

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Confirmação matemática do efeito Aharonov-Bohm no modelo  
sem interação com a fronteira do solenóide**

Renan Gambale Romano

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Confirmação matemática do efeito Aharonov-Bohm no modelo  
sem interação com a fronteira do solenóide**

Renan Gambale Romano

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências. Projeto de FAPESP 2012/21480-8.

Departamento de Matemática

São Carlos, SP,

7 de Junho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar  
Processamento Técnico  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R759c Romano, Renan Gambale  
Confirmação matemática do efeito Aharonov-Bohm no modelo sem interação com a fronteira do solenóide / Renan Gambale Romano. -- São Carlos : UFSCar, 2016. 79 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Aharonov-Bohm. 2. Potencial magnético. 3. Confinamento quântico. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SAO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Renan Gambale Romano, realizada em 30/05/2016:

---

Prof. Dr. Cesar Rogério de Oliveira  
UFSCar

---

Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino  
UFSCar

---

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata  
USP

---

Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga  
USP

---

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho  
UFMG

*Aos meus pais, Gerson e Maria!*

# Agradecimentos

À minha família, pela confiança e força que me deram durante todos os anos da minha vida, em especial pela educação, sem a qual eu não poderia ter entrado numa faculdade pública. Devo à eles minha convicção de que só com a educação de qualidade poderemos chegar à uma sociedade melhor. Ainda, minha escolha pela carreira acadêmica, numa faculdade pública, foi fortemente influenciada pelo orgulho de ser filho de uma professora e de um funcionário público.

Aos meus amigos, que aqui em São Carlos foram a minha segunda família, tornando este lugar muito mais agradável de se trabalhar e esta cidade bem mais divertida de se viver, onde compartilhamos muitos momentos juntos, andando de bike até cachoeiras ou saindo pela cidade virando noites de vez em quando. Obrigado a todos eles, amigos do departamento e fora dele, em especial pela paciência que tiveram com a minha personalidade um pouco desligada! Agradeço em especial uma pessoa a qual, mesmo com muitas diferenças entre nós, pode continuar do meu lado num momento tão importante de minha vida, completando à mim em muitos sentidos.

Ao meu orientador, sem o qual este trabalho de conclusão de doutorado não seria possível. Sua dedicação com o trabalho e sua responsabilidade profissional são inspiradores. Espero poder continuar trabalhando neste grupo de pesquisa de pessoas tão dedicadas.

Deixo também meus agradecimentos à FAPESP pelo apoio financeiro dado ao desenvolvimento deste trabalho.

# Conteúdo

Resumo	6
Abstract	7
Introdução	8
<b>1 Apresentação do modelo</b>	<b>13</b>
1.1 Modelo sem condições de fronteira . . . . .	13
1.2 Confinamento quântico . . . . .	16
1.3 O operador $H_\kappa$ . . . . .	20
1.4 Transformações de gauge . . . . .	26
1.5 Transformações antiunitárias . . . . .	33
1.6 Caracterização do espectro . . . . .	35
<b>2 Estudo dos autovalores</b>	<b>40</b>
2.1 Decomposição polar . . . . .	40
2.2 O operador $H_{\kappa,m}$ . . . . .	45
2.3 Multiplicidade dos autovalores . . . . .	47
2.4 Famílias Holomorfas do Tipo $(B)$ . . . . .	52
2.5 Variação do primeiro autovalor . . . . .	56
<b>3 Alguns casos explícitos</b>	<b>61</b>
3.1 O plano furado . . . . .	61
3.2 O disco furado . . . . .	66
<b>4 Conclusões e perspectivas futuras.</b>	<b>74</b>
Bibliografia	76

# Resumo

Estudamos o modelo de efeito Aharonov-Bohm adicionando um potencial escalar no Hamiltoniano inicial. Usando técnicas conhecidas de confinamento quântico, demonstramos que, sob certas condições de divergência sobre este potencial, a família das extensões autoadjuntas se reduz a um único operador, o qual seria então o operador de Schrödinger para esta situação. A falta de condições de fronteira para a definição deste operador é interpretada como não interação da partícula com a fronteira do solenóide.

Verificamos a possível manifestação do efeito de Aharonov-Bohm neste modelo sem contato com a fronteira do solenóide estudando a dependência do primeiro autovalor associado ao operador de Schrödinger com relação a um parâmetro diretamente relacionado ao fluxo magnético pelo solenóide. Demonstramos que esta dependência é não trivial e periódica, o que confirma rigorosamente o efeito de Aharonov-Bohm para este modelo. Estudamos também alguns casos particulares cuja resolução explícita pode ser obtida, como o solenóide com raio nulo numa região limitada e ilimitada do plano.

Palavras chave: Aharonov-Bohm, Potencial magnético, confinamento quântico.

# Abstract

We study the Aharonov-Bohm effect model by adding a scalar potential in the initial Hamiltonian. Using known techniques of quantum confinement, we show that under certain conditions of divergence on this potential, the family of self-adjoint extensions is reduced to a single operator, which would then be the Schrödinger operator for this situation. The lack of boundary conditions to define this operator is interpreted as no particle interaction with the boundary of the solenoid.

We checked the possible manifestation of the Aharonov-Bohm effect in this model without interaction with the solenoid border by studying the dependence of the first eigenvalue associated with the Schrödinger operator with respect to a parameter directly related to the magnetic flux by the solenoid. We have shown that this dependence is non-trivial and periodic, which strictly confirms the Aharonov-Bohm effect for this situation. We also study some particular cases whose explicit solution can be achieved, the solenoid with zero radius in a limited and unlimited region of the plane.

Keywords: Aharonov-Bohm, Magnetic potential, quantum confinement.

# Introdução

No artigo [3] de 1959, Yakir Aharonov e David Bohm discutem algumas propriedades interessantes dos potenciais magnéticos no domínio da mecânica quântica, propondo os respectivos experimentos para confirmar as propriedades discutidas. Eles propõem que os potenciais magnéticos podem exercer um efeito sobre uma partícula confinada a uma região desprovida de campos magnéticos, o que contradiz fortemente as conclusões da mecânica clássica, na qual tal efeito é inexistente e os potenciais magnéticos são apenas ferramentas matemáticas sem interpretações físicas. Este efeito, chamado então de efeito AB, já havia sido previsto em 1949 por Werner Ehrenberg and Raymond E. Siday [17] e surgiria através da diferença de fase na função de onda em função do potencial. Para mais referências sobre a história da descoberta deste importante efeito quântico, ver [25]. Segue na história então uma discussão sobre a possibilidade de uma formulação da mecânica quântica sem a necessidade de se atribuir um significado físico ao potencial magnético [4, 5, 8, 16].

A partir daí, o efeito AB já é amplamente aceito, particularmente depois das confirmações experimentais [34], de forma que o foco atual nos fundamentos do efeito AB são as descrições e interpretações teóricas.

O cenário mais considerado para o efeito AB é o seguinte: Dado um solenóide cilíndrico reto  $\mathcal{S}$  centrado no eixo  $z$ , com raio  $a > 0$  e comprimento infinito, carregando uma corrente estacionária, existe um campo magnético  $\mathbf{B}_{AB}$  constante confinado na região interior de  $\mathcal{S}$ . Tal campo não escapa, no sentido de que não produz forças atuando na região exterior, pois o campo é nulo nessa região. Devido à simetria do problema, podemos considerar uma circunferência no plano, centrada na origem e com raio  $a > 0$ , representando o solenóide, de forma que o campo magnético  $\mathbf{B}_{AB}$  gerado pela corrente é perpendicular e constante dentro dessa circunferência, o interior do solenóide, e nulo fora dela, o exterior do solenóide. Assim, chamando de  $\Omega_a := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0, a)}$  a região exterior do solenóide e considerando o potencial  $\mathbf{A}_{AB}$  gerando o campo magnético, isto é  $\mathbf{B}_{AB} = \nabla \times \mathbf{A}_{AB}$ , temos o seguinte

operador que descreve o movimento quântico dessa partícula na região  $\Omega_a$ ,

$$H_{AB} := \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_{AB} \right)^2, \quad \mathbf{p} := i\nabla. \quad (1)$$

Note que este operador não está completo, pois falta explicitar as condições de fronteira apropriadas, as quais descrevem como a partícula interage com a fronteira do solenóide e estas interações correspondem às extensões autoadjuntas do operador inicial (1). Neste contexto, o efeito AB é basicamente a impossibilidade de se expressar o movimento quântico da partícula nessa situação sem o uso do potencial magnético  $\mathbf{A}_{AB}$ ; fica faltando, claramente, explicitar alguma grandeza que depende de maneira não-trivial do fluxo magnético no interior do solenóide.

O efeito AB geralmente é estudado do ponto de vista do espalhamento (ver [3, 20, 36] por exemplo, usando a condição de Dirichlet, e [14] que generaliza tal estudo para condições de Neumann e Robin, sempre com raio positivo). Dabrowski e Stovicek [11] e Adami e Teta [2] estudam uma família a cinco parâmetro de extensões autoadjuntas do operador inicial, com potencial magnético confinado num solenóide com raio nulo no espaço, obtendo para quais parâmetros a extensão corresponde à extensão de Friedrichs do operador original, fazendo uma análise do espalhamento para verificar o efeito AB.

O fato de o operador acima possuir infinitas extensões autoadjuntas representa um problema, pois não se tem na literatura um método geral para escolher qual extensão (i.e., qual condição de fronteira) em particular deve ser selecionada para modelar o fenômeno quântico. Neste caso específico do efeito AB, uma justificativa foi dada em [13, 15, 31], em que os autores selecionam a condição de Dirichlet na fronteira, a qual leva a um operador autoadjunto. Basicamente os autores adicionam potenciais escalares  $V_n = n\chi_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_a}$  os quais “expulsam” a partícula da região complementar à  $\Omega_a$ , o interior do solenóide onde se encontra o campo magnético, de forma que a sequência de operadores autoadjuntos  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{R}^2$  converge, no sentido forte e uniforme dos resolventes, para o operador acima com a condição de Dirichlet na fronteira de  $\Omega_a$ .

Além do problema na escolha da condição de fronteira, temos o problema da justificativa da presença do potencial não nulo  $\mathbf{A}_{AB}$  do lado de fora do solenóide, o qual está baseado na aplicação do teorema de Stokes numa região que estamos considerando impenetrável ( $\Omega_a$  não é simplesmente conexo). Mais precisamente, tomando uma curva fechada simples  $\sigma$  contornando a circunferência de raio  $a$  dentro da região  $\Omega_a$ , o teorema de Stokes garante

que

$$\int_{\sigma} \mathbf{A}_{AB} \cdot ds = \int_{\mathcal{A}_{\sigma}} (\nabla \times \mathbf{A}_{AB}) dx dy,$$

sendo  $\mathcal{A}_{\sigma}$  a região limitada de  $\mathbb{R}^2$  cuja fronteira é a curva  $\sigma$ . Como podemos notar, a integral da direita não pode ser nula, pois o campo magnético é uniforme (constante) não nulo na região interior ao solenóide  $B(0, a)$ , o que implicaria que o potencial  $\mathbf{A}_{AB}$  não se anula identicamente na curva  $\sigma$ . O problema com esse argumento é que ele está baseado numa escolha, que é justamente a aplicabilidade do teorema de Stokes, pois a região  $\mathcal{A}_{\sigma}$  contém o interior do solenóide, o qual estamos supondo inacessível.

Em vez de tentar justificar a presença da condição de Dirichlet, ou de qualquer outra das infinitas condições de fronteira fisicamente possíveis (i.e., aquelas que levam às extensões autoadjuntas do operador inicial), propomos em [35] um modelo no qual a partícula não interage com o solenóide, de forma que condições de fronteira não são necessárias, com a vantagem de não precisarmos supor o solenóide impenetrável (já que a partícula se quer toca a fronteira de  $\Omega_a$ ), o que permite justificar o aparecimento de  $\mathbf{A}_{AB}$  não nulo do lado de fora via teorema de Stokes. Para isso, combinamos os artigos [10, 32, 33] para obter um confinamento da partícula à região  $\Omega_a$  exterior ao solenóide, de forma que o operador resultante possua uma única extensão autoadjunta, assim não há necessidade de se impor condições de fronteira. Mais precisamente, consideramos o seguinte operador, a menos das constantes físicas:

$$H := (i\nabla + \mathbf{A}_{AB})^2 + V, \quad (2)$$

sendo  $V$  um potencial escalar positivo fixado divergindo de maneira apropriada perto do solenóide, isto é, a fronteira de  $\Omega_a$ . Este operador é essencialmente autoadjunto em  $C_0^{\infty}(\Omega_a)$  de forma que não são necessárias condições sobre a fronteira  $\partial\Omega_a$ . Destacamos aqui o parâmetro  $\kappa$  dado por

$$\kappa := \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \mathbf{A}_{AB} \cdot ds,$$

em que  $\sigma$  é qualquer curva simples fechada e suave por partes que contorna o solenóide uma vez numa direção fixada. Esta constante é chamada de *circuitação* do potencial e, como veremos neste trabalho, desempenha um papel fundamental neste modelo, pois o efeito AB depende periodicamente desse parâmetro, o qual é proporcional ao fluxo magnético.

Note que nada se sabe sobre o operador proposto acima, exceto que este possui uma única extensão autoadjunta, a qual representa o movimento de uma partícula quântica (não relativística) na região  $\Omega_a$ , sem contato com a fronteira do solenóide (nem mesmo o

domínio desta extensão é conhecido). A confirmação do efeito de Aharonov-Bohm para esse modelo, como no caso do operador proposto em [3], se dá através das propriedades do operador  $\overline{H}$ , o qual é a única extensão autoadjunta de (2), particularmente as que diferenciam este do caso sem campo, e é neste sentido que este trabalho de conclusão de doutorado está enquadrado.

Para tal objetivo, seguiremos a seguinte linha: No Capítulo 1, apresentaremos as definições necessárias para a apresentação do modelo e alguns resultados preliminares sobre o operador proposto. Particularmente, mostraremos que ele possui uma única extensão autoadjunta e caracterizaremos esta extensão obtendo o seu domínio de forma. Em seguida, usaremos o conceito de transformações de gauge para definir transformações unitárias entre estes operadores, o que irá resultar na periodicidade com respeito ao parâmetro  $\kappa$ . Ainda, para separar a família (com relação a  $\kappa$ ) de operadores em classes de equivalência com mesmo espectro, consideraremos também, junto às transformações de gauge, as transformações antiunitárias. Por último, investigaremos a compacidade do resolvente, o que nos permitirá estudar o primeiro autovalor dos operadores em questão. Faremos tudo isto no contexto de solenóides mais gerais, isto é, aqueles cuja seção constante possa ser uma curva suave, fechada e simples, não apenas a tradicional circunferência.

Definido nosso modelo, devemos investigar como o efeito de Aharonov-Bohm pode se manifestar neste contexto. Para isto, no Capítulo 2, estudaremos as propriedades espectrais destes operadores, para o caso de solenóides cilíndricos retos (circunferências), com o objetivo final de analisar o comportamento do primeiro autovalor, o qual é, pela compacidade do resolvente, o ínfimo do espectro e representa, fisicamente, a energia mínima do sistema, chamado de *energia do estado fundamental* (“ground state energy” em inglês). Como preliminares para este objetivo, decomporremos o operador numa soma de operadores, em subespaços invariantes, de forma que esta gera uma decomposição em série de Fourier dos autovetores, obtendo o domínio desses operadores quando  $a > 0$  (o raio do solenóide). Com essas informações, poderemos encontrar a multiplicidade dos autovalores e aplicar a teoria de perturbação analítica para se obter a variação do primeiro autovalor, mostrando que sua derivada (com relação ao parâmetro  $\kappa$ ) é estritamente maior que zero em  $(0, 1/2)$ .

No Capítulo 3, apresentaremos alguns modelos, os quais serviram de guia para o estudo realizado nos dois primeiros capítulos. O primeiro modelo, o plano furado, corresponde a um solenóide com raio nulo e é uma restrição do nosso caso proposto e complementa alguns resultados obtidos para o caso com raio positivo. O segundo, o disco furado, não é uma

restrição do caso aqui estudado nos dois primeiros capítulos, mas foi o caso que usamos como guia. Podemos ver o modelo do disco furado aqui apresentado como um exemplo de como podemos aplicar a teoria de confinamento quântico para eliminar determinada condição de fronteira, mesmo que esta esteja combinada com a condição de Dirichlet na fronteira do disco. Neste caso, podemos ver claramente a variação do primeiro autovalor com relação a um fator do fluxo magnético, relação esta que pode ser colocada num gráfico (ver 3.1) graças ao conhecimento dos zeros das funções de Bessel.

Assim, usando os argumentos presentes nesta tese, pretendemos dar um novo ponto de vista sobre efeito de Aharonov-Bohm, propondo uma situação na qual o operador pode ser definido sem qualquer necessidade de escolha de uma condições de fronteira. Verificamos ainda a manifestação do efeito de Aharonov-Bohm através da energia mínima do sistema neste modelo.

# Capítulo 1

## Apresentação do modelo

Apresentaremos aqui nosso modelo para representar o efeito Aharonov-Bohm para solenóides cilíndricos e infinitos gerais (cuja superfície possui seção constante, suave, fechada e simples), substituindo a necessidade de escolha de uma condição de fronteira por uma condição de divergência de um potencial escalar na região exterior ao solenóide, o que elimina o contato da partícula com a fronteira. Recordaremos também a teoria de confinamento quântico [10, 32, 33], a qual adaptamos em [35] com o objetivo de se obter confinamento quântico usando potenciais escalares  $V$  na presença de um potencial magnético  $\mathbf{A}_\kappa$  associado a um campo nulo na região onde a partícula se encontra. Com isso, mostramos que o operador proposto possui uma única extensão autoadjunta e obteremos o domínio da forma sesquilinear fechada associada. Demonstraremos também algumas propriedades gerais relacionadas às transformações de gauge, mostrando que o nosso modelo se assemelha ao operador proposto originalmente por Aharonov e Bohm [3] e, combinando as transformações de gauge com as antiunitárias, que o efeito AB pode ser explicitamente e rigorosamente verificado dentro de certos períodos de um parâmetro  $\kappa$  chamado circuitação do potencial magnético, basicamente o fluxo magnético pelo solenóide.

### 1.1 Modelo sem condições de fronteira

O cenário mais tradicional para o tratamento do efeito AB é o solenóide de raio finito e de comprimento infinito no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Vamos considerar aqui o cenário um pouco mais geral de um solenóide com fronteira qualquer, com seção transversal constante difeomorfa a uma circunferência. Mais precisamente, passando ao plano,  $\Omega$  denota um aberto ilimitado do plano cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma curva simples e fechada, difeomorfa a uma circunferência.

Vamos pedir ainda que  $0 \notin \overline{\Omega}$ , o que corresponde a “centrar” este solenóide na origem. Neste cenário,  $\partial\Omega$  representa o solenóide,  $\Omega$  o seu exterior, onde o campo magnético é nulo e  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  o interior do solenóide, a região onde a partícula não tem acesso e o campo magnético é constante e possivelmente não nulo.

Neste trabalho, vamos usar as notações  $z = (x, y)$  e  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  para a norma usual em  $\mathbb{R}^2$ . Vamos usar também coordenadas polares em  $\mathbb{R}^2$ , as quais vamos fixar com a forma  $z = r(\cos \theta, \sin \theta)$ . O caso de um solenóide com fronteira circular de raio positivo está englobado por este cenário. Para solenóides com raio nulo, existe uma extensa bibliografia, como por exemplo [2, 3, 11, 20, 36]. Trataremos este caso (raio nulo) considerando o seguinte conjunto

$$\Omega_0 := \{z \in \mathbb{R}^2 : 0 < |z|\}.$$

Deixaremos claro em cada contexto qual tipo de solenóide iremos estudar. Observe, porém, que todos os resultados presentes neste capítulo, salvo alguns casos que explicitaremos, valem para os dois tipos de solenóides, como observaremos no final de cada seção.

**Definição 1.1.1.** Denotaremos por  $\mathbf{A}_\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  o seguinte potencial magnético no plano

$$\mathbf{A}_\kappa(z) = \mathbf{A}_\kappa(x, y) := \frac{\kappa}{|z|^2}(-y, x),$$

sendo  $\kappa$  uma constante real (lembrando que  $z \neq 0$  em  $\Omega$  e  $\Omega_0$ ). Em coordenadas polares, o potencial fica com a seguinte forma:

$$\mathbf{A}_\kappa(z) = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

sendo que  $z = r(\cos \theta, \sin \theta)$ . Cabe notar aqui que o potencial  $\mathbf{A}_\kappa$  está na chamada condição *gauge de Coulomb*, isto é

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\kappa = 0. \tag{1.1}$$

Tal condição sempre pode ser imposta aos potenciais magnéticos e diminui consideravelmente alguns cálculos (ver [28]).

**Definição 1.1.2.** Defina  $d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a função *distância até a fronteira*

$$d(z) := \inf_{w \in \partial\Omega} |z - w|.$$

**Definição 1.1.3.** Consideraremos que  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  denota qualquer potencial suave satisfazendo

$$V(z) \geq \frac{1}{d(z)^2}, \quad 0 < d(z) < \epsilon_V, \quad (1.2)$$

para algum  $\epsilon_V > 0$  fixado com  $V(z) > c > 0$  para todo  $z \in \Omega$  e

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} V(z) = \infty.$$

Pediremos ainda que o potencial  $V$  cumpra a condição

$$V(z) \geq \frac{1}{4|z|^2}, \quad (1.3)$$

observando que tal condição é irrelevante, devido à (1.2) e à positividade de  $V$ , a condição (1.3) equivale a tomar um  $c > 0$  suficientemente grande e foi tomada apenas para facilitar a demonstração da positividade dos operadores  $H_{\kappa, m}$  que definiremos mais tarde (ver Seção 2.2). Note que o potencial  $V$  diverge na fronteira e no infinito e é positivo.

**Definição 1.1.4.** Vamos agora definir o operador *inicial* de Aharonov-Bohm sem contato com a fronteira do solenóide pondo

$$\dot{H}_\kappa u := (i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 u + Vu, \quad (1.4)$$

para todas as funções  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Ainda, associada ao operador acima, vamos definir a seguinte igualdade formal

$$L_\kappa(u, v) := \int_\Omega [(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u \cdot (-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\bar{v} + Vu\bar{v}] dx dy. \quad (1.5)$$

Denotaremos também  $L_\kappa(u) := L_\kappa(u, u)$ .

Como veremos mais adiante,  $\dot{H}_\kappa$  possui uma única extensão autoadjunta, a qual denotaremos por  $H_\kappa$ . Definiremos também um conjunto  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa$ , sobre o qual a expressão de  $L_\kappa$  define uma forma sesquilinear fechada e positiva  $\mathcal{L}_\kappa$ , a qual está associada, via soma no sentido de formas, à única extensão autoadjunta  $H_\kappa$  do operador inicial  $\dot{H}_\kappa$ .

Note que todas as considerações aqui feitas podem ser usadas para se definir um modelo análogo, sem contato com a fronteira do solenóide, para o conjunto  $\Omega_0$ , que representa o solenóide com raio nulo.

## 1.2 Confinamento quântico

A primeira questão que deve ser respondida quando se propõe um operador Hamiltoniano de uma partícula quântica é se esse operador realmente está associado a uma dinâmica quântica bem-definida. Seria interessante verificar se as informações fornecidas pelo modelo podem ser associadas a um único operador autoadjunto.

O objetivo desta seção é demonstrar, dessa forma, que o operador Hermitiano (1.4) proposto na seção anterior realmente possui uma única extensão autoadjunta, a qual é o Hamiltoniano  $H_\kappa$  (também chamado de *operador de Schrödinger*, ou *operador energia*) de uma partícula quântica não relativística em  $\Omega$ . Diz-se neste caso que o operador  $\dot{H}_\kappa$  é *essencialmente autoadjunto*.

**Definição 1.2.1.** Dizemos que uma distribuição  $\psi$  é uma *solução fraca* da equação

$$\dot{H}_\kappa \psi = \lambda \psi,$$

para um  $\lambda \in \mathbb{R}$ , quando  $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$  e

$$\langle \psi, (\dot{H}_\kappa - \lambda I) u \rangle = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.6)$$

Lembramos que o espaço  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$  é constituído por funções  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tais que a restrição  $\psi|_K \in \mathcal{H}^2(K)$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ , sendo  $\mathcal{H}^2$  o espaço de Sobolev usual das funções com primeira e segunda derivadas em  $L^2$ .

Cabe comentar que a definição de solução fraca presente na literatura geralmente não pede que  $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$ , mas apenas que (1.6) ocorra no sentido das distribuições. Como estamos tomando  $\dot{H}_\kappa$  específico com domínio contido em  $L^2(\Omega)$ , segue disso que o espaço  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  contém todas as funções tratadas nesta tese e, para estas funções, (1.6) implica que  $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$  (ver demonstração do Teorema 1.2.5). Ainda mais, na definição de solução fraca, poderíamos ter colocado, no lugar de  $\dot{H}_\kappa$ , qualquer operador diferencial  $H$  de segunda ordem, com domínio em  $L^2(\Omega)$ , cujos coeficientes cumpram as hipóteses do Teorema 1.2.4 de regularidade para soluções de operadores elípticos.

O seguinte lema técnico pode ser encontrado em [32].

**Lema 1.2.2.** *Considere  $\psi$  uma solução fraca da equação  $\dot{H}_\kappa \psi = \lambda \psi$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixado e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real Lipschitz com suporte compacto em  $\Omega$ . Então vale a seguinte igualdade:*

$$(L_\kappa - \lambda)(f\psi) = \langle \psi, |\nabla f|^2 \psi \rangle, \quad (1.7)$$

lembrando que  $L_\kappa$  é dada por (1.5) e pela linha seguinte à esta.

Na demonstração do teorema abaixo, iremos seguir as linhas gerais presentes em [10, 32], com a diferença de que consideramos ambos os potenciais  $\mathbf{A}_\kappa$  e  $V$  ao mesmo tempo no operador  $\dot{H}_\kappa$ , o que não prejudica o argumento, como mostrado abaixo.

**Teorema 1.2.3.** *Considere  $\lambda < 0$  qualquer. Se  $\psi \in L^2(\Omega)$  é solução fraca de  $\dot{H}_\kappa \psi = \lambda \psi$ , então  $\psi = 0$  em  $\Omega$  q.t.p.*

*Demonstração.* Primeiramente, note que para toda função  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  vale a seguinte desigualdade:

$$\langle u, \dot{H}_\kappa u \rangle = L_\kappa(u) = \int_\Omega [|(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u|^2 + V|u|^2] dx dy \geq \int_\Omega V|u|^2 dx dy.$$

Considerando-se  $\epsilon_V > 0$  da Definição 1.1.3 do potencial  $V$ , segue da desigualdade acima a seguinte:

$$\langle u, (\dot{H}_\kappa - \lambda)u \rangle - \int_{\{z \in \Omega : d(z) < \epsilon_V\}} \frac{|u(x, y)|^2}{d(z)^2} dx dy \geq -\lambda \|u\|^2. \quad (1.8)$$

Demonstraremos agora que esta desigualdade implica no teorema. Com efeito, sem perda de generalidade, vamos supor  $\epsilon_V = 1$ . Para quaisquer  $0 < 2\rho < 1 < R$ , considere a função contínua  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) := \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \rho \\ 2(x - \rho), & \rho \leq x \leq 2\rho \\ x, & 2\rho \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq R \\ (R - x) + 1, & R \leq x \leq R + 1 \\ 0, & x \geq R + 1 \end{cases},$$

e defina  $f : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  pondo  $f(z) := F(d(z))$ . Note que  $f$  é Lipschitz e, para toda solução fraca  $\psi$ , o produto  $f\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , pois  $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Como  $C_0^\infty(\Omega) \sqsubseteq \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  é um subconjunto denso, podemos tomar  $C_0^\infty(\Omega) \ni u_n \rightarrow f\psi$  em  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  com suporte das  $u_n$  contidos no suporte da função  $f$ , o qual é compacto; vemos então que

$$\int_{\{z \in \Omega : d(z) < 1\}} \frac{|u_n(z)|^2}{d(z)^2} dx dy \longrightarrow \int_{\{z \in \Omega : d(z) < 1\}} \frac{|f\psi(z)|^2}{d(z)^2} dx dy, \text{ para } n \rightarrow \infty,$$

pois a integral é calculada no suporte das funções, o qual é compacto e, portanto,  $\frac{1}{d(z)^2}$  é limitado, o que não atrapalha na convergência. Substituindo nos outros termos de (1.8) e passando ao limite, concluímos que podemos usar (1.8) com  $f\psi$  no lugar de  $u$ , visto que os potenciais envolvidos são todos limitados no suporte compacto de  $f\psi$ , de forma que combinando com a igualdade (1.7) obtemos o seguinte (omitindo por simplicidade o infinitesimal  $dx dy$ )

$$\begin{aligned}
-\lambda \|f\psi\|^2 &\leq \langle \psi, |\nabla f|^2 \psi \rangle - \int_{d(z)<1} \frac{|f\psi|^2}{d(z)^2} \\
&= \int_{\Omega} |\psi|^2 |F'(d(z))|^2 |\nabla d(z)|^2 - \int_{d(z)<1} \frac{|f\psi|^2}{d(z)^2} \\
&\leq 4 \int_{\rho \leq d(z) \leq 2\rho} |\psi|^2 + \int_{2\rho \leq d(z) \leq 1} |\psi|^2 + \int_{R \leq d(z) \leq R+1} |\psi|^2 - \int_{2\rho \leq d(z) \leq 1} \frac{|f|^2 |\psi|^2}{d(z)^2} \\
&= 4 \int_{\rho \leq d(z) \leq 2\rho} |\psi|^2 + \int_{R \leq d(z) \leq R+1} |\psi|^2.
\end{aligned}$$

Lembrando-se que a função distância até a fronteira é Lipschitz e cumpre  $|\nabla d(z)| \leq 1$  em  $\Omega$ . Passando ao limite com  $\rho \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , concluímos a demonstração usando o teorema da convergência dominada junto com o fato de que  $\psi \in L^2(\Omega)$  (lembrando que, por hipótese, temos  $-\lambda > 0$ ).  $\square$

O seguinte resultado é muito conhecido e pode ser encontrado em [19], Teorema 6.29.

**Teorema 1.2.4** (Regularidade Elíptica). *Seja  $P$  um operador diferencial linear elíptico em  $\Omega$  de ordem  $m > 0$ , com coeficientes constantes na parte principal e  $C^\infty$  nas demais. Para todo  $s \in \mathbb{R}$  e  $\psi$  uma distribuição em  $\Omega$ , vale*

$$P\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^s(\Omega) \iff \psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^{s+m}(\Omega).$$

**Teorema 1.2.5.** *Para todos  $\lambda < 0$  e  $\kappa \in \mathbb{R}$ , escrevendo  $\sqsubseteq$  para denotar subconjunto denso, temos*

$$\text{rng} \left( \dot{H}_\kappa - \lambda I \right) \sqsubseteq L^2(\Omega).$$

*Demonstração.* Basta mostrar que se

$$\psi \in L^2(\Omega), \quad \langle \psi, \left( \dot{H}_\kappa - \lambda I \right) u \rangle = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

então  $\psi = 0$  em  $\Omega$ . Com efeito, supondo a igualdade acima, temos que

$$\langle \psi, (\dot{H}_\kappa - \lambda I) u \rangle = 0 \iff \langle \psi, [(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 - \lambda I] u \rangle = \langle -V\psi, u \rangle,$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Isto mostra a igualdade no sentido das distribuições

$$((i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 - \lambda I) \psi = -V\psi.$$

Como  $-V\psi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega) = \mathcal{H}_{\text{loc}}^0(\Omega)$  e o operador considerado é elíptico com coeficientes constantes na parte principal e  $C^\infty(\Omega)$  nas demais, segue do teorema anterior de regularidade que  $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$  seguindo do Teorema 1.2.3 que  $\psi = 0$  em q.t.p.  $\Omega$ .  $\square$

**Teorema 1.2.6.** *Para todo  $\kappa \in \mathbb{R}$ , o operador  $\dot{H}_\kappa$  definido em  $C_0^\infty(\Omega)$  possui uma única extensão autoadjunta  $H_\kappa$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que o operador fechado e Hermitiano positivo  $H_\kappa := \overline{\dot{H}_\kappa}$  é autoadjunto, lembrando que  $\overline{T}$  é a notação para o fecho do operador fechável  $T$ . Considere  $\eta = -\lambda > 0$  qualquer. Temos o seguinte

$$\eta \|u\|^2 \leq \langle u, (H_\kappa + \eta I) u \rangle \leq \|u\| \|(H_\kappa + \eta I) u\|,$$

seguindo que  $\text{Ker}(H_\kappa + \eta I) = \{0\}$  e existe  $(H_\kappa + \eta I)^{-1}$ . Ainda, a desigualdade acima implica, fazendo  $v = (H_\kappa + \eta I) u \neq 0$ , que

$$\|(H_\kappa + \eta I)^{-1} v\| \leq \eta^{-1} \|v\|,$$

ou seja, o operador  $(H_\kappa + \eta I)^{-1}$  é limitado e fechado de forma que seu domínio é o conjunto fechado  $\text{rng}(H_\kappa + \eta I)$ . Como sempre vale  $\text{rng}(\dot{H}_\kappa + \eta I) \subset \text{rng}(H_\kappa + \eta I)$ , o Teorema 1.2.5 implica que  $\text{rng}(H_\kappa + \eta I) = L^2(\Omega)$ .

Agora, tomando  $v \in \text{dom } H_\kappa^*$ , afirmamos que  $v \in \text{dom } H_\kappa = \text{dom } \overline{\dot{H}_\kappa}$ . De fato, sendo  $w = H_\kappa^* v$ , a conclusão acima nos permite obter  $u \in \text{dom } H_\kappa$  de modo que  $(H_\kappa + \eta I) u =$

$w + \eta v$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\langle v, (H_\kappa + \eta) \varphi \rangle &= \langle v, H_\kappa \varphi \rangle + \langle v, \eta \varphi \rangle \\
&= \langle H_\kappa^* v, \varphi \rangle + \langle \eta v, \varphi \rangle \\
&= \langle w + \eta v, \varphi \rangle \\
&= \langle (H_\kappa + \eta I) u, \varphi \rangle \\
&= \langle u, (H_\kappa + \eta I) \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \text{dom } H_\kappa.
\end{aligned}$$

Como  $\text{rng } (H_\kappa + \eta I) = L^2(\Omega)$ , segue-se que  $u = v$  e portanto  $\text{dom } H_\kappa^* = \text{dom } H_\kappa$ , o que significa que  $H_\kappa$  é autoadjunto, lembrando que  $H_\kappa := \overline{\dot{H}_\kappa}$ .  $\square$

O Corolário abaixo resume os resultados obtidos nesta seção, incluindo a possibilidade de se ter outros operadores de Schrödinger do tipo  $H_\kappa$ , tanto na região  $\Omega$ , que representa um solenóide cuja seção constante é uma curva suave fechada e simples, quanto na região  $\Omega_0$ , que representa um solenóide com raio nulo, uma região para a qual o potencial magnético é ilimitado.

**Corolário 1.2.7.** *Todo operador de Schrödinger  $H$  definido em  $C_0^\infty(\Omega)$  (resp.  $\Omega_0$ ), com potencial magnético  $\mathbf{A}$  de classe  $C^\infty$ , com  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  em  $\Omega$  (resp.  $\Omega_0$ ), e um potencial escalar  $V$  como na Definição 1.1.3 (resp. com  $\Omega_0$  no lugar de  $\Omega$ ) é essencialmente autoadjunto.*

*Demonstração.* Basta notar que o método da demonstração do Teorema 1.2.6 pode ser aplicada para o potencial  $\mathbf{A}$  em  $\Omega$  (resp.  $\Omega_0$ ). Ver [35] para mais detalhes.  $\square$

Agora que sabemos que o operador  $\dot{H}_\kappa$  é essencialmente autoadjunto, vamos denotar por  $H_\kappa$  a sua única extensão autoadjunta  $\overline{\dot{H}_\kappa}$ .

### 1.3 O operador $H_\kappa$

Agora, vamos agora discutir um pouco a extensão autoadjunta  $H_\kappa$  em  $\Omega$ . Recomendamos [12, 37] como referência sobre a teoria de formas sesquilineares associadas a operadores positivos e [24, 30] para uma revisão sobre os espaços associados a campos magnéticos aqui estudados.

**Definição 1.3.1.** Defina  $h_\kappa$  como sendo a seguinte forma sesquilinear positiva

$$h_\kappa(u, v) := \int_{\Omega} (i\nabla u + \mathbf{A}_\kappa u) \cdot (-i\nabla \bar{v} + \mathbf{A}_\kappa \bar{v}) \, dx dy, \quad \text{dom } h_\kappa := C_0^\infty(\Omega),$$

e considere o produto interno  $\langle u, v \rangle_\kappa := h_\kappa(u, v) + \langle u, v \rangle_{L^2}$  associado. Defina o conjunto  $\mathcal{W}_\kappa(\Omega)$  como sendo o completamento métrico de  $C_0^\infty(\Omega)$  com o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa$ .

**Definição 1.3.2.** Defina o espaço vetorial  $\mathcal{H}_\kappa^1(\Omega)$  pondo

$$\mathcal{H}_\kappa^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : (i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u \in L^2(\Omega)\},$$

com a aplicação  $\|u\|_\kappa := \sqrt{\langle u, u \rangle_\kappa}$  que claramente define uma norma em  $\mathcal{H}_\kappa^1(\Omega)$ .

Note que, na definição acima, estamos considerando uma extensão de  $h_\kappa$  ao espaço  $\mathcal{H}_\kappa^1(\Omega)$ , a qual está bem-definida. Ainda, nossa intenção é ter a possibilidade de substituir  $\Omega$  por  $\Omega_0$ , e por isso definimos  $\mathcal{H}_\kappa^1(\Omega)$  com a forma acima em vez de tomar diretamente o espaço de Sobolev  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  usual.

**Teorema 1.3.3.** *O espaço  $\mathcal{H}_\kappa^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com relação à norma  $\|\cdot\|_\kappa$ .*

*Demonstração.* Tome uma seqüência de Cauchy  $u_n \in \mathcal{H}_\kappa^1(\Omega)$  qualquer. Pela definição da norma  $\|\cdot\|_\kappa$ , valem as desigualdades  $\|u_n\|_{L^2} \leq \|u_n\|_\kappa$  e  $\|(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u_n\|_{L^2} \leq \|u_n\|_\kappa$ . Devido à completude de  $L^2(\Omega)$ , existem  $u, w \in L^2(\Omega)$  tais que

$$\|u - u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|w - (i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Vamos denotar  $w_n := (i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u_n$ . Queremos mostrar que  $w = (i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u$  no sentido das distribuições. De fato, para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , note primeiramente que pela desigualdade de Schwarz tem-se

$$\left| \int_{\Omega} [(-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\phi](u - u_n) \, dx dy \right| \leq \|(-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\phi\|_{L^2} \|u - u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [(-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\phi]u_n \, dx dy = \int_{\Omega} [(-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\phi]u \, dx dy.$$

De maneira análoga, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi w_n \, dx dy = \int_{\Omega} \phi w \, dx dy.$$

Usando estes limites, temos imediatamente que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi [(i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa}) u] \, dx dy &= \int_{\Omega} [(-i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa}) \phi] u \, dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [(-i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa}) \phi] u_n \, dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi [(i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa}) u_n] \, dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi w_n \, dx dy = \int_{\Omega} \phi w \, dx dy, \end{aligned}$$

o que demonstra a igualdade  $w = (i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa})^2 u$  no sentido das distribuições e portanto que  $u \in \mathcal{H}_{\kappa}^1(\Omega)$ .  $\square$

Para lembrar o conceito de derivada fraca e as propriedades básicas das distribuições usadas na demonstração acima, recomendamos [7, 19]. Note que a demonstração acima é completamente análoga ao caso do espaço clássico de Sobolev  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ .

**Corolário 1.3.4.** *O espaço  $\mathcal{W}_{\kappa}(\Omega)$  é um subespaço fechado de  $\mathcal{H}_{\kappa}^1(\Omega)$  e, portanto, um espaço de Hilbert.*

*Demonstração.* De fato, como  $\mathcal{H}_{\kappa}^1(\Omega)$  é completo na norma  $\|\cdot\|_{\kappa}$ , segue-se que o completamento abstrato de  $C_0^{\infty}(\Omega) \subset \mathcal{H}_{\kappa}^1(\Omega)$  é na verdade o fecho deste conjunto na norma  $\|\cdot\|_{\kappa}$  e, portanto, um subespaço fechado.  $\square$

**Definição 1.3.5.** Defina a forma sesquilinear  $\mathfrak{h}_{\kappa}$  pondo

$$\mathfrak{h}_{\kappa}(u, v) := \int_{\Omega} (i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa}) u \cdot (-i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa}) \bar{v} \, dx dy, \quad \text{dom } \mathfrak{h}_{\kappa} := \mathcal{W}_{\kappa}(\Omega).$$

Note que  $\mathfrak{h}_{\kappa}$  nada mais é do que uma extensão fechada de  $h_{\kappa}$  e, portanto, está associada a um único operador autoadjunto  $H_{\kappa}^0$ , chamado de extensão de Friedrichs de  $H_{\kappa}^0|_{C_0^{\infty}(\Omega)}$ , em  $L^2(\Omega)$  com domínio  $\text{dom } H_{\kappa}^0 \sqsubseteq \mathcal{W}_{\kappa}(\Omega)$ , lembrando que usamos  $\sqsubseteq$  para denotar subconjunto denso.

**Teorema 1.3.6.** *A única extensão autoadjunta  $H_{\kappa}$  do operador  $\dot{H}_{\kappa}$  da Definição 1.1.4 é dada pela soma no sentido de formas  $H_{\kappa} = H_{\kappa}^0 \dot{+} V$ , que é o operador autoadjunto associado*

à forma sesquilinear fechada  $\mathcal{L}_\kappa := \mathfrak{h}_\kappa + V^{\frac{1}{2}}$  definida em  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa := \mathcal{W}_\kappa(\Omega) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  com cerne  $C_0^\infty(\Omega)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note que os operadores  $H_\kappa^0$  e  $V$  envolvidos são autoadjuntos positivos e  $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{W}_\kappa(\Omega) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  de modo que a soma no sentido de formas  $H_\kappa^0 \dot{+} V$  está bem-definida e é o operador autoadjunto associado à forma sesquilinear fechada  $\mathcal{L}_\kappa$  definida por  $\mathcal{L}_\kappa := \mathfrak{h}_\kappa + V^{\frac{1}{2}}$  em  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa := \mathcal{W}_\kappa(\Omega_a) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$ . Como  $\dot{H}_\kappa$  possui uma única extensão autoadjunta  $H_\kappa$ , basta mostrar que  $H_\kappa^0 \dot{+} V$  é uma extensão do operador  $\dot{H}_\kappa$ . Pela definição da soma no sentido das formas, temos que o domínio do operador  $H_\kappa^0 \dot{+} V$  é o conjunto definido por

$$\text{dom } (H_\kappa^0 \dot{+} V) := \left\{ \xi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa : \exists \eta \in L^2(\Omega) ; \mathcal{L}_\kappa(\varphi, \xi) = \langle \varphi, \eta \rangle, \forall \varphi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \right\},$$

e a ação do operador  $H_\kappa^0 \dot{+} V$  no elemento  $\xi \in \text{dom } (H_\kappa^0 \dot{+} V)$  é dada por  $(H_\kappa^0 \dot{+} V)(\xi) := \eta$ . Devemos mostrar então que  $C_0^\infty(\Omega) \subset \text{dom } (H_\kappa^0 \dot{+} V)$  e que  $(H_\kappa^0 \dot{+} V)(u) = \dot{H}_\kappa(u)$  para todo  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Com efeito, para  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  temos o seguinte

$$\mathcal{L}_\kappa(\varphi, u) = \mathfrak{h}_\kappa(\varphi, u) + V^{\frac{1}{2}}(\varphi, u).$$

Como o conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  está contido no domínio dos operadores autoadjuntos  $H_\kappa^0$  e  $V$ , os quais estão associados às formas fechadas  $\mathfrak{h}_\kappa$  e  $V^{\frac{1}{2}}$ , respectivamente, segue-se da igualdade acima o seguinte

$$\mathcal{L}_\kappa(\varphi, u) = \langle \varphi, H_\kappa^0 u \rangle + \langle \varphi, V u \rangle = \langle \varphi, (H_\kappa^0 + V)(u) \rangle, \quad \forall \varphi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa.$$

Portanto,  $C_0^\infty(\Omega) \subset \text{dom } H_\kappa^0 \dot{+} V$  e  $(H_\kappa^0 \dot{+} V)(u) = \dot{H}_\kappa(u)$  como queríamos.

As considerações a respeito da forma associada seguem de resultados gerais, e podem ser encontradas em [12], Seção 9.3, por exemplo.  $\square$

Vamos fazer aqui algumas observações. Pelo Teorema 1.3.6, o conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  é um cerne para a forma sesquilinear  $\mathcal{L}_\kappa$ . Isto significa que o conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  com respeito à norma dada pelo produto interno associado, o qual é  $\mathcal{L}_\kappa(\cdot, \cdot) + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ . Assim,  $\psi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  se, e somente se, existe uma sequência  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  de modo que  $u_n \rightarrow \psi$  nesta norma, isto é,

$$\int_{\Omega} [|(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)(u_n - \psi)|^2 + V|u_n - \psi|^2 + |u_n - \psi|^2] \, dx dy \longrightarrow 0. \quad (1.9)$$

Note ainda que o conjunto  $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  é, por construção  $\text{dom } \mathcal{L}_{\kappa=0}$  e portanto seguem as mesmas conclusões, isto é, que  $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  se, e somente se, existe uma sequência  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  com

$$\int_{\Omega} [|\nabla(u_n - \psi)|^2 + V|u_n - \psi|^2 + |u_n - \psi|^2] \, dx dy \longrightarrow 0. \quad (1.10)$$

Destas convergências, podemos ver imediatamente que  $\text{dom } \mathcal{L}_{\kappa} = \mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  se, e somente se, os elementos destes dois conjuntos satisfazem a condição

$$\int_{\Omega} |\mathbf{A}_{\kappa}(u_n - \psi)|^2 \, dx dy \longrightarrow 0, \quad (1.11)$$

para alguma sequência  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que (1.9) ou (1.10) ocorra. Note ainda que todos os argumentos usados anteriormente servem para  $\Omega_0$  no lugar de  $\Omega$ . Isto motiva os teoremas abaixo. Como as demonstrações para  $\Omega$  e  $\Omega_0$ , neste caso, são diferentes para estes teoremas, iremos enunciá-los separadamente.

**Teorema 1.3.7.** *Vale a igualdade  $\mathcal{W}_{\kappa}(\Omega) = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , sendo este último o tradicional espaço de Sobolev dado pelo completamento de  $C_0^\infty$  na norma de  $\mathcal{H}^1$  das funções de  $L^2$  com derivada em  $L^2$ .*

*Demonstração.* Note que  $\psi \in \mathcal{W}_{\kappa}(\Omega)$  se, e somente se, existe uma sequência  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  com

$$\int_{\Omega} [|(i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa})(u_n - \psi)|^2 + |u_n - \psi|^2] \, dx dy \longrightarrow 0, \quad (1.12)$$

mas sendo  $\mathbf{A}_{\kappa}$  limitado em  $\Omega$ , isto ocorre se, e somente se,

$$\int_{\Omega} [|\nabla(u_n - \psi)|^2 + |u_n - \psi|^2] \, dx dy \longrightarrow 0,$$

isto é,  $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . □

**Teorema 1.3.8.** *Para todo  $\kappa \in \mathbb{R}$  vale  $\text{dom } \mathcal{L}_{\kappa} = \mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$ , sendo  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev tradicional.*

*Demonstração.* Se  $\psi$  satisfaz (1.9) ou (1.10), então  $u_n \rightarrow \psi$  em  $L^2(\Omega)$  e como o potencial  $\mathbf{A}_{\kappa}$  é limitado em  $\Omega$ , pois  $0 \notin \bar{\Omega}$ , segue (1.11) e terminamos. Outra maneira de ver este fato é notando que  $\mathcal{W}_{\kappa}(\Omega) = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . □

Estes dois últimos teoremas englobam os solenóides cuja fronteira é uma curva suave e, portanto, aqueles cuja fronteira é uma circunferência com raio positivo (não nulo). Ainda, temos algo a dizer sobre estes resultados para o solenóide com raio nulo, isto é,  $\Omega_0$ . Mais precisamente, todos os resultados vistos anteriormente, com exceção do Teorema 1.3.7, valem para  $\Omega_0$  no lugar de  $\Omega$ . Note porém que o potencial  $\mathbf{A}_\kappa$  é ilimitado em  $\Omega_0$ , e por isto os demonstraremos os teoremas usando argumentos apropriados.

**Teorema 1.3.9.** *Para todo  $\kappa \in \mathbb{R}$  vale  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa = \mathcal{H}_0^1(\Omega_0) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$ .*

*Demonstração.* De (1.2) e lembrando que  $d(z) = |z|$  em  $\Omega_0$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{A}_\kappa(u_n - \psi)|^2 dx dy &= |\kappa|^2 \int_{0 < |z| < \epsilon_V} \frac{|u_n - \psi|^2}{|z|^2} dx dy + \int_{|z| > \epsilon_V} |\mathbf{A}_\kappa(u_n - \psi)|^2 dx dy \\ &\leq |\kappa|^2 \int_{0 < |z| < \epsilon_V} V |u_n - \psi|^2 dx dy + \int_{|z| > \epsilon_V} |\mathbf{A}_\kappa(u_n - \psi)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Assim, se  $\psi$  satisfaz (1.9) ou (1.10), segue imediatamente da desigualdade acima a condição (1.11) e terminamos.  $\square$

Devemos fazer alguns comentários sobre a demonstração do Teorema 1.3.9. Em primeiro lugar, é fundamental que  $C_0^\infty(\Omega_0)$  seja um cerne para a forma sesquilinear  $\mathcal{L}_\kappa$  e isto é uma consequência direta do fato de que a forma  $\mathcal{L}_\kappa$  está associada ao operador autoadjunto  $H_\kappa$ , o qual é o fecho do operador essencialmente autoadjunto  $\dot{H}_\kappa$  definido em  $C_0^\infty(\Omega_0)$ . Além disso, o uso da condição de divergência na fronteira (1.2) do potencial  $V$  só pode ser usada como foi aqui devido ao fato de que o potencial magnético tem o comportamento do tipo  $\frac{1}{r}$ , o qual, com a norma de  $L^2$ , equivale a um comportamento do tipo  $\frac{1}{r^2}$  e este pode ser comparado com o de  $V$ .

O próximo teorema é uma consequência direta da Desigualdade Magnética de Hardy presente em [6], a qual enunciaremos abaixo a título de completude.

**Lema 1.3.10** (Desigualdade Magnética de Hardy). *Suponha que  $\kappa \notin \mathbb{Z}$  e defina a constante  $C_0 > 0$  pondo*

$$C_0^{-1} := \min_{n \in \mathbb{Z}} |\kappa - n| > 0.$$

*Então para todo  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$  vale a desigualdade*

$$\int_{\Omega_0} \frac{|u(z)|^2}{|z|^2} dx dy \leq C_0^2 \int_{\Omega_0} |(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u|^2 dx dy. \quad (1.13)$$

Devemos comentar aqui que a desigualdade de Hardy aplica-se, usando-se argumentos de densidade, à elementos do conjunto  $\mathcal{W}_\kappa(\Omega_0)$ , pois este é o complemento de  $C_0^\infty(\Omega_0)$  na norma  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa$ .

**Teorema 1.3.11.** *Para todo  $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , vale  $\mathcal{W}_\kappa(\Omega_0) \subsetneq \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$ .*

*Demonstração.* Tome  $\psi \in \mathcal{W}_\kappa(\Omega_0)$  e  $u_n$  em  $C_0^\infty(\Omega_0)$  de modo que (1.12) ocorra. Segue-se da desigualdade de Hardy que

$$\int_{\Omega_0} |\mathbf{A}_\kappa(u_n - \psi)|^2 dx dy = |\kappa|^2 \int_{\Omega_0} \frac{|u_n(z) - \psi(z)|^2}{|z|^2} dx dy \rightarrow 0,$$

de onde segue-se do análogo à (1.12) para  $\Omega_0$  que  $\|\nabla(u_n - \psi)\|_{L^2} \rightarrow 0$  de forma que  $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$ . Para terminar, tome um elemento  $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$  de forma que  $\frac{\psi}{r} \notin L^2(\Omega_0)$ . Para este elemento, não podemos aplicar a desigualdade de Hardy, pois o lado esquerdo de (1.13) é infinito, enquanto o lado direito é finito se  $\psi \in \mathcal{W}_\kappa(\Omega_0)$ . Isto garante que  $\psi \notin \mathcal{W}_\kappa(\Omega_0)$ .  $\square$

Podemos notar então que todos os resultados desta seção valem tanto para  $\Omega$  quanto para  $\Omega_0$ , com exceção do Teorema 1.3.7, o qual vale apenas para  $\Omega$ . No caso de  $\Omega_0$ , temos o Teorema 1.3.11.

## 1.4 Transformações de gauge

Nesta seção, discutiremos algumas propriedades das transformações de gauge, bem como a aplicabilidade deste objetos ao nosso modelo. Basicamente, as transformações de gauge são responsáveis por agrupar os muitos modelos matemáticos que descrevem o mesmo fenômeno numa mesma classe de equivalência. Neste sentido, se dois modelos são gauge equivalentes, as mesmas conclusões físicas devem ser obtidas de ambos, o que nos dá uma certa liberdade de escolha entre os modelos. Vamos primeiro fazer alguns comentários que motivam a definição de transformação de gauge que daremos.

Como acreditava-se antes do efeito AB ser exposto, os campos magnéticos que desempenhavam o papel de governar a dinâmica, sendo os potenciais apenas um instrumento de cálculo, como ocorre em mecânica clássica. É de se esperar então que, se uma partícula está numa região  $\tilde{\Omega}$  qualquer sob ação de um campo magnético  $\mathbf{B}$ , a escolha de diferentes potenciais  $\mathbf{A}$  para este campo não deveria importar do ponto de vista da mecânica quântica. Em contrapartida, em nosso modelo, cada potencial  $\mathbf{A}_\kappa$  representa em  $\Omega$  (ou

$\Omega_0$ ) o mesmo campo magnético,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_\kappa = \mathbf{0}$ , de modo que todos os operadores  $H_\kappa$  deveriam representar um mesmo sistema físico, o que, como veremos analisando os autovalores, não ocorre (e a isto se entende como efeito AB). A explicação para isto encontra-se no seguinte fato: Dado um campo qualquer  $\mathbf{B}$  e sendo  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  (usaremos a notação caligráfica para não haver confusão com os potenciais  $\mathbf{A}_\kappa$  já introduzidos) dois potenciais magnéticos associados, temos a seguinte expressão formal:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \nabla\phi, \quad \phi(z) = \int_{z_0}^z (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds. \quad (1.14)$$

Supondo que as expressões acima façam sentido, dizemos que os potênciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são *classicamente gauge associados*. Note que potenciais classicamente gauge associados representam o mesmo campo magnético e, por isso, na mecânica clássica, escolher entre potenciais classicamente gauge associados é irrelevante e ambos representam o mesmo sistema físico.

Note agora que, no caso da mecânica quântica, a existência de uma aplicação unitária do tipo  $e^{i\phi}$  que transforma o operador  $H_1$  associado à  $\mathcal{A}_1$  no operador  $H_2$  associado à  $\mathcal{A}_2$  implica que os dois modelos  $H_1$  e  $H_2$  representam o mesmo fenômeno. Assim, mesmo que os potenciais sejam classicamente gauge associados, no caso de uma região não simplesmente conexa como  $\Omega$ , temos um problema na integral de linha em (1.14), a qual depende do caminho  $\vartheta$  escolhido para ligar os pontos  $z_0$  e  $z$  e, assim, define não uma função, mas uma multifunção em  $\Omega$  que a cada ponto  $z \in \Omega$  assume um conjunto de valores indexados por  $\vartheta$ . Como o importante é que a transformação de gauge  $e^{i\phi}$  esteja bem-definida, devemos pedir a condição adicional

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_\sigma (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds \right) \in \mathbb{Z},$$

para toda curva  $\sigma$  fechada, simples em  $\Omega$ . Dizemos neste caso que os potenciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são *quanticamente gauge associados*. Assim, mesmo sendo  $\phi$  uma multifunção, a diferença de valores assumidos por um mesmo ponto é múltiplo inteiro de  $2\pi$ , o que é insensível pela exponencial que define a transformação de gauge (no nosso modelo, este valor é  $\kappa$ , o qual pode ser não inteiro, de forma que nesta situação não se pode transformar  $H_\kappa$  em  $H_0$ , por exemplo). Vamos agora tratar estes conceitos com mais detalhes e com o rigor matemático necessário, inspirados nas argumentações presentes em [6, 22, 23], notando que todos os argumentos usados nesta seção valem para o modelo análogo na região  $\Omega_0$ , isto é, para um solenóide com raio nulo. Para uma discussão detalhada sobre transformações de gauge em  $\mathbb{R}^n$ , recomendamos [28].

**Definição 1.4.1.** Dizemos que dois potenciais magnéticos reais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ , associados aos campos magnéticos  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$ , são *quanticamente gauge associados* em  $\Omega$  se existe uma multifunção  $\phi$  de classe  $C^\infty$ , definida em  $\Omega$  e tomando multivalores em  $\mathbb{R}$ , com  $\nabla\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $e^{i\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funções bem-definidas (assumem valores únicos) e

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \nabla\phi \text{ em } \Omega. \quad (1.15)$$

Lembremos aqui que um campo magnético  $\mathbf{B}$  em  $\Omega$  tem a forma  $\mathbf{B}(z) := b(z) dx \wedge dy$ , sendo que  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função qualquer da forma  $b(z) = \partial_x a_y - \partial_y a_x$ , com o potencial magnético associado  $\mathbf{A} := (a_x, a_y)$ .

**Definição 1.4.2.** Considere potenciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  como na definição anterior. Fixando um  $z_0 \in \Omega$ , tome a família de aplicações  $\phi_\varsigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\phi_\varsigma(z) := \int_\varsigma (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds,$$

em que  $\varsigma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  é uma curva suave por partes ligando  $z_0$  a  $z$ . Vamos definir então a seguinte multifunção  $\tilde{\phi}(z) := \{\phi_\varsigma(z)\}_\varsigma$ . Note que  $\tilde{\phi}(z)$  assume um conjunto de valores, os quais dependem da curva escolhida e que a diferença  $\phi_{\varsigma_1}(z) - \phi_{\varsigma_2}(z)$  entre dois desses valores é dada por

$$\phi_{\varsigma_1}(z) - \phi_{\varsigma_2}(z) = \int_{\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1} (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds,$$

em que  $\varsigma_2^{-1}(t) := \varsigma_2(1-t)$  é o caminho reverso. Vê-se de imediato que  $\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1$  é um caminho fechado em  $\Omega$  passando por  $z_0$ .

O seguinte teorema fornece um critério para que dois potenciais sejam quanticamente gauge associados numa região. Basicamente, estes potenciais devem gerar o mesmo campo nessa região e, fora dela, a diferença entre os fluxos magnéticos tem que ser um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

**Teorema 1.4.3.** *Os potenciais magnéticos  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são quanticamente gauge associados se, e somente se,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  em  $\Omega$  e para toda curva suave simples e fechada  $\sigma$  em  $\Omega$  vale*

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_\sigma [\mathcal{A}_2(z) - \mathcal{A}_1(z)] \cdot ds \right) \in \mathbb{Z}. \quad (1.16)$$

*Demonstração.* Suponha que  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são quanticamente gauge associados e  $\sigma$  é uma curva fechada suave e simples qualquer em  $\Omega$ . Então segue imediatamente da igualdade (1.15) e

do fato de  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ , que  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  na região  $\Omega$ . Agora, usando o teorema fundamental do cálculo na igualdade (1.15) no contexto das multifunções, temos que  $\phi = \tilde{\phi}$  isto é,  $\phi(z)$  assume um conjunto de valores  $\phi_\varsigma(z)$  indexados por  $\varsigma$ , a curva que liga o ponto  $z_0$  à  $z$ . Pela definição de gauge associados, tem-se que  $e^{i\phi_{\varsigma_1}(z)} = e^{i\phi_{\varsigma_2}(z)}$ , logo, para todo  $z \in \Omega$  existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\phi_{\varsigma_1}(z) - \phi_{\varsigma_2}(z) = 2m\pi$ . Como  $\phi_{\varsigma_1} - \phi_{\varsigma_2}$  é contínua, podemos tomar o mesmo  $m$  para todos os pontos  $z \in \Omega$ . Tomando em particular elementos  $z_0$  e  $z$  na curva  $\sigma$  e considerando  $\varsigma_1$  e  $\varsigma_2$  as curvas ligando  $z_0$  à  $z$  nesta curva, em direções opostas com  $\varsigma_1$  na mesma direção que  $\sigma$ , teremos

$$2m\pi = \phi_{\varsigma_1}(z) - \phi_{\varsigma_2}(z) = \int_{\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1} (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds,$$

sendo  $\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1$  a composição do caminho  $\varsigma_1$  com o caminho reverso de  $\varsigma_2$ . Note que  $\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1$  é exatamente a curva  $\sigma$  no sentido de  $\varsigma_1$  o que demonstra (1.16).

Suponha agora que (1.16) ocorra com  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  em  $\Omega$ . Defina a multifunção  $\phi$  pondo  $\phi := \tilde{\phi}$  como anteriormente. Segue imediatamente que  $\nabla \phi = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$ , o qual está bem-definido como função e  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \nabla \phi$ . Basta verificarmos que a exponencial está bem-definida, isto é, que  $e^{i\phi(z)} = e^{i\phi_\varsigma(z)}$  independe da curva  $\varsigma$  escolhida para ligar o ponto  $z_0$  à  $z$ . Tome duas curvas quaisquer  $\varsigma_1$  e  $\varsigma_2$  ligando esses pontos em  $\Omega$ , partindo de  $z_0$ . Observe que a curva fechada  $\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1$  é uma curva fechada simples  $\sigma$  em  $\Omega$ . Segue-se então que

$$\phi_{\varsigma_1}(z) - \phi_{\varsigma_2}(z) = \int_{\varsigma_2^{-1} \circ \varsigma_1} (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds = \left( \int_{\sigma} (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds \right) \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

Portanto, podemos concluir que a diferença  $\phi_{\varsigma_1}(z) - \phi_{\varsigma_2}(z) \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$  de forma que  $e^{i\phi_{\varsigma_1}} = e^{i\phi_{\varsigma_2}}$ , e a exponencial  $e^{i\phi}$  está bem-definida.  $\square$

Note que o teorema acima pode ser expresso exclusivamente em termos dos potenciais, bastando substituir as hipóteses por  $\nabla \times \mathcal{A}_1 = \nabla \times \mathcal{A}_2$  em  $\Omega$  e

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot ds \right) \in \mathbb{Z},$$

para toda curva fechada  $\sigma \in \Omega$ .

**Lema 1.4.4.** *Considere operadores  $\dot{H}_j := (i\nabla + \mathcal{A}_j)^2 + V$  definidos em  $C_0^\infty(\Omega)$ , com  $j = 1, 2$  e suponha que os potenciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  sejam quanticamente gauge associados em  $\Omega$ . Então vale a igualdade  $\dot{H}_2 e^{i\phi} = e^{i\phi} \dot{H}_1$  em  $C_0^\infty(\Omega)$ .*

*Demonstração.* Note primeiramente que  $\nabla\phi$  é de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ , de forma que temos imediatamente  $e^{i\phi}(C_0^\infty(\Omega)) = C_0^\infty(\Omega)$ . Ainda, valem as seguinte igualdades

$$\begin{aligned} e^{i\phi} [(i\nabla + \mathcal{A}_1)(e^{-i\phi}\varphi)] &= e^{i\phi} [(\nabla\phi e^{-i\phi}\varphi + ie^{-i\phi}\nabla\varphi)] + \mathcal{A}_1\varphi \\ &= \nabla\phi\varphi + (i\nabla + \mathcal{A}_1)\varphi \\ &= (i\nabla + \mathcal{A}_2)\varphi, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

e segue facilmente, usando  $e^{-i\phi}e^{i\phi} = 1$ , que

$$\dot{H}_2 e^{i\phi} = e^{i\phi} \dot{H}_1.$$

□

**Teorema 1.4.5.** *Para cada  $j \in \{1, 2\}$ , considere o operador  $\dot{H}_j := (i\nabla + \mathcal{A}_j)^2 + V$  essencialmente autoadjunto em  $C_0^\infty(\Omega)$ , e denote por  $H_j$  sua única extensão autoadjunta. Suponha que os potenciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  sejam quanticamente gauge associados em  $\Omega$  através da função  $\phi$ . Então a função  $e^{i\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  define um operador unitário em  $L^2(\Omega)$  de modo que  $\text{dom } H_2 = e^{i\phi}(\text{dom } H_1)$  e  $H_2 e^{i\phi} = e^{i\phi} H_1$ .*

*Demonstração.* Como os potenciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são quanticamente gauge associados, existe uma multifunção  $\phi$  em  $\Omega$  assumindo multivalores reais tais que  $\nabla\phi$  e  $e^{i\phi}$  estão bem-definidas como funções e vale (1.15). Claramente o operador de multiplicação  $e^{i\phi} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  define um operador linear unitário em  $L^2(\Omega)$ , pois

$$\|e^{i\phi}\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |e^{i\phi(z)}\psi(z)|^2 dx dy = \int_{\Omega} |\psi(z)|^2 dx dy = \|\psi\|_{L^2}^2.$$

Agora, tome um elemento  $\psi \in \text{dom } H_1$ . Isto significa que existe uma sequência de funções  $\psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$  com  $\psi_n \rightarrow \psi$  e  $\dot{H}_1\psi_n \rightarrow H_1\psi$  em  $L^2(\Omega)$ , isto pela definição de fecho de operadores. Segue imediatamente do fato de  $e^{i\phi}$  ser uma isometria que  $e^{i\phi}\psi_n \rightarrow e^{i\phi}\psi$  em  $L^2(\Omega)$ . Pelo Lema 1.4.4, temos que

$$\dot{H}_2 e^{i\phi}\psi_n = e^{i\phi} \dot{H}_1\psi_n \longrightarrow e^{i\phi} H_1\psi \quad \text{em } L^2(\Omega) \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Como  $e^{i\phi}\psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$  e da definição de fecho de operador, segue que  $e^{i\phi}\psi \in \text{dom } H_2$  e  $H_2 e^{i\phi}\psi = e^{i\phi} H_1\psi$ . Analogamente, podemos mostrar que  $\text{dom } H_2 \subset e^{i\phi}(\text{dom } H_1)$  considerando a exponencial inversa  $e^{-i\phi}$ . □

**Definição 1.4.6.** Dizemos que dois operadores de Schrödinger  $H_1$  e  $H_2$  quaisquer (autoadjuntos) são *gauge equivalentes*, se existe  $\phi$  multifunção real em  $\Omega$  de modo que  $e^{i\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  seja uma função de classe  $C^1$  bem-definida (unívoca),  $\text{dom } H_2 = e^{i\phi}(\text{dom } H_1)$  e

$$H_2 e^{i\phi} = e^{i\phi} H_1.$$

Dizemos neste caso que o operador unitário  $e^{i\phi} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é uma *transformação de gauge* entre os operadores  $H_1$  e  $H_2$ .

Note que o fato de  $e^{i\phi}$  estar bem-definida como função implica que os valores entre ramos  $\phi(z)$  diferem entre si por múltiplos inteiros de  $2\pi$  e isto implica ainda, com o fato de  $e^{i\phi}$  ser  $C^1$ , que o gradiente  $\nabla\phi$  também está bem-definido como função vetorial.

**Teorema 1.4.7.** *Considere operadores de Schrödinger autoadjuntos definidos por  $H_j := (i\nabla + \mathcal{A}_j)^2 + V$ ,  $j = 1, 2$ , cujos domínios respectivos contêm  $C_0^\infty(\Omega)$ , associados a potenciais magnéticos  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$  e a um mesmo potencial escalar  $V$ , e suponha que  $H_1$  e  $H_2$  sejam gauge equivalentes. Então os potenciais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são quanticamente gauge associados em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, existe uma transformação de gauge  $e^{i\phi}$  entre os operadores  $H_1$  e  $H_2$ , de forma que

$$e^{-i\phi} (i\nabla + \mathcal{A}_2)^2 (e^{i\phi}\varphi) = (i\nabla + \mathcal{A}_1)^2 \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.17)$$

Explicitando-se o membro esquerdo desta igualdade, temos

$$\begin{aligned} (i\nabla + \mathcal{A}_2) (e^{i\phi}\varphi) &= i\nabla (e^{i\phi}\varphi) + ie^{i\phi}\nabla\varphi + \mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi \\ &= -\nabla\phi e^{i\phi}\varphi + ie^{i\phi}\nabla\varphi + \mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi, \end{aligned}$$

e segue que

$$\begin{aligned} (i\nabla + \mathcal{A}_2)^2 (e^{i\phi}\varphi) &= (i\nabla + \mathcal{A}_2) \cdot (-\nabla\phi e^{i\phi}\varphi + ie^{i\phi}\nabla\varphi + \mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi) \\ &= -i\nabla \cdot (\nabla\phi e^{i\phi}\varphi) - \nabla \cdot (e^{i\phi}\nabla\varphi) + i\nabla \cdot (\mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi) \\ &\quad + \mathcal{A}_2 \cdot (-\nabla\phi e^{i\phi}\varphi + ie^{i\phi}\nabla\varphi + \mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi) \\ &= -i\Delta\phi e^{i\phi}\varphi + (\nabla\phi)^2 e^{i\phi}\varphi - ie^{i\phi}\nabla\phi \cdot \nabla\varphi - ie^{i\phi}\nabla\phi \cdot \nabla\varphi - e^{i\phi}\Delta\varphi \\ &\quad + i\nabla \cdot \mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi - \mathcal{A}_2 \cdot \nabla\phi e^{i\phi}\varphi + ie^{i\phi}\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\varphi \\ &\quad - \mathcal{A}_2 \cdot \nabla\phi e^{i\phi}\varphi + ie^{i\phi}\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\varphi + \mathcal{A}_2^2 e^{i\phi}\varphi. \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos, obtemos

$$(i\nabla + \mathcal{A}_2)^2 (e^{i\phi}\varphi) = -e^{i\phi}\Delta\varphi - 2i\nabla\phi \cdot \nabla\varphi e^{i\phi} + 2i\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\varphi e^{i\phi} \\ - i\Delta\phi e^{i\phi}\varphi + (\nabla\phi)^2 e^{i\phi}\varphi + i\nabla \cdot \mathcal{A}_2 e^{i\phi}\varphi - 2\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\phi e^{i\phi}\varphi + \mathcal{A}_2^2 e^{i\phi}\varphi.$$

Substituindo tal identidade em (1.17), teremos

$$(i\nabla + \mathcal{A}_1)^2 \varphi = -\Delta\varphi + 2i\mathcal{A}_1 \cdot \nabla\varphi + i\nabla \cdot \mathcal{A}_1\varphi + \mathcal{A}_1^2\varphi \\ = -\Delta\varphi - 2i\nabla\phi \cdot \nabla\varphi + 2i\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\varphi \\ - i\Delta\phi\varphi + (\nabla\phi)^2 \varphi + i\nabla \cdot \mathcal{A}_2\varphi - 2\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\phi\varphi + \mathcal{A}_2^2\varphi.$$

A igualdade acima equivale à seguinte

$$[(\nabla\phi)^2 - i\Delta\phi + \mathcal{A}_2^2 - \mathcal{A}_1^2 + i\nabla \cdot (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) - 2\mathcal{A}_2 \cdot \nabla\phi] \varphi + [\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 - \nabla\phi] 2i\nabla\varphi = 0,$$

em particular, a parte imaginária tem de ser nula, isto é

$$[-\Delta\phi + \nabla \cdot (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1)] \varphi + 2[\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 - \nabla\phi] \nabla\varphi = 0. \quad (1.18)$$

Como  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  é qualquer, integrando sobre  $\Omega$  e usando a definição de  $\nabla$  no contexto das funções generalizadas, segue-se a seguinte igualdade no sentido das distribuições

$$-\Delta\phi + \nabla \cdot (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) = 2\nabla \cdot [\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 - \nabla\phi],$$

lembrando que a definição de  $\nabla$  envolve uma troca de sinais. Vemos imediatamente que  $\Delta\phi = \nabla \cdot (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) = 0$ , pois os potenciais são de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ . Substituindo isto em (1.18), segue que  $\nabla\phi$  está bem-definida como a função  $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$ , e portanto, os potenciais são quanticamente gauge associados.  $\square$

**Definição 1.4.8.** Dado um potencial magnético  $\mathbf{A}$  de classe  $C^1$  em  $\Omega$  com  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ , definimos a *circuitação* do potencial como

$$\kappa(\mathbf{A}) := \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mathbf{A} \cdot ds,$$

sendo  $\sigma$  uma parametrização suave de uma circunferência em  $\Omega$ , centrada em 0 no sentido anti-horário.

Note que a integral acima independe do raio da circunferência escolhida via teorema

de Stokes, desde que as mesmas estejam dentro da região  $\Omega$  e circulem 0. Podemos dizer ainda mais, que a integral acima independe da curva  $\sigma$  contida em  $\Omega$  escolhida, desde que esta seja uma curva simples, fechada e suave por partes que circula o ponto 0 uma vez no sentido anti-horário.

**Teorema 1.4.9.** *Tomando  $V$  um potencial escalar como na Definição 1.1.3 e  $\mathbf{A}$  qualquer potencial magnético de classe  $C^\infty$  com  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  em  $\Omega$ , considere o operador autoadjunto*

$$H := (i\nabla + \mathbf{A})^2 + V,$$

*com domínio contendo o cerne  $C_0^\infty(\Omega)$ . Então existe um único  $\kappa \in (-1/2, 1/2]$  de modo que  $H$  é gauge equivalente a  $H_\kappa$ . Particularmente, considerando-se  $\kappa, \kappa' \in (-1/2, 1/2]$ , vale que  $H_\kappa$  é gauge associado à  $H_{\kappa'}$  se, e somente se,  $\kappa = \kappa'$ .*

*Demonstração.* Considere o único número  $\kappa \in (-1/2, 1/2]$  com  $\kappa + m = \kappa(\mathbf{A})$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$  e vamos mostrar que  $H_\kappa$  é gauge equivalente a  $H$ . Com efeito, note primeiramente que os potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}_\kappa$  são quanticamente gauge associados pelo Teorema 1.4.3 e pela definição de circuitação. Usando o Teorema 1.2.6 e o Corolário 1.2.7, temos que ambos os operadores são essencialmente autoadjuntos no conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$ , de forma que o Teorema 1.4.5 implica no resultado. Para ver a unicidade, basta notar que a única forma de  $\mathbf{A}_\kappa$  e  $\mathbf{A}_{\kappa'}$  serem quanticamente gauge associados, é se  $(\kappa - \kappa') \in \mathbb{Z}$ , de modo que, no intervalo  $(-1/2, 1/2]$ , isto só ocorre se houver igualdade.  $\square$

## 1.5 Transformações antiunitárias

Pelo Teorema 1.4.9 da seção anterior, podemos estudar o efeito AB olhando apenas para os operadores autoadjuntos  $H_\kappa$  com  $\kappa \in (-1/2, 1/2]$ , pois qualquer operador associado a um campo magnético nulo em  $\Omega$  é unitariamente equivalente a um único elemento dessa família por uma transformação de gauge. Vamos reduzir mais esta família usando, não mais transformações de gauge, mas transformações antiunitárias. Note que, como na seção anterior, os argumentos usados aqui também valem para a região  $\Omega_0$ , isto é, o modelo de solenóide com raio nulo.

**Definição 1.5.1.** Dizemos que uma aplicação sobrejetora  $\mathcal{T} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é uma aplicação *antiunitária* quando satisfaz as condições abaixo para todos  $\xi, \eta \in L^2(\Omega)$ :

1.  $\mathcal{T}(\lambda\xi) = \bar{\lambda}\mathcal{T}\xi$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;

$$2. \mathcal{T}(\xi + \eta) = \mathcal{T}\xi + \mathcal{T}\eta;$$

$$3. \langle \mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\eta \rangle = \overline{\langle \xi, \eta \rangle}.$$

**Definição 1.5.2.** Dizemos que dois operadores  $H_1$  e  $H_2$ , autoadjuntos em  $L^2(\Omega)$ , são *antiunitariamente equivalentes* quando existe uma transformação  $\mathcal{T} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  antiunitária de modo que

$$H_2\mathcal{T} = \mathcal{T}H_1,$$

com  $\text{dom } H_2 = \mathcal{T}(\text{dom } H_1)$ .

**Teorema 1.5.3.** *Para todo  $\kappa \in \mathbb{R}$ , os operadores autoadjuntos  $H_\kappa$  e  $H_{-\kappa}$  são antiunitariamente equivalentes pela conjugação complexa.*

*Demonstração.* Considere a aplicação conjugação complexa  $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  dada por  $T\psi := \overline{\psi}$ , a qual é uma transformação antiunitária com  $T^{-1} = T$ . Tome  $\psi \in \text{dom } H_\kappa$  qualquer. Então existe sequência  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow \psi$  e  $\dot{H}_\kappa u_n \rightarrow H_\kappa\psi$  em  $L^2(\Omega)$ . Claramente  $C_0^\infty(\Omega) \ni Tu_n \rightarrow T\psi$  e ainda, de  $\mathbf{A}_{-\kappa} = -\mathbf{A}_\kappa$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \dot{H}_{-\kappa}(Tu_n) &= [(i\nabla + \mathbf{A}_{-\kappa})^2 + V] \overline{u_n} = [(-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 + V] \overline{u_n} \\ &= \overline{[(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 + V] u_n} = T\left(\dot{H}_\kappa u_n\right) \longrightarrow T(H_\kappa\psi), \text{ para } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

o que demonstra que  $T\psi \in \text{dom } H_{-\kappa}$  e que  $H_{-\kappa}(T\psi) = T(H_\kappa\psi)$ . Para terminar de mostrar a igualdade entre os domínios, basta notar que  $T^{-1} = T$  e aplicar o mesmo argumento.  $\square$

**Corolário 1.5.4.** *Os operadores  $H_\kappa$  e  $H_{-\kappa}$  possuem o mesmo espectro.*

*Demonstração.* Da teoria geral de operadores autoadjuntos (veja Corolário 2.4.9 em [12]), sabemos que  $\lambda \in \sigma(H_\kappa)$  se, e somente se, existe uma sequência de Weyl  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para  $H_\kappa$  em  $\lambda$ . Isto significa que  $\xi_n \in \text{dom } H_\kappa$ ,

$$\|\xi_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H_\kappa - \lambda I) \xi_n = 0.$$

Passando o complexo conjugado e usando o Teorema 1.5.3 (mais precisamente, sua demonstração), vemos que  $\overline{\xi_n} \in \text{dom } H_{-\kappa}$ , e como  $\lambda \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (H_\kappa - \lambda I) \xi_n} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{-\kappa} - \lambda I) \overline{\xi_n} = 0.$$

Assim  $(\overline{\xi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Weyl para  $H_{-\kappa}$  em  $\lambda$ , i.e.,  $\lambda \in \sigma(H_{-\kappa})$ . Note que o mesmo argumento pode ser usado para demonstrar que  $\sigma(H_{-\kappa}) \subset \sigma(H_\kappa)$ .  $\square$

A aplicação antiunitária  $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  dada pela conjugação  $T\psi = \overline{\psi}$  é particularmente importante nesse modelo. Além de conservar o espectro entre  $H_\kappa$  e  $H_{-\kappa}$ , ela representa uma simetria na evolução temporal do sistema, no sentido de que obter uma solução para o modelo  $H_\kappa$  de  $t_0$  a  $t_1$  é o mesmo que obter uma solução de  $H_{-\kappa}$  no sentido inverso de  $t_1$  a  $t_0$ .

Agora, a simetria dada pelo operador  $T$  entre  $H_\kappa$  e  $H_{-\kappa}$  não implica de forma alguma que eles são gauge equivalentes, pois como vimos,  $H_\kappa$  e  $H_{-\kappa}$  são gauge equivalentes se, e somente se,

$$(\kappa - (-\kappa)) = 2\kappa \in \mathbb{Z},$$

isto é, nesta situação apenas se  $\kappa \in \mathbb{Z}$  ou  $\kappa \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Contudo, não sabemos se  $H_\kappa$  e  $H_{-\kappa}$  podem ser unitariamente equivalentes por uma transformação unitária que não seja de gauge para os casos em que  $\kappa \notin \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + 1/2)$ .

Usando essa simetria dada pelo Corolário 1.5.4, o estudo do efeito AB neste modelo pode ser reduzido ao estudo dos operadores  $H_\kappa$  com  $\kappa \in [0, 1/2]$ . Como veremos nos capítulos seguintes, nada mais pode ser feito para reduzir esta família de modo geral, pois o primeiro autovalor de cada um destes operadores difere dos demais nos casos considerados a seguir.

## 1.6 Caracterização do espectro

Uma das principais informações que podemos obter de um modelo como o nosso é o valor numérico do primeiro autovalor (“energia do estado fundamental”, na literatura física). Ele representa a energia mínima do sistema e, no caso específico aqui tratado, será nossa ferramenta para mostrar a existência do efeito AB para o nosso modelo, ou seja, uma característica física que depende explicitamente de  $\kappa$ . Para que isto seja possível, devemos mostrar que o ínfimo do espectro de  $H_\kappa$  é realmente um autovalor, de forma que este pode ser caracterizado pelo princípio do min-max via forma quadrática. Para o operador  $H_\kappa$ , a divergência do potencial  $V$  no infinito e na fronteira implicará em resolvente compacto e, portanto, todo o espectro do operador é constituído por uma sequência ilimitada de autovalores, cada um com multiplicidade finita. Nesta seção, vamos nos dedicar a demonstrar a afirmação anterior usando um argumento presente em [29]. A ideia central da demonstração consiste em usar a compacidade do mergulho de Sobolev em regiões limitadas.

Fixemos, por comodidade,  $\kappa \in [0, 1/2]$  qualquer, lembrando que para demonstrar o

caso geral basta demonstrar este e aplicar transformações de gauge e antiunitárias, as quais mantêm o espectro invariante (ver o Teorema 1.4.9 e o Corolário 1.5.4).

**Teorema 1.6.1.** *Existe  $c > 0$  tal que, para todo  $\kappa \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\sigma(H_\kappa) \subset [c, \infty)$ .*

*Demonstração.* Tome  $\lambda \in \sigma(H_\kappa)$  e  $\psi_n$  uma sequência de Weyl para  $H_\kappa$  em  $\lambda$ , isto é,

$$\psi_n \in \text{dom } H_\kappa, \quad \|\psi_n\| = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H_\kappa - \lambda I) \psi_n = 0.$$

Assim, segue-se imediatamente que

$$|\langle \psi_n, H_\kappa \psi_n \rangle - \langle \psi_n, \lambda \psi_n \rangle| \leq \|H_\kappa \psi_n - \lambda \psi_n\| \rightarrow 0,$$

de forma que  $\langle \psi_n, H_\kappa \psi_n \rangle \rightarrow \lambda$ . Tomando  $c > 0$  de modo que  $V(z) > c$  para todo  $z \in \Omega$ , teremos  $\langle \psi_n, H_\kappa \psi_n \rangle > c$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , seguindo que  $\lambda \geq c$  como queríamos.  $\square$

Portanto, para mostrar que o espectro de  $H_\kappa$  é discreto, basta mostrar que o operador resolvente em  $0 \notin \sigma(H_\kappa)$ , dado por  $H_\kappa^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , é compacto. Note ainda que podemos escrever

$$H_\kappa^{-1} = I \circ T,$$

em que  $I : \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \rightarrow L^2(\Omega)$  é a inclusão e  $T : L^2(\Omega) \rightarrow \text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  é o operador dado por  $T\varphi := H_\kappa^{-1}\varphi$ . A aplicação  $I$  está evidentemente bem-definida e  $T$  também, pois  $0 \notin \sigma(H_\kappa)$  e  $H_\kappa^{-1}\psi \in \text{dom } H_\kappa \subset \text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  para todo  $\psi \in L^2(\Omega)$ .

**Teorema 1.6.2.** *O operador  $T : L^2(\Omega) \rightarrow \text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  é contínuo.*

*Demonstração.* Note que o fato de  $0 \notin \sigma(H_\kappa)$  não implica imediatamente que  $T$  seja contínuo, pois estamos considerando normas diferentes, lembrando que a norma no espaço  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  é dada por  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\kappa}^2 = \mathcal{L}_\kappa(\cdot) + \|\cdot\|_{L^2}^2$ . Neste caso, a continuidade se segue diretamente do fato de  $H_\kappa$  ser limitado inferiormente por  $c > 0$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{\mathcal{L}_\kappa}^2 &= \mathcal{L}_\kappa(H_\kappa^{-1}u) + \|H_\kappa^{-1}u\|_{L^2}^2 = \mathcal{L}_\kappa(v) + \|v\|_{L^2}^2 \\ &= \langle v, H_\kappa v \rangle_{L^2} + \|v\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} \right) \|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

pois  $v$  está no domínio de  $H_\kappa$  e  $\|u\|_{L^2} = \|H_\kappa v\|_{L^2} \geq c \|v\|_{L^2}$ , para todo  $u \in L^2(\Omega)$ .  $\square$

Assim, basta mostrar a compacidade da inclusão  $I$ , a qual será feita mostrando que  $I$  é limite em norma de operadores compactos. Para isto, precisamos de uma construção um pouco mais elaborada.

**Definição 1.6.3.** Defina a cobertura  $\Omega_j$  de  $\Omega$  pondo  $\Omega_j := \{z \in \mathbb{R}^2 : a_j < d(z) < b_j\}$ , sendo  $a_j < b_j$  seqüências monótonas reais com  $a_j \rightarrow 0$ ,  $b_j \rightarrow \infty$  para  $j \rightarrow \infty$  e

$$V(z) > j, \quad \forall z \in \Omega \setminus \Omega_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

Note que pelas hipóteses sobre  $V$ , estas seqüências existem.

**Definição 1.6.4.** Defina o espaço vetorial  $\mathcal{R}(\Omega_j)$  das funções de  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  restritas à  $\Omega_j$ , isto é,  $\psi|_{\Omega_j}$  tais que  $\psi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa$ . Dotamos  $\mathcal{R}(\Omega_j)$  do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j := \mathcal{L}_\kappa(\cdot, \cdot) + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ , que é justamente o produto interno de  $\text{dom } \mathcal{L}_\kappa$  restrito ao conjunto  $\Omega_j$ . Note que para calcular o produto interno, devemos considerar a restrição  $\psi|_{\Omega_j}$  como uma função em  $\Omega$  usando a extensão por zero usual  $\psi \mathbf{1}_{\Omega_j}$ .

**Definição 1.6.5.** Considere as inclusões usuais

$$i_j : \mathcal{R}(\Omega_j) \rightarrow L^2(\Omega_j),$$

e defina as funções

$$\beta_j : L^2(\Omega_j) \rightarrow L^2(\Omega), \quad \beta_j \psi(x) := \begin{cases} \psi(x), & \text{se } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_j \end{cases},$$

e

$$\rho_j : \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \rightarrow \mathcal{R}(\Omega_j), \quad \rho_j \psi := \psi|_{\Omega_j}.$$

Aqui  $\beta_j$  e  $\rho_j$  são simplesmente a extensão por zero e a restrição de  $\psi$  à  $\Omega_j$ , respectivamente. Defina agora a seqüência de inclusões  $I_j : \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \rightarrow L^2(\Omega)$  por  $I_j := \beta_j \circ i_j \circ \rho_j$ .

**Teorema 1.6.6.**  $I : \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \rightarrow L^2(\Omega)$  é limite em norma de  $I_j : \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \rightarrow L^2(\Omega)$ .

*Demonstração.* Com efeito, note primeiramente que a composição pode ser escrita de maneira simples por  $I_j \psi(z) = \psi \mathbf{1}_{\Omega_j} = \left( V^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} \right) \psi \mathbf{1}_{\Omega_j}(z)$  para toda  $\psi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa(\Omega)$ . Desta

forma, segue que

$$\begin{aligned}
\|(I_j - I)\psi\|_{L^2}^2 &= \left\| \left( V^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} \right) \psi \mathbf{1}_{\Omega_j}(z) - \psi \right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\| \left( V^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\Omega_j} - V^{-\frac{1}{2}} \right) V^{\frac{1}{2}} \psi \right\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\Omega \setminus \Omega_j} (V^{-1}) V |\psi(x)|^2 \, dx dy \\
&\leq \frac{1}{j} \int_{\Omega \setminus \Omega_j} V |\psi(z)|^2 \, dx dy \leq \frac{1}{j} \|\psi\|_{\mathcal{L}_\kappa}^2,
\end{aligned}$$

usando o fato (1.19) na ultima desigualdade. Segue disso a convergência em norma.  $\square$

Portanto, como os operadores  $\beta_j$  e  $\rho_j$  são contínuos, basta mostrar que  $i_j$  é um operador compacto, pois daí  $I$  será limite uniforme de uma sequência de operadores compactos  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$  e, portanto, compacto. Lembremos aqui que o espaço de Sobolev  $\mathcal{H}^1(\Omega_j) \subset L^2(\Omega_j)$ , é definido via derivada distribucional por

$$\mathcal{H}^1(\Omega_j) := \left\{ \psi \in L^2(\Omega_j) : \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \in L^2(\Omega_j) \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^1} := \sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|_{L^2}^2}.$$

**Teorema 1.6.7.** *A inclusão  $i_j : \mathcal{R}(\Omega_j) \rightarrow L^2(\Omega_j)$  é compacta.*

*Demonstração.* Note primeiramente que para  $\varphi \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ , temos que  $\varphi = \psi|_{\Omega_j}$  para algum  $\psi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  (ver Teoremas 1.3.8 e 1.3.9), de forma que  $\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_j)$  e a inclusão  $B : \mathcal{R}(\Omega_j) \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_j)$  está bem-definida. Considerando também a inclusão usual de Sobolev  $A : \mathcal{H}^1(\Omega_j) \rightarrow L^2(\Omega_j)$ , temos a composição  $i_j = A \circ B$ . Sabemos do Teorema de Rellich da compacidade do mergulho de Sobolev que  $A$  é compacta, de forma que basta mostrar a continuidade de  $B$ .

Considere uma sequência  $\psi_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{R}(\Omega_j)$ . Isto significa, pelo Corolário 1.3.4 e pela definição de  $\mathcal{R}(\Omega_j)$  que  $\psi_n \in L^2(\Omega_j)$  e  $(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\psi_n \in L^2(\Omega_j)$  e ainda, vale o seguinte para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|\psi_n\|_j = \sqrt{\mathcal{L}_\kappa(\psi_n) + \|\psi_n\|_{L^2}^2} = \sqrt{\int_{\Omega_j} [ |i\nabla\psi_n + \mathbf{A}_\kappa\psi_n|^2 + V|\psi_n|^2 + |\psi_n|^2 ] \, dx dy} \rightarrow 0.$$

Segue imediatamente da positividade dos termos que  $\psi_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega_j)$ . Ainda, como  $\mathbf{A}_\kappa$  é limitado na região  $\Omega_j$ , segue também que  $\mathbf{A}_\kappa \psi_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega_j)$  de forma que o mesmo ocorre para  $\nabla \psi_n$ . Como  $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}^1} = \sqrt{\|\psi_n\|^2 + \|\nabla \psi_n\|^2}$  segue que  $\psi_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{H}^1(\Omega_j)$ . Portanto,  $B$  é contínua e terminamos a demonstração.  $\square$

Note que todas as demonstrações feitas aqui podem ser facilmente adaptadas para o caso  $\Omega_0$ , de forma que vamos admitir, a partir de agora, espectro discreto para ambos os modelos.

# Capítulo 2

## Estudo dos autovalores

Agora, passaremos a um estudo mais detalhado do solenóide cilíndrico reto, particularmente analisaremos como o primeiro autovalor varia com o parâmetro  $\kappa$ . Esta será nossa ferramenta para verificar diretamente a possível existência do efeito Aharonov-Bohm no nosso modelo. Para isto, percebemos a necessidade de se estudar o comportamento das autofunções associadas e a dimensão do auto-espaço associado. Assim, vamos dedicar as três primeiras seções deste capítulo a encontrar propriedades básicas das autofunções, como expansão em série, dimensão do auto-espaço associado e avaliar, sob quais hipóteses, podemos supor a autofunção real, sendo esta uma parte fundamental das conclusões que iremos obter. A partir do momento que temos estas propriedades, podemos estudar a dependência do primeiro autovalor com a circuitação  $\kappa$  aplicando a teoria de perturbação analítica no caso em que  $a > 0$ , o qual corresponde a um solenóide cilíndrico reto com raio  $a$  positivo, um sistema mais realista que aquele com raio nulo.

A técnica usada aqui, a qual usa a simetria do operador para se fazer uma decomposição em subespaços invariantes, foi inspirada de [27], o qual estuda propriedades espectrais de operadores similares com campo magnético e vários tipos de potenciais escalares, incluindo potenciais não limitados inferiormente.

### 2.1 Decomposição polar

**Definição 2.1.1.** Vamos considerar nesta seção o conjunto

$$\Omega_a := \{z \in \mathbb{R}^2 : a < |z|\}, \quad a \geq 0,$$

e vamos supor que o potencial  $V$  da Definição 1.1.3 é radial, isto é,  $V(z) := V(|z|) = V(r)$ , para todo  $z \in \Omega_a$ . Note que a notação  $\Omega_a$  é compatível com aquela  $\Omega_0$  já usada.

Observe primeiramente que se  $\psi \in \text{dom } H_\kappa$ , então  $\psi \in L^2(\Omega_a)$  com  $H_\kappa \psi \in L^2(\Omega_a)$  e, usando a regularidade elíptica dada pelo Teorema 1.2.4 (lembrando que vale a notação  $L^2(\Omega_a) \subset \mathcal{H}_{\text{loc}}^0(\Omega_a)$ ), segue que  $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega_a)$ , o que implica na continuidade da auto-função  $\psi$  em  $\Omega_a \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.1.2.** Vamos definir o operador simétrico e positivo  $\dot{H}_{\kappa,m}$  em  $L^2(a, \infty)$ , com  $\kappa \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{Z}$ , colocando

$$\dot{H}_{\kappa,m} := -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + V(r), \quad \text{dom } \dot{H}_{\kappa,m} := C_0^\infty(a, \infty). \quad (2.1)$$

Denotaremos as extensões autoadjuntas deste operador em  $L^2(a, \infty)$  por  $H_{\kappa,m}$ , a qual não trará confusão devido ao teorema abaixo.

**Teorema 2.1.3.** *Para cada par  $\kappa, m$ , o operador  $\dot{H}_{\kappa,m}$  possui uma única extensão autoadjunta  $H_{\kappa,m}$  e a forma sesquilinear fechada associada à esta única extensão é dada por*

$$\mathcal{L}_{\kappa,m}(\xi, \eta) := \int_a^\infty \left\{ \frac{d\xi}{dr}(r) \frac{d\bar{\eta}}{dr}(r) + \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] \xi \bar{\eta} + V(r) \xi \bar{\eta} \right\} dr,$$

com domínio  $\text{dom } \mathcal{L}_{\kappa,m} := \mathcal{H}_0^1(a, \infty) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$ .

*Demonstração.* O fato do operador  $\dot{H}_{\kappa,m}$  ser essencialmente autoadjunto segue-se diretamente por um argumento de ponto limite (ver [37]), pois o potencial cumpre a condição de divergência na fronteira

$$\frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + V(r) \geq \frac{3}{4(r-a)^2},$$

para todos  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e  $r \in (a, a + \epsilon_V)$ . Agora, podemos ver a extensão  $H_{\kappa,m}$  como soma de forma dos operadores autoadjuntos  $-\frac{d^2}{dr^2}$ , com condição de Dirichlet em  $a$ , e o operador de multiplicação pelo potencial positivo

$$\tilde{V}(r) := \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + V(r), \quad (2.2)$$

lembrando de (1.3) que  $V(r) > \frac{1}{4r^2}$  em  $(a, \infty)$  por hipótese, de onde segue o domínio

$\text{dom } \mathcal{L}_\kappa := \mathcal{H}_0^1(a, \infty) \cap \text{dom } \tilde{V}^{\frac{1}{2}}$ . Basta mostrar então a igualdade entre os domínios  $\text{dom } \tilde{V}^{\frac{1}{2}} = \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$ . Note que se  $a > 0$ , o potencial  $\frac{1}{r^2}$  é limitado e a igualdade entre os domínios é imediata da definição. Suponha então  $a = 0$  e tome  $\psi \in \text{dom } \tilde{V}^{\frac{1}{2}}$ , isto é,  $\psi \in L^2(0, \infty)$  e

$$\int_0^\infty \left[ \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + V(r) \right] |\psi(r)|^2 < \infty. \quad (2.3)$$

Considerando  $\epsilon_V > 0$  de forma que (1.2) ocorra, teremos que

$$\frac{3}{4} \int_0^{\epsilon_V} \frac{|\psi(r)|^2}{r^2} dr \leq \int_0^{\epsilon_V} \left[ \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + V(r) \right] |\psi(r)|^2 < \infty.$$

Portanto  $r^{-1}\psi \in L^2(0, \infty)$  e podemos concluir que  $V^{\frac{1}{2}}\psi \in L^2(0, \infty)$  usando (2.3). Analogamente, se  $\psi \in \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  então  $r^{-1}\psi \in L^2(0, \infty)$  usando (1.2) e daí segue imediatamente (2.3) e portanto  $\psi \in \text{dom } \tilde{V}^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**Teorema 2.1.4.** *Toda autofunção  $\psi \in L^2(\Omega_a)$  de  $H_\kappa$  associada a um autovalor  $\lambda$  qualquer é, em coordenadas polares, da forma*

$$\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(r) e^{im\theta}, \quad (2.4)$$

sendo  $\psi_m$  uma autofunção do operador  $H_{m, \kappa}$  associada ao mesmo autovalor  $\lambda$ .

*Demonstração.* Note primeiramente que, sendo  $\psi(r, \theta)$  a representação em coordenadas polares de uma autofunção qualquer, como  $\psi(r, \cdot) \in L^2(0, 2\pi)$  e  $(e^{im\theta})_{m \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortogonal desse espaço, podemos escrever

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_m(r) e^{im\theta}, \quad \forall (r, \theta) \in (a, \infty) \times (0, 2\pi) \text{ q.t.p.,}$$

em que  $\tilde{\psi}_m(r)$  denota as coordenadas de  $\psi(r, \cdot)$  naquela base, a qual está definida q.t.p. Mas como a autofunção é contínua, podemos assumir  $r \in (a, \infty)$  e  $\theta \in (0, 2\pi)$ .

Agora, analisando o operador, temos a seguinte igualdade imediata

$$(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 = -\Delta + i\nabla \cdot \mathbf{A}_\kappa + 2i\mathbf{A}_\kappa \cdot \nabla + \mathbf{A}_\kappa^2. \quad (2.5)$$

Usando coordenadas polares e substituindo o potencial,

$$\mathbf{A}_\kappa \cdot \nabla = \frac{\kappa}{r^2} \left( -r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\mathbf{A}_\kappa^2 = \mathbf{A}_\kappa \cdot \mathbf{A}_\kappa = \frac{\kappa^2}{r^4} (x^2 + y^2) = \frac{\kappa^2}{r^2}.$$

Juntando estas duas últimas igualdades em (2.5), usando a expressão do laplaciano em coordenadas polares e lembrando que  $\nabla \cdot \mathbf{A}_\kappa = 0$ , teremos o seguinte,

$$H_\kappa = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2i\kappa \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\kappa^2}{r^2} + V(r), \quad (2.6)$$

lembrando que  $V$  é radial. Denotando o operador entre parênteses acima por  $D := \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2i\kappa \frac{\partial}{\partial \theta}$ , temos que as exponenciais  $e^{im\theta}$  formam um conjunto de autofunções, pois

$$D(e^{im\theta}) = (-m^2 + 2m\kappa) e^{im\theta}. \quad (2.7)$$

Considere a seguinte notação

$$\tilde{H}_{\kappa,m} := -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} (m - \kappa)^2 + V(r).$$

Como  $\psi$  é autofunção de  $H_\kappa$ , usando a série de Fourier e as igualdades (2.6) e (2.7), vemos facilmente que

$$\begin{aligned} H_\kappa \psi = \lambda \psi &\iff H_\kappa \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_m(r) e^{im\theta} \right) = \lambda \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_m(r) e^{im\theta} \\ &\iff \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \tilde{H}_{\kappa,m} \tilde{\psi}_m(r) \right) e^{im\theta} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \lambda \tilde{\psi}_m(r) \right) e^{im\theta} \\ &\iff \tilde{H}_{\kappa,m} \tilde{\psi}_m(r) = \lambda \tilde{\psi}_m(r), \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall r > a. \end{aligned}$$

Assim,  $\psi$  é autofunção de  $H_\kappa$  se, e somente se, as coordenadas  $\tilde{\psi}_m$  são autofunções de  $\tilde{H}_{\kappa,m}$ , com relação ao mesmo autovalor  $\lambda$ .

Vamos agora estudar  $\tilde{H}_{\kappa,m}$ . Note que a passagem para coordenadas polares faz com que o operador acima esteja definido no espaço  $L^2[(a, \infty), r dr]$ . Considere a seguinte

transformação unitária  $U : L^2[(a, \infty), r dr] \rightarrow L^2[(a, \infty), dr]$  dada por

$$(U\varphi)(r) := r^{\frac{1}{2}}\varphi. \quad (2.8)$$

Um cálculo direto nos permite obter  $H_{\kappa,m}U = U\tilde{H}_{\kappa,m}$  com  $\text{dom } H_{\kappa,m} = U(\text{dom } \tilde{H}_{\kappa,m})$ . Assim, fazendo  $\psi_m(r) = r^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}_m(r)$  teremos o seguinte

$$\begin{aligned} H_{\kappa}\psi = \lambda\psi &\iff \tilde{H}_{\kappa,m}\tilde{\psi}_m(r) = \lambda\tilde{\psi}_m(r) \\ &\iff r^{-\frac{1}{2}}(H_{\kappa,m}\psi_m(r)) = \lambda r^{-\frac{1}{2}}\psi_m(r) \\ &\iff H_{\kappa,m}\psi_m(r) = \lambda\psi_m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Note que pela construção de  $\psi_m$ , vale exatamente a relação (2.4) com  $\psi_m$  uma autofunção de  $H_{\kappa,m}$ . Resta provar apenas que  $\psi_m$  está no domínio do operador  $H_{\kappa,m}$ . De fato, tomando  $C_0^\infty(\Omega_a) \ni \psi_n \rightarrow \psi$  em  $L^2(\Omega_a)$  de forma que  $\dot{H}_{\kappa}\psi_n \rightarrow H_{\kappa}\psi$  em  $L^2(\Omega_a)$ , segue-se usando as fórmulas acima que  $\psi_{n,m} \rightarrow \psi_m$  e  $\dot{H}_{\kappa,m}\psi_{n,m} \rightarrow H_{\kappa,m}\psi_m$  para  $n \rightarrow \infty$  em  $L^2(a, \infty)$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , lembrando que, devido à unicidade das extensões,  $H_{\kappa} = \overline{\dot{H}_{\kappa}}$  e  $H_{\kappa,m} = \overline{\dot{H}_{\kappa,m}}$  e terminamos a demonstração.  $\square$

O importante da demonstração acima é que ela mostra que podemos analisar o operador  $H_{\kappa}$  olhando para as componentes  $H_{\kappa,m}$ . Isto porque, basicamente, decompos o espaço  $L^2(\Omega_a)$  em subespaços da forma  $L^2(a, \infty) \otimes [e^{im\theta}]$ , invariantes por cada operador  $H_{\kappa,m}$ , sendo  $[e^{im\theta}]$  o subespaço gerado pela função  $e^{im\theta}$  em  $L^2(\mathbb{S}^1)$ .

**Teorema 2.1.5.** *Considere  $a > 0$  e suponha que  $\psi_m \in \text{dom } H_{\kappa,m}$ . Então a função em  $\Omega_a$  dada por  $\psi(r, \theta) := r^{-\frac{1}{2}}\psi_m(r)e^{im\theta}$  pertence ao domínio do operador autoadjunto  $H_{\kappa}$ .*

*Demonstração.* Para verificar isso, vamos usar que  $H_{\kappa} = \overline{\dot{H}_{\kappa}}$ , pois  $C_0^\infty(\Omega_a)$  é um cerne para  $H_{\kappa}$ , lembrando que estamos sempre usando a notação  $\dot{H}_{\kappa} = H_{\kappa}|_{C_0^\infty(\Omega_a)}$ . Devemos mostrar que existe uma sequência  $u_n \in C_0^\infty(\Omega_a)$  com  $u_n \rightarrow \psi$  e  $\dot{H}_{\kappa}u_n \rightarrow H_{\kappa}\psi$ , ambos em  $L^2(\Omega_a)$ . Do fato de  $\psi_m \in \text{dom } H_{\kappa,m}$  e de  $C_0^\infty(a, \infty)$  ser um cerne do operador  $H_{\kappa,m}$ , existe uma sequência  $(u_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C_0^\infty(a, \infty)$  com  $u_{m,n} \rightarrow \psi_m$  e  $\dot{H}_{\kappa,m}u_{m,n} \rightarrow H_{\kappa,m}\psi_m$  em  $L^2(a, \infty)$  para  $n \rightarrow \infty$ . Defina  $u_n(r, \theta) := r^{-\frac{1}{2}}u_{m,n}(r)e^{im\theta}$  de forma que  $u_n \in C_0^\infty(\Omega_a)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente  $u_n \rightarrow \psi$  em  $L^2(\Omega_a)$  e, ainda,

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\kappa}u_n &= \dot{H}_{\kappa}\left(r^{-\frac{1}{2}}u_{m,n}(r)e^{im\theta}\right) \\ &= r^{-\frac{1}{2}}\left(\dot{H}_{\kappa,m}u_{m,n}\right)e^{im\theta}. \end{aligned}$$

Assim, tomando  $n \rightarrow \infty$ , como  $a > 0$ , a função  $r^{-\frac{1}{2}}$  é limitada, de forma que a convergência  $\dot{H}_{\kappa,m} u_{m,n} \rightarrow H_{\kappa,m} \psi_m$  para  $n \rightarrow \infty$  implica na convergência  $\dot{H}_{\kappa} u_n \rightarrow H_{\kappa} \psi$ , e isto termina a demonstração.  $\square$

## 2.2 O operador $H_{\kappa,m}$

Agora que sabemos que o operador  $H_{\kappa}$  se decompõe de maneira adequada nos operadores  $H_{\kappa,m}$ , os quais possuem  $C_0^{\infty}(a, \infty)$  como cerne, devemos analisar estes operadores  $H_{\kappa,m}$  para melhor entender  $H_{\kappa}$ . Neste sentido, vamos aqui estudar o domínio de forma do operador autoadjunto associado e obter o domínio da extensão, ao menos quando  $a > 0$ . A independência do domínio do operador  $H_{m,\kappa}$ , quando  $a > 0$ , com relação à  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\kappa \in \mathbb{R}$  é fundamental para o estudo que faremos do primeiro autovalor.

Dado um intervalo  $I$ , vamos denotar por  $AC(I)$  o conjunto das funções  $\psi : I \rightarrow \mathbb{C}$  absolutamente contínuas em  $I$ , isto é, o conjunto das funções da forma

$$\psi(x) = \psi(c) + \int_c^x \phi(t) dt, \quad c \in I, \quad \phi \in L_{\text{loc}}^1(I),$$

com  $\psi'(x) = \phi(x)$  q.t.p. em  $I$ .

**Teorema 2.2.1.** *Considerando a notação (2.2), o domínio do operador autoadjunto  $H_{\kappa,m}$  é, para todos  $a \geq 0$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{Z}$ , o conjunto*

$$\text{dom } H_{\kappa,m} = \left\{ \psi \in L^2(a, \infty) : \psi, \psi' \in AC(a, \infty), \left( -\psi'' + \tilde{V}\psi \right) \in L^2(a, \infty) \right\}, \quad (2.9)$$

para todos  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$  e  $m \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Note primeiramente que, do fato de  $\dot{H}_{\kappa,m}$  ser essencialmente autoadjunto, segue que  $\overline{\dot{H}_{\kappa,m}} = H_{\kappa,m}^*$ . Para facilitar a notação, vamos chamar o lado direito da igualdade (2.9) de  $X$ . Considere  $\psi \in X$  e tome  $\varphi \in C_0^{\infty}(a, \infty)$  qualquer. Temos o seguinte

$$\langle H_{\kappa,m} \varphi, \psi \rangle = \int_a^{\infty} \left[ -\varphi'' + \tilde{V}\varphi \right] \overline{\psi} dt. \quad (2.10)$$

Note que como  $\psi, \psi'$  são elementos de  $AC(a, \infty)$ , temos que  $\psi', \psi'' \in L_{\text{loc}}^1(a, \infty)$ , de forma que podemos aplicar integração por partes junto com a função  $\varphi \in C_0^{\infty}(a, \infty)$ , a qual anula

os termos de fronteira. Segue disso e de (2.10) que

$$\langle H_{\kappa,m}\varphi, \psi \rangle = \int_a^\infty \overline{\varphi(-\psi'' + \tilde{V}\psi)} dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, \infty),$$

e como  $-\psi'' + \tilde{V}\psi \in L^2(a, \infty)$ , vale que  $\psi \in \text{dom } H_{\kappa,m}^*$  pela definição de adjunto.

Agora considere  $\psi \in \text{dom } H_{\kappa,m}^*$  qualquer. Então, por definição,

$$\langle H_{\kappa,m}\varphi, \psi \rangle = \langle -\varphi'' + \tilde{V}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, H_{\kappa,m}^*\psi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, \infty).$$

Como  $\psi \in L^2(a, \infty)$ , segue imediatamente que  $\tilde{V}\psi \in L_{\text{loc}}^1(a, \infty)$ , de forma que para  $c \in (a, \infty)$  fixo, a função

$$W(x) := \int_c^x \left[ \int_c^s (\tilde{V}(t)\psi(t) - (H_{\kappa,m}^*\psi)(t)) dt \right] ds$$

e sua derivada são absolutamente contínuas no intervalo aberto  $(a, \infty)$ . Calculando  $W''(x)$ , temos imediatamente que  $W''(x) = \tilde{V}\psi - H_{\kappa,m}^*\psi$  q.t.p. em  $(a, \infty)$ . Integrando por partes, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \varphi'' \overline{\psi} dx &= \langle \varphi'', \psi \rangle \\ &= \langle \tilde{V}_{\kappa,m}\varphi - H_{\kappa,m}\varphi, \psi \rangle \\ &= \int_a^\infty \varphi(t) \overline{[-H_{\kappa,m}^*\psi(t) + \tilde{V}(t)\psi(t)]} dt \\ &= \int_a^\infty \varphi(t) \overline{W''(t)} dt \\ &= \int_a^\infty \varphi''(t) W(t) dt, \end{aligned}$$

e portanto a derivada segunda distribucional  $(\psi - W)'' = 0$  e isto implica que  $\psi(x) = W(x) + c_1x + c_2$  para algumas constantes  $c_1, c_2$ . Como  $W$  e  $W'$  são absolutamente contínuas, segue que  $\psi$  e  $\psi'$  também o são e como  $-\psi'' + \tilde{V}\psi = H_{\kappa,m}^*\psi \in L^2(a, \infty)$ , segue que  $\psi \in X$  e terminamos.  $\square$

Note que ainda não temos boas informações sobre o domínio do operador  $H_{\kappa,m}$ , pois o potencial  $\tilde{V}$  depende dos parâmetros  $\kappa$  e  $m$ . O próximo passo é tratar  $\tilde{V}$  como uma perturbação de  $V$ , o que nos permitirá dizer que o domínio de  $H_{\kappa,m}$  realmente não depende

de  $\kappa$  e  $m$  quando  $a > 0$ .

**Corolário 2.2.2.** *Para todos  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $m \in \mathbb{Z}$ , o domínio do operador autoadjunto  $H_{\kappa,m}$  é dado por*

$$\text{dom } H_{\kappa,m} = \{ \psi \in L^2(a, \infty) : \psi, \psi' \in \text{AC}(a, \infty), (-\psi'' + V\psi) \in L^2(a, \infty) \}.$$

*Em particular, este domínio não depende dos parâmetros  $\kappa$  e  $m$  quando  $a > 0$ .*

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.2.1, basta verificar que se  $\psi \in L^2(a, \infty)$  cumprir  $\psi, \psi' \in \text{AC}(a, \infty)$  então  $-\psi'' + \tilde{V}\psi \in L^2(a, \infty)$  se, e somente se,  $-\psi'' + V\psi \in L^2(a, \infty)$ . Com efeito, esta condição segue imediatamente de (2.2) e do fato de que se  $a > 0$  e  $\psi \in L^2(a, \infty)$ , então

$$\int_a^\infty \left| \left[ \frac{1}{r^2} (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] \psi(r) \right|^2 dr < \infty, \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

□

Cabe observar aqui que a dificuldade de usar esta técnica para tratar o caso  $a = 0$  segue imediatamente da impossibilidade de se ter (2.11) para todas as funções  $\psi \in \text{dom } H_{\kappa,m}$ . Esta impossibilidade está diretamente relacionada com o fato de que podem existir funções no domínio de  $H_{\kappa,m}$  tais que  $\psi'' \notin L^2(a, +\infty)$  e  $\tilde{V}\psi \notin L^2(a, \infty)$  e, mesmo assim, vale a condição  $-\psi'' + \tilde{V}\psi \in L^2(a, \infty)$ , a qual pode ocorrer devido a cancelamentos.

## 2.3 Multiplicidade dos autovalores

A relação entre as multiplicidades dos autovalores de  $H_\kappa$  e  $H_{\kappa,m}$  é muito simples. Basicamente, a dimensão do auto-espaço associado a um autovalor de  $H_\kappa$  é a soma das dimensões dos auto-espaços associados ao mesmo autovalor dos operadores  $H_{\kappa,m}$ , justamente devido à invariância destes na decomposição de  $L^2(\Omega_a)$ . Tornaremos tais conceitos precisos e demonstraremos que a multiplicidade do primeiro autovalor de  $H_\kappa$  varia entre 1 e 2, dependendo do parâmetro  $\kappa$  não ser ou ser semi-inteiro, respectivamente.

**Definição 2.3.1.** Definimos o conjunto  $M_\kappa^{(n)}$  como sendo o auto-espaço associado ao  $n$ -ésimo autovalor  $\lambda_\kappa^{(n)}$  do operador  $H_\kappa$ . De acordo com o Teorema 2.1.4, os elementos

$\psi \in M_\kappa^{(n)}$  se decompõem na forma

$$\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(r) e^{im\theta},$$

sendo  $\psi_m$  a autofunção do operador  $H_{\kappa, m}$  associada à  $\lambda_\kappa^{(n)}$ . Para  $m \in \mathbb{Z}$  fixado, denotaremos por  $M_{\kappa, m}^{(n)}$  o espaço vetorial formado pelos  $\psi_m$  possíveis na fórmula acima, isto é, o auto-espaço associado ao autovalor  $\lambda_\kappa^{(n)}$  do operador  $H_{\kappa, m}$ .

Note que nesta notação,  $M_{\kappa, m}^{(n)}$  pode não ser o auto-espaço associado ao  $n$ -ésimo autovalor do operador  $H_{\kappa, m}$ , pois pode ocorrer  $\lambda_\kappa^{(n)} \neq \lambda_{\kappa, m}^{(n)}$ , isto é, o  $n$ -ésimo autovalor de  $H_\kappa$  pode não ser o  $n$ -ésimo de  $H_{\kappa, m}$ . De fato, de acordo com o Teorema 2.1.4, vale a igualdade  $\left\{ \lambda_\kappa^{(n)} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \lambda_{\kappa, m}^{(n)} \right\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ , mas os índices superiores podem não coincidir.

**Teorema 2.3.2.** *Para todo  $\kappa \in \mathbb{R}$ , os autovalores de  $H_{\kappa, m}$  são todos simples. Mais ainda,*

$$\dim M_{\kappa, m}^{(n)} = 1, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

quando este está bem definido, isto é, quando  $\lambda_\kappa^{(n)}$  for um autovalor de  $H_{\kappa, m}$ .

*Demonstração.* Considere dois elementos  $\psi_1, \psi_2 \in M_{\kappa, m}^{(n)}$  quaisquer. Tem-se diretamente, lembrando a igualdade (2.1), que

$$H_{\kappa, m} \psi_i = \lambda_\kappa^{(n)} \psi_i \iff -\frac{d^2 \psi_i}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left( (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right) \psi_i + V(r) \psi_i = \lambda_\kappa^{(n)} \psi_i.$$

Multiplicando por  $\psi_j$  e subtraindo, obtemos

$$-\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} \psi_2 + \frac{d^2 \psi_2}{dr^2} \psi_1 = 0 \iff \frac{d}{dr} \left( \frac{d\psi_2}{dr} \psi_1 - \frac{d\psi_1}{dr} \psi_2 \right) = 0,$$

concluindo-se que vale a igualdade seguinte em  $(a, \infty)$ ,

$$\frac{d\psi_2}{dr} \psi_1 - \frac{d\psi_1}{dr} \psi_2 = K,$$

sendo  $K$  uma constante. Como  $\psi_i \in \text{dom } \mathcal{L}_{\kappa, m}$ , temos imediatamente do Teorema 2.1.3 que  $\psi_i, \frac{d\psi_i}{dr} \in L^2(a, \infty)$ , de forma que ambos tendem a zero para  $r \rightarrow \infty$ . Assim,  $K = 0$ . Mas como ambas  $\psi_1, \psi_2$  são soluções de uma equação diferencial de segunda ordem, o wronskiano ser nulo implica na dependência linear, de forma que  $\dim M_{\kappa, m}^{(n)} = 1$ .  $\square$

**Teorema 2.3.3.** *Para todo  $\kappa \in (-1/2, 1/2)$ , vale*

$$\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa, m}^{(1)} \iff m = 0.$$

*Em particular,  $\lambda_{\kappa, 0}^{(1)}$  é o primeiro autovalor de  $H_{\kappa, 0}$ . Ainda, o primeiro autovalor de  $H_\kappa$  é simples e pode ser associado a uma autofunção real  $\psi$  radial quando  $\kappa \in (-1/2, 1/2)$ .*

*Demonstração.* Considere  $\kappa \in (-1/2, 1/2)$  fixado e  $\lambda_\kappa^{(1)}$  o primeiro autovalor de  $H_\kappa$ . Sabemos que a autofunção  $\psi$  associada cumpre

$$\lambda_\kappa^{(1)} = \mathcal{L}_\kappa(\psi) = \inf_{\substack{\varphi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa \\ \varphi \neq 0}} \frac{\mathcal{L}_\kappa(\varphi)}{\|\varphi\|^2} \leq \mathcal{L}_\kappa(\xi), \quad \forall \xi \in \text{dom } \mathcal{L}_\kappa, \quad \|\xi\| = 1,$$

isto devido ao princípio do min-max. Lembrando que  $\mathcal{L}_{\kappa, m}$  denota a forma associada ao operador  $H_{\kappa, m}$  e  $\lambda_{\kappa, m}^{(1)}$  seu primeiro autovalor, sendo  $m \neq 0$  inteiro, vale  $m(m - 2\kappa) > 0$  e  $(m - \kappa)^2 > \kappa^2$ , de forma que, para todos  $\|\xi\| = 1$  e  $m \neq 0$ , vale

$$\mathcal{L}_{\kappa, m}(\xi) > \mathcal{L}_{\kappa, 0}(\xi). \quad (2.12)$$

Notamos aqui que pelo Teorema 2.1.3, o domínio da forma  $\mathcal{L}_{\kappa, m}$  não depende de  $m \in \mathbb{Z}$  e por isso a comparação acima faz sentido. Usando (2.4), e colocando o índice  $dr$  ou  $r dr$  para indicar as integrações, segue da mudança para coordenadas polares que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\kappa(\psi) &= \langle \psi, H_\kappa \psi \rangle_{dr} = \left\langle \psi, H_\kappa \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( r^{-\frac{1}{2}} \psi_m(r) \right) e^{im\theta} \right] \right\rangle_{dr} \\ &= \left\langle \psi, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_{\kappa, m} \left( r^{-\frac{1}{2}} \psi_m(r) \right) e^{im\theta} \right\rangle_{r dr}. \end{aligned}$$

Lembrando da demonstração do Teorema 2.1.4, especialmente da transformação unitária definida em (2.8), segue da igualdade acima a seguinte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\kappa(\psi) &= \left\langle \psi, \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{-\frac{1}{2}} (H_{\kappa, m} \psi_{\kappa, m}(r)) e^{im\theta} \right\rangle_{r dr} \\ &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{-\frac{1}{2}} \psi_m(r) e^{im\theta}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{-\frac{1}{2}} (H_{\kappa, m} \psi_{\kappa, m}(r)) e^{im\theta} \right\rangle_{r dr}. \end{aligned}$$

Note agora que o produto interno acima está definido em  $L^2(\Omega_a)$  em coordenadas polares.

Como  $e^{im\theta}$  é uma base ortonormal da componente angular, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\kappa(\psi) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\langle r^{-\frac{1}{2}}(\psi_m(r)), r^{-\frac{1}{2}}(H_{\kappa,m}\psi_{\kappa,m}(r)) \right\rangle_{rdr} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle \psi_m, H_{\kappa,m}\psi_m \rangle_{dr} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_{\kappa,m}(\psi_m).\end{aligned}$$

Sabendo que este valor é o menor possível, com  $\psi \in \text{dom } \mathcal{H}_\kappa$  (pois o ínfimo é atingido por um elemento do domínio, o qual é a “primeira” autofunção) e  $\|\psi\| = 1$ , a positividade das formas envolvidas e a desigualdade (2.12) implicam que só pode ser

$$\mathcal{L}_\kappa(\psi) = \mathcal{L}_{\kappa,0}(\psi_0) = \lambda_{\kappa,0}^{(1)}.$$

Isto demonstra que  $\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa,0}^{(1)}$  e que a autofunção associada pode ser escolhida de forma a não possuir componente angular. Como o operador  $H_{\kappa,0}$  é real, podemos escolher uma autofunção real, a qual, multiplicando por  $r^{-\frac{1}{2}}$ , é uma autofunção real de  $H_\kappa$ .  $\square$

**Corolário 2.3.4.** *O primeiro autovalor de  $H_\kappa$  é simples para todo  $\kappa \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ .*

*Demonstração.* Considere  $\kappa \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  qualquer. Usando o Teorema 1.4.9, existe um único  $\kappa_0 \in (-1/2, 1/2)$  com  $\sigma(H_\kappa) = \sigma(H_{\kappa_0})$ . Basta então aplicar o Teorema 2.3.3 ao operador  $H_{\kappa_0}$ .  $\square$

**Teorema 2.3.5.** *Para  $\kappa \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , o primeiro autovalor do operador  $H_\kappa$  é duplo, isto é,*

$$\dim M_\kappa^{(1)} = 2, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

*Demonstração.* Suponha primeiramente que  $\kappa = \frac{1}{2}$ . Segue diretamente da definição da forma sesquilinear que

$$\mathcal{L}_{\kappa,m}(\xi) > \mathcal{L}_{\kappa,0}(\xi) = \mathcal{L}_{\kappa,1}(\xi),$$

para todos  $\|\xi\| = 1$  e  $m \in \mathbb{Z}$  com  $m \neq 0$  e  $m \neq 1$ . Usando o mesmo argumento da demonstração do Teorema 2.3.3, podemos concluir que  $\lambda_{\kappa,m}^{(1)} > \lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa,0}^{(1)} = \lambda_{\kappa,1}^{(1)}$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$  com  $m \notin \{0, 1\}$ . Portanto, tomando as autofunções  $\psi_0$  e  $\psi_1$  de  $H_{\kappa,0}$  e  $H_{\kappa,1}$ , respectivamente, obtemos duas autofunções linearmente independentes

$$\Psi_1(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}}\psi_0(r) \quad \text{e} \quad \Psi_2(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}}\psi_1(r) e^{i\theta}.$$

Note que, se  $\psi$  for outra autofunção linearmente independente, então a componente  $\psi_m$  da decomposição (2.4) deve ser não nula para algum  $m \neq 0, 1$ , absurdo pois  $\lambda_\kappa < \lambda_{\kappa, m}$  para todo  $m \neq 0, 1$ . O caso para  $\kappa$  geral, semi-inteiro, se reduz a este via transformações de gauge e antiunitárias usando o Teorema 1.4.5 e o Corolário 1.5.4.  $\square$

Uma relação interessante, que acontece entre o parâmetro  $\kappa$  e as autofunções do operador  $H_\kappa$ , é que o parâmetro semi-inteiro ocorre se, e somente se, existe uma autofunção que possui uma linha de zeros no semi-eixo  $(a, \infty)$  real de  $\mathbb{R}^2$ . Como o estudo do conjunto nodal de autofunções de operadores como este é importante, vamos dedicar algumas linhas a isto.

**Definição 2.3.6.** Dada uma função contínua qualquer  $\psi$  em  $\Omega_a$ , definimos o *conjunto nodal* de  $\psi$  como sendo o conjunto fechado

$$\mathcal{N}(\psi) := \overline{\{z \in \Omega_a : \psi(z) = 0\}},$$

em que o fecho é tomado na topologia de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.3.7.** Dizemos que o conjunto nodal  $\mathcal{N}(\psi)$  *separa*  $\Omega_a$  quando  $\mathcal{N}(\psi)$  é a imagem de uma curva  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua e simples de tal forma que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $\gamma(0) \in \partial\Omega_a$ . Note que, neste caso, a diferença  $\Omega_a \setminus \mathcal{N}(\psi)$  é simplesmente conexa.

Cabe observar aqui que o conjunto nodal de uma autofunção será sempre constituído por linhas nodais [9], isto é, curvas suaves por partes onde a autofunção se anula. Ainda, o conceito de separação de um conjunto aberto  $\tilde{\Omega}$  qualquer, por um conjunto de linhas nodais  $\mathcal{N}(\psi)$  de uma autofunção  $\psi$ , aparece em [23] no contexto de operadores com condições de fronteira de Neumann e Dirichlet, lembrando que nosso operador não possui qualquer condição de fronteira e difere daquele considerado pelos autores pela presença de um  $V$  singular na fronteira de  $\Omega_a$ .

**Teorema 2.3.8.** *Considere  $a \geq 0$ . Então  $\kappa \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  se, e somente se, existe uma autofunção  $\psi$  de  $H_\kappa$  de tal forma que  $\mathcal{N}(\psi)$  separa  $\Omega_a$ .*

*Demonstração.* Note primeiramente que se  $\psi$  for uma autofunção do operador  $H_\kappa$ , com  $\kappa \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , então existe  $m \in \mathbb{Z}$  com  $\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}}\psi_m(r) e^{im\theta}$ . A existência de apenas um inteiro, no máximo, para esta decomposição segue do fato de que cada termo da soma (2.4) é uma autofunção do operador  $H_\kappa$  associada ao mesmo autovalor e pelo Teorema 2.3.3, segue que esta soma só possui um termo.

Suponha que  $\kappa \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Então podemos tomar  $\psi_0$  autofunção de  $H_{\kappa,0} = H_{\kappa,1}$  de tal forma que

$$\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}}\psi_0(r) - r^{-\frac{1}{2}}\psi_0(r) e^{i\theta}$$

é uma autofunção de  $H_\kappa$ . Note que o conjunto nodal  $\mathcal{N}(\psi) = [a, \infty) \times \{0\}$  separa  $\Omega_a$ .

Suponha agora, por absurdo, que  $\psi$  seja uma autofunção cujo conjunto nodal separa  $\Omega_a$  e que  $\kappa \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Pelo que foi observado no começo, só pode ser  $\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}}\psi_m(r) e^{im\theta}$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ . Como o conjunto nodal separa  $\Omega_a$ , fixado  $r > a$ , a circunferência de raio  $r$  intercepta o conjunto nodal em algum ponto, pois  $\mathcal{N}(\psi)$  possui uma curva simples e contínua saindo da fronteira e indo para o infinito. Sendo  $(r, \theta)$  este ponto, temos imediatamente o seguinte

$$\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}}\psi_m(r) e^{im\theta} = 0,$$

pois  $(r, \theta) \in \mathcal{N}(\psi)$ . Como  $r^{-\frac{1}{2}}$  e  $e^{im\theta}$  são não nulos, vale  $\psi_m(r) = 0$ . Mas  $r > a$  foi tomado qualquer, de forma que  $\psi_m(r) = 0$  para todo  $r > a$ . Logo  $\psi = 0$  e terminamos.  $\square$

## 2.4 Famílias Holomorfas do Tipo (B)

Queremos aqui estudar o comportamento do primeiro autovalor  $\lambda_\kappa^{(1)}$  de  $H_\kappa$  para pequenas variações de  $\kappa$ . Verificaremos o efeito AB através da energia fundamental do sistema, i.e., do primeiro autovalor. Assim, o efeito AB ocorre neste caso sem contato com o solenóide, pois veremos neste capítulo que o primeiro autovalor  $\lambda_\kappa^{(1)}$  cresce de um mínimo em  $\kappa = 0$  a um máximo  $\kappa = 1/2$ , voltando a decrescer até o mínimo em  $\kappa = 1$ , e completando assim um período, ao menos quando  $a > 0$ . Lembremos que as transformações de gauge vistas anteriormente implicam que o primeiro autovalor é uma função periódica de  $\kappa$ , com período 1. Ainda, as transformações antiunitárias nos mostram que esta função também é simétrica com relação à origem.

Para alcançarmos este objetivo, consideraremos a função  $\kappa \mapsto \lambda_\kappa^{(1)}$  que a cada  $\kappa$  associa o primeiro autovalor de  $H_\kappa$  e aplicar a teoria de perturbações analíticas, a qual iremos rever brevemente. Lembrando que trabalharemos aqui com famílias holomorfas, o que nos faz considerar o parâmetro  $\kappa$  não mais apenas real, mas também complexo. Uma discussão sobre famílias holomorfas e a teoria de perturbação analítica pode ser encontrada em [26].

**Definição 2.4.1.** Uma forma sesquilinear  $q$  definida num subconjunto  $\text{dom } q$  de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é dita *setorial*, se a *imagem numérica*  $q(u)$ , com  $|u| = 1$ , é um subconjunto

de um setor do plano complexo da forma

$$\zeta \in \mathbb{C} : |\arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

sendo  $\gamma$  um número real fixado. Esta última desigualdade é equivalente às seguintes

$$\operatorname{Re} q \geq \gamma \quad \text{e} \quad |\operatorname{Im} q(u)| \leq (\tan \theta) (\operatorname{Re} q - \gamma)(u), \quad \forall u \in \operatorname{dom} q. \quad (2.13)$$

**Definição 2.4.2.** Diremos que uma família de formas sesquilineares  $q(\xi) = q_\xi$  definida em  $\operatorname{dom} q_\xi \subset \mathcal{H}$ , sendo  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e  $\xi$  um parâmetro num subconjunto aberto  $D \subset \mathbb{C}$ , é uma *família holomorfa do tipo (a)* se

- Cada  $q_\xi$  é setorial e fechada com domínio  $\operatorname{dom} q_\xi$  independente do parâmetro  $\xi$ .
- Para cada  $u \in \operatorname{dom} q_\xi$ , a aplicação  $\xi \mapsto q_\xi(u)$  é holomorfa em  $\xi \in D$ .

**Definição 2.4.3.** Uma família de operadores  $\{T_\xi\}_{\xi \in I}$  em  $\mathcal{H}$  é dita ser uma *família autoadjunta holomorfa do tipo (B)* no intervalo aberto  $I$  se  $T_\xi$  for o operador autoadjunto associado à  $q_\xi$ , sendo  $\{q_\xi\}_{\xi \in D}$  uma família de formas holomorfas do tipo (a) com  $\xi \in D$  e  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ , simétrico com relação à  $\mathbb{R}$  e contendo  $I$ .

Note que estamos usando letras minúsculas (a) para famílias holomorfas de formas e letras maiúsculas (B) para famílias holomorfas de operadores de forma proposital, apenas para concordar com a notação presente em [26].

**Teorema 2.4.4.** Para  $a > 0$ , a família de operadores  $(H_\kappa)_{\kappa \in (-1/2, 1/2)}$  é uma *família autoadjunta holomorfa do tipo (B)*.

*Demonstração.* Já sabemos que os operadores  $H_\kappa$  são autoadjuntos. Pelo Teorema 1.3.9, vamos considerar a família de formas sesquilineares associadas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\kappa(u, v) &= \int_{\Omega_a} [(i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)u \cdot (-i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)\bar{v} + V u \bar{v}] \, dx dy \\ \operatorname{dom} \mathcal{L}_\kappa &= \mathcal{H}_0^1(\Omega_a) \cap \operatorname{dom} V^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

estendendo o parâmetro  $\kappa$  ao retângulo dado por

$$D := \{z \in \mathbb{C} : -1/2 < \operatorname{Re}(z) < 1/2 \quad \text{e} \quad -1 < \operatorname{Im}(z) < 1\}.$$

Note que o operador  $H_\kappa$ , com  $\kappa \in D$ , é autoadjunto se, e somente se,  $\kappa \in \mathbb{R}$  e que a forma quadrática associada  $\mathcal{L}_\kappa$  assim definida possui domínio independente do parâmetro  $\kappa \in D$  e ainda cumpre, lembrando que  $\mathbf{A}_\kappa = \kappa \mathbf{A}_1$  mesmo para  $\kappa \in D$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\kappa(u) &= \int_{\Omega_a} [(i\nabla u + \mathbf{A}_\kappa u) \cdot (-i\overline{\nabla u} + \mathbf{A}_\kappa \bar{u}) + V|u|^2] \, dx dy \\ &= \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 + i\mathbf{A}_\kappa \cdot (\nabla u) \bar{u} - i\mathbf{A}_\kappa \cdot (\overline{\nabla u}) u + \mathbf{A}_\kappa^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy \\ &= \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 + \kappa \left( i\mathbf{A}_1 \cdot (\nabla u) \bar{u} + \overline{i\mathbf{A}_1 \cdot (\nabla u) \bar{u}} \right) + \kappa^2 \mathbf{A}_1^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy,\end{aligned}$$

e assim

$$\mathcal{L}_\kappa(u) = \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 + 2\kappa \operatorname{Re}(i\mathbf{A}_1 \cdot (\nabla u) \bar{u}) + \kappa^2 \mathbf{A}_1^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy. \quad (2.14)$$

Esta expressão já nos mostra que a aplicação  $D \ni \kappa \mapsto \mathcal{L}_\kappa(u) \in \mathbb{C}$  é holomorfa para todo  $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_a) \cap \operatorname{dom} V^{\frac{1}{2}}$ . Resta mostrar que estas formas sesquilineares são setoriais, isto é, satisfazem desigualdades do tipo (2.13). Da expressão (2.14) acima segue que

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa(u) = \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 + 2(\operatorname{Re} \kappa) \operatorname{Re}(i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u \bar{u}) + (\operatorname{Re} \kappa^2) \mathbf{A}_1^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy.$$

Como  $D$  é limitado, podemos obter uma constante  $\beta > 0$  de tal forma que

$$|\operatorname{Re} \kappa|, |\operatorname{Re} \kappa^2|, |\operatorname{Im} \kappa|, |\operatorname{Im} \kappa^2| \leq \beta, \quad \forall \kappa \in D.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa(u) &\geq \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 - 2\beta \operatorname{Re}(i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u \bar{u}) - \beta \mathbf{A}_1^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy \\ &\geq \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 - 2\beta |i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u \bar{u}| - \beta \mathbf{A}_1^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy \\ &\geq \int_{\Omega_a} [|\nabla u|^2 - 2\beta |\mathbf{A}_1| |\nabla u| |u| - \beta \mathbf{A}_1^2 |u|^2 + V|u|^2] \, dx dy.\end{aligned}$$

Usamos acima a desigualdade de Cauchy, lembrando que  $\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u$  é um produto escalar.

Agora, como  $|\mathbf{A}_1| = 1/|z|$  e  $\mathbf{A}_1^2 = 1/|z|^2$ , segue a desigualdade

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa(u) \geq \int_{\Omega_a} \left[ |\nabla u|^2 - \frac{2\beta}{|z|} |\nabla u| |u| - \beta \frac{|u|^2}{|z|^2} + V |u|^2 \right] dx dy.$$

Ainda, como estamos em  $\Omega_a$  com  $|z| > a > 0$ , segue a desigualdade, lembrando que  $V \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa(u) &\geq \int_{\Omega_a} \left[ |\nabla u|^2 - \frac{\beta}{a} (\varepsilon |\nabla u|^2 + \varepsilon^{-1} |u|^2) - \beta \frac{|u|^2}{a^2} \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_a} \left[ \left(1 - \varepsilon \frac{\beta}{a}\right) |\nabla u|^2 - \left(\frac{\beta}{a\varepsilon} + \frac{\beta}{a^2}\right) |u|^2 \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_a} [(1 - \delta_\varepsilon) |\nabla u|^2 - M_\varepsilon |u|^2] dx dy, \end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo  $\varepsilon > 0$ , com  $\delta_\varepsilon = \varepsilon\beta a^{-1}$  e  $M_\varepsilon = \beta(a\varepsilon)^{-1} + \beta a^{-2}$ , ambos positivos. Tomando  $\varepsilon < a/\beta$  teremos então que

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa \geq -M_\varepsilon. \tag{2.16}$$

Vamos agora estudar a parte imaginária da forma quadrática.

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \mathcal{L}_\kappa(u)| &= \left| \int_{\Omega_a} \left[ 2\operatorname{Im} \kappa \operatorname{Re} (i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u \bar{u}) + \operatorname{Im} \kappa^2 \frac{|u|^2}{|z|^2} \right] dx dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega_a} \left[ 2|\operatorname{Im} \kappa| \frac{|\nabla u| |u|}{|z|} + |\operatorname{Im} \kappa^2| \frac{|u|^2}{|z|^2} \right] dx dy \\ &\leq \int_{\Omega_a} \left[ \frac{\beta}{|z|} (\varepsilon |\nabla u|^2 + \varepsilon^{-1} |u|^2) + \frac{\beta}{|z|^2} |u|^2 \right] dx dy \\ &\leq \int_{\Omega_a} \left[ \left(\frac{\beta}{a}\varepsilon\right) |\nabla u|^2 + \left(\frac{\beta}{a^2} + \frac{\beta}{a\varepsilon}\right) |u|^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

seguinto então imediatamente que

$$|\operatorname{Im} \mathcal{L}_\kappa(u)| \leq \int_{\Omega_a} [\delta_\varepsilon |\nabla u|^2 + M_\varepsilon |u|^2] dx dy. \tag{2.17}$$

As desigualdades (2.16) e (2.17) juntas implicam que a forma é setorial. Com efeito, já temos  $\operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa \geq \gamma$  tomando  $\gamma = -M_\varepsilon - 1$ . Ainda, para mostrar a segunda desigualdade

em (2.13), basta usar (2.15) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \tan \theta (\operatorname{Re} \mathcal{L}_\kappa - \gamma) u &\geq \int_{\Omega_a} [\tan \theta ((1 - \delta_\varepsilon) |\nabla u|^2 - M_\varepsilon |u|^2 + M_\varepsilon |u|^2 + |u|^2)] \, dx dy \\ &= \int_{\Omega_a} [\tan \theta ((1 - \delta_\varepsilon) |\nabla u|^2 + |u|^2)] \, dx dy \\ &\geq \int_{\Omega_a} [\delta_\varepsilon |\nabla u|^2 + M_\varepsilon |u|^2] \, dx dy \geq |\operatorname{Im} \mathcal{L}_\kappa u|, \end{aligned}$$

em que tomamos  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  de maneira que

$$\tan \theta \geq \max \left\{ \frac{\delta_\varepsilon}{1 - \delta_\varepsilon}, M_\varepsilon \right\}.$$

□

**Corolário 2.4.5.** *Fixados  $m \in \mathbb{Z}$  e  $a > 0$ , a família  $\{H_{\kappa,m}\}_{\kappa \in \mathbb{R}}$  é uma família holomorfa autoadjunta do tipo (B).*

*Demonstração.* Basta observar que a forma sesquilinear  $\mathcal{L}_{\kappa,m}$  associada nada mais é do que a restrição da forma sesquilinear  $\mathcal{L}_\kappa$  ao subespaço gerado por  $e^{im\theta}$ . □

Agora que sabemos que a família de operadores  $\{H_\kappa\}_{\kappa \in (0,1/2)}$  é uma família holomorfa autoadjunta do tipo (B), podemos aplicar os resultados conhecidos da teoria de perturbação analítica. Mais precisamente, precisamos do seguinte teorema (Ver Remark 4.22 de [26], Seção 4, Capítulo 7), o qual desempenha um papel fundamental na análise do comportamento do primeiro autovalor na próxima seção.

**Teorema 2.4.6.** *Considere  $T_\xi$  uma família autoadjunta holomorfa do tipo (B) num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , definida para  $\xi$  num intervalo aberto  $I_0$  da reta real, de tal forma que  $T_\xi$  possui resolvente compacto para todo  $\xi \in I_0$ . Então existem duas sequências de aplicações holomorfas  $\mu_n : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_n : I_0 \rightarrow \mathcal{H}$  em que  $\{\mu_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é o conjunto dos autovalores de  $T_\xi$  e  $\{u_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma base ortonormal de autovetores.*

## 2.5 Variação do primeiro autovalor

Com todas as ferramentas desenvolvidas até agora, estamos aptos a analisar o comportamento do primeiro autovalor de  $H_\kappa$ . Note que faremos esta análise supondo  $a > 0$ . Isto

se deve ao fato de que, para  $a = 0$ , não temos controle suficiente sobre o domínio dos operadores  $H_{\kappa,m}$ , ainda mais sobre o operador  $H_\kappa$ , o que nos impede (não estamos justificados) de fazer certos cálculos envolvendo o quociente de Newton da aplicação  $\kappa \mapsto \lambda_\kappa^{(1)}$ . Escolhendo, entretanto, um  $V$  particular, poderemos fazer uma análise completa deste modelo mesmo com  $a = 0$  (ver Seção 3.1), resolvendo o problema de autovalor explicitamente.

**Lema 2.5.1.** *Suponha  $a > 0$  e que existam aplicações suaves  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u : I \rightarrow L^2(\Omega_a)$  em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  com  $u(\kappa) \in \text{dom } H_{\kappa'}$  para todos  $\kappa, \kappa' \in I$  (esta relação entre os domínios de  $H_\kappa$  e  $H_{\kappa'}$  é importante e será demonstrada mais adiante, por isso foi colocada aqui como hipótese) e*

$$H_\kappa u(\kappa) = \mu(\kappa) u(\kappa). \quad (2.18)$$

Então, denotando  $u_\kappa = u(\kappa)$  e  $\mu_\kappa = \mu(\kappa)$  para não sobrecarregar a notação, vale a seguinte igualdade

$$\|u_\kappa\|^2 \frac{d\mu}{d\kappa}(\kappa) = \langle 2i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u_\kappa, u_\kappa \rangle + 2\kappa \left\| \frac{u_\kappa}{|z|} \right\|^2,$$

para todo  $\kappa \in I$ .

*Demonstração.* Vamos calcular diretamente o limite  $\frac{d\mu}{d\kappa}(\kappa)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\kappa+h} - \mu_\kappa}{h} \langle u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle &= \frac{\mu_{\kappa+h} \langle u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle - \mu_\kappa \langle u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle}{h} \\ &= \frac{\langle \mu_{\kappa+h} u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle - \langle u_{\kappa+h}, \mu_\kappa u_\kappa \rangle}{h} \\ &= \frac{\langle H_{\kappa+h} u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle - \langle u_{\kappa+h}, H_\kappa u_\kappa \rangle}{h}. \end{aligned}$$

Usando que o operador  $H_\kappa$  é autoadjunto e que  $u_{\kappa+h} \in \text{dom } H_\kappa$  por hipótese, segue

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\kappa+h} - \mu_\kappa}{h} \langle u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle &= \frac{\langle H_{\kappa+h} u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle - \langle H_\kappa u_{\kappa+h}, u_\kappa \rangle}{h} \\ &= \left\langle \frac{(H_{\kappa+h} - H_\kappa) u_{\kappa+h}}{h}, u_\kappa \right\rangle. \end{aligned}$$

Como  $a > 0$ , o potencial magnético é limitado e, portanto, podemos calcular diretamente

a diferença entre os operadores  $H_{\kappa+h} - H_{\kappa} = 2ih\mathbf{A}_1 \cdot \nabla + \frac{2\kappa h + h^2}{|z|^2}$ , de onde segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\kappa+h} - \mu_{\kappa}}{h} \langle u_{\kappa+h}, u_{\kappa} \rangle &= \left\langle \frac{2ih\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u_{\kappa+h}}{h} + \frac{2\kappa h + h^2}{h|z|^2} u_{\kappa+h}, u_{\kappa} \right\rangle \\ &= \left\langle 2i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u_{\kappa+h} + \frac{2\kappa u_{\kappa+h}}{|z|^2} + \frac{h}{|z|^2} u_{\kappa+h}, u_{\kappa} \right\rangle. \end{aligned}$$

Fazendo  $h \rightarrow 0$ , pela diferenciabilidade das funções envolvidas, temos o procurado

$$\mu'_{\kappa} \|u_{\kappa}\|^2 = \langle 2i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u_{\kappa}, u_{\kappa} \rangle + 2\kappa \left\| \frac{u_{\kappa}}{|z|} \right\|^2,$$

lembrando que  $\frac{u_{\kappa}}{|z|} \in L^2(\Omega_a)$ , pois  $u_{\kappa} \in \text{dom } \mathcal{L}_{\kappa}$ .  $\square$

**Lema 2.5.2.** *Considerando as hipóteses do Lema 2.5.1 com  $I \subset (0, 1/2)$ , suponha ainda que, dado  $\kappa_0 \in I$ , existe  $\varepsilon > 0$  de modo que escrevendo  $I_0 = (\kappa_0 - \varepsilon, \kappa_0 + \varepsilon) \subset I$  temos*

$$\mu(\kappa) = \lambda_{\kappa}^{(1)}, \quad \forall \kappa \in I_0,$$

sendo  $\mu$  dada por (2.18). Então  $\lambda_{\kappa}^{(1)}$  é uma função crescente em  $\kappa$  no intervalo  $I_0$ .

*Demonstração.* Com efeito, pelo Lema 2.5.1, para  $\kappa \in I_0$ , temos que

$$\frac{d\lambda_{\kappa}^{(1)}}{d\kappa} \|u_{\kappa}\|^2 = \langle 2i\mathbf{A}_1 \cdot \nabla u_{\kappa}, u_{\kappa} \rangle + 2\kappa \left\| \frac{u_{\kappa}}{|z|} \right\|^2.$$

Usando o Teorema 2.3.3, podemos escolher  $u_{\kappa}$  autofunção real normalisada associada ao primeiro autovalor  $\lambda_{\kappa}^{(1)}$ , de forma que a primeira parcela do lado direito da soma acima deve ser nula, pois o lado esquerdo da igualdade é real. Portanto,

$$\frac{d\lambda_{\kappa}^{(1)}}{d\kappa} = 2\kappa \left\| \frac{u_{\kappa}}{|z|} \right\|^2 > 0, \quad \forall \kappa \in I_0,$$

e segue que o autovalor depende de  $\kappa$  de forma crescente em  $I_0$ .  $\square$

**Teorema 2.5.3.** *Considerando  $a > 0$ , a função  $(0, 1/2) \ni \kappa \mapsto \lambda_{\kappa}^{(1)} \in \mathbb{R}$  é crescente.*

*Demonstração.* Combinando o Teorema 2.4.4 com o Teorema 2.4.6, existem aplicações suaves  $\mu_n$  e  $u_n$ , ambas definidas em  $(0, 1/2)$ , em que  $\{\mu_n(\kappa)\}_{n \in \mathbb{N}}$  representam todos os

autovalores de  $H_\kappa$  e  $\{u_n(\kappa)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma base ortonormal de autovetores. Estamos considerando  $u_n(\kappa)$  associado à  $\mu_n(\kappa)$ , de forma que pode ocorrer  $\mu_n(\kappa) = \mu_m(\kappa)$ , para certos  $m, n \in \mathbb{N}$ , quando  $u_n(\kappa)$  e  $u_m(\kappa)$  são autovetores linearmente independentes associados ao mesmo autovalor. Note que isto ocorre quando as curvas  $\mu_n$  e  $\mu_m$  se encontram em um ponto  $\kappa$  e, pelos Corolário 2.3.4 e Teorema 2.3.5, isto ocorre exatamente quando  $\kappa \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Como as aplicações  $\mu_n$  e  $u_n$  estão restritas ao intervalo aberto  $(0, 1/2)$ , segue disto que  $\mu_n(\kappa) \neq \mu_m(\kappa)$  para todos  $m, n \in \mathbb{N}$  distintos e todo  $\kappa \in (0, 1/2)$ .

Fixe um  $\kappa_0 \in (0, 1/2)$  e escolha um índice  $n_0$  com  $\mu_{n_0}(\kappa_0) = \lambda_{\kappa_0}^{(1)}$ . Afirmamos que  $\mu_{n_0}(\kappa) = \lambda_\kappa^{(1)}$  para todo  $\kappa \in (0, 1/2)$ . Suponha por absurdo que exista  $\kappa_1 \in (0, 1/2)$  com  $\mu_{n_0}(\kappa_1) > \lambda_{\kappa_1}^{(1)}$  (a desigualdade ocorre por que  $\lambda_{\kappa_1}^{(1)}$  é o primeiro autovalor). Podemos obter então um  $n_1 \neq n_0$  de modo que valham as seguintes desigualdades

$$\mu_{n_0}(\kappa_0) = \lambda_{\kappa_0}^{(1)} < \mu_{n_1}(\kappa_0) \quad \text{e} \quad \mu_{n_1}(\kappa_1) = \lambda_{\kappa_1}^{(1)} < \mu_{n_0}(\kappa_1).$$

Como as aplicações são todas suaves, existe um  $\kappa_2$  entre  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$  e, portanto,  $\kappa_2 \in (0, 1/2)$ , de tal forma que  $\mu_{n_0}(\kappa_2) = \mu_{n_1}(\kappa_2)$ , absurdo.

Para terminar a demonstração usando o Lema 2.5.2, resta apenas mostrar que para todos  $\kappa, \kappa' \in (0, 1/2)$  vale  $u_{n_0}(\kappa) \in \text{dom } H_{\kappa'}$ . Com efeito, fixe  $\kappa, \kappa' \in (0, 1/2)$  quaisquer e, para facilitar a notação, denote por  $\psi := u_{n_0}(\kappa)$ . Como  $\psi$  é uma autofunção associada ao primeiro autovalor, só pode ser, usando o Teorema 2.3.3, da forma

$$\psi(r, \theta) = \alpha r^{-\frac{1}{2}} \psi_0(r),$$

sendo  $\alpha$  um número complexo fixo e  $\psi_0$  uma autofunção do operador  $H_{\kappa,0}$ . Pelo Corolário 2.2.2, temos  $\psi_0 \in \text{dom } H_{\kappa',0}$  e daí segue que  $\psi \in \text{dom } H_{\kappa'}$  pelo Teorema 2.1.5 e completamos a demonstração.  $\square$

**Teorema 2.5.4.** *Para  $a > 0$ , a função  $\kappa \mapsto \lambda_\kappa^{(1)}$ , que a cada  $\kappa \in \mathbb{R}$  associa o primeiro autovalor do operador  $H_\kappa$ , é suave por partes, estritamente crescente no intervalo  $(0, 1/2)$  e  $\lambda_{\kappa_1}^{(1)} \leq \lambda_\kappa^{(1)} \leq \lambda_{\kappa_2}^{(1)}$  para todos  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_1 \in \mathbb{Z}$  e  $\kappa_2 \in \mathbb{Z} + 1/2$ .*

*Demonstração.* As duas primeiras afirmações são consequências direta do teorema anterior já demonstrado. Para obter as desigualdades, basta observar que elas valem trivialmente quando  $\kappa \in [0, 1/2]$  e  $\kappa_1 = 0$  e  $\kappa_2 = 1/2$ , pelo fato de  $\lambda_\kappa^{(1)}$  ser contínua em  $\kappa \in \mathbb{R}$  e estritamente crescente no intervalo  $(0, 1/2)$ , e usar as transformações de gauge e antiunitárias que preservam o espectro.  $\square$

Usando os teoremas acima, temos o seguinte comportamento para a aplicação  $\kappa \mapsto \lambda_\kappa^{(1)}$ :

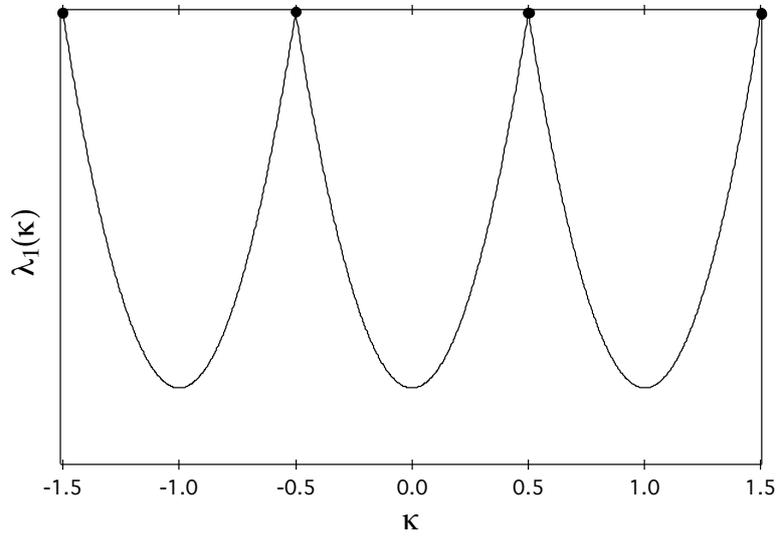


Figura 2.1: Gráfico representativo do primeiro autovalor em função da circuitação. Note a periodicidade dada pelas transformações de gauge, a simetria dada pelas transformações antiunitárias, os máximos em semi-inteiros (círculos cheios), os mínimos em inteiros e a suavidade nos intervalos da forma  $(m - 1/2, m + 1/2)$  com  $m \in \mathbb{Z}$ .

# Capítulo 3

## Alguns casos explícitos

Como nada se sabia a respeito dos operadores  $H_\kappa$ , optamos primeiro, no desenvolver deste trabalho, por resolver alguns casos particulares, afrouxando as hipóteses até que pudéssemos encontrar soluções explícitas para o problema de autovalor. Estudaremos neste capítulo dois casos de efeito Aharonov-Bohm sem contato com a fronteira do solenóide. O primeiro deles, o qual representa um solenóide com raio nulo no plano, é uma complementação dos resultados apresentados no Capítulo 2, visto que naquele devemos pedir, em alguns teoremas, a hipótese de raio positivo, embora esta seja mais realista. O segundo caso aqui apresentado corresponde a um solenóide de raio nulo numa região cilíndrica centrada no eixo  $z$ , isto é, o mesmo eixo do solenóide. Usando a simetria, este modelo está associado, no plano, ao modelo do disco furado, o qual foi o primeiro estudado e nos deu uma boa intuição sobre o comportamento do primeiro autovalor do operador  $H_\kappa$ . Este também é um exemplo de como, neste caso específico, podemos aplicar a teoria de confinamento quântico para se remover alguma condição de fronteira, mesmo que estas estejam combinadas com outras, como ocorre neste caso com a condição de Dirichlet (ver Seção 3.2).

### 3.1 O plano furado

Para que não se misturem as notações usadas nos capítulos anteriores, vamos considerar os operadores aqui tratados usando  $S_\kappa$ , os quais definiremos logo a seguir, e o mesmo  $\lambda_\kappa^{(n)}$  para o  $n$ -ésimo autovalor deste. Ainda, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  considerado será o aberto  $\Omega_{a=0}$ , que iremos denotar simplesmente por  $\Omega_0$  como feito anteriormente no Capítulo 1, o qual representa a região exterior (no plano) a um solenóide infinito com raio nulo, centrado no eixo  $z$ .

**Definição 3.1.1.** Vamos considerar aqui o seguinte operador energia inicial

$$\dot{S}_\kappa := (i\nabla + \mathbf{A}_\kappa)^2 + \frac{1}{|z|^2} + |z|^2,$$

com domínio  $\text{dom } \dot{S}_\kappa = C_0^\infty(\Omega_0)$ .

Sabemos que  $\dot{S}_\kappa$  é essencialmente autoadjunto e possui espectro discreto. Mais precisamente, valem todos os teoremas já vistos, exceto possivelmente aqueles que se tem  $a > 0$  nas hipóteses. Vamos denotar por  $S_\kappa$  sua extensão autoadjunta e  $\mathfrak{s}_\kappa$  a forma sesquilinear fechada associada, a qual possui domínio  $\text{dom } \mathfrak{s}_\kappa = \mathcal{H}_0^1(\Omega_0) \cap \text{dom } V^{\frac{1}{2}}$  de acordo com o Teorema 1.3.9.

Vamos decompor o operador  $S_\kappa$ , de acordo com o Teorema 2.1.4, nas extensões autoadjuntas dos operadores iniciais

$$\dot{S}_{\kappa,m} := -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{r^2} + r^2, \quad \text{dom } \dot{S}_{\kappa,m} := C_0^\infty(0, \infty).$$

Fixado  $m \in \mathbb{Z}$ , queremos achar uma autofunção  $\psi$  associada a um autovalor  $\lambda$ , o que nos leva a considerar a seguinte equação de autovalores generalizada

$$S_{m,\kappa}\psi = \lambda\psi \iff \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 + \frac{3}{4} \right] \psi - r^2\psi + \lambda\psi = 0. \quad (3.1)$$

O que faremos a seguir é manipular esta equação até que cheguemos a uma outra cuja solução possa ser encontrada na literatura.

**Teorema 3.1.2.** *Se  $\varphi(r)$  é uma solução  $C^2$  do problema*

$$w''(r) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\lambda/4}{r} + \frac{\frac{1}{4} - \left[ \frac{1}{4} + \frac{(m-\kappa)^2}{4} \right]}{r^2} \right) w(r) = 0, \quad (3.2)$$

então  $\psi(r) = \frac{\varphi(r^2)}{\sqrt{r}}$  é uma solução da equação (3.1).

*Demonstração.* Supondo a igualdade  $\psi(r) = \frac{\varphi(r^2)}{\sqrt{r}}$ , lembrando que  $r > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\varphi(r^2)}{\sqrt{r}} \right) &= \frac{2r\sqrt{r}\varphi'(r^2) - \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\varphi(r^2)}{r} \\ &= 2\sqrt{r}\varphi'(r^2) - \frac{1}{2} \frac{\varphi(r^2)}{r^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

e um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{\varphi(r^2)}{\sqrt{r}} \right) &= 2\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\varphi'(r^2) + 2\sqrt{r}2r\varphi''(r^2) - \frac{1}{2} \frac{2r\varphi'(r^2)r^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}r^{\frac{1}{2}}\varphi(r^2)}{r^3} \\ &= r^{-\frac{1}{2}}\varphi'(r^2) + 4r^{\frac{3}{2}}\varphi''(r^2) - r^{-\frac{1}{2}}\varphi'(r^2) + \frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}\varphi(r^2) \\ &= 4r^{\frac{3}{2}}\varphi''(r^2) + \frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}\varphi(r^2). \end{aligned}$$

Substituindo isso tudo em (3.1), temos as seguintes igualdades equivalentes,

$$\begin{aligned} 4r^{\frac{3}{2}}\varphi''(r^2) + \frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}\varphi(r^2) - \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 + \frac{3}{4} \right] \frac{\varphi(r^2)}{\sqrt{r}} - r^{\frac{3}{2}}\varphi(r^2) + \lambda r^{-\frac{1}{2}}\varphi(r^2) &= 0 \\ 4r^2\varphi''(r^2) + \frac{3}{4}r^{-2}\varphi(r^2) - \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 + \frac{3}{4} \right] \varphi(r^2) - r^2\varphi(r^2) + \lambda\varphi(r^2) &= 0 \\ \varphi''(r^2) - \frac{1}{4r^4} (m - \kappa)^2 \varphi(r^2) - \frac{1}{4}\varphi(r^2) + \frac{\lambda}{4r^2}\varphi(r^2) &= 0 \\ \varphi''(r^2) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\lambda/4}{r^2} + \frac{\frac{1}{4} - \left[ \frac{1}{4} + \frac{(m-\kappa)^2}{4} \right]}{r^4} \right) \varphi(r^2) &= 0, \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado usando a hipótese de que  $\varphi$  é solução de (3.2), observando a variável muda  $r^2$ .  $\square$

Portanto, para se resolver o problema de autovalor para o operador  $S_{\kappa,m}$ , podemos procurar soluções  $\varphi$  para o problema (3.2) e investigar quando as funções  $\psi$ , dadas em função de  $\varphi$  pelo Teorema 3.1.2, estão no domínio do operador autoadjunto  $S_{\kappa,m}$  (lembrando a observação após a Definição 3.1.1). Ou, no caso de investigarmos o primeiro autovalor, basta olhar para o domínio da forma sesquilinear associada, a qual temos explicitamente pelo ao Teorema 1.3.9.

É conhecido na literatura (ver [21, 38] por exemplo) a chamada equação de Whittaker

$$w'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{E}{r} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{r^2} \right) = 0,$$

a qual possui as seguintes soluções quando  $2\mu \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  com  $\mu > 0$ ,

$$\varphi_{E,\pm\mu}(r) = r^{\pm\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{2}} \Phi \left( \pm\mu - E + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; r \right),$$

sendo  $\Phi$  a seguinte função hipergeométrica

$$\Phi(\gamma, \delta; r) = 1 + \frac{\gamma}{\delta} \frac{r}{1!} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\delta(\delta+1)} \frac{r^2}{2!} + \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{\delta(\delta+1)(\delta+2)} \frac{r^3}{3!} + \dots.$$

Segue-se disso que as funções

$$\psi_+(r) := \frac{\varphi_{E,\mu}(r^2)}{\sqrt{r}}, \quad \psi_-(r) := \frac{\varphi_{E,-\mu}(r^2)}{\sqrt{r}},$$

com  $\mu = \frac{\sqrt{1+(m-\kappa)^2}}{2}$  e  $E = \lambda/4$  são soluções do problema (3.1), quando  $2\mu \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Teorema 3.1.3.** *Considerando  $\sqrt{1+(m-\kappa)^2} = 2\mu \notin \mathbb{Z}$ , o problema de autovalor (3.1) para o operador  $S_{\kappa,m}$  possui a seguinte solução exata*

$$\psi_+(r) = \frac{\varphi_{E,\mu}(r^2)}{\sqrt{r}}, \quad \lambda = 4E = 2\sqrt{1+(m-\kappa)^2} + 2 + 4n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

*Demonstração.* Sabemos da existência da seguinte aproximação assintótica, para  $r \rightarrow 0$ ,

$$\varphi_{E,\pm\mu}(r) = \mathcal{O} \left( r^{\pm\mu+\frac{1}{2}} \right),$$

de forma que

$$\psi_{\pm}(r) = \mathcal{O} \left( r^{\pm\sqrt{1+(m-\kappa)^2}+\frac{1}{2}} \right),$$

e vemos imediatamente que  $\psi_-$  não pode ser de quadrado integrável na origem, logo a desconsideramos como autofunção, pois não pode estar no domínio do operador.

Agora vamos analisar o comportamento de  $\psi_+(r)$  para  $r$  grande:

$$\varphi_{E,\mu}(r) = \left( \frac{e^{i\pi E} \Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-E+\frac{1}{2})} (-r)^{-E} e^{\frac{r}{2}} + \frac{e^{i\pi(\mu-E+\frac{1}{2})} \Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+E+\frac{1}{2})} r^E e^{-\frac{r}{2}} \right) (1 + \mathcal{O}(r^{-1})),$$

donde obtemos a seguinte aproximação para a solução

$$\psi_+(r) = \left( \frac{e^{i\pi E} \Gamma\left(\sqrt{1+(m-\kappa)^2+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+(m-\kappa)^2}-E+\frac{1}{2}\right)} (-r^2)^{-E} e^{\frac{r^2}{2}} r^{\frac{1}{2}} + \frac{e^{i\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+(m-\kappa)^2}-E+\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(\sqrt{1+(m-\kappa)^2+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+(m-\kappa)^2}-E+\frac{1}{2}\right)} (r^2)^E e^{-\frac{r^2}{4}} r^{-\frac{1}{2}} \right) (1 + \mathcal{O}(r^{-2})).$$

Note que o primeiro termo só será quadrado integrável quando a função Gama do denominador for divergente, e por isso temos os seguintes valores para  $E$  (e portanto para o parâmetro  $\lambda$ ) permitidos

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+(m-\kappa)^2}-E+\frac{1}{2} = -n,$$

de forma que temos os seguinte autovalores

$$4E = \lambda = 2\sqrt{1+(m-\kappa)^2} + 2 + 4n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Concluimos então que toda solução do problema de autovalor para o operador  $S_{\kappa,m}$  deve ser desta forma, o que demonstra o teorema.  $\square$

A partir do momento em que conhecemos a solução explícita para o problema de autovalor de  $S_{\kappa,m}$ , podemos obter a solução de  $S_{\kappa}$  para o primeiro autovalor, e assim comprovar a ocorrência do efeito AB nesta situação, usando o Teorema 2.1.4 conjuntamente com os Teoremas 2.3.3 e 2.3.5. As soluções seriam (denotando  $\lambda := \lambda_{\kappa}^{(1)}$ ), para  $\kappa \in (0, 1/2)$ ,

$$\lambda_{\kappa}^{(1)} = 2\sqrt{1+\kappa^2} + 2, \quad \mu = \frac{\sqrt{1+\kappa^2}}{2}, \quad \Psi(r, \theta) = \frac{\varphi_{\lambda/4, \mu}(r^2)}{r}.$$

Já para  $\kappa = 1/2$ , temos

$$\lambda_{\kappa}^{(1)} = \sqrt{3} + 2, \quad \mu = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \Psi_1(r, \theta) = \frac{\varphi_{\lambda/4, \mu}(r^2)}{r} \quad \text{e} \quad \Psi_2(r, \theta) = \frac{\varphi_{\lambda/4, \mu}(r^2)}{r} e^{i\theta}.$$

Este resultado complementa aqueles vistos no segundo capítulo, pois engloba o caso  $a = 0$  para um potencial  $V$  particular.

Cabe notar também que podemos obter a seguinte autofunção  $\Psi$  associada ao primeiro autovalor, para o caso  $\kappa = 1/2$ :

$$\Psi(r, \theta) := \Psi_1(r, \theta) - \Psi_2(r, \theta) = \frac{\varphi_{\lambda/4, \mu}(r^2)}{r} (1 - e^{i\theta}),$$

a qual zera exatamente no conjunto  $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \theta = 0\}$ . Portanto, podemos ver claramente que existe uma autofunção  $\Psi$  associada ao primeiro autovalor  $\lambda_{1/2}^{(1)}$  do operador  $S_{\kappa=1/2}$  cujo conjunto nodal  $\mathcal{N}(\Psi)$  separa o conjunto  $\Omega_0$ .

Com todas estas informações, podemos ver explicitamente o comportamento do primeiro autovalor  $\lambda_{\kappa}^{(1)}$  do operador  $S_{\kappa}$  em função da circuitação  $\kappa$ , comportamento este que possui o mesmo padrão daquele dado pela figura 2.1.

## 3.2 O disco furado

Neste modelo, vamos estudar um exemplo interessante do método de confinamento na presença de potenciais magnéticos [35]. Note porém que o modelo desenvolvido aqui não é uma aplicação direta daquele, mas uma adaptação, visto que temos a presença de uma condição de contorno de Dirichlet numa parte da fronteira que não queremos retirar, pois precisamos desta para resolver explicitamente o problema usando os zeros das funções de Bessel conhecidos na literatura [1, 18].

**Definição 3.2.1.** Tome  $b > 0$  uma constante fixada e considere  $a = 0$ . Defina a região limitada  $\Omega^b := \{z \in \mathbb{R}^2 : 0 < |z| \leq b\}$  (note o índice superior, para não confundirmos com o conjunto  $\Omega_a$  já apresentado) e o seguinte operador de Schrödinger inicial

$$\dot{T}_{\kappa} := (i\nabla + \mathbf{A}_{\kappa})^2 + \frac{1}{|z|^2},$$

definido no conjunto  $\text{dom } \dot{T}_{\kappa} := \{\psi \in C_0^{\infty}(\Omega^b) : \psi|_{\dot{\partial}\Omega^b} = 0\}$ .

Note que para  $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega^b)$ , denotando por  $\dot{\partial}\Omega^b$  a fronteira exterior  $|z| = b$ , a igualdade  $\psi|_{\dot{\partial}\Omega^b} = 0$  equivale a dizer que  $\psi$  zera em  $\dot{\partial}\Omega^b$ , lembrando que o conjunto  $\Omega^b$  possui a fronteira  $|z| = b$  incluída.

**Definição 3.2.2.** Vamos definir o operador simétrico e positivo  $\dot{T}_{\kappa,m}$  em  $L^2(0, b)$  colocando

$$\begin{aligned} \dot{T}_{\kappa,m} &:= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left[ (m - \kappa)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{r^2} \\ \text{dom } \dot{T}_{\kappa,m} &:= \{ \psi \in C_0^\infty(0, b] : \psi(b) = 0 \}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cabe notar que o operador acima é essencialmente autoadjunto por argumento de ponto limite, o qual pode ser usado na fronteira da esquerda (o ponto 0) pela divergência do potencial e na fronteira da direita (o ponto  $b$ ) devido à condição de Dirichlet. Vamos denotar por  $T_{\kappa,m}$  (sem o ponto) a única extensão autoadjunta de  $\dot{T}_{\kappa,m}$ .

O fato desses operadores  $\dot{T}_{\kappa,m}$  serem essencialmente autoadjuntos implica que o operador original  $\dot{T}_\kappa$  é essencialmente autoadjunto. Para mostrar isso, considere no que se segue a decomposição em série de Fourier

$$\psi \in L^2(\Omega^b), \quad \psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(r) e^{im\theta}. \quad (3.4)$$

**Teorema 3.2.3.** *O operador  $\dot{T}_\kappa$  é essencialmente autoadjunto e, denotando por  $T_\kappa := \overline{\dot{T}_\kappa}$  sua única extensão autoadjunta,  $\psi \in \text{dom } T_\kappa$  se, e somente se,  $\psi_m \in \text{dom } T_{\kappa,m}$ , sendo que*

$$\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(r) e^{im\theta}.$$

Neste caso, vale ainda a seguinte igualdade

$$T_\kappa \psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (T_{\kappa,m} \psi_m(r)) e^{im\theta}.$$

*Demonstração.* Note primeiramente que, usando a demonstração do Teorema 2.1.4, podemos concluir de forma análoga o seguinte

$$\dot{T}_\kappa u(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \dot{T}_{\kappa,m} u_m(r) \right) e^{im\theta}, \quad \forall u \in \text{dom } \dot{T}_\kappa. \quad (3.5)$$

Como os operadores  $\dot{T}_{\kappa,m}$  são todos essencialmente autoadjuntos, os índices de deficiência são nulos, de forma que os espaços  $\text{rng} \left( \dot{T}_{\kappa,m} \pm iI \right)$  são todos densos em  $L^2(0, b)$ . Vamos mostrar que  $\text{rng} \left( \dot{T}_\kappa \pm iI \right)$  também é denso em  $L^2(\Omega^b)$ , o que demonstra o teorema.

Tome  $\psi \in L^2(\Omega^b)$  qualquer, com a condição de que

$$\langle \psi, (\dot{T}_\kappa \pm iI) u \rangle = 0, \quad \forall u \in \text{dom } \dot{T}_\kappa.$$

Usando a série de Fourier (3.4) e a igualdade (3.5), temos imediatamente que

$$\langle \psi_m, (\dot{T}_{\kappa,m} \pm iI) u_m \rangle = 0, \quad \forall u_m \in \text{dom } \dot{T}_{\kappa,m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Pela densidade dos espaços  $\text{rng}(\dot{T}_{\kappa,m} \pm iI)$ , segue que  $\psi = 0$  e terminamos esta parte. Usando a definição de fecho de operadores, temos que  $\psi \in \text{dom } T_\kappa$  se, e somente se, existe  $u_n \in \text{dom } \dot{T}_\kappa$  com  $u_n \rightarrow \psi$  e  $\dot{T}_\kappa u_n \rightarrow T_\kappa \psi$  em  $L^2(\Omega^b)$ . Mas tem-se  $u_{n,m} \in \text{dom } \dot{T}_{\kappa,m}$  com  $u_{n,m} \rightarrow \psi_m$  e  $\dot{T}_{\kappa,m} u_{n,m} \rightarrow T_{\kappa,m} \psi_m$  em  $L^2(0, b)$  para  $n \rightarrow \infty$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$  fixado, de modo que  $\psi_m \in \text{dom } T_{\kappa,m}$  como queríamos demonstrar.  $\square$

Segue-se imediatamente deste teorema o seguinte resultado.

**Corolário 3.2.4.** *Toda autofunção  $\psi$  de  $T_\kappa$  associada a um autovalor  $\lambda$  qualquer é, em coordenadas polares, da forma*

$$\psi(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(r) e^{im\theta},$$

sendo  $\psi_m$  uma autofunção do operador  $T_{m,\kappa}$  associada ao mesmo autovalor  $\lambda$ .

É conhecida na literatura (ver [1, 18]) a solução da seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$w'' + \left( \lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{z^2} \right) w = 0,$$

sendo que  $w(z)$  é a solução procurada e  $\lambda > 0$  e  $\nu > 0$  são constantes dadas. A saber,

$$w_{\nu,\lambda}(r) := r^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_\nu(\lambda r),$$

é a solução, sendo  $\mathcal{C}$  uma combinação linear qualquer entre funções de Bessel  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  se  $\nu$  for inteiro e entre  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  caso contrário. Com estas observações e sabendo que

$$-T_{\kappa,m} + \lambda^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left( \lambda^2 - \frac{[(m - \kappa)^2 + 1] - \frac{1}{4}}{r^2} \right),$$

segue imediatamente o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.5.** *Considere o parâmetro  $\nu := \sqrt{(m - \kappa)^2 + 1}$  e as funções dadas por*

$$\psi_\nu(r) = \psi_{\nu,\lambda}(r) := r^{\frac{1}{2}} J_\nu(\lambda r), \quad \varphi_\nu(r) = \varphi_{\nu,\lambda}(r) := r^{\frac{1}{2}} Y_\nu(\lambda r),$$

caso  $\nu \in \mathbb{Z}$ , e para o caso  $\nu \notin \mathbb{Z}$ ,

$$\psi_\nu(r) = \psi_{\nu,\lambda}(r) := r^{\frac{1}{2}} J_\nu(\lambda r), \quad \varphi_\nu(r) = \varphi_{\nu,\lambda}(r) := r^{\frac{1}{2}} J_{-\nu}(\lambda r).$$

Nestas condições,  $\psi_\nu$  e  $\varphi_\nu$  formam uma base generalizada (no sentido de que podem não estar no domínio do operador) das autofunções generalizadas associadas a  $\lambda$ .

A solução geral do problema de autovalor será uma combinação linear  $r^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_\nu(\lambda r)$  entre estas soluções, com a condição de que  $r^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_\nu(\lambda r)$  esteja no domínio do operador autoadjunto  $T_{\kappa,m}$ . Assim, podemos concluir que o menor autovalor  $\lambda_{\kappa,m}^{(1)}$  de  $T_{\kappa,m}$  é o menor  $\lambda$  positivo tal que  $0 \neq r^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_\nu(\lambda r) \in \text{dom } T_{\kappa,m}$ . Note ainda que se  $\lambda > 0$  satisfaz  $r^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_\nu(\lambda r) \in \text{dom } T_{\kappa,m}$ , devido à condição de Dirichlet na fronteira exterior, temos o seguinte

$$\sqrt{b} \mathcal{C}_\nu(\lambda b) = 0,$$

de forma que  $\lambda = \frac{x_0}{b}$ , sendo  $x_0$  um zero da combinação linear  $\mathcal{C}_\nu$ . Assim, para achar  $\lambda_{\kappa,m}^{(1)}$ , o menor autovalor de  $T_{\kappa,m}$ , devemos procurar o menor zero possível para uma combinação linear entre funções de Bessel no domínio do operador.

**Definição 3.2.6.** Denotaremos por  $\mathfrak{t}_{\kappa,m}$  a forma sesquilinear fechada associada ao operador autoadjunto  $T_{\kappa,m}$ , cujo domínio é dado por

$$\text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m} := \mathcal{H}_0^1(0, b) \cap \text{dom } \frac{1}{r}.$$

**Teorema 3.2.7.** *Valem  $\psi_\nu \in \text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$  e  $\varphi_\nu \notin \text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$ , para todos  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* De acordo com a literatura já citada, temos os seguinte comportamentos assintóticos, para  $r$  suficientemente pequeno,

$$\varphi_\nu(r) \approx -\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left( \frac{1}{2} \lambda r \right)^{-\nu} r^{\frac{1}{2}},$$

para  $\nu$  inteiro e

$$\varphi_\nu(r) \approx \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda r\right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} r^{\frac{1}{2}},$$

para  $\nu$  não inteiro. Lembrando que  $\nu \geq 1$ , segue imediatamente que  $\varphi_\nu \notin \text{dom } \frac{1}{r}$ .

Agora, olhando o comportamento assintótico de  $J_\nu$ , temos o seguinte

$$J_\nu(r) \approx \left(\frac{1}{2}r\right)^\nu [\Gamma(\nu+1)]^{-1},$$

e resulta imediatamente que  $\psi_\nu \in \text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$ , pois

$$\int_0^b \frac{|\psi_\nu(r)|^2}{|r|^2} dr < \infty.$$

Que estas funções estão no espaço de Sobolev é um fato conhecido (ver referências já citadas).  $\square$

**Teorema 3.2.8.** *O problema de autovalor generalizado para  $T_{\kappa,m}$  dado pela equação*

$$T_{\kappa,m}\psi = \lambda\psi,$$

*possui a seguinte solução única no conjunto  $\text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$*

$$\lambda = \frac{x_0}{b}, \quad \Psi = \alpha\psi_\nu, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3.6)$$

*sendo  $\lambda > 0$  o autovalor,  $\Psi \in \text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$  a autofunção generalizada associada e  $x_0$  um zero da função de Bessel  $J_\nu$ .*

*Demonstração.* Com efeito, sabemos que se  $\lambda$  é um autovalor, então a autofunção generalizada associada deve ser da forma  $\Psi(r) = r^{\frac{1}{2}}\mathcal{C}_\nu(\lambda r)$  e, como comentado acima, devido à condição de fronteira de Dirichlet, devemos ter  $\lambda = x_0/b$ . Resta mostrar apenas que a combinação linear não possui elementos da forma  $\varphi_\nu$ . Com efeito, do contrário, teríamos  $\Psi$  e  $\psi_\nu$  no espaço vetorial  $\text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$ , o que implicaria que  $\varphi_\nu \in \text{dom } \mathfrak{t}_{\kappa,m}$ , um absurdo pelo Teorema 3.2.7.  $\square$

Segue-se imediatamente do teorema acima que todos os autovalores do operador  $T_{\kappa,m}$  são simples. Ainda, podemos obter o seguinte resultado acerca do primeiro autovalor.

**Teorema 3.2.9.** Considerando  $\nu = \sqrt{(m - \kappa)^2 + 1}$  qualquer e  $x_0 = b\lambda$  o menor zero da função de Bessel  $J_\nu$ , a função  $\psi_\nu$  está no domínio do operador  $T_{\kappa,m}$  e é uma autofunção associada ao primeiro autovalor  $\lambda_{\kappa,m}^{(1)}$ .

*Demonstração.* Nestas condições, temos que  $\lambda = \lambda_{\kappa,m}^{(1)}$  como já comentado, isto é,  $\lambda$  é o primeiro autovalor do operador  $T_{\kappa,m}$ . Pelo Teorema 3.2.8,  $\psi_\nu$  está no domínio de forma de  $T_{\kappa,m}$  e como  $\psi_\nu$  minimiza esta forma, segue pelo princípio do min-max que  $\psi_\nu$  está no domínio do operador  $T_{\kappa,m}$  como queríamos demonstrar.  $\square$

Agora que temos a solução explícita para o problema de autovalores dos operadores  $T_{\kappa,m}$ , podemos usar o Corolário 3.2.4 para obter a solução para o respectivo problema para  $T_\kappa$ . Como no caso  $\Omega_a$ , devemos separar os casos em que  $\kappa$  é semi-inteiro dos outros casos, como veremos nos teoremas a seguir.

**Teorema 3.2.10.** Suponha  $\kappa \in (0, 1/2)$  qualquer. O primeiro autovalor  $\lambda_\kappa^{(1)}$  do operador  $T_\kappa$  é simples e a autofunção associada é real, positiva e radial. Mais precisamente,

$$\Psi(r, \theta) = J_\nu(\lambda_\kappa^{(1)}r),$$

com  $\nu = \sqrt{\kappa^2 + 1}$ .

*Demonstração.* Sabemos que o primeiro autovalor do operador  $T_{\kappa,m}$  é da forma  $\frac{x_0}{b}$ , sendo  $x_0$  um zero da função de Bessel com parâmetro  $\nu = \sqrt{(\kappa - m)^2 + 1}$  e ainda, da teoria geral das funções de Bessel, os zeros de  $J_\nu$  crescem com o parâmetro  $\nu$ , de modo que o menor ocorre neste caso para  $m = 0$ , pois  $\kappa \in (0, 1/2)$ . Assim, tomando  $\nu = \sqrt{\kappa^2 + 1}$ , temos que  $\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa,0}^{(1)}$  e o resultado segue usando o Corolário 3.2.4 e o Teorema 3.2.9 com  $m = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.2.11.** Suponha  $\kappa = \frac{1}{2}$ . Então o primeiro autovalor  $\lambda_\kappa^{(1)}$  do operador  $T_\kappa$  é duplo, e podemos tomar uma autofunção complexa que se anula no semieixo positivo da reta.

*Demonstração.* Como no caso discutido na seção anterior, devemos procurar o menor zero da função de Bessel  $J_\nu$  para um parâmetro da forma  $\nu = \sqrt{(\kappa - m)^2 + 1}$ . Como  $\kappa = 1/2$  e os zeros crescem com  $\kappa$ , o menor zero possível ocorre justamente quando  $m = 0$  ou  $m = 1$ . Assim, temos  $\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa,0}^{(1)} = \lambda_{\kappa,1}^{(1)}$  visto que ocorre  $T_{\kappa,0} = T_{\kappa,1}$  e, portanto, temos as duas autofunções linearmente independentes

$$\Psi_1(r, \theta) = J_\nu(\lambda_\kappa^{(1)}r), \quad \Psi_2(r, \theta) = J_\nu(\lambda_\kappa^{(1)}r) e^{i\theta},$$

com  $\nu = \sqrt{\kappa^2 + 1}$ , sendo  $\lambda_\kappa^{(1)} = \frac{x_0}{b}$  e  $x_0$  o menor zero da função de Bessel  $J_\nu$ . Note que estas duas funções são linearmente independentes e a diferença entre elas se anula no semieixo real positivo.  $\square$

**Teorema 3.2.12.** *A aplicação  $\kappa \mapsto \lambda_\kappa^{(1)}$ , que a cada  $\kappa \in \mathbb{R}$  associa o primeiro autovalor  $\lambda_\kappa^{(1)} \in \mathbb{R}$  do operador  $T_\kappa$  é contínua e possui as seguintes propriedades:*

1.  $\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa+n}^{(1)}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ;
2.  $\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{-\kappa}^{(1)}$ ;
3.  $\lambda_\kappa^{(1)}$  cresce em cada intervalo da forma  $(n, n + 1/2)$  e decresce nos da forma  $(n - 1/2, n)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* A continuidade se segue da continuidade dos zeros das funções de Bessel  $J_\nu$  com relação ao parâmetro  $\nu$ . Os itens 1 e 2 se seguem das Seções 1.4 e 1.5 e o item 3 se segue imediatamente do crescimento dos zeros de  $J_\nu$  com relação à  $\nu$ .  $\square$

Podemos computar facilmente a função  $\kappa \mapsto \lambda_\kappa^{(1)}$  usando (3.6) e os zeros conhecidos das funções de Bessel, o que nos permite montar o seguinte gráfico

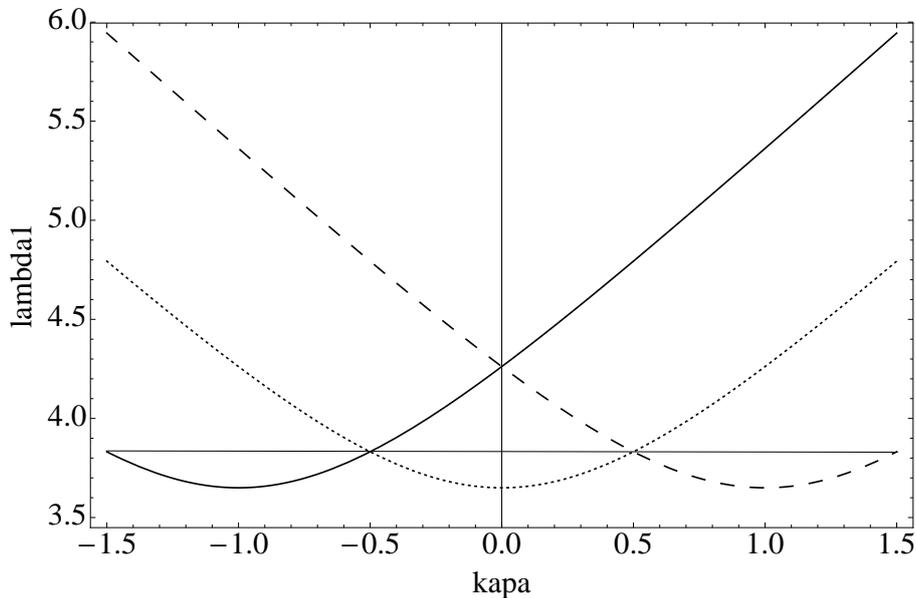


Figura 3.1: Autovalor  $\lambda_{\kappa,m}^{(1)}$  em função de  $\kappa$  para diferentes valores de  $m$ , com  $b = 1$ . Linha contínua representa  $m = -1$ , pontilhada  $m = 0$  e tracejada  $m = 1$ . O gráfico de  $\lambda_\kappa^{(1)}$  em função de  $\kappa$  será portanto a curva de mais baixa energia, o que está representada como a curva abaixo da linha horizontal.

Analisando este gráfico, podemos ver que temos suavidade nos intervalos  $(-1/2, 1/2)$ ,  $(1/2, 3/2)$ ,  $(3/2, 5/2)$  e assim sucessivamente o que corresponde ao fato de que  $\lambda_\kappa^{(1)}$  possui período 1 e  $\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_{\kappa,0}^{(1)}$  em  $(-1/2, 1/2)$ , a qual é suave. Note ainda que para os  $\kappa$  semi-inteiros,  $\kappa \in \{\dots, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, \dots\}$ , temos a aparente quebra de suavidade, a qual corresponde à mudança na dimensão do auto-espço fundamental, de dimensão 1 nos intervalos anteriores para dimensão 2 nos semi-inteiros, o que está associado ao encontro das curvas  $\lambda_{\kappa,m}^{(1)}$  e  $\lambda_{\kappa,m+1}^{(1)}$  para algum  $m$  quando  $\kappa$  é semi-inteiro. Note que o comportamento de  $\lambda_\kappa^{(1)}$  é o mesmo daquele previsto na Figura 2.1.

# Capítulo 4

## Conclusões e perspectivas futuras.

Considerando o cenário tradicional do efeito AB, como descrito na Introdução, as seguintes questões seriam interessantes:

- Quais as condições de fronteira adotar na definição do operador (1)?
- Por qual quantidade física o efeito AB pode se manifestar?
- Como esta quantidade física depende do potencial magnético  $\mathbf{A}_{AB}$ ?

Como discutido na Introdução, estas três questões podem ser respondidas considerando a condição de Dirichlet na fronteira, junto com o estudo do espalhamento do operador associado, de forma que o efeito AB aparece como uma dependência do operador espalhamento com o fluxo magnético.

Propomos nesta tese uma nova situação, em que a primeira questão não desempenha qualquer papel, visto que o operador proposto possui uma única extensão autoadjunta dada pelo Teorema 1.3.6. Ainda, respondemos as outras duas questões fazendo um estudo da energia mínima do sistema, o que nos permite obter uma variação do primeiro autovalor com relação à circuitação do potencial magnético, o que é dado pelo Teorema 2.5.4 (ver Figura 2.1).

Outras questões podem, possivelmente, ser estudadas através deste ponto de vista. Pretendemos estudar um caso importante de efeito AB usando esta mesma técnica, que é o caso do toro no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Através de mudanças e aproximações apropriadas, podemos passar este problema ao plano com dois furos. Usando o potencial  $V$  satisfazendo uma desigualdade do tipo (1.2), teremos também unicidade das extensões autoadjuntas. O estudo dos autovalores pode, possivelmente, ser feito de maneira análoga, bastando demonstrar

a existência de uma autofunção real correspondente ao primeiro autovalor. Note que a dificuldade está no fato de não podermos fazer a mesma decomposição polar que fizemos na Seção 2.1.

Outra questão interessante é aplicar a análise dos autovalores para uma extensão em particular, sem o potencial  $V$ , a qual também deve possuir uma autofunção real.

# Bibliografia

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, **55**, 2014.
- [2] Adami, R., Teta, A.: On the Aharonov-Bohm hamiltonian. *Letters in Mathematical Physics* **43**, 43–54 (1998).
- [3] Aharonov, Y., Bohm, D.: Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review* **115**, 485–491 (1959).
- [4] Aharonov, Y., Bohm, D.: Remarks on the possibility of quantum electrodynamics without potentials. *Physical Review* **125**, 2192 (1962).
- [5] Aharonov, Y., Bohm, D.: Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review* **130**, 1625 (1963).
- [6] Alziary, B., Fleckinger-Pellé, J. Takác, P.: Eigenfunctions and Hardy inequalities for a magnetic Schrödinger operator in  $\mathbb{R}^2$ . *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **26**, 1093 (2003).
- [7] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext, Springer, 2010.
- [8] Casati, G., Guarneri, I.: Aharonov-Bohm effect from the "hydrodynamical" viewpoint. *Physical Review Letters* **42**, 1579–1581 (1979).
- [9] Cheng, S-Y.: Eigenfunctions and nodal sets. *Commentarii Mathematici Helvetici* **51**, 43–55 (1976).
- [10] Colin de Verdière, Y., Truc, F.: Confining quantum particles with a purely magnetic field. *Annales de l'Institut Fourier* **60**, 2333–2356 (2010).

- [11] Dabrowski, L., Stovicek, P.: Aharonov-Bohm effect with  $\delta$ -type interaction. *Journal of Mathematical Physics* **39**, 47–62 (1998).
- [12] de Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser, 2009.
- [13] de Oliveira, C. R. e Pereira, M.: Mathematical justification of the Aharonov-Bohm Hamiltonian. *Journal of Statistical Physics* **133**, 1175–1184 (2008).
- [14] de Oliveira, C. R. e Pereira, M.: Scattering and self-adjoint extensions of the Aharonov-Bohm Hamiltonian. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 354011 (29pp) (2010).
- [15] de Oliveira, C. R. e Pereira, M.: Impenetrability of Aharonov-Bohm solenoids: proof of norm resolvent convergence. *Letters in Mathematical Physics* **95**, 41–51 (2011).
- [16] DeWitt, Bryce S.: Quantum theory without electromagnetic potentials. *Physical Review* **125**, 2189 (1962).
- [17] Ehrenberg, W., Siday, R. E.: The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. *Proceedings of the Physical Society, Section B* **62**, 8–21 (1949).
- [18] Everitt, W. N., Kalf, H.: The Bessel differential equation and the Hankel transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **208**, 3–19 (2007).
- [19] Grubb, G.: *Distributions and Operators*. Basel: Springer, 2009.
- [20] Hagen, C. R.: Aharonov-Bohm scattering amplitude. *Physical Review D* **41**, 2015–2017 (1990).
- [21] Hansson, A. M.: On the spectrum and eigenfunctions of the Schrödinger operator with Aharonov-Bohm magnetic field. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **23**, 3751–3766 (2005).
- [22] Helffer, B.: Effet d’Aharonov Bohm sur un état borné de l’équation de Schrödinger. *Communication in Mathematical Physics* **119**, 315–329 (1988).
- [23] Helffer, B., Hoffmann-Ostenhof, M., Hoffmann-Ostenhof, T., Owen, M. P.: Nodal sets for groundstates of Schrödinger operators with zero magnetic field in non simply connected domains. *Communication in Mathematical Physics* **202**, 629 (1999).

- [24] Helffer, B., Fournais, S.: *Spectral methods in surface superconductivity*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **77**, Birkhäuser, 2010.
- [25] Hiley, B. J.: The early history of the Aharonov-Bohm effect. *arXiv:1304.4736v1* [physics.hist-ph] 17 Apr. 2013.
- [26] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Second Edition, 1979.
- [27] Lavine, R., O'Carroll, M.: Ground state properties and lower bounds for energy levels of a particle in a uniform magnetic field and external potential. *Journal of Mathematical Physics* **18**, 1908–1912 (1977).
- [28] Leinfelder, H.: Gauge invariance of Schrödinger operators and related spectral properties. *Journal of Operator Theory* **9**, 163–179 (1983).
- [29] Lewis, R. T.: Singular elliptic operators of second order with purely discrete spectra. *Transactions of the American Mathematical Society* **271**, 653–666 (1982).
- [30] Lieb, E. H., Loss, M.: *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics **14**, American Mathematical Society, 1997.
- [31] Magni, C., Valz-Gris, F.: Can elementary quantum mechanics explain the Aharonov-Bohm effect?, *J. Math. Phys.* **36**, 177–186 (1995).
- [32] Nenciu, G., Nenciu, I.: On confining potentials and essential self-adjointness for Schrödinger operators on bounded domains in  $\mathbb{R}^n$ . *Annales Henri Poincaré* **10**, 377–394 (2009).
- [33] Nenciu, G., Nenciu, I.: On essential self-adjointness for magnetic Schrödinger and Pauli operators on the unit disc in  $\mathbb{R}^2$ . *Letters in Mathematical Physics* **98**, 207–223 (2011).
- [34] Peshkin, M., Tonomura, A.: The Aharonov-Bohm Effect. LNP340. Berlin: *Springer-Verlag* (1989).
- [35] Romano, R. G.: *Efeito Aharonov-Bohm sem interação com a fronteira do solenóide*. Dissertação de Mestrado, PPGM UFSCar, 2013.

- [36] Ruijsenaars, S. N. M.: The Aharonov-Bohm effect and scattering theory. *Annals of Physics* **146**, 1–34 (1983).
- [37] Simon, B., Reed, M.: *Methods of Modern Mathematical Physics II*. Academic Press, INC., 1975.
- [38] Whittaker, E. T., Watson, G. N.: *A course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.