

Mariana Chinaglia

*Defeitos topológicos e cadeias cíclicas de
deformação aplicados em diferentes
cenários*

São Carlos – SP

Março / 2015

Mariana Chinaglia

*Defeitos topológicos e cadeias cíclicas de
deformação aplicados em diferentes
cenários*

Tese apresentada ao Departamento de Física
da Universidade Federal de São Carlos

Orientador:

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

São Carlos – SP

Março / 2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

C539dt Chinaglia, Mariana.
Defeitos topológicos e cadeias cíclicas de deformação
aplicados em diferentes cenários / Mariana Chinaglia. -- São
Carlos : UFSCar, 2015.
115 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2015.

1. Astrofísica. 2. Defeitos topológicos. 3. Branas. 4.
Modelo sine-Gordon. 5. Deformações cíclicas. I. Título.

CDD: 523.01 (20^a)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Mariana Chinaglia, realizada em 30/04/2015:

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini
UFSCar

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzela
USP

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin
UFSCar

Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior
UFABC

A meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, por sempre acreditarem no meu potencial e por oferecerem apoio pra continuar estudando.

Ao Prof. Dr. Alex de Bernardini por ter conseguido me guiar para produzir essa tese. Por ter sido muito ativo e firme, de maneira que eu pudesse observar e aprender um pouco de como é a carreira em Física teórica. Pela compreensão nos momentos de altos e baixos e todo o suporte em situações difíceis.

Ao Prof. Dr. Celso Villas Boas, por ter me acompanhado e ajudado desde a graduação, tanto na questão profissional quanto no crescimento pessoal.

Ao Prof. Dr. Daniel Vanzella, que há dez anos vem contribuindo de maneira fundamental na minha formação acadêmica e pessoal.

Aos Professores Doutores Antonio Lima Santos, Salomon Sylvain Mizrahi e Paulo Daniel Emmel, por todo incentivo, ajuda e confiança na minha carreira.

Ao amigo e Prof. Dr. Dennis Bessada, o qual tive a oportunidade e o enorme prazer de conhecer e conviver durante meu mestrado. Nossos encontros e discussões foram valiosos para todas as áreas da vida, incluindo minha decisão de seguir na área de Física teórica.

A todos os amigos que sofreram e se divertiram comigo, dando suporte e ânimo para que eu seguisse em frente.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Com a finalidade de obter estruturas conhecidas como defeitos, foi utilizado um procedimento sistemático que encerra cadeias cíclicas de deformações. Esse procedimento cíclico possibilita que o defeito inicial (utilizado para acionar a cadeia) seja recuperado através do processo de deformações sucessivas. Essa técnica foi aplicada considerando-se defeitos topológicos (tipo *kink*) derivados de dois modelos, $\lambda\chi^4$ e *sine-Gordon*, descritos por um único campo escalar e real. Os resultados encontrados revelam que esse procedimento pode gerar simultaneamente defeitos tipo *kink* e tipo *lump* (não topológico) com massas topológicas satisfazendo relações fechadas de vínculo. Após a descrição e análise detalhadas desse método, alguns de seus resultados foram aplicados em cenário de branas, tencionando-se estudar seu problema quântico derivado de uma perturbação na métrica. O cenário inclui como resultado branas espessas que poderiam sustentar gravidade 4-dimensional em seu interior. Por fim, estudou-se a origem topológica das transições de vácuo em cenários sustentados por potenciais com fundo duplo. Verificou-se que a função de Wigner, construída por meio do estado fundamental e do primeiro estado excitado (soluções do espectro de modos normais do potencial), realiza tunelamento quântico deslocando-se de um mínimo ao outro do potencial. A análise do tunelamento foi realizada através de uma prescrição da dinâmica da função de Wigner e da dependência temporal dos pontos de estagnação para um potencial de fundo duplo analítico.

Abstract

In order to obtain structures known as defects, it was used a systematic procedure which holds cyclic deformation chains. This cyclical procedure enables that the initial defect (used to trigger the chain) is recovered via the process of successive deformations. This technique was applied considering topological kink like defects derived from two models, $\lambda\chi^4$ and sine-Gordon, described by a single real scalar field. The results show that this procedure can generate simultaneously kink and lump like defects with topological mass satisfying closed relations. After the detailed description and analysis of this method, some of its results were applied in brane scenario, where we studied the quantum problem analogue derived from a metric perturbation. The scenarios includes thick branes results that could support 4-dimensional gravity inside. Finally, we studied the topological origin of vacuum transitions in scenarios supported by double-well potentials. It was found that the Wigner function, constructed by means of the ground and first excited states (solutions of the normal modes potential spectrum), performs quantum tunneling moving from one minimum to another in the potential. The tunneling analysis was performed by a prescription of the Wigner's function dynamics and the time dependence of stagnation points for an analytical double well potential.

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	Defeitos topológicos e não topológicos	p. 14
3	Deformações cíclicas e o modelo $\lambda\chi^4$	p. 20
3.1	Procedimento sistemático para deformações N+2-cíclicas	p. 20
3.2	Modelo $\lambda\chi^4$	p. 23
3.2.1	Procedimento sistemático para deformações 3-cíclicas	p. 24
	A - Deformações hiperbólicas	p. 25
	B - Deformações trigonométricas	p. 27
3.2.2	Procedimento sistemático para deformações 4-cíclicas	p. 29
	A - Deformações hiperbólicas	p. 29
	B - Deformações trigonométricas	p. 32
4	Modelo <i>sine-Gordon</i> deformado e a carga topológica variável	p. 42
4.1	Procedimento sistemático para deformações 3-cíclicas	p. 44
	A - Deformações hiperbólicas	p. 44
	B - Deformações trigonométricas	p. 46
4.2	Procedimento sistemático para deformações 4-cíclicas	p. 48
	A - Deformações hiperbólicas	p. 49
	B - Deformações trigonométricas	p. 51
5	Aplicação em cenário de Branas	p. 60

5.1	Introdução ao cenário de branas	p. 60
5.2	Perturbação da métrica	p. 62
5.3	Método utilizado para encontrar os parâmetros físicos em cenários de branas	p. 63
5.3.1	Cálculo do <i>warp factor</i>	p. 63
5.3.2	Cálculo do defeito no cenário de branas	p. 64
5.3.3	Tensor energia-momento	p. 64
5.3.4	Potencial da Mecânica Quântica	p. 65
5.3.5	Potencial clássico	p. 65
5.4	Resultados	p. 66
5.5	Resultados referentes às soluções do modelo $\lambda\chi^4$	p. 67
5.5.1	Deformações 3–cíclicas	p. 67
	A - Caso hiperbólico	p. 67
	B - Caso trigonométrico	p. 68
5.5.2	Deformações 4–cíclicas	p. 68
	A - Caso hiperbólico	p. 68
	B - Caso trigonométrico	p. 70
5.6	Resultados referentes às soluções do modelo <i>sine-Gordon</i>	p. 71
5.6.1	Deformações 3–cíclicas	p. 72
	A - Caso hiperbólico	p. 72
	B - Caso trigonométrico	p. 72
5.6.2	Deformações 4–cíclicas	p. 73
	A - Caso hiperbólico	p. 73
	B - Caso trigonométrico	p. 74
6	Aplicação em cenários de potencial com fundo duplo	p. 88

6.1	Origem topológica das transições de vácuo da mecânica quântica e tunelamento	p. 88
6.1.1	Cenários topológicos para potenciais DW.	p. 90
6.1.2	Modos estáveis e taquiônicos sustentados por defeitos deformados e transições quânticas relacionadas.	p. 94
6.2	Fluxo de Wigner e suas características	p. 97
6.3	Tunelamento quântico e análise do fluxo de Wigner	p. 98
7	Conclusões	p. 107
	Referências	p. 110

1 *Introdução*

Um dos maiores desafios da Física atualmente reside na tentativa de unificação de todas as interações fundamentais através do conceito de quebra de simetria. Acredita-se que no período pré-inflacionário havia uma unificação entre as forças fundamentais, tornando-as indistinguíveis. Conforme o Universo expandiu-se e conseqüentemente esfriou, essa supersimetria foi quebrada gradualmente acarretando primeiramente o desacoplamento da interação gravitacional, seguida da interação forte, e por último da fraca e da eletromagnética. Nesse contexto, a quebra de simetria está associada às mudanças de fases do sistema, que passa de um valor de mínimo global do potencial para um valor de máximo local e instável. Progressivamente, o campo que descreve o sistema “rola” ao longo do potencial assumindo novos valores de vácuo. Na Fig. 1 vemos a representação de uma quebra de simetria sofrida pelo sistema, o qual passa a ter mínimos degenerados.

Ao esfriar, o Universo passa por essas transições de fases com o surgimento não uniforme de novos estados. O motivo de regiões diferentes do espaço adquirirem valores diferentes de vácuo é devido à causalidade. A velocidade máxima de propagação de uma informação é a velocidade da luz, c . Dessa forma, as regiões do universo separadas por uma distância maior que ct , fora do cone de luz, não podem comunicar-se. Com a evolução temporal do sistema, as regiões de novos vácuos coalescem, gerando estruturas conhecidas como defeitos topológicos na intersecção (veja Fig.2). Portanto, sendo os defeitos as próprias regiões de fronteira entre os diferentes mínimos da teoria, teoricamente sua formação é inevitável se houver quebra de simetria (Kibble, 1976). Alguns textos de revisão sobre quebra de simetria, defeitos topológicos e sua formação são encontrados, por exemplo, em Gangui (2001), Durrer, Kunz e Melchiorri (2002), Cambridge (1996).

Devido a enorme energia encerrada nos defeitos topológicos existe uma dificuldade técnica e experimental em observá-los. Nem mesmo em aceleradores de partículas como o localizado no CERN (*Organisation européenne pour la Recherche nucléaire*) foi possível reproduzi-los. Entretanto, a existência desses objetos revelaria informações sobre os primórdios do Universo. Além disso, sua comprovação observacional sustentaria algu-

mas teorias enquanto que sua inexistência proscreveria outras. Por essas razões, entre outras, seu estudo e sua busca são de suficiente relevância.

Já que a origem dos defeitos está relacionada ao surgimento de novos vácuos, uma questão pertinente é a diferença entre defeitos gerados com relação à simetria original. Em uma dimensão, quando uma simetria discreta é quebrada, o resultado é a chamada *domain wall* (ou parede de domínio). Esta estrutura encontra-se localizada em uma direção espacial particular, mas estendida na outra. A extensão para duas dimensões revela que, quando uma simetria cilíndrica ou axial é quebrada, o resultado é o defeito topológico conhecido como uma corda cósmica. Muitas vezes, estas podem ser associadas às teorias de grande unificação, mas também podem surgir na escala eletrofraca (aproximadamente 246 GeV). Já para três dimensões, quando uma simetria esférica é quebrada, a solução gera os chamados monopolos magnéticos. É previsto que estes sejam supermassivos e carreguem carga magnética, assim como os elétrons e pósitrons carregam carga elétrica. Extrapolando para mais dimensões, a solução engendra as chamadas texturas. Estas não são localizadas, o que resulta em sua instabilidade e colapso.

Após entender o que são e como foram formados, a questão fundamental é o que defeitos topológicos poderiam explicar e quais seriam as assinaturas legadas ao Universo. Efetivamente várias contribuições foram previstas em diferentes estudos. Por exemplo, defeitos topológicos podem ter sido os catalisadores para a formação de estruturas do Universo. A explicação para tal reside no fato deles carregarem uma enorme quantidade de energia. Esta fomenta uma força gravitacional extra fazendo com que os defeitos atuem como sementes para estruturas cósmicas (Liddle; Lyth, 2000). Em particular, cordas cósmicas (Brandenberger, 1991) e texturas podem levar a cenários atraentes para a formação de galáxias e estruturas em grandes escalas. Além da formação de estruturas, defeitos topológicos podem ser relevantes para a assimetria no número de bárions (Davis; Perkins, 1997). Também podem ser os geradores de raios cósmicos de altas energias (Bonazzola; Peter, 1997), ou mesmo de explosões de raios gama, através de cordas cósmicas supercondutoras (Berezinsky; Hnatyk; Vilenkin, 2001). Como veremos no Capítulo 5, o cenário de branas pode representar defeitos topológicos em espaços com dimensões maiores que $1 + 3$ (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004; Gherghetta; Roessl; Shaposhnikov, 2000). Cordas cósmicas, particularmente, apresentam um campo gravitacional ao redor de si que é atípico (Vilenkin, 1981). Por essa razão, muitos testes relacionados a esse tipo de defeito baseiam-se em interações gravitacionais (Vilenkin; Shellard, 1995). Cordas cósmicas e paredes, geradas após o período inflacionário, poderiam estar relacionadas com matéria escura através da irradiação de axions (Jeong; Kawasaki; Takahashi, 2014; Moroi et al., 2014). Finalizando

os exemplos, uma análise sobre o efeito Harrison- Zel'dovich é apresentada no trabalho Sakellariadou (1999), onde sua origem é questionada tanto através da inflação como dos defeitos topológicos.

Os trabalhos mais atuais analisando a concordância entre as previsões da teoria de defeitos e as observações cósmicas, principalmente no que diz respeito a Radiação Cósmica de Fundo, foram realizados através dos resultados do satélite Planck. Este é um projeto da Agência Espacial Européia, o qual foi lançado em 14 de maio de 2009. Entre vários de seus objetivos encontra-se especificamente o de procurar por defeitos no espaço (European Space Agency, 2000). Alguns resultados interessantes são Hindmarsh, Kirk e West (2014), Hindmarsh et al. (2014) e Planck Collaboration et al. (2014). Através desses trabalhos, vemos que há ainda a possibilidade de defeitos, especialmente cordas, descreverem de maneira verossímil algumas questões cosmológicas.

No que tange à caracterização dos defeitos através da perspectiva matemática, essas estruturas consistem em soluções de uma classe restrita de equações diferenciais não lineares. Como veremos no próximo capítulo, há duas classificações para os defeitos em 1 dimensão espacial: topológica (tipo *kink*) e não topológica (tipo *lump*¹). Ambas são estudadas em diferentes cenários cosmológicos, tal como as referências acima citadas relacionadas aos *kinks*. Já os *lumps* também são estudados em diversos cenários, e.g., de branas com uma única dimensão extra com extensão infinita (Giovannini, 2007), Q-balls (Matsuda, 2003) e branas taquiônicas (Zwiebach, 2000).

É importante ressaltar que, apesar de defeitos topológicos em cenários cosmológicos não terem sido observados, esse tipo de estrutura existe e é estudado em diferentes áreas. Em particular podemos citar em matéria condensada, e.g., como padrões de deformações em filmes finos sob radiação uniforme de laser (Walgraef; Ghoniem; Lauzeral, 1997). Uma revisão de pesquisas sobre grafenos policristalinos onde é discutida a estrutura microscópica de fronteiras e sua relação com defeitos topológicos pode ser encontrada em Yazyev e Chen (2014). Também são muito estudados os modelos “*baby Skyrme*” em física de estado sólido (Kobayashi; Nitta, 2013) e transições de fases em materiais XY através de Monte Carlo (Sinha; Roy, 2010). Defeitos podem ser encontrados também em contexto de comunicações ópticas, como sólitons escuros em fibras (Agrawal, 1995) e em física de partículas (como monopolos magnéticos (Dirac, 1931)).

Nosso objetivo foi gerar e estudar defeitos tipo *kink* e tipo *lump*. Nos utilizamos de

¹Como não há uma tradução para as expressões *kink like* e *lump like solutions*, decidimos utilizar a tradução direta de *like* e descrevê-las doravante por: soluções “tipo *kink*” e “tipo *lump*”.

um procedimento sistemático de geração de soluções a fim de obter uma cadeia cíclica de deformações acionada por um defeito previamente conhecido (Bernardini; da Rocha, 2013). Essa cadeia exhibe sempre a característica peculiar de encerrar uma relação de vínculo entre as massas topológicas dos defeitos. Esse procedimento foi obtido para os defeitos referentes aos modelos $\lambda\chi^4$ e *sine-Gordon*. Alguns desses resultados foram aplicados em capítulos posteriores em cenários de branas e em potencial de fundo duplo.

No Capítulo 2 apresentaremos o formalismo matemático concernente aos defeitos topológicos e não topológicos. No Capítulo 3 nos reportamos a um procedimento sistemático de cadeias de deformação cíclicas, bem como sua aplicação para o modelo $\lambda\chi^4$. No Capítulo 4 apresentaremos uma nova cadeia de deformação acionada pelo defeito topológico da teoria *sine-Gordon*. No Capítulo 5 alguns dos resultados obtidos nos capítulos anteriores serão inseridos em cenários de branas, onde o problema quântico advindo das flutuações na métrica é estudado. No Capítulo 6 estudaremos a origem topológica das transições de vácuo em cenários sustentados por potenciais com fundo duplo. Finalizando a tese, as conclusões e considerações finais serão estabelecidas.

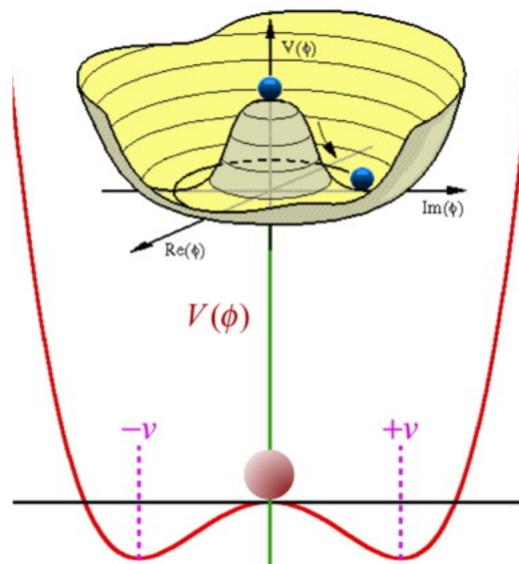


Figura 1: Quebra de simetria sofrida por um sistema. O campo deve “rolar” no potencial e assumir um novo valor de mínimo. Adaptação da Figura de Schweizerische Physikalische Gesellschaft (2013).

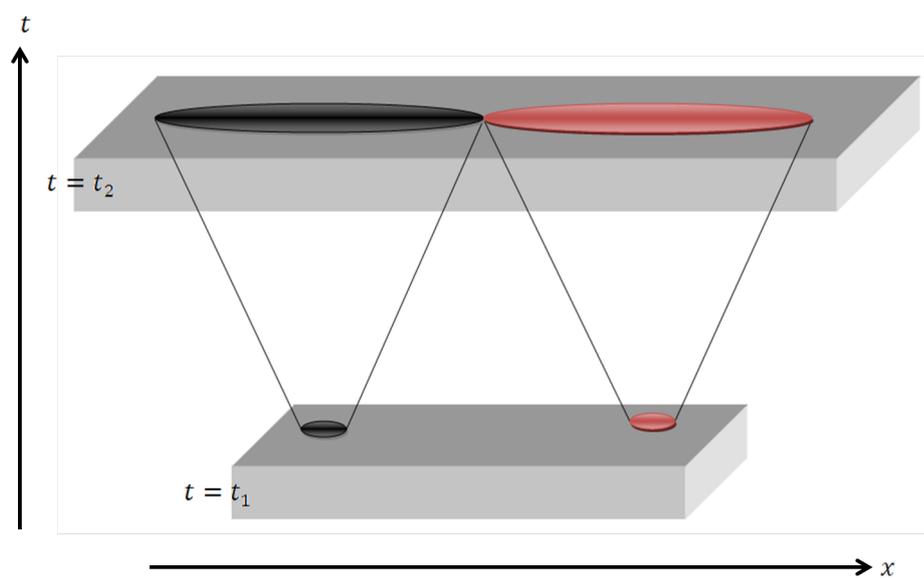


Figura 2: Evolução temporal dos novos vácuos referentes a um sistema cuja quebra de simetria resultou em dois mínimos, representados pelas cores vermelha e preta.

2 Defeitos topológicos e não topológicos

Vimos que os defeitos são soluções de uma classe de equações diferenciais não lineares. Inicialmente, vamos analisar a equação de campo escalar e real,

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

cujas soluções são

$$\phi = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.2)$$

com $\omega = kc$.

Note que qualquer função real bem comportada da forma $f(x \pm ct)$ é solução da Eq. (2.1). Se escolhermos uma função localizada, poderemos construir um pacote de ondas que viajará com velocidade uniforme sem distorção da forma, pois todos os componentes de onda plana possuem a mesma velocidade $c = \frac{\omega}{k}$. Além disso, a equação de onda é linear, portanto, dadas duas soluções $f_1(x \pm ct)$ e $f_2(x \pm ct)$, sua soma também é uma solução. Podemos então ressaltar uma característica bem conhecida dessa solução:

1. Retenção da forma e velocidade do pacote de onda.

Mesmo que adicionemos termos simples à Eq. (2.1), a característica (1) tende a ser destruída (Rajaraman, 1994). Veja, por exemplo, a equação

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 c^2) \phi = 0, \quad (2.3)$$

chamada de equação de *Klein-Gordon*. Note que a diferença entre a Eq. (2.3) e a Eq. (2.1) dá-se apenas pela presença do termo $m^2 c^2$. A equação de *Klein-Gordon* ainda é linear e tem como solução um conjunto de ondas planas, mas, neste caso, teremos $\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4$. Portanto, diferentes comprimentos de onda viajarão com diferentes velocidades e a equação torna-se dispersiva (a característica (1) é perdida).

Poderíamos ainda ter adicionado um termo não linear à Eq. (2.1) como ϕ^3 ,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) + \phi^3(x, t) = 0, \quad (2.4)$$

mas, neste caso, também haverá perda da característica (1) (Rajaraman, 1994).

É possível, no entanto, que para equações com termos não lineares e dispersivos seus efeitos balanceiem-se um ao outro de tal maneira que as soluções possam satisfazer a característica (1).

O caso mais simples onde essas equações aparecem é derivado de sistemas governados por um único campo escalar real em duas dimensões (sendo uma temporal e outra espacial). Consideremos que a dinâmica do campo seja regida pela seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi), \quad (2.5)$$

com $c = 1$ e $x^\mu = (t, x)$. Usamos a notação na qual pontos correspondem às derivadas temporais e linhas às derivadas espaciais, nesse caso apenas a dimensão x . Um quesito essencial para obter-se defeitos é impor que o potencial $U(\phi)$ gere um conjunto de pontos críticos, $\{\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n\}$, tal que $(\frac{dU}{d\phi} = 0)$ para $\phi = \bar{\phi}_i$ e $U(\bar{\phi}_i) = 0$ com $i = 1, 2, \dots, n$.

Aplicando o princípio variacional a essa Lagrangiana, obtemos a seguinte equação de movimento,

$$\ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (2.6)$$

da qual estudaremos as soluções estáticas, $\phi = \phi(x)$. Entretanto, sua evolução temporal pode ser encontrada aplicando-se as transformações de Lorentz (Rajaraman, 1994), como veremos mais a frente. Para soluções independentes do tempo, a equação de movimento reduz-se à:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dU}{d\phi}. \quad (2.7)$$

Essa é a equação de movimento para o campo escalar ϕ , sendo que os termos não lineares dependem da escolha do potencial $U(\phi)$. Para uma análise associada à topologia, consideraremos como exemplo o seguinte potencial:

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{8}(\phi^2 - \bar{\phi}^2)^2, \quad (2.8)$$

ou seja, com pontos $U(\bar{\phi}_i) = 0$ e $i = 1, 2$. Teremos dois novos vácuos correspondendo às configurações de campos clássicos, $\phi = \pm \bar{\phi}$, veja Fig. 1. A quebra de simetria e consequente transição de fase é um mecanismo que pode gerar massa às partículas, com

$m^2 = \lambda\bar{\phi}^2$. No modelo que escolhemos, com uma dimensão espacial, ϕ e $\bar{\phi}$ são adimensionais, e λ tem dimensão de massa ao quadrado. Em uma dimensão espacial as fronteiras do espaço unidimensional consistem nos dois pontos críticos do potencial, ocorrendo em $x = -\infty$ e em $x = +\infty$. Esta topologia da fronteira espacial é espelhada pela topologia do espaço de configurações de vácuo dos campos, que também consiste em dois pontos, $\phi = -\bar{\phi}$ e $\phi = +\bar{\phi}$. Um mapa trivial mapeia ambos os pontos das fronteiras espaciais no mesmo valor de campo (somente $-\bar{\phi}$ ou somente $+\bar{\phi}$). Já no mapa identidade, $x = -\infty$ é mapeado em $\phi = -\bar{\phi}$ e $x = +\infty$ é mapeado em $\phi = +\bar{\phi}$. Esse estado requer energia, pois o campo deve interpolar entre $\phi = -\bar{\phi}$ e $\phi = +\bar{\phi}$ (Bernardini, 2015).

Essa questão energética foi resolvida inicialmente por Bogomol'nyi (1976). As equações de Bogomol'nyi são na realidade um vínculo imposto na energia do sistema para que este seja estável. O funcional da energia é reescrito de maneira que, para minimizá-la, basta resolver uma equação diferencial de primeira ordem. Uma abordagem direta para resolver o problema é procurar uma solução de energia mínima independente do tempo para as equações de campos, impondo que (Bernardini, 2015),

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \pm\bar{\phi}. \quad (2.9)$$

A solução de interesse é independente do tempo, dessa forma a expressão da densidade de energia da solução apresenta a contribuição de dois termos, o gradiente e o potencial,

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + U(\phi). \quad (2.10)$$

Ao integrar a quantidade da Eq. (2.10), podemos definir a energia total (ou massa topológica) referente ao campo,

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx, \quad (2.11)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} - \sqrt{2U(\phi)} \right)^2 + \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2U(\phi)} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} - \sqrt{2U(\phi)} \right)^2 + \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} d\phi \sqrt{2U(\phi)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Devido ao fato do primeiro termo da equação acima ser quadrático e positivo, a energia mínima ocorre quando o mesmo se anula. Dessa forma obtemos,

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2U(\phi)}, \quad (2.13)$$

que leva a

$$E_{min} = M = \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} d\phi \sqrt{2U(\phi)} = \frac{1}{2} \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} d\phi \sqrt{\lambda} |\phi^2 - \bar{\phi}^2| = \frac{2m}{3} \frac{m^2}{\lambda}. \quad (2.14)$$

Através dessa análise notamos que $M \gg m$ no caso de um acoplamento fraco, com $\lambda \ll m^2$.

A solução estável com energia localizada é conhecida por estado BPS (Eugène Bogomolny, Manoj Prasad, e Charles Sommerfield), ou limite de Bogomolny-Prasad-Sommerfield. Ela é obtida ao integrar-se a Eq. (2.13):

$$x - x_0 = \pm \int \frac{d\bar{\phi}}{[2U(\bar{\phi})]^{1/2}}, \quad (2.15)$$

em que x_0 , a constante de integração, é um ponto do espaço onde o campo tem valor $\phi(x_0)$. Uma vez conhecidos x_0 e $\phi(x_0)$, a solução $\phi(x)$ pode ser obtida explicitamente da Eq. (2.15). Isso pode ser feito analiticamente dependendo da forma de $U(\phi)$. Note que a variação de x_0 enquanto $\phi(x_0)$ é mantido fixo simplesmente translada a solução no eixo x .

Para o potencial utilizado como exemplo, a solução é:

$$\phi(x) = \bar{\phi} \tanh \left[\frac{m}{2}(x - x_0) \right], \quad (2.16)$$

sendo que a densidade de energia está localizada em torno de $x = x_0$, e vai para zero exponencialmente se $|x - x_0| > 1/m$.

Recuperamos aqui a característica (1) requisitada no início deste capítulo, uma solução das equações de campo clássicas com uma densidade de energia que está localizada no espaço e que não se dissipa ou altera a sua forma com o tempo. Neste caso, a sua existência está relacionada com a topologia das fronteiras de espaço e a topologia do conjunto de vácuos, além da existência de um mapa não trivial a partir das fronteiras de espaço para o conjunto de vácuos.

Dada a Eq. (2.16) podemos obter outras soluções que satisfazem (1) realizando um *boost* de Lorentz, de modo que estas soluções assumem a forma de

$$\phi(t, x) = \bar{\phi} \tanh \left[\frac{1}{2} \gamma m (\beta t - x + x_0) \right], \quad (2.17)$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$ e $E = \gamma M$ é a energia correspondente, assim como o momento é dado por $p = \gamma \beta M$ obtido da integração do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ com $\mu = 1 = \nu$, i.e., $T^{01} = (d\phi/dx)\dot{\phi}$. Notamos ainda que esse tipo de solução com energia

localizada comporta-se de maneira muito semelhante a uma partícula (Rajaraman, 1994).

O exemplo analisado refere-se ao caso em que $U(\phi)$ apresenta mínimos degenerados, no qual $\phi(x)$ tende a um dos $\bar{\phi}_i(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e a algum outro quando $x \rightarrow -\infty$. Portanto, a solução do sistema fica delimitada em setores topológicos caracterizados por $(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_{i+1})$ ou $(\bar{\phi}_{i+1}, \bar{\phi}_i)$. Quando $U(\phi)$ tiver um único mínimo, $\phi = \bar{\phi}_i$, a solução deve satisfazer $\phi \rightarrow \bar{\phi}_i$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Com isso, podemos definir, desprezando-se quaisquer constantes, a quantidade chamada de carga topológica,

$$Q = |\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)|. \quad (2.18)$$

Esta carga estabelece a terminologia que permeia a literatura e este trabalho. Se o potencial que governa o movimento do campo tiver mínimos degenerados, a solução apresentará carga topológica e, por isso, será chamada de defeito topológico ou tipo *kink*. Já as soluções governadas por potenciais com um único $\bar{\phi}_i$ e que não apresentam carga topológica serão chamadas de defeitos não topológicos ou tipo *lump*. Note que, apesar de chamar-se massa topológica, a quantidade definida na Eq. (2.11) existe para ambos os defeitos. O comportamento genérico dos potenciais, que geram tanto um quanto vários pontos de mínimo, está representado na Fig. 3 e o respectivo comportamento das soluções está representado qualitativamente na Fig. 4.

A presença de não linearidades nas equações diferenciais dificulta a tarefa de encontrar soluções analíticas explícitas e, frente a isso, várias técnicas foram sugeridas para resolver essas equações através de procedimentos de deformação. Neste trabalho, estudaremos o procedimento cíclico de deformação através do formalismo de primeira ordem BPS. O procedimento cíclico permite calcular novos defeitos a partir de uma solução escolhida inicialmente inserida em operações de deformação sucessivas, unidirecionais e reversíveis. Como as equações de Bogomol'nyi (1976) não envolvem o tempo, suas soluções são estáticas. Descreveremos no próximo capítulo a aplicação desse mecanismo ao bem conhecido modelo $\lambda\chi^4$.

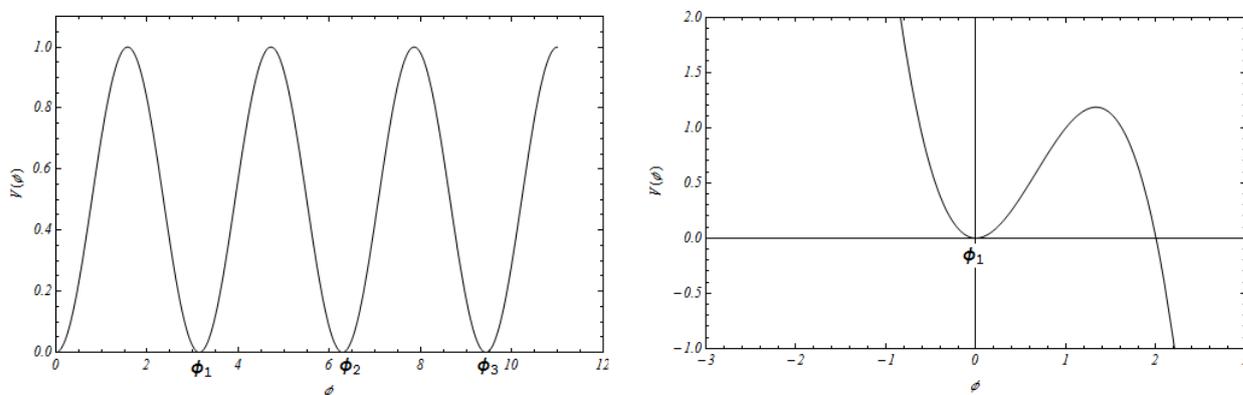


Figura 3: Descrição qualitativa de um potencial com mínimos degenerados (esquerda) e um potencial gerador de um único ponto de mínimo (direita).

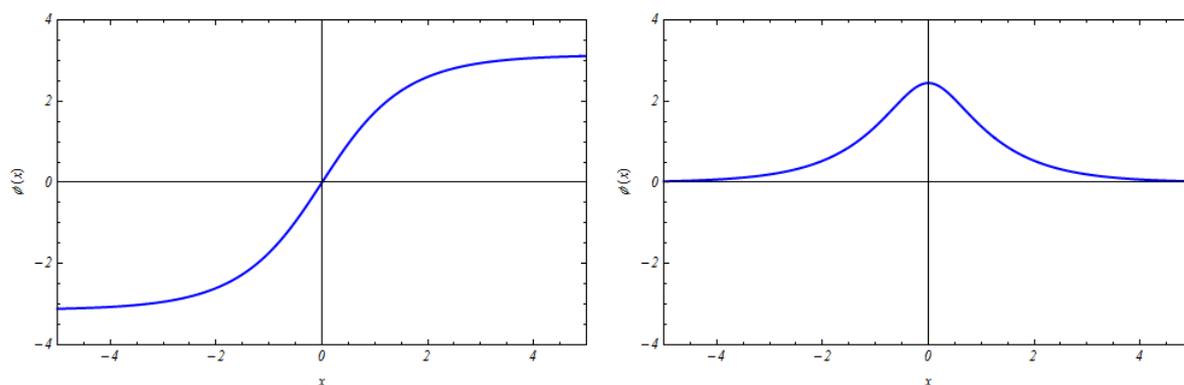


Figura 4: Descrição qualitativa da solução topológica (esquerda), derivada de um potencial com mínimos degenerados e da solução não topológica (direita), derivada de um potencial com um único ponto de mínimo $\bar{\phi}_i$.

3 *Deformações cíclicas e o modelo $\lambda\chi^4$*

Com o propósito de encontrar novos defeitos através do formalismo de primeira ordem, introduziremos um conjunto de regras sistemáticas baseado em funções de deformação trigonométricas e hiperbólicas. É possível encontrar uma variedade de soluções tipo *kink* e tipo *lump* envolvendo essas deformações. Nossa análise, no entanto, concerne-se às expressões analíticas para as funções de deformação que garantem a existência de relações de vínculo entre as massas dos defeitos pertencentes a cada cadeia.

As soluções BPS e suas respectivas distribuições localizadas de energia serão obtidas analiticamente para cadeias 3 e 4-cíclicas acionadas por um defeito previamente conhecido. Iniciaremos o desenvolvimento do processo de deformação analisando uma cadeia genérica com $N + 2$ ciclos.

3.1 Procedimento sistemático para deformações $N+2$ -cíclicas

Acionando a cadeia de deformação através de um defeito conhecido, que chamaremos de χ , é possível construir $N+2$ ciclos através da aplicação da regra da cadeia vinculada por relações fundamentais hiperbólicas e trigonométricas (Bernardini; da Rocha, 2013). A operação generalizada de λ -deformações, com $\lambda = 0, 1, 2, \dots, N$ é efetuada pela derivada λ dada por

$$g^{[\lambda]}(\phi^{[\lambda]}) = \frac{d\phi^{[\lambda]}}{d\phi^{[\lambda-1]}}, \quad (3.1)$$

onde $\phi^{[\lambda]}$ são campos escalares reais correspondentes às estruturas de defeitos construídas através de uma cadeia $N+2$ -cíclica de deformações acionada por $\chi \equiv \chi(s) \sim \phi^{[-1]}$, de tal forma que tenhamos efetivamente $\phi^{[\lambda]} \equiv \phi^{[\lambda]}(\chi)$.

A cadeia hiperbólica de deformações (Bernardini; da Rocha, 2013) é dada por

$$\begin{aligned}
\phi_{\chi}^{[0]} &= \tanh(\chi), \\
\phi_{\chi}^{[1]} &= \tanh(\chi)\operatorname{sech}(\chi), \\
\phi_{\chi}^{[2]} &= \tanh(\chi)\operatorname{sech}(\chi)^2, \\
&\vdots \\
\phi_{\chi}^{[N-1]} &= \tanh(\chi)\operatorname{sech}(\chi)^{N-1}, \\
\phi_{\chi}^{[N]} &= \operatorname{sech}(\chi)^N,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde o subíndice denota a derivada correspondente, que através de integrações diretas leva à

$$\begin{aligned}
\phi^{[0]}(\chi) &= \ln[\cosh(\chi)], \\
\phi^{[1]}(\chi) &= -\operatorname{sech}(\chi), \\
\phi^{[2]}(\chi) &= -\frac{1}{2}\operatorname{sech}(\chi)^2, \\
&\vdots \\
\phi^{[N-1]}(\chi) &= -\frac{1}{N-1}\operatorname{sech}(\chi)^{N-1}, \\
\phi^{[N]}(\chi) &= \sinh(\chi) {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1+N}{2}, \frac{3}{2}, -\sinh(\chi)^2\right],
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica de Gauss e as constantes arbitrárias de integração foram suprimidas, pois não são efetivas nesse cenário.

A partir das Eqs. (3.2-3.3) é possível identificar que

$$g^{[\lambda]}(\phi^{[\lambda]}) = \operatorname{sech}(\chi) \equiv \exp[-\phi^{[0]}], \quad \lambda = 1, 2, \dots, N-1, \tag{3.4}$$

$$g^{[N]}(\phi^{[N]}) = 1/\sinh(\chi), \tag{3.5}$$

e

$$\prod_{\lambda=1}^{N-1} g^{[\lambda]}(\phi^{[\lambda]}) = \frac{d\phi^{[N-1]}}{d\phi^{[0]}} = \operatorname{sech}(\chi)^{N-1} \equiv \exp[-(N-1)\phi^{[0]}], \tag{3.6}$$

através do qual a expressão completa para a regra da cadeia das deformações $N+2$ -cíclicas pode ser escrita como

$$\frac{d\phi^{[0]}}{d\chi} \prod_{\lambda=1}^N g^{[\lambda]}(\phi^{[\lambda]}) \frac{d\chi}{d\phi^{[N]}} = 1, \tag{3.7}$$

de onde é possível identificar $N+2$ funções de deformação fechando o ciclo.

Assumindo uma parametrização em termos das funções BPS generalizadas (Bogomol'nyi, 1976), temos

$$\begin{aligned} y_{\phi^{[\lambda]}}^{[\lambda]} &= \frac{d\phi^{[\lambda]}}{ds} = y_{\phi^{[\lambda-1]}}^{[\lambda-1]} g^{[\lambda]}(\phi^{[\lambda]}) = y_{\phi^{\lambda-r}}^{[\lambda-r]} g^{[\lambda-r+1]}(\phi^{[\lambda-r+1]}) \\ &= w_\chi \phi_\chi^{[\lambda]}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

com $w_\chi = d\chi/ds$. Nesse caso, a relação de vínculo é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{N-1} (y_{\phi^{[\lambda]}}^{[\lambda]})^2 &= (y_{\phi^{[0]}}^{[0]})^2 \sum_{\lambda=0}^{N-1} \left(\frac{d\phi^{[\lambda]}}{d\phi^{[0]}} \right)^2 \\ &= w_\chi^2 \sum_{\lambda=0}^{N-1} (\phi_\chi^{[\lambda]})^2 = w_\chi^2 \tanh(\chi)^2 \sum_{\lambda=0}^{N-1} (\operatorname{sech}(\chi))^{2\lambda} \\ &= w_\chi^2 \tanh(\chi)^2 \frac{1 - \operatorname{sech}(\chi)^{2N}}{1 - \operatorname{sech}(\chi)^2} = w_\chi^2 (1 - \operatorname{sech}(\chi)^{2N}) \\ &= w_\chi^2 [1 - (\phi_\chi^{[N]})^2] = w_\chi^2 - (y_{\phi^{[N]}}^{[N]})^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que leva à

$$\sum_{\lambda=0}^N (y_{\phi^{[\lambda]}}^{[\lambda]})^2 = w_\chi^2. \quad (3.10)$$

Portanto o resultado preliminar relevante (Bernardini; da Rocha, 2013) é que as massas topológicas seguem a relação de vínculo dada por

$$\sum_{\lambda=0}^N (M^{\phi^{[\lambda]}}) = M^\chi. \quad (3.11)$$

Seguindo o procedimento acima, uma cadeia trigonométrica de deformação também pode ser obtida (Bernardini; da Rocha, 2013) mudando-se concomitantemente $\tanh(\chi) \mapsto -\sin(\chi)$ e $\operatorname{sech}(\chi) \mapsto \cos(\chi)$ nas Eqs. (3.2), de tal forma que

$$\begin{aligned} \phi^{[0]}(\chi) &= \cos(\chi), \\ \phi^{[1]}(\chi) &= \frac{1}{2} \cos(\chi)^2, \\ \phi^{[2]}(\chi) &= \frac{1}{3} \cos(\chi)^3, \\ &\vdots \\ \phi^{[N-1]}(\chi) &= \frac{1}{N} \cos(\chi)^N, \\ \phi^{[N]}(\chi) &= -\frac{\cos(\chi)^{N+1}}{N+1} {}_2F_1 \left[\frac{1+N}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+N}{2}, \cos(\chi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Essa sequência resulta em um conjunto de vínculos análogos àqueles descritos pelas

Eqs. (3.10-3.11).

Essencialmente, definindo um conjunto N -finito de funções bijetoras hiperbólicas e trigonométricas com derivadas diferentes de zero, dispomos de todas as ferramentas necessárias e suficientes para realizar as deformações $N + 2$ -cíclicas com uma definição sistemática do vínculo entre as massas topológicas.

Uma vez desenvolvida essa ferramenta, vamos aplicá-la em cadeias com funções hiperbólicas e trigonométricas de deformação acionadas pela solução tipo *kink* derivada do modelo $\lambda\chi^4$, (Bernardini; da Rocha, 2013). As soluções BPS e suas respectivas distribuições de energia localizada serão obtidas analiticamente para as diferentes cadeias com 3 e 4 ciclos. Uma característica dessas cadeias é que elas não privilegiam um tipo de defeito específico e, através de um defeito inicial que a acionará, podem surgir soluções tipo *kink* ou tipo *lump* dentro do ciclo.

3.2 Modelo $\lambda\chi^4$

O ponto de partida desse procedimento $N + 2$ -cíclico será a teoria adimensional $\lambda\chi^4$ com um potencial escalar dado por

$$T(\chi) = \frac{1}{2}w_\chi^2 = \frac{1}{2}(1 - \chi^2)^2, \quad (3.13)$$

com $\lambda = 1$. Através do qual, resolvendo a equação de movimento,

$$\frac{d^2}{ds^2}\chi(s) = \frac{d}{d\chi}T(\chi) = w_\chi w_{\chi\chi}, \quad (3.14)$$

é possível obter a solução estática descrita por um *kink* topológico (sinal +) (ou anti-*kink* com sinal -) como

$$\chi(s) = \pm \tanh(s) \quad \text{com} \quad w_\chi = \text{sech}(s)^2. \quad (3.15)$$

Escolhemos seguir a convenção do sinal adotada em Avelar et al. (2008), portanto faremos a análise para a solução com sinal +. Note também que a coordenada espacial será doravante determinada pela letra s .

O potencial escolhido $T(\chi)$ engendra um ponto de máximo em $\chi^{Max} = 0$ e dois pontos críticos, χ_\pm^0 , que também são funções *zeros*, i. e.

$$T(\chi_\pm^0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dT}{d\chi} \right|_{\chi=\chi_\pm^0} = 0, \quad (3.16)$$

que correspondem aos valores assintóticos da solução *kink*,

$$\chi_{\pm}^0 = \chi(s \rightarrow \pm\infty) = \pm 1, \quad (3.17)$$

chamados de índices topológicos. A carga topológica é dada correspondentemente por

$$Q^x = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} ds w_{\chi} \right| = |\chi_+^0 - \chi_-^0| = 2, \quad (3.18)$$

onde qualquer fator multiplicativo dimensional foi suprimido desde o início. A massa topológica do defeito, que corresponde à energia total da solução localizada, é dada por

$$M^x = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} ds w_{\chi}^2 \right| = 4/3. \quad (3.19)$$

Já a densidade de energia pode ser identificada pela expressão abaixo

$$\rho(\chi(s)) = w_{\chi}^2 = \text{sech}(s)^4. \quad (3.20)$$

A seguir, apresentamos a aplicação do método de deformação para cadeias 3 e 4-cíclicas descrito em Bernardini e da Rocha (2013).

3.2.1 Procedimento sistemático para deformações 3-cíclicas

Utilizando o formalismo de primeira ordem, consideramos um conjunto de três defeitos deformados ciclicamente, $\chi(s)$, $\psi(s)$ e $\phi(s)$. De de tal maneira que o correspondente procedimento 3-cíclico de deformação possa ser efetuado através das seguintes equações acopladas:

$$\begin{aligned} w_{\chi} &= \frac{d\chi}{ds} = y_{\phi}\chi_{\phi} = z_{\psi}\chi_{\psi}, \\ y_{\phi} &= \frac{d\phi}{ds} = z_{\psi}\phi_{\psi} = w_{\chi}\phi_{\chi}, \\ z_{\psi} &= \frac{d\psi}{ds} = w_{\chi}\psi_{\chi} = y_{\phi}\psi_{\phi}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde do lado direito temos derivadas com relação ao subíndice, com $\alpha_{\beta} = \frac{1}{\beta_{\alpha}}$ para $\alpha, \beta = \phi, \chi, \psi$. As funções α_{β} são indentificadas como funções deformação, ou derivadas auxiliares, que geram novas famílias de defeitos. Note que as Eqs. (3.21) são as mesmas que as Eqs. (3.1) para uma cadeia com 1 + 2 ciclos. Os potenciais BPS derivados ciclicamente pertencentes a cadeia de deformações 3-cíclicas são:

$$T(\chi) = \frac{1}{2}w_{\chi}^2 \Leftrightarrow V(\phi) = \frac{1}{2}y_{\phi}^2 \Leftrightarrow W(\psi) = \frac{1}{2}z_{\psi}^2 \Leftrightarrow T(\chi) = \frac{1}{2}w_{\chi}^2, \quad (3.22)$$

consequentemente as densidades de energia serão

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= y_\phi^2, \\ \rho_\psi &= z_\psi^2.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Note que pela definição $\alpha_\beta = 1/\beta_\alpha$ as funções de deformação são vinculadas através da seguinte relação:

$$\psi_\phi \phi_\chi \chi_\psi = 1.\tag{3.24}$$

A - Deformações hiperbólicas

Vamos considerar que as derivadas auxiliares, ou funções de deformação, sejam

$$\begin{aligned}\phi_\chi^{(n)} &= \operatorname{sech}(n\chi), \\ \psi_\chi^{(n)} &= \tanh(n\chi).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Ao integrá-las encontramos os dois primeiros defeitos deformados desse modelo:

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(\chi) &= \frac{2}{n} \arctan \left[\tanh \left(\frac{n\chi}{2} \right) \right], \\ \psi^{(n)}(\chi) &= -\frac{1}{n} \ln \left[\frac{\cosh(n\chi)}{\cosh(n)} \right].\end{aligned}\tag{3.26}$$

Através da relação fundamental para funções hiperbólicas,

$$\tanh(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2 = 1,\tag{3.27}$$

encontramos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}w_\chi^2 &= w_\chi^2 [\tanh(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2] \\ &= w_\chi^2 [\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2}] \\ &= z_\psi^2 + y_\phi^2,\end{aligned}\tag{3.28}$$

que vincula, como desejado, as distribuições de energia para os defeitos deformados 3-ciclicamente.

Assumindo os resultados da Eq. (3.15), as funções deformadas na Eq. (3.21) são obtidas concomitantemente como:

$$y_\phi = w_\chi \phi_\chi = (1 - \chi^2) \operatorname{sech}(n\chi),$$

$$z_\psi = w_\chi \psi_\chi = (1 - \chi^2) \tanh(n\chi). \quad (3.29)$$

A primeira coluna da Fig. 5 mostra a dependência analítica em s para os defeitos deformados 3-cíclicamente obtidos através das funções de deformação dadas na Eq. (3.25). Os defeitos topológicos gerados na deformação são do tipo *kink* para $\phi^{(n)}$ e do tipo *lump* para $\psi^{(n)}$. Os gráficos mostram os resultados para o defeito primitivo, $\chi(s)$, $w_\chi(s) = d\chi/ds$ e $\rho(\chi(s))$; e para os correspondentes defeitos deformados, $\phi^{(n)}(s)$, $y_\phi(s) = d\phi^{(n)}/ds$ e $\rho(\phi^{(n)}(s))$; $\psi^{(n)}(s)$, $z_\psi(s) = d\psi^{(n)}/ds$ e $\rho(\psi^{(n)}(s))$. Escolhemos $n = k\pi/8$ com $k \in [1, 4]$ para descrever a dependência analítica com o parâmetro livre n .

Os correspondentes potenciais BPS para o mesmo conjunto de n valores, $W(\psi)$ e $V(\phi)$, são descritos na primeira coluna da Fig. 6. O potencial $V(\phi)$ gera um conjunto de pontos críticos $\phi_\pm^{(n)0}$ que correspondem aos valores assintóticos da solução tipo *kink*, isto é,

$$\phi_\pm^{(n)0} = \phi^{(n)}(x \rightarrow \pm\infty) = \pm \frac{2}{n} \arctan \left[\tanh \left(\frac{n}{2} \right) \right], \quad (3.30)$$

com carga topológica dada pela seguinte equação:

$$Q_{(n)}^\phi = \frac{4}{n} \arctan \left[\tanh \left(\frac{n}{2} \right) \right]. \quad (3.31)$$

As cargas topológicas estão representadas na Fig. 10.

As massas topológicas (semi)analiticamente obtidas como funções do parâmetro livre n foram:

$$M_{(n)}^\phi = \frac{2}{n^2} \ln [2 + e^{(2n)} + e^{(-2n)}] - \frac{1}{n^3} \left\{ Li_2 [-e^{(-2n)}] - Li_2 [-e^{(2n)}] \right\}, \quad (3.32)$$

em que

$$Li_s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j^s} \quad (3.33)$$

é a função Jonquière (polilogaritma).

A solução tipo *lump* $\psi^{(n)}(s)$ é obtida de um potencial $W(\psi)$. Este gera um ponto de mínimo $\psi^{(n)0} = 0$ e um ponto de fronteira $\psi^{(n)0} = \psi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = \frac{1}{n} \ln [\cosh(n)]$, onde o potencial é zero e sua derivada é diferente de zero. As massas topológicas obtidas como funções do parâmetro livre n foram:

$$M_{(n)}^\psi = \frac{4}{3} - \frac{2}{n^2} \ln [2 + e^{(2n)} + e^{(-2n)}] + \frac{1}{n^3} \left\{ Li_2 [-e^{(-2n)}] - Li_2 [-e^{(2n)}] \right\}. \quad (3.34)$$

B - Deformações trigonométricas

O procedimento através de deformações trigonométricas é análogo ao apresentado para funções hiperbólicas. Nesse caso, vamos considerar que as derivadas auxiliares sejam

$$\begin{aligned}\phi_\chi^{(n)} &= \cos(n\chi), \\ \psi_\chi^{(n)} &= -\sin(n\chi).\end{aligned}\quad (3.35)$$

Ao integrá-las, encontramos os defeitos deformados trigonometricamente:

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{n} \sin(n\chi), \\ \psi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{n} [\cos(n\chi) - \cos(n)].\end{aligned}\quad (3.36)$$

Para funções trigonométricas também há uma relação fundamental que as relaciona,

$$\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2 = 1, \quad (3.37)$$

e que juntamente com as relações da Eq. (3.23), nos permite encontrar a expressão:

$$\begin{aligned}w_\chi^2 &= w_\chi^2 [\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2] \\ &= w_\chi^2 [\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2}] \\ &= z_\psi^2 + y_\phi^2.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Mais uma vez encontramos diretamente uma relação de vínculo para as distribuições de energia, agora associadas aos defeitos deformados trigonometricamente.

Assumindo que $\chi(s)$ é dado pela Eq. (3.15), as funções deformadas na Eq. (3.21) são

$$\begin{aligned}y_\phi &= w_\chi \phi_\chi = (1 - \chi^2) \cos(n\chi), \\ z_\psi &= w_\chi \psi_\chi = -(1 - \chi^2) \sin(n\chi).\end{aligned}\quad (3.39)$$

As segunda e terceira colunas da Fig. 5 mostram a dependência analítica em s para os defeitos topológicos deformados 3-cíclicamente obtidos através das funções de deformação trigonométricas dadas na Eq. (3.35). Como no caso hiperbólico, o defeito primitivo da Eq. (3.15) leva a defeitos tipo *kink* para $\phi^{(n)}$ e defeitos tipo *lump* para $\psi^{(n)}$. Escolhemos $n = k\pi/8$ com $k \in [1, 4]$ na segunda coluna e $k \in [11, 14]$ na terceira coluna. Vemos que para grandes valores de k há propriedades oscilatórias introduzidas pelas deformações trigonométricas. Ao comparar os resultados da primeira coluna (deformação hiperbólica)

com aqueles da segunda coluna, verificamos que para pequenos valores de n o padrão oscilatório devido às deformações trigonométricas desaparece, e as deformações hiperbólicas e trigonométricas assemelham-se.

Os correspondentes potenciais BPS, $W(\psi)$ e $V(\phi)$, para o mesmo conjunto de n parâmetros, são descritos na segunda coluna da Fig. 6. Suprimimos os resultados para grandes valores de n (correspondentes à terceira coluna da Fig. 5) já que os pontos críticos não podem ser vistos através dos gráficos, apesar de ser possível calculá-los. O potencial $V(\phi)$ gera um conjunto de pontos críticos, $\phi_{\pm}^{(n)0}$, que corresponde aos valores assintóticos da solução tipo *kink*, isto é,

$$\phi_{\pm}^{(n)0} = \phi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = \pm \frac{\sin(n)}{n}, \quad (3.40)$$

de tal forma que a carga e a massa topológicas são dadas respectivamente por:

$$Q_{(n)}^{\phi} = 2 \left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \quad (3.41)$$

e

$$M_{(n)}^{\phi} = \frac{2}{3} - \frac{2n \cos(2n) - \sin(2n)}{4n^3}. \quad (3.42)$$

A solução não topológica, tipo *lump*, $\psi^{(n)}(s)$ é obtida através de um potencial $W(\psi)$ que gera um ponto de mínimo, $\psi^0 = 0$, e duas funções *zeros* dadas por:

$$\psi_{\pm}^{(n)0} = \psi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = \frac{[\pm 1 - \cos(n)]}{n}. \quad (3.43)$$

Nesse caso, a correspondente energia total da solução localizada é dada por:

$$M_{(n)}^{\psi} = \frac{2}{3} + \frac{2n \cos(2n) - \sin(2n)}{4n^3}. \quad (3.44)$$

Através das Eqs. (3.28) e (3.38), lembrando que $M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s) ds$, encontramos a seguinte relação de vínculo entre as massas:

$$M_{(n)}^{\psi} + M_{(n)}^{\phi} = M^{\chi} = \frac{4}{3}. \quad (3.45)$$

Essa relação foi verificada tanto para cadeias de deformação 3-cíclicas hiperbólicas como para trigonométricas e seu gráfico está descrito na Fig. 7.

3.2.2 Procedimento sistemático para deformações 4-cíclicas

Nessa seção estendemos a análise realizada anteriormente para uma cadeia de deformação 4-cíclica, com a qual obtivemos uma relação de vínculo modificada envolvendo as massas topológicas. Os resultados analíticos para as cargas e massas topológicas são obtidos de maneira análoga à apresentada nas seções anteriores. Entretanto, as soluções e suas respectivas distribuições de energia localizadas serão meramente ilustradas. Dessa maneira, a análise do limite assintótico envolvendo o cálculo de pontos críticos e *zeros* da função serão suprimidos uma vez que eles podem ser realizados como extensões imediatas dos estudos preliminares.

Vamos considerar um campo escalar adicional φ , que deve ser introduzido em uma nova cadeia de deformação, agora 4-cíclica. O campo χ ainda designa o defeito primitivo que aciona a cadeia. O sistema acoplado será então complementado da seguinte maneira:

$$w_\chi = \frac{d\chi}{ds} = x_\varphi\chi_\varphi = y_\phi\chi_\phi = z_\psi\chi_\psi, \quad (3.46)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} x_\varphi &= w_\chi\varphi_\chi, \\ y_\phi &= w_\chi\phi_\chi, \\ z_\psi &= w_\chi\psi_\chi. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Portanto, os potenciais ciclicamente deformados pertencentes à cadeia de deformação 4-cíclica serão dados por:

$$T(\chi) = \frac{1}{2}w_\chi^2 \Leftrightarrow U(\varphi) = \frac{1}{2}x_\varphi^2 \Leftrightarrow V(\phi) = \frac{1}{2}y_\phi^2 \Leftrightarrow W(\psi) = \frac{1}{2}z_\psi^2 \Leftrightarrow T(\chi) = \frac{1}{2}w_\chi^2. \quad (3.48)$$

Funções deformação hiperbólica e trigonométricas seguirão naturalmente a regra da cadeia dada por:

$$\psi_\phi\phi_\varphi\varphi_\chi\chi_\psi = 1. \quad (3.49)$$

A - Deformações hiperbólicas

Para as deformações hiperbólicas consideramos o conjunto auxiliar de funções de deformação descrito por:

$$\begin{aligned} \psi_\chi^{(n)} &= \tanh(n\chi), \\ \phi_\chi^{(n)} &= \tanh(n\chi)\operatorname{sech}(n\chi), \end{aligned}$$

$$\varphi_\chi^{(n)} = \operatorname{sech}(n\chi)^2, \quad (3.50)$$

que, para um dado w_χ substituído em Eq. (3.47), completa a cadeia de deformação. Através de integrações diretas das funções deformação acima encontramos os defeitos deformados:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(\chi) &= -\frac{1}{n} \ln \left[\frac{\cosh(n\chi)}{\cosh(n)} \right], \\ \phi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{n} [\operatorname{sech}(n\chi) - \operatorname{sech}(n)], \\ \varphi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{n} \tanh(n\chi), \end{aligned} \quad (3.51)$$

com constantes escolhidas de maneira a ajustarem valores ordinários para limites assintóticos. Seguindo as mesmas manipulações matemáticas envolvendo as relações fundamentais de Eq. (3.27), identificamos de maneira direta que a igualdade,

$$\begin{aligned} w_\chi^2 &= w_\chi^2 \left[\tanh(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2 (\tanh(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2) \right] \\ &= w_\chi^2 \left[\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2} + \varphi_\chi^{(n)2} \right] \\ &= z_\psi^2 + y_\phi^2 + x_\varphi^2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

vincula os valores para as massas topológicas dos defeitos deformados de maneira hiperbólica.

A partir desse ponto, a dependência explícita em s é obtida diretamente de $\chi(s)$. Quatro formas diferentes de introduzir o defeito inicial acionador χ são consideradas: a solução tipo *kink* $\lambda\chi^4$,

$$\chi_1(s) = \tanh(s) \text{ (primeira coluna)}, \quad (3.53)$$

uma solução deformada tipo *lump* $\lambda\chi^4$,

$$\chi_2(s) = \operatorname{sech}(s) \text{ (segunda coluna)}, \quad (3.54)$$

a solução deformada com logaritmo tipo *lump* $\lambda\chi^4$ (construída através de um potencial com uma formato de *plateau*),

$$\chi_3(s) = \ln \left[1 + \operatorname{sech}(s)^2 \right] \text{ (terceira coluna)} \quad (3.55)$$

e a solução deformada com formato de sino (mais conhecida pelo termo inglês *bell-shaped*) $\lambda\chi^4$,

$$\chi_4(s) = 2 \left[2 + s^2 \right]^{-1} \text{ (quarta coluna)}. \quad (3.56)$$

Sendo que os últimos três casos são meramente ilustrativos, no sentido que não obti-

vemos expressões analíticas para suas massas topológicas. As funções BPS deformadas dependerão certamente da escolha de $\chi(s)$.

A Fig. 8 mostra a dependência analítica em s para os defeitos deformados em cadeias 4-cíclicas obtidos através de deformações hiperbólicas das funções encontradas na Eq. (3.50). Para o defeito primitivo engendrado pela teoria adimensional $\lambda\chi^4$ (c. f. Eq. (3.53)), obtivemos soluções tipo *kink* apenas para $\varphi^{(n)}$ dada por

$$\varphi^{(n)}(s) = \operatorname{sech}(n \tanh(s))^2, \quad (3.57)$$

com

$$x_\varphi(s) = \operatorname{sech}(s)^2 \operatorname{sech}(n \tanh(s))^2. \quad (3.58)$$

Com a ajuda das Eqs. (3.50), as outras funções BPS são obtidas como:

$$\begin{aligned} y_\phi(s) &= \operatorname{sech}(s)^2 \tanh(n \tanh(s)) \operatorname{sech}(n \tanh(s)), \\ z_\psi(s) &= \operatorname{sech}(s)^2 \tanh(n \tanh(s)). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Essas soluções e todas as outras descritas da segunda à quarta colunas da Fig. 8 correspondem a um tipo de defeito não topológico. Os gráficos mostram os resultados para o defeito primitivo, $\chi(s)$, $w_\chi(s) = d\chi/ds$, e $\rho(\chi(s))$; e para os correspondentes defeitos deformados, $\phi^{(n)}(s)$, $y_\phi(s) = d\phi^{(n)}/ds$, e $\rho(\phi^{(n)}(s))$; $\varphi^{(n)}(s)$, $x_\varphi(s) = d\varphi^{(n)}/ds$, e $\rho(\varphi^{(n)}(s))$; e $\psi^{(n)}(s)$, $z_\psi(s) = d\psi^{(n)}/ds$, e $\rho(\psi^{(n)}(s))$. Estabelecemos $n = k\pi/6$ com k no intervalo entre 1 e 2, espaçado por 0,2, a fim de descrever a dependência analítica no parâmetro livre n .

Assumindo que a solução primitiva tipo *kink* $\lambda\chi^4$ encontrada na Eq. (3.53) acione a cadeia de deformação 4-cíclica discutida acima, a estrutura do defeito deformado tem sua dependência analítica explícita em s obtida através da substituição de $\chi_1(s)$ nos resultados das Eqs. (3.51). Através dessa dependência explícita em s , as cargas topológicas (apenas para as soluções tipo *kink*) e as respectivas massas topológicas podem ser obtidas de maneira direta.

A carga topológica para os novos defeitos deformados tipo *kink*, Fig. 10, obtidas da estrutura de deformações hiperbólicas descrita pelas Eqs. (3.57) são portanto dadas por:

$$Q_{(n)}^\varphi = 2 \frac{\tanh(n)}{n}. \quad (3.60)$$

Enquanto que as massas topológicas obtidas analiticamente como funções do parâmetro

livre n , Fig. 11, são dadas por:

$$\begin{aligned}
M_{(n)}^\psi &= \frac{4}{3} + \frac{\pi^2}{6n^3} - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} \ln [1 + e^{(-2n)}] + \frac{2}{n^3} Li_2 [-e^{(-2n)}], \\
M_{(n)}^\phi &= -\frac{\pi^2}{18n^3} + \frac{2}{3n} + \frac{4}{3n^2} \ln [1 + e^{(-2n)}] \\
&\quad - \frac{2}{3n^3} \left\{ Li_2 [-e^{(-2n)}] + \tanh(n) - n \operatorname{sech}(n)^2 \right\}, \\
M_{(n)}^\varphi &= -\frac{\pi^2}{9n^3} + \frac{4}{3n} + \frac{8}{3n^2} \ln [1 + e^{(-2n)}] \\
&\quad - \frac{2}{3n^3} \left\{ 2Li_2 [-e^{(-2n)}] - \tanh(n) + n \operatorname{sech}(n)^2 \right\}. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

B - Deformações trigonométricas

Vamos agora considerar um novo conjunto de funções auxiliares descritos pelas seguintes funções trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\psi_\chi^{(n)} &= -\sin(n\chi), \\
\phi_\chi^{(n)} &= -\frac{\sin(2n\chi)}{2}, \\
\varphi_\chi^{(n)} &= \cos(n\chi)^2, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

que, para um dado w_χ substituído em Eq. (3.47) completa a cadeia 4-cíclica de deformação. Através da integração direta das funções acima temos:

$$\begin{aligned}
\psi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{n} [\cos(n\chi) - \cos(n)], \\
\phi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{4n} [\cos(2n\chi) - \cos(2n)], \\
\varphi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{4n} [2n\chi + \sin(2n\chi)], \tag{3.63}
\end{aligned}$$

com constantes escolhidas para ajustar valores ordinários para os limites assintóticos. Seguindo as manipulações matemáticas envolvendo as relações fundamentais da Eq.(3.37), identificamos que a igualdade

$$\begin{aligned}
w_\chi^2 &= w_\chi^2 \left[\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2 \left(\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2 \right) \right] \\
&= w_\chi^2 \left[\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2} + \varphi_\chi^{(n)2} \right] \\
&= z_\psi^2 + y_\phi^2 + x_\varphi^2 \tag{3.64}
\end{aligned}$$

vincula os valores para as massas topológicas deformadas de forma trigonométrica.

A Fig. 9 reproduz a dependência analítica em s para os defeitos deformados 4-

ciclicamente produzidos pelas funções trigonométricas acima. Quatro casos diferentes são considerados em correspondência com o defeito primitivo χ através das Eqs.(3.53-3.56), onde novamente os últimos três casos são meramente ilustrativos. Todos os casos descritos na Fig. 9 estão em correspondência com aqueles da Fig. 8 para deformações hiperbólicas. O único defeito tipo *kink*, encontrado nessa cadeia de deformações, é dado por:

$$\varphi^{(n)}(s) = \sin(n \tanh(s))^2, \quad (3.65)$$

com

$$x_\varphi(s) = \operatorname{sech}(s)^2 \sin(n \tanh(s))^2. \quad (3.66)$$

As Eqs. (3.62) levam às outras soluções BPS deformadas, todas da forma *lump*:

$$\begin{aligned} y_\phi(s) &= \operatorname{sech}(s)^2 \sin(n \tanh(s)) \cos(n \tanh(s)), \\ z_\psi(s) &= \operatorname{sech}(s)^2 \sin(n \tanh(s)), \end{aligned} \quad (3.67)$$

uma vez assumido χ da Eq.(3.53). Todas as outras soluções apresentadas na Fig. 9 correspondem a algum tipo de estrutura não topológica na forma de um *lump*.

A fim de identificar e enfatizar o comportamento oscilatório desses novos defeitos deformados, estabelecemos $n = k\pi/6$ com k no intervalo entre 12 e 13, espaçados de 0, 2. É possível inferir que, para pequenos valores de n , da ordem de $n < 2$, o padrão oscilatório das deformações trigonométricas desaparece. Nesse caso, as deformações trigonométricas e hiperbólicas assemelham-se.

Resumindo, uma vez que a solução primitiva tipo *kink* $\lambda\chi^4$ da Eq.(3.53) aciona a cadeia de deformação 4-cíclica discutida acima, cargas topológicas (associadas às soluções tipo *kink*) e massas topológicas podem ser obtidas diretamente da sua dependência explícita em s . A carga topológica para o novo defeito deformado tipo *kink* obtido da estrutura de deformação trigonométrica descrita nas Eqs. (3.66-3.67) é dada por:

$$Q_{(n)}^\varphi = \frac{n + \sin(n) \cos(n)}{n}. \quad (3.68)$$

Já as massas topológicas são dadas por:

$$\begin{aligned} M_{(n)}^\psi &= \frac{2}{3} + \frac{2n \cos(2n) - \sin(2n)}{4n^3}, \\ M_{(n)}^\phi &= \frac{1}{6} + \frac{4n \cos(4n) - \sin(4n)}{128n^3}, \end{aligned}$$

$$M_{(n)}^\varphi = \frac{1}{2} - \frac{64n \cos(2n) + 4n \cos(4n) - 32 \sin(2n) - \sin(4n)}{128n^3}. \quad (3.69)$$

Na Fig. 10, apresentamos a dependência em n das cargas topológicas relacionadas ao defeito deformado $\varphi^{(n)}$, obtido através de deformações hiperbólicas e trigonométricas. Essa figura também inclui os resultados para a carga topológica da solução tipo *kink* relacionada ao campo $\phi^{(n)}$ obtida das deformações 3-cíclicas do modelo $\lambda\chi^4$.

Para finalizar, as massas topológicas obtidas analiticamente como função do parâmetro livre n , para os defeitos deformados ciclicamente relacionadas à solução primitiva derivada do modelo $\lambda\chi^4$ (c. f. Eq. (3.53)), estão apresentadas na Fig. 11. Essa Figura de fato certifica o resultado mais relevante da técnica apresentada: as relações de vínculo determinadas através das Eqs. (3.52) e (3.64) respectivamente para funções deformação hiperbólicas e trigonométricas.

Através da Fig. 11 torna-se direta a verificação de que

$$M_\psi^{(n)} + M_\varphi^{(n)} + M_\phi^{(n)} = M_\chi = \frac{4}{3}, \quad (3.70)$$

para ambos os casos. Além disso, no limite assintótico, $n \rightarrow \infty$, leva a

$$\frac{4}{3} + 0 + 0 = \frac{4}{3}, \quad (3.71)$$

para deformações hiperbólicas, e a

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}, \quad (3.72)$$

para deformações trigonométricas.

Encerra-se neste ponto a abordagem referente ao modelo $\lambda\chi^4$. No próximo capítulo, as cadeias de deformação serão acionadas pela solução tipo *kink* derivada do modelo *sine-Gordon*, (Bernardini; Chinaglia; da Rocha, 2014).

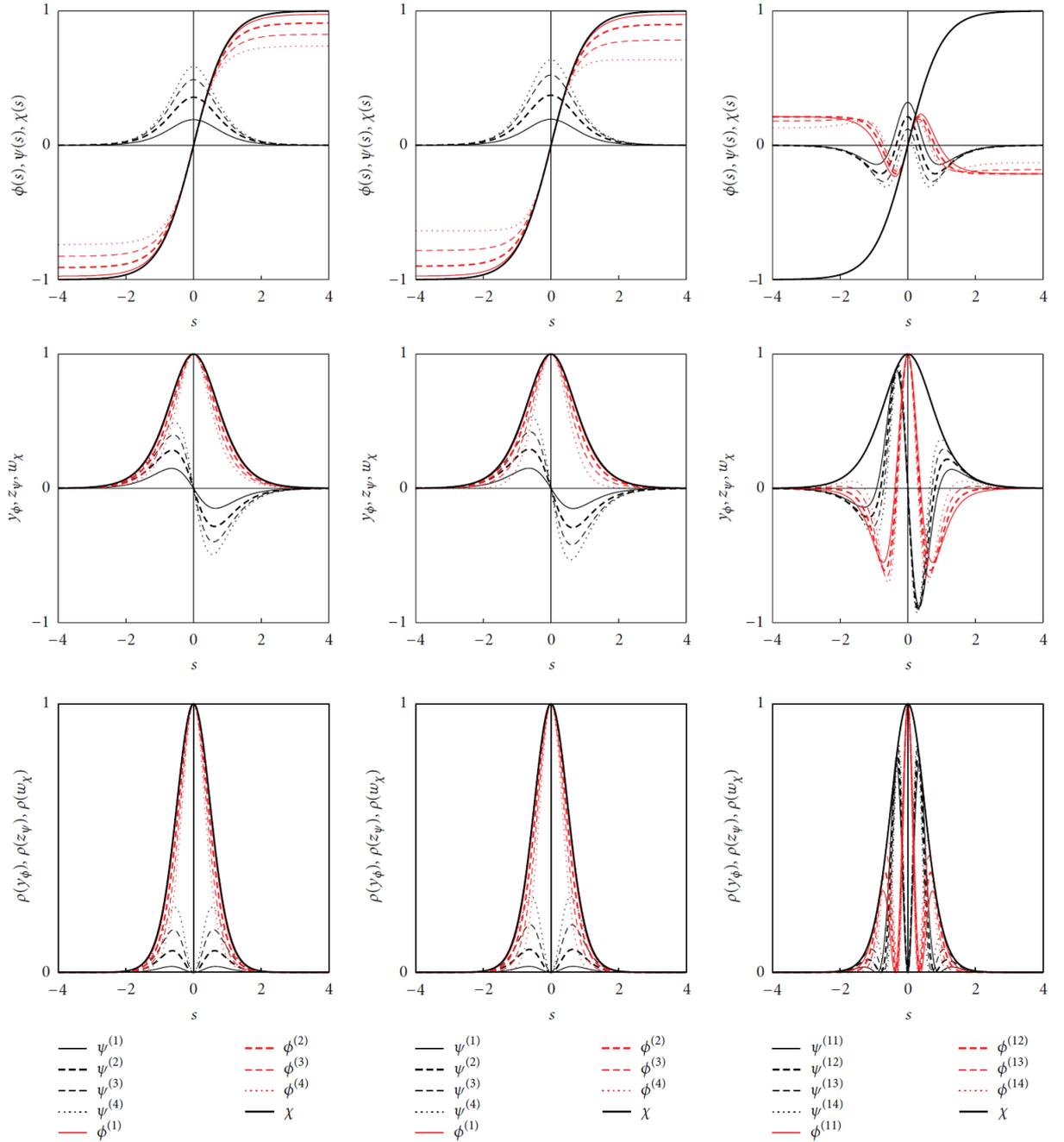


Figura 5: Defeitos deformados 3-ciclicamente obtidos através de funções de deformação hiperbólicas (primeira coluna) e trigonométricas (segunda e terceira colunas). Os resultados são para a solução primitiva tipo *kink* do modelo $\lambda\chi^4$, $\chi(s)$ (linha preta espessa), para os defeitos deformados tipo *kink*, $\psi^{(n)}(s)$ (linhas pretas), e para os defeitos deformados tipo *lump*, $\phi^{(n)}(s)$ (linhas vermelhas). O parâmetro livre n foi estabelecido por $k\pi/8$ com k assumindo os seguintes valores inteiros na primeira/segunda (terceira) colunas: 1(11) para linhas sólidas, 2(12) para linhas tracejadas longas, 3(13) para linhas tracejadas curtas, e 4(14) para linhas pontilhadas. Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

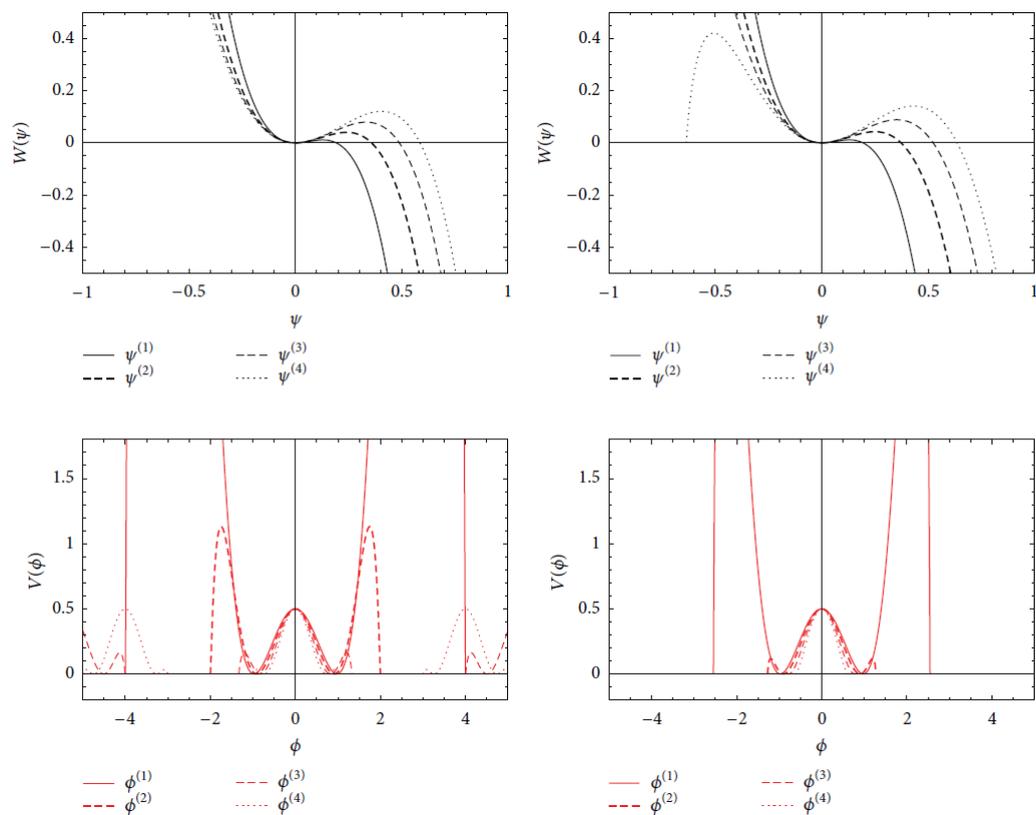


Figura 6: Potenciais deformados 3-ciclicamente obtidos através de funções de deformação hiperbólicas (primeira coluna) e trigonométricas (segunda coluna). Os parâmetros da legenda estão em correspondência com os da primeira e segunda colunas da Fig. (5). Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

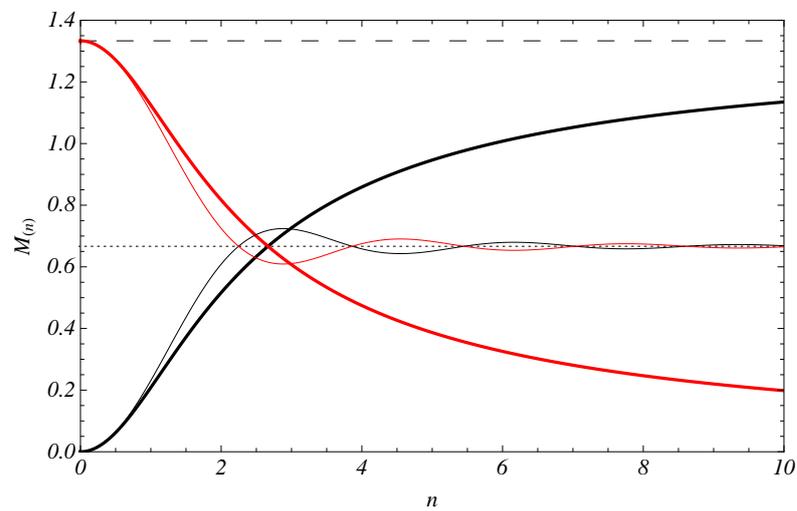


Figura 7: Energia total das soluções localizadas (massas topológicas, $M_{(n)}$) como função do parâmetro n para cadeias 3-cíclicas de deformação hiperbólicas (linhas espessas) e trigonométricas (linhas finas). Os resultados são para $M_{(n)}^{\phi}$ (linhas vermelhas) e $M_{(n)}^{\psi}$ (linhas pretas). Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

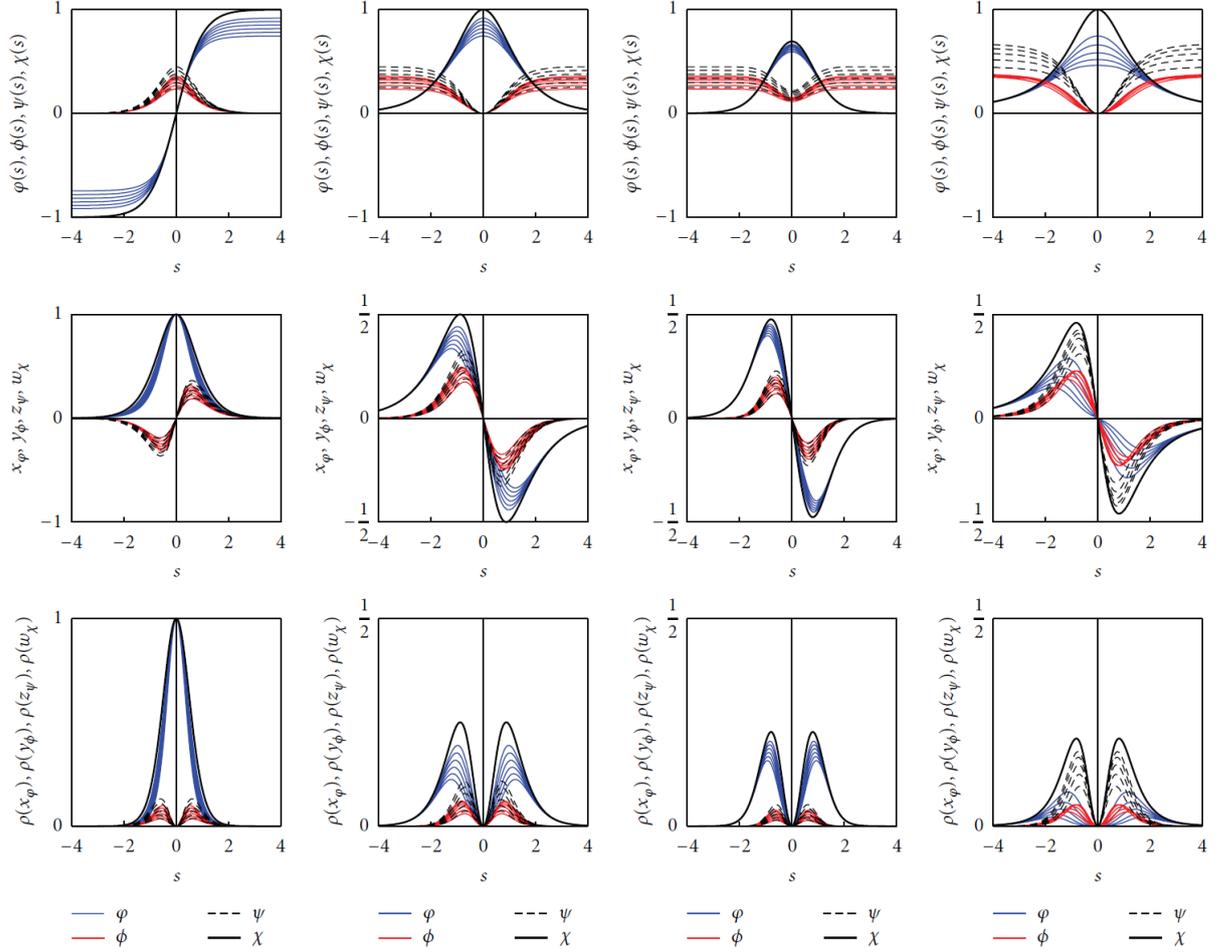


Figura 8: Defeitos deformados 4-cíclicamente obtidos através de funções de deformação hiperbólicas. Os resultados de cada coluna são para quatro soluções primitivas diferentes dadas por $\chi(s)$, em correspondência respectivamente com as Eqs.(3.53-3.56). Os resultados da primeira coluna são para a solução primitiva tipo *kink* do modelo $\lambda\chi^4$, $\chi(s)$ (linha espessa preta), que aciona a cadeia 4-cíclica com os seguintes defeitos tipo *kink* deformados: $\varphi^{(n)}(s)$ (linhas azuis); uma primeira família de defeitos deformados tipo *lump*, $\phi^{(n)}(s)$ (linhas vermelhas); e uma segunda família de defeitos deformados tipo *lump* $\phi^{(n)}(s)$ (linhas pretas finas). Estabelecemos $n = k\pi/6$ com k no intervalo entre 1 e 2, por passos de 0.2 unidades, a fim de descrever qualitativamente o perfil analítico relacionado à n . As segunda, terceira e quarta colunas são meramente ilustrativas. Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

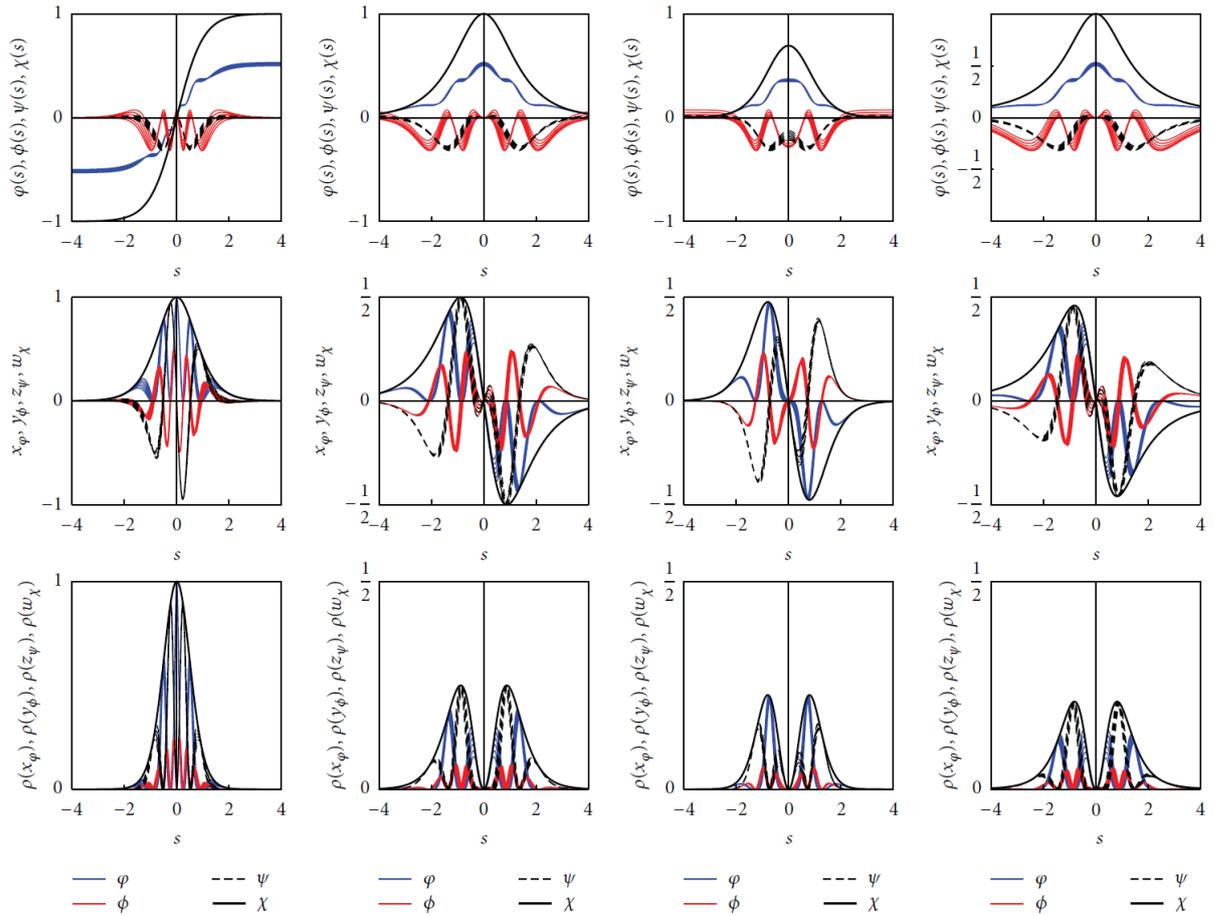


Figura 9: Defeitos deformados 4-cíclicamente através de funções de deformação trigonométricas. Os resultados de cada coluna são acionados pela solução $\chi(s)$, em correspondência com as Eqs.(3.53-3.56). Eles estão em correspondência com àqueles da Fig. 8. Estabelecemos $n = k\pi/6$ com k no intervalo entre 12 e 13, por passo de 0.2 unidades, a fim de descrever o perfil analítico oscilatório relacionado à n , uma vez que para $n \leq 1$ esses gráficos aproximam-se perturbativamente daqueles da Fig. 8. Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

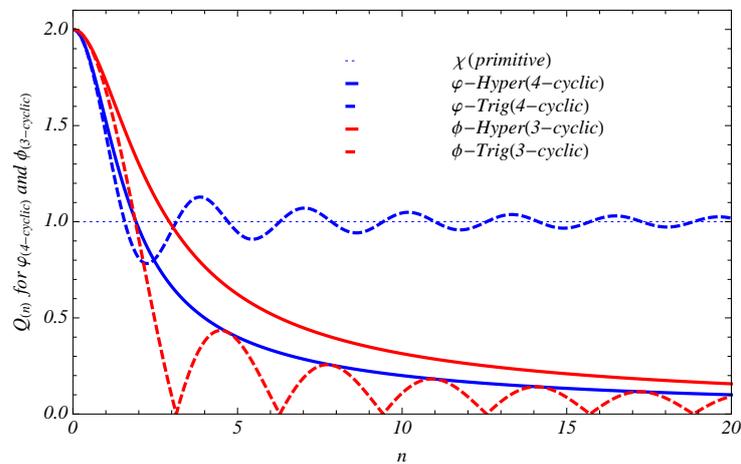


Figura 10: Cargas topológicas, $Q(n)$, como função do parâmetro n para cadeias de deformação hiperbólicas (linhas espessas) e trigonométricas (linhas tracejadas). Os resultados são para as soluções tipo *kink* obtidas de cadeias 4-cíclicas (linhas azuis) e 3-cíclicas (linhas vermelhas) de deformação relacionadas respectivamente à $\varphi^{(n)}$ e $\phi^{(n)}$. Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

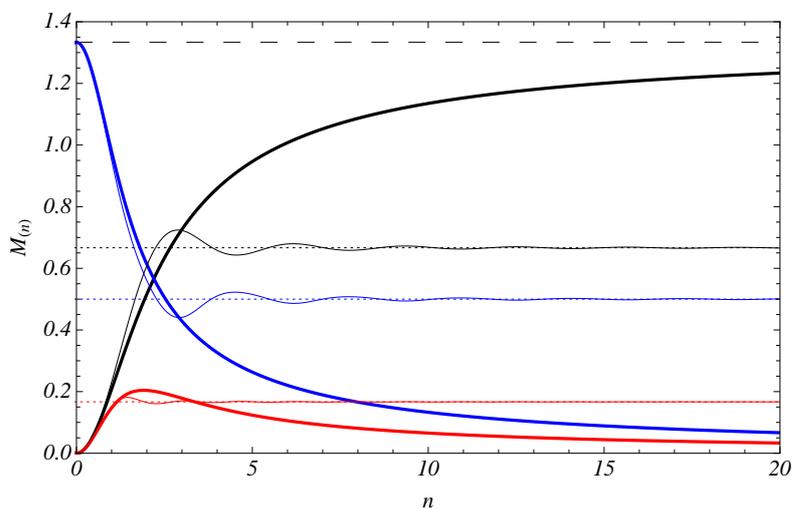


Figura 11: Energia total das soluções localizadas (massas topológicas, $M_{(n)}$) como função do parâmetro n para cadeias de deformação 4-cíclica hiperbólicas (linhas espessas) e trigonométricas (linhas finas). Os resultados são para $M_{(n)}^{\varphi}$ (linhas azuis), $M_{(n)}^{\phi}$ (linhas vermelhas), e $M_{(n)}^{\psi}$ (linhas pretas). Fonte: Bernardini e da Rocha (2013).

4 *Modelo sine-Gordon deformado e a carga topológica variável*

Dentre sistemas integráveis não-lineares, o modelo *sine-Gordon* (Ablowitz et al., 1973; Zakharov; Takhtadzhyan; Faddeev, 1975; Hruby, 1977; Ferrara; Girardello; Sciuto, 1978) sustenta uma gama de defeitos topológicos deformados e remodelados (Whitham, 1974; Wilets, 1989; Gunther; Imry, 1980; Fernandez et al., 1981; El-Batanouny et al., 1987) que exibem um amplo cenário de soluções analiticamente integráveis, topológicas e não topológicas. Estas possuem aplicação tanto teórica quanto fenomenológica em vários campos (Whitham, 1974; Wilets, 1989; Davidov, 1981; D.Murray, 1989; Walgraef, 1997). Do ponto de vista das suas propriedades de simetria inerentes, as soluções do modelo *sine-Gordon* exibem invariância de Lorentz e cargas topológicas finitas representadas pelo *kink*, *anti-kink* e soluções conhecidas como *breathers* (Rajaraman, 1994).

Além de ser muito fértil no que tange ao campo matemático, a teoria sine-Gordon é investigada em vários contextos de física aplicada (Davidov, 1981; D.Murray, 1989; Walgraef, 1997; Dauxois; Peyrard, 2006; R. Bishop, 1978; Cholasinski; Chhajlany, 2007). Modelos *sine-Gordon* com massa variável aparecem, por exemplo, em uma descrição da falta de homogeneidade em junções Josephson (Dauxois; Peyrard, 2006; Goldobin et al., 2004; Susanto; van Gils, 2004), assim como em estudos de dinâmicas moleculares (Davidov, 1981; D.Murray, 1989; Walgraef, 1997) e de DNA (Yakushevich, 2004). Da mesma forma, sistemas tipo *lump* remodelados têm sido considerados na investigação do comportamento de sólitons claros em fibras ópticas (Haus; Wong, 1996).

Após descrever o procedimento sistemático de deformações e aplicá-lo para o modelo $\lambda\chi^4$, desenvolveremos a partir deste capítulo a primeira parte original desta tese. Esta consiste na aplicação do procedimento sistemático de deformações cíclicas através da solução derivada do modelo *sine-Gordon*. O potencial que restringe esse modelo é:

$$T(\chi) = 1 - \cos(\chi), \quad (4.1)$$

com a respectiva solução derivada das equações de movimento:

$$\chi(s) = 4 \arctan(e^s) - \pi \quad \text{com} \quad \omega_\chi = \frac{d\chi}{ds} = \frac{4e^s}{1+e^{2s}}. \quad (4.2)$$

Este será o defeito inicial que acionará tanto a cadeia 3-cíclica quanto a 4-cíclica.

O potencial escolhido, pelo fato de depender de uma função trigonométrica como o $\cos(\chi)$, engendra um conjunto infinito de pontos críticos. Estes são também funções *zeros*, i.e.

$$T(\chi_{\text{crítico}}^0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dT}{d\chi} \right|_{\chi=\chi_{\text{crítico}}^0} = 0. \quad (4.3)$$

Dessa forma existem infinitas soluções, sendo que cada uma encontra-se localizada entre dois mínimos consecutivos do potencial. Calculando os limites da Eq. (4.2), os valores assintóticos da solução *kink* são dados por:

$$\chi_{\text{crítico}}^0 = \chi(s \rightarrow \pm\infty) = \pm\pi, \quad (4.4)$$

chamados de índices topológicos. A carga topológica é dada correspondentemente por:

$$Q^x = \left| \chi_{s \rightarrow +\infty}^0 - \chi_{s \rightarrow -\infty}^0 \right| = 2\pi, \quad (4.5)$$

onde qualquer fator multiplicativo dimensional foi suprimido desde o início. Esse valor de carga sempre será o mesmo para qualquer defeito do modelo *sine-Gordon* localizado entre dois de seus infinitos pontos de mínimo. A massa topológica do defeito, que corresponde à energia total da solução localizada, é dada por:

$$M^x = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} ds \omega_\chi^2 \right| = 8. \quad (4.6)$$

Já a densidade de energia pode ser identificada pela expressão abaixo:

$$\rho(\chi(s)) = \omega_\chi^2 = 4\text{sech}(s)^2. \quad (4.7)$$

A cadeia de deformações, tal como a encontrada para $\lambda\chi^4$, possui relações fechadas de vínculo entre as massas dos defeitos. A sequência da análise realizada neste capítulo é igual à aplicada ao modelo $\lambda\chi^4$. Não obstante, decidimos reescrever algumas das equações do capítulo anterior, seguindo assim a sequência como encontrada no artigo resultante desse capítulo (Bernardini; Chinaglia; da Rocha, 2014). Essa escolha torna a leitura direta e auto-consistente, além de evitar que o leitor tenha que retornar constantemente ao Capítulo 3.

4.1 Procedimento sistemático para deformações 3-cíclicas

Em uma cadeia 3-cíclica de deformação, o campo escalar χ designará o defeito primitivo de tal forma que:

$$\omega_\chi = \frac{d\chi}{ds} = y_\phi \chi_\phi = z_\psi \chi_\psi, \quad (4.8)$$

com

$$\begin{aligned} y_\phi &= \omega_\chi \phi_\chi, \\ z_\psi &= \omega_\chi \psi_\chi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Os potenciais cíclicos BPS, pertencentes à cadeia 3-cíclica de deformação, são dados por:

$$T(\chi) = \frac{1}{2}\omega_\chi^2 \Leftrightarrow V(\phi) = \frac{1}{2}y_\phi^2 \Leftrightarrow W(\psi) = \frac{1}{2}z_\psi^2 \Leftrightarrow T(\chi) = \frac{1}{2}\omega_\chi^2, \quad (4.10)$$

com três funções deformação vinculadas pela regra da cadeia,

$$\psi_\phi \phi_\chi \chi_\psi = 1. \quad (4.11)$$

A - Deformações hiperbólicas

Consideremos o seguinte conjunto de derivadas auxiliares descrito por:

$$\begin{aligned} \phi_\chi^{(n)} &= \operatorname{sech}[(\chi - (n-1)\pi)], \\ \psi_\chi^{(n)} &= -\operatorname{tanh}[(\chi - (n-1)\pi)], \end{aligned} \quad (4.12)$$

que, através de integrações diretas, leva à

$$\begin{aligned} \phi(\chi, n) &= 2 \arctan[\operatorname{tanh}[(\chi - (n-1)\pi)/2]], \\ \psi(\chi, n) &= -\ln[\cosh[\chi - (n-1)\pi] / \cosh(\pi)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

com constantes e sinais escolhidos para ajustar valores ordinários nos limites assintóticos. Após manipulações matemáticas simples, envolvendo a relação fundamental hiperbólica $\operatorname{tanh}(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2 = 1$ e a Eq. (4.9), verificamos de maneira direta a relação de vínculo

$$\begin{aligned} \omega_\chi^2 &= \omega_\chi^2 [\operatorname{tanh}(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2] \\ &= \omega_\chi^2 [\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2}] \end{aligned}$$

$$= z_\psi^2 + y_\phi^2. \quad (4.14)$$

Arquitetando, dessa forma, um liame entre as distribuições localizadas de energia para as estruturas deformadas 3-cíclicamente. Note que a Eq. (4.14) corresponde à Eq. (3.11) inserindo-se $N = 1$.

As correspondentes funções BPS deformadas são então obtidas como

$$\begin{aligned} y_\phi &= \omega_\chi \operatorname{sech}[\chi - (n-1)\pi], \\ z_\psi &= -\omega_\chi \operatorname{tanh}[\chi - (n-1)\pi], \end{aligned} \quad (4.15)$$

com as respectivas dependências em $\phi^{(n)}(s)$ e $\psi^{(n)}(s)$ obtidas através da substituição de $\chi = \chi(s)$ referente à Eq. (4.2) na Eq. (4.13).

A primeira coluna da Fig. 12 mostra a dependência analítica em s para os defeitos deformados 3-cíclicamente obtidos através das deformações hiperbólicas da Eq. (4.12). Os gráficos apresentam os resultados para o defeito primitivo, $\chi(s)$, $\omega_\chi(s) = d\chi/ds$ e $\rho(\chi(s))$; e para os correspondentes defeitos deformados, $\phi^{(n)}(s)$, $y_\phi(s) = d\phi^{(n)}/ds$ e $\rho(\phi^{(n)}(s))$; e $\psi^{(n)}(s)$, $z_\psi(s) = d\psi^{(n)}/ds$ e $\rho(\psi^{(n)}(s))$. Estabelecemos $n = 1 - 0.05k$ com $k \in [-2, 2]$, a fim de descrever a dependência analítica com o parâmetro livre n . Os correspondentes potenciais BPS, $W(\psi)$ and $V(\phi)$, para o mesmo conjunto de valores n , estão descritos na primeira coluna da Fig. 13.

Para o defeito primitivo engendrado pela teoria *sine-Gordon*, i.e. Eq. (4.2), foram obtidos tanto defeitos tipo *kink* como tipo *lump* para a solução deformada $\psi^{(n)}$. Tal comportamento degenerado é devido a algumas características do potencial $W(\psi)$.

Para $n = 1$ identificamos o único *lump* referente à ψ . Este corresponde à parte direita da curva do $W(\psi)$, onde o potencial apresenta um ponto de mínimo e um ponto de fronteira. Para todos os outros valores de n o quadro de referência é movido para a esquerda do gráfico (c. f. Fig. 13) de tal forma que o potencial passa a apresentar dois pontos de mínimo e nenhum de fronteira. Essa é a razão pela qual há apenas defeitos tipo *kink* para todos os outros valores de n . É possível notar também que os defeitos deformados suscitam uma outra característica incomum. As soluções de *pseudolump* dadas por $\psi^{(n)}$ (linhas pretas na Fig. 12) exibem um comportamento não-monotônico como um *lump*. No entanto, diferem deste pois o $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi^{(n)}(s) \neq \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi^{(n)}(s)$, o que leva, através da definição de *kink*, a identificarmos esses $\psi^{(n)}$ como soluções topológicas.

Analisando o potencial $W(\psi)$, vemos que além dele gerar um conjunto infinito de

pontos críticos para

$$s = 0 - k\pi, \quad (4.16)$$

com $k = 1, 2, 3, \dots$, ele também gera um ponto de fronteira localizado em $s = -\ln[\operatorname{sech}(\pi)]$. Este ponto é referente ao *lump* obtido para $n = 1$. Portanto, encontramos um valor nulo para a carga topológica concernente ao defeito $\psi^{(1)}$. As cargas topológicas para n diferente de 1 são dadas por:

$$Q_{(n)}^\psi = \ln \left[\frac{\operatorname{sech}[(n-2)\pi]}{\operatorname{sech}(n\pi)} \right]. \quad (4.17)$$

Através da Fig. 14, notamos que existe uma carga topológica aproximadamente constante para $n \neq 1$, mas que esse valor converte-se a zero em uma região estreita em torno de $n = 1$. A análise revela a existência de um *anti-kink* para $n < -1$ que muda de maneira contínua transformando-se em um *lump* comum, em $n = 1$ e que, por fim, transfigura-se continuamente em um *kink* para $n > 3$.

Reportando agora a análise do potencial $V(\phi)$, vemos que este engendra um conjunto de pontos críticos, $\phi_{\pm}^{(n)0}$, que corresponde aos valores assintóticos da solução tipo *kink*,

$$\phi_{\pm}^{(n)0} = \phi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = \pm(\arctan[\sinh(n\pi)] + \arctan[\operatorname{sech}(\pi) \sinh[(1-n)\pi]]). \quad (4.18)$$

Esses limites geram as seguintes cargas topológicas em termos de n :

$$Q_{(n)}^\phi = 2 |\arctan[\sinh(n\pi)] + \arctan[\operatorname{sech}(\pi) \sinh[(1-n)\pi]]|, \quad (4.19)$$

as quais estão descritas na Fig. 14. Notamos que os defeitos tipo *kink*, $\phi^{(n)}$, aparecem para um certo intervalo $-2 < n < 4$. Portanto, as cargas presentes na Eq. (4.19) são referentes aos defeitos topológicos para esse intervalo, que inclui os valores de n utilizados para calcular os *kinks* $\phi^{(n)}$ descritos na Fig. 12. Para $n < -2$ e $n > 4$, vemos através da Fig. 14 que as cargas são altamente reprimidas, portanto fazem com que os $\phi^{(n)}$ comportem-se como soluções tipo *lump*.

Realizando uma integral numérica, a dependência das massas em n pode ser obtida para $M_{(n)}^\psi$ e $M_{(n)}^\phi$. Seus respectivos comportamentos podem ser analisados através da Fig. 15.

B - Deformações trigonométricas

Consideremos agora o conjunto de funções auxiliares descrito por:

$$\phi_\chi^{(n)} = \cos[(\chi - (n-1)\pi)],$$

$$\psi_\chi^{(n)} = -\sin[(\chi - (n-1)\pi)], \quad (4.20)$$

o qual, através de integração direta, resulta em

$$\begin{aligned} \phi(\chi, n) &= \sin[\chi - (n-1)\pi], \\ \psi(\chi, n) &= \cos[\chi - (n-1)\pi] - \cos(\pi). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Novamente, as constantes e sinais foram escolhidos de maneira a ajustar valores ordinários para os limites assintóticos. Após manipulações matemáticas simples, envolvendo as relações fundamentais trigonométricas $\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2 = 1$ e a Eq. (4.9), identificamos a relação de vínculo

$$\begin{aligned} \omega_\chi^2 &= \omega_\chi^2 [\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2] \\ &= \omega_\chi^2 [\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2}] \\ &= z_\psi^2 + y_\phi^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para $\chi(s)$ da Eq. (4.2), as funções BPS deformadas são obtidas como

$$\begin{aligned} y_\phi &= \omega_\chi \cos[\chi - (n-1)\pi], \\ z_\psi &= -\omega_\chi \sin[\chi - (n-1)\pi], \end{aligned} \quad (4.23)$$

com $\chi(s)$ inserido na Eq. (4.21).

Neste caso, os potenciais, $W(\psi)$ e $V(\phi)$ geram defeitos tipo *lump* para todas as soluções. Na segunda coluna da Fig. 12 apresentamos o perfil dos defeitos, assim como suas correspondentes derivadas e densidades de energia, ρ 's, para $\chi(s)$, e para os correspondentes defeitos deformados, $\phi^{(n)}(s)$ e $\psi^{(n)}(s)$. Estabelecemos $n = 1 - 0.05k$, com $k \in [-2, 2]$, a fim de descrever a dependência analítica em n . Os defeitos correspondem a estruturas tipo *lump*, uma vez que as cargas topológicas de ψ e ϕ são nulas. Os correspondentes potenciais BPS, $W(\psi)$ e $V(\phi)$, para o mesmo conjunto de parâmetros n estão descritos na segunda coluna da Fig. 13.

As soluções $\psi^{(n)}$ são obtidas através do potencial $W(\psi)$, que engendra um conjunto de pontos de fronteira, $\psi_\pm^{(n)0}$, correspondente aos valores assintóticos da solução, i.e.

$$\psi_\pm^{(n)0} = \psi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = 1 + \cos\left(\frac{n}{\pi}\right). \quad (4.24)$$

De onde fica evidenciado que a carga topológica é zero. Nesse caso, a correspondente

energia total da solução localizada é dada por:

$$M_{(n)}^{\psi} = 4 + \frac{4}{15} \cos(2n\pi). \quad (4.25)$$

O potencial $V(\phi)$ engendra um conjunto de pontos de fronteira, $\phi_{\pm}^{(n)0}$, que corresponde aos valores assintóticos das soluções tipo *lump*, i.e.

$$\phi_{\pm}^{(n)0} = \phi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = -\sin\left(\frac{n}{\pi}\right), \quad (4.26)$$

através do qual também verificamos que a carga topológica é zero. O caso trigonométrico também revela características peculiares das soluções: o comportamento de uma espécie de *pseudokink* exibido por $\phi^{(n)}$ (linhas vermelhas), como descrito na segunda coluna da Fig. 12. Apesar de ser uma solução tipo *lump*, ela possui dois pontos de inflexão ao invés de apenas um. A energia localizada obtida analiticamente como função do parâmetro livre n possui a seguinte expressão:

$$M_{(n)}^{\phi} = 4 - \frac{4}{15} \cos(2n\pi). \quad (4.27)$$

A Fig. 15 sintetiza os resultados para as energias localizadas expressas analiticamente em termos de n . Através das quais a relação de vínculo obtida das Eqs. (4.14) e (4.22) resulta em

$$M_{(n)}^{\psi} + M_{(n)}^{\phi} = M^{\chi} = 8. \quad (4.28)$$

Esta é verificada analiticamente para ambas as cadeias 3-cíclicas de deformação, hiperbólica e trigonométrica. A Fig 15 também atesta que para ambas as deformações, a soma das massas dos defeitos pertencentes às cadeias resulta na massa do defeito primitivo derivado do modelo *sine-Gordon*, M^{χ} .

4.2 Procedimento sistemático para deformações 4-cíclicas

A análise estabelecida na seção anterior pode ser estendida diretamente para cadeias 4-cíclicas de deformação. Os resultados para as cargas e massas topológicas também são obtidos de maneira direta. Apresentaremos as soluções BPS e suas respectivas distribuições de energia localizadas, assim como a análise dos limites assintóticos envolvendo o cálculo dos pontos críticos e *zeros* da função. Novamente resultados envolvendo cargas topológicas variáveis são encontrados.

Vamos retomar o campo χ , solução topológica apresentada na Eq. 4.2, para designar o defeito primitivo que aciona a cadeia 4-cíclica de deformações. Primeiramente, um campo escalar adicional, φ , tem que ser considerado para completar a cadeia. O sistema acoplado descrito pelas Eqs. (4.8-4.9) pode ser estendido para

$$\omega_\chi = \frac{d\chi}{ds} = x_\varphi \chi_\varphi = y_\phi \chi_\phi = z_\psi \chi_\psi, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \omega_\chi \varphi_\chi, \\ y_\phi &= \omega_\chi \phi_\chi, \\ z_\psi &= \omega_\chi \psi_\chi, \end{aligned} \quad (4.30)$$

e os potenciais cíclicos BPS pertencentes à cadeia 4-cíclica são dados por:

$$T(\chi) = \frac{1}{2}\omega_\chi^2 \Leftrightarrow U(\varphi) = \frac{1}{2}x_\varphi^2 \Leftrightarrow V(\phi) = \frac{1}{2}y_\phi^2 \Leftrightarrow W(\psi) = \frac{1}{2}z_\psi^2 \Leftrightarrow T(\chi) = \frac{1}{2}\omega_\chi^2. \quad (4.31)$$

As quatro funções de deformação seguem naturalmente a seguinte regra da cadeia:

$$\psi_\phi \phi_\varphi \varphi_\chi \chi_\psi = 1. \quad (4.32)$$

A - Deformações hiperbólicas

Com um ciclo a mais, o conjunto de funções auxiliares é agora descrito por:

$$\begin{aligned} \psi_\chi^{(n)} &= -\tanh[\chi - (n-1)\pi], \\ \phi_\chi^{(n)} &= -\tanh[\chi - (n-1)\pi] \operatorname{sech}[\chi - (n-1)\pi], \\ \varphi_\chi^{(n)} &= \operatorname{sech}[\chi - (n-1)\pi]^2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

com a função ω_χ substituída em Eq.(4.30) completando a cadeia 4-cíclica. Realizando as integrações correspondentes, encontramos os defeitos

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(\chi) &= -\ln \left[\frac{\cosh[\chi - (n-1)\pi]}{\cosh(\pi)} \right], \\ \phi^{(n)}(\chi) &= \operatorname{sech}[\chi - (n-1)\pi] - \operatorname{sech}(\pi), \\ \varphi^{(n)}(\chi) &= \tanh[\chi - (n-1)\pi], \end{aligned} \quad (4.34)$$

que ajustam os valores ordinários nos limites assintóticos. Seguindo manipulações matemáticas simples, identificamos facilmente a igualdade

$$\begin{aligned}
\omega_\chi^2 &= \omega_\chi^2[\tanh(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2(\tanh(n\chi)^2 + \operatorname{sech}(n\chi)^2)] \\
&= \omega_\chi^2[\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2} + \varphi_\chi^{(n)2}] \\
&= z_\psi^2 + y_\phi^2 + x_\varphi^2,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

que vincula os valores para as massas topológicas dos defeitos deformados hiperbolicamente. As outras funções BPS correspondentes são obtidos como

$$\begin{aligned}
x_\varphi(s) &= \omega_\chi \operatorname{sech}[\chi - (n-1)\pi]^2, \\
y_\phi(s) &= -\omega_\chi \tanh[\chi - (n-1)\pi] \operatorname{sech}[\chi - (n-1)\pi], \\
z_\psi(s) &= -\omega_\chi \tanh[\chi - (n-1)\pi].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Na primeira coluna da Fig. 16 estão descritos os resultados para o defeito primitivo: $\chi(s)$, $\omega_\chi(s) = d\chi/ds$, e $\rho(\chi(s))$; e para os correspondentes defeitos deformados: $\phi^{(n)}(s)$, $y_\phi(s) = d\phi^{(n)}/ds$ e $\rho(\phi^{(n)}(s))$; $\varphi^{(n)}(s)$, $x_\varphi(s) = d\varphi^{(n)}/ds$ e $\rho(\varphi^{(n)}(s))$; e $\psi^{(n)}(s)$, $z_\psi(s) = d\psi^{(n)}/ds$ e $\rho(\psi^{(n)}(s))$ (referentes às funções hiperbólicas de deformação). Estabelecemos $n = 1 - 0.05k$ com $k \in [-2, 2]$, a fim de descrever a dependência analítica com o parâmetro livre n .

O potencial $W(\psi)$ produz um conjunto de pontos críticos, $\psi_\pm^{(n)0}$, correspondente aos seguintes valores assintóticos da solução tipo *kink*,

$$\begin{aligned}
\psi_+^{(n)0} &= \psi^{(n)}(s \rightarrow +\infty) = -\ln[\operatorname{sech}(\pi) \cosh[(n-2)\pi]], \\
\psi_-^{(n)0} &= \psi^{(n)}(s \rightarrow -\infty) = -\ln[\operatorname{sech}(\pi) \cosh[n\pi]].
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Os pontos críticos $\phi_\pm^{(n)0}$ engendrados pelo potencial $V(\phi)$, correspondentes aos valores assintóticos da solução tipo *kink*, são dados por:

$$\begin{aligned}
\phi_+^{(n)0} &= \phi^{(n)}(s \rightarrow +\infty) = \operatorname{sech}[(n-2)\pi] - \operatorname{sech}[\pi], \\
\phi_-^{(n)0} &= \phi^{(n)}(s \rightarrow -\infty) = \operatorname{sech}[n\pi] - \operatorname{sech}[\pi].
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Por fim, o potencial $U(\varphi)$ produz um conjunto de pontos críticos, $\varphi_\pm^{(n)0}$, que correspondem aos seguintes valores assintóticos da solução tipo *kink*,

$$\varphi_+^{(n)0} = \varphi^{(n)}(s \rightarrow +\infty) = -\tanh[(n-2)\pi],$$

$$\varphi_-^{(n)0} = \varphi^{(n)}(s \rightarrow -\infty) = -\tanh[n\pi]. \quad (4.39)$$

O comportamento dos potenciais deformados está descrito na Fig. 17. As cargas topológicas para os defeitos deformados são dadas por:

$$\begin{aligned} Q_{(n)}^\psi &= \left| \ln \left[\frac{\operatorname{sech}[(n-2)\pi]}{\operatorname{sech}[n\pi]} \right] \right|, \\ Q_{(n)}^\phi &= |\operatorname{sech}[(n-2)\pi] - \operatorname{sech}[n\pi]|, \\ Q_{(n)}^\varphi &= |\tanh[(n-2)\pi] - \tanh[n\pi]|. \end{aligned} \quad (4.40)$$

O comportamento relativo a cada carga está descrito na Fig. 18.

Novamente os defeitos deformados $\psi^{(n)}$ apresentam característica de *pseudolumps* (linhas pretas na primeira coluna da Fig. 16), embora na realidade sejam soluções tipo *kink*. Observamos que $\phi^{(n)}$ é aproximadamente constante para a região $n < 2$ e $n > 4$. No intervalo entre esses valores há a formação de um *anti-kink* para $n \sim 0$, que continuamente transforma-se em um *lump*, em $n = 1$, e continua mudando até formar um *kink* em $n \sim 2$. Tal comportamento está em completo acordo com a análise da Fig. 18 (c. f. resultados referentes às linhas vermelhas).

As cargas topológicas para os *kinks* deformados, obtidas através de deformações hiperbólicas, foram computadas através de integração numérica. Seus respectivos comportamentos estão descritos na Fig. 18. Outra vez, o comportamento de variação da carga topológica mostra que a dependência com o parâmetro n gera um novo cenário. Este revela que uma transição suave de um quadro topológico assintoticamente atinge outro não-topológico. Nesse caso, as massas topológicas são obtidas por integrais numéricas e podem ser analisadas através da Fig. 19.

B - Deformações trigonométricas

Voltando novamente ao conjunto de funções auxiliares de deformação trigonométrica descrito por:

$$\begin{aligned} \psi_\chi^{(n)} &= -\sin[\chi - (n-1)\pi], \\ \phi_\chi^{(n)} &= -\cos[\chi - (n-1)\pi] \sin[\chi - (n-1)\pi], \\ \varphi_\chi^{(n)} &= \cos[\chi - (n-1)\pi]^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Com as quais, através de integrações diretas, obtemos

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(\chi) &= \cos[\chi - (n-1)\pi] - \cos(\pi), \\ \phi^{(n)}(\chi) &= \frac{1}{4} [\cos[2(\chi - (n-1)\pi)]], \\ \varphi^{(n)}(\chi) &= \frac{[\chi - (n-1)\pi]}{2} + \frac{1}{4} \sin[2(\chi - (n-1)\pi)],\end{aligned}\quad (4.42)$$

com constantes escolhidas seguindo os mesmos critérios de limites assintóticos já descritos. Adotando as mesmas manipulações matemáticas simples envolvendo a relação fundamental entre $\sin(n\chi)$ e $\cos(n\chi)$, identificamos que a relação

$$\begin{aligned}\omega_\chi^2 &= \omega_\chi^2 [\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2 (\sin(n\chi)^2 + \cos(n\chi)^2)] \\ &= \omega_\chi^2 [\psi_\chi^{(n)2} + \phi_\chi^{(n)2} + \varphi_\chi^{(n)2}] \\ &= z_\psi^2 + y_\phi^2 + x_\varphi^2,\end{aligned}\quad (4.43)$$

vincula os valores para as massas topológicas dos defeitos deformados trigonometricamente.

As Eqs. (4.41) resultam nas outras soluções tipo *lump*,

$$\begin{aligned}x_\varphi(s) &= \omega_\chi \cos[\chi - (n-1)\pi]^2, \\ y_\phi(s) &= -\omega_\chi \sin[\chi - (n-1)\pi] \cos[\chi - (n-1)\pi], \\ z_\psi(s) &= -\omega_\chi \sin[\chi - (n-1)\pi],\end{aligned}\quad (4.44)$$

para as quais, mais uma vez, assumimos o defeito χ dado na Eq.(4.2).

O potencial $U(\varphi)$ gera soluções tipo *kink*, enquanto que os potenciais $V(\phi)$ e $W(\psi)$ geram soluções tipo *lump*. Na segunda coluna da Fig. 16 apresentamos os resultados para o defeito primitivo: $\chi(s)$, $\omega_\chi(s) = d\chi/ds$ e $\rho(\chi(s))$; e para os correspondentes defeitos deformados: $\phi^{(n)}(s)$, $y_\phi(s) = d\phi^{(n)}/ds$ e $\rho(\phi^{(n)}(s))$; $\varphi^{(n)}(s)$, $x_\varphi(s) = d\varphi^{(n)}/ds$ e $\rho(\varphi^{(n)}(s))$; e $\psi^{(n)}(s)$, $z_\psi(s) = d\psi^{(n)}/ds$ e $\rho(\psi^{(n)}(s))$ (através de funções auxiliares trigonométricas). Novamente estabelecemos $n = 1 - 0.05k$ com $k \in [-2, 2]$.

Os correspondentes potenciais BPS, $W(\psi)$, $V(\phi)$ e $U(\varphi)$, para o mesmo conjunto de valores n , estão descritos na segunda coluna da Fig. 17.

Os potenciais $W(\psi)$ e $V(\phi)$ engendram um conjunto de pontos de fronteira correlacionados aos seguintes valores assintóticos:

$$\psi_\pm^{(n)0} = \psi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = 1 + \cos(n\pi) \quad (4.45)$$

e

$$\phi_{\pm}^{(n)0} = \phi^{(n)}(s \rightarrow \pm\infty) = \frac{1}{4} \cos(2n\pi). \quad (4.46)$$

Conseqüentemente, notamos que as cargas topológicas correspondentes são nulas e estão relacionadas aos *lumps*, mesmo que para $\phi^{(n)}$ as soluções contenham 3 pontos de inflexão.

Por outro lado, o potencial $U(\varphi)$ engendra um conjunto de pontos críticos, $\varphi_{\pm}^{(n)0}$, correspondentes aos seguintes valores assintóticos da solução tipo *kink*,

$$\begin{aligned} \varphi_{+}^{(n)0} &= \varphi^{(n)}(s \rightarrow +\infty) = \pi - \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2n\pi), \\ \varphi_{-}^{(n)0} &= \varphi^{(n)}(s \rightarrow -\infty) = 0 - \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2n\pi). \end{aligned} \quad (4.47)$$

De maneira que a carga topológica para $\varphi^{(n)}$ é dada simplesmente por:

$$Q_{(n)}^{\varphi} = \pi, \quad (4.48)$$

e encontra-se descrita na Fig. 18. Finalmente, as massas topológicas seguem a mesma propriedade obtida previamente, tal que

$$\begin{aligned} M_{(n)}^{\psi} &= 4 + \frac{4}{15} \cos(2n\pi), \\ M_{(n)}^{\phi} &= 1 + \frac{1}{63} \cos(4n\pi), \\ M_{(n)}^{\varphi} &= 3 - \frac{4}{15} \cos(2n\pi) - \frac{1}{63} \cos(4n\pi), \end{aligned} \quad (4.49)$$

como mostrado na Fig. 19. Resultado que nos garante mais uma vez a relação

$$M_{(n)}^{\psi} + M_{(n)}^{\phi} + M_{(n)}^{\varphi} = M^X = 8. \quad (4.50)$$

Podemos ver que o defeito topológico gerado por $\varphi^{(n)}$ sustenta soluções exóticas como duplo-*kink* (Bazeia et al., 2008). Esses tipos de estruturas são estudados também em cenário de branas (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004), onde verifica-se o surgimento de uma nova fase entre as duas interfaces que sustentam a estrutura interna da brana.

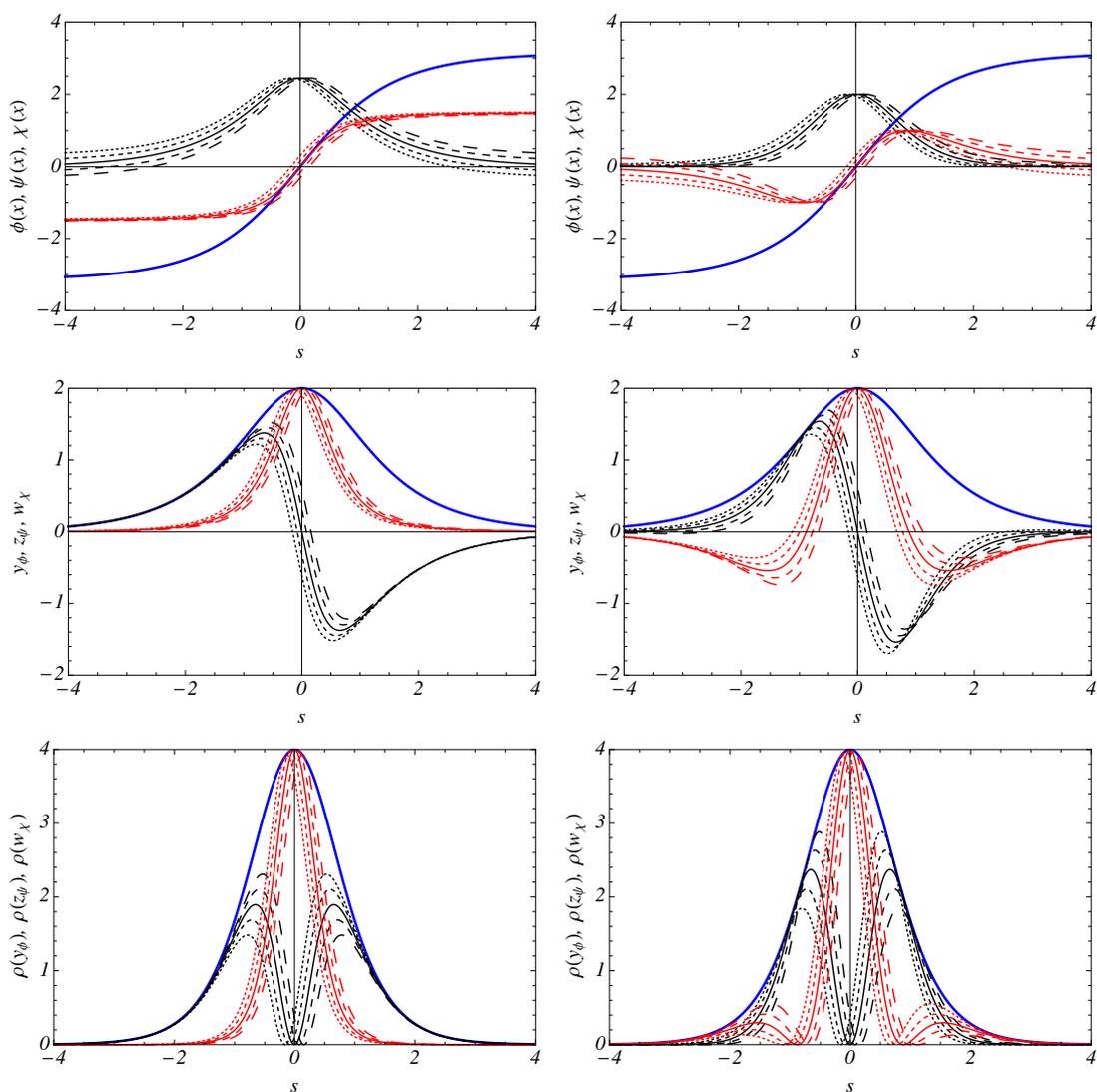


Figura 12: Na primeira linha vemos o defeito inicial derivado do modelo *sine-Gordon*, χ , em azul, e os defeitos deformados ψ , em preto, e ϕ , em vermelho, para deformações hiperbólicas (primeira coluna) e trigonométricas (segunda coluna). Na segunda linha vemos as derivadas dos defeitos χ , em azul, e dos defeitos deformados ψ , em preto e ϕ , em vermelho. Na terceira linha vemos as densidades de energia para χ , em azul, e para os defeitos deformados ψ , em preto e ϕ , em vermelho. Escolhemos $n = 0,9; 0,95; 1; 1,05; 1,1$ para as funções hiperbólicas e $n = 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4$ para as trigonométricas.

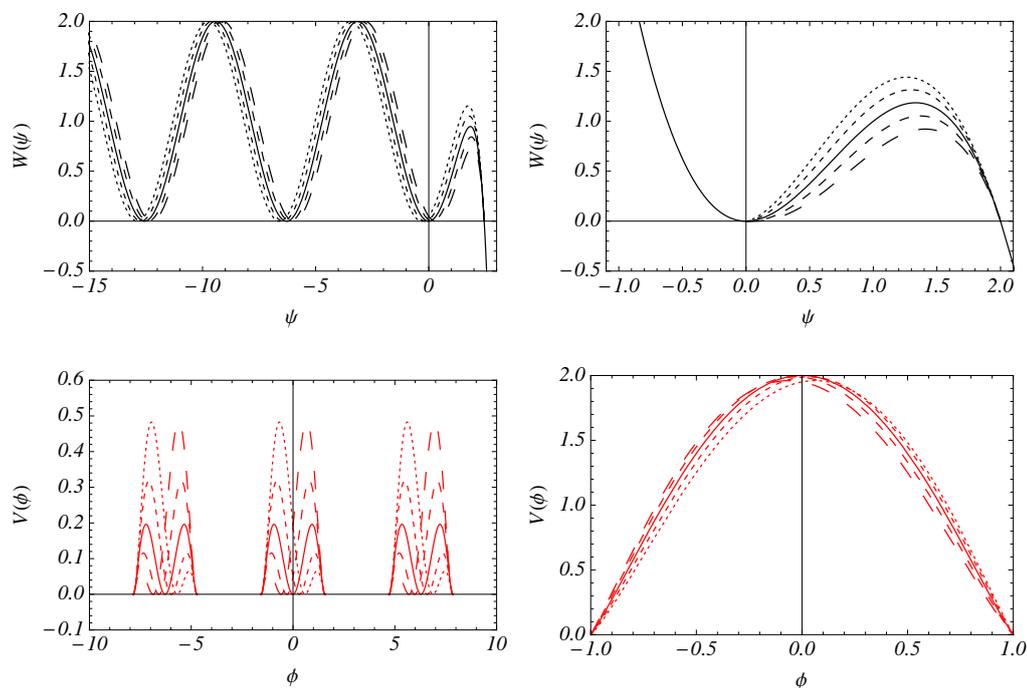


Figura 13: Potenciais deformados encontrados através do modelo *sine-Gordon*, $V(\phi)$ e $W(\psi)$, para os casos hiperbólico (primeira coluna) e trigonométrico (segunda coluna). Escolhemos $n = 0, 9; 0, 95; 1; 1, 05; 1, 1$ para o primeiro caso e $n = 0, 6; 0, 8; 1; 1, 2; 1, 4$ para o segundo.

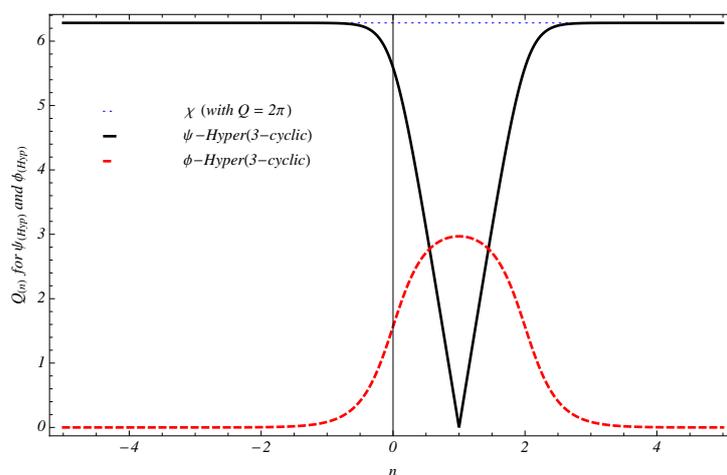


Figura 14: Cargas topológicas, $Q(n)$, em função do parâmetro livre n , para os defeitos deformados hiperbolicamente, $\phi^{(n)}(s)$ (linhas vermelhas tracejadas) e $\psi^{(n)}(s)$ (linhas pretas sólidas), obtidas através da cadeia 3-cíclica. A carga topológica do defeito primitivo, χ , é igual a 2π (linha azul pontilhada).

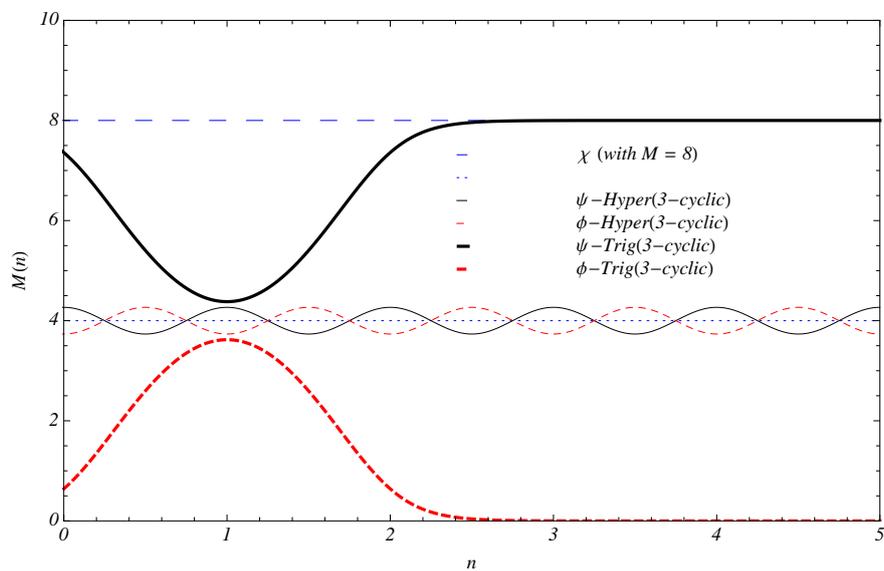


Figura 15: Energia total das soluções localizadas, $M_{(n)}$, como função do parâmetro livre n para cadeias de deformação 3-cíclica hiperbólica (linhas espessas) e trigonométricas (linhas finas). Os resultados são para $M_{(n)}^{\phi}$ (linhas vermelhas tracejadas) e $M_{(n)}^{\psi}$ (linhas pretas sólidas). A massa topológica do defeito primitivo, χ , é dada por $M^{\chi} = 8$ (linha azul tracejada).

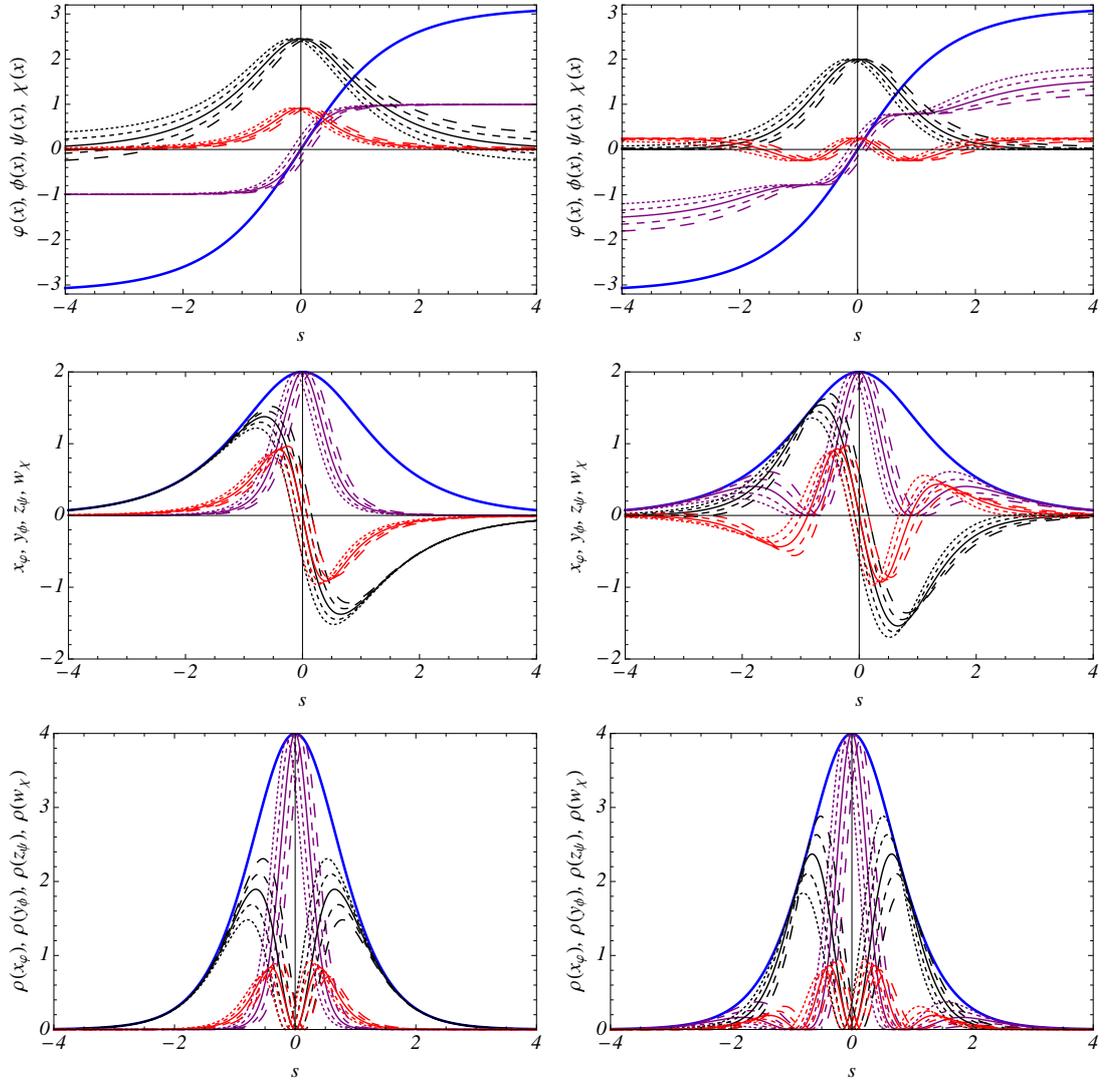


Figura 16: Na primeira linha vemos o defeito inicial do modelo *sine-Gordon*, χ , em azul, e os defeitos deformados 4-cíclicamente ψ , em preto, ϕ , em vermelho, e φ , em roxo para deformações hiperbólicas (primeira coluna) e trigonométrica (segunda coluna). Na segunda linha vemos as derivadas dos defeitos χ , em azul, e dos defeitos deformados ψ , em preto, ϕ , em vermelho e φ , em roxo. Na terceira linha vemos as densidades de energia para χ , em azul, e para os defeitos deformados ψ , em preto, ϕ , em vermelho e φ , em roxo. Escolhemos $n = 0,9; 0,95; 1; 1,05; 1,1$ para funções hiperbólicas e $n = 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4$ para as trigonométricas.

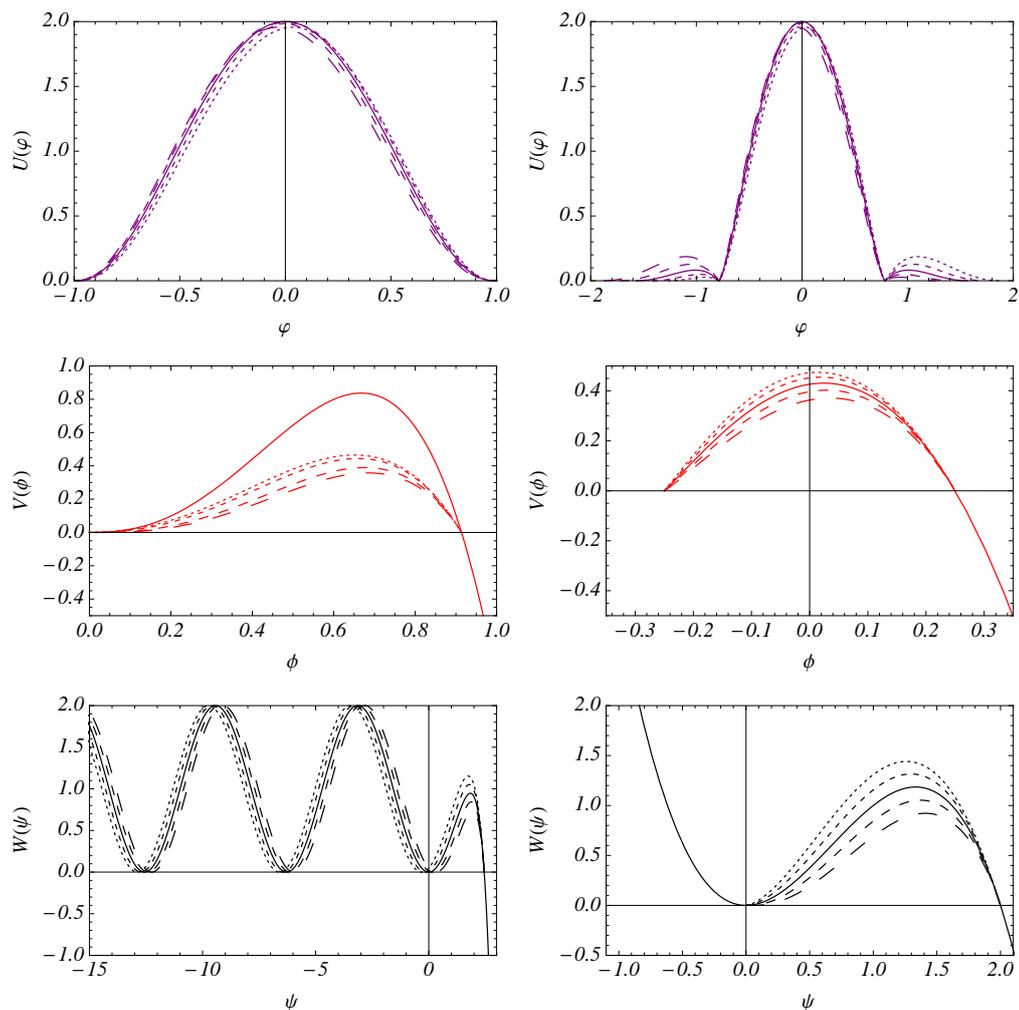


Figura 17: Potenciais deformados, $V(\phi)$, $W(\psi)$ e $U(\varphi)$, obtidos a partir do modelo *sine-Gordon*, para cadeias 4-cíclicas de deformação hiperbólica (primeira coluna) e trigonométrica (segunda coluna). Seleccionamos os mesmos valores de n escolhidos na Fig. 16.

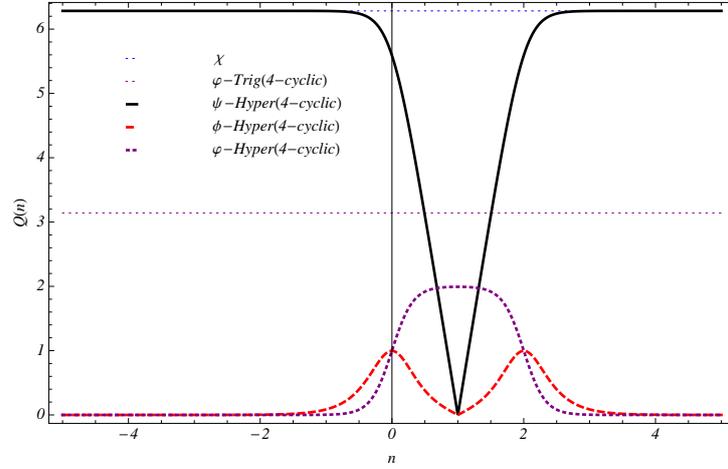


Figura 18: Cargas topológicas, $Q(n)$, em função do parâmetro n para as soluções tipo *kink* deformadas hiperbolicamente, $\phi^{(n)}(s)$ (linhas vermelhas tracejadas), $\psi^{(n)}(s)$ (linhas pretas sólidas), e $\varphi^{(n)}(s)$ (linhas roxas pontilhadas), para cadeias 4-cíclicas de deformação. A carga topológica para o defeito primitivo, χ , é igual a 2π (linha azul pontilhada).

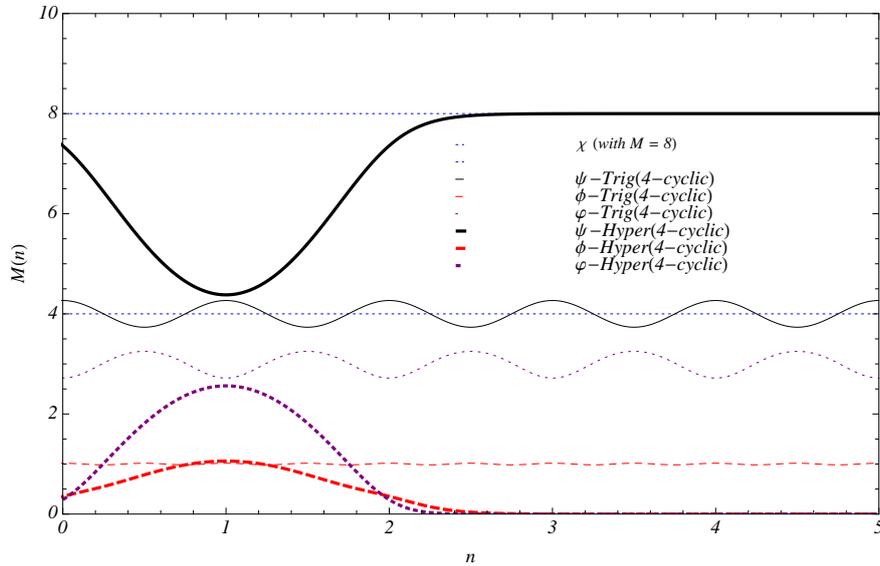


Figura 19: Energia total das soluções localizadas, $M(n)$, em função do parâmetro livre n para cadeias de deformação 4-cíclica hiperbólica (linhas espessas) e trigonométricas (linhas finas). Os resultados são para $M_{(n)}^{\phi}$ (linhas vermelhas tracejadas), $M_{(n)}^{\psi}$ (linhas pretas sólidas), e $M_{(n)}^{\varphi}$ (linhas roxas pontilhadas). A massa topológica do defeito primitivo, χ , é dada por $M^{\chi} = 8$ (linha azul pontilhada).

5 Aplicação em cenário de Branas

5.1 Introdução ao cenário de branas

O cenário de branas conhecido pelo termo inglês *braneworld* pode representar uma maneira de descrever nosso universo de forma a explicar fatos ainda não elucidados pelo modelo padrão, como por exemplo o problema da hierarquia (Arkani-Hamed; Dimopoulos; Dvali, 1998). Nesse cenário o universo observável seria uma hipersuperfície de dimensão $1 + 3$, chamada de brana, inserida em um espaço-tempo de dimensão $1 + 3 + d$ (mais conhecido pelo termo inglês *bulk*), sendo que d representa o número de dimensões extras. Considera-se que os campos e as partículas (excitações dos campos) estejam aprisionados na hipersuperfície $1 + 3$, mas que a gravidade não esteja constrita. Dessa forma, esta permeia não apenas a brana como também o *bulk*.

Estudaremos um modelo descrito por um cenário de branas com $d = 1$, cuja ação é dada por:

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - V(\phi) \right], \quad (5.1)$$

sendo que

$$g = \det(g_{ab}). \quad (5.2)$$

Escolhemos um cenário de branas 5-dimensional (Randall; Sundrum, 1999), cujo intervalo invariante é expresso da seguinte forma:

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (5.3)$$

Nessa expressão observa-se a presença da dimensão extra, doravante representada pela coordenada y . Note que a parte das coordenadas usuais x^μ aparecem reescaladas devido à função e^{2A} , que depende implicitamente da coordenada extra. Esse fator é responsável por uma espécie de dobra na brana e é mais conhecido pelo termo inglês *warp factor*.

No modelo Randall-Sundrum o *warp factor* apresenta um plateau com relação à coordenada extra. Esse comportamento é interessante para explicar, por exemplo, o modelo inflacionário de *slow roll* (Linde, 1983). Alguns exemplos de campos escalares acoplados à gravidade encontram-se em Gremm (2000), Bazeia, Furtado e Gomes (2004). Consideramos que tanto o *warp factor* quanto o campo escalar dependam apenas da coordenada extra, y . Dessa forma as equações de movimento ficam,

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (5.4)$$

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2, \quad (5.5)$$

$$A''^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (5.6)$$

O potencial $V(\phi)$ escolhido para guiar a dinâmica do sistema é descrito pela seguinte equação (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004):

$$V(\phi) = \frac{1}{8} \left(\frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{3}W(\phi)^2. \quad (5.7)$$

A vantagem de utilizar $W(\phi)$ na definição do potencial é que as equações para o campo escalar e o *warp factor* podem ser escritas como equações de primeira ordem em termos de W :

$$\phi' = \frac{1}{2} \frac{dW(\phi)}{d\phi}, \quad (5.8)$$

$$A' = -\frac{1}{3}W(\phi). \quad (5.9)$$

Esse formalismo é descrito pela primeira vez em Cvetič, Griffies e Rey (1992).

Outra quantidade calculada é a componente tempo-tempo do tensor energia-momento (para detalhes de sua derivação ver Bernardini e Bertolami (2013)), dado pela seguinte equação:

$$T_{00} = \left[\left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 - 3 \left(\frac{dA}{dy} \right)^2 \right] e^{2A(y)}. \quad (5.10)$$

Lembrando que a parte temporal das equações de Einstein relacionam-se à energia, essa é componente do tensor que será associada a disposição de matéria no Universo quando multiplicada pela métrica, i.e. T^{00} .

Os modelos estudados nessa seção possuem um equivalente da mecânica quântica que pode ser estabelecido de maneira completa.

5.2 Perturbação da métrica

A análise do problema equivalente da mecânica quântica é motivada pelo interesse de calcular o espectro de ressonâncias que pode surgir para alguns tipos de potenciais. Se a solução de modo zero (i.e com energia zero) desse espectro corresponder ao estado de menor energia e for normalizável, poderá descrever gravidade 4-dimensional localizada.

Iniciaremos essa análise, realizando uma perturbação na métrica dada na Eq. (5.3) a fim de encontrar a equação análoga à de Schrödinger e conseqüentemente o potencial associado. A perturbação escolhida é utilizada em vários trabalhos de branas (Campos, 2002; Bazeia; Furtado; Gomes, 2004; Randall; Sundrum, 1999; Gremm, 2000):

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (5.11)$$

$$\bar{h}''_{\mu\nu} + 4A'\bar{h}'_{\mu\nu} = e^{-2A}\square\bar{h}_{\mu\nu}. \quad (5.12)$$

Para que essa expressão possa ser escrita como uma equação de Schrödinger, faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$dz = e^{-A(y)}dy. \quad (5.13)$$

Além disso utilizamos o ansatz: $h_{\mu\nu} = e^{ikx}e^{-\frac{3}{2}A}H_{\mu\nu}$. Dessa forma, teremos:

$$-\frac{d^2 H_{\mu\nu}}{dz^2} + U(z)H_{\mu\nu} = k^2 H_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

sendo $U(z)$ o potencial dado por:

$$U(z) = \frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z). \quad (5.15)$$

Esse é o termo que chamamos de potencial da mecânica quântica. Através da Eq. (5.14) vemos que a Hamiltoniana pode ser escrita da seguinte maneira:

$$H = \left(-\frac{d}{dz} - \frac{3}{2}A' \right) \left(\frac{d}{dz} - \frac{3}{2}A' \right), \quad (5.16)$$

o que garante que k seja real e que $k^2 \geq 0$. Dessa forma não haverá modos instáveis. Torna-se simples, através da Eq. (5.16), encontrar a solução de modo zero, $k = 0$,

$$H_{\mu\nu}(z) = N_{\mu\nu}e^{3A(z)/2}, \quad (5.17)$$

sendo que $N_{\mu\nu}$ são constantes de normalização. Esta é a solução com auto-valor zero para um dado operador, que nesse caso é o Hamiltoniano. Para garantir a normalização, os modos zeros devem tender a zero mais rapidamente do que $z^{-1/2}$ (Bazeia; Furtado; Gomes,

2004). Por isso, em todas as figuras desse capítulo, apresentamos essa função nos gráficos referentes ao modo zero. Para todos os casos ela foi representada pela linha tracejada vermelha.

Na seção seguinte, introduzimos o método escolhido para realizar os cálculos do *warp factor* e conseqüentemente o defeito topológico, tensor energia-momento, potencial da mecânica quântica e potencial da mecânica clássica. Para esse fim, utilizaremos como ponto de partida alguns dos resultados de defeitos encontrados mediante procedimentos cíclicos de deformações nos capítulos 3 e 4.

5.3 Método utilizado para encontrar os parâmetros físicos em cenários de branas

Nesta seção detalhamos a derivação das funções que serão analisadas ao longo do capítulo, começando pelo cálculo do *warp factor*.

5.3.1 Cálculo do *warp factor*

Queremos que a curva gerada pela exponencial do *warp factor* possua a forma de um *lump*, sendo assim integrável e podendo, em alguns casos, apresentar um *plateau*. Neste último caso, é possível obter soluções que apresentam estruturas internas à brana (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004). Uma vez que foram obtidos vários defeitos tipo *lump* na cadeia cíclica de deformação dos capítulos 3 e 4, utilizaremos esses resultados para encontrar a função $A(y)$. O procedimento para obter tal parâmetro inicia-se com a igualdade requerida, i.e.

$$e^{2A} = \varphi, \quad (5.18)$$

sendo φ um defeito tipo *lump*. Com isso, é possível calcular $A(y)$ de maneira simples e direta da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{2} \ln \varphi, \quad (5.19)$$

ou,

$$A = \frac{1}{4} \ln \varphi^{-2}. \quad (5.20)$$

Vemos ainda que como $A' = -\frac{1}{3}W$, temos a seguinte relação entre W e A :

$$W = -3A'. \quad (5.21)$$

5.3.2 Cálculo do defeito no cenário de branas

Veremos agora como o campo escalar ϕ , que é o defeito no cenário de branas derivado das equações de movimento, poderia ser calculado uma vez que o fator $A(y)$ tenha sido obtido através da Eq. (5.19). Note que, utilizando a regra da cadeia, a expressão

$$\tilde{\phi}' = \frac{1}{2} \frac{dW}{d\tilde{\phi}}, \quad (5.22)$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}' &= \frac{1}{2} \frac{dW}{dy} \frac{dy}{d\tilde{\phi}} \Rightarrow \tilde{\phi}'^2 = \frac{1}{2} \frac{dW}{dy} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (-3A') = -\frac{3}{2} A''. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Da Eq. (5.20), temos que $A'' = \frac{1}{2} (\ln \varphi)''$. Dessa forma,

$$\tilde{\phi}'^2 = -\frac{3}{4} \frac{1}{4} \ln(\varphi^2)'' = \frac{3}{8} \ln(\varphi^{-2})''. \quad (5.24)$$

Finalmente, o defeito no cenário de branas poderia ser calculado da seguinte forma:

$$\tilde{\phi} = \int \sqrt{\frac{3}{8} \ln(\varphi^{-2})''} dy. \quad (5.25)$$

No entanto, para as funções tipo *lump* utilizadas, não foi possível realizar essa integração. Contudo, isso não impede que as funções desejadas (tensor energia-momento, *warp factor*, potencial da mecânica quântica e as soluções de modo zero) sejam calculadas. Além disso, a derivada do defeito, $\tilde{\phi}'$ é obtida analiticamente para todos os casos analisados.

5.3.3 Tensor energia-momento

Queremos calcular o tensor energia-momento, apesar de não termos encontrado o defeito no cenário de brana. Para isso, vamos partir do seguinte tensor energia-momento em função do potencial W (Bernardini; Bertolami, 2013):

$$T_{00} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{3} W^2 \right] e^{2A(y)}. \quad (5.26)$$

Já que o campo escalar ϕ não foi encontrado de maneira explícita, precisamos desenvolver a expressão $\frac{dW}{d\phi}$ a fim de encontrar uma expressão para T_{00} . Utilizando a regra da

cadeia,

$$\frac{dW}{d\phi} = \frac{dW}{dy} \frac{dy}{d\phi} = \frac{W'}{\phi'} \Rightarrow \left(\frac{dW}{d\phi}\right)^2 = \frac{W'^2}{\phi'^2}, \quad (5.27)$$

encontramos diretamente a expressão desejada.

Além disso, lembrando que $W = -3A'(y)$ e que $\phi'^2 = \frac{1}{2} \frac{dW}{dy}$, temos

$$T_{00} = \left[\frac{2W'^2}{4W'} - \frac{1}{3}(-3A')^2 \right] e^{2A}. \quad (5.28)$$

Finalmente, o tensor energia-momento é encontrado apenas em função das expressões conhecidas analiticamente nesse trabalho:

$$T_{00} = \left[\frac{W'}{2} - 3A'(y)^2 \right] e^{2A(y)}. \quad (5.29)$$

5.3.4 Potencial da Mecânica Quântica

Vimos que o potencial da mecânica quântica é dado pela expressão:

$$U(z) = \frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z). \quad (5.30)$$

Mas, precisamos encontrar também o potencial em função de y . Embora $A(y)$ seja igual a $A(z)$ e a variável não tenha relevância no cálculo do *warp factor* e da solução de modo zero, devemos lembrar que fará diferença no cálculo de $U(y)$, pois este contém derivadas do $A(z)$. Lembrando que $\frac{dz}{dy} = e^{-A(y)}$, temos:

$$A' = \frac{dA}{dz} = \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dz} = e^A \frac{dA}{dy} = A'(y)e^{A(y)}; \quad (5.31)$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dA}{dy} \frac{dy}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(e^A \frac{dA}{dy} \right) = \frac{dy}{dz} \frac{d}{dy} \left(e^A \frac{dA}{dy} \right) = e^{2A(y)} (A'' + A'^2). \quad (5.32)$$

Dessa forma, podemos reescrever o potencial em função de y da seguinte maneira:

$$U(y) = e^{2A(y)} \left(\frac{3}{2}A''(y) + \frac{15}{4}A'^2(y) \right). \quad (5.33)$$

5.3.5 Potencial clássico

Este é o potencial dado pelo formalismo de primeira ordem,

$$V(\phi) = \frac{1}{8} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{3}W^2. \quad (5.34)$$

Note que ϕ é o defeito do cenários de branas, que não conseguimos encontrar analiticamente. Dessa forma, vamos calcular o potencial em termos da coordenada extra, y ,

$$\frac{dW}{d\phi} = \frac{dW}{dy} \frac{dy}{d\phi} = \frac{W'(y)}{\phi'(y)}. \quad (5.35)$$

Apesar de não termos ϕ , temos ϕ' como visto na introdução. Podemos reescrever ϕ' como:

$$\phi' = \frac{1}{2} \frac{dW(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{dW}{dy} \frac{dy}{d\phi} \Rightarrow \phi'^2 = \frac{1}{2} \frac{dW}{dy}. \quad (5.36)$$

Lembrando que $W(y) = W(\phi)$, assim como vimos que $A(y) = A(z)$, podemos agora reescrever o potencial em função de y :

$$V(y) = \frac{1}{8} 2W' - \frac{1}{3} W^2 \Rightarrow \quad (5.37)$$

$$V(y) = \frac{1}{4} W'(y) - \frac{1}{3} W^2(y). \quad (5.38)$$

Apesar de calculado $V(y)$, decidimos suprimir os resultados, pois para sua análise gráfica precisaríamos da expressão analítica do campo.

5.4 Resultados

Uma vez calculadas as funções ϕ e ψ e φ para os modelos $\lambda\chi^4$ e *sine-Gordon*, vamos utilizá-las em cenário de branas com a finalidade de encontrar novas soluções de modos normais associados ao potencial da mecânica quântica. Como visto acima, trabalhamos com um único campo escalar acoplado à gravidade em 5 dimensões em uma geometria *warped*. Investigamos também modelos descritos por potenciais que guiam o sistema permitindo o surgimento de branas espessas, que carregam estrutura interna (e.g. Bazeia, Furtado e Gomes (2004)).

Esses resultados encontram-se a seguir, em sua maioria na forma analítica. Todos os cálculos para cada deformação em ambos os modelos, $\lambda\chi^4$ e *sine-Gordon*, foram realizados com 4 valores diferente do parâmetro n da seguinte forma: $n = 1 - 2k; 1 - k; N; 1 + k; 1 + 2k$, com $k = 0,05$ e N variando de acordo com o caso e modelo.

5.5 Resultados referentes às soluções do modelo $\lambda\chi^4$

Introduziremos os cálculos dos resultados em cenários de branas acionados pelos defeitos tipo *lump* encontrados no Capítulo 3. Para facilitar o acompanhamento dos diferentes casos, a classificação das subseções seguintes partilha das mesmas sequência e nomenclatura escolhidas no referido capítulo.

5.5.1 Deformações 3–cíclicas

A - Caso hiperbólico

Começaremos pela análise dos resultados utilizando o defeito ψ referente à deformação hiperbólica 3-cíclica. Esse comportamento repete-se para os dois os modelos analisados, $\lambda\chi^4$ e *sine-Gordon*. Através dos cálculos descritos na seção anterior encontramos os seguintes parâmetros:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{-\log[\cosh[n \tanh(y)] \operatorname{sech}(n)]}{n} \right], \quad (5.39)$$

$$T_{00}(y) = \frac{3}{4} \left[n \operatorname{sech}(y)^4 \operatorname{sech}[n \tanh(y)]^2 - 2 \operatorname{sech}(y)^2 \tanh(y) \tanh[n \tanh(y)] \right], \quad (5.40)$$

$$U(y) = \frac{3}{16} \operatorname{sech}(y)^2 \left[8 \tanh(y) \tanh[n \tanh(y)] + n \operatorname{sech}(y)^2 \times \left(-4 \operatorname{sech}[n \tanh(y)]^2 - \frac{\tanh[n \tanh(y)]^2}{\log[\cosh[n \tanh(y)] \operatorname{sech}(n)]} \right) \right].$$

Esses resultados estão descritos na Fig. 20. O potencial da mecânica quântica, Eq. (5.33) é função da coordenada y , mas queremos analisar seu comportamento em função de z . Para esse fim, utilizamos o comando *ParametricPlot* do *Mathematica*, uma vez que a relação entre as coordenadas s e z é conhecida. Para encontrar $z(s)$ foi necessário efetuar uma integral numérica com um intervalo no qual os limites de integração atingem um valor finito. Por essa razão, não é possível através dos gráficos em função da coordenada z , verificar que as soluções de modo zero são normalizáveis. No entanto, verificamos que a função em termos de y é normalizável e apresentamos esses resultados na Fig. 20. Portanto, para qualquer valor do parâmetro n o modo zero é normalizável. Dessa forma existe a possibilidade do modo zero descrever gravidade 4-dimensional localizada no interior da brana. Essa mesma análise foi realizada em todos os resultados seguintes desse capítulo.

Através dos gráficos vemos que a variação do parâmetro n acarreta uma mudança pequena nos resultados, variando em geral apenas os pontos de máximos e mínimos da

função, mas mantendo sua forma. A análise do potencial da mecânica quântica revela que ele apresenta um formato vulcano podendo, portanto, conter modos normais.

Fizemos também essa mesma análise através do defeito ψ da cadeia hiperbólica de deformação para o caso 4-cíclico. Concluímos que os mesmos resultados desta seção são reproduzidos e, por isso, suprimimos as contas desse caso.

B - Caso trigonométrico

Começaremos com os resultados utilizando inicialmente o defeito ψ . Analogamente à deformação hiperbólica, a trigonométrica 3-cíclica gera os mesmos resultados que a trigonométrica no caso 4-cíclico. Essa igualdade também é observada para os dois modelos analisados: $\lambda\chi^4$ e *sine-Gordon*. Através dos cálculos descritos na seção anterior encontramos os seguintes parâmetros:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{-\cos(n) + \cos[n \tanh(y)]}{n} \right], \quad (5.41)$$

$$T_{00}(y) = \frac{3}{4} \left[n \cos[n \tanh(y)] \operatorname{sech}(y)^4 - 2 \operatorname{sech}(y)^2 \sin[n \tanh(y)] \tanh(y) \right], \quad (5.42)$$

$$U(y) = \frac{3n(3-8\cos(n)\cos[n \tanh(y)]+5\cos[2n \tanh(y)])\operatorname{sech}(y)^4}{32(\cos(n)-\cos[n \tanh(y)])} + \frac{3}{2} \operatorname{sech}(y)^2 \sin[n \tanh(y)] \tanh(y).$$

Esses resultados estão apresentados na Fig. 21. A análise dos gráficos mostra que para qualquer valor do parâmetro n o modo zero é normalizável. A variação do parâmetro n nos gráficos acarreta uma mudança pequena nos resultados, variando em geral apenas os pontos de máximos e mínimos da função, mas mantendo sua forma. A análise do potencial da mecânica quântica revela que ele apresenta um formato vulcano.

5.5.2 Deformações 4-cíclicas

A - Caso hiperbólico

Nessa seção apresentamos apenas os resultados para o campo escalar ϕ , φ_1 , φ_2 e φ_3 , pois como visto acima os resultados para ψ e suas análises são iguais ao caso 3-cíclico hiperbólico de $\lambda\chi^4$.

Começaremos com a análise utilizando o defeito ϕ para calcular o *warp factor*:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \frac{-\operatorname{sech}(n) + \operatorname{sech}[n \tanh(y)]}{n}, \quad (5.43)$$

$$T_{00}(y) = -\frac{3}{8}\text{sech}(y)^3\text{sech}[n \tanh(y)]^3 \times \left[n(-3 + \cosh[2n \tanh(y)])\text{sech}(y) + 2 \sinh(y) \sinh[2n \tanh(y)] \right], \quad (5.44)$$

$$U(y) = \frac{3}{16} \text{sech}(y)^2 \text{sech}[n \tanh(y)] \times \left[\frac{n\text{sech}(y)^2\text{sech}[n \tanh(y)](-5+2(-3+\cosh[2n \tanh(y)])\text{sech}[n \tanh(y)]+9\text{sech}[n \tanh(y)]^2)}{\text{sech}(n)-\text{sech}[n \tanh(y)]} + 8 \tanh(y) \tanh[n \tanh(y)] \right].$$

Esses resultados estão apresentados na Fig. 22. Neste caso também vemos que para qualquer valor do parâmetro n o modo zero é normalizável. A variação do parâmetro n nos gráficos novamente implica em uma mudança pequena nos resultados, variando em geral apenas os pontos de máximos e mínimos da função, mas mantendo sua forma.

Passemos agora para os resultados obtidos através do defeito φ_1 para o cálculo de $A(y)$. Através dos cálculos descritos na seção anterior encontramos os seguintes parâmetros:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\tanh[n \text{sech}(y)]}{n} \right], \quad (5.45)$$

$$T_{00}(y) = \frac{3}{4} \text{sech}(y) \text{sech}[n \text{sech}(y)]^2 \left[-1 + 2 \text{sech}(y) [\text{sech}(y) + n \tanh(y)^2 \tanh[n \text{sech}(y)]] \right], \quad (5.46)$$

$$U(y) = \frac{3}{16} \text{sech}(y) \text{sech}[n \text{sech}(y)]^2 (2 - 6 \text{sech}(y)^2 + 2 \tanh(y)^2 + n(5 - 4 \cosh[2n \text{sech}(y)]) \text{csch}[n \text{sech}(y)] \text{sech}(y) \text{sech}[n \text{sech}(y)] \tanh(y)^2).$$

Os respectivos resultados estão apresentados na Fig. 23. Mais uma vez, para qualquer valor do parâmetro n o modo zero é normalizável. Além disso, é possível notar a formação de um pequeno *plateau* nos gráficos do potencial da mecânica quântica e do tensor energia-momento conforme aumentamos o valor de n .

Refazendo os cálculos acima para o defeito φ_2 , encontramos os seguintes parâmetros:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\tanh[n \log[1 + \text{sech}(y)^2]]}{n} \right], \quad (5.47)$$

$$T_{00}(y) = \left[3 \text{sech}(y)^6 \text{sech}[n \log[1 + \text{sech}(y)^2]]^2 \left(7 + 2 \cosh(2y) - \cosh(4y) + 16n \sinh(y)^2 \tanh[n \log[1 + \text{sech}(y)^2]] \right) \right] / [8(1 + \text{sech}(y)^2)^2], \quad (5.48)$$

$$U(y) = \frac{3 \text{sech}[n \ln[1 + \text{sech}(y)^2]]^2 (-4 + 2 \cosh(2y) - 2 \text{sech}(y)^2 + n(-9 + \coth[n \ln[1 + \text{sech}(y)^2]])^2 \tanh[y]^2 \tanh[n \ln[1 + \text{sech}(y)^2]])}{(3 + \cosh(2y))^2}.$$

Esse modelo é muito parecido com o acima, mas construímos os gráficos com uma variação diferente: $n = 1 - 2k; 1 - k; 4; 1 + k; 1 + 2k$, evidenciando a formação de um *plateau* conforme aumentamos o valor de n . Os resultados estão apresentados na Fig. 24. Para qualquer valor do parâmetro n o modo zero é normalizável, mas com essa variação de n , podemos observar a formação de um grande *plateau* para o caso de $N = 4$, contrapondo-se aos valores menores de n onde não há a formação de *plateau*. Além disso, vemos através do gráfico do tensor energia-momento que, para $N = 4$, a interface que interpola duas fases de *bulks* quebra-se em duas interfaces separadas. Surge, então, uma nova fase entre as duas interfaces, que em matéria condensada é um fenômeno conhecido como *complete wetting* (Campos; Holland; Wiese, 1998). Esse cenário que apresenta essa nova fase é o de uma brana que sustenta estrutura interna. Essa região onde a nova fase surge corresponde à região de *plateau* presente no *warp factor* (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004).

Apesar de não conseguirmos encontrar o defeito no cenário de branas, foi feita uma análise da função em série de Taylor, e encontramos uma boa aproximação com um defeito topológico conhecido como duplo *kink*. Este é exatamente o tipo de defeito esperado em um cenário de brana espessa.

Por fim, utilizando-se o defeito φ_3 no cálculo de $A(y)$ obtemos:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\tanh\left[\frac{2n}{2+y^2}\right]}{n} \right], \quad (5.49)$$

$$T_{00}(y) = \frac{3\operatorname{sech}\left[\frac{2n}{2+y^2}\right]^2(4 - 4y^2 - 3y^4 + 8ny^2 \tanh\left[\frac{2n}{2+y^2}\right])}{(2 + y^2)^4}, \quad (5.50)$$

$$U(y) = \frac{3\operatorname{csch}\left[\frac{2n}{2+y^2}\right]\operatorname{sech}\left[\frac{2n}{2+y^2}\right]^3(2ny^2(5 - 4\cosh\left[\frac{4n}{2+y^2}\right]) + (-4 + 4y^2 + 3y^4)\sinh\left[\frac{4n}{2+y^2}\right])}{2(2+y^2)^4}.$$

Através da Fig 25 vemos que $e^{2A(y)}$ também apresenta um *plateau* para $N = 4$. Assim como para φ_2 , através do gráfico do tensor energia-momento vemos o surgimento de uma nova fase entre duas interfaces. Também foi feita uma análise da função em série de Taylor e encontrada uma boa aproximação com um duplo *kink*, indicando que o defeito no cenário de branas possui uma riqueza maior de detalhes.

B - Caso trigonométrico

Nessa seção apresentamos apenas os resultados para o campo escalar φ_1 , pois os resultados para ψ e suas análises são iguais ao caso 4-cíclico trigonométrico de $\lambda\chi^4$.

Através dos cálculos descritos na seção anterior encontramos os seguintes parâmetros ao inserirmos o defeito φ_1 :

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{2n \operatorname{sech}(y) + \sin[2n \operatorname{sech}(y)]}{4n} \right], \quad (5.51)$$

$$T_{00}(y) = \frac{3}{4} \operatorname{sech}(y) \left[\cos[n \operatorname{sech}(y)]^2 \operatorname{sech}(y)^2 + (-\cos[n \operatorname{sech}(y)]^2 + n \operatorname{sech}(y) \sin[2n \operatorname{sech}(y)]) \tanh(y)^2 \right], \quad (5.52)$$

$$U(y) = \frac{1}{8(2n \operatorname{sech}(y) + \sin[2n \operatorname{sech}(y)])} \left[-6 \cos[n \operatorname{sech}(y)]^2 \operatorname{sech}(y)^3 (2n \operatorname{sech}(y) + \sin[2n \operatorname{sech}(y)]) + 3 \operatorname{sech}(y) \left(-4n^2 \operatorname{sech}(y)^2 \sin[2n \operatorname{sech}(y)] + \cos[n \operatorname{sech}(y)]^2 \times (n(1 + 5 \cos[2n \operatorname{sech}(y)]) \operatorname{sech}(y) + 2 \sin[2n \operatorname{sech}(y)]) \right) \tanh(y)^2 \right].$$

Para a Fig. 26, referente a esse caso, também foi utilizado $N = 4$. No entanto, um comportamento diferente do encontrado para φ_2 e φ_3 referentes à cadeia hiperbólica. Note que no gráfico de $e^{2A(y)}$ há um *lump* interpolado por um *plateau*. Através do gráfico do tensor energia-momento vemos ainda que o comportamento é diverso dos anteriores e há o surgimento de várias fases novas, gerando 4 picos de matéria ao invés de 2. Apesar de não ter sido possível calcular a solução da equação de movimento para esse modelo, seria interessante analisar futuramente suas características. Emerge então o ensejo da busca por novas soluções em cenários como esse encorajada pelo fato de que possivelmente o defeito decorrente desses modelos possui ainda mais detalhes em sua estrutura que o duplo *kink*.

Por fim, julgamos apropriado omitir os casos para φ_2 e φ_3 referentes à cadeia 4-cíclica trigonométrica. Essa decisão é justificada pois ambos apresentam análise gráfica semelhante ao resultado apresentado para φ_1 sem que possamos calcular a solução da equação de movimento.

5.6 Resultados referentes às soluções do modelo *sine-Gordon*

Introduziremos os cálculos dos resultados em cenários de branas acionados pelos defeitos tipo *lump* encontrados no Capítulo 4. Analogamente à seção anterior, a classificação das subseções seguintes partilha das mesmas sequência e nomenclatura escolhidas no referido capítulo.

5.6.1 Deformações 3–cíclicas

A - Caso hiperbólico

Começaremos com a análise dos resultados através do defeito ψ , previamente encontrado, inserido no cálculo de $A(y)$:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[-\log[\cosh(n\pi - 4 \arctan(e^y)) \operatorname{sech}(\pi)] \right], \quad (5.53)$$

$$T_{00}(y) = \frac{3e^y \left[4e^y \operatorname{sech}[n\pi - 4 \arctan(e^y)]^2 + (-1 + e^{2y}) \tanh[n\pi - 4 \arctan(e^y)] \right]}{(1 + e^{2y})^2}, \quad (5.54)$$

$$U(y) = \frac{3e^y (-4e^y \operatorname{sech}[n\pi - 4 \arctan(e^y)]^2 + \left(-1 + e^{2y} + \frac{e^y \tanh[n\pi - 4 \arctan(e^y)]}{\ln[\cosh[\pi - n\pi + 2G(y)] \operatorname{sech}[\pi]]} \tanh[\pi - n\pi + 2G(y)] \right)}{(1 + e^{2y})^2}.$$

Os resultados acima encontram-se descritos na Fig. 27. Como para o caso $\lambda\chi^4$, esses resultados repetem-se para o caso 4-cíclico de *sine-Gordon*. Não encontramos *plateau*, e como veremos a seguir esse comportamento também não está presente nos outros casos realizados com o modelo de *sine-Gordon*. O potencial da mecânica quântica apresenta-se como vulcano, o que também poderia resultar na presença de modos normais acoplados, como no caso derivado de $\lambda\chi^4$. Esse comportamento vulcano repete-se para todos os casos referentes ao modelo *sine-Gordon*. Contudo, para esse modelo a solução de modo zero não é normalizável. Através da análise dos limites da solução para $y \rightarrow \pm\infty$, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} H_{\mu\nu}(y) &= \left[-\ln[\cosh(-2\pi + n\pi) \operatorname{sech}(\pi)] \right]^{3/4}, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} H_{\mu\nu}(y) &= \left[-\ln(\cosh(n\pi) \operatorname{sech}(\pi)) \right]^{3/4}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Esse comportamento está apresentado no gráfico descrito na Fig. 27.

B - Caso trigonométrico

Apresentamos os resultados para o campo escalar ψ . Através dos cálculos descritos na seção anterior encontramos os seguintes parâmetros:

$$A(y) = \frac{1}{2} \log[1 + \cos[n\pi - 4 \arctan(e^y)]], \quad (5.56)$$

$$T_{00}(y) = -\frac{6e^{2y} \left[2 \cos[n\pi - 2G(y)] + \sin[n\pi - 2G(y)] \sinh(y) \right]}{(1 + e^{2y})^2}, \quad (5.57)$$

$$U(y) = \frac{3e^y(e^y + 5e^y \cos[n\pi - 2G[y]] + (-1 + e^{2y}) \sin[n\pi - 2G[y]])}{(1 + e^{2y})^2}.$$

Nessas equações e nas seguintes trocamos o termo *Gudermannian*(y) por $G(y)$, para melhor visualização das expressões. Os resultados acima encontram-se descritos na Fig. 28.

Analogamente ao caso anterior, para esse modelo a solução de modo zero não é normalizável. Através da análise dos limites da solução para $y \rightarrow \pm\infty$, vemos que

$$\lim H_{\mu\nu}(y)_{y \rightarrow \pm\infty} = [1 + \cos(n\pi)]^{3/4}. \quad (5.58)$$

5.6.2 Deformações 4-cíclicas

A - Caso hiperbólico

Nessa seção apresentamos apenas os resultados para o campo escalar ϕ , pois os resultados para ψ e suas análises são iguais ao caso 3-cíclico hiperbólico de *sine-Gordon*.

Através dos cálculos descritos na seção anterior encontramos os seguintes parâmetros para ϕ :

$$A(y) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{-\operatorname{sech}(\pi) + \operatorname{sech}[n\pi - 4 \arctan(e^y)]}{n} \right], \quad (5.59)$$

$$T_{00}(y) = 3e^{2y} \operatorname{sech}[n\pi - 4 \arctan(e^y)]^3 \left[6 - 2 \cosh[2n\pi - 8 \arctan(e^y)] + \sinh(y) \sinh[2n\pi - 8 \arctan(e^y)] \right] / [(1 + e^{2y})^2 n]. \quad (5.60)$$

Para o defeito inicial ϕ não foi possível encontrar uma expressão analítica para $U(y)$. No entanto, seu comportamento está representado na Fig. 29, juntamente com $A(y)$, $e^{3A/2}$ e o tensor energia-momento.

A análise gráfica dos resultados acima encontra-se descrita na Fig. 29.

$$\begin{aligned} \lim H_{\mu\nu}(y)_{y \rightarrow \infty} &= e^{3\pi/4} \left[\frac{(e^{4\pi} + e^{2n\pi} - e^{(1+n)\pi} - e^{(3+n)\pi})(-1 + \tanh(\pi))}{(e^{4\pi} + e^{2n\pi})n} \right]^{3/4}, \\ \lim H_{\mu\nu}(y)_{y \rightarrow -\infty} &= \left(\frac{-\operatorname{sech}(\pi) + \operatorname{sech}(n\pi)}{n} \right)^{3/4}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

B - Caso trigonométrico

Existem dois defeitos tipo *lump* referentes ao caso trigonométrico da cadeia 4-cíclica de deformações. Um deles é a solução ψ , que aplicada no cenário de branas apresenta os mesmos resultados que o caso 3-cíclico, e por isso foi omitida. O outro é referente ao defeito ϕ , que não possui um comportamento padrão. Como foi analisado no Capítulo 4, através da derivada segunda vemos que a solução gera um ponto de máximo e dois pontos de mínimos, enquanto espera-se apenas um ponto de máximo para um *lump* padrão. Devido a esse comportamento, não é possível encontrar um *warp factor* da forma desejada iniciando o procedimento com ϕ .

Embora o defeito no cenário de branas não tenha sido encontrado analiticamente, suas derivadas foram calculadas e estão apresentadas nas Figs. 30,31,32,33.

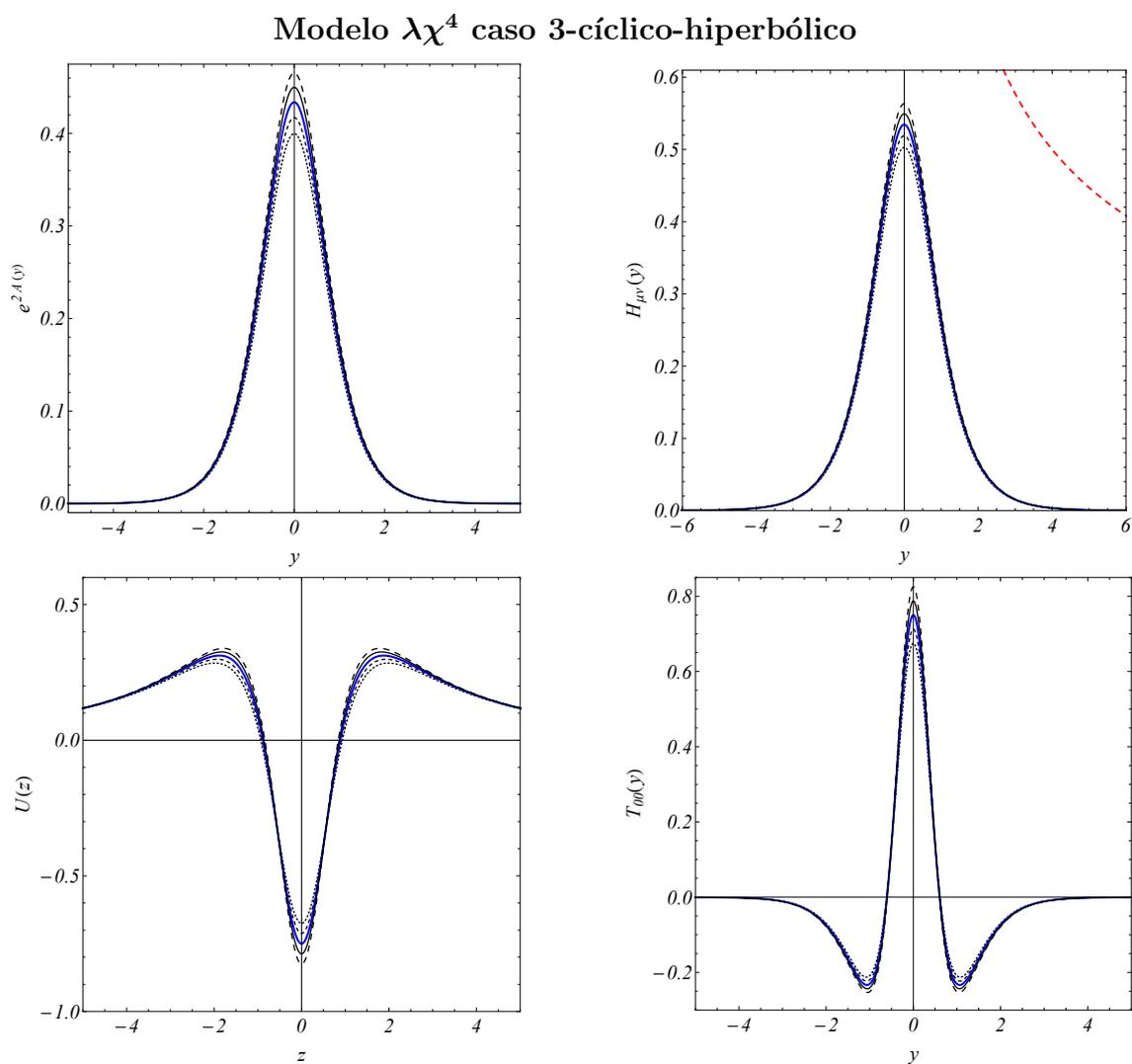


Figura 20: Resultados obtidos através do caso 3-cíclico hiperbólico referentes ao defeito ψ do modelo $\lambda\chi^4$. Esses resultados são iguais para os cálculos referentes ao caso 4-cíclico do mesmo modelo. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$, lembrando que $n = 1 - 2k; 1 - k; N; 1 + k; 1 + 2k$, com $k = 0,05$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

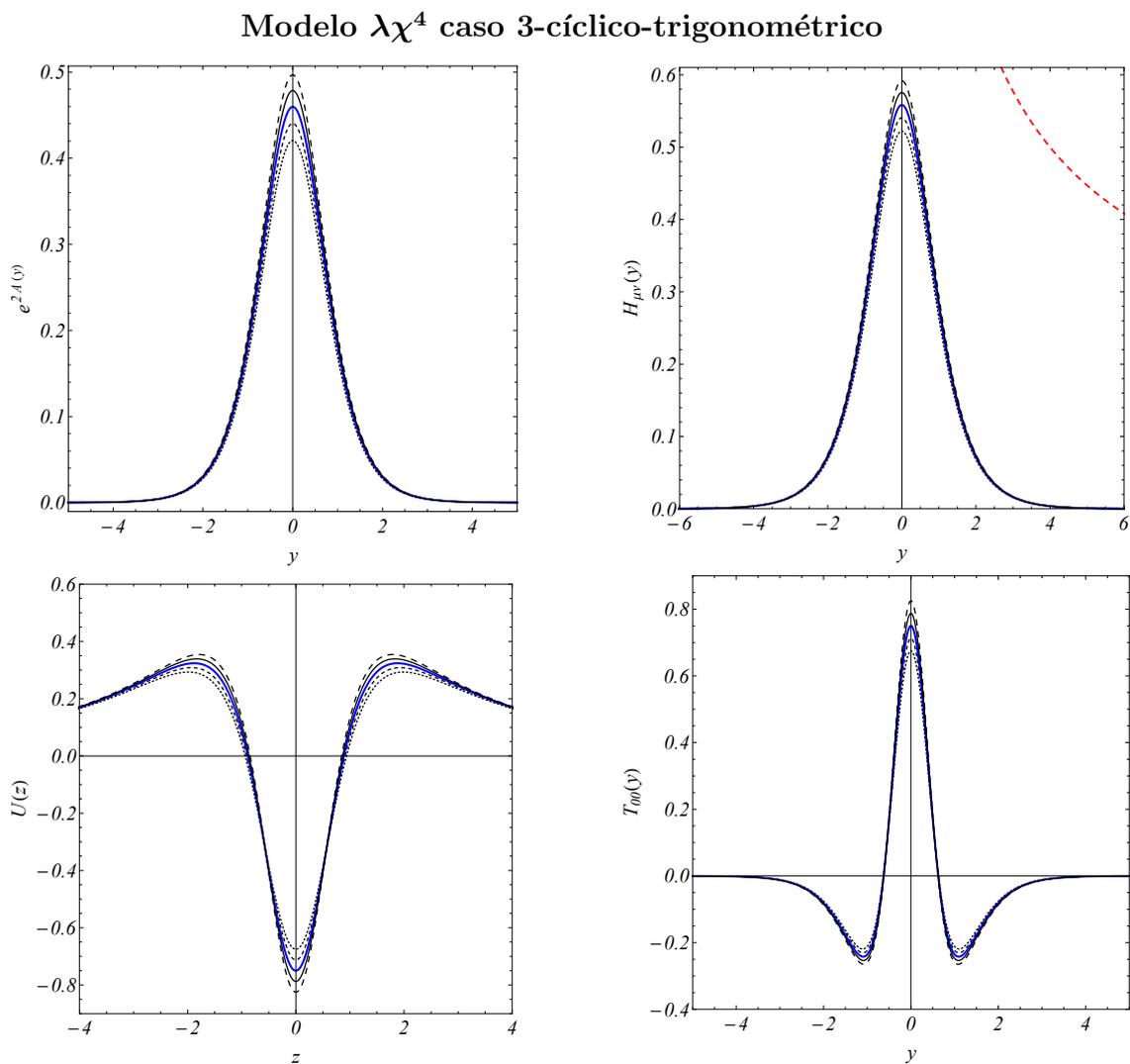


Figura 21: Resultados obtidos através do caso 3-cíclico trigonométrico referentes ao defeito ψ do modelo $\lambda\chi^4$. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

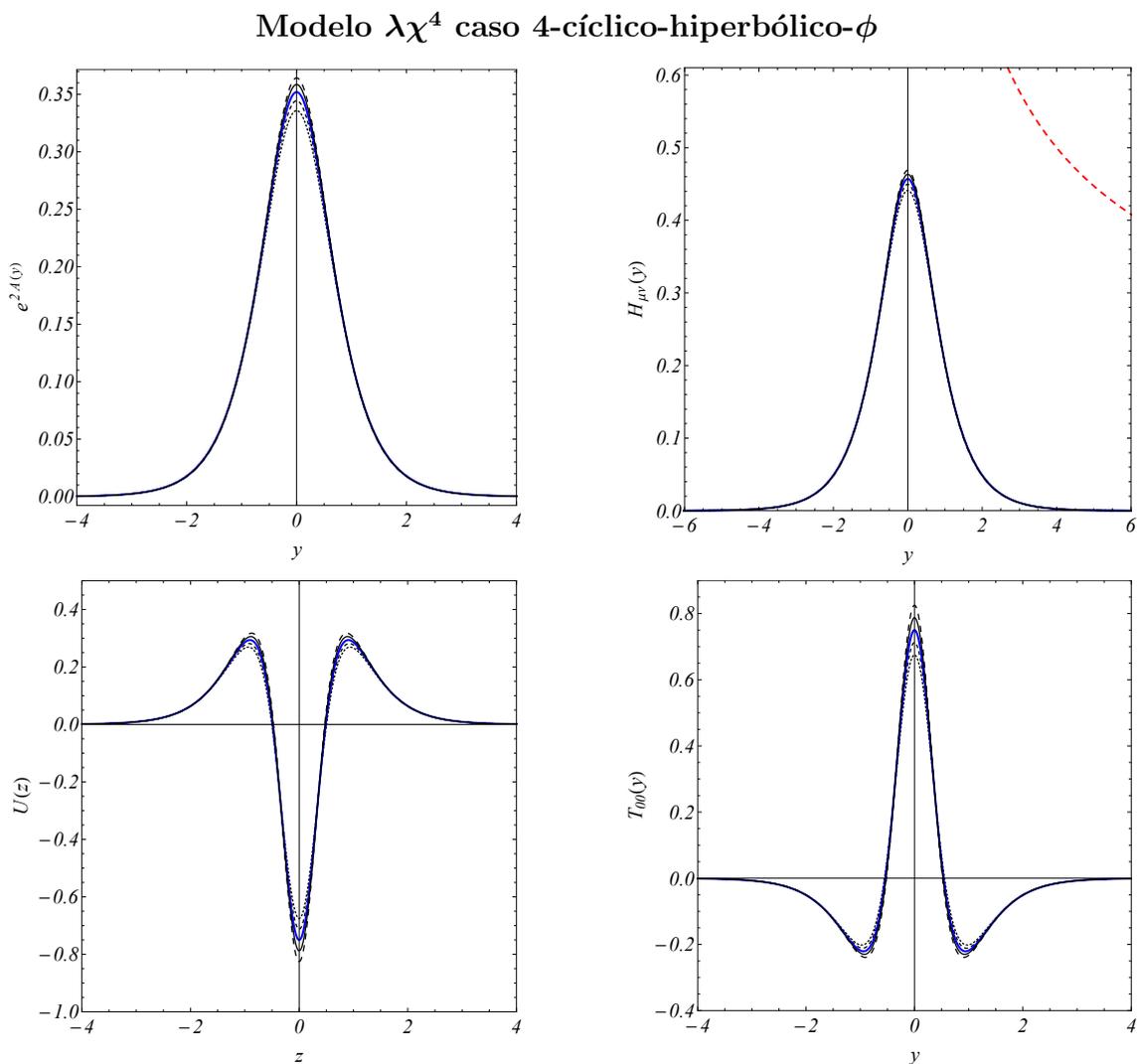


Figura 22: Resultados obtidos através do caso 4-cíclico hiperbólico referentes ao ϕ do modelo $\lambda\chi^4$. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

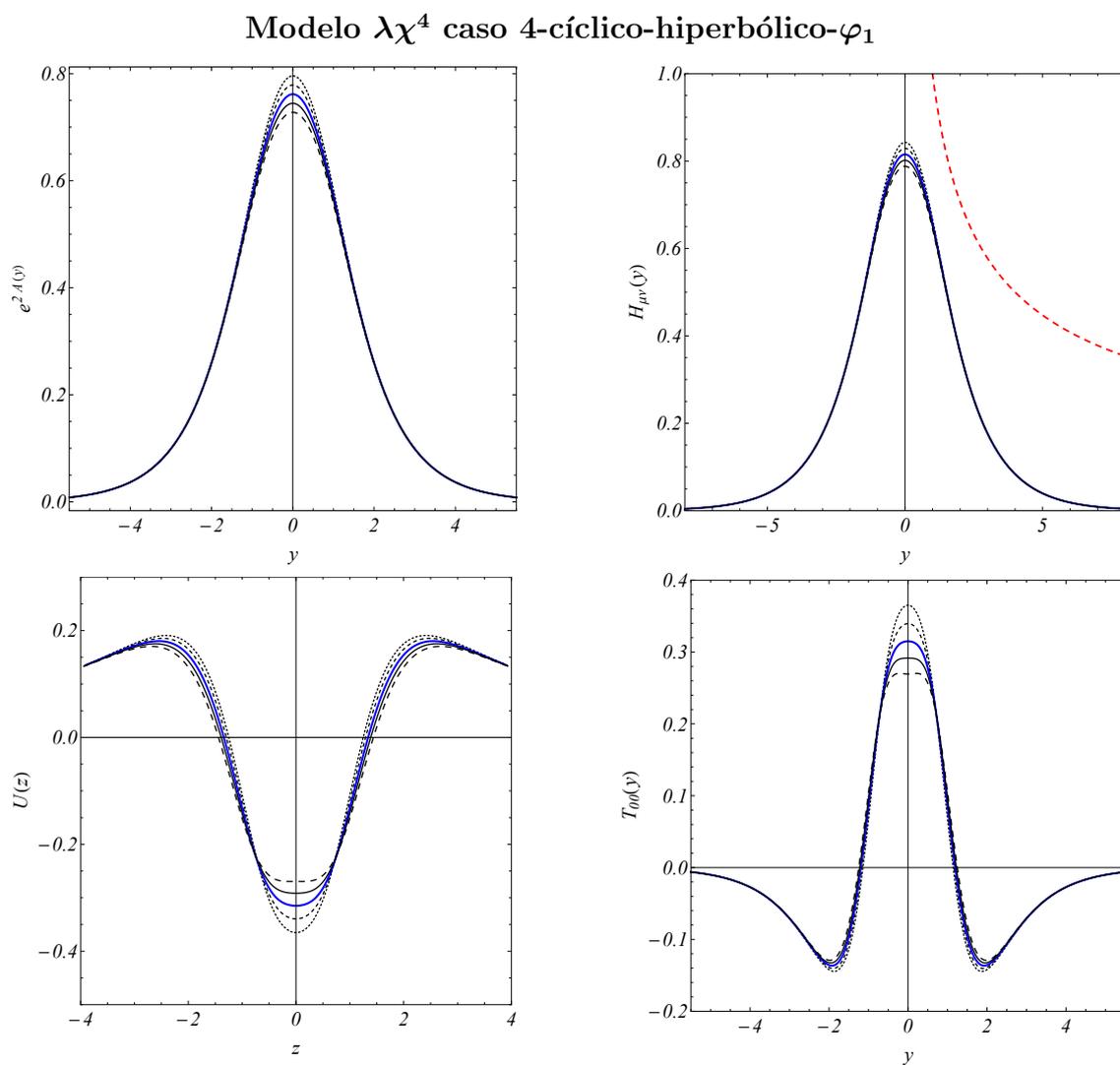


Figura 23: Resultados obtidos através do caso 4-cíclico hiperbólico referentes ao φ_1 do modelo $\lambda\chi^4$. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

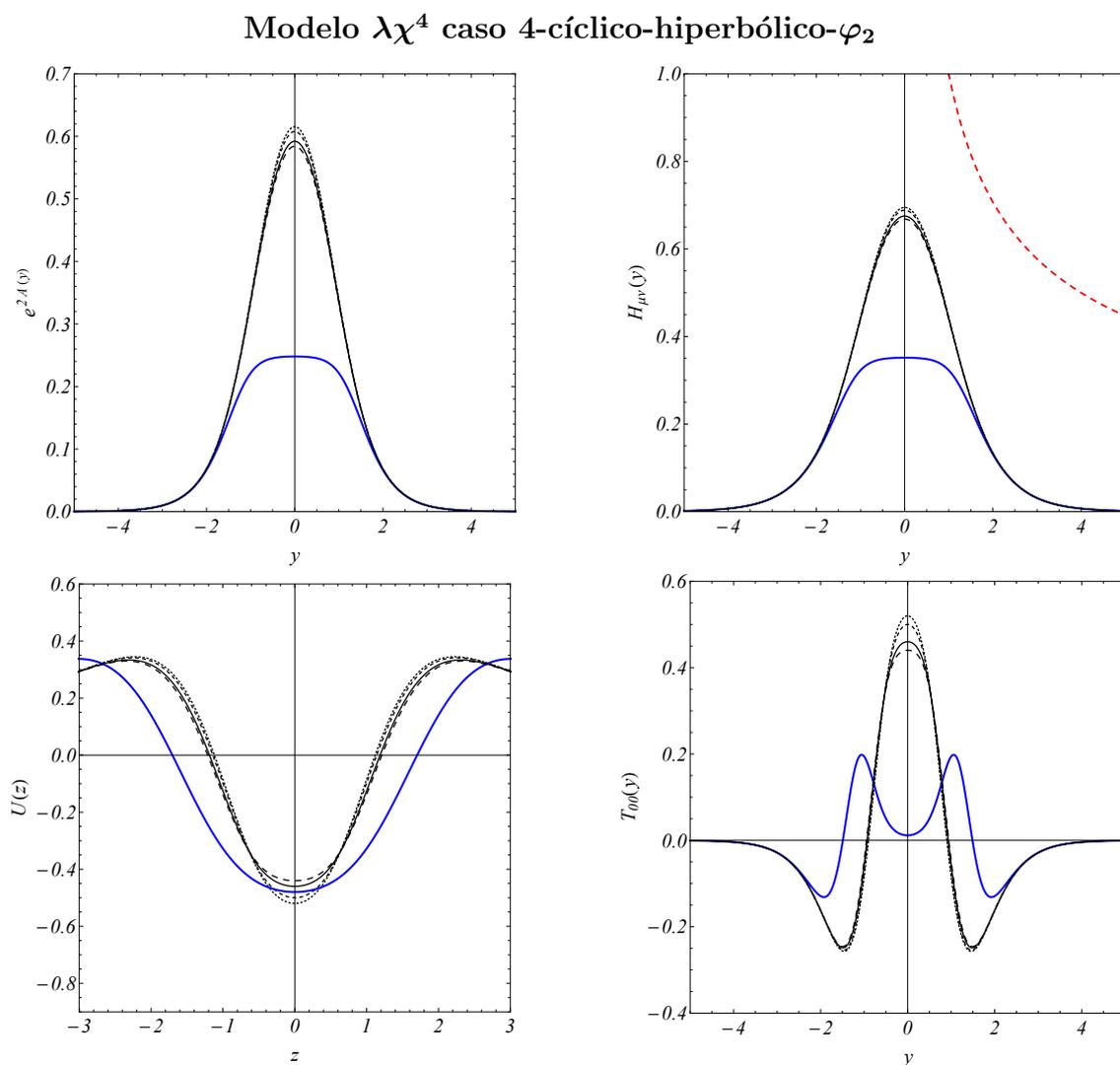


Figura 24: Resultados obtidos através do caso 4-cíclico hiperbólico referentes ao φ_2 do modelo $\lambda\chi^4$. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 4$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

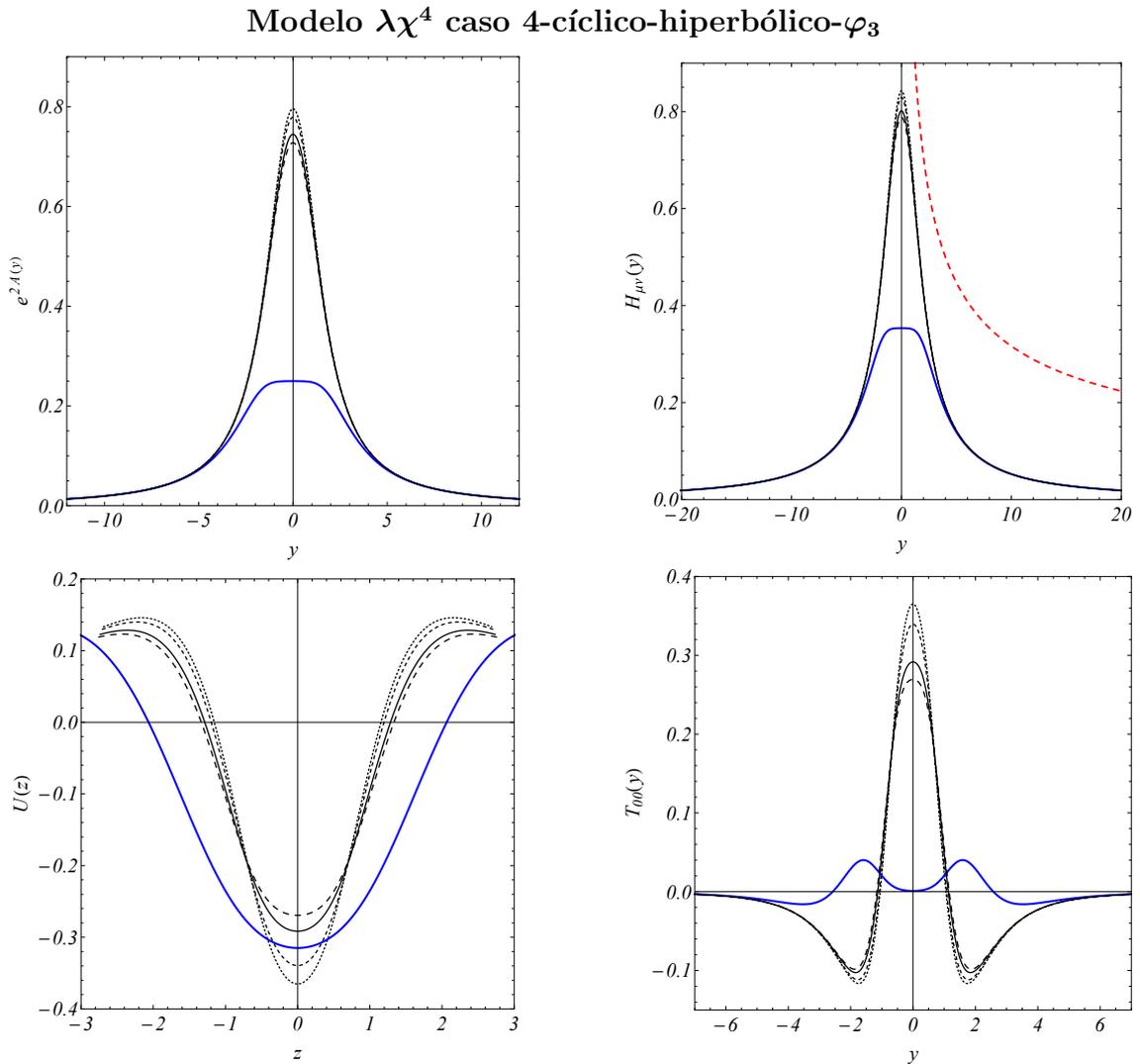


Figura 25: Resultados obtidos através do caso 4-cíclico hiperbólico referentes ao φ_3 do modelo $\lambda\chi^4$. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 4$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

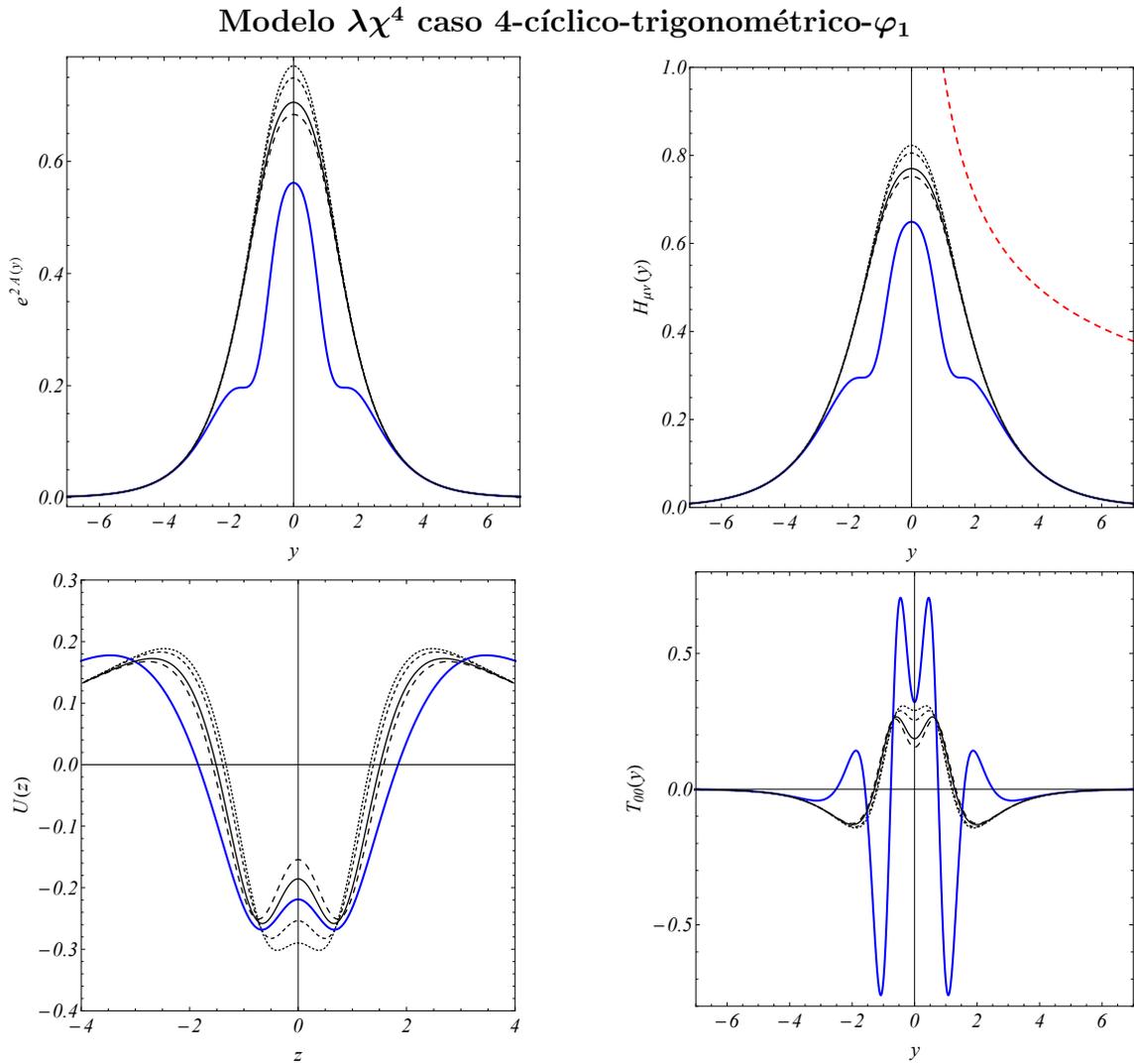


Figura 26: Resultados obtidos através do caso 4-cíclico trigonométrico referentes ao φ_1 do modelo $\lambda\chi^4$. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 4$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

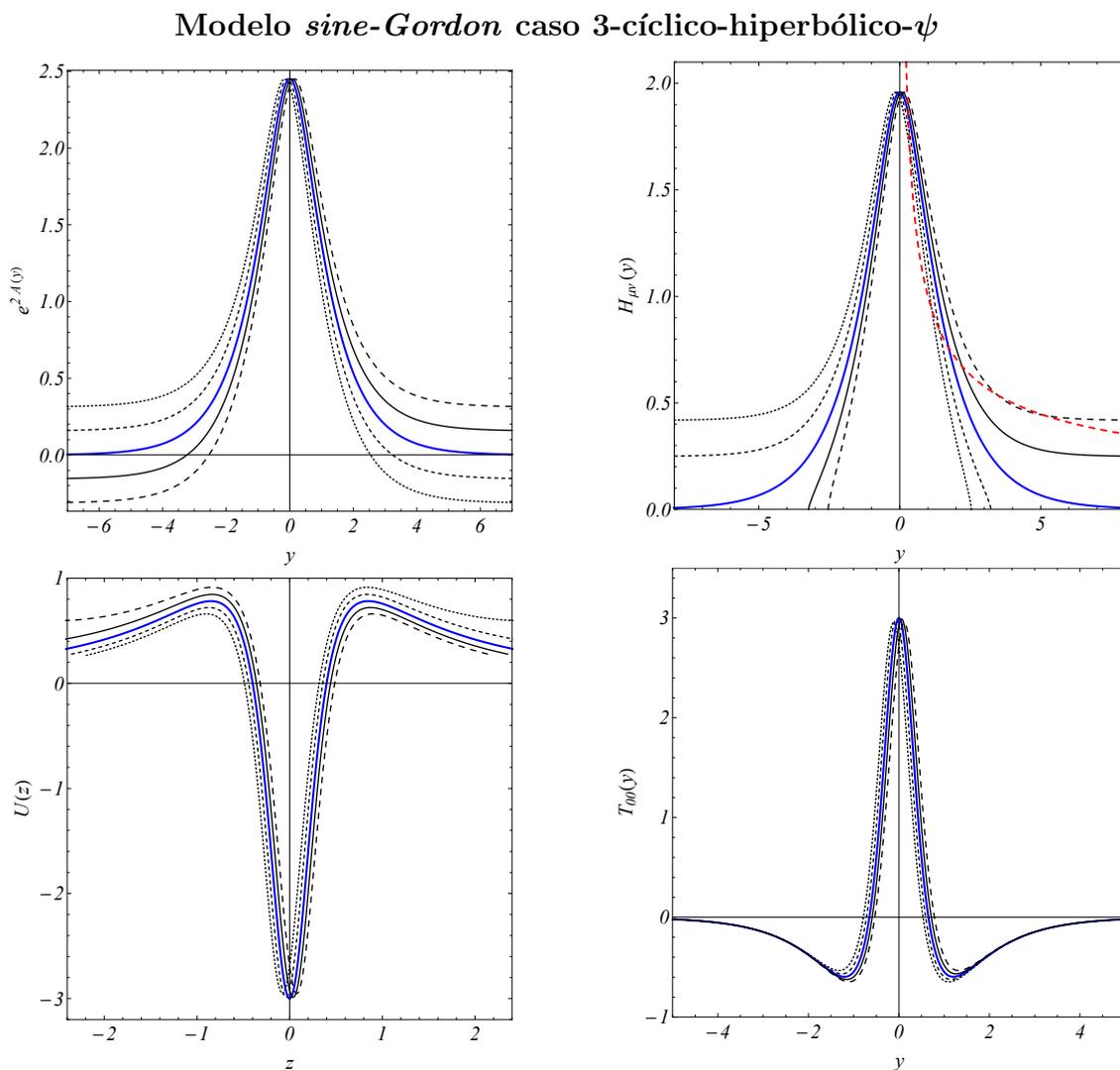


Figura 27: Resultados obtidos através do caso 3-cíclico hiperbólico referentes ao defeito ψ do modelo *sine-Gordon*. Esses resultados são os mesmos que os obtidos através do caso 4-cíclico do modelo de branas. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

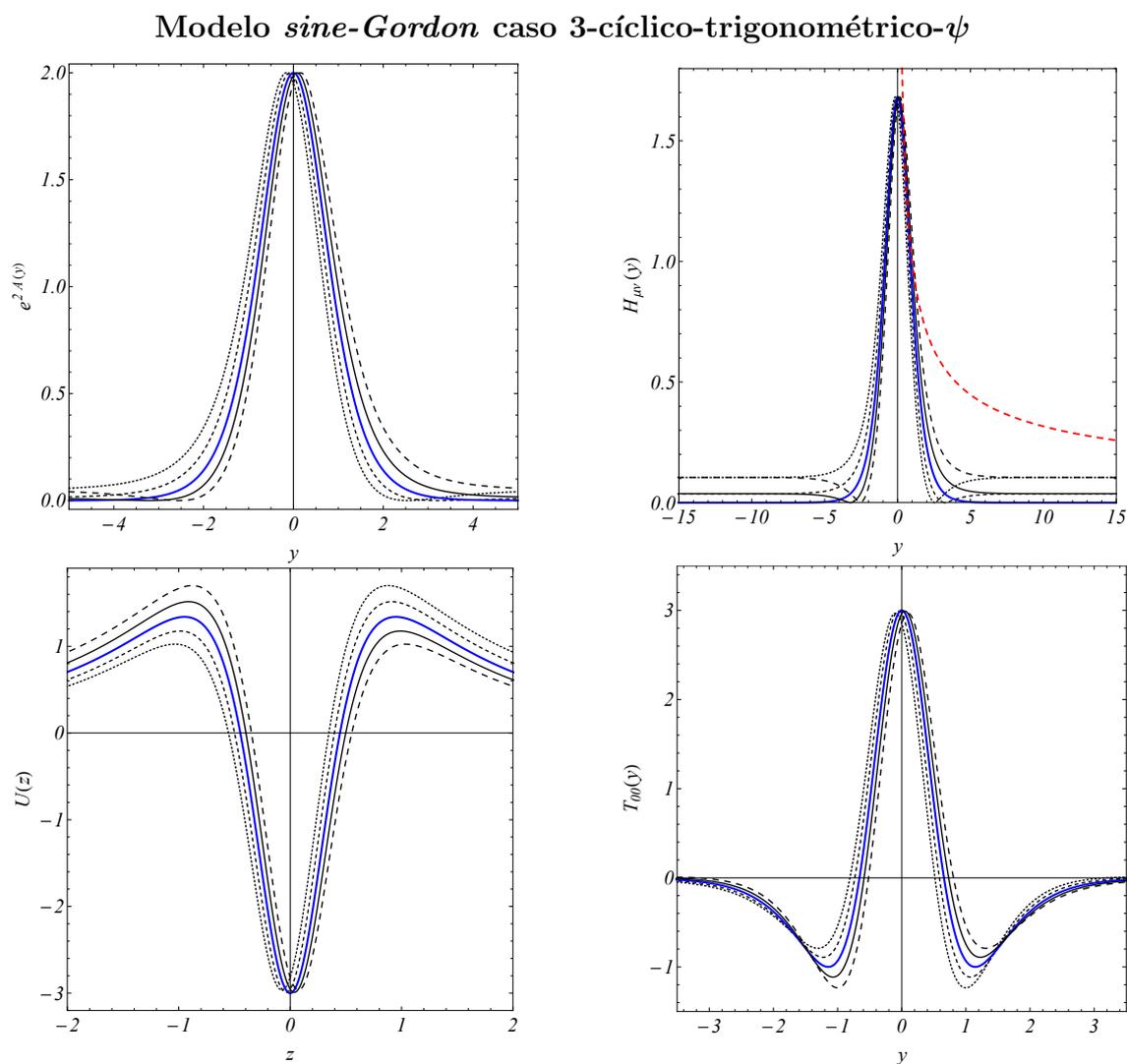


Figura 28: Resultados obtidos através do caso 3-cíclico trigonométrico referentes ao defeito ψ do modelo *sine-Gordon*. Esses resultados são os mesmos que os obtidos através do caso 4-cíclico do modelo de branas. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

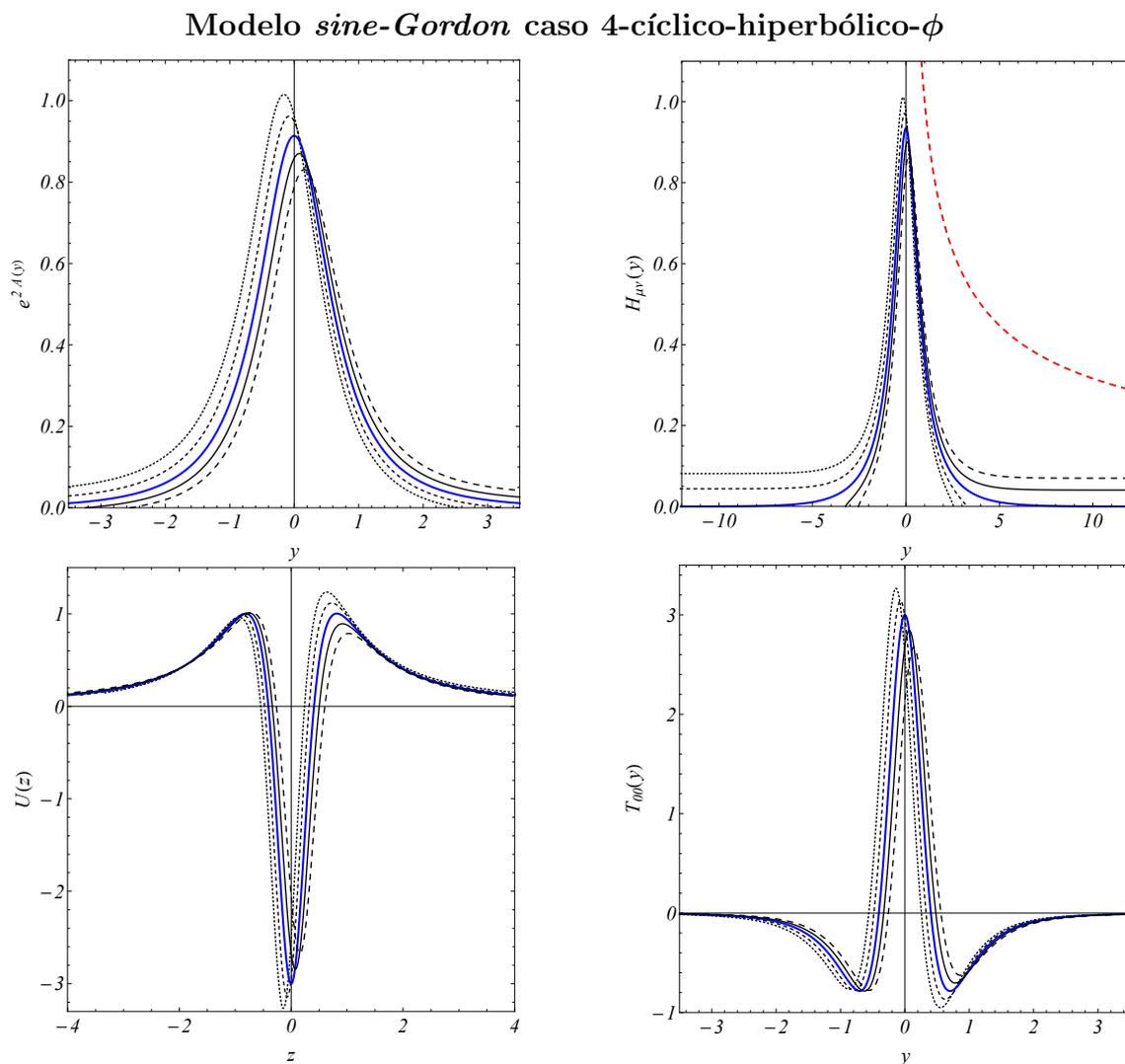


Figura 29: Resultados obtidos através do caso 4-cíclico hiperbólico referentes ao ϕ do modelo *sine-Gordon*. Na primeira linha estão representadas, da esquerda para a direita, a função exponencial do *warp factor* e a solução de modo zero. Abaixo encontram-se o potencial da mecânica quântica em função da coordenada z e o tensor energia-momento. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

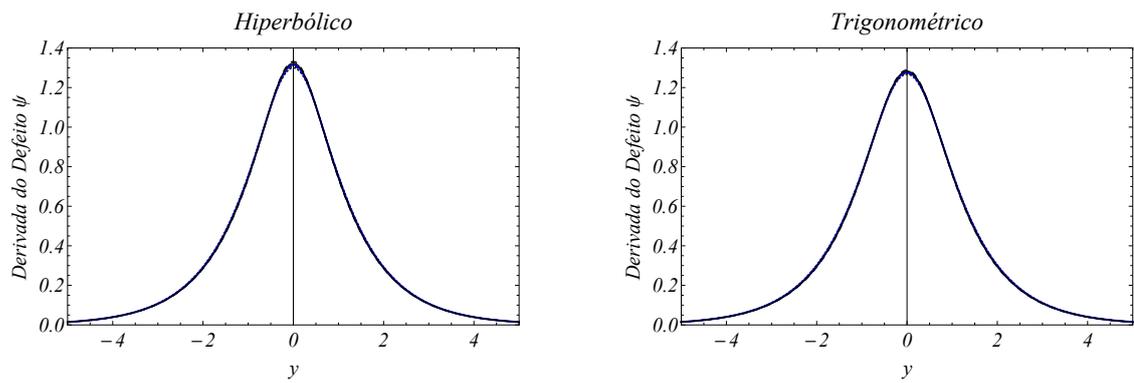
Modelo $\lambda\chi^4$ - Derivadas para o caso 3-cíclico

Figura 30: Derivadas dos defeitos no cenário de branas. Essas soluções foram obtidas através dos defeitos referentes ao modelo $\lambda\chi^4$ para a cadeia 3-cíclica dos casos hiperbólico, primeira coluna e trigonométrico, segunda coluna. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

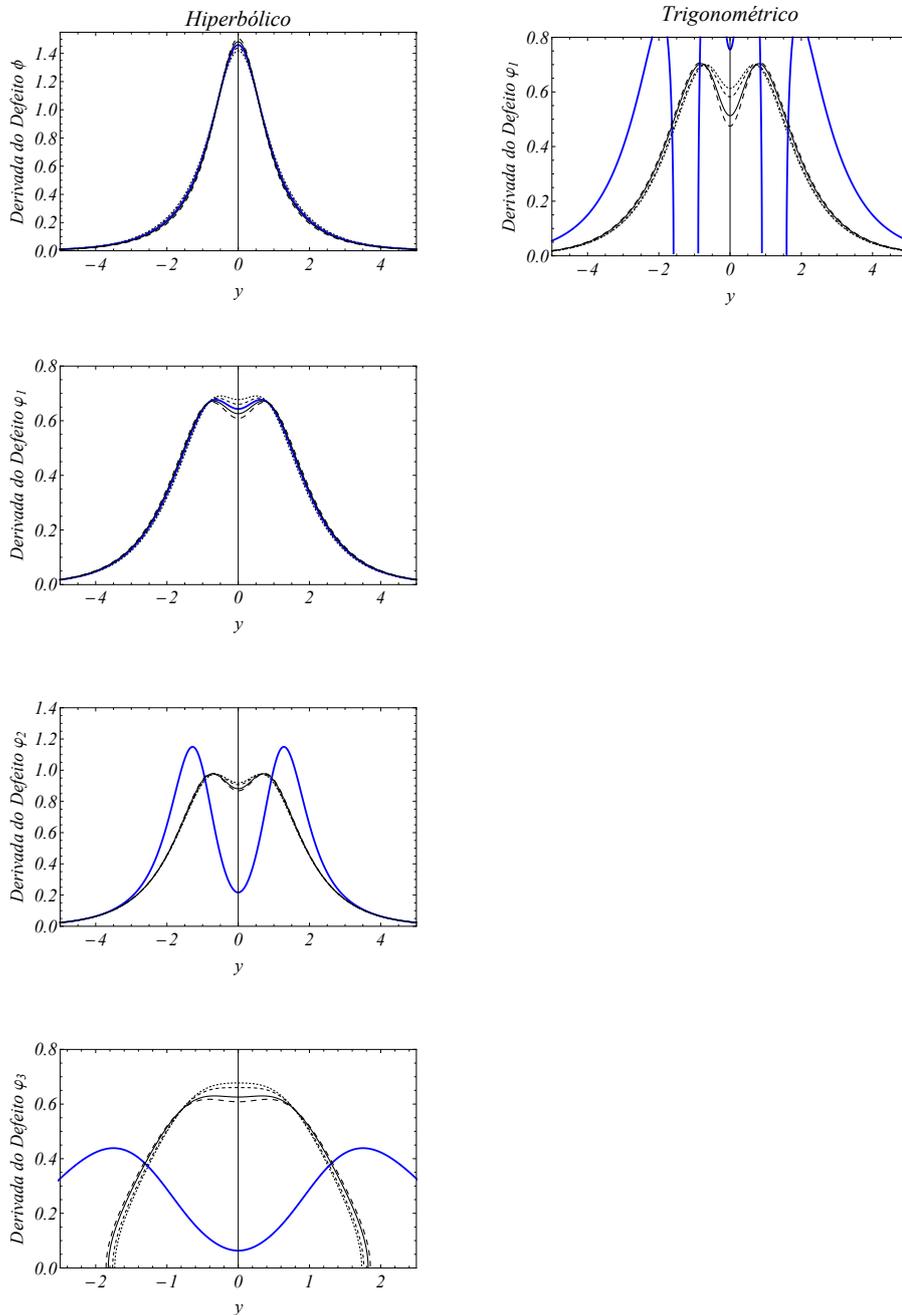
Modelo $\lambda\chi^4$ - Derivadas para o caso 4-cíclico

Figura 31: Derivadas dos defeitos no cenário de branas. Essas soluções foram obtidas através dos defeitos referentes ao modelo $\lambda\chi^4$ para a cadeia 4-cíclica dos casos hiperbólico, primeira coluna e trigonométrico, segunda coluna. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta. Já as linhas azuis seguem o mesmo padrão das Figuras anteriores com relação à escolha de N para cada caso.

Modelo *sine-Gordon* - Derivadas para o caso 3-cíclico

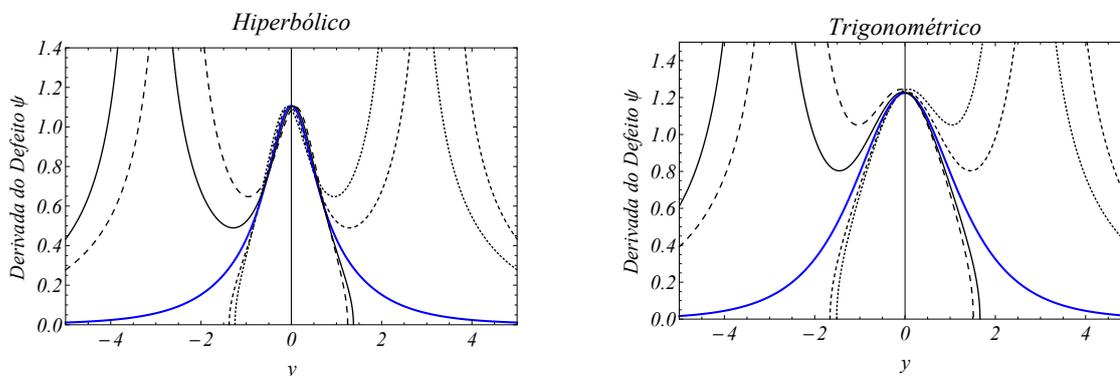


Figura 32: Derivadas dos defeitos no cenário de branas. Essas soluções foram obtidas através dos defeitos referentes ao modelo *sine-Gordon* para a cadeia 3-cíclica dos casos hiperbólico, primeira coluna e trigonométrico, segunda coluna. A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

Modelo *sine-Gordon* - Derivadas para o caso 4-cíclico

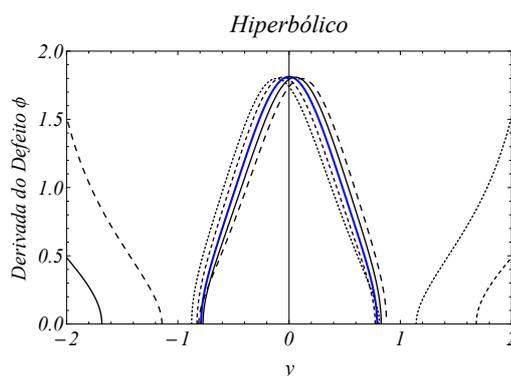


Figura 33: Derivadas do defeito no cenário de branas. Essas soluções foram obtidas através do defeito referente ao modelo *sine-Gordon* para a cadeia 4-cíclica do caso hiperbólico, ψ . A linha azul corresponde a solução para $N = 1$. As linhas em preto variam do pontilhado ao tracejado conforme n aumenta.

6 *Aplicação em cenários de potencial com fundo duplo*

6.1 **Origem topológica das transições de vácuo da mecânica quântica e tunelamento**

A origem topológica das transições quânticas de fase tem sido conjecturada em vários cenários diferentes, tanto em caráter de física teórica quanto experimental. No contexto fenomenológico, por exemplo, as transições de fase de origem topológica foram consideradas para identificar a equivalência entre os quase-cristais de Harper e Fibonacci (Verbin et al., 2013; Kraus; Zilberberg, 2012), para examinar modelos de cordas de Golden com anyons de Fibonacci (Schulz et al., 2013), para quantificar a estabilidade da ordem topológica de sistemas de spins perturbados por campos magnéticos (Trebst et al., 2007), e até mesmo para descrever transições de fase em modelos de DNA (Grinza; Mossa, 2004). Do mesmo modo, ferramentas teóricas foram desenvolvidas para descrever modelos XY de campo médio que são relacionados à mudanças adequadas na topologia do seu espaço de configuração (Casetti; Cohen; Pettini, 1999), para investigar a relação entre a correlação forte e o acoplamento spin-órbita para férmions de Dirac (Yu; Xie; Li, 2011) e para conjecturar que transições de fase de segunda ordem também têm origem topológica (Caiani et al., 1997). Também em teorias quântica de campos (Cvetič; Griffies; Rey, 1992; Cvetic; Soleng, 1997), modos taquiônicos (Sen, 2005; Campos, 2002; Bernardini; Bertolami, 2013) podem ser entendidos através da instabilidade do vácuo quântico, descrito pelo estado quântico deslocado do máximo local de um potencial topológico efetivo, $U(\xi)$. Isso implica em um processo chamado condensação taquiônica (Hashimoto; Ho; Wang, 2003; Takeuchi et al., 2012), que também exibe uma classificação topológica.

Além de sua abrangente aplicabilidade, a classificação topológica pode ser relevante porque ela codifica a informação sobre distorções e deformações de sistemas quânticos. De fato, conjectura-se que uma transição quântica de fase ocorre quando um sistema

pode ser continuamente deformado em um outro com origens topológicas distintas. Nosso trabalho consiste em obter a origem topológica de estados quânticos e os correspondentes potenciais da mecânica quântica (MQ), que descrevem o cenário do tunelamento de uma única partícula em potenciais de fundo duplo (abreviados por DW, originado pelo termo inglês: *double well*) (Caticha, 1995).

O controle coerente do tunelamento de uma única partícula em potenciais DW tem sido investigado de maneira recorrente uma vez que aparece em vários cenários relevantes (Schulz et al., 2013; Domcke; Tannor, 1997). Analiticamente modelos DW solúveis (Keung; Kovacs; Sukhatme, 1988) também são considerados candidatos proeminentes para referências de códigos computacionais e redes numéricas.

Nesse capítulo demonstramos que, através da técnica analítica de deformação de defeitos topológicos, é possível obter o perfil topológico do estado fundamental de modo zero, ψ_0 , e do primeiro estado excitado, ψ_1 , em potenciais de fundo duplo (Bernardini; Chinaglia, 2014). Os defeitos deformados geram dois cenários topológicos, que não são equivalentes, conectados por uma quebra de simetria. Esta última sustenta a conversão quântica entre um estado de modo zero de vácuo estável em um estado quântico taquiônico, instável. Os resultados teóricos revelam a origem topológica de modelos de dois níveis. Nestes, um estado quântico não estacionário com evolução unitária, $\psi_0 + e^{-iEt}\psi_1$, que exhibe uma dinâmica estável de tunelamento, é convertido em uma superposição quântica envolvendo um modo taquiônico que desaparece, $e^{-Et}\psi_0 + \psi_1$, parametrizando uma destruição coerente do tunelamento.

A natureza não-clássica da dinâmica da quebra de simetria é recriada em termos da mecânica quântica de uma única partícula em potenciais de fundo duplo em 1D. Note que neste capítulo utilizamos a letra grega ψ não mais como um defeito topológico (como utilizado em capítulos anteriores), mas sim como função de onda dos estados fundamental e excitado do sistema escolhido.

Uma característica notável e própria é que mesmo com a quebra de simetria do vácuo a origem topológica é recuperada. Como um efeito residual, ψ_1 torna-se a nova solução estável de modo zero, sustentada pelo defeito deformado. Nossos resultados revelam que a dinâmica do tunelamento pode ser levada à configurações estacionárias simulando uma paralisação completa, conhecida como destruição coerente do tunelamento (Grossmann et al., 1991; Kierig et al., 2008). A evolução de ambas as perturbações quânticas, não-estacionária e não-unitária, sustentadas por perfis topológicos que não são equivalentes, serão descritas nesse trabalho através da função distribuição de Wigner.

6.1.1 Cenários topológicos para potenciais DW.

Vamos considerar a família mais simples de teorias de campos clássicos relativísticos em 1 + 1 dimensões, $\varphi(t, s)$, descrita por uma densidade Lagrangeana que leva à equação de movimento dada por:

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_s^2 \varphi + \frac{dU}{d\varphi} = 0. \quad (6.1)$$

Para a maioria das teorias conhecidas sustentadas por $U(\varphi)$, o campo escalar derivado da Eq. (6.1) apresenta soluções independentes do tempo, $\xi(s)$, com energia finita (Rajaraman, 1994; Coleman, 1985). A estabilidade da solução pode ser discutida em termos de pequenas perturbações dependentes do tempo dadas por $\delta(t, s) \sim \varphi(t, s) - \xi(s)$. Reescrevendo a Eq. (6.1) em termos de ξ e δ e mantendo apenas termos de primeira ordem, encontramos a seguinte equação:

$$\square^2 \delta + (d^2 U / d\xi^2) \delta = 0. \quad (6.2)$$

A partir da qual, a invariância de translação implica que δ pode ser escrito como uma superposição de modos quânticos normais da seguinte forma:

$$\delta t(t, s) = \sum_n a_n e^{i\omega_n t} \psi_n(s), \quad (6.3)$$

onde a_n são coeficientes arbitrários. Dessa forma, ψ_n e ω_n obedecem uma equação *tipo-Schrödinger* em 1D,

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + V_0^{(MQ)}(s) \right) \psi_n(s) = \omega_n^2 \psi_n(s), \quad (6.4)$$

na qual o potencial da mecânica quântica é identificado por $V_0^{(MQ)}(s) = d^2 U(s) / d\xi^2(s)$. Modos estacionários requerem que $\omega_n^2 > 0$. Da mesma forma, modos taquiônicos instáveis podem ser encontrados se $\omega_n \sim ik_n$, com $-\omega_n^2 = k_n^2 > 0$.

Para potenciais dependentes de campos escalares, $U(\xi)$, que engendram estruturas tipo *lump* e tipo *kink* (Avelar et al., 2008; Bazeia; Menezes; Menezes, 2003), vimos que o formalismo de primeira ordem (Bazeia; Losano; Malbouisson, 2002; Bogomol'nyi, 1976; Rajaraman, 1994) estabelece

$$U(\xi) = z_\xi^2 / 2, \quad \text{com} \quad z_\xi = \frac{dz}{d\xi} = \frac{d\xi}{ds} = \xi' \quad (6.5)$$

e a Eq (6.4) pode ser escrita como

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\xi'''}{\xi'} \right) \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \quad (6.6)$$

Uma manipulação matemática simples permite-nos obter o modo-zero, ψ_0 (i.e. quando $\omega_0 = 0$), como $\psi_0 \sim \xi'$. O qual deve corresponder ao estado quântico fundamental no

caso de ξ' descrever funções tipo *lump* que não possuem zeros, i. e. nodos. Nesse caso, não haveria instabilidade a partir de modos com $\omega_n^2 < 0$. Portanto, construir um modelo analítico adequado para cenários topológicos torna-se uma simples questão de encontrar soluções integráveis.

Dada a Eq (6.6) o primeiro estado excitado e o fundamental de alguns poucos sistemas quânticos 1D sustentados por (ao menos parcialmente) potenciais DW exatamente solúveis podem ser expressos com formas analíticas fechadas (Caticha, 1995). Esse procedimento é realizado através de uma função multiplicadora de vínculo, α , definida por:

$$\psi_1(s) = \alpha(s)\psi_0(s). \quad (6.7)$$

Esse mecanismo é análogo à procedimentos super-simétricos em mecânica quântica para computar o estado fundamental e o correspondente potencial (Gendenshtein, 1983; Cooper; Khare; Sukhatme, 1995).

Substituindo $\psi_1(s) = \alpha(s)\psi_0(s)$ na Eq (6.4) com $n = 1$, temos

$$\left(\alpha(s)\psi_0(s)\right)'' + (\omega_1^2 - V_0^{(QM)}(s))\alpha(s)\psi_0(s) = 0. \quad (6.8)$$

Subtraindo a Eq. (6.4) multiplicada por α com $n = 0$:

$$\psi_0''(s) + (\omega_0^2 - V_0^{(QM)}(s))\psi_0(s) = 0, \quad (6.9)$$

da Eq. (6.8), podemos definir o seguinte parâmetro:

$$\beta(s) = \frac{\alpha'' + \Delta\omega_{10}^2\alpha}{2\alpha'} = -\frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{d \ln \psi_0}{ds}, \quad (6.10)$$

com $\Delta\omega_{10}^2 = \omega_1^2 - \omega_0^2$. O estado fundamental correspondente é portanto

$$\psi_0(s) = \mathcal{N} \exp\left(-\int^s ds' \beta(s')\right), \quad (6.11)$$

onde \mathcal{N} é uma constante de normalização. O potencial DW pode ser computado através de

$$V_0^{(QM)}(s) = \frac{\psi_0''(s)}{\psi_0(s)} + \omega_0^2, \quad (6.12)$$

que pode ser simplificado para modos zero com $\omega_0^2 = 0$.

Um conjunto de potenciais DW simétrico e assimétrico satisfazendo as propriedades acima pode ser identificado quando $\alpha(s)$ apresenta um comportamento assintótico de

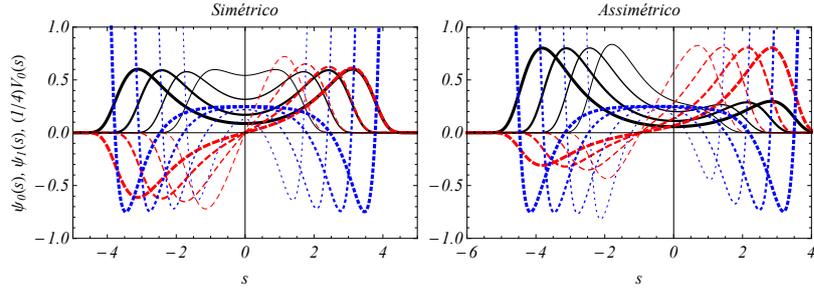


Figura 34: Potenciais da mecânica quântica simétrico (primeiro gráfico, $\epsilon = 0$) e assimétrico (segundo gráfico, $\epsilon = 3/4$) (linhas azuis pontilhadas), $V_0^{(QM)}$, e os correspondentes estados normalizados fundamental (linhas sólidas pretas), ψ_0 , e primeiro estado excitado (linhas vermelhas tracejadas), ψ_1 . Os gráficos são para $\gamma = 1$ e $\omega_1 = 1/\sigma$, com o parâmetro $\sigma = 1$ (linha mais fina), 2, 4 e 8 (linha mais grossa).

funções tipo *kink*. Por exemplo, quando

$$\alpha(s) = \epsilon + \tanh(\gamma s), \quad (6.13)$$

onde a assimetria é determinada por $\epsilon \neq 0$, e γ é uma constante arbitrária. Assumindo um estado de modo zero ($n = 0$) com $\omega_0 = 0$ o estado fundamental e primeiro estado excitado são obtidos como:

$$\begin{aligned} \psi_0(s) &= \mathcal{N} \cosh(\gamma s) \exp \left[-\frac{\cosh(2\gamma s) + \epsilon(2\gamma s + \sinh(2\gamma s))}{8\gamma^2\sigma^2} \right], \\ \psi_1(s) &= \mathcal{N}(\epsilon \cosh(\gamma s) + \sinh(\gamma s)) \exp \left[-\frac{\cosh(2\gamma s) + \epsilon(2\gamma s + \sinh(2\gamma s))}{8\gamma^2\sigma^2} \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde assumimos que $\omega_1 = 1/\sigma$. Os estados estacionários normalizados acima, assim como o correspondente potencial DW, estão apresentados na Fig. 34, para $\epsilon = 0$ e $3/4$.

A discussão a seguir será concernente primeiro ao caso simétrico ($\epsilon = 0$) e em seguida ao assimétrico ($\epsilon \neq 0$).

Como explicado previamente, o conhecimento do modo zero, ψ_0 , permite identificar o cenário topológico correspondente que sustenta perturbações quânticas para os potenciais DW acima, $V_0^{(QM)}(s)$. Para um potencial $U(\xi)$ sustentado por um campo escalar ξ , com $V_0^{(QM)}(s) = \xi'''/\xi'$, pode ser identificado como $\psi_0 \propto \xi'$. Além disso, notamos que um modelo DW deformado pode ser identificado deslocando-se a energia do primeiro estado excitado de ω_1 para 0. Nesse caso, devemos inferir a existência de um novo potencial quântico, $V_1^{(QM)}(s)$, tal que

$$\left(-d^2/ds^2 + V_1^{(QM)}(s) \right) \psi_1 = 0, \quad (6.15)$$

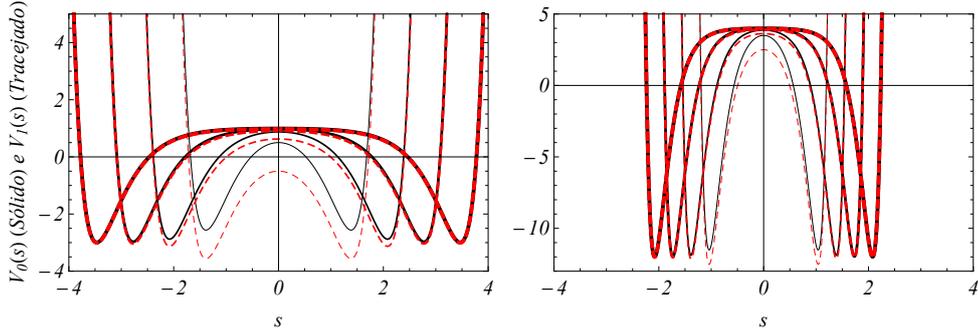


Figura 35: Caso referente à $\alpha(s) = \epsilon + \tanh(\gamma s)$. Potenciais quânticos, $V_0^{(QM)}(s)$ (linhas pretas sólidas) e $V_1^{(QM)}(s)$ (linhas vermelhas tracejadas), sustentadas por cenários topológicos com campos escalares, ξ e χ , respectivamente. O primeiro e o segundo gráficos são para $\gamma = 1$ e 2 , respectivamente, e novamente, estabelecemos $\omega_1 = 1/\sigma$, com o parâmetro $\sigma = 1$ (linha mais fina), 2 , 4 e 8 (linha mais grossa).

e portanto $\psi_1 = \alpha\psi_0$, implica em

$$\left(-d^2/ds^2 + V_1^{(QM)}(s)\right)\psi_0 = -\omega_1^2\psi_0 = \kappa_1^2\psi_0. \quad (6.16)$$

A auto-função $\psi_1(s)$ é então identificada como o novo modo zero. O potencial da mecânica quântica deformado passa a sustentar um modo instável taquiônico, $\psi_{-1}(s, t)$, que evolui no tempo como um estado que decai, $\psi_{-1}(t, s) \equiv e^{(-\omega_1 t)}\psi_0(s)$. Novamente, o novo modo zero, ψ_1 , permite identificar o cenário topológico correspondente para $V_1^{(QM)}(s)$. Na Fig. 35, apresentamos os potenciais da mecânica quântica,

$$V_{0(1)}^{(QM)}(s) = \frac{16\gamma^2\sigma^2 \left[(-1)^{0(1)} + 2(\gamma^2\sigma^2 - \cosh(2\gamma s))\right] + \cosh(4\gamma s)}{32\gamma^2\sigma^4}, \quad (6.17)$$

que sustentam modos zeros: sendo um deles o primitivo, ψ_0 , e o outro o deformado, ψ_1 , respectivamente (c.f. Eq. (6.14)).

No limite assintótico de $\sigma^2 \rightarrow \infty$, que corresponde a $\omega_1 \rightarrow 0$, o potencial tende a um valor constante assintótico $\sim \gamma^2$, ao longo do qual a transição contínua citada entre os regimes estável e instável ocorre. Para ilustrar tal deformação contínua, definimos um parâmetro fenomenológico $\epsilon = 1/\sigma$ de tal forma que os potenciais $V_0^{(QM)}$ e $V_1^{(QM)}$ possam ser escritos genericamente como

$$V^{(QM)}(s) = \frac{16\gamma^2 [\epsilon|\epsilon| + 2(\gamma^2 - \epsilon^2 \cosh(2\gamma s))] + \epsilon^4 \cosh(4\gamma s)}{32\gamma^2}. \quad (6.18)$$

A deformação destrói o perfil do potencial no ponto de transição, $\epsilon = 0$, para o qual $V^{(QM)}(s) = \gamma^2$.

Mostraremos que um quadro deformado exato para um potencial novo $W(\chi)$ guiado

por χ , com $V_1^{(QM)}(s) = \chi'''/\chi'$, pode ser obtido se identificarmos ψ_1 como $\propto \chi'$. A questão a ser feita é relativa principalmente com a viabilidade de obter e conectar cenários topológicos que sustentam tanto auto-funções estáveis como instáveis.

6.1.2 Modos estáveis e taquiônicos sustentados por defeitos deformados e transições quânticas relacionadas.

Ao longo de toda a tese reportamos que técnicas eficazes têm sido sugeridas a fim de estudar e resolver equações não-lineares através de procedimentos de deformação. Em particular, desenvolvemos uma técnica de obtenção de estruturas estáticas com energia localizada através de defeitos deformados que permite modificar uma estrutura de defeito primitiva por meio de sucessivas operações de deformação.

Retomaremos agora esse processo e o aplicaremos em sistemas governados por potenciais de fundo duplo. Consideraremos uma sequência de deformação de defeitos envolvendo dois cenários topológicos diferentes, chamados $\xi(s)$ e $\chi(s)$, com s a coordenada espacial. Para a escrita desta seção, e das anteriores pertencentes a este capítulo, adotamos exatamente a mesma notação do artigo resultante desse trabalho (Bernardini; Chinaglia, 2014). Por essa razão, nesta seção a solução do modelo $\lambda\chi^4$ será designada pela letra grega ϕ . Isto posto, iniciaremos o procedimento de deformação prescrito pelas seguintes equações de primeira ordem (Bogomol'nyi, 1976; Bazeia; Losano; Malbouisson, 2002; Avelar et al., 2008, 2009; Bernardini; da Rocha, 2013),

$$\begin{aligned}\xi' &\equiv \frac{d\xi}{ds} = z_\xi = \xi_\phi y_\phi, \\ \chi' &\equiv \frac{d\chi}{ds} = w_\chi = \chi_\phi y_\phi = \chi_\xi z_\xi,\end{aligned}\tag{6.19}$$

onde ξ_ϕ , χ_ϕ , e χ_ξ são funções de deformação inversíveis tais que $\xi_\phi \chi_\xi = \chi_\phi$, sendo os subíndices as correspondentes derivadas. Através das Eqs. (6.19), as funções auxiliares dos superpotenciais, z_ξ , w_χ , e y_ϕ podem ser usadas para construir uma cadeia de deformação como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}y_\phi^2 \Leftrightarrow W(\chi) = \frac{1}{2}w_\chi^2 \Leftrightarrow U(\xi) = \frac{1}{2}z_\xi^2.\tag{6.20}$$

Voltando ao nosso problema da MQ, pode-se assumir que $\alpha(s)$ (c.f. Eq. (6.7)) corresponde à função de deformação, $\alpha(\phi) = \chi_\xi = \frac{\chi_\phi(\phi)}{\xi_\phi(\phi)}$. Então, de acordo com Eq. (6.19), a

cadeia de deformação a seguir é estabelecida como:

$$\psi_1 \propto \chi' \equiv w_\chi = \chi_\xi z_\xi = \alpha z_\xi \equiv \alpha \xi' \propto \alpha \psi_0, \quad (6.21)$$

e é possível obter expressões analíticas para z_ξ e w_χ como funções de $\phi \equiv \phi(s)$. Uma vez que o defeito primitivo ϕ , é identificado como o *kink* da teoria $\lambda\chi^4$, $\phi(s) = \pm \tanh(s)$ e $y_\phi = \phi' = (1 - \phi^2)$, obtemos duas equações diferenciais de primeira ordem,

$$\xi_\phi(\phi) = \frac{z_\xi(\phi)}{y_\phi(\phi)} \quad \text{e} \quad \chi_\phi(\phi) = \frac{w_\chi(\phi)}{y_\phi(\phi)}, \quad (6.22)$$

que são vinculadas por $\alpha(\phi) = \chi_\xi$.

Finalmente, os resultados analíticos para $(\xi, z_\xi^2/2)$ e $(\chi, w_\chi^2/2)$, como funções de ϕ , permitem-nos obter de maneira direta uma representação paramétrica analítica para $U(\xi)$ e $W(\chi)$, respectivamente. Esses são os potenciais topológicos que sustentam a dinâmica quântica guiada por $V_0^{(QM)}$ e $V_1^{(QM)}$. Dada a topologia da função deformação, $\alpha(\phi)$, e a correspondência com a Eq. (6.20), nota-se que os *kinks* são deformados em *lumps* e vice-versa.

Para esclarecer esse ponto, vamos considerar dois casos particulares dos potenciais DW simétricos da MQ através da atribuição de valores discretos à γ na Eq. (6.13). Para $\gamma = 1$, e seguindo a convenção que reduz nossa análise às soluções com sinal + para $\phi(s)$, temos $\alpha(\phi) = \phi$, que resulta em

$$z_\xi(\phi) = \frac{e\left(-\frac{3-\phi^2}{8\sigma^2(1-\phi^2)}\right)}{\sqrt{1-\phi^2}} \quad \text{e} \quad w_\chi(\phi) = \phi z_\xi(\phi). \quad (6.23)$$

Após integrar as Eqs. (6.22) temos,

$$\begin{aligned} \xi(\phi) &= \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{e^{(1/(8\sigma^2))}} \text{Erf} \left[\frac{1}{2\sigma} \frac{\phi}{\sqrt{1-\phi^2}} \right] \quad \text{e} \\ \chi(\phi) &= \sqrt{\pi}\sigma e^{(1/(8\sigma^2))} \text{Erf} \left[\frac{1}{2\sigma} \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}} \right], \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde suprimimos as constantes de normalização, \mathcal{N} . Para $\gamma = 2$, temos $\alpha(\phi) = 2\phi/(1+\phi^2)$ que resulta em

$$z_\xi(\phi) = \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} e\left(-\frac{1+2\phi^2+\phi^4}{16\sigma^2(1-\phi^2)^2}\right) \quad \text{e} \quad w_\chi(\phi) = \frac{2\phi}{1+\phi^2} z_\xi(\phi) \quad (6.25)$$

e, após integrar as Eqs. (6.22) temos,

$$\xi(\phi) = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{e^{(1/(32\sigma^2))}} \text{Erf} \left[\frac{1}{2\sigma} \frac{\phi}{1-\phi^2} \right] \quad \text{e}$$

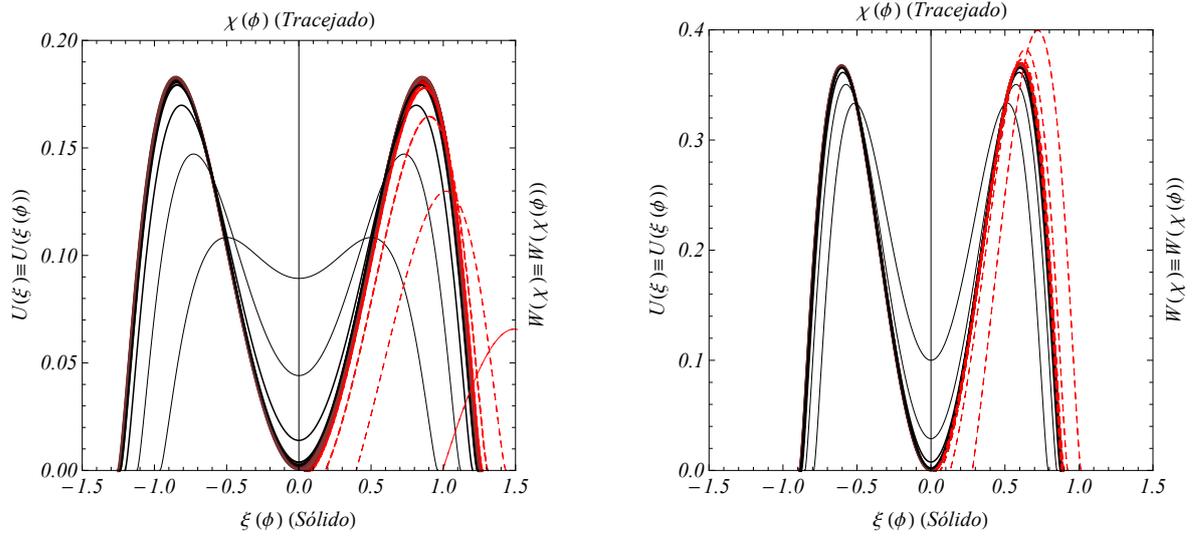


Figura 36: Potenciais, $U(\xi)$ (linhas pretas sólidas) e $W(\chi)$ (linhas vermelhas tracejadas), como função paramétrica de ϕ . A região de transição do preto para o vermelho ilustra a quebra de simetria que estabelece a transição contínua do parâmetro $\omega_1^2 > 0$ ao $\omega_1^2 = -\kappa_1^2 < 0$.

$$\chi(\phi) = \sqrt{\pi}\sigma e^{1/(32\sigma^2)} \text{Erf} \left[\frac{1}{4\sigma} \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} \right]. \quad (6.26)$$

Os potenciais BPS, $U(\xi)$ e $W(\chi)$, para ambos os exemplos estão descritos na Fig. 36 e os defeitos topológicos correspondentes, $\xi(s)$ e $\chi(s)$, estão descritos na Fig. 37. As estruturas tipo *kink*, $\xi(s)$, apresentam índices topológicos dados por $Q(\sigma) = 2\sigma\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{8\gamma^2\sigma^2}}$, para $\gamma = 1, 2$. Para estruturas tipo *lump*, $\chi(s)$, os índices topológicos são nulos.

Transformando o parâmetro de autovalor da energia em uma variável fenomenológica, pode-se dizer que a situação descrita na Fig. 36 assemelha-se às transições de fase conven-

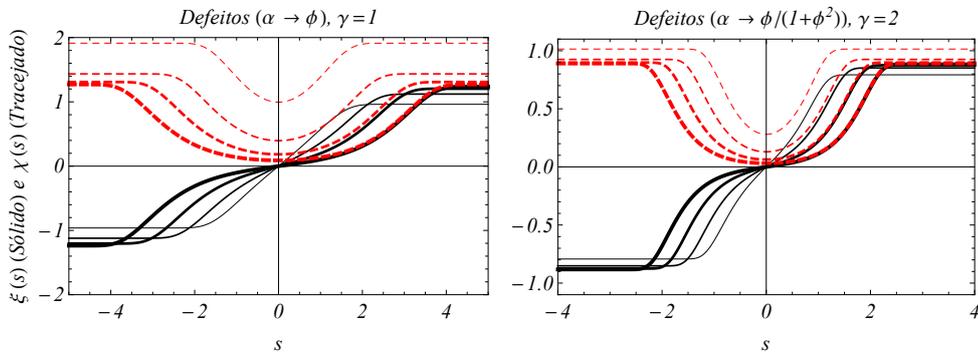


Figura 37: Correspondência com defeitos deformados, $\xi(s)$ e $\chi(s)$. As imagens são para $\gamma = 1$ (primeira coluna) e 2 (segunda coluna) onde $\omega_1 = 1/\sigma$ (linhas pretas sólidas) e $\kappa_1 = 1/\sigma$ (linhas vermelhas tracejadas) com $\sigma = 1$ (linha mais fina), 2, 4 e 8 (linha mais grossa).

cionais acompanhadas por quebra espontânea de simetria; como aquelas que resultam na formação de defeitos topológicos através do mecanismo Kibble-Zurek (Kibble, 1976; Zurek, 1985). Com o parâmetro fenomenológico $\omega_1^2 = \sigma^{-2}$ variando de valores positivos até negativos, através de transições contínuas ($1/\sigma$), a quebra de simetria topológica converte um estado quântico não estacionário de evolução unitária (estável), $\Psi_S \sim \psi_0 + e^{(-it/\sigma)}\psi_1$, em uma superposição quântica não-unitária (instável) envolvendo um modo taquiônico suprimido, $\Psi_U \sim e^{(-t/\sigma)}\psi_0 + \psi_1$. O padrão de tunelamento é destruído uma vez que Ψ_U é colapsado na solução estável coerente (modo-zero), ψ_1 , sustentada pelo defeito topológico.

Na próxima seção, a dinâmica do tunelamento é estudada em detalhes através da função de Wigner e seu fluxo.

6.2 Fluxo de Wigner e suas características

Geralmente a mecânica quântica é estudada no espaço de Hilbert, no entanto, para certas análises o espaço de fase mostra-se mais elucidativo no que concerne a algumas características particulares do sistema. No estudo de tunelamento quântico, por exemplo, algumas características não-clássicas do sistema são reveladas através da análise da evolução temporal da função de Wigner, também conhecida como fluxo de Wigner (Kakofengitis; Steuernagel, 2011). Por essa razão, escolhemos desenvolver a análise do tunelamento de uma única partícula em potenciais de fundo duplo através da função de Wigner e seu fluxo. A investigação de tal sistema pode ser encontrada em vários cenários (Caticha, 1995; Domcke; Tannor, 1997; Schulz et al., 2013; Casetti; Cohen; Pettini, 1999). Para tais potenciais o ponto de máximo ($\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} < 0$) entre os dois mínimos faz o papel de barreira e torna o tunelamento possível, pelo menos para a superposição do estado fundamental e primeiro estado excitado quando sua energia é menor do que a da barreira.

O tunelamento de uma função gerada pela superposição de duas funções de onda, correspondentes ao estado fundamental e primeiro estado excitado, será analisado tanto para potenciais simétricos quanto assimétricos. Esse procedimento será realizado para dois modelos DW, cada um associado a uma função multiplicadora, α , diferente.

6.3 Tunelamento quântico e análise do fluxo de Wigner

A fim de investigar o tunelamento quântico é necessário construir a superposição das funções do estado fundamental, ψ_0 , e do primeiro estado excitado, ψ_1 , da seguinte forma:

$$\Psi(s, t) = \sin(\theta) \exp\left(\frac{-iE_0 t}{\hbar}\right) \psi_0(s) + \cos(\theta) \exp\left(\frac{-iE_1 t}{\hbar}\right) \psi_1(s), \quad (6.27)$$

que será inserida na função de Wigner:

$$W(s, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi^*(s + y, t) \Psi(s - y, t) e^{\frac{2i}{\hbar} py}, \quad (6.28)$$

onde θ será responsável pelo peso inicial de ψ_0 e ψ_1 na função superposição. Apesar da função de Wigner apresentar apenas valores reais, eles podem ser negativos, por isso ela é chamada de função de quasi-probabilidade.

O quadrado da função de Wigner para o cenário relativo ao potencial simétrico associado à função $\alpha = \epsilon + \tanh(s)$ está representado na Fig. 38. A correspondente evolução temporal das densidades de probabilidade para Ψ_S (estável) e Ψ_U (instável) estão apresentadas na Fig. 39. É possível inferir que quanto menor for o parâmetro de divisão da energia, σ , maior será o período de batimento para as configurações estáveis e maior também será o tempo de decaimento para as instáveis. Estendendo o mapa de Wigner ao longo do eixo da coordenada momento para um único DW convertido em uma cadeia periódica, permite-nos reproduzir os resultados de um potencial DW interpretado como configurações quânticas de guias de onda ópticos periodicamente curvos (Della Valle et al., 2007). Nessas estruturas, a propagação espacial da luz imita a dinâmica do espaço-tempo de ondas de matéria em um potencial DW governado pela Schrödinger. A mesma interpretação é válida para sistemas quânticos com potenciais periódicos que sustentam a dinâmica não-linear de um condensado de Bose-Einstein (Lignier et al., 2007).

Seguindo para a análise da configuração assimétrica em correspondência ao segundo gráfico da Fig. 34, seus resultados estão descritos nas Figs. 40 e 41.

Faremos também uma análise de resultados novos (ψ_0 e ψ_1) para um potencial de fundo duplo ainda não estudado na literatura, construído através da seguinte função multiplicadora:

$$\alpha = \beta + \text{Gudermannian}[s], \quad (6.29)$$

com $\text{Gudermannian}[s] = 2 \arctan(e^s) - \frac{\pi}{2}$. Nesse caso também identificamos $\beta = 0$ e $\beta \neq 0$ como geradores de potenciais simétrico e assimétrico respectivamente, como obtido

da Eq. (6.12). Dada a função multiplicadora, é possível calcular a função de onda do estado fundamental através da Eq. (6.10) e da Eq. (6.11),

$$\psi_0 = \mathcal{N}_0 2^{1/n} \exp\left(-\frac{(\beta + \text{Gudermannian}[s]) \sinh[s]}{2n}\right) \cosh[s]^{\frac{n+1}{2n}}. \quad (6.30)$$

O primeiro estado excitado correspondente é obtido da Eq. (6.7), também para configurações simétricas e assimétricas. A Fig. 42 mostra o estado fundamental e primeiro estado excitado juntamente com ambos os potenciais, simétrico e assimétrico.

O módulo da densidade de probabilidades do estado estável (linhas pretas), e instável (linhas vermelhas) estão representados na Fig. 43 para tempos diferentes, variando de $t = 0$ até $t = \pi/2$ (primeira linha) e de $t = 5\pi/8$ até $t = \pi$ (segunda linha). Um fato que torna-se evidente através das imagens é que a função estável completa o ciclo de tunelamento indo da direita para a esquerda em ambos os potenciais estudados. Já o ciclo correspondente ao modo taquiônico é convertido em um estado estacionário após a destruição coerente do modo instável. O quadrado da função de Wigner para ambos cenários relativos aos potenciais simétrico e assimétrico pode ser visto na Fig. 44. Analisando a imagem fica mais uma vez evidente que o tunelamento ocorre para ambas as funções. A diferença aparece quando reconhecemos que para a função de onda do modo estável o processo de tunelamento é reversível enquanto que para a função taquiônica existe um estado limite estacionário. O comportamento reversível aparece devido à pequena diferença entre as energias dos estados fundamental e excitado, o que causa um período de batimento, $T = 2\pi\hbar/\Delta E$. O batimento completo, que ocorre quando a função vai de um poço do potencial para o outro e retorna, não está presente no caso taquiônico porque ele não é normalizável. Neste caso, um equilíbrio é atingido e a função situa-se em ambos os poços em iguais proporções.

Prosseguiremos com o cálculo e a análise do fluxo de Wigner para esse último caso, $\alpha = \beta + \text{Gudermannian}[s]$. O fluxo possui dois componentes, um relativo ao espaço e o outro ao momentum,

$$\begin{pmatrix} J_s \\ J_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} W(s, p, t) \\ -\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(\frac{\hbar}{2})^{2l}}{(2l+1)!} \frac{\partial^{2l} W(s, p, t)}{\partial p^{2l}} \frac{\partial^{2l+1} V(s)}{\partial s^{2l+1}} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Note que no limite clássico, i.e. quando temos $\hbar \rightarrow 0$ ou potências de $V(s)$ menores ou iguais a 2, obtemos uma equivalência entre o fluxo clássico de Liouville e o quântico de Wigner.

A fim de analisar o fluxo de Wigner dos sistemas escolhidos introduzimos o conceito de

pontos de estagnação, que são encontrados onde o potencial é livre de forças (i.e momentum $p = 0$ e $-\partial V/\partial s = 0$). Eles dependem fortemente dos pontos críticos do potencial e apresentam diferentes efeitos se corresponderem a um ponto de mínimo, máximo ou sela. Para cada uma dessas possibilidades podemos associar o chamado *winding number*, definido em (Kakofengitis; Steuernagel, 2011) da seguinte forma:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi, \quad (6.32)$$

sendo que φ é o ângulo entre o eixo positivo e os vetores do fluxo de Wigner. Ao passar por um ponto de mínimo do potencial o fluxo espirala em direção ao ponto e obtemos $\omega = +1$; quando o ponto é um máximo o fluxo espirala também resultando em $\omega = +1$, mas é espalhado ao invés de concentrar no ponto; e se for um ponto de sela, o fluxo alonga-se tornando-se cada vez mais lento próximo ao ponto, resultando em $\omega = -1$.

Os vetores de campo do fluxo de Wigner relativos à função de onda estável em potenciais simétrico e assimétrico estão apresentados na Fig. 45 para tempos diferentes ao longo da evolução do tunelamento. A primeira característica que é evidenciada através desse campo é a diferença entre as direções do vetor clássico (vermelho) e quântico (azul). Quanto maior for essa diferença, maior será o grau de não-classicalidade do sistema (Steuernagel; Kakofengitis; Ritter, 2013).

Outra característica é a reversão do fluxo que corresponde às regiões onde a função de Wigner assume valores negativos. Para investigar esse comportamento juntamente com a posição dos pontos de estagnação, podemos imaginar uma linha vertical direcionada de cima para baixo em torno da posição $s = -0.25$ no primeiro quadro da Fig. 45. Seguindo essa linha é possível identificar primeiramente um vortex anti-horário, doravante utilizaremos a abreviação da língua inglesa CCW, (círculo verde) após o qual há uma reversão no fluxo seguida por um ponto de sela (quadrado amarelo), em torno de $p = 0$. Avançando para valores negativos de p encontramos um vórtice CCW, ocasionando novamente uma reversão do fluxo. Esse comportamento é mais um indício da não-classicalidade do sistema.

Com o propósito de ver a dinâmica dos pontos de estagnação vamos analisar o ω de cada quadro da Fig. 45. Note que o *winding number* inicial (primeiro quadro) é $\omega = +2$, correspondente à um vórtice horário, doravante utilizaremos a abreviação da língua inglesa CW, (círculo vermelho; $\omega = +1$), dois vórtices CCW (círculos verdes; $\omega = +1$) e um ponto de sela (quadrado amarelo; $\omega = -1$). No próximo quadro o ponto de sela começa a desfazer-se enquanto que outro vórtice CW aparece do lado esquerdo.

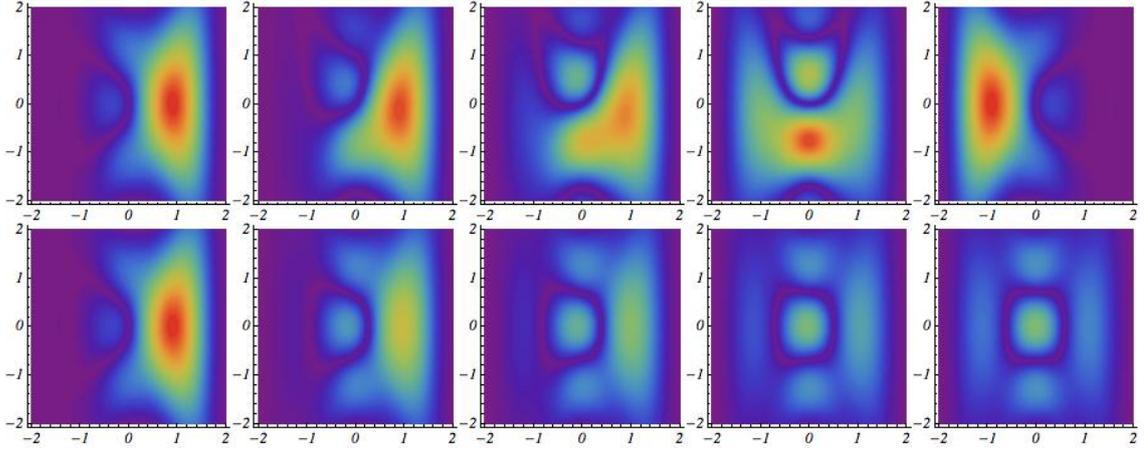


Figura 38: Caso referente à $\alpha(s) = \epsilon + \tanh(\gamma s)$. Evolução do tunelamento simétrico estável (não-estacionário) e instável (não unitário) descrita pelas funções de Wigner (em módulo) para $\Psi_S(W_S)$ (primeira linha) e $\Psi_U(W_U)$ (segunda linha), respectivamente. Os gráficos são para tempos $T = 0$ (esquerda), $\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/2$, e π (direita) e $\gamma = \sigma = 1$. O gráfico de contorno segue um esquema de cores como o do arco-íris partindo do vermelho, que corresponde à 1, ao violeta, que corresponde à 0. Para o tempo $T = 0$ assumimos que as funções de Wigner, $W_{S(U)}(s, p; T)$ estejam centradas na origem das coordenadas do espaço de fase, $(0, 0)$.

Além disso, não é mais possível identificar o vórtice CCW, o que novamente resulta em um *winding number* total $\omega = +2$. Considerando todos os quadros subsequentes vemos que o ponto de sela desaparece completamente fazendo com que $\omega = +2$ seja o resultado final. Conseqüentemente, a conservação de carga é obtida como conjecturado em (Stuernagel; Kakofengitis; Ritter, 2013). Um resultado novo é que essa conservação não é obtida para o caso taquiónico. Para a função instável esse resultado não é totalmente uma surpresa, uma vez que a conservação é prevista apenas para sistemas com dinâmica quântica unitária. Por fim, os pontos de estagnação também podem ser utilizados como uma ferramenta para identificar o tunelamento. A função Ψ , que é encontrada inicialmente apenas no mínimo do potencial da direita, aparece na forma de um vórtice CW próximo à $s = 0.8$ na Fig. 45. Após a evolução temporal, Ψ coexiste em ambos os mínimos causando o aparecimento de outro vórtice CW do lado esquerdo em alguns quadros subsequentes. Esse comportamento revela o tunelamento através dos pontos de estagnação.

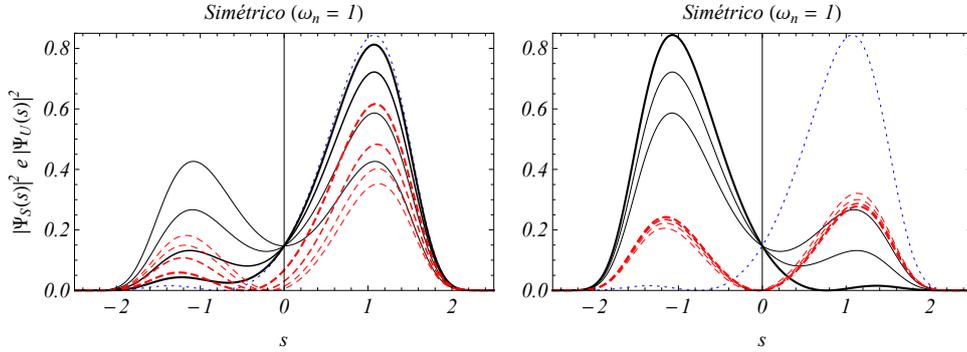


Figura 39: Caso referente à $\alpha(s) = \epsilon + \tanh(\gamma s)$. Evolução temporal das densidades de probabilidade para os estados compostos estável (linhas pretas sólidas) e instável (linhas vermelhas tracejadas), Ψ_S e Ψ_U , em uma configuração DW simétrica. As curvas são para tempos variando de $T = \pi/8$ (linha mais grossa) até $T = \pi/2$ (linha mais fina) no primeiro gráfico, e variando de $T = 5\pi/8$ (linha mais fina) até $T = \pi$ (linha mais grossa) no segundo gráfico, com intervalos de $\Delta T = \pi/8$. Linhas azuis pontilhadas correspondem à $T = 0$ para ambos os tunelamentos, estável e instável. Os resultados são para $\gamma = \sigma = 1$.

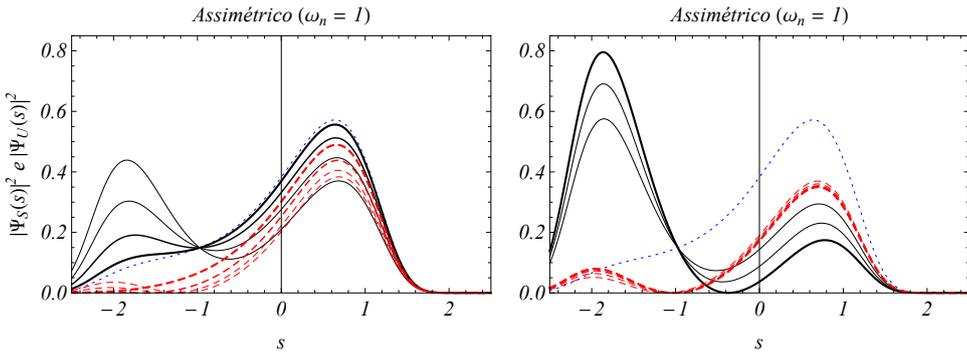


Figura 40: Caso referente à $\alpha(s) = \epsilon + \tanh(\gamma s)$. Evolução temporal das densidades de probabilidade para os estados compostos estável (linhas pretas sólidas) e instável (linhas tracejadas vermelhas), Ψ_S and Ψ_U , em uma configuração DW assimétrica. As curvas são para tempos variando de $T = \pi/8$ (linha mais grossa) até $T = \pi/2$ (linha mais fina) no primeiro gráfico, e variando de $T = 5\pi/8$ (linha mais fina) até $T = \pi$ (linha mais grossa) no segundo gráfico, com intervalos de $\Delta T = \pi/8$. Linhas azuis pontilhadas correspondem à $T = 0$ para ambos os tunelamentos, estável e instável. Os resultados são para $\gamma = \sigma = 1$.

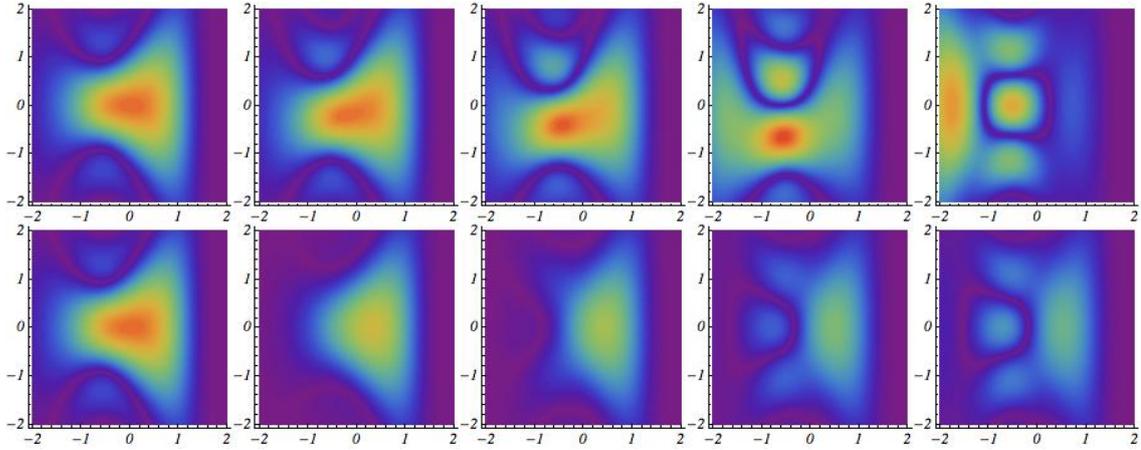


Figura 41: Caso referente à $\alpha(s) = \epsilon + \tanh(\gamma s)$. Evolução do tunelamento assimétrico estável (não-estacionário) e instável (não unitário) descrita pelas funções de Wigner (em módulo) para Ψ_S (primeira linha) e Ψ_U (segunda linha), respectivamente. Os gráficos são para $T = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \text{ e } \pi$. O gráfico de contorno segue um esquema de cores como o do arco-íris partindo do vermelho, que corresponde à 1, ao violeta, que corresponde à 0. Para o tempo $T = 0$ assumimos que as funções de Wigner estejam centradas na origem das coordenadas do espaço de fase, $(0, 0)$.

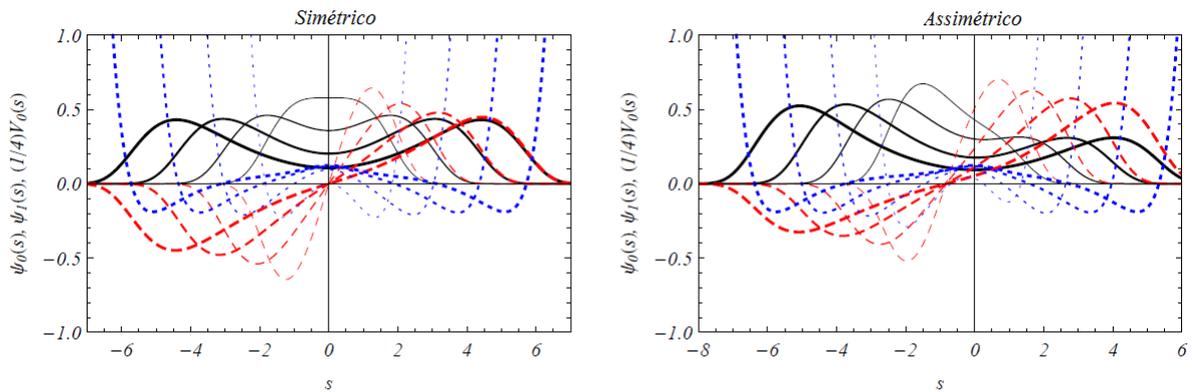


Figura 42: Caso referente à $\alpha = \beta + \text{Gudermannian}[s]$. Estado fundamental (Linhas pretas sólidas) e primeiro estado excitado (linhas vermelhas tracejadas) correspondentes aos potenciais da mecânica quântica simétrico ($\beta = 0$) (primeiro gráfico) e assimétrico ($\beta = 3/4$) (segundo gráfico), ambos representados por linhas azuis pontilhadas. Os plots são para $\Delta E = 1/n$, com $n = 1$ (linhas mais grossas), 4, 16, e 64 (linhas mais finas).

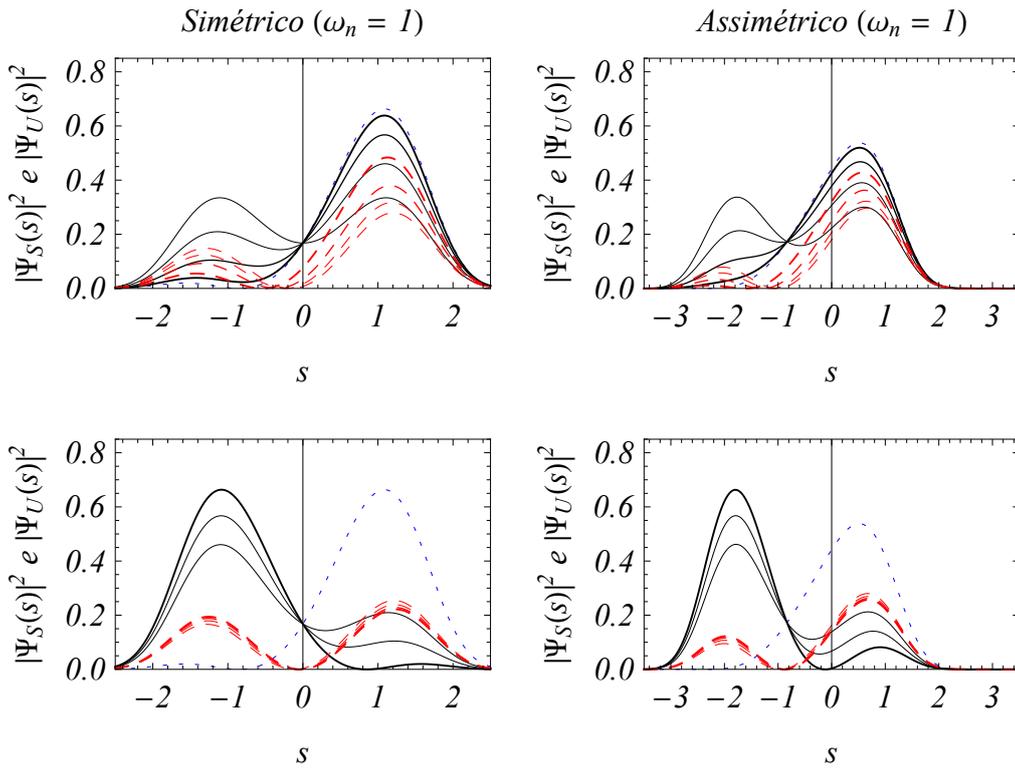


Figura 43: Caso referente à $\alpha = \beta + \text{Gudermannian}[s]$. Evolução temporal da densidade de probabilidades para os estados compostos estável (linha sólida preta) e instável (linha tracejada vermelha), Ψ_S e Ψ_U , para o potencial simétrico (primeira linha) e assimétrico (segunda linha). As curvas são correspondentes à tempos variando de $t = \pi/8$ (linhas mais grossas) até $t = \pi/2$ (linhas mais finas) no primeiro gráfico, com espaçamento de $\Delta t = \pi/8$. Já no segundo gráfico a variação é de $t = 5\pi/8$ (linhas mais finas) até $t = \pi$ (linhas mais grossas), com o mesmo espaçamento. Linhas pontilhadas azuis correspondem à $t = 0$ para ambas funções, estável e instável. Os resultados são para o caso de $n = 1$.

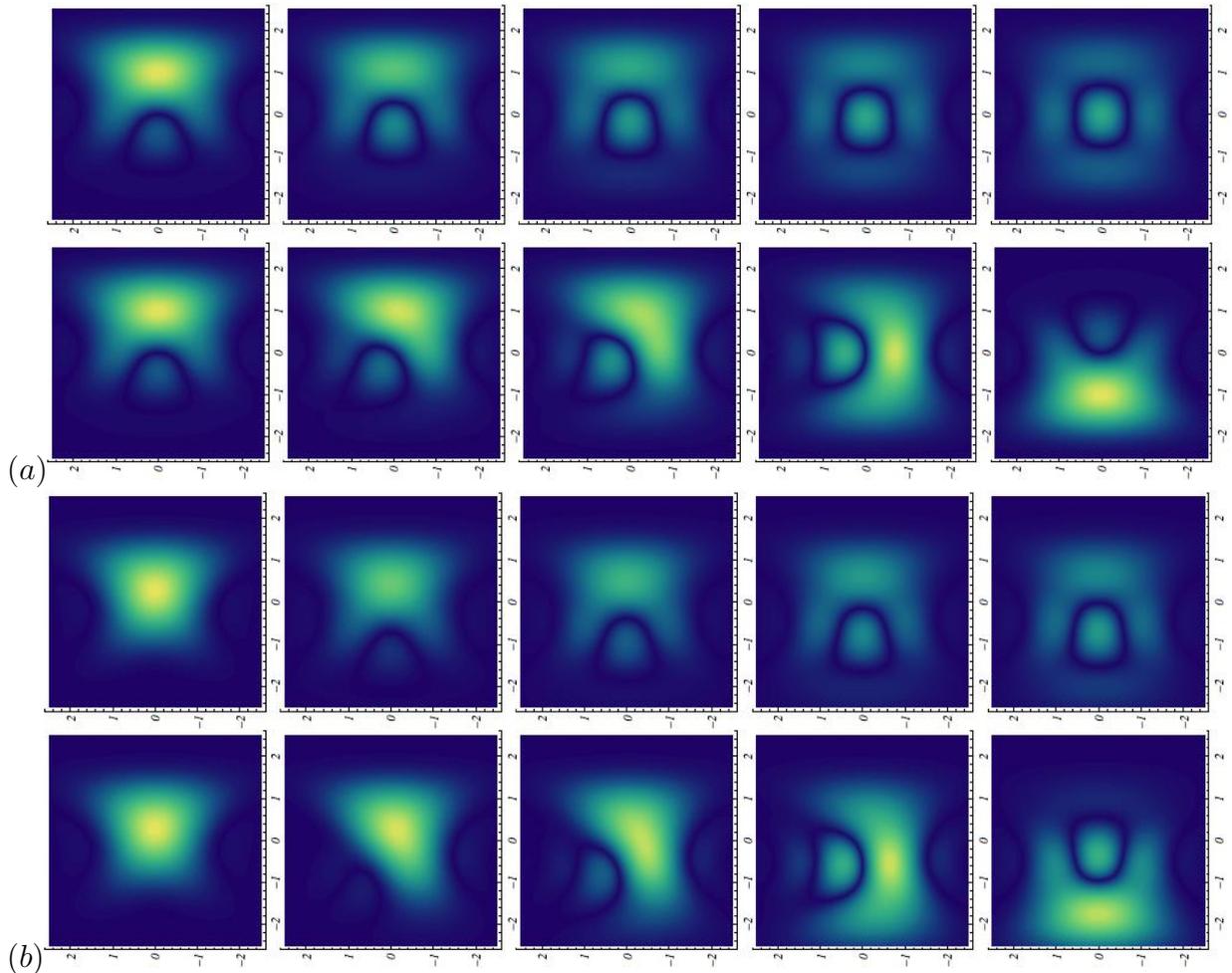


Figura 44: Caso referente à $\alpha = \beta + \text{Gudermannian}[s]$. Evolução temporal das amplitudes de Wigner relativas aos potenciais simétrico (a) e assimétrico (b), para funções estável (primeira e terceira colunas) e instável (segunda e quarta colunas). A figura é representada com uma evolução temporal da esquerda ($t = 0$) para a direita ($t = \frac{\pi}{2}$) para intervalos temporais de $\frac{\pi}{8}$. Aqui também foi considerado $n = 1$.

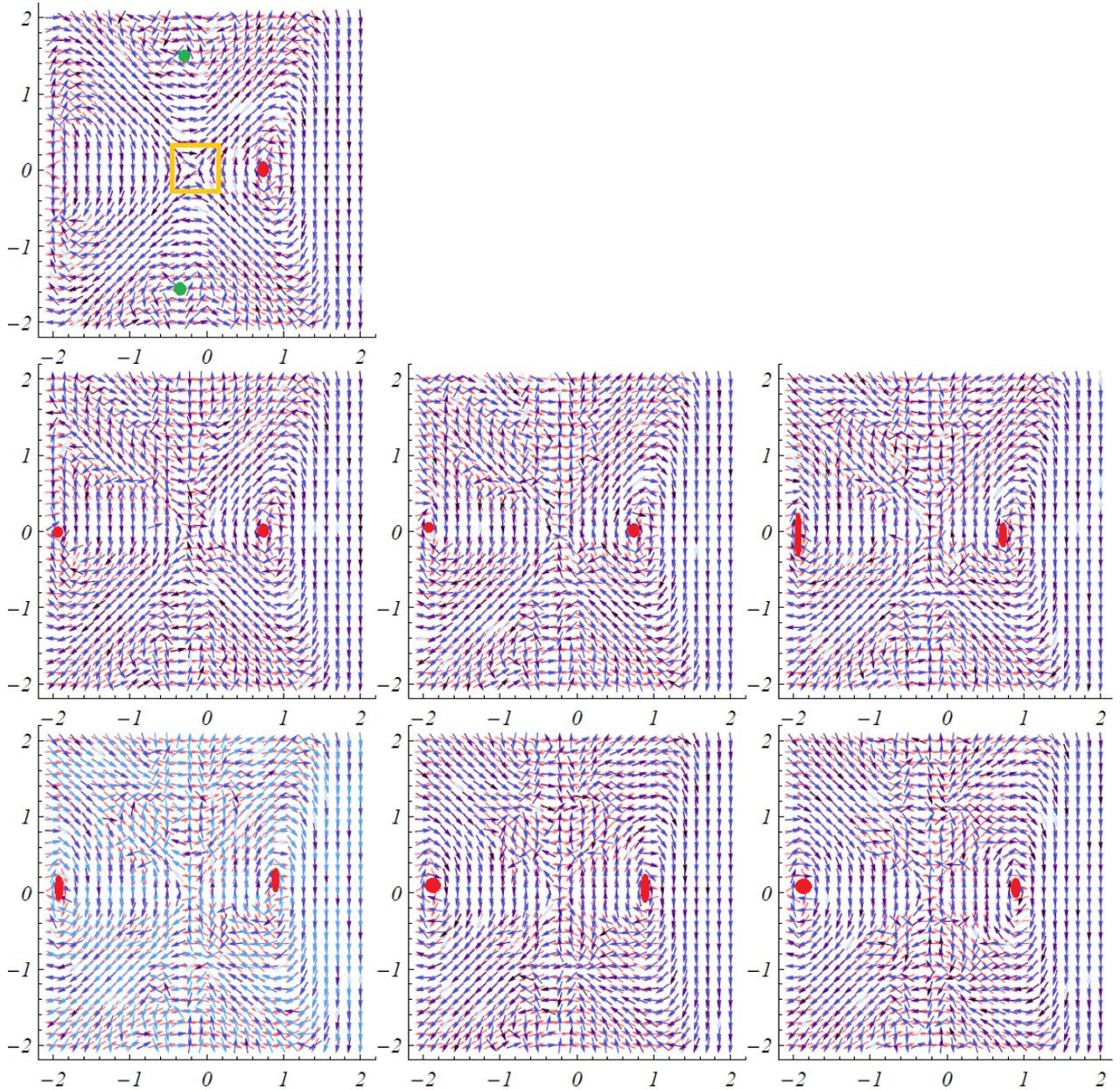


Figura 45: Caso referente à $\alpha = \beta + \text{Gudermannian}[s]$. O quadro da primeira linha corresponde à $t = 0$. As últimas duas linhas representam a evolução temporal da função de onda estável para o potencial assimétrico até a metade do tunelamento. Os círculos vermelho e verde representam vórtices horário e anti-horário respectivamente, Portanto ambos contribuem com $\omega = +1$. Quadrados amarelos representam ponto de sela e contribuem com $\omega = -1$.

7 Conclusões

No que concerne aos resultados de *sine-Gordon* e $\lambda\chi^4$, ressaltamos que a presença de não-linearidades nas equações diferenciais torna difícil o processo de encontrar soluções analíticas. Portanto, as soluções obtidas são importantes *per se*, uma vez que são uma classe de soluções de equações diferenciais difíceis de resolver. Elas são relevantes não apenas em cenários cosmológicos, mas também em vários outros, como por exemplo matéria condensada, óptica e aplicabilidade puramente matemática.

Nossos resultados são interessantes porque encontramos deformações cíclicas capazes de gerar novos defeitos tanto topológicos quanto não topológicos, todos expressos analiticamente. Além disso, ainda é possível recuperar o defeito inicial utilizado para desencadear o processo de deformação. Como um bonus, obtivemos relações de vínculo envolvendo as massas topológicas dos correspondentes defeitos deformados pertencentes às cadeias cíclicas.

É importante ressaltar que uma nova característica foi observada em nossos resultados, que foram *kinks* não-monotônicos e *lumps* com três pontos de inflexão. Também vimos que o defeito φ referente ao modelo topológico 4-cíclico de *sine-Gordon* comporta-se muito aproximadamente como um *duplo-kink*. Neste caso, o resultado conteria uma grande riqueza de detalhes. No cenário de branas, por exemplo, essa solução pode estar associada a modelos descritos por potenciais que levam o sistema a sustentar soluções de branas espessas (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004). Estas engendram estrutura interna, que nesse caso, revela a presença de uma nova fase dentro da brana.

Outra peculiaridade revelada foi a carga topológica variável, com o parâmetro livre n . Esta foi analisada para as soluções concernentes ao modelo *sine-Gordon*. Dessa forma, um conjunto de soluções, representado por um mesmo campo escalar, engendra *kinks* e *lumps* dependendo da escolha do setor do potencial associado.

Uma vez que obtivemos uma pletera de soluções nos Capítulos 3 e 4, com estrutura de *kinks* e *lumps*, utilizamos alguns desses resultados para estudar o cenário de branas. Além

disso, estudamos para todos os casos o problema quântico derivado de uma perturbação na métrica. Destacamos mais uma vez a relevância de obter-se novas soluções sem a necessidade de resolver equações diferenciais de forma numérica. Esse fato foi possível devido a escolha do processo desenvolvido para o cálculo do *warp factor*, através das soluções tipo *lump* referentes aos Capítulos 3 e 4. Através da análise do potencial da mecânica quântica, nota-se que ele apresenta um formato vulcano podendo, portanto, conter modos normais. Estes poderiam descrever gravidade 4-dimensional no interior da brana em $z = 0$.

Dentro desse cenário, vimos alguns modelos interessantes que apresentam um *plateau* quando analisamos $e^{2A(y)}$ em função da coordenada y . Outra característica que evidenciamos é a estrutura encontrada em alguns desses resultados, como para o defeito φ_2 e φ_3 da seção 4-cíclica do modelo $\lambda\chi^4$. Apesar de não conseguirmos encontrar a expressão explícita para o defeito no cenário de branas, foi feita uma análise de sua função em série de Taylor, e encontramos uma boa aproximação com um duplo *kink*. Este é exatamente o tipo de defeito esperado em um cenário de brana espessa e que apresenta um *plateau* associado ao *warp factor*, (Bazeia; Furtado; Gomes, 2004). Portanto, também para esse caso, esperamos que nosso resultado encerre uma quantidade de detalhes maior que um *kink* simples.

No que tange ao cenário descrito por potenciais de fundo duplo obtivemos vários resultados inéditos. Além disso, para todas as soluções obtidas, a correspondência com a mecânica quântica pode ser obtida diretamente. Nossos resultados estabelecem o formalismo teórico para a obtenção da origem topológica de transições de vácuo quântico e a dinâmica de tunelamento em potenciais de fundo duplo. Isso foi realizado através de modelos exatamente integráveis. Na abordagem topológica, a análise pode ser estendida a fim de compreender os cenários sustentados pela teoria *sine-Gordon*. Nestes, a estrutura primitiva *tipo-kink*, $\phi = 4 \arctan e^s - \pi$, engendra uma dinâmica de tunelamento quântico similar.

A análise do tunelamento quântico mostrou que é possível obter um processo reversível para a função de onda estável. Já para o caso instável concluímos que um estado limite é atingido, coexistindo em ambos os poços do potencial para qualquer tempo subsequente. Por esse motivo, pode-se dizer que o tunelamento sofre um processo de destruição coerente.

Também verificamos que o campo vetorial de Wigner mostra-se eficaz no estudo de características não-clássicas do sistema. Por exemplo, a diferença evidente que aparece entre a direção dos vetores quânticos e clássicos assim como a reversão do fluxo. Este

último ocorre onde existem valores negativos para a função de Wigner relacionados aos pontos de estagnação. Por fim, enquanto que encontramos a conservação de carga para funções de onda estáveis (esperada pelo artigo utilizado como referência), destacamos que essa conservação não é, em princípio, esperada para funções instáveis. De fato, através da análise do fluxo de Wigner, essa preservação não foi encontrada para esse tipo de função.

Um trabalho futuro de nosso interesse, seria analisar a dinâmica dos pontos de estagnação através de um gráfico 3-D em função da posição s , do tempo t e do momento p . Dessa forma, poderíamos identificar detalhadamente a conservação de carga para cada *snapshot* temporal e, de maneira geral, sua evolução.

Por fim, gostaríamos de agradecer ao CNPq, agência que financiou esse trabalho.

Referências

- Coleman, S. *Aspects of symmetry*. New York: Cambridge University Press, 1985.
- Schweizerische Physikalische Gesellschaft. *The 2013 Nobel Prize in Physics*. 2013. Disponível em: <<http://www.sps.ch/artikel/nobelpreise/>>.
- Ablowitz, M. J. et al. Method for Solving the Sine-Gordon Equation. *Physical Review Letters*, v. 30, p. 1262–1264, jun. 1973.
- Agrawal, G. P. *Nonlinear fiber optics*. [S.l.: s.n.], 1995.
- Arkani-Hamed, N.; Dimopoulos, S.; Dvali, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, v. 429, p. 263–272, jun. 1998.
- Avelar, A. T. et al. Lump-like structures in scalar-field models in 1+1 dimensions. *Physics Letters A*, v. 374, p. 222–227, dez. 2009.
- Avelar, A. T. et al. New lump-like structures in scalar-field models. *European Physical Journal C*, v. 55, p. 133–143, maio 2008.
- Bazeia, D.; Furtado, C.; Gomes, A. R. Brane structure from a scalar field in warped spacetime. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)*, v. 2, p. 2, fev. 2004.
- Bazeia, D.; Losano, L.; Malbouisson, J. M. Deformed defects. *Phys.Rev.D*, v. 66, n. 10, p. 101701, nov. 2002.
- Bazeia, D. et al. Classical behavior of deformed sine-Gordon models. *Physica D Nonlinear Phenomena*, v. 237, p. 937–946, jun. 2008.
- Bazeia, D.; Menezes, J.; Menezes, R. New Global Defect Structures. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 24, p. 241601, dez. 2003.
- Berezinsky, V.; Hnatyk, B.; Vilenkin, A. Gamma ray bursts from superconducting cosmic strings. *Physical Review D*, v. 64, n. 4, p. 043004, ago. 2001.
- Bernardini, A. *Notas não publicadas em teoria Quântica de campos*. 2015.
- Bernardini, A. E.; Bertolami, O. Equivalence between Born-Infeld tachyon and effective real scalar field theories for brane structures in warped geometry. *Physics Letters B*, v. 726, p. 512–517, out. 2013.
- Bernardini, A. E.; Chinaglia, M. Topological origin of quantum mechanical vacuum transitions and tunneling. *ArXiv e-prints*, set. 2014.
- Bernardini, A. E.; Chinaglia, M.; da Rocha, R. Charge varying sine-Gordon deformed defects. *ArXiv e-prints*, jun. 2014.

- Bernardini, A. E.; da Rocha, R. Cyclically deformed defects and topological mass constraints. *Advances in High Energy Physics (AHEP)*, 2013.
- Bogomol'nyi, E. B. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 449, 1976.
- Bonazzola, S.; Peter, P. Can high energy cosmic rays be vortons? *Astroparticle Physics*, v. 7, p. 161–172, jun. 1997.
- Brandenberger, R. H. Cosmic strings and the large-scale structure of the universe. *Physica Scripta Volume T*, v. 36, p. 114–126, 1991.
- Caiani, L. et al. Geometry of Dynamics, Lyapunov Exponents, and Phase Transitions. *Physical Review Letters*, v. 79, p. 4361–4364, dez. 1997.
- CAMBRIDGE, C. . U. of. *Cambridge relativity Public Home Page*. 1996. Disponível em: <<http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/public/>>.
- Campos, A. Critical Phenomena of Thick Branes in Warped Spacetimes. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 14, p. 141602, abr. 2002.
- Campos, A.; Holland, K.; Wiese, U.-J. Complete Wetting in Supersymmetric QCD: Why QCD Strings Can End on Domain Walls. *Physical Review Letters*, v. 81, p. 2420–2423, set. 1998.
- Casetti, L.; Cohen, E. G. D.; Pettini, M. Topological Origin of the Phase Transition in a Mean-Field Model. *Physical Review Letters*, v. 82, p. 4160–4163, maio 1999.
- Caticha, A. Construction of exactly soluble double-well potentials. *Physical Review A*, v. 51, p. 4264–4267, maio 1995.
- Cholascinski, M.; Chhajlany, R. W. Stabilized Parametric Cooper-Pair Pumping in a Linear Array of Coupled Josephson Junctions. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 12, p. 127001, mar. 2007.
- Cooper, F.; Khare, A.; Sukhatme, U. Supersymmetry and quantum mechanics. *Physics Reports*, v. 251, p. 267–385, jan. 1995.
- Cvetic, M.; Soleng, H. H. Supergravity domain walls. *Physics Reports*, v. 282, p. 159–223, abr. 1997.
- Cvetič, M.; Griffies, S.; Rey, S.-J. Static domain walls in $N = 1$ supergravity. *Nuclear Physics B*, v. 381, p. 301–328, ago. 1992.
- Dauxois, T.; Peyrard, M. *Physics of Solitons*. [S.l.: s.n.], 2006.
- Davidov, A. S. *Solitons in molecular systems*. Dordrecht: Kluwer, 1981.
- Davis, A.-C.; Perkins, W. B. Dissipating cosmic vortons and baryogenesis. *Physics Letters B*, v. 393, p. 46–50, fev. 1997.
- Della Valle, G. et al. Visualization of Coherent Destruction of Tunneling in an Optical Double Well System. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 26, p. 263601, jun. 2007.

- Dirac, P. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. *Proc. Roy. Soc.*, v. 60, maio 1931.
- D.Murray, J. *Mathematical Biology*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- Domcke, P. H. W.; Tannor, D. *Driven Quantum Systems*. [S.l.]: Chem. Phys, 1997.
- Durrer, R.; Kunz, M.; Melchiorri, A. Cosmic structure formation with topological defects. *Physics Reports*, v. 364, p. 1–81, jun. 2002.
- El-Batanouny, M. et al. Double-sine-Gordon solitons: A model for misfit dislocations on the Au(111) reconstructed surface. *Physical Review Letters*, v. 58, p. 2762–2765, jun. 1987.
- European Space Agency. *Science and Technology*. 2000. Disponível em: <<http://www.esa.int/>>.
- Fernandez, J.-C. et al. Sine-Gordon Solitons Do Not Behave Like Newtonian Particles. *Physical Review Letters*, v. 46, p. 753–756, mar. 1981.
- Ferrara, S.; Girardello, L.; Sciuto, S. An infinite set of conservation laws of the supersymmetric sine-gordon theory. *Physics Letters B*, v. 76, p. 303–306, jun. 1978.
- Gangui, A. Topological Defects in Cosmology. *ArXiv Astrophysics e-prints*, out. 2001.
- Gendenshtein, L. É. Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by means of supersymmetry. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 38, p. 356, set. 1983.
- Gherghetta, T.; Roessl, E.; Shaposhnikov, M. Living inside a hedgehog: higher-dimensional solutions that localize gravity. *Physics Letters B*, v. 491, p. 353–361, out. 2000.
- Giovannini, M. Gravitating multidefects from higher dimensions. *Phys.Rev.D*, v. 75, n. 6, p. 064023, mar. 2007.
- Goldobin, E. et al. Dynamics of Semifluxons in Nb Long Josephson $0-\pi$ Junctions. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 5, p. 057005, fev. 2004.
- Gremm, M. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Physics Letters B*, v. 478, p. 434–438, abr. 2000.
- Grinza, P.; Mossa, A. Topological Origin of the Phase Transition in a Model of DNA Denaturation. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 15, p. 158102, abr. 2004.
- Grossmann, F. et al. Coherent destruction of tunneling. *Physical Review Letters*, v. 67, p. 516–519, jul. 1991.
- Gunther, L.; Imry, Y. Self-diffusion via sine-Gordon solitons. *Physical Review Letters*, v. 44, p. 1225–1229, maio 1980.
- Hashimoto, K.; Ho, P.-M.; Wang, J. E. Spacelike Brane Actions. *Physical Review Letters*, v. 90, n. 14, p. 141601, abr. 2003.

- Haus, H. A.; Wong, W. S. Solitons in optical communications. *Reviews of Modern Physics*, v. 68, p. 423–444, abr. 1996.
- Hindmarsh, M. et al. Dark Matter with Topological Defects in the Inert Doublet Model. *ArXiv e-prints*, dez. 2014.
- Hindmarsh, M.; Kirk, R.; West, S. M. Dark matter from decaying topological defects. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)*, v. 3, p. 37, mar. 2014.
- Hruby, J. On the supersymmetric sine-Gordon model and a two-dimensional bag. *Nuclear Physics B*, v. 131, p. 275–284, dez. 1977.
- Jeong, K. S.; Kawasaki, M.; Takahashi, F. Axions as hot and cold dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)*, v. 2, p. 46, fev. 2014.
- Kakofengitis, D.; Steuernagel, O. Double-Well Quantum Tunneling Visualized via Wigner’s Function. *ArXiv e-prints*, ago. 2011.
- Keung, W.-Y.; Kovacs, E.; Sukhatme, U. P. Supersymmetry and double-well potentials. *Physical Review Letters*, v. 60, p. 41–44, jan. 1988.
- Kibble, T. W. B. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A Mathematical General*, v. 9, p. 1387–1398, ago. 1976.
- Kierig, E. et al. Single-Particle Tunneling in Strongly Driven Double-Well Potentials. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 19, p. 190405, maio 2008.
- Kobayashi, M.; Nitta, M. Fractional vortex molecules and vortex polygons in a baby Skyrme model. *Physical Review D*, v. 87, jun. 2013.
- Kraus, Y. E.; Zilberberg, O. Topological Equivalence between the Fibonacci Quasicrystal and the Harper Model. *Physical Review Letters*, v. 109, n. 11, p. 116404, set. 2012.
- Liddle, A.; Lyth, D. H. *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2000.
- Lignier, H. et al. Dynamical Control of Matter-Wave Tunneling in Periodic Potentials. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 22, p. 220403, nov. 2007.
- Linde, A. D. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, v. 129, p. 177–181, set. 1983.
- Matsuda, T. Q ball inflation. *Phys.Rev.D*, v. 68, 2003.
- Moroi, T. et al. Axion models with high scale inflation. *Journal of High Energy Physics*, v. 11, p. 151, nov. 2014.
- Planck Collaboration et al. Planck 2013 results. XXV. Searches for cosmic strings and other topological defects. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (AAP)*, v. 571, p. A25, nov. 2014.
- R. Bishop, A. *Solitons in Action*. New York: Acad. Press, 1978.
- Rajaraman, R. *Solitons and instantons*. New York: Addison-Wesley, 1994.

- Randall, L.; Sundrum, R. Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Physical Review Letters*, v. 83, p. 3370–3373, out. 1999.
- Sakellariadou, M. Cosmic Microwave Background Anisotropies: Inflation versus Topological Defects. *ArXiv Astrophysics e-prints*, nov. 1999.
- Schulz, M. D. et al. Topological Phase Transitions in the Golden String-Net Model. *Physical Review Letters*, v. 110, n. 14, p. 147203, abr. 2013.
- Sen, A. Tachyon Dynamics in Open String Theory. *International Journal of Modern Physics A*, v. 20, p. 5513–5656, 2005.
- Sinha, S.; Roy, S. K. Role of topological defects in the phase transition of a modified XY model: A Monte Carlo study. *Physical Review E*, v. 81, n. 4, p. 041120, abr. 2010.
- Steuernagel, O.; Kakofengitis, D.; Ritter, G. Wigner Flow Reveals Topological Order in Quantum Phase Space Dynamics. *Physical Review Letters*, v. 110, n. 3, p. 030401, jan. 2013.
- Susanto, H.; van Gils, S. A. Instability of a lattice semifluxon in a current-biased $0-\pi$ array of Josephson junctions. *Physical Review B*, v. 69, n. 9, p. 092507, mar. 2004.
- Takeuchi, H. et al. Tachyon Condensation Due to Domain-Wall Annihilation in Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, v. 109, n. 24, p. 245301, dez. 2012.
- Trebst, S. et al. Breakdown of a Topological Phase: Quantum Phase Transition in a Loop Gas Model with Tension. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 7, p. 070602, fev. 2007.
- Verbin, M. et al. Observation of Topological Phase Transitions in Photonic Quasicrystals. *Physical Review Letters*, v. 110, n. 7, p. 076403, fev. 2013.
- Vilenkin, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Physical Review D*, v. 23, fev. 1981.
- Vilenkin, A.; Shellard, E. P. S. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. [S.l.: s.n.], 1995.
- Walgraef, D. *Spatio-Temporal Pattern Formation*. New York: Springer-Verlag, 1997.
- Walgraef, D.; Ghoniem, N. M.; Lauzeral, J. Deformation patterns in thin films under uniform laser irradiation. *Physical Review B*, v. 56, p. 15361–15377, dez. 1997.
- Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974.
- Wilets, L. *Non topological solitons*. Singapore: World Scientific, 1989.
- Yakushevich, L. V. *Nonlinear Physics of DNA*. [S.l.]: Wiley, 2004.
- Yazyev, O. V.; Chen, Y. P. Polycrystalline graphene and other two-dimensional materials. *Nature Nanotechnology*, v. 9, p. 755–767, out. 2014.
- Yu, S.-L.; Xie, X. C.; Li, J.-X. Mott Physics and Topological Phase Transition in Correlated Dirac Fermions. *Physical Review Letters*, v. 107, n. 1, p. 010401, jul. 2011.

Zakharov, V. E.; Takhtadzhyan, L. A.; Faddeev, L. D. Complete description of solutions of the "sine-Gordon" equation. *Soviet Physics Doklady*, v. 19, p. 822, jun. 1975.

Zurek, W. H. Cosmological experiments in superfluid helium? *Nature*, v. 317, p. 505–508, out. 1985.

Zwiebach, B. A solvable toy model for tachyon condensation in string field theory . *Journal of High Energy Physics*, v. 2000, 2000.