)$ para todo t , ou seja, T_0 é completa. \square

Corolário 2.2.1. Para cada $p \in G$, $M_0(p)$ é um hiperplano contido em G .

Corolário 2.2.2. O conjunto aberto G é uma união de hiperplanos paralelos (com igual índice da métrica).

Proposição 2.2.5. Se $p \in G$, então $G_p = W_p$.

Demonstração. Suponha que p_t é uma curva de $p_0 = p$ a $p_b = z$ em W_p tal que $p_t \in G_{p_t}$ para $t \in [0, b)$.

Então, o Corolário 2.2.2 implica que $\{T_0(p_t) : t \in [0, b)\}$ é uma família de hiperplanos tangentes não degenerados paralelos. Portanto, existem campos Y_t^i ($i = 1, \dots, n-1$) ao longo de p_t , $0 \leq t < b$, tal que para $t \in [0, b)$

$$(i) \quad T_0(p_t) = \text{Span}\{Y_t^1, \dots, Y_t^{n-1}\},$$

$$(ii) \quad \langle Y_t^i, Y_t^j \rangle = \delta_i^j, \text{ com } \delta_1^1 = -1 \text{ se } T_0 \text{ é de Lorentz},$$

$$(iii) \quad \nabla_t Y_t^i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Estendemos cada Y_t^i paralelamente ao longo de p_t . Já que a métrica é preservada, $\text{Span}\{Y_b^1, \dots, Y_b^{n-1}\}$ é um hiperplano tangente não degenerado através de z . Também como $AY_b^i = \lim_{t \rightarrow b} AY_t^i = 0$, este hiperplano está contido em $T_0(z)$.

$z \in W_p$ implica que $T_0(z)$ tem dimensão $n-1$, e portanto coincide com o hiperplano não degenerado $\text{Span}\{Y_b^1, \dots, Y_b^{n-1}\}$. Como resultado, $z \in G_p$.

Assim, se p_t é qualquer curva em W_p saindo de $p \in G_p$, então $\sup\{u : p_t \in G_p \text{ para } t \in [0, u)\}$ não é finito. \square

2.3 Caso degenerado

Vamos considerar o conjunto $W \setminus G$ de pontos $q \in W$ tal que $T_0(q)$ carrega uma métrica degenerada. Assim, como foi visto antes, $T_0(q)$ admite a seguinte decomposição:

$$T_0(q) = E(q) \oplus \text{Span}\{l\}$$

em que l é um vetor do tipo luz e $E(q)$ é um subespaço Euclidiano de dimensão $n - 2$ de \mathbb{R}_1^n ortogonal a l . Notemos que apesar da linha de luz em $T_0(q)$ ser única, o complemento Euclidiano $E(q)$ não é.

Proposição 2.3.1. $W \setminus G$ é aberto.

Demonstração. Seja $p \in W \setminus G \subset \mathbb{R}_1^n$, como \mathbb{R}_1^n é localmente conexo, existe uma vizinhança conexa $V_p \subset \mathbb{R}_1^n$ de p .

Suponha que $V_p \cap G \neq \emptyset$, então existe $q \in V_p \cap G \subset W$.

Pela Proposição 2.2.5 $W_q = G_q$, e como $V_p \subset W_q$, segue que $p \in G_p \subset G$, o que é uma contradição.

Portanto, $V_p \subset W \setminus G$. □

Proposição 2.3.2. T_0 é uma distribuição diferenciável sobre $W \setminus G$.

Demonstração. Seja $q \in W \setminus G$, e seja η do tipo luz tal que $(A\eta)_q \neq 0$, portanto $A\eta \neq 0$ numa vizinhança de q .

Pelo Teorema 2.0.2 (ii), $A\eta$ pertence à linha de luz perto de q . Então, se p está perto de q e $X \in T_0(p)$

$$\langle A\eta, X \rangle = \langle \eta, AX \rangle = 0.$$

Portanto $(A\eta)_p \perp T_0(p)$.

Por outro lado, como $(A\eta)_p \neq 0$ e $\mathbb{R}_1^n = T_0(p) \oplus \text{Span}\{\eta\}$, se $(A\eta)_p \perp \eta_p$ segue que $(A\eta)_p \perp \mathbb{R}_1^n \Rightarrow (A\eta)_p = 0$, o que é uma contradição. Portanto $\langle (A\eta)_p, \eta_p \rangle \neq 0$.

Logo,

$$\begin{aligned}\langle A\eta + \eta, A\eta + \eta \rangle &= \langle A\eta, A\eta \rangle + 2\langle A\eta, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = 2\langle A\eta, \eta \rangle. \\ \langle A\eta + \eta, A\eta - \eta \rangle &= \langle A\eta, A\eta \rangle - \langle A\eta, \eta \rangle + \langle \eta, A\eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = 0. \\ \langle A\eta - \eta, A\eta - \eta \rangle &= \langle A\eta, A\eta \rangle - 2\langle A\eta, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = -2\langle A\eta, \eta \rangle.\end{aligned}$$

Assim, $\{A\eta + \eta, A\eta - \eta\}$ é um conjunto ortogonal de dois vetores linearmente independentes, um do tipo espaço e outro do tipo tempo, logo geram um plano Lorentziano que chamaremos de $\mathbb{L}^2(p)$, de dimensão 2, em \mathbb{R}_1^n .

Definamos $\mathbb{E}^{n-2}(p)$ o complemento ortogonal de $\mathbb{L}^2(p)$ em \mathbb{R}_1^n . Então se $Y \in \mathbb{E}^{n-2}(p)$

$$\begin{aligned}\langle A\eta + \eta, Y \rangle &= \langle A\eta, Y \rangle + \langle \eta, Y \rangle = 0 \\ \langle A\eta - \eta, Y \rangle &= \langle A\eta, Y \rangle - \langle \eta, Y \rangle = 0\end{aligned}$$

Somando as duas equações anteriores obtemos

$$0 = \langle A\eta, Y \rangle = \langle \eta, AY \rangle.$$

Mas $\eta = \frac{1}{2}(A\eta + \eta - (A\eta - \eta)) \in \mathbb{L}^2(p)$ e $\langle AY, A\eta \rangle = \langle A^2\eta, Y \rangle = 0$. Portanto, AY está no complemento ortogonal de $\mathbb{L}^2(p)$, ou seja, AY não está gerado por $A\eta \in \mathbb{L}^2(p)$, o que implica que $AY = 0$. Como Y é arbitrário, segue que $\mathbb{E}^{n-2}(p) \subset T_0(p)$.

Assim $\mathbb{E}^{n-2}(p)$ e $A\eta$ são como E e l definidos na Observação 2.0.2(iii) para $T_0(p)$.

Notemos que $\mathbb{E}^{n-2}(p)$ depende da escolha do campo local de luz.

Como η e $A\eta$ são diferenciáveis numa vizinhança de q , então é suficiente provar que $p \mapsto \mathbb{E}^{n-2}(p)$ define uma distribuição diferenciável perto de q .

Normalizemos $\{A\eta + \eta, A\eta - \eta\}$ em cada p perto de q e chamemos de $\{T_p, S_p\}$ a esta nova base para $\mathbb{L}^2(p)$, em que T e S são campos vetoriais unitários do tipo tempo e espaço, respectivamente.

Suponhamos $\mathbb{E}^{n-2}(q) = \text{Span}\{Y_q^1, \dots, Y_q^{n-2}\}$. Para $j = 1, \dots, n-2$ estendemos

Y_q^j para campos vetoriais Y^j numa vizinhança de q . E definamos Z^j por

$$Z^j = Y^j = \langle Y^j, S \rangle S + \langle Y^j, T \rangle T.$$

Notemos que

$$\langle Z^j, S \rangle = \langle Y^j, S \rangle - \langle Y^j, S \rangle \langle S, S \rangle + \langle Y^j, T \rangle \langle T, S \rangle = 0$$

E de igual forma

$$\langle Z^j, T \rangle = 0$$

pois $Y^j \perp S$ e $Y^j \perp T$.

Portanto, $Z_p^j \in \mathbb{E}^{n-2}(p)$ para todo $j \in \{1, \dots, n-2\}$.

Já que $Z_q^j = Y_q^j$, $\{Z^j\}_{j=1}^{n-2}$ é linearmente independente em q , e portanto também perto de q . Para esses pontos, $p \mapsto \mathbb{E}^{n-2}(p)$ é uma distribuição diferenciável. \square

Proposição 2.3.3. T_0 é integrável e $T_0|_{W \setminus G}$ é uma folheação de $W \setminus G$.

Demonstração. Notemos que a demonstração da Proposição 2.2.3 não utiliza o fato de $p \in G$ e portanto essa prova é válida para esta proposição também. \square

Proposição 2.3.4. As linhas de luz na folheação de nulidade relativa são paralelas ao longo de qualquer T_0 -direção.

Demonstração. Se $Y \in T_0$, então segue da Equação de Codazzi que

$$\begin{aligned} (\nabla_\eta A)Y &= (\nabla_Y A)\eta \\ \nabla_\eta(A\eta) - A(\nabla_\eta Y) &= \nabla_Y(A\eta) - A(\nabla_Y \eta) \\ -A(\nabla_\eta Y) &= \nabla_Y(A\eta) - A(\nabla_Y \eta) \\ A(\nabla_Y \eta - \nabla_\eta Y) &= \nabla_Y(A\eta) \\ -A([\eta, Y]) &= \nabla_Y(A\eta) \end{aligned}$$

Assim $\nabla_Y(A\eta)_q = -A([\eta, Y])_q$, ou seja, $\nabla_Y(A\eta)_q$ pertence à imagem de $A_q = \text{Span}\{A\eta_q\}$ se $q \in W \setminus G$. \square

Proposição 2.3.5. T_0 é uma folheação totalmente geodésica de $W \setminus G$.

Demonstração. Consideremos as construções vistas na demonstração da Proposição 2.3.2. Então \mathbb{E}^{n-2} denotará o complemento ortogonal do espaço gerado por $\{\eta, A\eta\}$ e $\{Z^j\}_{i=1}^{n-2}$ a base ortogonal.

Se $U \in \mathbb{R}_1^n$, então

$$U = \left(\sum_{j=1}^{n-2} \langle Z_q^j, U \rangle Z_q^j \right) + \frac{1}{\lambda(q)} (\langle U, \eta_q \rangle A\eta_q + \langle U, A\eta_q \rangle \eta_q), \quad (2.6)$$

em que $\lambda(y) \langle A\eta_y, \eta_y \rangle \neq 0$

Suponha que X e Y são T_0 -campos vetoriais perto de $q \in W \setminus G$, então $\langle Y, A\eta \rangle = \langle AY, \eta \rangle = 0$ e

$$\begin{aligned} 0 &= X \cdot \langle Y, A\eta \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, A\eta \rangle + \langle Y, \nabla_X(A\eta) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, A\eta \rangle + \langle Y, \nabla_\eta(AX) + A([X, \eta]) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, A\eta \rangle + \langle Y, \nabla_\eta 0 \rangle + \langle Y, A([X, \eta]) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, A\eta \rangle + \langle AY, [X, \eta] \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, A\eta \rangle \end{aligned}$$

De (2.6) a η -componente de $(\nabla_X Y)_q$ é zero, logo $(\nabla_X Y)_q$ só pode ser gerado por Z_y^j 's e $A\eta$. Assim $A_q(\nabla_X Y) = 0$ o que implica que $\nabla_X Y \in T_0(q)$. \square

Observação 2.3.1. Para provar que T_0 é uma folheação completa em G tivemos que fazer vários passos e nem todos dependeram da métrica ou do fato de estar em G . Assim, se consideremos um ponto p_0 em $W \setminus G$ e uma geodésica p_t com $0 \leq t < b$ na folha $M_0(p_0)$. Analogamente ao caso não degenerado, podemos estender a geodésica a todos os valores do parâmetro no espaço completo \mathbb{R}_1^n .

Por exemplo a demonstração do Lema 2.2.3 não depende da métrica, portanto é válida (salvo a parte que provamos que $M_0(p_0) \subset G$). Então só precisamos provar que $p_b \in W$.

Suponha que Ω é o gerador da linha de luz em $T_0(p_0)$. Estendemos Ω paralelamente ao longo de $M_0(p_0)$. Pela Proposição 2.3.4, Ω_q gera linhas de luz em $T_0(q)$ para cada $q \in M_0(p_0)$.

Seja $\eta \in T_{p_0}\mathbb{R}_1^n$ um vetor luz tal que $\langle \eta, \Omega_{p_0} \rangle = -1$ e $A_{p_0}\eta \neq 0$. Então $A_{p_0}\eta = \rho_0\Omega_0$ com $\rho_0 \neq 0$.

Estendamos η paralelamente ao longo de $M_0(p_0)$, então $A\eta_q$ é um múltiplo de Ω_q para cada $q \in M_0(p_0)$. Ao longo de p_t para $t \in [0, b)$, $(A\eta)_{p_t} = \rho_t\Omega_t$ em que $\Omega_t = \Omega_{p_t}$ e $\rho(0) = \rho_0$.

Podemos estender η e Ω paralelamente ao longo de p_t para todo t como vetores luz satisfazendo $\langle \eta, \Omega \rangle = -1$.

Se definimos ρ por $\rho(t) = -\langle A\eta, \eta \rangle_{p_t}$, então $(A\eta)_{p_t} = \rho(t)\Omega_t$ para $0 \leq t < b$, $\rho(t)$ diferenciavelmente definida para todo t .

Estendemos \vec{p}_t e η , respetivamente, para um T_0 -campo X e por extensão paralela a um campo luz η numa vizinhança N_q de q .

Temos da Equação de Codazzi:

$$\nabla_\eta(AX) - A(\nabla_\eta X) = \nabla_X(A\eta) - A(\nabla_X\eta), \quad (2.7)$$

avaliando em um ponto sobre a geodésica $q = p_{t_1}$, já que $X \in T_0$, $AX = 0$ em N_q e portanto $(\nabla_\eta(AX))_q$. Também, como η é paralelo ao longo $M_0(p_0) = M_0(q)$, de modo que $X_q \in T_0(q)$ o que implica que $A(\nabla_X\eta)_q = A(0) = 0$. Assim, em q (2.7) é

$$(\nabla_X(A\eta))_q + A(\nabla_\eta X)_q = 0. \quad (2.8)$$

Agora, se Z é um campo vetorial, então $\nabla_X Z$ depende do comportamento de Z sobre uma curva integral de X através do ponto em que $\nabla_X Z$ é avaliado. Aqui a curva integral de X através do ponto q é a geodésica p_t , ao longo da qual $(A\eta)_{p_t} = \rho(t)\Omega_t$ para $t \in [0, b)$.

Já que Ω_t é paralelo ao longo de p_t , temos

$$(\nabla_X(A\eta))_q = (\nabla_t(\rho(t)\Omega_t))_{t=t_1} = \rho'(t_1)\Omega_{t_1}. \quad (2.9)$$

Mas $\langle \eta, \Omega \rangle_q = -1$, de modo que se $U \in \eta_q^\perp$, então

$$U = U^\perp - \langle U, \eta_q \rangle \Omega_q - \langle U, \Omega_q \rangle \eta_q,$$

em que $U^\perp \in (\text{Span}\{\eta_q, \Omega_q\})^\perp$. Já que, $U^\perp, \Omega_q \in T_0(q)$, segue que

$$AU = -\langle U, \Omega_q \rangle A\eta_q \quad (2.10)$$

e, em particular,

$$A(\nabla_\eta X)_q = -\langle (\nabla_\eta X)_q, \Omega_q \rangle A\eta_q = -\langle (\nabla_\eta X)_q, \Omega_q \rangle \rho(t_1)\Omega_{t_1}. \quad (2.11)$$

As equações (2.8), (2.9) e (2.11) fornecem a seguinte equação para $0 \leq t < b$:

$$[\rho'(t) - \rho(t)\langle (\nabla_\eta X)_{p_t}, \Omega_t \rangle]\Omega_t = 0. \quad (2.12)$$

Para $0 \leq t < b$, definamos $\psi(t)$ por

$$\psi(t) = \langle (\nabla_\eta X)_{p_t}, \Omega_t \rangle.$$

Já que ρ é uma função diferenciável bem definida, a Equação ((2.12)) implica que ψ é uma função diferenciável bem definida sobre $[0, b)$.

Vamos investigar o comportamento de $\psi(t)$ ao longo da geodésica p_t para $0 \leq t < b$. Primeiro estenderemos Ω para uma vizinhança de $q \in \mathbb{R}_1^n$ (lembremos que Ω só tinha sido definido sobre $M_0(p_0)$ e ao longo de p_t) como

$$\Omega = -\frac{A\eta}{\langle A\eta, \eta \rangle}$$

perto de q , e está bem definido pois $\langle A\eta, \eta \rangle \neq 0$ em q , e portanto perto de q .

Como $W \setminus G$ é aberto, os pontos perto de q pertencem ao conjunto $W \setminus G$,

portanto Ω gera uma direção degenerada (ou linha de luz) no espaço de nulidade relativa desses pontos.

Agora

$$\frac{d\psi}{dt} = X \cdot \psi = X \langle \nabla_\eta X, \Omega \rangle = \langle \nabla_X \nabla_\eta X, \Omega \rangle + \langle \nabla_\eta X, \nabla_X \Omega \rangle. \quad (2.13)$$

Já que $R \equiv 0$ e não existe torsão, a Equação ((2.13)) é equivalente à

$$\frac{d\psi}{dt} = \langle \nabla_\eta \nabla_X X, \Omega \rangle - \langle \nabla_{\nabla_\eta X} X, \Omega \rangle + \langle \nabla_{\nabla_X \eta} X, \Omega \rangle + \langle \nabla_\eta X, \nabla_X \Omega \rangle. \quad (2.14)$$

Em que os últimos dois termos são zero pois $\nabla_X \eta = \nabla_X \Omega = 0$ ao longo de p_t .

E como $(\nabla_X X)_q = (\nabla_t \vec{p}_t)_{t_1} = 0$, segue que

$$\langle \nabla_\eta \nabla_X X, \Omega \rangle_q = \eta_q \langle \nabla_X X, \Omega \rangle - \langle (\nabla_X X)_q, (\nabla_\eta \Omega)_q \rangle = \eta_q \langle \nabla_X X, \Omega \rangle.$$

Já que T_0 é totalmente geodésica, $\nabla_X X \in T_0$. Portanto $\langle \nabla_X X, \Omega \rangle$ e $L_y \langle \nabla_X X, \Omega \rangle$ são nulos também. O que implica que $\langle \nabla_\eta \nabla_X X, \Omega \rangle = 0$ numa vizinhança de q .

Finalmente considerando a decomposição algébrica (2.14)

$$(\nabla_\eta X)_q = (\nabla_\eta X)_0 - \langle (\nabla_\eta X)_q, \Omega_q \rangle \eta_q$$

em que $(\nabla_\eta X)_0 \in T_0(q)$. Segue que T_0 é totalmente geodésica e Ω_q é gerador da direção degenerada de $T_0(q)$, portanto $\langle \nabla_{(\nabla_\eta X)_0} X, \Omega_q \rangle = 0$.

De modo que

$$\langle \nabla_{\nabla_\eta X} X, \Omega \rangle_q = -\langle \nabla_{\langle (\nabla_\eta X)_q, \Omega_q \rangle \eta_q} X, \Omega \rangle_q = -\langle (\nabla_\eta X)_q, \Omega_q \rangle \langle \nabla_\eta X, \Omega \rangle_q = -\psi(t_1)^2 \quad (2.15)$$

para $0 \leq t < b$.

Logo, o único termo que sobrevive em (2.14) é a componente $\eta_q, \langle \nabla_\eta \nabla_X X, \Omega \rangle$.

Assim, da Equação ((2.14)) segue que

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi(t)^2$$

para $0 \leq t < b$.

Se $\psi(a) = 0$ para algum $a \in [0, b)$, então $\psi \equiv 0$, então $\rho(t) = \rho_0$, logo $(A\eta)_{p_b} = \rho_0 \Omega_0 \neq 0$.

Em outro caso, $\frac{\psi(0)}{1 - \psi(0)t}$ com $0 \leq t < b$.

Como ρ é uma função diferenciável e bem definida para todo t , $\lim_{t \rightarrow b} \rho(t)$ existe e é igual a $\rho(b)$. Logo, a Equação ((2.12)) implica que

$$\rho(t) = \rho_0 \exp \left(\int_0^t \psi(s) ds \right), \quad 0 \leq t < b. \quad (2.16)$$

Logo,

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{|1 - \psi(0) \cdot t|}, \quad 0 \leq t < b. \quad (2.17)$$

Como ρ é diferenciavelmente definida para todo t , $b \neq \frac{1}{\psi(0)}$ e $\rho(b) = \frac{\rho_0}{|1 - \psi(0) \cdot b|}$, implica que

$$(A\eta)_{p_b} = \frac{\rho_0}{|1 - \psi(0) \cdot b|} \Omega_0 \neq 0.$$

Portanto, $p_b \in W$, o que prova o seguinte Teorema:

Teorema 2.3.1. T_0 é uma folheação totalmente geodésica completa de $W \setminus G$.

Corolário 2.3.1. Para cada $p \in W \setminus G$, $M_0(p)$ é um hiperplano contido em $W \setminus G$.

Corolário 2.3.2. $W \setminus G$ é uma união de hiperplanos paralelos através de pontos de um conjunto aberto.

Teorema 2.3.2. T_0 é uma folheação totalmente geodésica completa de W .

Demonstração. Basta notar que G e $W \setminus G$ são subconjuntos abertos disjuntos de W . □

Teorema 2.3.3. O conjunto aberto W é a união de uma família de hiperplanos paralelos.

Portanto não podemos ter mais do que:

Teorema 2.3.4. $G = \emptyset$ ou $G = W$.

Capítulo 3

Teorema de Classificação

No capítulo 2 vimos que T_0 é uma folheação sobre W e portanto podemos decompor \mathbb{R}_1^n de duas maneiras diferentes, se $G = \emptyset$ ou $G = W$. Logo com a ajuda do Lema de Moore, estaremos em condições de classificar as hipersuperfícies Lorentzianas $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Seja $M = M_0 \times M_1$ o produto de variedades conexas com conexão. Então, se X é campo vetorial tangente sobre um fator e Y é um campo vetorial tangente sobre o outro, temos $\nabla_X Y = 0$.

Suponhamos que M tem uma métrica não degenerada compatível com sua conexão. E seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma hipersuperfície isométrica de M num espaço real com métrica não degenerada e a conexão plana. Além disso, podemos assumir que existe um ponto $(p_0, q_0) \in M_0 \times M_1$ com $f(p_0, q_0) = 0 \in \mathbb{R}^N$. Então definamos as funções $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 0, 1$) com seguem:

$$\begin{aligned} f_0(p) &= f(p, q_0); \text{ se } p \in M_0 \\ f_1(q) &= f(p_0, q); \text{ se } q \in M_1 \end{aligned}$$

O seguinte lema fornece condições para f se separar em duas funções independentes uma da outra.

Lema 3.0.1. *(de Moore [8]) Se, sobre todo M , a segunda forma fundamental $h(X, Y) = 0$ sempre que X é tangente a M_0 e Y é tangente a M_1 , então $f(p, q) =$*

$f_0(p) + f_1(q)$ para cada $(p, q) \in M$.

Demonstração. Primeiro, notemos que se X é tangente a M_0 e Y é tangente a M_1 , da Fórmula de Gauss e por hipótese segue que

$$D_X f_* Y = 0.$$

Portanto, se $q \in M_1$, $Y \in T_q M_1$, e p_t é uma curva em M_0 , então o campo vetorial

$$f_{*(p,q)}(0, Y) \text{ ao longo de } f(p_t, q) \text{ é paralelo em } \mathbb{R}^N. \quad (3.1)$$

Seja p_t uma curva de p_0 a p em M_0 e seja q_t uma curva de q_0 a q em M_1 . Considere as curvas $f(p, q_t)$ e $f_0(p) + f_1(q_t)$ em \mathbb{R}^N . Se $t = 0$, então ambos têm o valor $f(p, q_0)$. Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}[f_0(p) + f_1(q_t)] = \frac{d}{dt}f(p_0, q_t) = f_{*(p_0, q_t)}(0, \vec{q}_t)$$

e

$$\frac{d}{dt}f(p, q_t) = f_{*(p,q)}(0, \vec{q}_t).$$

De (3.1) as duas curvas têm o mesmo vetor tangente, e como coincidem em $t = 0$, portanto elas coincidem. \square

3.1 Caso não degenerado ($G = W$)

Fixemos a origem 0 de \mathbb{R}_1^n em W , e seja M_0 o hiperplano folha contendo 0 , ou seja, $M_0 = M_0(0)$. Para um vetor unitário Z em $T_0^\perp(0)$, denotemos $Span\{Z\}$ por tZ ($t \in \mathbb{R}$). Então

$$\mathbb{R}_1^n = M_0 \times tZ = \{(p, t) : p \in M_0, t \in \mathbb{R}\} \quad (3.2)$$

descreve \mathbb{R}_1^n como produto direto de espaços vetoriais e também como produto direto de variedades semi-riemannianas. Se $w = (p, t) \in W$, então $M_0(w) = \{(q, t) : q \in M_0\}$, já que as folhas de T_0 são hiperplanos paralelos. Se $w = (p, t) \notin W$, então definamos $M_0(w) = \{(q, t) : q \in M_0\}$ e $T_0(w) = T_w(M_0(w))$. Em ambos os casos, $\partial/\partial t$ gera o complemento ortogonal de $T_0(w)$.

Logo, para todo $w \in \mathbb{R}_1^n$, podemos afirmar que se $X \in T_0(w)$, então $AX = 0$ e $A(\partial/\partial t) = \lambda(w)\partial/\partial t$, com $\lambda(w) \neq 0$ no caso em que $w \in W$. Na demonstração da Proposição 2.2.4 obtemos a igualdade

$$(X\lambda)Z + \lambda(\nabla_Z X)^\perp = 0.$$

No caso atual $Z = \partial/\partial t$, logo segue

$$(X\lambda)(\partial/\partial t) + \lambda(\nabla_t X)^\perp = 0.$$

E como os T_0 planos são , ou são escolhidos para ser (no caso de $w \notin W$), paralelos, então $(\nabla_t X)^\perp = 0$. Portanto, $X \cdot \lambda = 0$.

Proposição 3.1.1. *λ é constante em cada $M_0(w)$; portanto λ é uma função de t .*

Agora consideremos a hipersuperfície $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$. Assuma $f(0) = 0$. Tome M_0 como antes, e defina $M_1 = tZ$. Para $M = \mathbb{R}_1^n$ e $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}_1^{n+1}$ temos métricas não degeneradas. Se $X \in T_0(w) = T_w(M_0)$ e $Y \in T_w M_1$ em $w \in \mathbb{R}_1^n$, então $h(X, Y)\xi = \langle AX, Y \rangle \xi = \langle 0, Y \rangle \xi = 0$, em que ξ é um campo normal unitário sobre $f(\mathbb{R}_1^n)$. Portanto, escrevendo $f_1(t) = f_1(tZ)$, e utilizando o Lema de Moore

$$f(p, t) = f_0(p) + f_1(t), \quad (p, t) \in M_0 \times \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Até aqui temos o primeiro passo para conseguir a classificação de imersões isométricas $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$, para o caso não degenerado, que é separar f como soma de duas funções, cada uma sobre variáveis que não dependem uma da outra $p \in \mathbb{M}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.1.2. $f_0 = f|_{M_0}$ é uma isometria de M_0 sobre um plano de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}_1^{n+1} .

Demonstração. Seja $p_s = (p_s, 0)$ uma linha geodésica saindo de 0 no hiperplano M_0 e portanto $p_s = s\vec{p}_0$. Então

$$D_s f(\vec{p}_s, 0) = D_s f_*(\vec{p}_s, 0) = f_*(\nabla_s \vec{p}_s) + \langle A\vec{p}_s, \vec{p}_s \rangle \xi = 0.$$

Assim $f(s\vec{p}_0) = s f_*(\vec{p}_0, 0)$, e $f(M_0)$ é um plano de dimensão $n - 1$ gerado por $f_{*0}T_0(M)$. \square

Corolário 3.1.1. Se $w = (p, t) \in \mathbb{R}_1^n$, $f(M_0(w)) = f_0(M_0) + f_1(t)$. Portanto, $\{f(M_0(w)) : w \in \mathbb{R}_1^n\}$ é uma família de planos paralelos de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}_1^{n+1} .

Como vimos $f(M_0(w))$ tem dimensão $n - 1$, logo o complemento ortogonal no ponto $f(w)$, que chamaremos de $[f(M_0(w))]^\perp$, tem dimensão 2 em \mathbb{R}_1^{n+1} .

De f ser uma isometria, os planos $[f(M_0(w))]^\perp$ são paralelos, e $f_1(t)$ pertence ao plano $[f(M_0)]^\perp$.

Escrevendo \mathbb{R}_1^{n+1} como produto direto $f(M_0) \times [f(M_0)]^\perp$, podemos dizer

$$f(p, t) = (f_0(p), f_1(t)) \in f(M_0) \times [f(M_0)]^\perp \quad (3.4)$$

para $(p, t) \in M_0 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}_1^n$. Lembremos que neste caso M_0 conta com uma métrica não degenerada e logo pelo Teorema 1.2.1 só temos os seguintes dois casos para considerar:

- (i) $M_0 \approx \mathbb{R}^{n-1}$. Então $[f(M_0)]^\perp$ é um plano Lorentziano \mathbb{R}_1^2 em que $f_1(t)$ é uma curva c do tipo tempo e velocidade unitária ($\langle dc/dt, dc/dt \rangle = -1$). Pois $f_0(s\vec{p}_0) = s f_{*0}(\vec{p}_0, 0)$ para $\vec{p}_0 \in T_0(0) = M_0$, podemos tratar f_0 como a aplicação identidade de \mathbb{R}^{n-1} em si mesmo.
- (ii) $M_0 \approx \mathbb{R}_1^{n-1}$. Então $[f(M_0)]^\perp$ é um plano Euclidiano \mathbb{R}^2 em que $f_1(t)$ é uma curva de velocidade unitária c ($\langle dc/dt, dc/dt \rangle = 1$). Em analogia com (i), podemos tratar f_0 como a aplicação identidade de \mathbb{R}_1^{n-1} em si mesmo.

3.1.1 Teorema de Classificação, parte (a)

Teorema 3.1.1. *Seja $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície isométrica, então a menos de isometrias de \mathbb{R}_1^{n+1} temos que*

(a) *se o espaço de nulidade relativa é não degenerado, então*

- (i) $f = id \times c : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_1^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_1^2$, com $c : \mathbb{R}_1^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva unitária de tipo tempo, e $id : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ a função identidade; ou
- (ii) $f = id \times c : \mathbb{R}_1^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^{n-1} \times \mathbb{R}^2$, com $c : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva unitária no plano Euclidiano, e $id : \mathbb{R}_1^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n-1}$ a função identidade.

Observação 3.1.1. *As superfícies descritas pelo Teorema 3.1.1 são cilindros sobre curvas planas como as mencionadas no Exemplo 1.6.2 e como no Teorema de Hartman e Nierenberg. De fato a demonstração do Teorema 3.1.1 também mostra que todas as imersões isométricas $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ tem a forma*

$$id \times c : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_1^2$$

em que c é uma curva do tipo espaço e velocidade unitária em \mathbb{R}_1^2 .

Além disso, existe uma relação entre os autovalores não nulos do tensor segunda forma fundamental A e a curvatura de uma curva plana c em cada um desses teoremas que vamos descrever brevemente no caso do Teorema 3.1.1.

No caso (ii) do Teorema 3.1.1

$$id \times c : \mathbb{R}_1^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n-1} \times \mathbb{R}^2,$$

com $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva unitária no plano Euclidiano, e em cada $w \in \mathbb{R}_1^n$, $[f(M_0(w))]^\perp$ é gerado ortonormalmente por $f_{*w}\partial/\partial t = d/dt(f_1(t))$ e ξ_w (em que ξ é um campo normal unitário local). Logo, para $w = (p, t)$, utilizando as Equações (1.7), (1.9) e a Proposição 3.1.1 temos

$$D_t f_{*w} (\partial/\partial t) = \lambda(t)\xi_w.$$

E da Equação (1.8) e da Proposição 3.1.1 segue

$$D_t \xi_w = \lambda(t) f_* (\partial / \partial t).$$

Assim, para cada $t_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda(t)$ é a curvatura de $c = f_1(t)$ em $t = t_1$, para t perto de t_1 .

No caso (i) $c : \mathbb{R}_1^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ é uma curva unitária do tipo tempo em \mathbb{R}_1^2 , então seja $e_1 = dc/dt$ o vetor tangente unitário, e seja e_2 a normal unitária (do tipo espaço) à curva. Então $(e_1, e_2) \in O(1, 1)$. Já que $\langle de_i/dt, e_i \rangle = 0$ ($i = 1, 2$), a Equação (1.1) e a Proposição 1.3.1 implicam as equações

$$\frac{de_1}{dt} = -k(t)e_2, \quad \frac{de_2}{dt} = -k(t)e_1. \quad (3.5)$$

Analogamente ao caso de curvas planas Euclidianas, k poderia ser chamado de *curvatura da curva c*.

3.2 Caso degenerado ($G = \emptyset$)

Consideremos a origem 0 de \mathbb{R}_1^n em W , e seja M_0 a folha hiperplano contendo 0. Neste caso M_0 é um hiperplano degenerado e portanto existe uma única linha de luz contida em M_0 , gerada por Ω .

Seja η um vetor tangente do tipo luz em 0 tal que $\langle \eta, \Omega \rangle = -1$ e $A\eta \neq 0$, então $A\eta = \rho\Omega$ (tudo isto devido à construção feita na seção 2.3). Denotamos $Span\{\eta\}$ por $s\eta$ ($s \in \mathbb{R}$) e $Span\{\Omega\}$ por $u\Omega$ ($u \in \mathbb{R}$). Então

$$\mathbb{R}_1^n = M_0 \oplus s\eta \quad (3.6)$$

descreve \mathbb{R}_1^n como soma direta de espaços vectoriais.

Seja E o subespaço de dimensão $n - 2$ em M_0 que é o complemento ortogonal em \mathbb{R}_1^n do plano Lorentziano $Span\{\eta, \Omega\}$. Então

$$\mathbb{R}_1^n = E \times Span\{\eta, \Omega\}$$

é também produto de variedades semi-riemannianas. Também podemos decompor \mathbb{R}_1^n na soma direta

$$\mathbb{R}_1^n = E \oplus u\Omega \oplus s\eta.$$

Então podemos representar um ponto de \mathbb{R}_1^n por (p, u, s) ($p \in E; u, s \in \mathbb{R}$).

Se $w = (p, u, s) \in W$, então $M_0(w) = \{(q, v, s) : q \in E, v \in \mathbb{R}\}$ por serem hiperplanos paralelos a M_0 . Se $w = (p, u, s) \notin W$, então definamos $M_0(w) = \{(q, v, s) : q \in E, v \in \mathbb{R}\}$, e $T_0(w) = T_w(M_0(w))$. Cada $M_0(w)$ contém uma única linha luz, $\{(p, v, s) : v \in \mathbb{R}\}$, gerada por $(\partial/\partial u)_w$. Para cada $w \neq 0$ em \mathbb{R}_1^n , definamos

$$E(w) = \{(q, u, s) : q \in E\}.$$

Assim, M_0 e sua decomposição $M_0 = E \oplus \text{Span}\{\partial/\partial u\}$ são paralelos ao longo de \mathbb{R}_1^n .

Se w é qualquer ponto em \mathbb{R}_1^n , podemos dizer o seguinte: $(\partial/\partial s)_w$ é um vetor luz tangente em w com $\langle \partial/\partial s, \partial/\partial u \rangle_w = -1$. E também $(A \cdot \partial/\partial s) = \rho(w)(\partial/\partial u)_w$ com $\rho(w) \neq 0$ só no caso que $w \in W$.

Proposição 3.2.1. *ρ é constante sobre cada $M_0(w)$, onde $w \in \mathbb{R}_1^n$. Portanto ρ é uma função de s .*

Demonstração. Seja $w \in W$ (outro caso $\rho \equiv 0$ sobre $M_0(w)$), e seja p_t qualquer geodésica em $M_0(w)$ saindo de w . Para cada t , escreva $\rho(t)$ por $\rho(p_t)$, e Ω_t por $(\partial/\partial u)_{p_t}$. Então $(A\partial/\partial s)_{p_t} = \rho(t)\Omega_t$. Aplicando a derivação de (2.12) neste caso implica

$$\frac{d\rho}{dt} = -\langle \nabla_s \vec{p}_t, \Omega_t \rangle \rho(t) = 0$$

e, em particular, $\langle \nabla_s \vec{p}_t, \Omega_t \rangle$ é independente da extensão de \vec{p}_t a um T_0 campo perto de p_t . Mas $\nabla_s \vec{p}_t \in T_0$ pois os M_0 's são hiperplanos paralelos em \mathbb{R}_1^n . Visto que Ω_t gera a linha degenerada em $T_0(p_t)$, $\langle \nabla_s \vec{p}_t, \Omega_t \rangle = 0$. Isto implica que $\rho(t) = \rho(z)$ para todo t . \square

Seja $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$. Como no caso não degenerado podemos assumir $f(0) = 0$. Para utilizar o Lema de Moore novamente, consideremos M_0 como em (3.6) e definamos $M_1 = s\eta$. Então $M = \mathbb{R}_1^n = M_0 \times M_1$ como um produto direto de variedades com conexão, mas não ortogonal. Se $X \in T_0(w) = T_w M_0$ e $Y \in T_w M_1 = \text{Span}\{(\partial/\partial s)_z\}$, então $h(X, Y) = \langle AX, Y \rangle \xi = 0$ (com ξ um campo normal unitário local). Então o Lema de Moore nos permite escrever $f(p, u, s) = f_0(p, u) + f_1(s)$ para $(p, u, s) \in E \times u\Omega \times s\eta = \mathbb{R}_1^n$.

Se p_t é uma linha geodésica em $M_0(w)$ saindo de w (de modo que $p_t = w + t\vec{p}_0$), então $f(p_t) = z + tf_{*z}(\vec{p}_0)$. Disso, como na Proposição 3.1.2, seguem os seguintes três fatos:

Proposição 3.2.2. *f é uma isometria de $M_0(w)$ para um plano degenerado de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}_1^{n+1} .*

Proposição 3.2.3. *f é uma isometria de $E(w)$ para um plano Euclidiano de dimensão $n - 2$ num plano de dimensão $n - 1$ $f(M_0(w))$.*

Proposição 3.2.4. *f aplica a linha de luz em $M_0(w)$ para a linha de luz no plano de dimensão $n - 1$ $f(M_0(w))$.*

Proposição 3.2.5. *$\{f(M_0(w))\}_{w \in \mathbb{R}_1^n}$ e $\{f(E(w))\}_{w \in \mathbb{R}_1^n}$ são famílias de planos paralelos.*

Demonstração. Se X é um campo vetorial ou em T_0 ou em E , e Y é qualquer outro campo vetorial sobre \mathbb{R}_1^n , então

$$D_Y f_* X = f_*(\nabla_Y X) + \langle Y, AX \rangle \xi = f_*(\nabla_Y X) \in f_* T_0 \text{ ou } f_* E.$$

□

Suponhamos que $n = 2$, então $E = \emptyset$ e $T_0(0) = \text{Span}\{\Omega\}$ e portanto $\mathbb{R}_1^2 = u\Omega \times s\eta$. Se $w \in \mathbb{R}_1^2$, então \mathbb{R}_1^3 é gerado pelo referencial nulo $(f_{*w}(\partial/\partial s), f_{*w}(\partial/\partial u), \xi_{f(w)})$ em que ξ é um campo normal unitário local do tipo espaço. Sem perda de generalidade podemos assumir que esse referencial é próprio.

Agora

$$(i) \quad df_1/ds = f_*(\partial/\partial s),$$

$$(ii) \quad D_s f_*(\partial/\partial s) = f_*(\nabla_s \partial/\partial s) + \langle A\partial/\partial s, \partial/\partial s \rangle \xi = -\rho(s)\xi,$$

$$(iii) \quad D_s f_*(\partial/\partial u) = \rho(s)\langle \Omega, \Omega \rangle \xi = 0,$$

$$(iv) \quad D_s \xi = -f_*(A\partial/\partial s) = -\rho(s)f_*(\partial/\partial u).$$

As afirmações (i) – (iv) dizem que $(f_1(s), F(s))$, em que $F(s)$ é o referencial $(f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial u), \xi)$, é uma curva nula referencial que de fato é um cubo nulo generalizado. A Equação (3.1) e a Proposição 3.2.4 implicam que a hipersuperfície f é dada por

$$f(u, s) = f_0(u) + f_1(s) = f_1(s) + u f_*(\partial/\partial u),$$

a imagem $f(\mathbb{R}_1^2)$ é a b -scroll do cubo nulo generalizado. Chamaremos f uma **hipersuperfície b -scroll** de \mathbb{R}_1^2 em \mathbb{R}_1^3 .

O seguinte fato é um caso particular da classificação das hipersuperfícies isométricas com nulidade relativa não degenerada.

Proposição 3.2.6. *As hipersuperfícies Lorentzianas de \mathbb{R}_1^2 em \mathbb{R}_1^3 com nulidade relativa degenerada são hipersuperfícies b -scroll.*

Se $n > 2$, então o espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3 ortogonal a $f(E(w))$ em $(\mathbb{R}_1^{n+1})_{f(w)}$, para $w \in \mathbb{R}_1^n$, são paralelos em \mathbb{R}_1^{n+1} , pela Proposição 3.2.5. Se X é um E-campo vetorial, então $\langle f_*X, f_*\partial/\partial s \rangle = \langle X, \partial/\partial s \rangle = 0$, portanto $f_1(s)$ pertence ao espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3 ortogonal a $f(E(w))$. Também temos $\langle f_*X, f_*\partial/\partial u \rangle = 0$. Agora podemos escrever

$$\mathbb{R}_1^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^2 = E \times \text{Span}\{\Omega, \eta\}$$

e

$$\mathbb{R}_1^{n+1} = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^3 = f(E) \times \text{Span}\{f_*\Omega, f_*\eta, \xi_0\},$$

em que ξ_0 é uma normal unitária em $0 \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Então decomponemos f em fatores

$$f|_E \times f|_{\mathbb{R}_1^2} : \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^3.$$

Pela Proposição 3.2.3, assumimos que, sob condições de rigidez de \mathbb{R}_1^{n+1} , $f|_E$ é a aplicação identidade de \mathbb{R}^{n-2} em si mesmo. A Proposição 3.2.6 aplica-se para $f|_{\mathbb{R}_1^2}$.

3.2.1 Teorema de Classificação, parte (b)

Teorema 3.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície isométrica, então a menos de isometrias de \mathbb{R}_1^{n+1} temos que*

Se o espaço de nulidade relativa é degenerado, então

$$f = id \times g : \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_1^3, \text{ com } g : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \text{ uma } b\text{-scroll e} \\ id : \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2} \text{ a função identidade.}$$

Proposição 3.2.7. *Seja $\mathbb{R}_1^2 = \text{Span}\{\xi, Y\}$ com ξ um vetor luz e $\langle \xi, Y \rangle = k$, com k uma constante. E seja η um vetor luz em \mathbb{R}_1^3 tal que*

$$f(u, v) = f(u\xi + vY) = x(v) + u\eta$$

é uma hipersuperfície isométrica : $\mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$.

Se $x(v)$ é uma curva plana, então $x(v)$ é uma linha, portanto a hipersuperfície é totalmente geodésica.

Observação 3.2.1. *Na Proposição anterior a b -scroll é um plano pois x é uma linha e $f_*(\partial/\partial u) = \eta$ ao longo de x . Portanto a hipersuperfície isométrica é um plano, o que corresponde ao caso trivial do Teorema 3.2.1.*

Referências Bibliográficas

- [1] K. Abe, *Characterization of totally geodesic submanifolds in S^N and CP^N by an inequality*. Tôhoku Math. J. **23** (1971), 219-244.
- [2] W. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*. Tensor (N.S.) **20** (1969), 229-242.
- [3] C. Camacho e A. Lins Neto, *Introdução à teoria das Folhações*. IMPA. (1977).
- [4] D. Ferus, *On the completeness of nullity foliation*. Michigan Math. J. **18** (1971), 61-64.
- [5] L. Graves, *Codimension one isometric immersions between Lorentz Spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 367-392.
- [6] W. Greub, *Linear Algebra*. 2nd ed, Springer-Verlag, New York. (1963).
- [7] P. Hartman and L. Nierenberg, *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*. American J. Math. **81** (1959), 901-920.
- [8] J. D. Moore, *Isometric immersions between of Riemannian products*. J. Differential Geometry **5** (1971), 159-168.
- [9] K. Nomizu, *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor*. Tôhoku Math. J. **20** (1968), 46-59.
- [10] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics Vol. **103** Academic Press (1983).

- [11] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*. II, III, Publish or Perish, Boston, Mass. (1970), (1975).