Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectivas

Davidson Moura Lopes Silva

orientador: *Prof. Dr. Tomas Edson Barros*

São Carlos
Outubro de 2015

Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectivas

Davidson Moura Lopes Silva

orientador: *Prof. Dr. Tomas Edson Barros*

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao programa de mestrado profissional PROFMAT da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre na área de Ensino de Matemática

São Carlos
Outubro de 2015

Autor

Orientador

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Davidson Moura Lopes
S586a Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental : realidade e perspectivas / Davidson Moura Lopes Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
88 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Ensino fundamental. 2. Proporcionalidade. 3. Engenharia didática. 4. Geogebra. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Davidson Moura Lopes Silva, realizada em 23/11/2015:

Prof. Dr. Tomas Edson Barros
UFSCar

E. Rizziolli

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
UNESP

Prof. Dr. Joao Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

via do aluno

A meus pais, irmãos, sobrinhos, professores, alunos e colegas de trabalho

"Descobertas Matemáticas, pequenas ou grandes, nunca nascem por geração espontânea. Elas pressupõem um solo fertilizado com conhecimentos preliminares, e bem lavrado com trabalho consciente e inconsciente"

Frase atribuída a **Henri Jules Poincaré**

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a todos os meus professores, que dedicaram suas vidas a ensinar. Que abraçaram essa profissão tão grandiosa e me inspiram diariamente em minha caminhada com meus alunos. Agradeço especialmente ao grande professor e amigo Tomas Edson Barros por ter me orientado, mais uma vez, com grande dedicação.

Agradeço também à minha família pelo apoio incondicional ao longo de toda a minha vida acadêmica. Agradeço ainda aos colegas de curso com quem dividi dúvidas, dificuldades e também conquistas e superações. Agradecimento especial aos grandes amigos César Cance, Lúcia Beltrami e Rosângela Rossi pelo apoio logístico e horas incansáveis de estudo recheadas de muita diversão para compensar todo o sofrimento perante as dificuldades encontradas.

Aos professores e funcionários da escola Anna dos Reis Signorini, em especial ao grande amigo Eude Duques do Rego por toda a disposição em me ajudar demonstrada não só ao longo curso, mas no convívio diário. Às diretoras Kelly Marcon Arcas e Sônia Galhardo Schmidt pela compreensão quando, por motivo de estudos, precisei me ausentar. Atitude que demonstra que torcem por mim e confiam no meu trabalho.

Finalmente, um agradecimento especial aos meus alunos, os maiores colaboradores para que esse trabalho fosse concluído. Obrigado pela dedicação e por todo o carinho que demonstram para comigo no dia a dia. Vocês são o motivo pelo qual procuro sempre melhorar pois, o sucesso de vocês é meu sucesso.

Resumo

Nesse trabalho apresentamos uma nova proposta de abordagem do tema proporcionalidade, para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Este trabalho é o registro de uma *Engenharia Didática* que gerou uma sequência composta por quatro sessões didáticas.

O foco do trabalho é apresentar meios para que o aluno determine, baseado nas definições matemáticas, se duas grandezas são proporcionais e, em caso positivo, se é uma relação de proporcionalidade direta ou inversa.

Para tanto, propomos a utilização do software Geogebra como ferramenta de ensino, permitindo a integração com a geometria, gráfico das relações de proporcionalidade direta e inversa e experimento prático para dar maior significado ao conteúdo apresentado.

Palavras-chave: proporcionalidade, Ensino Fundamental, Engenharia Didática, Geogebra

Abstract

This work presents a new proposal of approach for proporcionality, whose focus is the Brazilian Elementary 7th grade student. This work is the record of a work of didactic engineeering that generated a sequence made by four didactic sessions.

The main goal of this dissertation is to present ways for the student to determine, based on mathematical definitions, if two magnitudes are proportional and, in affirmative case, if the relation is directly or inversely proportional.

In order to do so, we propose the employment of a software called Geogebra as a teaching tool, to allow the integration with geometry, direct and inverse proportionality relations and practical experiments to assign a greater meaning to the presented content.

Key-words: Proportionality, Elementary Education, Didactic Engineering, Geogebra.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Metodologia 3

2 Caracterização da Escola e das salas de aula **5**

2.1 Sétimo Ano C 7

2.2 Sétimo Ano D 7

2.3 Sétimo Ano F 8

2.4 Sétimo Ano G 8

3 Análise prévia: A realidade do Ensino de Proporcionalidade no Brasil **9**

4 Análise a Priori: A Matemática necessária para o desenvolvimento de proporcionalidade **13**

4.1 Tratamento Funcional 13

4.2 Abordagem por meio de proporções 15

4.3 A Sequência Didática 17

4.3.1 Sessão didática 1: Revisando conceitos fundamentais 17

4.3.2 Sessão didática 2: Estudo da proporcionalidade com o auxílio do Geogebra 18

4.3.3 Sessão didática 3: Gráfico de grandezas proporcionais 18

4.3.4 Sessão didática 4: Usando sombras para estimar alturas inatingíveis 19

5 Experimentação: Aplicação da Sequência Didática **21**

5.1 Apresentação da primeira sessão didática: Revisando conceitos 21

5.2 Análise da primeira sessão didática: Revisando Conceitos 25

5.3 Apresentação da segunda sessão didática: Proporcionalidade com o Geogebra 29

5.4 Análise da segunda sessão didática: Proporcionalidade com o Geogebra . . 39

5.5 Sessão didática 3: Gráfico de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais 44

5.6 Análise da Sessão didática 3: Gráfico de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais 49

5.7 Sessão didática 4: Proporcionalidade na prática - um método para se estimar alturas inatingíveis 51
5.8 Análise da sessão didática 4 53

6 Análise a Posteriori **57**
6.1 Avaliação 59

7 Conclusões **63**

A Respostas da Primeira Sessão Didática **67**

B Respostas da segunda Sessão Didática **71**

C Respostas da Terceira sessão didática **81**

Referências Bibliográficas **87**

Lista de Figuras

2.1 Escola Anna dos Reis Signorini 5
2.2 Programa Escola de Atletas e Formação Integral 6
2.3 Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºC . 7
2.4 Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºD . 7
2.5 Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºF . 8
2.6 Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºG . 8

3.1 Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade direta 10
3.2 Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade inversa 10

5.1 Aplicação da primeira sessão didática 26
5.2 Primeiro exemplo de resposta do exercício 2 da primeira sessão didática . . 26
5.3 Segundo exemplo de resposta do Exercício 2 da primeira sessão didática . . 26
5.4 Desenho do exercício 9 realizado corretamente 27
5.5 Desenho do exercício 9 realizado com falhas 27
5.6 Exercício 10 executado de maneira correta 28
5.7 Exemplo de desenho (Exercício 10) que não poderia ser reproduzido a partir dos pontos marcados 28
5.8 Aplicação da segunda sessão didática 40
5.9 Excesso de casas decimais 41
5.10 Razões na forma decimal 41
5.11 Animando pontos, relação entre velocidade e tempo 42
5.12 Retângulos Proporcionais 42
5.13 Verificar se a relação entre a velocidade do ponto verde e o tempo é uma proporcionalidade 43
5.14 Gráfico da relação entre distância e tempo com velocidade constante igual e 60 km/h 50
5.15 Gráfico da relação entre distância e velocidade com tempo fixado em 6 horas 50
5.16 Gráfico da relação entre tempo e velocidade com a distância constante e igual a 50 km 51
5.17 Gráfico da relação entre duas grandezas inversamente proporcionais 51
5.18 Aplicação da quarta sessão didática 54

5.19 Medições obtidas por um grupo do 7º ano C 55
5.20 Validando as medições obtidas por um grupo do 7º ano C 55

6.1 Comparação das médias obtidas pelas salas que participaram da sequência didática 57

Lista de Tabelas

1.1 Quadro comparativo dos resultados do Brasil no PISA desde 2000 1

2.1 Quadro comparativo da média global dos alunos da EAFI e dos alunos regulares 6

5.1 Medindo Circunferências 29
5.2 Medidas dos triângulos Equiláteros 31
5.3 Medidas de um triângulos qualquer 32
5.4 Medindo Velocidades 33
5.5 Medindo Retângulos 35
5.6 Tempo necessário para concluir uma lista de exercícios 36
5.7 Quantidade de exercícios realizada em um determinado tempo 36

B.1 Medindo Circunferências 71
B.2 Medidas dos triângulos Equiláteros 72
B.3 Medindo Velocidades 74
B.4 Medindo Retângulos 75
B.5 Tempo necessário para concluir uma lista de exercícios 75
B.6 Quantidade de exercícios realizada em um determinado tempo 76

Capítulo 1

Introdução

Como podemos acompanhar em todos os meios de comunicação, a Educação Brasileira não vai nada bem como um todo. Mas, em se tratando de Matemática, os resultados são ainda mais catastróficos. De um total de 65 países que participam do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), ocupamos a 58^a posição no rendimento dos jovens nessa disciplina, mantendo o país abaixo do nível básico de proficiência. Mesmo com uma melhora de 57 pontos nos resultados de Matemática do exame entre 2000 e 2009, ainda estamos muito aquém das nações mais desenvolvidas, que também discutem políticas públicas para melhorar seu desempenho.

Tabela 1.1: Quadro comparativo dos resultados do Brasil no PISA desde 2000

	Pisa 2000	Pisa 2003	Pisa 2006	Pisa 2009	Pisa 2012
Número de participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589
Média de Leitura	396	403	393	412	410
Média de Matemática	334	356	370	386	391
Média de Ciências	375	390	390	405	405

Fonte:http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados

Há muita discussão sobre diversos aspectos no que diz respeito à educação, tais como aumento de investimentos, critérios de avaliação, formação docente, reestruturação de currículos etc. Mas não é tarefa simples corrigir erros históricos de uma escola tradicional, excludente (no sentido em que muitos abandonavam os estudos por não se enquadrarem ao sistema). A mudança é difícil porque a imagem que temos é que antigamente as escolas eram boas e hoje elas estão cada vez piores. O que não se percebe é que hoje o trabalho é muito mais difícil já que hoje temos uma política de inclusão.

De acordo com o relatório da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) sobre a educação no Brasil [8], já evoluímos a ponto de manter as crianças na escola, precisamos agora encontrar meios de torná-la um diferencial na vida desses estudantes

> Mesmo quando as crianças vão à escola, pais que possuem pouca ou nenhuma escolaridade não têm como saber se a qualidade da educação é boa ou não. Dessa forma, embora muitos pais tenham começado a forçar a entrada dos filhos na escola, eles fazem poucas demandas por qualidade. Reynaldo Fernandes, ex-Presidente do Inep, afirma que no final dos anos 1990 a maior pressão pela melhoria da qualidade da educação veio das elites, embora não tivessem filhos nas escolas públicas. Isso se deu porque elas compreenderam que o desenvolvimento futuro do País dependia de uma força de trabalho e de cidadãos com boa educação. Mas Jeffrey Puryear, Diretor da Parceria para a Revitalização Educacional das Américas do Diálogo Interamericano, assinala que, sem uma demanda mais ampla por parte da sociedade por melhor qualidade, as decisões políticas ficam dominadas por profissionais da educação que vivem do sistema. Eles tendem a resistir a mudanças no status quo ao invés de se empenharem nas reformas necessárias para elevar o desempenho dos alunos.(OCDE[8], pág 180, 2011)

Algumas secretarias de educação como por exemplo a de São Paulo, não focam mais o conteúdo e sim, competências e habilidades. Todos buscam alternativas para tentar superar os desafios, mas ninguém discute que a maior das mudanças está nas mãos dos próprios professores. Cabe a eles aprimorar métodos e pesquisar novas possibilidades de ensino em periódicos especializados, ou seja, é necessário estudar. As cobranças pelos resultados sempre recaem sobre o trabalho do professor, porém, os investimentos na valorização da carreira de magistério na educação básica ainda estão muito longe de serem satisfatórios. Nem a lei que garante ao professor que um terço de sua carga horária seja cumprida em atividades extraclasse é respeitada pela grande maioria dos órgão de educação pública.

O PROFMAT é também uma iniciativa do governo federal no sentido de se melhorar o desempenho dos alunos por meio da capacitação dos professores. É uma bela iniciativa por parte de nossos governantes, porém, os professores que mais precisariam dessa capacitação dificilmente a receberão. A prova de seleção é extremamente concorrida e uma grande porcentagem dos aprovados não consegue concluir o curso por falta de pré-requisitos básicos ou mesmo por falta de tempo para se dedicarem ao curso.

Pensando sobre a prática docente dos conteúdos do ensino fundamental, escolhemos a Proporcionalidade para propor um novo tipo de abordagem. Baseado na Engenharia Didática, criamos uma sequência didática para introduzir o conceito de grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

O tema proporcionalidade, que é um dos conteúdos mais importantes do currículo do ensino fundamental, foi escolhido por ser uma teoria que relaciona diversas áreas da Matemática e admite uma diversidade de tratamentos que vão de uma simples igualdade de frações a um tratamento mais elaborado usando funções.

Esse trabalho foi idealizado a partir de leituras de alguns artigos publicados pela Revista do Professor de Matemática sobre o tema. Muitas são críticas à forma como ensinamos proporcionalidade aos alunos. Segundo os autores há excesso de nomenclaturas de difícil compreensão por terem origem na forma como Eudoxo, matemático da escola de Platão, solucionou a primeira grande crise no desenvolvimento da Matemática ainda no quarto século antes de Cristo quando surgem as grandezas incomensuráveis, que hoje conhecemos como números irracionais.

Buscamos, a partir das considerações levantadas nesses artigos, construir o conceito de grandezas ou variáveis diretamente proporcionais e inversamente proporcionais trabalhando de forma sistemática com sua definição, tentando determinar como as grandezas se relacionam para chegarmos a uma conclusão. Buscamos ainda estabelecer uma relação entre duas grandezas construindo o gráfico dessa relação para, a partir dos mesmos definirmos se é uma relação de proporcionalidade direta ou inversa, de acordo com a curva obtida. A partir da aplicação de um conjunto de quatro atividades faremos um levantamento de vantagens e desvantagens de tal abordagem assim como proporemos mudanças nas atividades aplicadas para aperfeiçoá-las.

De acordo com os parâmetros curriculares nacionais (PCNs) [6], a proporcionalidade

> ...está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. (PCN, 1998, pag 38)

Como o próprio documento que norteia a educação brasileira apresenta, o raciocínio proporcional tem inúmeras aplicações cotidianas que devem ser exploradas pela escola.

No segundo capítulo apresentamos a escola Anna dos Reis Signorini (SEDES) e as turmas de sétimo ano que foram utilizadas para a aplicação da sequência didática produzida neste trabalho. Os demais tratam das fases da engenharia didática.

1.1 Metodologia

O método de pesquisa que norteia essa dissertação é a Engenharia Didática, que de acordo com CARNEIRO [5] é um método específico baseado em experiências de sala de aula e pode ser visto como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

O método tem sua origem na França, por volta de 1980. É uma busca por inovar e revolucionar a prática do professor, buscando soluções inovadoras para resolver problemas de aprendizagem.

> Considera-se um ponto do sistema didático cujo funcionamento parece, por razões de naturezas diversas, pouco satisfatório. Analisa-se esse ponto de funcionamento e as condições que tendem a encontrar um novo ponto de equilíbrio e, depois, trabalhando com essas condições , busca-se determinar condições de existência de um modo de funcionamento mais satisfatório.(Artigue, 1990)

> ...é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.(ARTIGUE apud. ALMOULOUD, COUTINHO, 2008)

A Engenharia Didática constitui-se na execução de quatro fases:

- **Análise prévia ou preliminar:** Nesta fase é feita a fundamentação da Engenharia Didática. Após a escolha do tema, o estudamos do ponto de vista geralmente adotado no ensino e, também, de sua evolução ao longo das mudanças de programa. Analisamos o modo de ensino atual e fazemos um levantamento de erros cometidos pelos alunos.

- **Concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula:** Tem como objetivo determinar como as escolhas realizadas permitem controlar os comportamentos dos alunos. A elaboração da sequência didática com descrição e justificativa são elementos dessa fase.

- **Experimentação, implementação da experiência ou aplicação da sequência didática:** Nesse momento é aplicada a sequência e são coletadas as observações a respeito do desenvolvimento das mesma.

- **Análise a posteriori e validação da experiência:** Aqui fazemos uma análise da realização da engenharia como um todo, confrontando se o que foi elaborado e aplicado teve o resultado desejado. Elencamos as principais dificuldades e problemas encontrados na elaboração e realização da mesma.

Cada uma dessas etapas será apresentada em um capítulo dessa dissertação.

Capítulo 2

Caracterização da Escola e das salas de aula

A escola municipal Integral de Ensino Fundamental Professora Anna dos Reis Signorini se localiza na cidade de Taubaté, no interior do estado de São Paulo. No ano corrente são 1042 (um mil e quarenta e dois) alunos matriculados em dois turnos de funcionamento.

Figura 2.1: Escola Anna dos Reis Signorini

São 40 salas de aula, sendo 20 no período matutino e 20 no vespertino e há uma extensa lista de espera para se conseguir uma vaga, atualmente são 335 alunos aguardando o surgimento de novas vagas. Isso se deve ao fato de que a escola tem uma infraestrutura privilegiada em relação à maioria das escolas públicas brasileiras. Conta com anfiteatro, biblioteca, piscina semiolímpica, vestiários, refeitório, duas quadras poliesportivas cobertas e laboratório de informática, tudo em pleno funcionamento.

Há 402 alunos atendidos em período integral, sendo que 154 deles fazem parte da **EAFI** (Escola de Atletas e Formação Integral), projeto que visa a iniciação esportiva de alunos, formando base para as equipes da cidade. O projeto atualmente funciona com sete salas, sendo três salas de sextos anos e quatro de sétimos anos, onde foi aplicada a sequência didática em questão.

Figura 2.2: Programa Escola de Atletas e Formação Integral

O projeto vem obtendo sucesso no desempenho escolar dos alunos, que são selecionados por aptidão física e não intelectual. Os alunos são distribuídos em sete modalidades: Futsal, Voleibol, Basquete, Handebol, Atletismo, Ginástica Artística e judô. O quadro abaixo apresenta um comparativo de rendimento dos alunos atendidos pelo projeto e pelos que não o são (regulares).

Tabela 2.1: Quadro comparativo da média global dos alunos da EAFI e dos alunos regulares

Bimestre	Média dos alunos do 6º ano regulares	Média dos alunos do 6º ano da EAFI	Média dos alunos do 7º ano regulares	Média dos alunos do 7º ano da EAFI
Primeiro	5,9	7,2	5,5	6,9
Segundo	5,9	7,1	5,8	7,0

http://www.ortizjunior.com/desempenho-educacional-no-ensino-integral-e-melhor-que-no-regular (Acessado em 04/07/2015)

Dentre as principais diferenças entre as turmas da EAFI e das turmas regulares estão o número reduzido de alunos por sala (máximo de 25 alunos) e a cobrança dos técnicos, que ficam com os alunos no período oposto ao de aulas. Tal cobrança eleva a participação dos alunos no que diz respeito à realização de tarefas extraclasse, que são essenciais para o desenvolvimento dos alunos. Juntamente com os treinos, os alunos têm aulas de estudo, xadrez, ritmos e natação.

As turmas de sétimos anos C, D, F e G foram o foco de aplicação da sequência didática. A seguir apresentaremos um perfil de cada uma das turmas.

2.1 Sétimo Ano C

Nessa turma do período da manhã estudam 20 alunos. Das quatro turmas de 7º ano da EAFI é a que apresenta melhor rendimento. O professor de matemática conhece os alunos há mais de um ano e identifica cinco alunos que possuem mais dificuldade na disciplina e cinco que ganham um certo destaque pelos resultados que apresentam nas avaliações. É uma turma bastante participativa e com poucos problemas de comportamento.

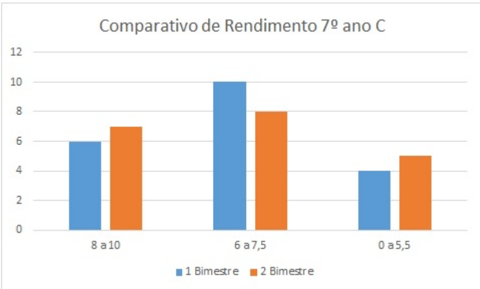


Figura 2.3: Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºC

2.2 Sétimo Ano D

Essa é a outra turma do período da manhã. Conta com 22 alunos matriculados. É o primeiro ano que o professor trabalha com essa turma e é comum um certo período de adaptação dos alunos para com o professor e vice versa. É uma turma onde há cinco alunos que apresentam maior facilidade com os conteúdos apresentados até o momento na disciplina de matemática, número igual ao do 7ºC, porém há mais alunos que apresentam um grau maior de dificuldade.

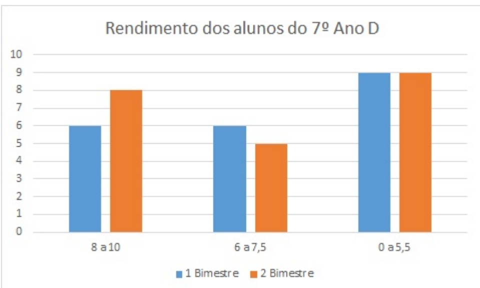


Figura 2.4: Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºD

No primeiro bimestre foram nove alunos com nota inferior a 6,0 pontos (nota mínima para a aprovação), o que se manteve no segundo bimestre.

2.3 Sétimo Ano F

Com 23 alunos matriculados é um dos sétimos anos do período da tarde. Há três alunos que se destacam e dois que possuem maior dificuldade com a disciplina. A turma é participativa e em geral se aplicam nas atividades propostas. Os poucos problemas de comportamento recaem sobre um pequeno grupo de quatro alunos.

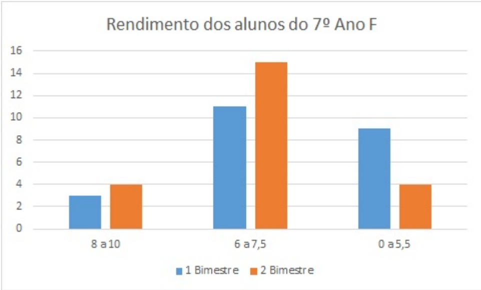


Figura 2.5: Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºF

2.4 Sétimo Ano G

O outro 7º ano de atletas do período da tarde conta com 21 alunos. Até o ano passado era considerado por muitos professores como a pior das quatro salas de atletas, fato não verificado nas aulas de matemática. Para o professor dessa disciplina é uma sala como as outras com os mesmos problemas e as mesmas qualidades.

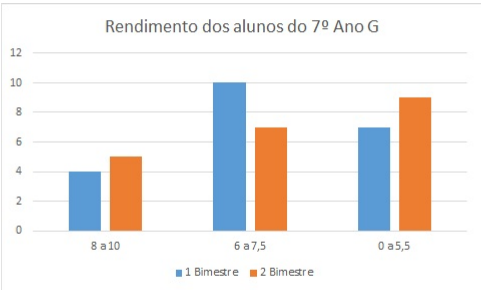


Figura 2.6: Comparativo de Rendimento nos dois primeiros bimestres de 2015 do 7ºG

Assim como nas demais salas de aplicação, os alunos participam bem das aulas, costumam entregar as tarefas e trabalhos propostos. Só é necessário demonstrar autoridade perante a turma, já que são muito falantes.

Capítulo 3

Análise prévia: A realidade do Ensino de Proporcionalidade no Brasil

O ensino de proporcionalidade nos dias atuais se resume à aplicações de regras de três simples, realizadas com pouco ou nenhum fundamento teórico. Em geral, identifica-se as duas grandezas envolvidas no problema, verifica-se se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais analisando o que o aumento no valor de uma delas ocasiona ao valor da outra.

Se o aumento de uma indicar o aumento da outra, classificamos as grandezas como diretamente proporcionais. Efetuamos a multiplicação "cruzada", ou seja, o numerador de uma fração pelo denominador da outra, igualamos os resultados e obtemos o valor desconhecido. Caso o aumento de uma delas indique uma diminuição da outra, então as classificamos como inversamente proporcionais. Nesse caso igualamos o produto dos numeradores ao produto dos denominadores e assim obtemos o valor desconhecido.

Ainda que alguns livros tragam toda uma preparação para se chegar à resolução de problemas desse tipo, chamados de regra de três, o excesso de conteúdos a ser trabalhado faz com que muitas vezes os temas sejam tratados superficialmente, sem conexões, eliminando-se etapas essenciais a um claro entendimento da Matemática envolvida no problema. Ao analisar como o conteúdo é tratado por alguns livros didáticos, constatamos que a abordagem é muito intuitiva e pratica. Não encontramos livros que definam com clareza o que significa matematicamente, duas grandezas serem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Quando o livro traz esse tópico, a teoria nada mais é que a resolução de dois ou três exemplos de problemas de regra de três. Praticamente descarta-se toda a teoria e ensina-se truques e macetes que funcionam em alguns casos, mas não enriquecem e nem preparam o aluno para dar continuidade aos estudos.

Quem nunca teve problema com essas séries de reportagem que ensinam métodos não convencionais para chegar a resultados de multiplicações, raízes quadradas, etc? Facilitamos tanto que descaracterizamos toda a teoria Matemática.

Em uma busca rápida pelo google é possível encontrar vários exemplos de resolução de exercícios. Todos resolvidos mecanicamente, como descrevemos sucintamente nos parágrafos abaixo.

Problema 1: Para fazer 16 calças, gastamos 24 metros de tecido. Quanto gastaremos para fazer 10 calças?

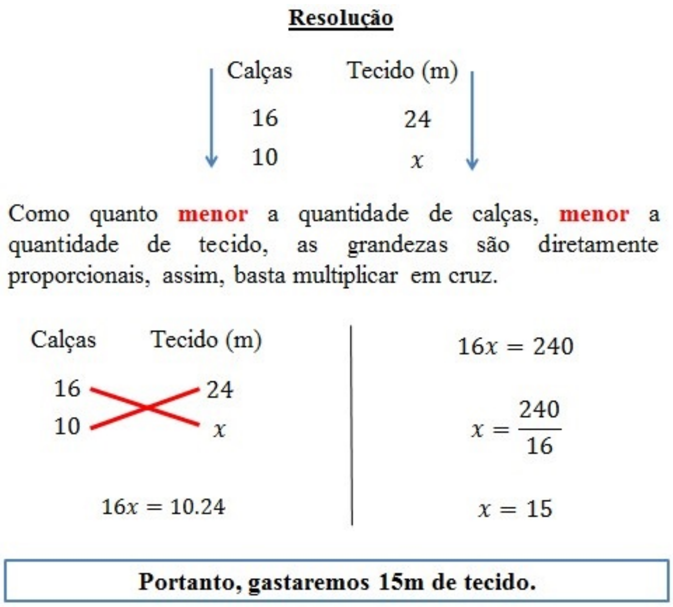


Figura 3.1: Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade direta
fonte:http://www.profjosimar.com.br/2013/08/exercicios-resolvidos-regra-de-3-simples.html (Acessado em 07/07/2015)

Problema 2: Se 4 operários fazem certa obra em 15 dias em quantos dias 20 operários com a mesma eficiência dos primeiros fariam a mesma obra?

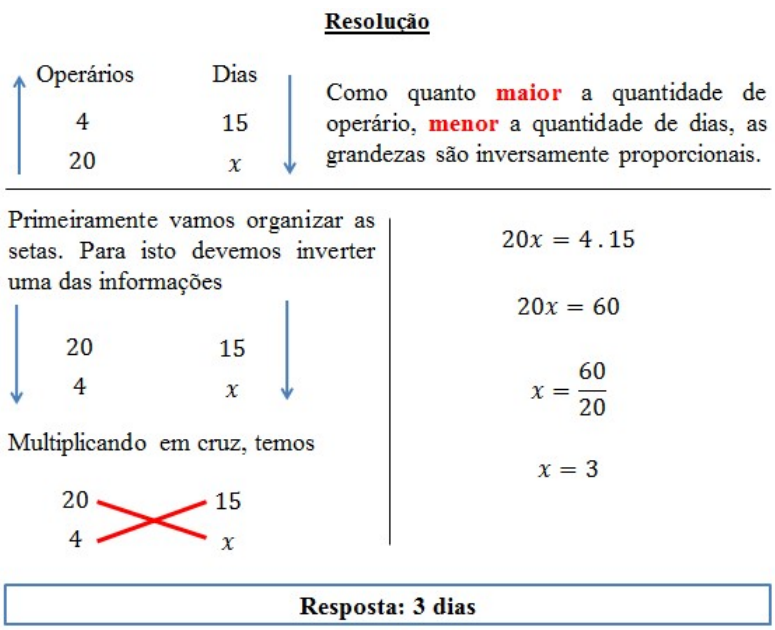


Figura 3.2: Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade inversa
fonte:http://www.profjosimar.com.br/2013/08/exercicios-resolvidos-regra-de-3-simples.html (Acessado em 07/07/2015)

Os problemas de regra de três composta, que são aqueles que envolvem mais de duas grandezas ou variáveis, não são trabalhados, pois o método usado para resolver os problemas de regra de três simples se torna extremamente complicado, visto que é necessário analisar as grandezas aos pares e assume-se fatos novos que tornam ainda mais obscuras as resoluções dos problemas.

Vamos supor que um problema trate de três grandezas não especificadas A, B e C. Suponhamos que analisando as grandezas A e B cheguemos à conclusão de que as mesmas são diretamente proporcionais e ao analisarmos as grandezas A e C, cheguemos à conclusão que as mesmas são inversamente proporcionais. Conclui-se então, sem nenhuma fundamentação ou explicação que as grandezas B e C são inversamente proporcionais, o que é correto. Mas de onde surge tal resultado?

O que percebemos é que a mecanização ajuda em certo aspecto a chegar à solução do problema, porém, ao se aprofundar o assunto, ela produz resultados catastróficos em cadeia. Isso explica, de certo modo, porque os alunos vão tão mal em Matemática, já que essa cultura tem raízes profundas na educação brasileira. Damos valor excessivo às regras em detrimento à análise precisa do problema e do seu resultado, pois essa é muito mais demorada e difícil de ser explicada. Requer um melhor planejamento e preparo do professor.

Com relação à forma usada para verificar a relação de proporcionalidade entre duas grandezas, Ávila (1986) destaca

> Tem sido prática corrente ensinar o aluno a descobrir a equação de dependência entre as variáveis envolvidas no problema a resolver com o auxílio da seguinte regra: fixadas as variáveis envolvidas no problema, exceto duas delas, essas são diretamente proporcionais se aumentam ou diminuem simultaneamente, e inversamente proporcionais, se uma aumenta enquanto a outra diminui.

Essa regra não tem justificativa lógica e nem sempre produz resultados corretos. É verdade que duas variáveis diretamente proporcionais aumentam ou diminuem simultaneamente, mas duas variáveis podem aumentar ou diminuir simultaneamente sem que sejam diretamente proporcionais; e uma observação inteiramente análoga vale para o caso de variáveis inversamente proporcionais.

Ávila finaliza a afirmação com o seguinte exemplo: Um trabalhador gasta 5 horas para limpar um terreno circular de 7 metros de raio. Quanto tempo gastaria se o terreno tivesse 14 metros de raio?

Resolvendo o exercício seguindo o método mecanizado apresentado, chegaríamos erroneamente ao resultado de 10 horas. Isso por que o tempo não é diretamente proporcional à medida do raio e sim ao quadrado dessa medida.

Outro exemplo da ineficiência dessa forma de determinar se duas grandezas são proporcionais é dada por Lima et al (2001) na obra Temas e Problemas [12].

Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno y, não é verdade que após n meses essa mesma quantia gere o retorno $n \cdot y$, mesmo que a taxa de juros permaneça constante. Pois ao final de cada mês é como se tivesse sido aplicada novamente uma quantia maior, igual à existente no mês anterior mais os juros correspondentes. Assim o retorno (num período fixo) é proporcional ao capital inicial, mas não é proporcional ao tempo de investimento.

Acho que é válido ressaltar que o exemplo acima se refere ao regime de juros compostos. Caso pensemos no regime de juros simples, o retorno é proporcional ao capital inicial assim como ao tempo de investimento e à taxa de juros.

Por tudo o que apresentamos acima, vale a pena investigar um método mais eficiente para determinar se duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais

Capítulo 4

Análise a Priori: A Matemática necessária para o desenvolvimento de proporcionalidade

> "Quando o aluno se torna capaz de por em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está a construir, numa situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está a ocorrer então o que pode ser chamado de situação adidática."Brousseau (1996)

Essa é a segunda fase da engenharia, onde determinamos as variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida. Escolhemos fazer estimativa de alturas inacessíveis usando o comprimento da sombra, ou seja, trabalharemos a proporcionalidade com tal finalidade.

Como já mencionado, há várias formas de se abordar o tema de proporcionalidade, mas todos eles exigem que o aluno tenha uma certa maturidade e um mínimo de traquejo algébrico, além de um bom senso lógico e capacidade de análise. A melhor forma de se abordar o tema, dentro do que pessoalmente enxergamos na Matemática, seria um tratamento funcional.

4.1 Tratamento Funcional

Diz-se que duas grandezas são *proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

- Quanto maior for x, maior será y. Matematicamente falando, se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y < y'$
- Se dobrarmos, triplicarmos etc, o valor de x então o valor correspondente de y será, respectivamente dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para $n \in \mathbb{N}$

Cumpridas ambas as condições, dizemos que a correspondência $x \mapsto y$ é uma *proporcionalidade*.

Observe que a relação deve ser bem definida, ou seja, que y deve ser dado em função de x, portanto, a proporcionalidade é, na verdade uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sendo $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ com as seguintes propriedades:

1. f é uma função crescente, isto é $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ pata quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$

2. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

A propriedade 2 acima, assumida apenas para $n \in \mathbb{N}$ vale, na verdade, para qualquer número real positivo. Isso é o que afirma o teorema a seguir:

Teorema 4.1. Teorema Fundamental da Proporcionalidade.
Seja $\mathbb{R}^+$ o conjuntos dos números reais positivos. Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma *função crescente* tal que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $x, c \in \mathbb{R}^+$
Demonstração: Primeiramente, para todo número racional $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

pela propriedade 2. Logo, $f(rx) = \dfrac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, é válida a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ quando c é racional.

Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então, ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$.
Consideremos o primeiro caso:
Se $f(cx) < c \cdot f(x)$ então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, podemos afirmar que $r \cdot f(x) = f(rx)$. Mas, como escolhemos $r < c$, temos $rx < cx$ e, pela propriedade 1, isso obriga $f(rx) < f(cx)$, o que é uma contradição. Portanto, não se pode ter $f(cx) < c \cdot f(x)$

A demonstração da impossibilidade de termos $f(cx) > c \cdot f(x)$ é análoga à apresentada. Com isso, concluímos que $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $x, c \in \mathbb{R}^+$

Este Teorema motiva a definição de proporcionalidade *direta* e *inversa* da seguinte maneira:
Definição: Dada uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que, para quaisquer números reais positivos c e x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, é uma *proporcionalidade direta*, o que é equivalente a dizer que as grandezas x e $f(x)$ são diretamente proporcionais.

Se $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$ para quaisquer números reais positivos c e x, diremos que f é uma *proporcionalidade inversa*, que é equivalente a dizer que as grandezas x e $f(x)$ são inversamente proporcionais.

O teorema acima exprime de forma clara quando temos uma proporcionalidade e essa seria a forma ideal para tratarmos o conteúdo. Porém, na grade curricular, proporcionalidade consta como conteúdo do 7° ano e introdução a funções acontece apenas dois anos após, no 9° ano do ensino fundamental. Portanto, é claro que quando foi construído o currículo atual, a ideia não era apresentar o conteúdo utilizando função, ainda que essa seja a forma mais concisa de se apresentar proporcionalidade.

Notemos que se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade direta, então dado $x \in \mathbb{R}^+$, temos que $f(x) = f(1 \cdot x) = x \cdot f(1)$. Assim, denotando $a = f(1)$, obtemos que

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

. Por outro lados, se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade inversa, então $f(x) = f(1 \cdot x) = \dfrac{f(1)}{x}$. Assim, denotando $b = f(1)$, temos que

$$f(x) = \frac{b}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

4.2 Abordagem por meio de proporções

Visto sua localização no currículo escolar, a forma adequada de se apresentar a proporcionalidade é trabalhar a proporção como igualdade de duas frações (caso simples) e usar as definições de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Nessa sequência didática, a ideia é abordar o tema trabalhando diretamente com as definições de proporcionalidade abaixo:

Definição 1: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são *diretamente proporcionais* se estiverem assim relacionadas:$y = kx$ ou $\dfrac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva, chamada *constante de proporcionalidade.*
Observação: Trabalhamos mais com a relação $\dfrac{y}{x} = k$, e a traduzimos da seguinte forma: duas grandezas são diretamente proporcionais se a razão entre elas for constante.

Definição 2: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são *inversamente proporcionais* se estiverem assim relacionadas: $y = \dfrac{k}{x}$ ou $xy = k$, onde k é uma constante positiva, chamada de *constante de proporcionalidade.*
Observação: Trabalhamos mais com a relação $xy = k$, e a traduzimos da seguinte forma: duas grandezas são inversamente proporcionais se o produto entre elas for constante.

Em ambos os casos temos uma equação do primeiro grau de simples resolução, assim, determinar valores desconhecidos não deveria ser um problema. Penso que foi a forma mais simples que encontramos de tratar o problema de forma eficiente. Porém, aqui não temos a robustez da teoria de funções e a determinação do tipo de proporcionalidade (direta ou inversa) é feito de forma experimental o que pode levar a erros, já que só enxergamos uma parte dos dados ao construirmos uma tabela ou mesmo um gráfico.

Por isso, em seu artigo Razões, proporções de regra de três, Ávila sugere que para resolver problemas que envolvem proporcionalidade, seria necessário que os alunos trabalhassem no sentido de identificar no conteúdo curricular como é a relação entre essas grandezas para decidir se elas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou se não são proporcionais. Nesse artigo ele critica duramente a forma como ensina-se o tema de proporcionalidade e faz diversas considerações tais como

> Na teoria de Eudoxo, uma razão não é o quociente de dois números e uma proporção não é a igualdade de duas razões. Foi por isso que surgiram as palavras "antecedente"e "consequente", a notação
>
> $$A : B :: C : D$$
>
> E a maneira de dizer "A está para B assim como C está para D".
>
> Tudo isso está superado há pelo menos um século. Numa autêntica modernização do ensino não há porque ensinar essas coisas, enfatizar "razões e proporções"como uma teoria autônoma, ou falar em "terceira proporcional"e "quarta proporcional". O essencial sobre razões, proporções e regra de três pode muito bem ser ensinado no estudo dos números reais, das igualdades e equações... (Ávila, RPM 8)

Nas considerações que Ávila faz ao ensino desse tema, ele próprio conhece o objeto como inserido no conteúdo curricular do 7º ano do ensino fundamental. Nesse nível de escolaridade, o aluno não tem conhecimento do conjunto dos números Reais, visto que a irracionalidade é conteúdo de 8º ano. Dessa forma, para um aluno do 7º ano, não poderíamos assumir os números Reais ainda, mas o que realmente incomoda é que ensinamos terminologias que nós mesmos desconhecemos. Sempre reproduzi a fala "A está para B assim como C está para D"e nunca paramos para analisar de onde vem essa terminologia, que aparece inclusive nos parâmetros curriculares nacionais, onde consta o seguinte exemplo:

> Num segundo grupo, estão as situações associadas à comparação entre razões, que, portanto, envolvem a ideia de proporcionalidade... Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa 8,00 reais. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes? (A ideia de proporcionalidade está presente: 1 está para 8, assim como 3 está para 24.) (PCN, livro 3, pag 68)

Situações como essa surgem muitas vezes por falta de conhecimento do desenvolvimento histórico da Matemática que, apesar de recomendado pelos parâmetros curriculares, não é prática corrente nas escolas, visto que os professores em sua maioria, não são capacitados para tal abordagem.

Visto que a maioria dos erros cometidos pelos alunos, no que diz respeito à proporcionalidade, se deve ao fato de não conseguir determinar se as variáveis ou grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, essa será uma das variáveis que trabalharemos na Engenharia Didática.

Além disso, para trabalhar a proporcionalidade como igualdade de duas frações, é necessário que os alunos saibam o conceito de frações equivalentes e saibam determinar um número desconhecido em uma igualdade de frações.

4.3 A Sequência Didática

O objetivo principal dessa sequência é levar o aluno a reconhecer variáveis ou grandezas proporcionais ou não proporcionais. Caso as reconheça como proporcionais, identificar se essa proporcionalidade é direta ou inversa.

A ideia é observar algumas relações simples, tais como a fórmula de velocidade média, da área de um retângulo e com o auxílio das definições, decidir se existe uma relação de proporcionalidade direta ou inversa. Pensamos também em um apelo geométrico para identificar a proporcionalidade. Para isso, apresentamos os gráficos de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, apenas como uma identificação visual.

A sequência didática aplicada conta com quatro sessões didáticas, que serão apresentadas a seguir.

4.3.1 Sessão didática 1: Revisando conceitos fundamentais

Nessa primeira sessão didática, trabalhamos conceitos úteis ao desenvolvimento da proporcionalidade como igualdade entre duas frações. Ressaltamos que parte do conteúdo abordado nessa sessão didática já foi trabalhado previamente com as turmas no ano anterior. As novidades são a localização de pontos no plano cartesiano e a resolução de equações do primeiro grau para determinar valores desconhecidos em uma igualdade.

A atividade contempla exercícios em que os alunos devem determinar se duas frações são equivalentes utilizando diversos meios, tais como: simplificação, conversão para a forma decimal ou utilizando a definição de igualdade de duas frações, o que julgamos ser essencial para se obter a constante de proporcionalidade.

Traz também exercícios onde o aluno deverá calcular o termo desconhecido em uma igualdade, tanto entre duas frações quanto entre dois produtos, o que é a ideia central dos problemas denominados regras de três.

Visando a construção do gráfico da relação entre as variáveis, trabalhamos também a marcação de pontos no plano cartesiano de uma forma lúdica, por meio da construção de figuras no plano. Primeiramente demos uma sequência de pontos que serão extremos de segmentos de retas e que se bem executada formará um desenho específico. A seguir, os alunos devem, a partir de um desenho construído por eles, assinalar a sequência de pontos que permita reproduzir o desenho por ele criado.

4.3.2 Sessão didática 2: Estudo da proporcionalidade com o auxílio do Geogebra

Nessa sessão trabalhamos situações para as quais é necessário preencher tabelas realizando, na maioria dos exercícios, medições com o uso do software **Geogebra**. Apresentamos as definições de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais e através das definições, os alunos devem responder a uma série de questões identificando em cada exercício se há grandezas diretamente ou inversamente proporcionais ou se não há proporcionalidade entre as grandezas observadas.

Apresentamos aos alunos uma ferramenta computacional para estudos de geometria, acessível a todos que possuem um computador em casa. Com a inserção do Geogebra, fizemos algo comum (preencher tabelas) usando uma ferramenta que a maioria gosta de usar que é o computador. Ao término dessa sessão didática, esperamos que os alunos consigam analisar a relação entre duas grandezas por meio de uma tabela e identificar se essas grandezas apresentam ou não alguma relação de proporcionalidade.

4.3.3 Sessão didática 3: Gráfico de grandezas proporcionais

O objetivo dessa sessão é apresentar uma outra forma de identificar a proporcionalidade entre duas grandezas. Propusemos a construção do gráfico como uma ferramenta simples e prática para essa verificação. Ainda que os livros didáticos tratem somente de gráficos de grandezas diretamente proporcionais, sempre surge a curiosidade por parte dos alunos com relação às grandezas inversamente proporcionais. Por isso, prevendo tal curiosidade, acrescentamos exemplos desse tipo de gráfico também.

O que se espera com a atividade é que o aluno perceba que se duas grandezas são diretamente proporcionais então seu gráfico é representado por uma reta que corta a origem do plano cartesiano e que se as grandezas são inversamente proporcionais seu gráfico será uma curva denominada hipérbole.

A reta é uma curva comum e fácil de ser trabalhada, o que não acontece com a hipérbole, que possui sutilezas como possuir os eixos coordenados como assíntotas, o qual é um conceito muito complicado de ser absorvido pelos alunos de sétimo ano. Porém, mesmo sem trabalhar esses aspectos de forma matemática, deixaremos claro que a hipérbole não corta o eixo das abcissas nem o eixo das ordenadas, visto que o produto é constante e diferente de zero. Assim, consideramos que mataremos a curiosidade dos alunos, porém, será necessário futuramente uma explicação mais clara sobre a hipérbole, que acreditamos ser tratada no decorrer do ensino médio.

4.3.4 Sessão didática 4: Usando sombras para estimar alturas inatingíveis

Tentamos reproduzir nessa atividade, o método que Tales de Mileto utilizou para medir a altura da pirâmide de Quéops, narrado exaustivamente pelos livros de História da Matemática e até questionado por alguns deles. Mas, em condições ideais, difíceis de se obter algumas vezes, tentamos comprovar que o método funciona perfeitamente. Para isso, planejamos um experimento onde os alunos puderam perceber que a relação entre a altura de um objeto e sua sombra é uma proporcionalidade direta. O experimento foi realizado em grupos de quatro alunos e utilizamos a lista de materiais apresentada a seguir:

Materiais necessários

- Uma placa de isopor
- 3 palitos de churrasco
- Um transferidor de 180°
- Um esquadro
- Uma régua de 30 cm
- Uma fita métrica
- Uma trena

A primeira etapa do experimento foi sua preparação em sala de aula. Para isso, os alunos tiveram que marcar nas varetas três alturas 10cm, 12cm e 15cm e fixá-las à uma placa de isopor, garantindo que as mesma formassem ângulo de 90 graus com a superfície da placa, utilizando o transferidor ou o esquadro.

Após aprontar o experimento, o levamos a um lugar onde houvesse um bom espaço plano e sol. Com o auxílio de uma régua, os alunos mediram o tamanho da sombra produzida por cada uma das varetas e anotaram o horário em que essas medições foram realizadas.

De posse dessas medidas, voltamos à sala de aula para verificar se as razões entre o tamanho da sombra e a altura da vareta ou o produto das duas medidas é constante, ou seja, se existe uma relação de proporcionalidade entre as medidas. Esperamos, claro que chegassem à conclusão de que tais medidas não apresentam relação de proporcionalidade, já que em um experimento, o resultado nunca é perfeito.

O professor então questionou sobre a proximidade dos valores e esperava-se que a razão entre as medidas apresentassem valores próximos. E explicou aos alunos as possíveis causas dessas pequenas variações. Concluindo assim que há uma relação de proporcionalidade direta entre as medidas. Para se obter a constante de proporcionalidade, demos como sugestão, calcular a média dos três valores obtidos nas medições.

Em um dia posterior, em posse dos valores das constantes, que deviam variar entre os grupos, fizemos a validação da mesma. Para tentar validar ou não a constante, os alunos estimaram a altura de cada integrante do grupo. Em horário idêntico ao da primeira medição os alunos organizaram os grupos e em um local plano, mediram o tamanho da sombra projetada por cada um deles. Com a constante de proporcionalidade encontrada na primeira etapa, fizeram a estimativa da altura de cada um deles. Com uma balança biométrica, fizemos a medição da altura de cada um dos alunos e assim, pudemos classificar a estimativa como boa ou ruim.

Escolhemos por fim, a melhor constante de proporcionalidade registrada entre os grupos para dar continuidade à atividade, passando assim para a etapa final, que seria escolher objetos ou prédios que se quisesse estimar a altura.

Após numa visita pela área da escola, os alunos deveriam escolher os locais que quisessem determinar a estimativa da altura, novamente no mesmo horário que medimos a sombra na primeira etapa. Cada um dos grupos realizaria a medição da sombra projetada pelos objetos ou construções escolhidos. Voltaríamos à sala e faríamos a estimativa da altura de cada um desses locais.

Capítulo 5

Experimentação: Aplicação da Sequência Didática

Faremos, a seguir, o relatório da aplicação de cada uma das sessões didáticas, destacando os pontos positivos, os pontos negativos e as inferências realizadas para o desenvolvimento de cada uma delas.

Visando uma melhor compreensão das análises realizadas após a aplicação das atividades, optamos por apresentar cada atividade como uma sessão desse capítulo e na sessão seguinte, apresentarmos a análise da aplicação da mesma, ou seja, primeiro apresentaremos os problemas propostos e a seguir analisaremos como os alunos se saíram na tentativa de resolvê-los, destacando aspectos positivos e negativos em cada uma delas.

5.1 Apresentação da primeira sessão didática: Revisando conceitos

1. Simplifique as frações abaixo até torná-las irredutíveis:

   (a) $\frac{6}{8}$

   (b) $\frac{9}{15}$

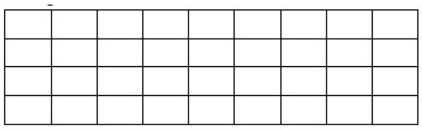
   (c) $\frac{14}{42}$

   (d) $\frac{16}{24}$

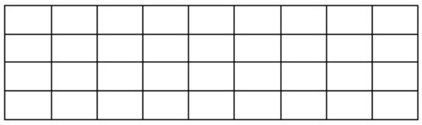
   (e) $\frac{12}{45}$

2. Agora, calcule o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador das frações irredutíveis que você encontrou em cada item do exercício anterior e escreva uma definição para frações irredutíveis, ou seja, diga como podemos utilizar o mdc para verificar se uma fração é irredutível
   Uma fração é dita irredutível quando :

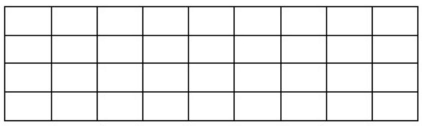
3. Frações equivalentes ("iguais") são aquelas que representam a mesma quantidade de um inteiro, que no nosso caso é representado por um retângulo. Pinte as frações indicadas e a seguir indique quais são equivalentes circulando-as com cores iguais:



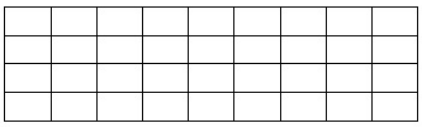
$\frac{1}{2}$



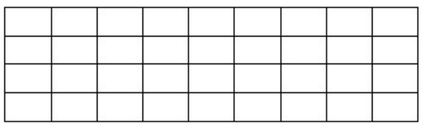
$\frac{1}{4}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{3}{12}$



$\frac{9}{18}$

4. Podemos decidir se duas ou mais frações são equivalentes tornando-as irredutíveis ou encontrando sua representação decimal. Usando esses dois processos verifique quais das frações abaixo são equivalentes:

   (a) $\frac{12}{18}$

   (b) $\frac{14}{21}$

   (c) $\frac{10}{15}$

   (d) $\frac{7}{35}$

(e) $\dfrac{45}{30}$

(f) $\dfrac{54}{36}$

5. Sejam a, b, c e d números racionais tais que $a \cdot b = k$ e $c \cdot d = k$, podemos concluir que:

   (a) $a = b$

   (b) $a \cdot b = c \cdot d$

   (c) $a = c$ e $b = d$

   (d) $a = b$ e $c = d$

6. se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, podemos garantir que

   (a) $a \cdot b = c \cdot d$

   (b) $a \cdot c = b \cdot d$

   (c) $a \cdot d = b \cdot c$

   (d) $a \cdot d = c \cdot d$

7. Nas frações abaixo, determine o valor de x e y nas frações equivalentes:

   (a) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{24}$

   (b) $\dfrac{2}{5} = \dfrac{x}{10} = \dfrac{y}{45}$

   (c) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{4}{9} = \dfrac{y}{24}$

   (d) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{12} = \dfrac{12}{y}$

8. Determine o valor de x em cada equação:

   (a) $2 \cdot x = 4 \cdot 5$

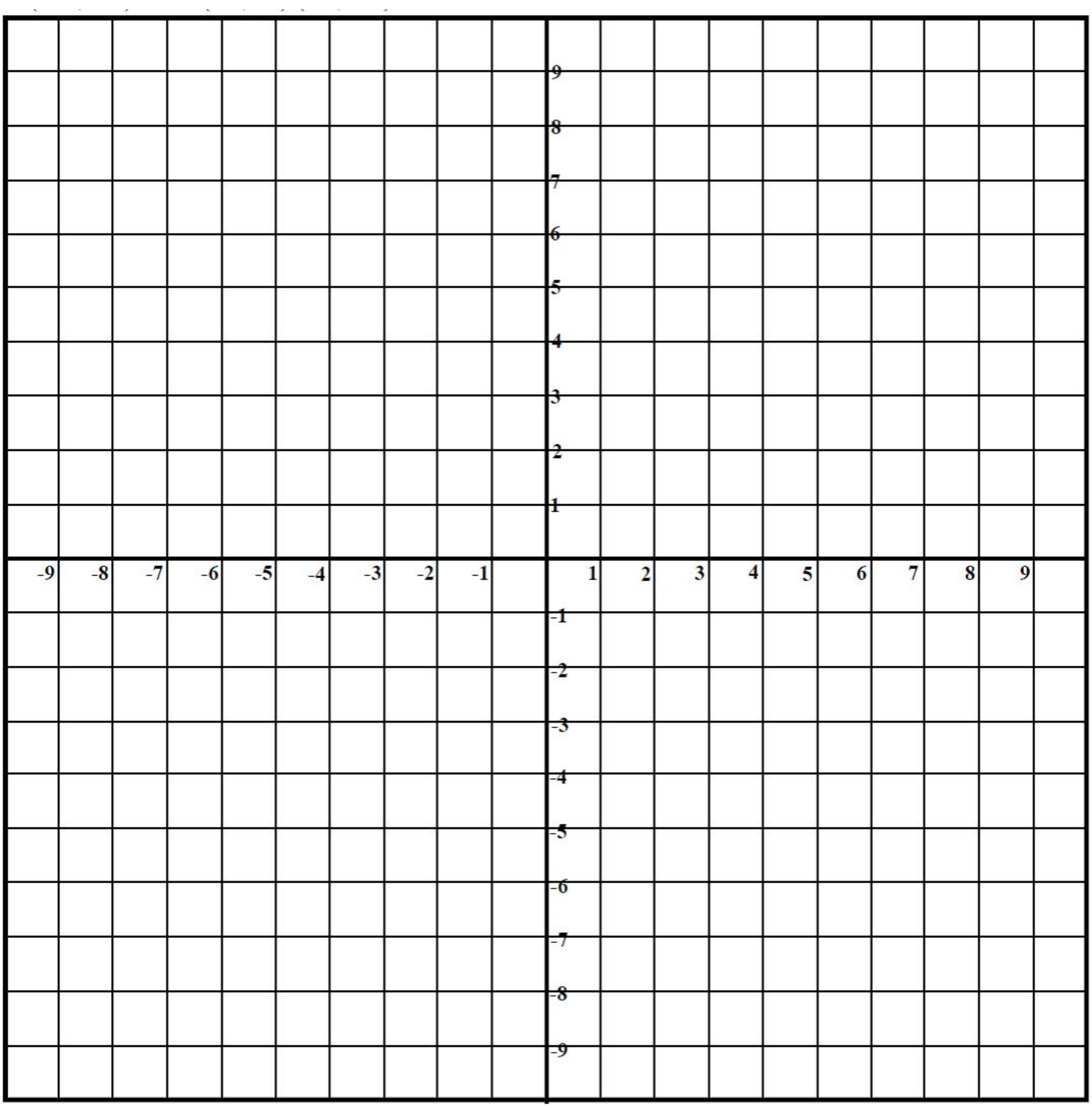
   (b) $3 \cdot x = 8 \cdot 12$

   (c) $x \cdot 5 = 20 \cdot 10$

   (d) $12 \cdot 15 = 9 \cdot x$

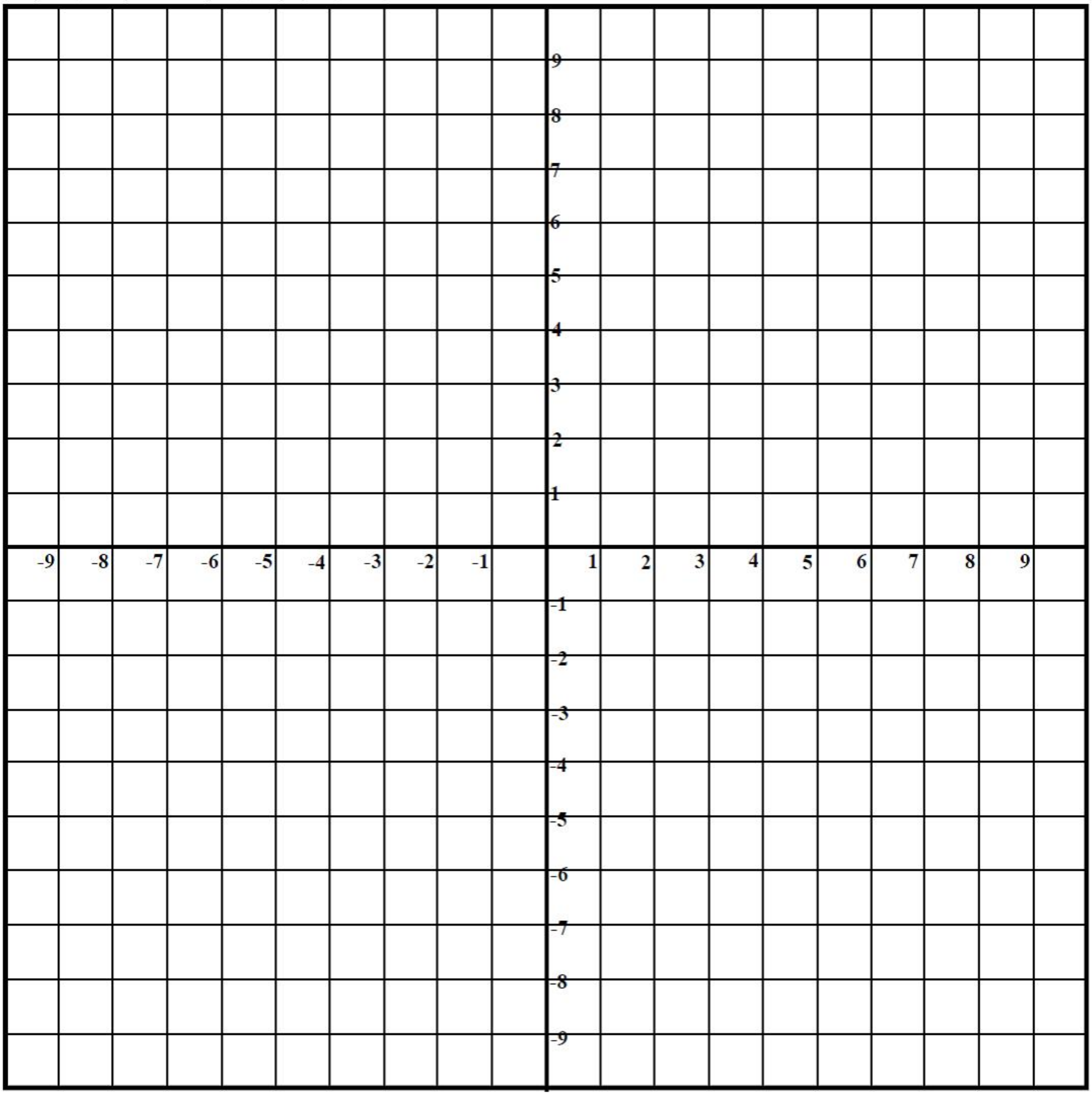
   (e) $42 \cdot 6 = x \cdot 21$

9. **(Geometria Fashion)** Marque os pontos e os conecte com segmentos de reta. Não conecte apenas os pontos com NC entre eles:
Inicio (-4,1) (-5,5) (-2,2) (-4,1) **NC** (2,-4) (3,-3) (4,-3) (5,-4) (5,-5) (4,-6) (3,-6) (2,-5) (2,-4) **NC** (-5,-3) (-4,-2) (-1,-5) (-2,-6) (-5,-3) **NC** (2,1) (2,4) (5,4) (5,1) (2,1) **NC** (2,3.5) (5,3.5) **NC** (-6,-8) (-6,2) (-9,0) (-9,5) (-6,7) (-3,8) (-2,9) (2,9) (3,8) (6,7) (9,5) (9,0) (6,2) (6,-8) (-6,-8) NC (-6,-7.5) (6,-7.5) **NC** (-3,8) (-1,5) (0,6) (-2,9) NC (3,8) (1,5) (0,6) (2,9) NC (-1.3,8) (1.3,8) **NC** (-0.5,5.5) (-0.5,-7.5) **NC** (0.5,5.5) (0.5,-7.5)
Fim



Deixe fluir seu lado artista e decore sua peça de forma criativa!

10. Agora é a sua vez. Crie um desenho usando o plano cartesiano e a seguir escreva os pontos necessários para reproduzir seu desenho. Coloque a sigla NC (não conectar) entre pontos que não devem ser unidos por segmentos de reta.



5.2 Análise da primeira sessão didática: Revisando Conceitos

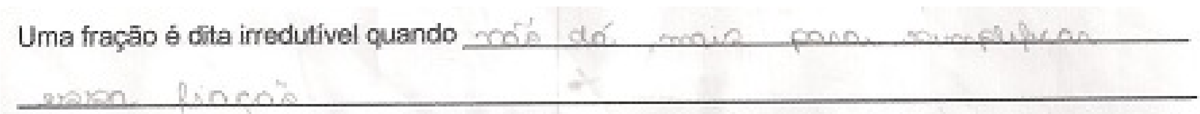
Essa primeira atividade visava trabalhar conceitos que julgamos importantes para o desenvolvimento do tema tratado pela sequência didática. Assim, trabalhamos muito com frações. Relembramos o que significa dizer que duas frações são equivalentes, usando

Figura 5.1: Aplicação da primeira sessão didática

a representação geométrica das mesmas ou trabalhando com a igualdade de frações de forma algébrica além de localização de pontos no plano cartesiano.

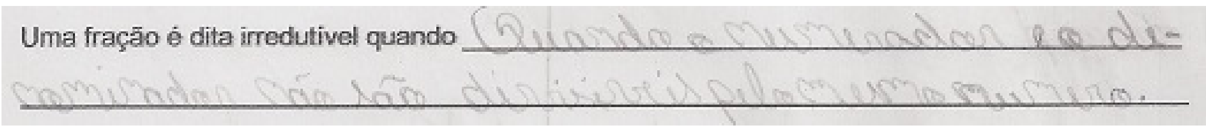
A atividade teve início no dia 27 de maio e teve duração de cinco aulas de 50 minutos, o que corresponde a uma semana de aula. A maioria desses conceitos já haviam sido estudados no ano anterior, com exceção das equações do primeiro grau, que ainda que muito simples, não foi bem assimilado por uma parte dos estudantes.

A ideia inicial era que os alunos realizassem a atividade individualmente e de forma autodidata, ou seja, sem grande influência do professor. As atividades foram preparadas com essa finalidade. Para isso, tentamos construir atividades bem simples e de fácil leitura e interpretação. Infelizmente, não deu muito certo deixar que os alunos desenvolvessem as atividades individualmente e ainda tentando não interferir muito, propusemos a resolução das atividades em grupo. Os grupos foram preparados pelo professor agregando alunos que têm mais facilidade com os que apresentavam um pouco ou muita dificuldade.



Uma fração é dita irredutível quando não dá mais para simplificar essa fração

Figura 5.2: Primeiro exemplo de resposta do exercício 2 da primeira sessão didática



Uma fração é dita irredutível quando Quando o numerador e o de-nominador são não divisíveis pelo mesmo número.

Figura 5.3: Segundo exemplo de resposta do Exercício 2 da primeira sessão didática

Observe que muitos alunos não conseguiram definir o que é uma fração irredutível em função do máximo divisor comum entre o numerador e o denominador da fração. Porém, compreendem o que significa dizer que uma fração é irredutível, como podemos notar nas figuras 5.2 e 5.3, acima.

Após a separação em grupos, a atividade passou a fluir bem. Foram realizadas pequenas interferências pelo professor e os alunos debatiam as respostas e a forma de chegar ao resultado. Nessa sessão didática o exercício que eles mais gostaram de fazer foram os dois últimos, que tratavam de localização de pontos em um plano cartesiano. O que agradou muito é que a atividade ficou bem lúdica, pois era formado um desenho ao se unir com segmentos de reta determinados pontos consecutivos.

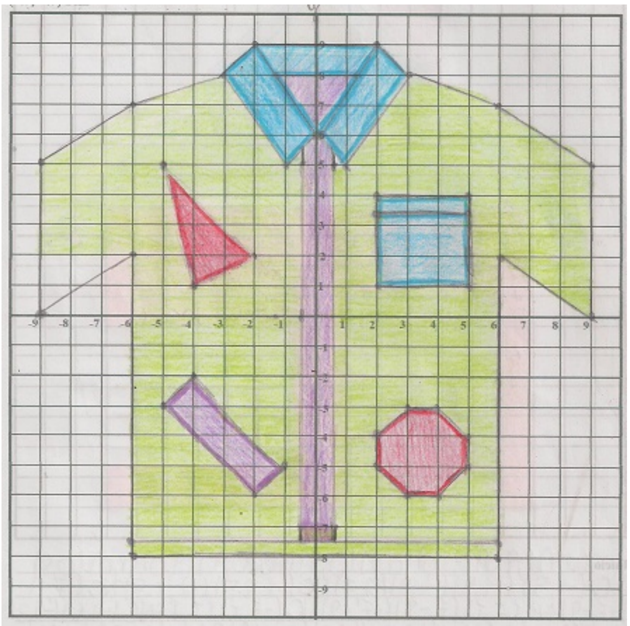


Figura 5.4: Desenho do exercício 9 realizado corretamente

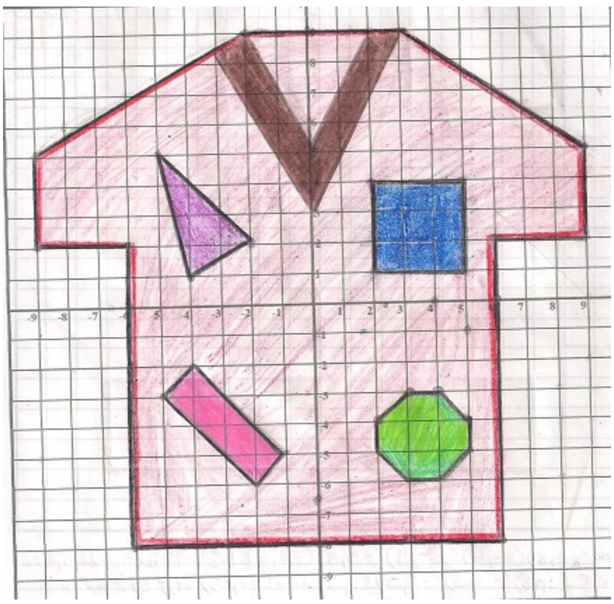


Figura 5.5: Desenho do exercício 9 realizado com falhas

O último exercício pedia que os alunos construíssem um desenho e marcasse todos os pontos necessários para que o seu desenho fosse reproduzido. Penso que um passo lógico dessa atividade seria os alunos prepararem uma atividade onde um amigo reproduzisse seu desenho, porém, a falta de tempo impediu que esse passo fosse dado. Pretendemos numa próxima oportunidade, dar esse segundo passo ao aplicar esse exercício.

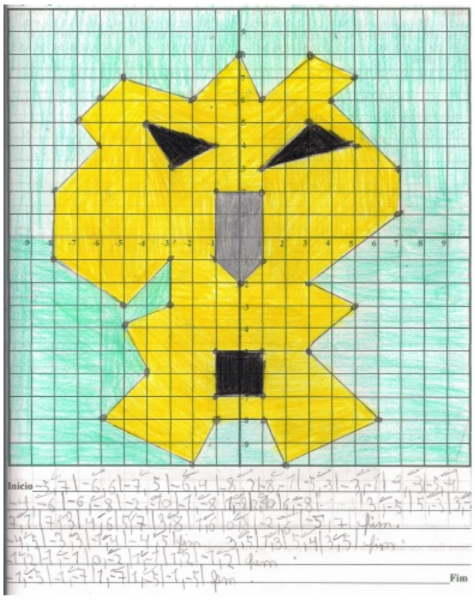


Figura 5.6: Exercício 10 executado de maneira correta

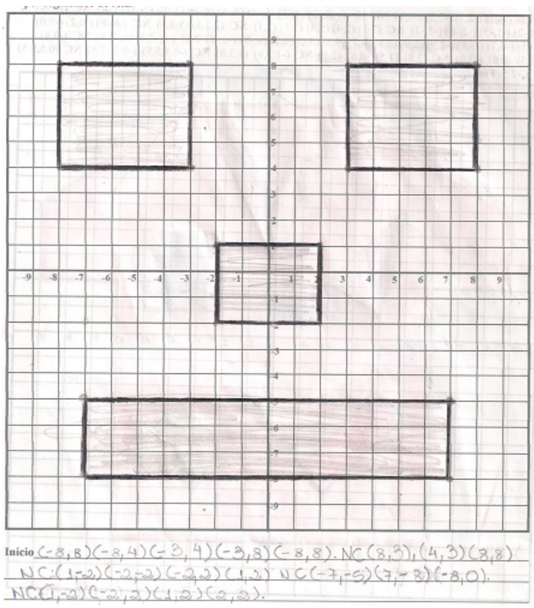


Figura 5.7: Exemplo de desenho (Exercício 10) que não poderia ser reproduzido a partir dos pontos marcados

Alguns alunos terminaram a atividade em casa, e no último dia não tinham nada para fazer. Como não poderia antecipar a segunda sessão didática, eles mesmos se propuseram a fazer um novo desenho ou ajudar os colegas.

Como foi dito acima, os exercícios de número 7 e 8 foram os que os alunos apresentaram mais dificuldade. Aqui, foi necessário parar e explicar o exercício. Foram feitos alguns exemplos na lousa e os alunos puderam questionar e tirar as dúvidas. Com isso, uma boa parte dos alunos conseguiu realizar os exercícios, porém, mesmo com a explicação um pequeno grupo de alunos entregou o exercício em branco. Ficamos bastante preocupados, já que essa era a ideia central que tínhamos para trabalhar os problemas de regra de três. Penso que nesse item, a quantidade de exercícios poderia ter sido maior. Gostaria de ter voltado no problema e atacá-lo novamente, porém, foi necessário dar prosseguimento à sequência didática e voltar ao problema numa próxima oportunidade.

Considero que a atividade foi bem-sucedida e que os objetivos foram alcançados pela maioria dos alunos. É óbvio que desejávamos que todos os alunos alcancem todos os objetivos propostos, mas isso seria algo improvável, já que os alunos, ainda que estejam em uma mesma série, apresentam níveis distintos de maturidade matemática. Alguns tem um raciocínio lógico bastante desenvolvido e fazem relações com extrema facilidade, outros têm grande dificuldade em fazer relações simples e mesmo em operações básicas. Então, não esperávamos um pleno aprendizado por parte de todos e por isso, consideramos os resultados obtidos bastante satisfatórios.

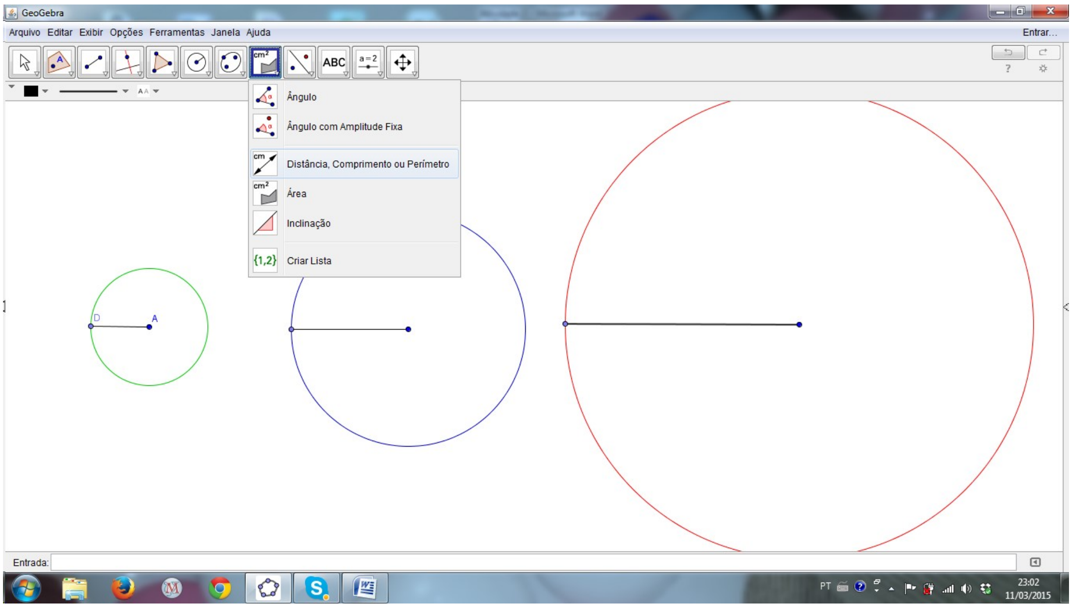
5.3 Apresentação da segunda sessão didática: Proporcionalidade com o Geogebra

1. Utilizando o arquivo do Geogebra chamado círculos, use a ferramenta (Distância, comprimento ou perímetro) para preencher a tabela abaixo. Caso seja necessário, utilize a calculadora de seu computador para encontrar as razões solicitadas.
   OBS: Para obter a medida do raio e do perímetro, basta selecionar a ferramenta (Distância, Comprimento ou Perímetro) e clicar sobre o que você quer medir. Após

Circulo	Raio (r)	Perímetro (p)	Área (A)	$\frac{p}{r}$	$\frac{A}{r}$
Azul					
Vermelho					
Verde					

Tabela 5.1: Medindo Circunferências

   preencher a tabela responda:



(a) Todos os círculos são do mesmo tamanho?
( )Sim ( )Não

(b) Quantas vezes o raio do círculo azul é maior que o do círculo verde? E o do círculo vermelho é quantas vezes maior que o do círculo verde?

(c) Quantas vezes o perímetro do círculo azul é maior que o perímetro do círculo verde? E o do círculo vermelho, é quantas vezes maior que o do círculo verde?

(d) Pelos exemplos anteriores, qual seria, em sua opinião, o perímetro de um círculo cujo raio fosse seis vezes maior que o raio do círculo verde? Por que você acha que daria esse valor?

(e) Construa um círculo com essas características e verifique se sua resposta estava correta.
( ) Sim, está correta. ( ) Não, está errada.

(f) Quantas vezes a área do círculo azul é maior que a área do círculo verde? E a do círculo vermelho, é quantas vezes maior que a do círculo verde?

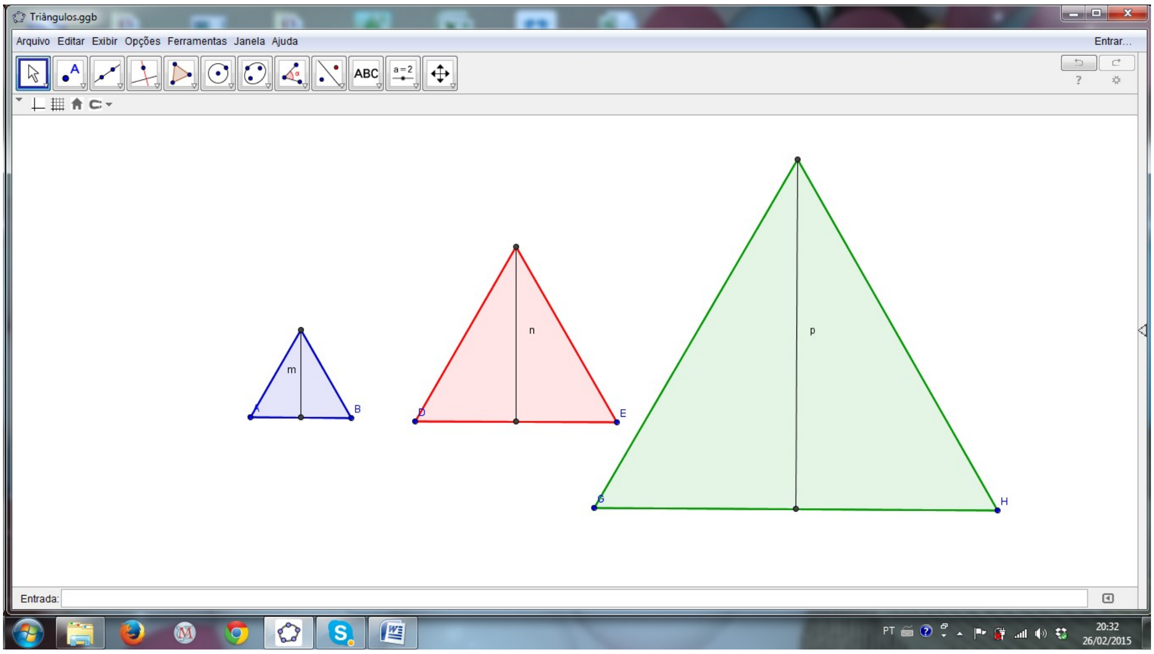
(g) O que você percebeu a respeito da razão entre o perímetro e o raio dos círculos?

(h) Em relação à razão entre a área e o raio de cada círculo, o que você percebeu?

(i) Existe alguma relação entre essas duas razões. Você consegue descobri-la?

2. Utilizando o arquivo do Geogebra chamado triângulos, use a ferramenta (Distância, comprimento ou perímetro) para preencher a tabela abaixo. Caso seja necessário, utilize a calculadora de seu computador para encontrar as razões solicitadas.
Após preencher a tabela responda:

(a) Os três triângulos tem uma característica comum em relação à medida de seus lados? Qual? Que nome se dá a esses triângulos?



Triângulo	Altura (h)	Lado (l)	Área (A)	$\frac{h}{l}$
Azul				
Vermelho				
Verde				

Tabela 5.2: Medidas dos triângulos Equiláteros

(b) Qual a razão entre a medida do lado do triângulo azul e a medida do lado do triângulo vermelho?

(c) E a razão entre a altura do triângulo azul e a altura do triângulo vermelho?

(d) Qual a razão entre a medida do lado do triângulo azul e a medida do lado do triângulo verde?

(e) E a razão entre a altura do triângulo azul e a altura do triângulo verde?

(f) O que você observou a respeito da razão entre a medida do lado e a medida da altura desses triângulos?

(g) Escreva a razão entre:

  i. O lado do triângulo azul e o lado do triângulo vermelho.

  ii. A área do triângulo azul e a área do triângulo vermelho.

  iii. O lado do triângulo azul e o lado do triângulo verde.

  iv. A área do triângulo azul e a área do triângulo verde.

  v. O lado do triângulo vermelho e o lado do triângulo verde.

  vi. A área do triângulo vermelho e a área do triângulo verde.

(h) Observando as razões acima, existe alguma relação entre a razão dos lados e a razão entre as áreas em cada triângulo? Se existe, qual é essa relação?

3. Agora abra um arquivo novo no Geogebra e construa três triângulos quaisquer e trace a altura de cada um deles. Pinte-os de azul, vermelho e verde. Preencha a tabela e responda:

Triângulo	Altura (h)	Lado (l)	Área (A)	$\frac{h}{l}$
Azul				
Vermelho				
Verde				

Tabela 5.3: Medidas de um triângulos qualquer

   (a) Nesse caso a razão entre a altura e o lado correspondente à base de cada triângulo que você construiu é constante ou ela varia?

   (b) Escreva a razão entre:

      i. O lado do triângulo azul e o lado do triângulo vermelho.

      ii. A área do triângulo azul e a área do triângulo vermelho.

      iii. O lado do triângulo azul e o lado do triângulo verde.

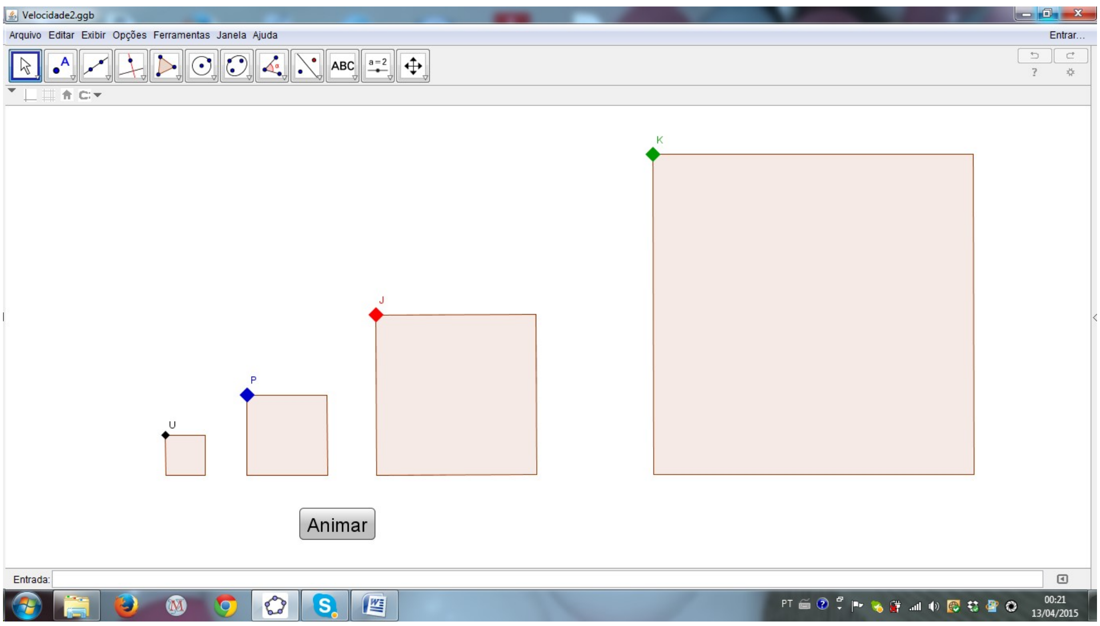
      iv. A área do triângulo azul e a área do triângulo verde.

      v. O lado do triângulo vermelho e o lado do triângulo verde.

      vi. A área do triângulo vermelho e a área do triângulo verde.

   (c) Nesses triângulos que você construiu existe alguma relação entre os lados e a razão entre as áreas? Se sim, que relação você conseguiu observar?

4. Abra o arquivo Velocidade.ggb. Esse é um experimento que relaciona as grandezas velocidade e tempo. São quatro quadrados de tamanhos diferentes por onde circulam pontos.



Para iniciar o experimento, clique no botão animar. Observe e responda:

(a) Qual é o perímetro de cada quadrado?

(b) O tempo que os pontos demoram a percorrer todo o perímetro de cada quadrado é o mesmo, ou algum deles completa a volta mais rápido que os demais?

(c) Todos os pontos se movimentam a uma mesma velocidade? Como você chegou a essa conclusão?

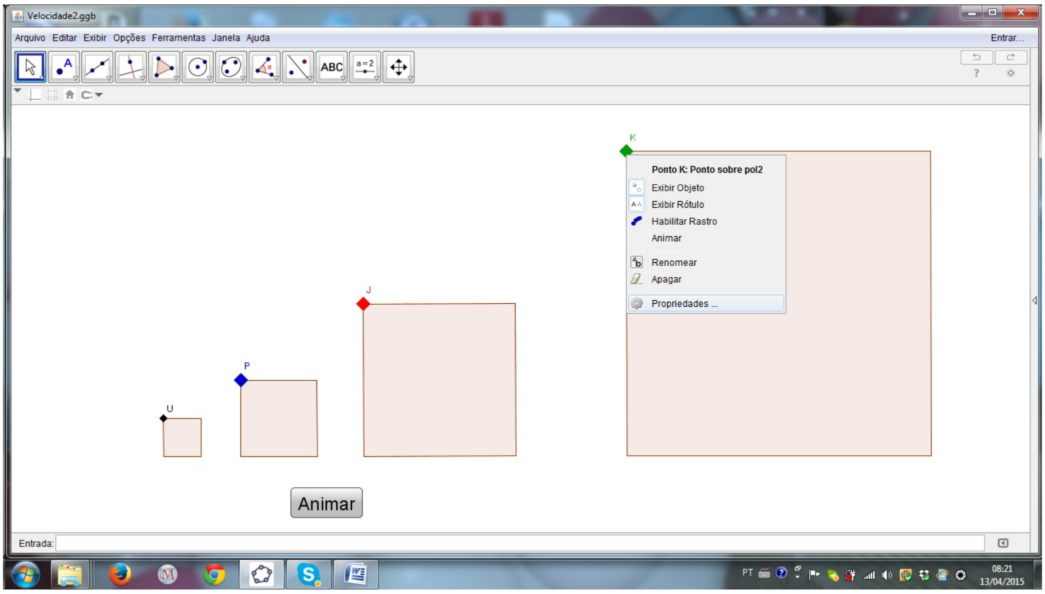
(d) Se você acha que não, qual é o ponto que circula com maior velocidade? E qual o mais lento?

(e) Sabendo que o tempo em que os pontos dão uma volta completa nos quadrados é de 10,7 segundos e que a velocidade é definida como a razão entre a distância e o tempo gasto para percorrê-la, preencha a tabela abaixo:

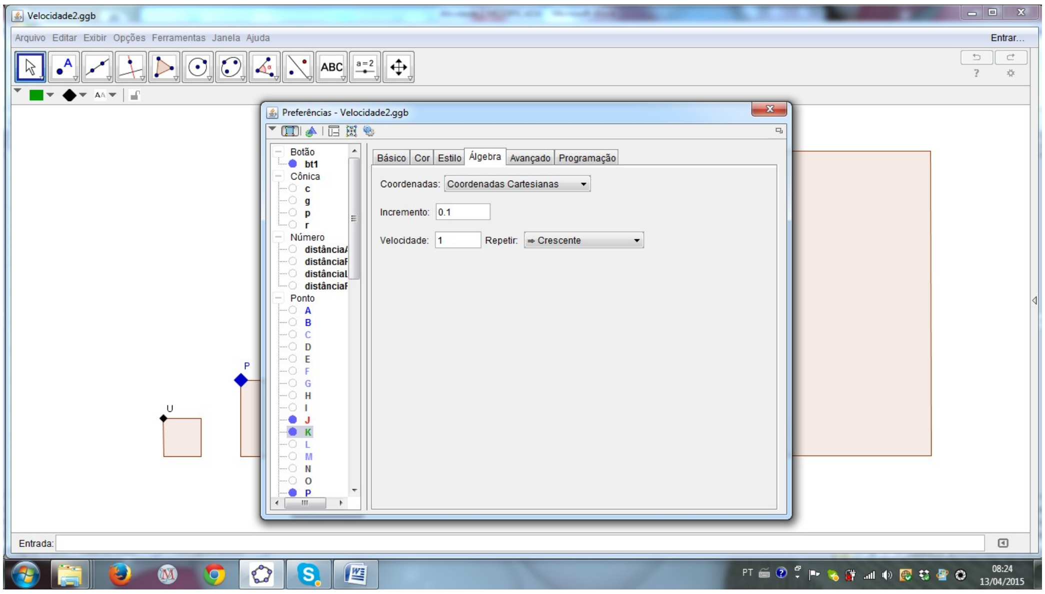
Ponto	Perímetro do quadrado (cm)	Tempo (s)	Velocidade
Preto		10,7	
Azul		10,7	
Vermelho		10,7	
Verde		10,7	

Tabela 5.4: Medindo Velocidades

(f) Agora, vamos explorar a velocidade de animação. Clique no ponto verde com o botão direito do mouse e clique em propriedades, como mostra a imagem abaixo:



Clique no menu Álgebra e você terá acesso à velocidade de animação do ponto, que estará marcando 1. Altere a velocidade para 2, feche o menu e clique no botão para animar.



(g) Enquanto os outros pontos dão uma volta no quadrado, qual o número de voltas dado pelo ponto verde?

(h) Então, o tempo que o ponto demora a dar uma volta agora aumentou ou diminuiu? Qual é o tempo necessário para o ponto verde dê apenas uma volta no seu quadrado?

(i) Como você faria para calcular a nova velocidade do ponto verde ao dar uma volta completa no quadrado? Calcule-a.

Altere novamente a velocidade para 3.

(j) Enquanto os outros pontos dão uma volta no quadrado, qual o número de voltas dado pelo ponto verde?

(k) Então, o tempo que o ponto demora a dar uma volta agora aumentou ou diminuiu? Qual é o tempo necessário para o ponto verde dê apenas uma volta no seu quadrado?

(l) Como você faria para calcular a nova velocidade do ponto verde ao dar uma volta completa no quadrado? Calcule-a.

(m) A partir das observações que você pode fazer, assinale V, se você julgar a afirmação verdadeira ou F, se você julgá-la falsa:

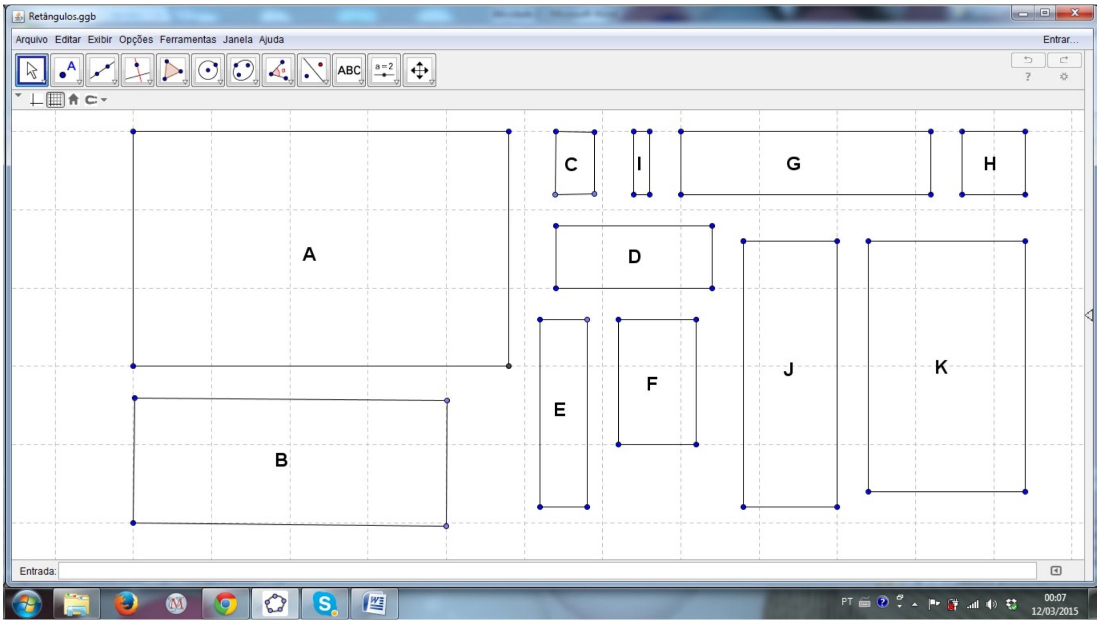
( ) A velocidade de animação (que é diferente da velocidade do ponto) que alteramos no Geogebra nada mais é que o número de voltas que o ponto dá no quadrado em um período de aproximadamente 10,7 segundos.

( ) Se você dobrar a velocidade de animação dobrar, então o tempo necessário para que o ponto dê uma volta no quadrado diminui pela metade.

( ) Se você tripicar a velocidade de animação, consequentemente a velocidade do ponto também será triplicada.

( ) Se aumentarmos a velocidade de animação d ponto vermelho para 2 e mantivermos a velocidade de animação do ponto verde em 1, então os dois pontos terão a mesma velocidade, nessas condições. Isso por que percorrerão a mesma distância em um mesmo período de tempo.

5. Abra o arquivo retângulos.ggb e meça os lados de todos os retângulos. Para simplificar as notação, chamemos o lado maior de M e o lado menor de m. A seguir, preencha a tabela abaixo:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
m											
n											
Razão $\frac{m}{n}$											
$\frac{m}{n}$ Simplificado											

Tabela 5.5: Medindo Retângulos

Divida esses retângulos em cinco grupos e diga qual foi o critério usado:

(a) Grupo 1: retângulos: Porque?

(b) Grupo 2: retângulos: Porque?

(c) Grupo 3: retângulos: Porque?

(d) Grupo 4: retângulos: Porque?

(e) Grupo 5: retângulos: Porque?

6. O professor de Matemática pediu em uma sala com 20 alunos, que resolvessem uma lista com 100 exercícios de Matemática. A lista podia ser feita em grupos de, no máximo, 5 alunos. Estima-se que um aluno gaste 3 minutos para resolver cada exercício. Faça os cálculos necessários e preencha a tabela abaixo:

Número de alunos no grupo	Tempo necessário para terminar a lista	Razão entre o número de alunos e o tempo	Produto do número de alunos pelo tempo
1			
2			
3			
4			
5			

Tabela 5.6: Tempo necessário para concluir uma lista de exercícios

(a) A razão entre o número de alunos e o tempo foi constante?
( ) Sim. ( ) Não.

(b) E o produto do número de alunos pelo tempo, foi constante?
( ) Sim. ( ) Não.

(c) Se os grupos pudessem ter 6 alunos, em quanto tempo todos os exercícios seriam resolvidos?

(d) É possível resolver os exercícios em 10 minutos? Se sim, quantos alunos seriam necessários para isso?

(e) Quando dobramos o número de alunos, o que acontece com o tempo necessário para fazer a lista?

(f) E quando triplicamos a quantidade de alunos, o que acontece com o tempo para fazer a lista?

7. Agora, ainda pensando na lista do exercício anterior, preencha a tabela abaixo com o número de exercícios que pode ser feito em um prazo de uma hora por determinada quantidade de alunos:

Número de alunos no grupo	Quantidade de Exercícios feitos em 1 hora	Razão entre o número de alunos e a quantidade de exercícios	Produto do número de alunos pela quantidade de exercícios
1			
2			
3			
4			
5			

Tabela 5.7: Quantidade de exercícios realizada em um determinado tempo

(a) A razão entre o número de alunos e a quantidade de exercícios feitos foi constante?
( ) Sim. ( ) Não.

(b) E o produto do número de alunos pela quantidade de exercícios feitos, foi constante?
( ) Sim. ( ) Não.

(c) Se o grupo pudesse ter 10 alunos, quantos exercícios seriam feitos em um período de 60 minutos?

(d) Quantos alunos seriam necessários para resolver a lista inteira em uma hora?

(e) Quando dobramos o número de alunos, o que acontece com a quantidade de exercícios que podem ser realizados?

(f) E quando triplicamos a quantidade de alunos, o que acontece com a quantidade de exercícios que podem ser realizados?

Agora, preste muita atenção nas definições abaixo

Definição 1: Chamamos de **grandeza**, tudo aquilo que possa ser medido ou contado. São exemplos de grandezas: o tempo, a velocidade, comprimentos, áreas, volumes, número de pessoas etc

Definição 2: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são **diretamente proporcionais** se estiverem assim relacionadas:$y = k \cdot x$ ou $\frac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade.

Definição 3: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são **inversamente proporcionais** se estiverem assim relacionadas: $y \cdot x = k$ ou $y = \frac{k}{x}$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade.

8. No exercício 1, medimos três grandezas: comprimento da circunferência, comprimento do raio e área do círculo. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

(a) Perímetro da circunferência e comprimento do raio são:
( ) Diretamente proporcionais
( ) Inversamente proporcionais
( ) Não são proporcionais
Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

(b) Comprimento do raio e a área do círculo são:
( ) Diretamente proporcionais
( ) Inversamente proporcionais

( ) Não são proporcionais
Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

9. No exercício 2, também medimos três grandezas do triângulo equilátero: comprimento do lado, comprimento da altura e área. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

   (a) A medida do lado e a medida da altura são:
   ( ) Diretamente proporcionais
   ( ) Inversamente proporcionais
   ( ) Não são proporcionais
   Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

   (b) Comprimento do lado e a área do triângulo são:
   ( ) Diretamente proporcionais
   ( ) Inversamente proporcionais
   ( ) Não são proporcionais
   Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

10. Já no exercício 3, medimos três grandezas em triângulos quaisquer, que você construiu: comprimento do lado, comprimento da altura e área. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

   (a) A medida do lado e a medida da altura são:
   ( ) Diretamente proporcionais
   ( ) Inversamente proporcionais
   ( ) Não são proporcionais
   Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

   (b) Comprimento do lado e a área do triângulo são:
   ( ) Diretamente proporcionais
   ( ) Inversamente proporcionais
   ( ) Não são proporcionais
   Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

11. No exercício 4 trabalhamos as grandezas velocidade (do ponto verde) e tempo. Com relação a essas duas grandezas, você as julga:
( ) Diretamente proporcionais

( ) Inversamente proporcionais
( ) Não são proporcionais
Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

12. Nos exercícios 6 e 7, as grandezas trabalhadas foram: número de alunos, tempo necessário para realizar certa quantidade de exercícios e a quantidade de exercícios que um determinado um determinado número de alunos faria num certo período de tempo. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

    (a) O número de alunos e o tempo necessário para realizar certa quantidade de exercícios são grandezas:
    ( ) Diretamente proporcionais
    ( ) Inversamente proporcionais
    ( ) Não são proporcionais
    Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

    (b) O número de alunos e a quantidade de exercícios realizada num determinado tempo são grandezas:
    ( ) Diretamente proporcionais
    ( ) Inversamente proporcionais
    ( ) Não são proporcionais
    Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

5.4 Análise da segunda sessão didática: Proporcionalidade com o Geogebra

A segunda sessão didática foi a mais demorada. O uso do computador é uma recomendação dos parâmetros curriculares nacionais [6] e acredito ser realmente uma ferramenta de ensino muito eficiente, motivo pelo qual colocamos uma atividade para usarmos essa tecnologia. A escola tem um laboratório de informática. Bem equipado, com um computador por aluno, em bom estado de conservação, porém, não é o suficiente para aplicarmos a atividade com eficiência.

Figura 5.8: Aplicação da segunda sessão didática

O maior problema aqui foi que os alunos não conheciam o software e isso causou grandes transtornos e atrasou bastante o andamento da atividade. Um datashow e uma tela de projeção facilitariam bastante o trabalho com os alunos pois, mesmo ilustrando as atividades com imagens, os alunos não conseguiam executar as orientações. Tinha que passar computador por computador auxiliando e isso tornou a atividade muito cansativa para o professor. Acho que esse foi um dos pontos negativos. A atividade, que deveria durar no máximo cinco aulas, acabou se estendendo para sete.

Trabalhamos a proporcionalidade na geometria e percebemos que nesse sentido, há muitos exemplos de grandezas diretamente proporcionais, mas não conseguimos encontrar, na geometria, exemplos de grandezas inversamente proporcionais que pudessem ser verificados com o Geogebra. A saída foi trabalhar com a velocidade de animação que é uma ferramenta simples do software e com situações onde não foi necessário usar o Geogebra.

Nessa atividade, percebi que estar no laboratório de informática já foi motivo de empolgação por parte dos alunos, já que no fundamental II eles já não mais têm aulas de informática e não é hábito do professor de nenhuma disciplina usar o computador como ferramenta pedagógica, por isso, eles acabam não frequentando mais o laboratório.

Alguns alunos gostaram tanto e ficaram tão empolgados que já chegaram em casa e baixaram o Geogebra. Mas o primeiro dia no laboratório foi bastante complicado e cansativo para o professor. A atividade evoluiu devagar e conseguimos fazer apenas o primeiro exercício e uma parte do segundo, mas os alunos de todas as turmas lamentaram o fim da aula, pois estavam gostando de fazer a atividade.

O primeiro exercício tratava de relações em círculos e aqui surge facilmente o número irracional Pi. Optamos por não entrar na questão dos irracionais já que é conteúdo do 8° ano, mas deixamos os números com dez casas decimais. Foi um erro. Se não vai falar de irracionalidade não importa a quantidade de casas decimais. Apenas tornamos as medidas complicadas demais para serem trabalhadas e registradas. A partir da segunda turma, reduzi o número de casas decimais para três, o que facilitou bastante.

Círculo	Raio (r)	Perímetro (P)	Área (A)	P/r	A/r
Azul	3	18.8495559215	28.2743338823	6.2831853072	9.4
Vermelho	6	37.6991118431	113.0973355296	6.2831853072	1.88
Verde	1,5	9.4247779608	7.0685834706	6.2831853072	4.7

Figura 5.9: Excesso de casas decimais

Na maioria dos exercícios usamos a calculadora do computador para determinar as razões e produtos, assim, trabalhamos bastante com a verificação da igualdade de frações transformando-as em números decimais. Outro fator que talvez tenha atrasado o andamento da atividade é o fato de muitos dos exercícios usarem figuras geométricas cujos elementos não eram de conhecimento dos alunos. Mas, por outro lado, foi uma oportunidade de apresentar e explorar esses elementos.

Circulo .	Raio (r)	Perímetro (P)	Área (A)	P/r	A/r
Azul	3	18,85	28,274	6,28	9,42
Vermelho	6	37,699	113,097	6,28	18,84
Verde	1,5	9,425	[illegible]	6,28	4,71

Triângulo	Altura (h)	Lado (l)	Área (A)	h / l
Azul	2,08	2,4	2,49	0,86
Vermelho	4,16	4,8	9,98	0,86
Verde	8,32	9,6	39,9	0,86

Figura 5.10: Razões na forma decimal

O terceiro exercício da atividade foi o que mais deu trabalho. Aqui as duas dificuldades apresentadas apareceram juntas. Os alunos tinham que construir três triângulos distintos e traçar sua altura. O exercício ficou tão complexo para orientação que, por motivo de tempo, tive que deixá-lo de lado ao aplicar a atividade para o 7° ano D. Nessa turma há duas aulas de Matemática às quintas-feiras e duas às sextas-feiras. Perdemos quatro aulas com o feriado do dia 04 de junho e isso comprometeu o andamento da atividade. Mas, esse foi o único exercício dessa sessão didática deixado de lado.

O quarto exercício foi o que os alunos mais gostaram. Animar os pontos e vermos os mesmos se movimentarem lhe deu certo dinamismo, um apelo visual que não é muito comum nas aulas de Matemática até mesmo por falta de recursos. A maioria respondeu aos exercícios com certa facilidade. O problema foi que depois que aprenderam a alterar a velocidade de animação, queriam ficar fazendo experimentos com a velocidade dos pontos e infelizmente, o tempo era curto para dar maior liberdade aos alunos para "brincarem"com a situação, ainda que isso pudesse ser benéfico pedagogicamente. Acho que, como falamos de velocidade de animação e da velocidade do ponto, calculada pela razão entre a distância percorrida e o tempo, a princípio houve confusão. Com uma intervenção constante do professor, as dúvidas foram sendo sanadas.

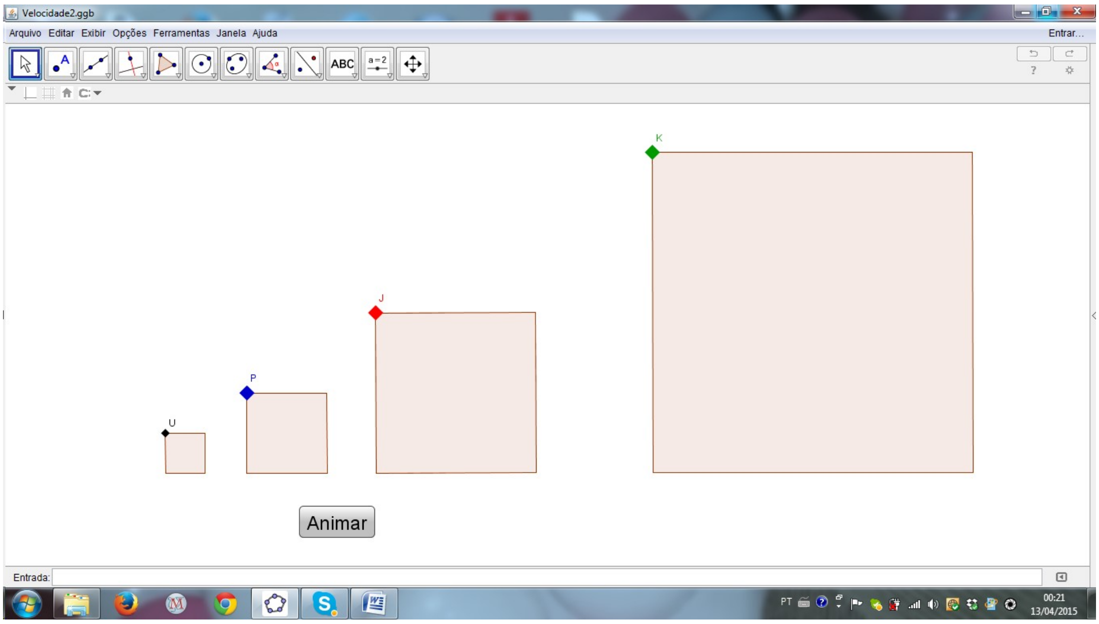
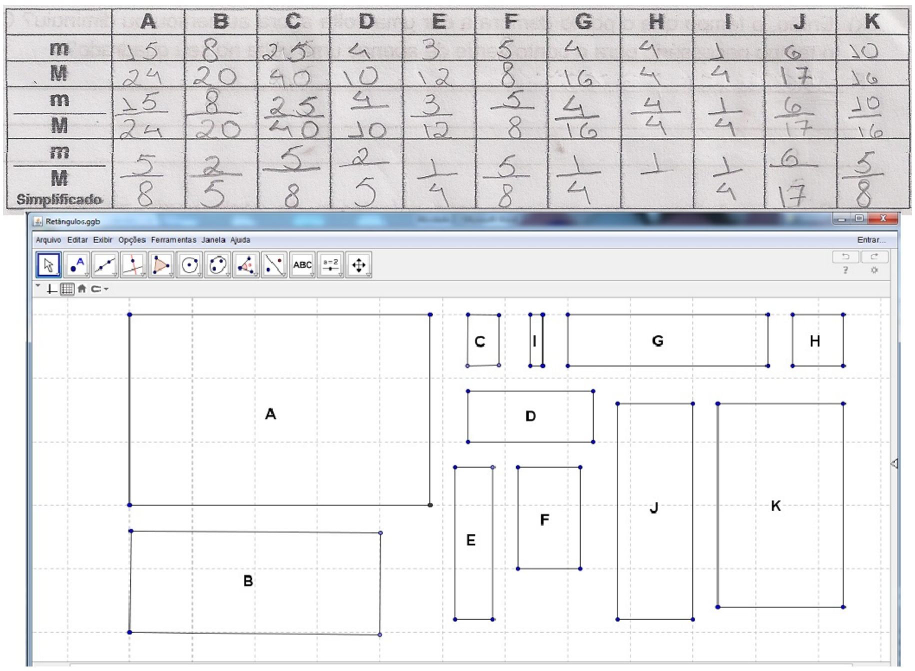


Figura 5.11: Animando pontos, relação entre velocidade e tempo

O exercício 5 foi uma aplicação clássica com retângulos. Os alunos fizeram rápido, mas muitos não pensaram em agrupar os retângulos cuja razão entre a medida dos lados era a mesma. Foi preciso intervir nesse sentido. A essa altura, alguns alunos já haviam esquecido como medir os lados e mais uma vez tivemos que auxiliar na utilização do software. Um retângulo em especial ficou muito pequeno para ser medido, tendo sido necessário ampliar a imagem para conseguir realizar a medição. Fora esse contratempo, foi um exercício tranquilo e feito com certa agilidade pela maioria dos alunos. Foi também o último que necessitamos utilizar o computador.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
m	15	8	25	4	3	5	4	4	1	6	10
M	24	20	40	10	12	8	16	4	4	17	16
m/M	15/24	8/20	25/40	4/10	3/12	5/8	4/16	4/4	1/4	6/17	10/16
m/M Simplificado	5/8	2/5	5/8	2/5	1/4	5/8	1/4	1	1/4	6/17	5/8

Figura 5.12: Retângulos Proporcionais

Os exercícios de números 6 e 7 eram complementares. E envolveram tanto grandezas diretamente quanto inversamente proporcionais em uma mesma situação. No geral, os alunos fizeram o exercício com uma certa tranquilidade. Esses dois exercícios já resolvemos em sala de aula.

Após realizar todas as medições e responder a todas as questões postas, apresentamos as definições de grandezas, de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa e questionamos os alunos sobre a relação que existia entre as grandezas apresentadas nos exercícios realizados. Em que casos as grandezas eram diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não apresentavam relação de proporcionalidade. Esse era o ponto central da atividade e teve aluno que não sabia o que era produto e razão, conceitos que já haviam sido trabalhados anteriormente. O professor aconselhou que consultassem o caderno ou lessem com mais atenção as definições. A definição de constante, era uma coisa nova. Nunca havia se usado tal vocabulário. Foi necessário trabalhar tal conceito para o entendimento da definição de proporcionalidade direta e inversa.

Aqui, a maioria dos alunos obteve êxito em reconhecer quais grandezas eram diretamente proporcionais, quais eram inversamente proporcionais e quais não eram proporcionais. Acredito que a maior dificuldade foi reconhecer as não-proporcionais, já que em alguns exercícios pedimos somente a razão ou somente o produto então era necessário fazer cálculos adicionais para chegar a uma conclusão. Nesses casos, o professor teve que intervir também para que os cálculos fossem feitos e a conclusão fosse embasada nesses cálculos.

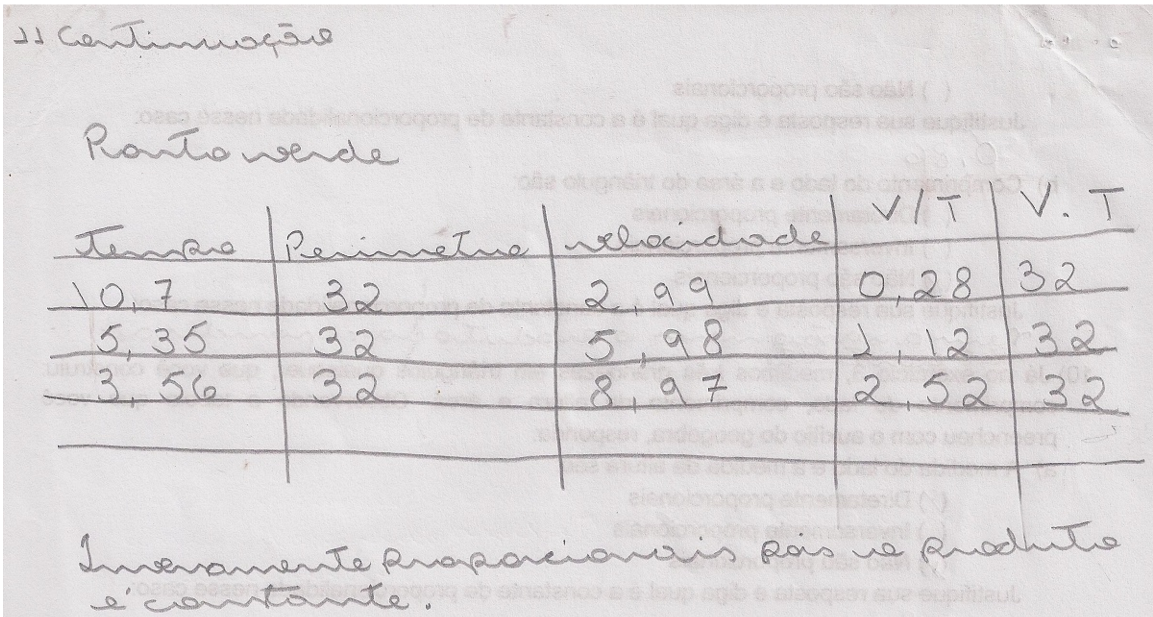


Figura 5.13: Verificar se a relação entre a velocidade do ponto verde e o tempo é uma proporcionalidade

Mais uma vez foi necessário utilizar calculadoras, porém, não estávamos mais no laboratório de informática e os números não foram idealizados para cálculo manual. A maioria não tinha calculadora, pois não é usada em sala de aula e o celular é expressamente proibido. O jeito foi fazer os cálculos coletivamente usando a calculadora do professor.

5.5 Sessão didática 3: Gráfico de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais

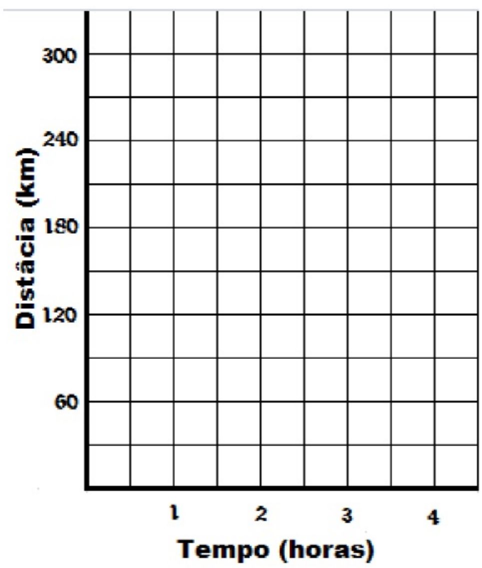
As grandezas velocidade média (v), distância (d) e tempo (t) estão relacionadas das seguintes maneiras:

$$v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow d = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$$

1. Se a velocidade média 60 km/h, ou seja, $\frac{d}{t} = 60$ então podemos afirmar que:
   (a) Distância (d) e tempo (t) são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 60.
   (b) Distância (d) e tempo (t) são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 60.
   (c) As grandezas distância (d) e tempo (t) não são proporcionais, pois a relação não está de acordo com nenhuma das definições acima.
   (d) As grandezas distância (d) e tempo (t) são proporcionais, mas não é possível saber se a proporcionalidade é direta ou inversa.

2. Fixando a velocidade em 60 km/h, é possível preencher a tabela abaixo. Preencha-a corretamente e a seguir marque os pontos obtidos no plano cartesiano ao lado:

Distância (km)	Tempo (horas)	Ponto (t , d)
30		
	1	
	1,5	
120		
150		



Observando os pontos que você marcou no gráfico, responda às questões abaixo:

(a) Os pontos são colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta? Se sim, trace essa reta.

(b) Em 3 horas, quantos quilômetros serão percorridos? E em 4 horas?

(c) Se 15 minutos é a metade de meia hora, localize no gráfico onde se encontra a abscissa referente a esse tempo e, a seguir, determine a distância percorrida nesse período de tempo.

(d) Localize no gráfico onde se encontra a abscissa referente a 45 minutos e, a seguir, determine a distância percorrida nesse período de tempo.

Observação: Pudemos traçar a reta porque a distância pode ser calculada para qualquer fração de tempo. Se estivéssemos trabalhando com pessoas, por exemplo, não poderíamos traçar essa reta, pois não podemos trabalhar com frações de pessoas, somente com pessoas inteiras.

3. Suponhamos agora que aluguemos um carro por um período de 6 horas, ou seja, $\frac{d}{v} = 6$. Podemos deduzir que:

(a) Distância (d) e velocidade média (v), são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 6.

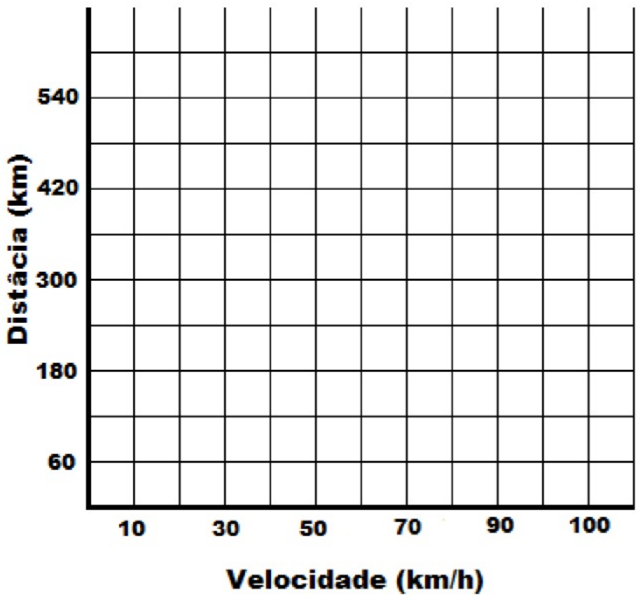
(b) Distância (d) e velocidade média (v) são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 6.

(c) As grandezas distância (d) e velocidade média (v) não são proporcionais, pois a relação não está de acordo com nenhuma das definições acima.

(d) As grandezas distância (d) e velocidade média (v) são proporcionais, mas não é possível saber se a proporcionalidade é direta ou inversa.

4. Fixando o tempo em 6 horas, é possível preencher a tabela abaixo. Preencha-a corretamente e a seguir marque os pontos obtidos no plano cartesiano ao lado:

Distância (km)	Velocidade (km/hora)	Ponto (v , d)
300		
	70	
360		
	75	
150		



Observando os pontos que você marcou no gráfico, responda às questões abaixo:

(a) Os pontos são colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta? Se sim, trace essa reta.

(b) Quantos quilômetros é possível percorrer a uma velocidade média de 10 km/h?

(c) Se o carro deve ser entregue em uma concessionária que está a 420 km de distância do local onde o carro foi alugado, qual deve ser a velocidade média para que o carro seja entregue no prazo?

(d) Supondo que o transito esteja congestionado e que a velocidade média seja de 15 km/ h, qual será a distância percorrida pelo motorista em um período de 6 horas?

5. Suponha agora que a distância a ser percorrida seja de 50 km. Nesse caso, temos que $v \cdot t = 50$. Pode-se concluir que:

(a) Velocidade média (v) e tempo (t) são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 50.

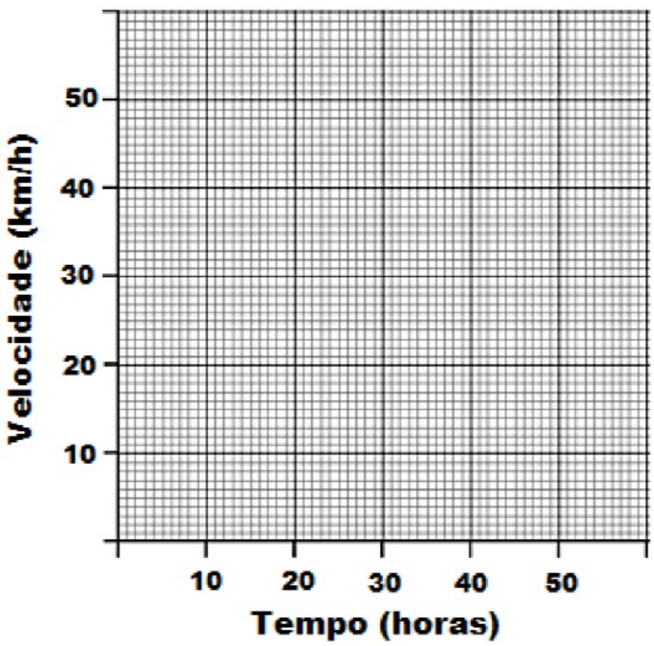
(b) Velocidade média (v) e tempo (t) são diretamente proporcionais e a em 60 km/h constante de proporcionalidade é 50.

(c) As grandezas velocidade média (v) e tempo (t), não são proporcionais, pois a relação não está de acordo com nenhuma das definições acima.

(d) As grandezas velocidade média (v) e tempo (t) são proporcionais, mas não é possível saber se a proporcionalidade é direta ou inversa.

6. Agora, fixada a distância em 50 km, é possível preencher a tabela abaixo. Preencha-a corretamente e a seguir marque os pontos obtidos no plano cartesiano:

Tempo (horas)	Velocidade (km/h)
	2
	5
	10
10	
5	
2	



Faça os cálculos que você julgar necessários e responda às seguintes questões:

(a) Os pontos são colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta? Se sim, trace essa reta.

(b) O valor da velocidade ou do tempo pode ser zero? Justifique sua resposta.

(c) Se a velocidade fosse de 100 km/h, qual seria o tempo necessário para percorrer 50 km?

(d) Se a velocidade fosse de 250 km/h, qual seria o tempo necessário para percorrer 50 km?

(e) Se a velocidade fosse de 500 km/h, qual seria o tempo necessário para percorrer 50 km?

(f) Quanto mais aumentamos o valor da velocidade média, mais o tempo se aproxima de que valor?

(g) Se fossemos aumentando o tempo, a velocidade também se aproximaria de algum valor? Qual?

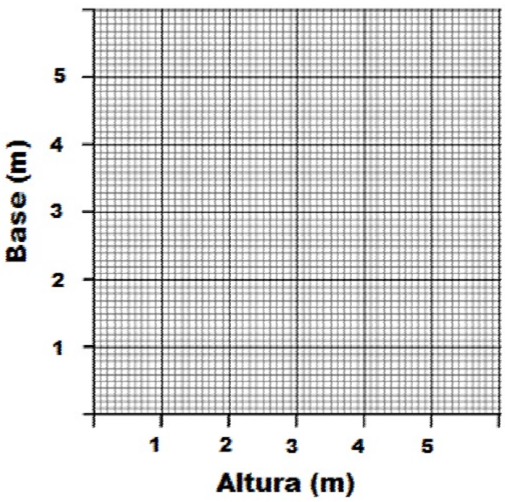
7. A era de um triângulo é dada pela fórmula $A = b \cdot h$, onde A é o valor da área do retângulo, b representa a medida base e h, a altura do retângulo. Se fixarmos a área em $4m^2$, então temos $b \cdot h = 4$. Observando essa relação, podemos concluir que as grandezas base e altura são:

(a) Diretamente proporcionais

(b) Inversamente proporcionais

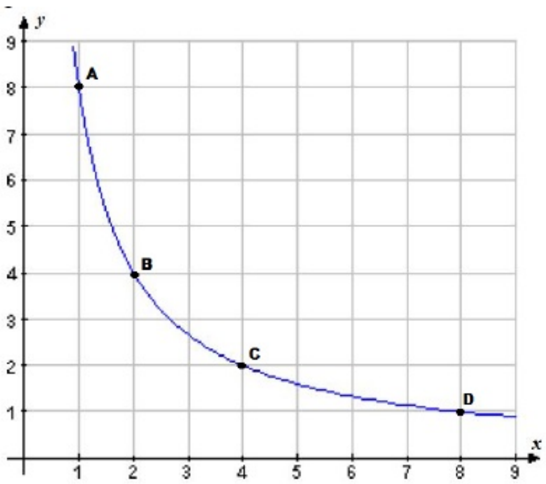
(c) Não é uma relação de proporcionalidade.
Justifique sua resposta.

(d) Preencha a tabela abaixo e marque os pontos no plano cartesiano



Base (m)	Altura (m)
0,8	
1	
1,6	
	2
	2,5
	4

8. O gráfico abaixo relaciona duas grandezas não especificadas x e y. Com relação à essas grandezas, assinale a alternativa correta:



Para responder à essa questão, devemos observar que a malha quadriculada nos permite determinar com certa facilidade pontos que pertencem à curva.

Ponto	x	y	$x \cdot y$
A			
B			
C			
D			

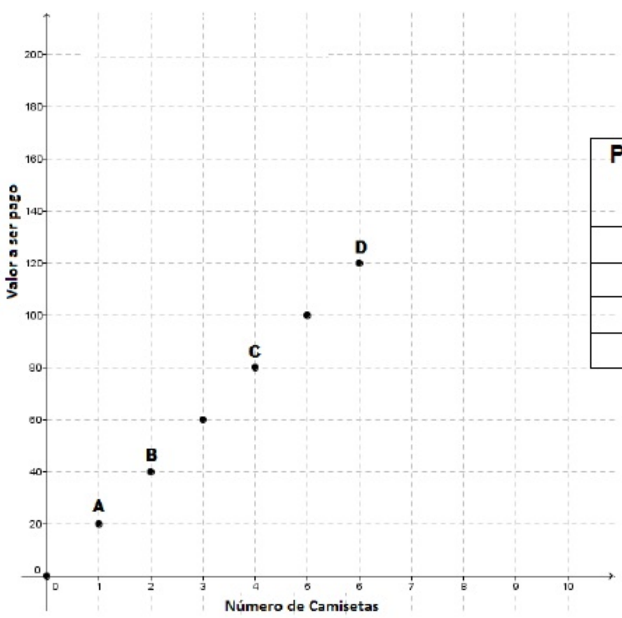
(a) As grandezas x e y são inversamente proporcionais com constante de proporcionalidade 8.

(b) As grandezas x e y são inversamente proporcionais cm constante de proporcionalidade 2.

(c) As grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 8.

(d) As grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 2.

9. O gráfico abaixo relaciona as grandezas **valor a ser pago** e **número de camisetas**. Preencha a tabela abaixo e responda às questões apresentadas.



Ponto	N° de camisetas (x)	Valor a ser pago (y)	$\frac{x}{y}$
A			
B			
C			
D			

(a) As grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique sai resposta.

(b) Qual é a constante de proporcionalidade?

(c) Nesse caso, os pontos não foram ligados para formar uma reta. Porque isso não foi feito?

5.6 Análise da Sessão didática 3: Gráfico de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais

Essa terceira sessão didática foi realizada em 4 aulas e fluiu bem. Na maioria dos exercícios usamos as relações entre velocidade média, distância e tempo, pois assim, poderíamos usar diretamente a definição para concluir a relação de proporcionalidade.

Em um de seus artigos à revista do professor de Matemática [2], Ávila destaca que a forma mais clara de ensinar o tema de proporcionalidade é que os alunos cheguem a uma relação algébrica para a as grandezas envolvidas, assim, usamos tal argumento como base para essa atividade, porém, não é trabalho simples que os alunos obtenham sozinhos tais relações, acho que menos de 30% dos alunos de nono ano estejam em um nível onde conseguiriam estabelecer tais relações. Especulamos que essa porcentagem não deva melhorar muito no ensino médio, logo, não achamos viável tal abordagem, ainda que seja realmente muito precisa.

Outro problema no método sugerido por Ávila é que os alunos têm pouco conhecimento de Matemática Aplicada. No artigo apresentado pela Revista do Professor de Matemática em sua oitava edição, intitulado Razões Proporções e Regras de três [2], no qual propõe tal metodologia, ele demonstra o método com vários exemplos. Porém, a maioria dos exemplos são aplicações de física, química ou usam a velocidade, que não é dada em sua forma padrão. Pensamos que tais aplicações não são pertinentes ou não estão à altura de um aluno do 7° ano do ensino fundamental. Assim, podemos utilizar o método proposto, mas ele não seria suficiente, já que contemplaria um número muito pequeno de situações práticas.

Na atividade os alunos aprenderam sobre colinearidade e puderam observar que se duas grandezas são diretamente proporcionais, o gráfico da relação será uma reta que sempre corta a origem dos eixos coordenados.

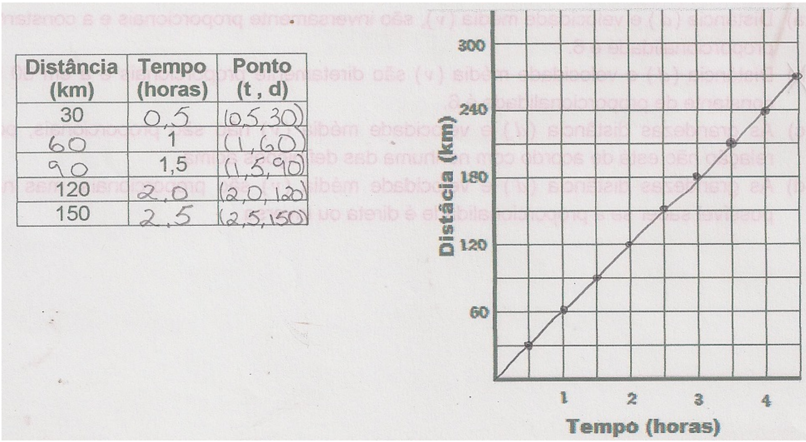


Figura 5.14: Gráfico da relação entre distância e tempo com velocidade constante igual e 60 km/h

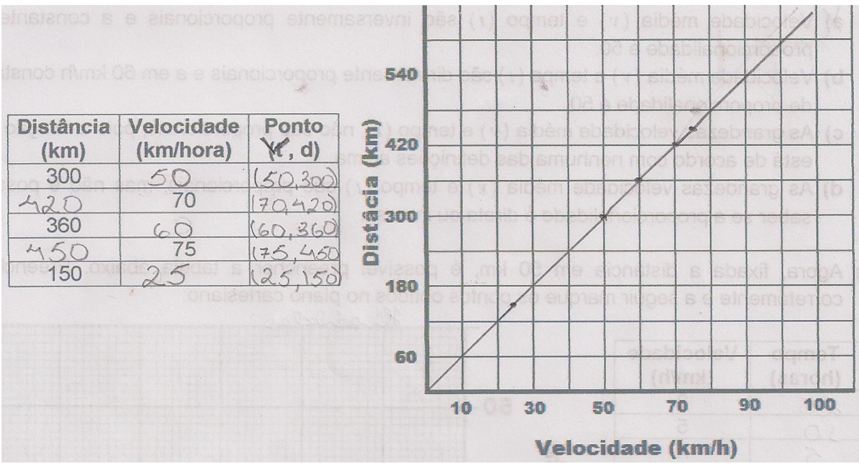


Figura 5.15: Gráfico da relação entre distância e velocidade com tempo fixado em 6 horas

A novidade foi incluir o gráfico de grandezas inversamente proporcionais, que não é tratado nos livros didáticos de 7º ano em geral, mas acreditamos que foi uma experiência válida e a maioria dos alunos conseguiu reconhecer a curva, ainda que fosse necessário trabalhar muito mais as características da mesma. Mas isso envolve inclusive o conceito de limites, já que a curva tem os eixos coordenados como assíntotas.

Tempo (horas)	Velocidade (km/h)
25	2
10	5
5	10
10	5
5	10
2	25

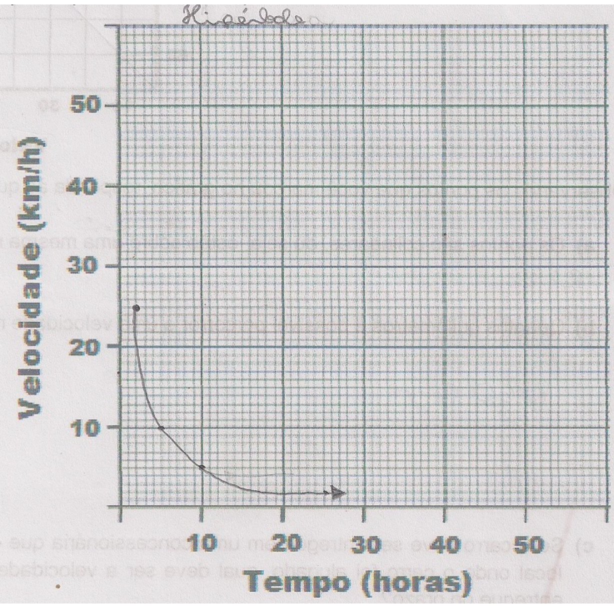
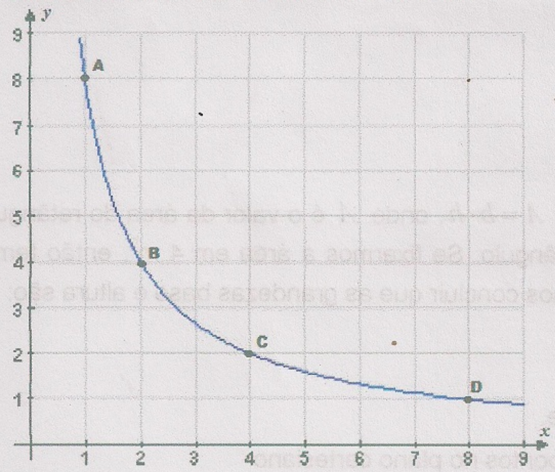


Figura 5.16: Gráfico da relação entre tempo e velocidade com a distância constante e igual a 50 km

O gráfico abaixo relaciona duas grandezas não especificadas x e y. Com relação à essas grandezas, assinale a alternativa correta:



Para responder à essa questão, devemos observar que a malha quadriculada nos permite determinar com certa facilidade pontos que pertencem à curva.

Ponto	x	y	$x \cdot y$
A	1	8	8
B	2	4	8
C	4	2	8
D	8	1	8

a) As grandezas x e y são inversamente proporcionais com constante de proporcionalidade 8.
b) As grandezas x e y são inversamente proporcionais cm constante de proporcionalidade 2.
c) As grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 8.
d) As grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 2.

Figura 5.17: Gráfico da relação entre duas grandezas inversamente proporcionais

5.7 Sessão didática 4: Proporcionalidade na prática - um método para se estimar alturas inatingíveis

Nessa atividade faremos um experimento e tentaremos determinar se as grandezas neles envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais.

Experimento ? Grupos de 4 alunos

Objetivo: Nosso objetivo é arrumar uma forma de calcular a altura desses objetos que o seu grupo escolheu. Será que isso é possível?

Materiais necessários

- Três palitos de churrasco
- Um transferidor de 180°
- Uma régua de 30 cm
- Uma fita métrica
- Uma trena

Descrição do experimento

Primeira Etapa: Encontrando a constante de proporcionalidade

- Com o auxílio da régua faça em uma das varetas uma marca de 10 cm, no lado não pontiagudo, em outra uma marca de 12 cm e na terceira, uma marca de 15 cm.
- Encontre um local plano para estacar as varetas até a marca que você fez em cada uma delas. Use o transferidor para garantir que ela esteja fazendo ângulo de 90° com o solo.
- Meça a sombra produzida por cada vareta com a régua ou a fita métrica, se necessário e anote as medidas na tabela abaixo.
- Agora, calcule o valor da razão $\dfrac{A}{S}$ e do produto $A \cdot S$. Se necessário utilize a calculadora do computador.

Vareta	Altura (A)	Tamanho da sombra (S)	$\frac{A}{S}$	$A \cdot S$
1				
2				
3				

A partir dos valores observados, provavelmente chegaremos à conclusão de que não são diretamente nem inversamente proporcionais, já que nem a razão nem o produto foram constantes. Mas se observarmos os valores das razões, veremos que eles estão "próximos". Como deve ocorrer erros na hora de medir o tamanho das varetas e das sombras, ainda que esses erros sejam muito pequenos, o valor das medidas fica levemente alterado e é isso que explica essa variação dos valores.

Assumiremos então que a altura de um objeto e o tamanho da sombra por ele produzida em um determinado período do dia são diretamente proporcionais.

Usaremos como constante de proporcionalidade a média aritmética dos valores das três razões.

Segunda etapa: Testando a eficiência da constante obtida

- Agora, meça e anote o tamanho da sombra de cada membro do seu grupo e as anote também na folha de experimento.
- Use a constante obtida na primeira etapa do experimento para estimar a medida de cada um dos seus colegas de grupo.
- Escolha três objetos que você gostaria de determinar a altura. Escreva o nome do objeto nas linhas 8, 9 e 10 e, a seguir. Com o auxílio da trena, meça o tamanho da sombra de cada um desses objetos e os anote na tabela.

Aluno	Tamanho da sombra	Altura Estimada	Altura Real
1			
2			
3			

Terceira etapa: Estimando alturas
Encontre três objetos para medir a altura, medindo sua sombra e a constante de proporcionalidade que obtivemos com o experimento com as varetas

Objeto	Tamanho da sombra	Altura Estimada

5.8 Análise da sessão didática 4

Essa foi a atividade que encerrou a sequência didática. Ela consistia em mostrar como a proporcionalidade pode ser usada em questões práticas e interessantes para os alunos. Quem nunca se questionou sobre a altura de um poste, um prédio ou uma árvore?

Tentamos reproduzir nessa atividade, o método que Tales de Mileto utilizou para medir a altura da pirâmide de Quéops, narrado exaustivamente pelos livros de História da Matemática e até questionado por alguns deles. Mas, em condições ideais, difíceis de se obter algumas vezes, o método funciona perfeitamente.

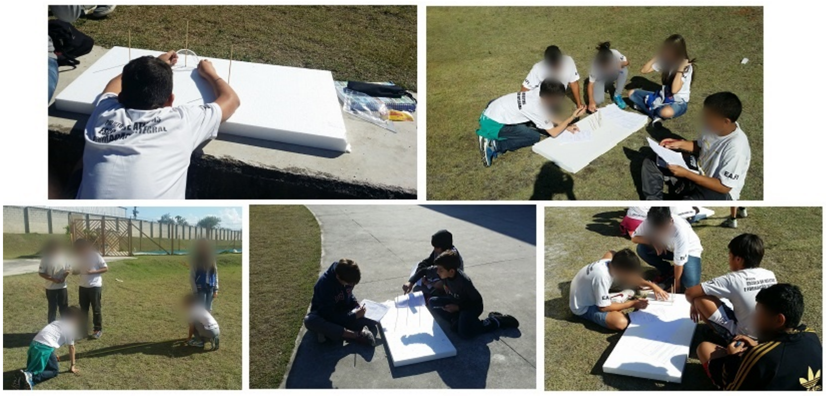


Figura 5.18: Aplicação da quarta sessão didática

Entre essas condições ideais, conta-se com a presença do sol, o que foi um problema apresentado durante a realização da atividade. Os dias amanheciam nublados e em alguns deles o sol não apareceu. Nos dias em que apareceu, não era o horário da aula nas salas onde iria aplicar a atividade, enfim, foi bem complicado, mas com três das quatro turmas, conseguimos realizar a atividade, somente o 7° ano D não conseguiu fazer as medições e acabamos tendo que apresentar uma aula teórica mesmo sobre como seria o trabalho. A outra turma do período da manhã (7° ano C) conseguiu fazer as medições no horário do almoço e as duas turmas da tarde, fizeram no horário de aula.

A atividade foi planejada para ser desenvolvida em três etapas. A primeira era preparar o experimento e verificar que a relação entre a altura de três varetas e as respectivas sombras produzidas por cada uma delas, apresentavam uma relação de proporcionalidade direta, ou seja, que a razão entre a altura da vareta e o tamanho da sombra por ela produzida era constante. A segunda etapa era a validação da constante obtida calculando-se a altura estimada de cada aluno do grupo e terceira seria encontrar três objetos para os quais desejássemos determinar a altura e calculá-la.

Colocamos um experimento prático para que os alunos percebessem o quão complicado é trabalhar com dados experimentais. Mostramos que o fator humano, pode ocasionar erros graves nos resultados obtidos e isso, de fato aconteceu. A primeira dificuldade prática é que essa razão não é constante na vida real, mas que podemos estabelecer um intervalo de tolerância que nos permite concluir se há ou não proporcionalidade. Os livros didáticos não tratam assuntos dessa forma. Lá todos os exercícios são planejados para dar certo, os valores são planejados previamente, o que não acontece no cotidiano em diversas situações.

Os alunos foram divididos em grupos novamente e após obter as medições, chegamos a três razões que não eram iguais, mas que, na maioria das vezes diferiam muito pouco. Como sabemos historicamente que essa relação é diretamente proporcional, explicamos que os erros acontecem principalmente por erros nas medições, ou mesmo na preparação do experimento. Decidimos então, que cada grupo deveria calcular a média aritmética das três razões obtidas e usá-la como constante de proporcionalidade.

Objeto	Altura (A)	Tamanho da sombra (S)	$\frac{A}{S}$	$A \cdot S$
Vareta 1	20cm	37,5cm	0,55	750
Vareta 2	18cm	32cm	0,55	576
Vareta 3	15cm	26cm	0,55	390

Horário em que foram realizadas as medições: 09h21min

Figura 5.19: Medições obtidas por um grupo do 7º ano C

Após calcular a razão de proporcionalidade, os alunos deveriam usá-la para estimar a altura de cada um dos membros do seu grupo, usando a igualdade de duas razões. Alguns tiveram dificuldade em obter a estimativa, mas o fato de estarem trabalhando em grupos, resolveu o problema e assim, todos obtiveram estimativas de sua altura. O passo seguinte era verificar se as estimativas obtidas eram boas ou se o erro cometido foi muito grande, ou seja, validar ou não, o método. Para isso, a ideia era levar os alunos a uma balança para verificar a altura, porém, a maioria deles já tinha realizado a medição no início do bimestre. Como era a última semana de aula e o tempo se acabava, usamos os dados que os alunos já tinham.

Houve muita variação e alguns grupos tiveram resultados satisfatórios, enquanto outros não foram muito bem na estimativa. Mas ao conferir o resultado das medições na lousa, os grupos que tinham feito medições menos cuidadosas já percebiam o problema, então, já esperavam resultados um pouco desastrosos.

A segunda etapa era, após a validação, usar a constante de proporcionalidade para calcular alturas inatingíveis. Aqui ficamos muito decepcionados pela falta de condições necessárias para o experimento. Houve aqui uma falha de planejamento por parte do professor, pois não havia nada interessante a se medir cuja sombra estivesse em uma região plana no horário em que conseguimos fazer a medição das varetas. Dessa forma, não foi possível concluir o experimento, mas acreditamos que os alunos entenderam como realizar a medição usando a proporcionalidade direta. Infelizmente, o que seria a parte mais prazerosa da atividade, não pudemos realizar.

Aluno	Tamanho da Sombra	Altura
Lucas	280	154,00
Jean	288	158,40
Cilan	257	141,35
Felipe	270	148,50

Realize aqui os cálculos que você julgar necessário para determinar a altura dos seus colegas de grupo.

288	257	270	280
×0,55	0,55	0,55	×0,55
1440	1285	1350	1400
14400	12850	13500	14000
00000	00000	00000	00000
158,40	141,35	148,50	154,00

Figura 5.20: Validando as medições obtidas por um grupo do 7º ano C

Após percorrer a escola e não encontrar nada com sombra projetada em área plana, a saída encontrada foi criar exercícios teóricos. Voltando para a sala, faltando poucos minutos para terminar a aula, o professor propôs o seguinte problema como tarefa:

Num determinado momento do dia um poste de 5 metros de altura projeta uma sombra de 3,5 metros. Qual é a altura de um garoto que, no mesmo instante, projeta uma sombra de 1,8 metros?

Um aluno, à noite, me manda uma mensagem no facebook dizendo que não conseguia resolver o exercício, pois o resultado obtido estava errado. Questionei-o então sobre o modo que ele havia resolvido o problema e vi que ele havia entendido perfeitamente a explicação e disse que era aquilo mesmo que devia ser feito. Aí ele me respondeu: Mas, professor, o cara então era gigante? Estranhei a pergunta e fui resolver a situação que havia sido proposta. Foi quando percebi que a altura encontrada para o menino era de 257 cm, ou 2,57 m.

O fato de o aluno ter realizado os cálculos e analisado o resultado é algo que o destaca. A maioria não analisa a resposta obtida, o que é uma falha dos próprios professores, que não têm o hábito de discutir a resposta obtida na resolução de um problema. Em casos de proporcionalidade, essa análise é essencial para evitar erros no reconhecimento de grandezas proporcionais.

Capítulo 6

Análise a Posteriori

Analisando a aplicação das quatro sessões que comporam a sequência didática percebemos falhas diversas, algumas de planejamento e outras de difícil previsão, tais como as condições climáticas desfavoráveis à aplicação da última sessão didática.

Apesar de tais falhas, acreditamos que a sequência foi bem realizada. E fora o fato de ter demorado um pouco mais que o previsto chegando à última semana antes das férias dos alunos, a maioria gostou das atividades e se empenhou em desenvolvê-las com dedicação.

Esperávamos um melhor rendimento por parte dos alunos que possuem mais dificuldade, o que não se verificou na avaliação realizada após a aplicação da sequência, que apresentaremos mais abaixo. Os alunos que têm mais facilidade desenvolveram muito bem o trabalho, ou seja, não houve uma grande mudança no que diz respeito ao rendimento dos alunos. Verificamos uma pequena variação positiva na média bimestral de todas as salas, com exceção do 7º ano F, no qual a média do 1º bimestre se manteve.

A média do 7ºD foi a que mais aumentou (0,6 pontos), mas aqui havia um período de adaptação dos alunos para com o professor, visto que era o primeiro ano que trabalhavam juntos, assim, já se esperava uma melhora natural das médias no segundo bimestre. As demais salas tiveram aumentos bem pequenos (0,1 para a média do 7ºG e 0,2 para a média do 7ºC) e mesmo parecendo pouco, acho que não podemos dizer que foi um fato irrelevante.

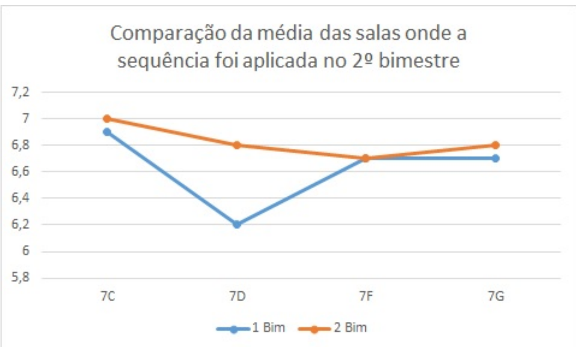


Figura 6.1: Comparação das médias obtidas pelas salas que participaram da sequência didática

Porém, na avaliação elaborada para verificar a aprendizagem dos conteúdos abordados nas sessões didáticas, que apresentaremos a seguir, os resultados não foram nada animadores, o que demonstra que realmente temos que repensar o planejamento da sequência didática para futuras aplicações

O fato de não termos conseguido realizar a estimativa de altitude dos monumentos e objetos evidencia algumas dúvidas levantadas por Fontana [11] sobre a veracidade da medição da altitude da pirâmide por Tales, como narra a história, mesmo que os motivos apresentados sejam bem diferentes daqueles que enfrentamos na realização do experimento. A limitação com relação ao fato de termos que realizar as medições nos horários das aulas de Matemática, foi o principal empecilho para a realização da atividade. Nos horários que tínhamos para realizar as medições não conseguimos que as sombras fossem projetadas em um local plano, o que impossibilitava a medição.

Acreditamos ainda que escolher um tema muito abrangente, no sentido de que estamos apresentando um novo conceito e não apenas uma atividade com um conteúdo mais específico, aliado ao fato de o professor nunca ter trabalhado com tal metodologia antes, pode ser apontado como uma falha de planejamento. Talvez, se as atividades fossem conduzidas de uma forma diferente, os resultados pudessem ser melhores que os obtidos.

Acreditamos que seria mais eficiente mesclar aulas tradicionais com atividades de aplicação, porém, não é o que prevê a metodologia da forma como a compreendemos. O tempo necessário também impediu que fosse realizada a retomada constante das atividades, o que é recomendado. Na atividade 1, por exemplo, muitos alunos não conseguiram determinar o valor de x nas proporções, o que seria essencial para um bom andamento da sequência didática. Mas como o tempo de aplicação estava apertado, o professor optou em retomar o problema em outras atividades que ainda estavam por serem aplicadas.

A principal dificuldade no laboratório de informática foi a manipulação do software. Então poderíamos, numa próxima aplicação, primeiramente trabalhar o software em aulas anteriores para uma familiarização dos alunos para com o mesmo. Acreditamos que essa preparação adequará o tempo de aplicação. As animações fizeram muito sucesso e dinamizou a atividade, tornando interessante para os alunos trabalhar com velocidade de animação do ponto. A confusão entre velocidade de animação e velocidade do ponto também gerou uma certa polêmica e muitos demoraram a entender a diferença entre as duas, o que mostra que precisaríamos trabalhar mais a definição de velocidade, já que era a partir desse cálculo que diferenciava-se as duas velocidades.

Apresentar o ramo positivo da hipérbole para mostrar como é o gráfico de grandezas inversamente proporcionais também foi muito válido. A maioria dos alunos conseguiu reconhecer a curva na avaliação final, ainda que a maioria tenha errado a resposta, colocaram como opção outro ramo de hipérbole e não uma reta. Então, como pretendíamos usar o gráfico como forma de identificar o comportamento proporcional das variáveis, creio que podemos validar a experiência com os dois tipos de gráficos.

6.1 Avaliação

Para verificar o resultado da sequência didática, foi elaborada uma prova sobre os conteúdos abordados pela sequência didática. Os alunos tiveram uma hora e quarenta minutos para responder as questões propostas e a prova tinha um valor de 3,5 pontos na nota bimestral das turmas. A participação nas atividades da sequência didática contabilizou mais 2 pontos na nota bimestral.

Prova Oficial de Matemática

NOME:

Nº

7º ano

1. Em cada caso, calcule o valor desconhecido nas igualdades:

   (a) $\frac{x}{4} = \frac{18}{36}$

   (b) $\frac{3}{5} = \frac{10,5}{x}$

   (c) $\frac{13}{4} = \frac{x}{28}$

   (d) $x \cdot 3 = 12 \cdot 15$

   (e) $2 \cdot x = 6 \cdot 21$

   (f) $27 \cdot 3 = 15 \cdot x$

2. O que é uma grandeza? Dê três exemplos.

3. Quando duas grandezas são ditas diretamente proporcionais? Dê três exemplos de pares de grandezas diretamente proporcionais.

4. Quando duas grandezas são ditas inversamente proporcionais? Dê três exemplos de pares de grandezas inversamente proporcionais.

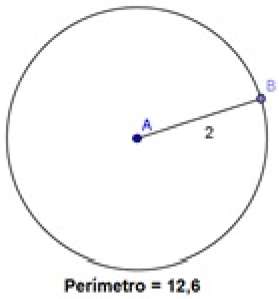
5. Na figura abaixo as medidas do raio e do perímetro da circunferência são dadas em centímetros

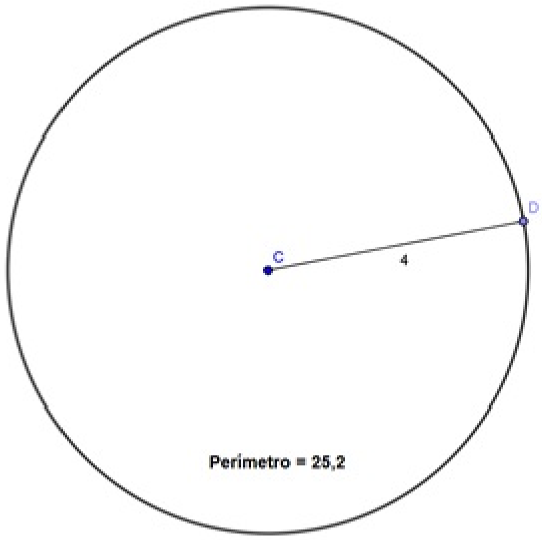
   (a) Qual a razão entre a medida do raio e a medida do perímetro do círculo menor? E do círculo maior, qual é a razão entre essas duas grandezas?

   (b) Essas grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não são proporcionais? Justifique sua resposta.

   (c) Se uma circunferência tem 8 cm de raio, qual é o valor de seu perímetro? Justifique sua resposta.

6. (SARESP- Adaptado) A sentença algébrica $d \cdot h = 12$, relaciona o número d de dias, e o número h de horas trabalhadas por um sapateiro, por dia, para fazer certa quantidade de sandálias. Supõe-se que o trabalhador produza a mesma quantidade





de sandálias por hora trabalhada.

Qual das tabelas abaixo expressa, de forma correta, a sentença algébrica?

(a)

Número de horas (h)	12	9	6
Número de dias (d)	6	3	2

(b)

Número de horas (h)	10	8	6
Número de dias (d)	2	4	6

(c)

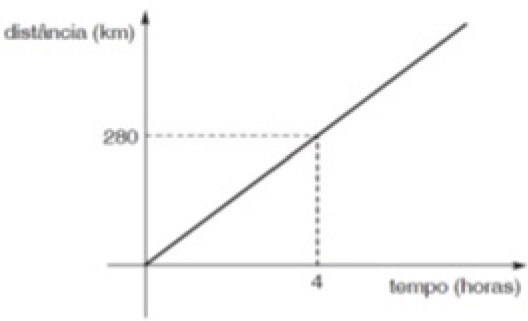
Número de horas (h)	12	6	4
Número de dias (d)	6	3	2

(d)

Número de horas (h)	2	4	6
Número de dias (d)	6	3	2

As grandezas número de dias e número de horas trabalhadas são inversamente proporcionais. Se o sapateiro tivesse que entregar as sandálias num prazo de 2 dias, quantas horas por dia ele precisaria trabalhar?

7. (SARESP) O gráfico desenhado abaixo representa uma relação entre a grandeza tempo (em horas) e a distância percorrida (em quilômetros).



As grandezas distância e tempo, nesse caso, são

(a) Não proporcionais

(b) Inversamente proporcionais

(c) Diretamente proporcionais

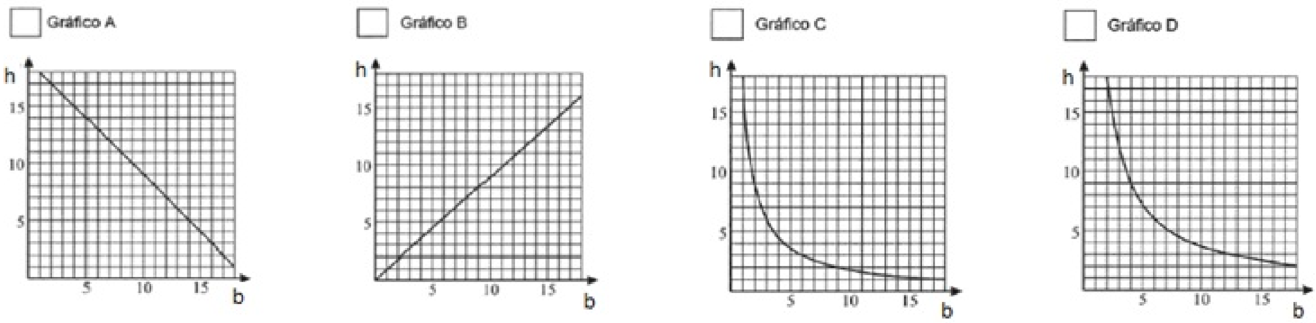
(d) Proporcionais, mas a primeira ao quadrado da segunda

8. Existem vários retângulos, de dimensões diferentes, com $18cm^2$ de área.

(a) Complete a tabela que se segue indicando, em centímetros, a medida da base e a altura de três retângulos diferentes com $18cm^2$ de área.

	Retângulo 1	Retângulo 2	Retângulo 3
Base (cm)	4		
Altura (cm)		0,5	

(b) Qual dos gráficos seguintes pode representar a relação entre a base (b) e a altura (h) dos retângulos de $18cm^2$ de área?



9. A tabela seguinte relaciona o ângulo de visão com a velocidade de condução.

Ângulo de visão (em graus)	100	75	45	30
Velocidade de condução (em km/h)	40	70	100	130

Quanto maior é a velocidade a que se conduz, mais reduzido é o ângulo de visão. A velocidade de condução e o ângulo de visão são grandezas inversamente proporcionais? Justifique sua resposta.

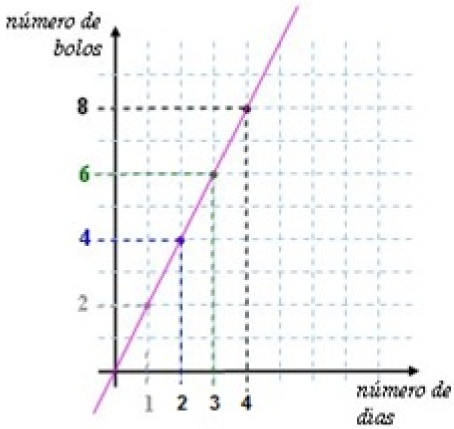
10. Quatro amigas vão alugar um apartamento, em Copacabana, para desfrutarem de duas semanas de férias. O valor do aluguer será dividido igualmente pelas meninas. Cada uma delas pagará 800 reais.

(a) Quanto pagará cada uma das amigas se ao grupo se juntar mais uma garota? Mostre como chegaste à sua resposta.

(b) Qual das equações seguintes traduz a relação entre o número de amigas, n, e o valor a pagar, p, por cada uma delas? Assinale a alternativa correta:

i. $p \cdot n = 800$ ii. $p \cdot n = 3200$ iii. $\dfrac{p}{n} = 800$ iv. $\dfrac{p}{n} = 3200$

11. No gráfico abaixo mostra o número de bolos (b) que João consome em um determinado número de dias (n). Analise o gráfico e assinale a alternativa correta:



(a) As grandezas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade $\dfrac{n}{b} = 2$.

(b) As grandezas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade $\dfrac{b}{n} = 2$.

(c) As grandezas são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade $\dfrac{b}{n} = 2$.

(d) As grandezas são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade $\dfrac{n}{b} = \dfrac{1}{2}$.

12. Aprendemos que a altura de um objeto e a sombra por ele projetada são grandezas diretamente proporcionais. Nathan ficou curioso ao avistar uma grande árvore que se encontrava no centro de um grande gramado plano. Usando os conhecimentos adquiridos na aula de Matemática, ele usou a própria sombra para encontrar a constante de proporcionalidade. Ele sabia que sua altura era de 160 cm e no momento em questão, a medida de sua sombra era de 200 cm. A partir dessas informações, responda:

(a) Qual era a constante de proporcionalidade da razão entre a altura (H) e o tamanho da sombra (S)?
$\dfrac{H}{S} =$

(b) Com essa constante, ele conseguiu estimar a altura da árvore, cuja sobra media 1000 cm. Como ele fez isso? Qual foi o valor encontrado?

Capítulo 7

Conclusões

Ao final da quarta sessão didática, foi realizada uma avaliação para verificar o entendimento dos alunos a respeito dos assuntos abordados pela sequência didática e os resultados ficaram aquém do esperado para o tempo de preparo e aplicação das atividades. Dizemos que ficou aquém do esperado por que os alunos que se destacam continuaram se destacando e os que têm mais dificuldade não se saíram melhor do que costumam se sair quando trabalhamos com o chamado método tradicional de ensino, ou seja, aula expositiva em sala de aula usando apenas a lousa como instrumento didático. Tem-se que se destacar nessa colocação que a maioria dos alunos que não se saem bem têm dificuldades muitas vezes relacionadas às operações básicas. Muitos entendem o processo, mas não conseguem executá-lo. Outro problema grave que enfrentamos é a interpretação de textos. Muitos alunos não entendem de fato o que estão lendo e acabam por não conseguir executar comandos simples, como encontrar um atalho no Geogebra, ainda que haja uma figura mostrando claramente onde ele deve ir. Nas aulas de Matemática os alunos que foram o foco de estudo dessa Engenharia Didática, são no geral, muito participativos. Tal dedicação se manteve na aplicação do trabalho e merece ser destacada.

Acredito que seja necessário acrescentar um número maior de exemplos de grandezas com comportamento proporcional, principalmente as inversamente proporcionais cujos exemplos são escassos para o 7º ano do ensino fundamental. Geralmente relacionamos como inversamente proporcionais, número de pessoas e o tempo necessário para fazer um certo trabalho ou velocidade de um móvel e o tempo gasto para percorrer uma distância fixada, difícil encontrar exemplos muto diferentes desses. Na Sequência Didática, trabalhamos poucos exemplos de grandezas inversamente proporcionais, já que não conseguimos encontrá-los na geometria para trabalharmos com o Geogebra e tivemos que voltar à prática tradicionalmente encontrada nos livros.

Teríamos que dar um pouco mais agilidade à realização das atividades e ainda prever uma aula a mais para possíveis incompreensões a respeito do conteúdo tratado na atividade e caso não haja problemas dessa natureza, podemos utilizar a aula extra para aprofundamento do conteúdo tratado na sessão didática. Ou ainda podemos fazer as duas coisas: Levar uma atividade de aprofundamento para os alunos que conseguiram se apropriar dos conteúdos em foco na atividade e uma retomada do conteúdo para aqueles que apresentaram alguma dificuldade.

Outro fator que temos que citar é o custo financeiro do trabalho. A escola não arca com as cópias dessas atividades. Fica tudo às custas do professor. Se levarmos em consideração que foram mais de 80 atividades impressas em cada sessão didática, temos que colocar isso como um fator negativo, não do trabalho, mas da falta de apoio à fazer coisas diferentes, ou seja, há a cobrança, mas não há viabilização para que as ideias saiam do papel.

Apesar dos resultados não serem tão bons quanto esperávamos, foi uma experiência válida e que deve ser aperfeiçoada para futuras aplicações. Acreditamos que o ideal seja mesclar as atividades com aulas expositivas, uma vez que construir um novo conceito a partir de exemplos e situações cotidianas leva muito tempo, já que nosso aluno não é trabalhado nesse sentido. Há alunos que se apropriam do conhecimento de forma muito rápida e há aqueles que levam um tempo muito grande para a apropriação. Acho que realmente seria necessário trabalhar em pelo menos três níveis dentro de uma mesma sala para ajudar o aluno com mais dificuldade e ao mesmo tempo, não desmotivar o aluno que tem mais facilidade. Porém, seria como preparar três aulas em uma mesma sala e ter tempo de orientar os três grupos, o que é muito complicado para o professor. Acredito que o ideal, para o professor, seria dividir as salas de aula por níveis, mas estudiosos afirmam que isso não seria o melhor para o aluno, seja ele muito esperto ou um que tenha muita dificuldade.

Ainda que a orientação seja a de que o professor nos dias de hoje seja um mediador de aprendizagem, nossos alunos esperam ainda que sejamos transmissores de conhecimento, isso é dito no sentido que tudo tem de ser apresentado de forma simples, "mastigada", de forma que eles consigam "digerir"com uma certa facilidade. Se não for assim, o aluno simplesmente desiste. O problema é endêmico e assola todos os níveis de ensino. Em se tratando de Matemática tal abordagem se torna ainda mais complicada pois, o aluno costuma chegar ao 6º ano defasado de conteúdos e há um extenso currículo a ser seguido anualmente, ou seja, se nos atemos às dificuldades apresentadas pelo aluno e tentamos trabalhá-la, talvez tenhamos sucesso, entretanto podemos ter problemas em cumprir o currículo proposto. A orientação é trabalhar as dificuldades nos temas da série atual, ou seja, não se recomenda voltar o conteúdo, o que é muito complicado e não traz resultados satisfatórios, como observamos nos resultados de Matemática das avaliações externas.

Finalmente, devemo nos atentar ao fato de que não podemos nos valer da dificuldades dos alunos para não apresentar as ideias matemáticas atreladas a um determinado conteúdo. Tudo tem que ser uma sequência de passos lógicos e os livros didáticos assim como os currículos escolares são organizados visando essa sequência. Apresentar proporcionalidade como mostrado nas figuras 3.1 e 3.2 onde não há embasamento matemático, não traz avanço algum para o aluno, que não consegue relacionar o novo conteúdo aos conhecimentos previamente adquiridos, além de inviabilizar aplicações importantes que vêm da proporcionalidade, tais como divisões em partes proporcionais, por exemplo. Na verdade ilude-se o aluno, que acha que está preparado, visto que consegue resolver todos os problemas propostos pelo professor. Ao se deparar com uma avaliação externa, ele percebe o quão despreparado está. Temos o dever de ajudar o aluno a crescer, temos o dever de buscar alternativas para trabalhar com alunos que não aprendem do jeito que estamos a ensinar. Mas temos o direito de ter as ferramentas que julgamos necessárias para tentar fazer isso acontecer. Só a união da escola com a família amparada pelo investimento público pode trazer a mudança necessária para melhorarmos os índices educacionais e assim, termos uma educação pública de qualidade.

Apêndice A

Respostas da Primeira Sessão Didática

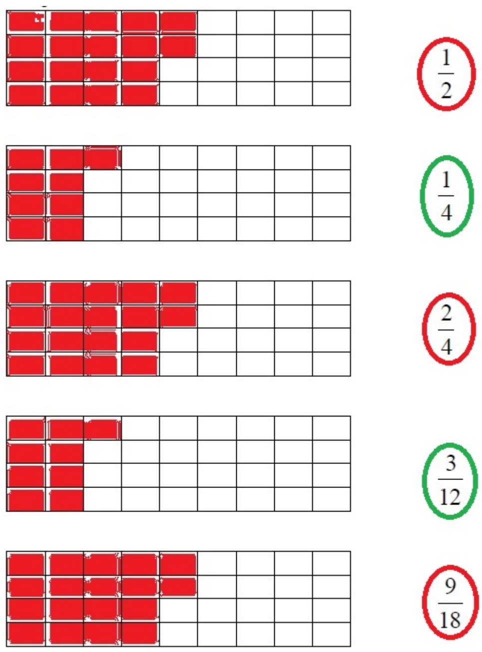
1. Simplifique as frações abaixo até torná-las irredutíveis:

   (a) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (b) $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ (c) $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ (d) $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ (e) $\frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

2. Agora, calcule o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador das frações irredutíveis que você encontrou em cada item do exercício anterior e escreva uma definição para frações irredutíveis, ou seja, diga como podemos utilizar o mdc para verificar se uma fração é irredutível

   Uma fração é dita irredutível quando :**O máximo divisor comum entre o numerador e o denominador for 1.**

3. Frações equivalentes ("iguais") são aquelas que representam a mesma quantidade de um inteiro, que no nosso caso é representado por um retângulo. Pinte as frações indicadas e a seguir indique quais são equivalentes circulando-as com cores iguais:



Observação: Há outras formas de pintura adequadas

4. Podemos decidir se duas ou mais frações são equivalentes tornando-as irredutíveis ou encontrando sua representação decimal. Usando esses dois processos verifique quais das frações abaixo são equivalentes:

   (a) $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
   (b) $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$
   (c) $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
   (d) $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$
   (e) $\frac{45}{30} = \frac{3}{2}$
   (f) $\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$

   Podemos concluir então que: $\frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{10}{15}$ e $\frac{45}{30} = \frac{54}{36}$

5. Sejam a, b, c e d números racionais tais que $a \cdot b = k$ e $c \cdot d = k$, podemos concluir que:

   (a) $a = b$
   (b) $\boldsymbol{a \cdot b = c \cdot d}$
   (c) $a = c$ e $b = d$
   (d) $a = b$ e $c = d$

6. se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, podemos garantir que

   (a) $a \cdot b = c \cdot d$
   (b) $a \cdot c = b \cdot d$
   (c) $\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$
   (d) $a \cdot d = c \cdot d$

7. Nas frações abaixo, determine o valor de x e y nas frações equivalentes:

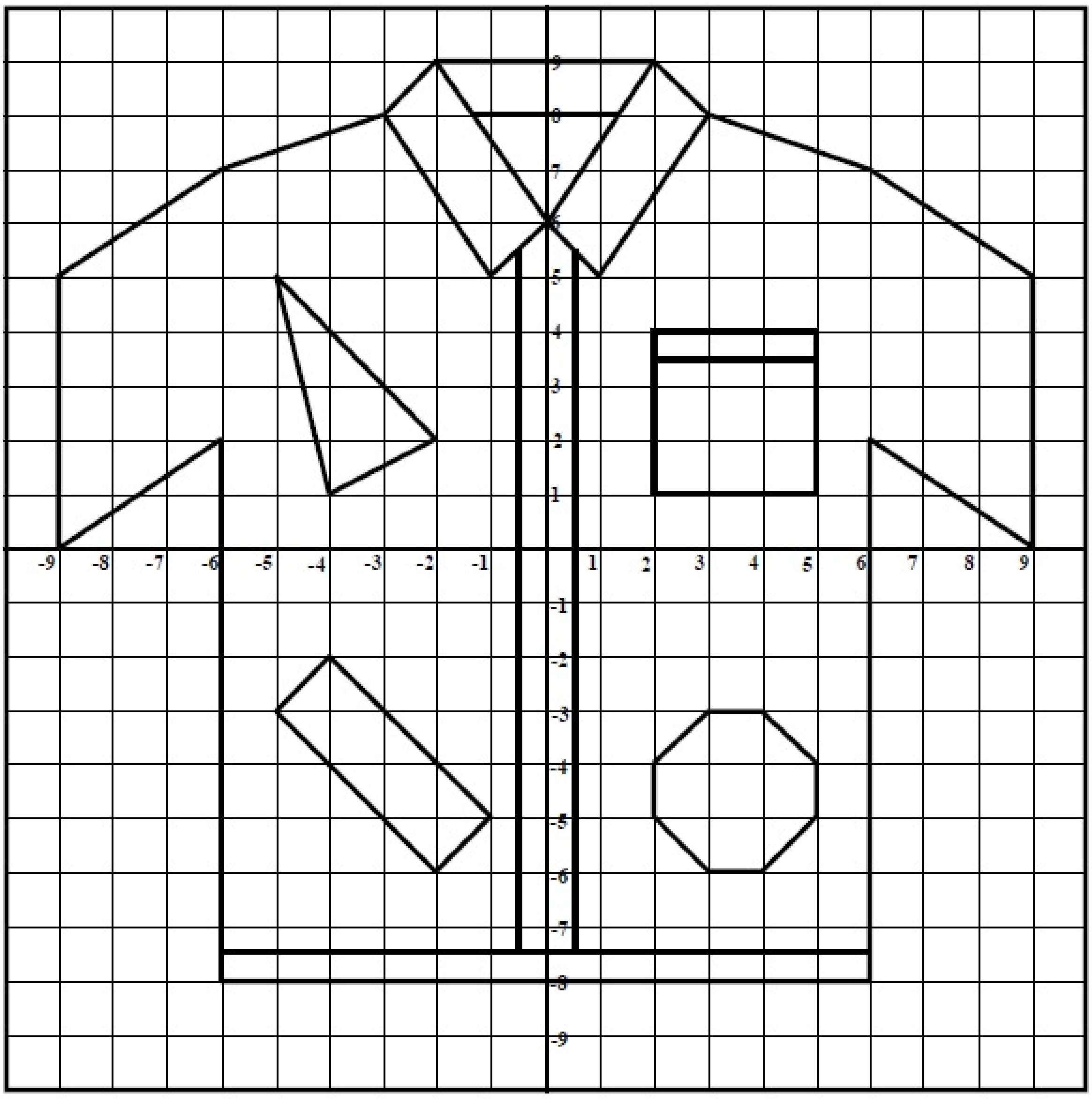
   (a) $\frac{4}{6} = \frac{x}{12} = \frac{y}{24}$ R: $\boldsymbol{x = 8, y = 16}$
   (b) $\boldsymbol{\frac{2}{5} = \frac{x}{10} = \frac{y}{45}}$ R: $\boldsymbol{x = 4, y = 18}$
   (c) $\boldsymbol{\frac{x}{3} = \frac{4}{9} = \frac{y}{24}}$ R: $\boldsymbol{x = \frac{4}{3}, y = \frac{32}{3}}$
   (d) $\boldsymbol{\frac{1}{3} = \frac{x}{12} = \frac{12}{y}}$ R: $\boldsymbol{x = 4, y = 36}$

8. Determine o valor de x em cada equação:

   (a) $2 \cdot x = 4 \cdot 5$ R: $\boldsymbol{x = 10}$
   (b) $\boldsymbol{3 \cdot x = 8 \cdot 12}$ R: $\boldsymbol{x = 32}$
   (c) $\boldsymbol{x \cdot 5 = 20 \cdot 10}$ R: $\boldsymbol{x = 40}$
   (d) $\boldsymbol{12 \cdot 15 = 9 \cdot x}$ R: $\boldsymbol{x = 20}$

(e) $\mathbf{42 \cdot 6 = x \cdot 21}$ R: $\boldsymbol{x = 12}$

9. **(Geometria Fashion)** Marque os pontos e os conecte com segmentos de reta. Não conecte apenas os pontos com NC entre eles:
Inicio (-4,1) (-5,5) (-2,2) (-4,1) **NC** (2,-4) (3,-3) (4,-3) (5,-4) (5,-5) (4,-6) (3,-6) (2,-5) (2,-4) **NC** (-5,-3) (-4,-2) (-1,-5) (-2,-6) (-5,-3) **NC** (2,1) (2,4) (5,4) (5,1) (2,1) **NC** (2,3.5) (5,3.5) **NC** (-6,-8) (-6,2) (-9,0) (-9,5) (-6,7) (-3,8) (-2,9) (2,9) (3,8) (6,7) (9,5) (9,0) (6,2) (6,-8) (-6,-8) NC (-6,-7.5) (6,-7.5) **NC** (-3,8) (-1,5) (0,6) (-2,9) NC (3,8) (1,5) (0,6) (2,9) NC (-1.3,8) (1.3,8) **NC** (-0.5,5.5) (-0.5,-7.5) **NC** (0.5,5.5) (0.5,-7.5)
Fim



Deixe fluir seu lado artista e decore sua peça de forma criativa!

10. Agora é a sua vez. Crie um desenho usando o plano cartesiano e a seguir escreva os pontos necessários para reproduzir seu desenho. Coloque a sigla NC (não conectar) entre pontos que não devem ser unidos por segmentos de reta. **Resposta Pessoal**

Apêndice B

Respostas da segunda Sessão Didática

1. Utilizando o arquivo do Geogebra chamado círculos, use a ferramenta (Distância, comprimento ou perímetro) para preencher a tabela abaixo. Caso seja necessário, utilize a calculadora de seu computador para encontrar as razões solicitadas.
   OBS: Para obter a medida do raio e do perímetro, basta selecionar a ferramenta (Distância, Comprimento ou Perímetro) e clicar sobre o que você quer medir.

Circulo	Raio (r)	Perímetro (p)	Área (A)	$\frac{p}{r}$	$\frac{A}{r}$
Azul	3	18,85	28,274	6,28	9,42
Vermelho	6	37,699	113,097	6,28	18,84
Verde	1,5	9,425	7,69	6,28	4,71

Tabela B.1: Medindo Circunferências

   Após preencher a tabela responda:

   (a) Todos os círculos são do mesmo tamanho?
   ( )Sim (x)Não

   (b) Quantas vezes o raio do círculo azul é maior que o do círculo verde? E o do círculo vermelho é quantas vezes maior que o do círculo verde?
   R:O raio do círculo duas vezes maior que o do verde enquanto o raio do círculo vermelho é quatro vezes maior que o do círculo verde

   (c) Quantas vezes o perímetro do círculo azul é maior que o perímetro do círculo verde? E o do círculo vermelho, é quantas vezes maior que o do círculo verde?
   R:Asim como acontece com o raio, o perímetro do círculo duas vezes maior que o do verde enquanto o perímetro do círculo vermelho é quatro vezes maior que o do círculo verde

   (d) Pelos exemplos anteriores, qual seria, em sua opinião, o perímetro de um círculo cujo raio fosse seis vezes maior que o raio do círculo verde? Por que você acha que daria esse valor?
   R: O perímetro deve medir 56,55 cm, pois acredito que seja seis vezes o perímetro do círculo verde

(e) Construa um círculo com essas características e verifique se sua resposta estava correta.
(x) Sim, está correta. ( ) Não, está errada.

(f) Quantas vezes a área do círculo azul é maior que a área do círculo verde? E a do círculo vermelho, é quantas vezes maior que a do círculo verde?
R: A área do círculo azul é aproximadamente 4 vezes maior que a do círculo verde e a área do círculo vermelho é aproximadamente 15 vezes maior que a do círculo verde

(g) O que você percebeu a respeito da razão entre o perímetro e o raio dos círculos?
R: Dá sempre o mesmo resultado

(h) Em relação à razão entre a área e o raio de cada círculo, o que você percebeu?
R: O valor muda

(i) Existe alguma relação entre essas duas razões. Você consegue descobri-la?
R: Não, não parece existir relação alguma entre essas duas razões

2. Utilizando o arquivo do Geogebra chamado triângulos, use a ferramenta (Distância, comprimento ou perímetro) para preencher a tabela abaixo. Caso seja necessário, utilize a calculadora de seu computador para encontrar as razões solicitadas.

Triângulo	Altura (h)	Lado (l)	Área (A)	$\frac{h}{l}$
Azul	2,08	2,4	2,49	0,86
Vermelho	4,16	4,8	9,98	0,86
Verde	8,32	9,6	39,1	0,86

Tabela B.2: Medidas dos triângulos Equiláteros

Após preencher a tabela responda:

(a) Os três triângulos têm uma característica comum em relação à medida de seus lados? Qual? Que nome se dá a esses triângulos?
R:Sim. Todos os lados têm a mesma medida. São chamados de triângulos Equiláteros

(b) Qual a razão entre a medida do lado do triângulo azul e a medida do lado do triângulo vermelho?
R: A razão é $\frac{1}{2} = 0,5$

(c) E a razão entre a altura do triângulo azul e a altura do triângulo vermelho?
R: A razão também é $\frac{1}{2} = 0,5$

(d) Qual a razão entre a medida do lado do triângulo azul e a medida do lado do triângulo verde?
R: A razão é $\frac{1}{4} = 0,25$

(e) E a razão entre a altura do triângulo azul e a altura do triângulo verde?
R: Também é $\frac{1}{4} = 0,25$

(f) O que você observou a respeito da razão entre a medida do lado e a medida da altura desses triângulos?

(g) Escreva a razão entre:

i. O lado do triângulo azul e o lado do triângulo vermelho. **R:** $\frac{1}{2}$

ii. A área do triângulo azul e a área do triângulo vermelho. **R:** $\frac{1}{4}$

iii. O lado do triângulo azul e o lado do triângulo verde.**R:** $\frac{1}{4}$

iv. A área do triângulo azul e a área do triângulo verde.**R:** $\frac{1}{16}$

v. O lado do triângulo vermelho e o lado do triângulo verde.**R:** $\frac{1}{2}$

vi. A área do triângulo vermelho e a área do triângulo verde.**R:** $\frac{1}{4}$

(h) Observando as razões acima, existe alguma relação entre a razão dos lados e a razão entre as áreas em cada triângulo? Se existe, qual é essa relação?
R: Sim, a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os lados.

3. **Resposta pessoal**

4. Abra o arquivo Velocidade.ggb. Esse é um experimento que relaciona as grandezas velocidade e tempo. São quatro quadrados de tamanhos diferentes por onde circulam pontos.

Para iniciar o experimento, clique no botão animar. Observe e responda:

(a) Qual é o perímetro de cada quadrado?
R:Os quadrados têm perímetros iguais a 4cm, 8cm, 16cm e 32cm

(b) O tempo que os pontos demoram a percorrer todo o perímetro de cada quadrado é o mesmo, ou algum deles completa a volta mais rápido que os demais?
R:Sim, todos completam uma volta ao mesmo tempo

(c) Todos os pontos se movimentam a uma mesma velocidade? Como você chegou a essa conclusão?
R:Não, pois para percorrerem perímetros diferentes ao mesmo tempo, as velocidades têm que ser diferentes.

(d) Se você acha que não, qual é o ponto que circula com maior velocidade? E qual o mais lento?
R:O ponto que circula com maior velocidade é o de cor verde, já que esse é o quadrado com maior perímetro.

(e) Sabendo que o tempo em que os pontos dão uma volta completa nos quadrados é de 10,7 segundos e que a velocidade é definida como a razão entre a distância e o tempo gasto para percorrê-la, preencha a tabela abaixo:

Ponto	Perímetro do quadrado (cm)	Tempo (s)	Velocidade
Preto	4	10,7	0,37
Azul	8	10,7	0,74
Vermelho	16	10,7	1,49
Verde	32	10,7	2,99

Tabela B.3: Medindo Velocidades

(f) **R:Não há o que responder**

(g) Enquanto os outros pontos dão uma volta no quadrado, qual o número de voltas dado pelo ponto verde?

R: Enquanto os demais pontos dão uma volta, o ponto verde dá duas.

(h) Então, o tempo que o ponto demora a dar uma volta agora aumentou ou diminuiu? Qual é o tempo necessário para o ponto verde dê apenas uma volta no seu quadrado?

R:O tempo agora diminuiu. O ponto verde agora dá uma volta em 5,35 segundos.

(i) Como você faria para calcular a nova velocidade do ponto verde ao dar uma volta completa no quadrado? Calcule-a.

R:Basta dobrar a velocidade, ou seja, passou a ser de 5,98 cm/s.

Altere novamente a velocidade para 3.

(j) Enquanto os outros pontos dão uma volta no quadrado, qual o número de voltas dado pelo ponto verde?

R: Enquanto os demais pontos dão uma volta, o ponto verde dá três.

(k) Então, o tempo que o ponto demora a dar uma volta agora aumentou ou diminuiu? Qual é o tempo necessário para o ponto verde dê apenas uma volta no seu quadrado?

R:O tempo agora diminuiu. O ponto verde agora dá uma volta em 3,56 segundos.

(l) Como você faria para calcular a nova velocidade do ponto verde ao dar uma volta completa no quadrado? Calcule-a.

R:Basta triplicar a velocidade, ou seja, passou a ser de 8,97 cm/s.

(m) A partir das observações que você pode fazer, assinale V, se você julgar a afirmação verdadeira ou F, se você julgá-la falsa:

(V) A velocidade de animação (que é diferente da velocidade do ponto) que alteramos no Geogebra nada mais é que o número de voltas que o ponto dá no quadrado em um período de aproximadamente 10,7 segundos.

(V) Se você dobrar a velocidade de animação, então o tempo necessário para que o ponto dê uma volta no quadrado diminui pela metade.

(V) Se você tripicar a velocidade de animação, consequentemente a velocidade do ponto também será triplicada.

(V) Se aumentarmos a velocidade de animação do ponto vermelho para 2 e mantivermos a velocidade de animação do ponto verde em 1, então os dois pontos terão a mesma velocidade, nessas condições. Isso por que percorrerão a mesma distância em um mesmo período de tempo.

5. Abra o arquivo retângulos.ggb e meça os lados de todos os retângulos. Para simplificar as notação, chamemos o lado maior de M e o lado menor de m. A seguir, preencha a tabela abaixo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
m	15	8	2,5	4	3	5	4	4	1	6	10
n	24	20	4	10	12	8	16	4	4	17	16
Razão $\frac{m}{n}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{2,5}{4}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{10}{16}$
$\frac{m}{n}$ Simplificado	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{5}{8}$

Tabela B.4: Medindo Retângulos

Divida esses retângulos em cinco grupos e diga qual foi o critério usado:

(a) Grupo 1: retângulos: **A, C, F, K** Porque? **Todos têm razão** $\frac{5}{8}$.

(b) Grupo 2: retângulos: **E, G, I** Porque? **Todos têm razão** $\frac{1}{4}$.

(c) Grupo 3: retângulos: **B, D** Porque? **Todos têm razão** $\frac{2}{5}$.

(d) Grupo 4: retângulos: **H** Porque? **O único cuja razão é** 1.

(e) Grupo 5: retângulos: **J** Porque? **O único cuja razão é** $\frac{6}{17}$.

6. O professor de Matemática pediu em uma sala com 20 alunos, que resolvessem uma lista com 100 exercícios de Matemática. A lista podia ser feita em grupos de, no máximo, 5 alunos. Estima-se que um aluno gaste 3 minutos para resolver cada exercício. Faça os cálculos necessários e preencha a tabela abaixo:

Número de alunos no grupo	Tempo necessário para terminar a lista	Razão entre o número de alunos e o tempo	Produto do número de alunos pelo tempo
1	300 min	$\frac{1}{300}$	300
2	150 min	$\frac{1}{75}$	300
3	100 min	$\frac{3}{100}$	300
4	75 min	$\frac{4}{75}$	300
5	60 min	$\frac{1}{12}$	300

Tabela B.5: Tempo necessário para concluir uma lista de exercícios

(a) A razão entre o número de alunos e o tempo foi constante?
( ) Sim. (x) Não.

(b) E o produto do número de alunos pelo tempo, foi constante?
(x) Sim. ( ) Não.

(c) Se os grupos pudessem ter 6 alunos, em quanto tempo todos os exercícios seriam resolvidos?

R: Nesse caso, os problemas seriam resolvidos em 50 minutos.

(d) É possível resolver os exercícios em 10 minutos? Se sim, quantos alunos seriam necessários para isso?

Sim, se os grupos tivessem 30 alunos

(e) Quando dobramos o número de alunos, o que acontece com o tempo necessário para fazer a lista?

O tempo cai pela metade.

(f) E quando triplicamos a quantidade de alunos, o que acontece com o tempo para fazer a lista?

O tempo cai pela terça parte.

7. Agora, ainda pensando na lista do exercício anterior, preencha a tabela abaixo com o número de exercícios que pode ser feito em um prazo de uma hora por determinada quantidade de alunos:

Número de alunos no grupo	Quantidade de Exercícios feitos em 1 hora	Razão entre o número de alunos e a quantidade de exercícios	Produto do número de alunos pela quantidade de exercícios
1	20	$\frac{1}{20}$	20
2	40	$\frac{1}{20}$	80
3	60	$\frac{1}{20}$	180
4	80	$\frac{1}{20}$	320
5	100	$\frac{1}{20}$	500

Tabela B.6: Quantidade de exercícios realizada em um determinado tempo

(a) A razão entre o número de alunos e a quantidade de exercícios feitos foi constante?
(x) Sim. ( ) Não.

(b) E o produto do número de alunos pela quantidade de exercícios feitos, foi constante?
( ) Sim. (x) Não.

(c) Se o grupo pudesse ter 10 alunos, quantos exercícios seriam feitos em um período de 60 minutos?

R: Seriam feitos 200 exercícios.

(d) Quantos alunos seriam necessários para resolver a lista inteira em uma hora?
R: Seriam necessários 5 alunos.

(e) Quando dobramos o número de alunos, o que acontece com a quantidade de exercícios que podem ser realizados?
R: Dobra também.

(f) E quando triplicamos a quantidade de alunos, o que acontece com a quantidade de exercícios que podem ser realizados?
R: Também triplica

Agora, preste muita atenção nas definições abaixo

Definição 1: Chamamos de **grandeza**, tudo aquilo que possa ser medido ou contado. São exemplos de grandezas: o tempo, a velocidade, comprimentos, áreas, volumes, número de pessoas etc

Definição 2: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são **diretamente proporcionais** se estiverem assim relacionadas:$y = k \cdot x$ ou $\dfrac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade.

Definição 3: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são **inversamente proporcionais** se estiverem assim relacionadas: $y \cdot x = k$ ou $y = \dfrac{k}{x}$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade.

8. No exercício 1, medimos três grandezas: comprimento da circunferência, comprimento do raio e área do círculo. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

(a) Perímetro da circunferência e comprimento do raio são:
(x) Diretamente proporcionais
( ) Inversamente proporcionais
( ) Não são proporcionais
Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:
R: A razão entre essas grandezas é constante e igual a 6,28

(b) Comprimento do raio e a área do círculo são:
( ) Diretamente proporcionais
( ) Inversamente proporcionais
(x) Não são proporcionais

Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:

R: Nem a razão, nem o produto entre as medidas das grandezas foi constante.

9. No exercício 2, também medimos três grandezas do triângulo equilátero: comprimento do lado, comprimento da altura e área. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

   (a) A medida do lado e a medida da altura são:
   (x) Diretamente proporcionais
   ( ) Inversamente proporcionais
   ( ) Não são proporcionais
   Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:
   R: A razão entre essas grandezas é constante e igual a 0,86

   (b) Comprimento do lado e a área do triângulo são:
   ( ) Diretamente proporcionais
   ( ) Inversamente proporcionais
   (x) Não são proporcionais
   Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:
   R: Nem a razão, nem o produto entre as medidas das grandezas foi constante.

10. **Resposta pessoal.**

11. No exercício 4 trabalhamos as grandezas velocidade (do ponto verde) e tempo. Com relação a essas duas grandezas, você as julga:
    ( ) Diretamente proporcionais
    (x) Inversamente proporcionais
    ( ) Não são proporcionais
    Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:
    R: O produto entre as medidas dessas grandezas é constante e igual a 32.

12. Nos exercícios 6 e 7, as grandezas trabalhadas foram: número de alunos, tempo necessário para realizar certa quantidade de exercícios e a quantidade de exercícios que um determinado um determinado número de alunos faria num certo período de tempo. Observando a tabela que você preencheu com o auxílio do Geogebra, responda:

(a) O número de alunos e o tempo necessário para realizar certa quantidade de exercícios são grandezas:
( ) Diretamente proporcionais
(x) Inversamente proporcionais
( ) Não são proporcionais
Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:
R: O produto entre as medidas dessas grandezas é constante e igual a 300.

(b) O número de alunos e a quantidade de exercícios realizada num determinado tempo são grandezas:
(x) Diretamente proporcionais
( ) Inversamente proporcionais
( ) Não são proporcionais
Justifique sua resposta e caso as julgue proporcionais, diga qual é a constante de proporcionalidade nesse caso:
R: A razão entre as medidas dessas grandezas é constante e igual a $\frac{1}{20}$.

Apêndice C

Respostas da Terceira sessão didática

1. Se a velocidade média 60 km/h, ou seja, $\frac{d}{t} = 60$ então podemos afirmar que:

   (a) Distância (d) e tempo (t) são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 60.

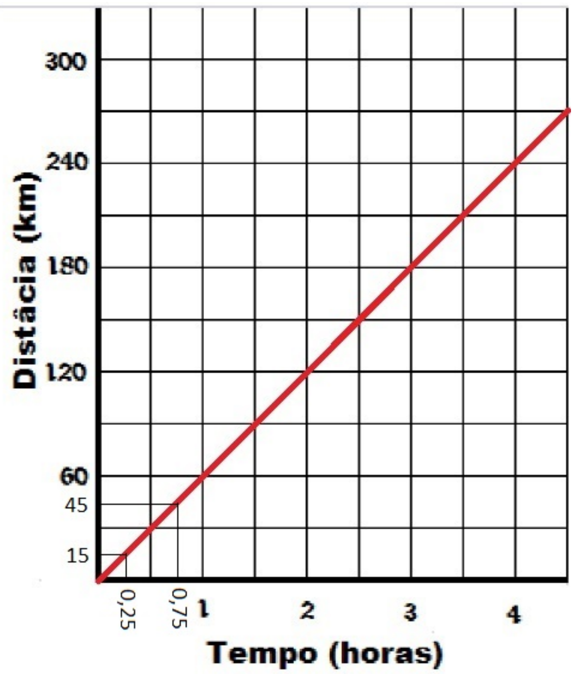
   (b) Distância (d) e tempo (t) são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 60.

   (c) As grandezas distância (d) e tempo (t) não são proporcionais, pois a relação não está de acordo com nenhuma das definições acima.

   (d) As grandezas distância (d) e tempo (t) são proporcionais, mas não é possível saber se a proporcionalidade é direta ou inversa.

2. Fixando a velocidade em 60 km/h, é possível preencher a tabela abaixo. Preencha-a corretamente e a seguir marque os pontos obtidos no plano cartesiano ao lado:

Distância (km)	Tempo (horas)	Ponto (t , d)
30	0,5	(0,5;30)
60	1	(1 , 60)
90	1,5	(1,5;90)
120	2	(2 , 120)
150	2,5	(2,5;150)



Observando os pontos que você marcou no gráfico, responda às questões abaixo:

(a) Os pontos são colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta? Se sim, trace essa reta.
R: Sim.

(b) Em 3 horas, quantos quilômetros serão percorridos? E em 4 horas?
R: Em 3 horas seriam percorridos 180 km.

(c) Se 15 minutos é a metade de meia hora, localize no gráfico onde se encontra a abscissa referente a esse tempo e, a seguir, determine a distância percorrida nesse período de tempo.
R: Percorreria 15 km.

(d) Localize no gráfico onde se encontra a abscissa referente a 45 minutos e, a seguir, determine a distância percorrida nesse período de tempo. **R: Percorreria 45 km.**

3. Suponhamos agora que aluguemos um carro por um período de 6 horas, ou seja, $\frac{d}{v} = 6$. Podemos deduzir que:

(a) Distância (d) e velocidade média (v), são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 6.

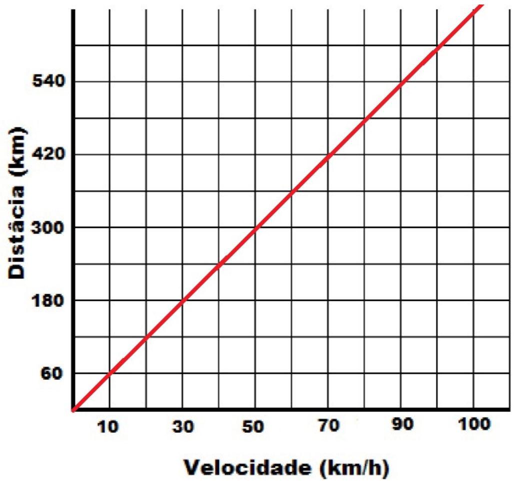
(b) Distância (d) e velocidade média (v) são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 6.

(c) As grandezas distância (d) e velocidade média (v) não são proporcionais, pois a relação não está de acordo com nenhuma das definições acima.

(d) As grandezas distância (d) e velocidade média (v) são proporcionais, mas não é possível saber se a proporcionalidade é direta ou inversa.

4. Fixando o tempo em 6 horas, é possível preencher a tabela abaixo. Preencha-a corretamente e a seguir marque os pontos obtidos no plano cartesiano ao lado:

Distância (km)	Velocidade (km/hora)	Ponto (v , d)
300	50	(50,300)
420	70	(70,420)
360	60	(60,360)
450	75	(75,450)
150	25	(25,150)



Observando os pontos que você marcou no gráfico, responda às questões abaixo:

(a) Os pontos são colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta? Se sim, trace essa reta.
R: Sim.

(b) Quantos quilômetros é possível percorrer a uma velocidade média de 10 km/h?
R: 60 km.

(c) Se o carro deve ser entregue em uma concessionária que está a 420 km de distância do local onde o carro foi alugado, qual deve ser a velocidade média para que o carro seja entregue no prazo?
R: 70 km/h.

(d) Supondo que o transito esteja congestionado e que a velocidade média seja de 15 km/ h, qual será a distância percorrida pelo motorista em um período de 6 horas?
R: 75 km.

5. Suponha agora que a distância a ser percorrida seja de 50 km. Nesse caso, temos que $v \cdot t = 50$. Pode-se concluir que:

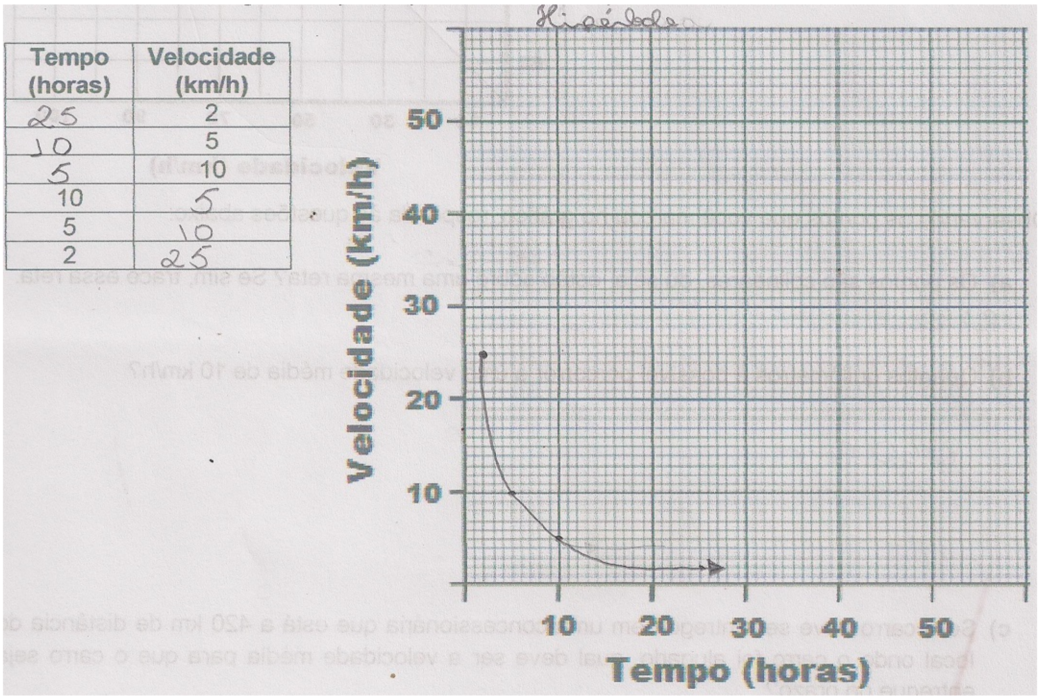
(a) Velocidade média (v) e tempo (t) são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 50.

(b) Velocidade média (v) e tempo (t) são diretamente proporcionais e a em 60 km/h constante de proporcionalidade é 50.

(c) As grandezas velocidade média (v) e tempo (t), não são proporcionais, pois a relação não está de acordo com nenhuma das definições acima.

(d) As grandezas velocidade média (v) e tempo (t) são proporcionais, mas não é possível saber se a proporcionalidade é direta ou inversa.

6. Agora, fixada a distância em 50 km, é possível preencher a tabela abaixo. Preencha-a corretamente e a seguir marque os pontos obtidos no plano cartesiano:



Tempo (horas)	Velocidade (km/h)
25	2
10	5
5	10
10	5
5	10
2	25

Faça os cálculos que você julgar necessários e responda às seguintes questões:

(a) Os pontos são colineares, ou seja, estão sobre uma mesma reta? Se sim, trace essa reta.

R:Não.

(b) O valor da velocidade ou do tempo pode ser zero? Justifique sua resposta.

R: Não, pois caso um dos dois seja zero, o produto teria que ser zero, ou seja, a distância teria que ser zero.

(c) Se a velocidade fosse de 100 km/h, qual seria o tempo necessário para percorrer 50 km?

R: Meia hora.

(d) Se a velocidade fosse de 250 km/h, qual seria o tempo necessário para percorrer 50 km?

R: Um quinto de hora, ou seja, 20 minutos

(e) Se a velocidade fosse de 500 km/h, qual seria o tempo necessário para percorrer 50 km?

R: Um décimo de hora, ou seja, 10 minutos.

(f) Quanto mais aumentamos o valor da velocidade média, mais o tempo se aproxima de que valor?

R:Se aproxima de zero.

(g) Se fossemos aumentando o tempo, a velocidade também se aproximaria de algum valor? Qual?

R:Sim. Também se aproximaria de zero.

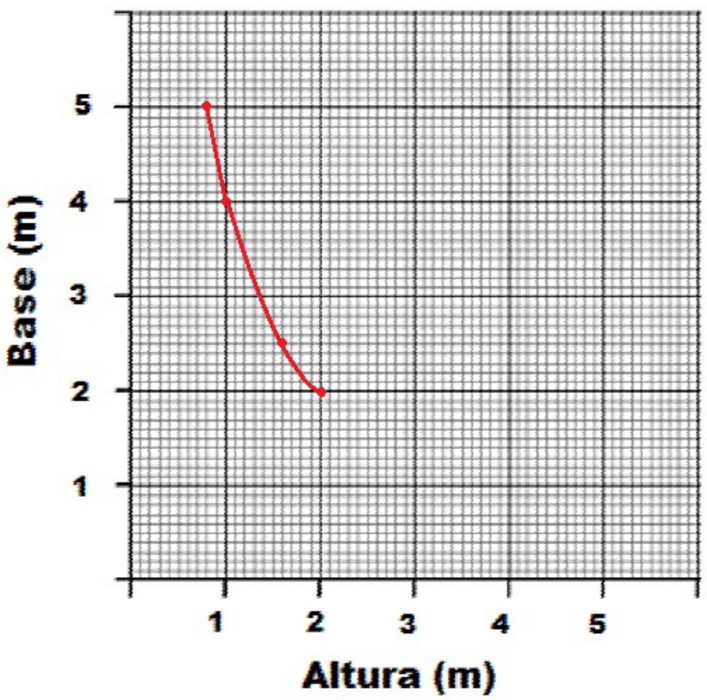
7. A era de um triângulo é dada pela fórmula $A = b \cdot h$, onde A é o valor da área do retângulo, b representa a medida base e h, a altura do retângulo. Se fixarmos a área em $4m^2$, então temos $b \cdot h = 4$. Observando essa relação, podemos concluir que as grandezas base e altura são:

   (a) Diretamente proporcionais

   (b) Inversamente proporcionais

   (c) Não é uma relação de proporcionalidade.
   Justifique sua resposta.

   (d) Preencha a tabela abaixo e marque os pontos no plano cartesiano



Base (m)	Altura (m)
0,8	5
1	4
1,6	2,5
2	2
1,6	2,5
1	4

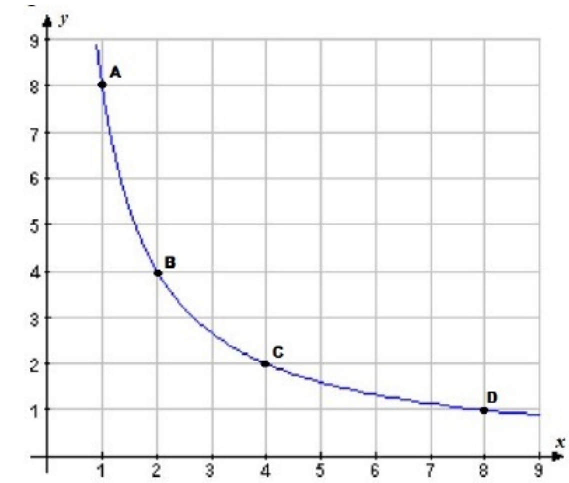
8. O gráfico abaixo relaciona duas grandezas não especificadas x e y. Com relação à essas grandezas, assinale a alternativa correta:

   (a) As grandezas x e y são inversamente proporcionais com constante de proporcionalidade 8.

   (b) As grandezas x e y são inversamente proporcionais cm constante de proporcionalidade 2.

   (c) As grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 8.

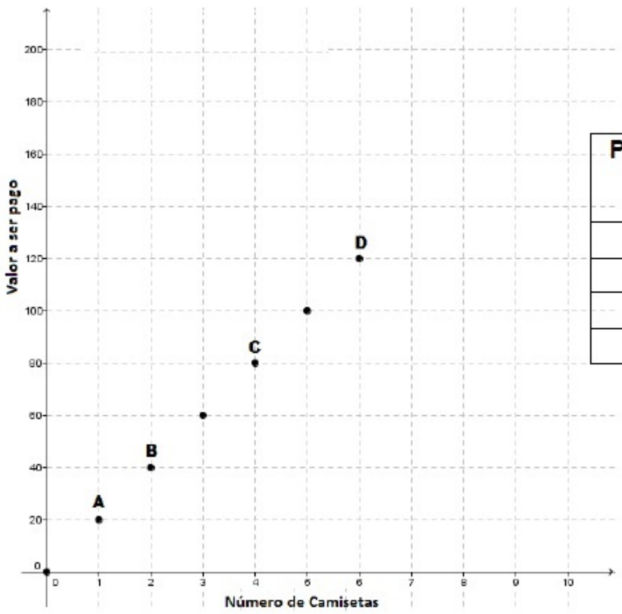
   (d) As grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 2.



Para responder à essa questão, devemos observar que a malha quadriculada nos permite determinar com certa facilidade pontos que pertencem à curva.

Ponto	x	y	$x \cdot y$
A	1	8	8
B	2	4	8
C	4	2	8
D	8	1	8

9. O gráfico abaixo relaciona as grandezas **valor a ser pago** e **número de camisetas**. Preencha a tabela abaixo e responda às questões apresentadas.



Ponto	N° de camisetas (x)	Valor a ser pago (y)	$\frac{x}{y}$
A	1	20	0,05
B	2	40	0,05
C	4	80	0,05
D	6	120	0,05

(a) As grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique sai resposta.

R: São diretamente proporcionais, pois a razão entre elas é constante.

(b) Qual é a constante de proporcionalidade?

R: A constante de proporcionalidade é 0,05

(c) Nesse caso, os pontos não foram ligados para formar uma reta. Porque isso não foi feito?

R: Porque não existe fração de número de camisetas, ou seja, não há por exemplo, uma camiseta e meia, logo, não há valor para esse par ordenado.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 8, p. 1-8, 1985.

[2] ÁVILA, G. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino da Matemática **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 7, p. 5-10, 1985.

[3] ÁVILA, G. Razões, Ainda sobre a regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 9, p. 1-9, 1986.

[4] LIMA, E. L. Novamente a proporcionalidade. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 12, p. 8-12, 1987.

[5] CARNEIRO, V. C. G.. Engenharia Didática: Um Referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **ZETETIKÉ**, Campinas: v. 13, n. 23, p. 87-119, jan./jun., 2005.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries** - Matemática. Brasília, 1998.

[7] ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 9, n°3, p. 281-307. La Pensée Sauvage, 1990.

[8] OCDE, Chapter 8. Brazil: Encouraging Lessons from a Large Federal System, **Lessons from PISA for the United States, Strong Performers and Successful Reformers in Education**, OECD 2011

[9] ALMOULOUD,S. A, COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd, **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

[10] BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. In: BRUN, J. et ali. Didactique des Mathématiques. Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996.

[11] FONTANA, J. Tales de Mileto e a medição da altura da pirâmide, **Editorial de la Universidad Nacional de Tres de Febrero**, 2001.

[12] LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas**. Coleção do Professor de Matemática, sbm, 2001

O software Geogebra, utilizado na segunda sessão didática pode ser obtido no endereço http://www.geogebra.org/

As atividades em ggb da segunda sessão didática podem ser obtidas nos endereços eletrônicos a seguir:

- **Círculos:** https://meocloud.pt/link/9485be5d-23cd-49cc-9a09-fafa2e1ffbe6/Circulos.ggb/
- **Retângulos:** https://meocloud.pt/link/86069a83-a92c-483a-8ba1-2538f36bc7b3/Ret
- **Triângulos:** https://meocloud.pt/link/a71eaea2-5568-4393-bd0b-d66e96c43eda/Tri
- **Velocidade:** https://meocloud.pt/link/a8e5da3e-05b7-4569-b2d6-a61a99fb2a29/Velocidade.g