Poliane Lima de Sousa

Simetrias de Lie de uma equação de Korteweg-de Vries com dispersão não-linear

Brasil

2015

Poliane Lima de Sousa

Simetrias de Lie de uma equação de Korteweg-de Vries com dispersão não-linear

Trabalho de dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos.

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Antonio Lima Santos

Brasil

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Sousa, Poliane Lima de.
S725sL	Simetrias de Lie de uma equação de Korteweg-de Vries com dispersão não-linear / Poliane Lima de Sousa. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
	60 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.
	1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Simetria de Lie. I. Título.
	CDD: 515.353 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Poliane Lima de Sousa, realizada em 24/04/2015:

Prof. Dr. Antonio Lima Santos
UFSCar

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini
UFSCar

Prof. Dr. José Cândido Xavier
UFU

Dedico esse trabalho à minha mãe, Francinete, e à minha tia, Aurinete, pois foram as mulheres que me motivaram à seguir.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, principalmente pelo incompreensível.

Agradeço aos meus pais que sempre me deram apoio; não há palavras que possam expressar minha gratidão.

Agradeço aos meus irmãos Dario Lucas, Patrícia e Fernanda, os Peixes mais lindos, fortes e batalhadores do Universo, as pessoas que sempre escolherei como meus irmãos. Agradeço ainda às tias Netinha, Oneide, Graça e Tonhão, e a todos os meus familiares.

Agradeço aos amigos que fiz: à Samanta do Prado, por ter me ajudado (e ainda estar ajudando) tanto, ainda que nunca tivesse me visto antes em sua vida; ao Douglas Silva, um dos melhores físicos que já conheci e que me ajuda sempre que preciso; à Thais Cavalcante, que se dispõe a me ouvir sempre que pode; e ao Steve, que sempre me passa confiança.

Agradeço ao meu namorado, Rafael dos Reis, por ter me motivado fortemente a seguir na Física e a realizar os meus sonhos.

Agradeço aos amigos que fiz na Física: Mariana, Pedro e Isabela.

Agradeço aos colegas de laboratório: ao Ricardo, que sempre me transmitia uma paz incrível, principalmente quando me explicava algo que estava estudando; à Micheline, pelos conselhos e as longas caminhadas; ao Victor, por sempre estar disponível.

Agradeço ao meu orientador, o Lima, pela infinita paciência e compreensão que teve comigo e, primeiramente, por ter aceitado me orientar no mestrado.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

"A inteligência também me diz, à sua maneira particular, que este mundo é absurdo.Seu contrário, que é a razão cega, prefere pretender que tudo está claro; eu esperava provas e desejava que ela tivesse razão. Mas, apesar de tantos séculos pretensiosos e acima de tantos homens eloquentes e persuasivos, sei que isto é falso. Nesse plano, pelo menos, não há felicidade se eu não puder saber. Essa razão universal, prática ou moral, esse determinismo essas categorias que explicam tudo fazem o homem honesto dar risada. Não têm nada a ver com o espírito. Negam sua verdade profunda, que é a de estar acorrentado."

(Albert Camus, O mito de Sísifo)

Resumo

Equações Rosenau-Hyman, ou $K(m, n)$, são uma versão generalizada da equação Korteweg-de Vries (KdV) em que o termo dispersivo é não-linear. Essas equações diferencias não-lineares nem sempre possuem um método específico pelo qual podem ser resolvidas, além de que as soluções nem sempre são analíticas. O método de simetria de Lie foi aplicado para buscar por soluções dessas equações. Esse método consiste em encontrar o grupo de simetria mais geral da equação, por meio do qual a solução pode ser encontrada. Obteve-se uma expressão para a solução e alguns casos particulares. Foi mostrado que para $K(2, 2)$ um novo tipo de solução, chamada compacton, com propriedades peculiares é encontrado.

Palavras-chaves: Equação diferencial parcial não-linear. Simetria de Lie. Compactons.

Abstract

The Rosenau-Hyman, or $K(m,n)$, equations are a generalized version of the Korteweg-de Vries (KdV) equation where the dipersive term is non-linear. Such partial differential equations not always have a specific method by which can be solved, besides the solutions are not always analytical. The Lie symmetry method was applied to look for solutions of these equations. This method consists in finding the most general symmetry group of the equation, wherewith the solution can be found. It was found an expression to the solution and to some particular cases. It was shown that in the case $K(2,2)$ a new kind of solution, called compacton, with peculiar properties is found.

Key-words: Non-linear partial differential equation. Lie symmetry. Compactons.

Sumário

Introdução

Um dos primeiros fenômenos que aprendemos quando começamos a estudar Física é o movimento harmônico simples. O exemplo mais comum é o de um sistema massa-mola, em que um corpo de massa m encontra-se inicialmente parado em uma posição $x_0 = 0$, chamado ponto de equilíbrio, ligado a uma parede por meio de uma mola de constante elástica k. Se fizermos essa massa sofrer um deslocamento x de sua posição inicial uma força restauradora $\vec{F}$ tende a fazê-la retornar ao seu ponto de equilíbrio, de modo que a massa descreve um movimento oscilatório em torno desse ponto. Usando a segunda lei de Newton, a equação de movimento será

$$F(x) = -kx \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \tag{1}$$

onde t é o tempo e $x = x(t)$. Essa equação de evolução é uma equação diferencial ordinária (EDO) *linear*, pois nela não existem potências ou produtos de derivadas de x [1].

Contudo, logo aprendemos que essa não é toda a verdade, e para que essa equação corresponda a uma descrição mais realística do fenômeno surge a primeira limitação: é preciso que o deslocamento da posição de equilíbrio, x, seja pequeno, pois de outra forma a equação de movimento não será a eq.(1). Para entendermos com mais clareza vejamos que, se escrevermos a expressão da força como uma expansão em série de Taylor, temos [2]

$$F(x) = F_0 + x\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=0} + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x=0} + ..., \tag{2}$$

onde F_0 é o valor de F em $x = 0$. Por comparação com a eq.(1) vemos que k corresponde a dF/dx em $x = 0$ e que os outros termos da eq.(2) são nulos, já que x é pequeno. Se a distensão da mola for grande os termos de ordem superior passam a ser relevantes e a equação de movimento será *não-linear*, pois irá conter potências da variável dependente $x(t)$.

Fenômenos não-lineares estão em toda a Natureza: numa onda que se quebra na praia, no desabrochar de uma flor, num terremoto, nas mudanças climáticas, etc. Esses fenômenos são descritos por equações diferenciais parciais (EDP) não-lineares que nem sempre são fáceis de serem resolvidas [3], principalmente quando se almeja encontrar soluções bem-comportadas. Contudo, algumas dessas equações têm soluções analíticas e estáveis chamadas *sólitons*.

Sólitons pertencem a uma classe de soluções chamadas *ondas solitárias* que se propagam mantendo perfil e velocidade constante e que são soluções de algumas equações diferenciais não-lineares. Os sólitons são especiais porque preservam essas propriedades mesmo após interagirem com outros sólitons [4–6]. Veremos esses conceitos em mais detalhes no próximo capítulo.

Algumas das equações diferenciais mais conhecidas que possuem soluções tipo-sóliton são: a equação sine-Gordon

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \sin\phi = 0,$$

a equação não-linear de Schrödinger (NLS, na sigla em inglês),

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0,$$

e a equação de Korteweg-de Vries (KdV),

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Nas equações acima ϕ e u são ambas funções de duas variáveis x e t e os índices subscritos indicam derivadas parciais com relação às variáveis independentes. A primeira equação é utilizada, por exemplo, para descrever teorias de partículas elementares e propagação de fluxo magnético em linhas de transmissão supercondutoras [6]. A segunda descreve a propagação de um pulso de calor em um sólido, ondas de Langmuir em plasmas, e está relacionada à equação de supercondutividade de Ginzburg-Landau [6]. A última descreve propagação de ondas em águas rasas, redes anarmônicas e ondas longitudinais dispersivas em hastes elásticas [6].

A equação KdV está presente na descrição de inúmeros fenômenos da mecânica dos fluidos, física de partículas, física de plasmas, entre outros. Com isso, algumas alterações foram realizadas em sua estrutura para que ela abrangesse cada vez mais fenômenos [7]. Uma dessas alterações foi proposta pelos físicos Philip Rosenau e James Hyman [8], dada por:

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0,$$

que são equações KdV em que o termo dispersivo é não-linear. Essas equações são por vezes chamadas de *Rosenau-Hyman* ou $K(m, n)$ em referência aos expoentes de $u(x, t)$. Essas equações têm como objetivo estudar a influência de uma dispersão não-linear na formação de objetos com extensão finita, como gotas de água e bolhas de sabão [8, 9]. As soluções para alguns valores de m e n das equações $K(m, n)$ são chamadas de *compactons*. Os compactons são semelhantes aos sólitons no que diz respeito a se propagarem mantendo forma e velocidade mesmo depois de terem interagido com outros compactons, mas diferem por terem uma extensão finita - diferentemente dos sólitons, que se estendem até o infinito (veremos mais detalhadamente no próximo capítulo).

Ao longo deste trabalho, concentraremos nossos estudos a essa classe de equações. Investigaremos o caso em que a dispersão é linear, encontrando e analisando soluções para alguns valores de m, e em seguida faremos o mesmo para o caso geral em que a dispersão é não-linear, onde encontraremos soluções tipo-compactons.

Os assuntos abordados nesse trabalho estão estruturados da seguinte forma: O Capítulo 1 tem caráter de revisão, onde faremos um breve estudo do contexto histórico no qual a equação KdV teve sua origem, em seguida veremos algumas formas de resolvê-la obtendo soluções tipo-sóliton. Alguns conceitos, como o de onda solitária, são enunciados.

Como as equações $K(m, n)$ consistem de equações diferenciais parciais não-lineares para as quais não há um método específico de resolução, esse estudo será feito usando o método de *simetria de Lie* ou de *transformações infinitesimais* que será apresentado no Capítulo 2. Esse método consiste em encontrar transformações das variáveis da equação de modo a deixá-la invariante, conduzindo-nos a expressões mais simples que nos levem à solução [10].

O Capítulo 3, por sua vez, contém o objeto principal de estudo deste trabalho. Faremos uma análise um pouco mais aprofundada para a equação $K(2, 2)$ para a qual quatro leis de conservação são apresentadas [8], [11].

1 Equação de Korteweg-de Vries e sólitons

No presente capítulo faremos uma revisão histórica da descoberta das ondas solitárias e dos sólitons, seguido da explanação sobre suas propriedades. Focaremos no estudo dos sólitons que são soluções da equação KdV. Em seguida veremos algumas características desta equação e como obter suas soluções.

1.1 Revisão histórica

A equação de Korteweg-de Vries, ou simplesmente equação KdV, é uma das equações mais importantes na descrição de alguns fenômenos físicos. Desenvolvida em 1895 por Korteweg e de Vries, a equação KdV tornou-se uma descrição final de um fenômeno que fora observado em 1834 pelo engenheiro John Scott Russell, mas que só foi relatado em sua publicação intitulada *Report on waves* em 1844 [4]. Nesse artigo, Russell descreve o fenômeno:

"Eu estava observando o movimento de um barco que rapidamente foi puxado através de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou de repente - mas não a massa de água no canal que ele colocou em movimento; ela se acumulou em torno da proa da embarcação em um estado de violenta agitação, então de repente deixando-o para trás, rolou para frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma porção de água arredondada, suave e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição da velocidade. Eu a segui montado no cavalo, e alcancei-a ainda rolando a uma taxa de oito ou nove milhas por hora, preservando sua figura original de cerca de trinta pés de comprimento e um pé a um pé e maio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente, e depois de uma perseguição de uma ou duas milhas eu a perdi nos meandros do canal".

Depois disso, Russell realizou uma série de experimentos com o objetivo de encontrar uma descrição formal para o fenômeno. Alguns dos seus experimentos consistiam em lançar pesos em tanques de água gerando ondas que pudessem ter semelhanças com a onda que observou. Um dos resultados mais importantes que Russell obteve foi a equação

$$c^2 = g(h + a), \tag{1.1}$$

onde c é a velocidade de propagação da onda, g é a aceleração da gravidade, h é a altura da massa de água contida no tanque e a é a amplitude da onda, ou seja, a altura da elevação de água que se produzia quando os pesos eram lançados no tanque. Essa equação indica que quanto maior a amplitude (altura) da onda maior era a velocidade (mais rápida) de propagação, como veremos adiante.

O trabalho de Russell não foi bem recebido pela comunidade científica, em especial por dois cientistas de grande renome na época. O famoso astrônomo inglês George B. Airy tinha desenvolvido uma teoria de propagação de onda em águas rasas, e foi o primeiro a criticar as conclusões de Russell, argumentando, num trabalho de 1845, que os resultados da teoria de Russell não estavam de acordo com a sua teoria. Essa teoria predizia que uma onda com amplitude finita não pode se propagar sem mudar de forma: ela se inclina e posteriormente se quebra [12]. Depois foi a vez de George Gabriel Stokes, um dos fundadores da mecânica dos fluidos. Stokes mostrou que ondas de amplitude finita com perfil permanente são possíveis em águas profundas, mas desde que sejam periódicas, e não localizadas. Stokes concluiu ainda que uma onda solitária não pode se propagar num meio não-viscoso. Tal conclusão entrou em contradição com os resultados preliminares da teoria de Russell. Essa e outras contradições foram resolvidas anos depois pelo físico francês Joseph Boussinesq e pelo inglês Lord Rayleigh, independentemente. Eles mostraram que, para uma onda localizada de amplitude finita, o aumento da velocidade da onda é contrabalançado pelo efeito da dispersão sobre ela, levando a uma onda de perfil permanente [12].

Os matemáticos Diederik Korteweg e Gustav de Vries aperfeiçoaram os trabalhos de Rayleigh e Boussinesq, até que em 1895 obtiveram a equação que carrega seus nomes, a equação KdV, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1.2}$$

que descreve a propagação de ondas como aquelas observadas por Russell. O perfil da onda é dado por $u(x,t)$, onde x é sua posição no espaço e t é a variável de tempo. Essas ondas são tipo viajante e são localizadas no espaço, como veremos a seguir.

1.2 Conceitos fundamentais

Ondas com perfil dado por $u(x,t)$ que se propagam com uma velocidade c constante sem mudar de forma e cuja dependência de x e t se dá através da relação $\xi = x - ct$ são chamadas de *ondas viajantes*. Quando, além disso, ela é localizada, isto é, não nula numa região finita do espaço e que tende a zero ou a uma constante quando $\xi \to \pm\infty$, isto é, assintoticamente, dizemos que ela é uma *onda solitária* [6].

A onda observada por Russell é uma onda solitária cujo movimento é descrito pela equação KdV. Contudo, esse tipo de onda tem uma propriedade bastante peculiar: ao colidirem (interagirem) umas com as outras elas reemergem da interação com a mesmas formas e velocidades com as quais colidiram, sendo que o único efeito residual é um deslocamento em suas fases [5, 13]. Essas ondas são chamadas *sólitons*, termo cunhado pelos físicos N. Zabusky e M. Kruskal, ao aplicarem a equação KdV ao estudo de ondas de plasma. Uma definição mais formal segue abaixo [5, 6]:

Definição 1. *Seja $u(\xi_i) = \varphi(x - c_i t)$ uma onda solitária com velocidade c_i constante. Um* sóliton *$u(x - ct)$ é uma solução tipo onda solitária de uma equação diferencial que preserva sua forma e velocidade após colidir com outras ondas solitárias. Isto é, dada uma solução qualquer $u(x,t)$ composta de N ondas solitárias inicialmente nas posições b_i, que em um tempo negativo muito grande é dada por*

$$u(x,t) \sim \sum_{i=1}^{N} u(\xi_i) = \sum_{i=1}^{N} u(x - b_i - c_i t), \qquad \text{com } t \to -\infty, \tag{1.3}$$

essas ondas solitárias serão chamadas sólitons se elas emergem da colisão com nada mais que um deslocamento de fase, ou seja

$$u(x,t) \sim \sum_{i=1}^{N} u(\bar{\xi}_i) = \sum_{i=1}^{N} u(x - b_i - c_i t + \alpha_i), \qquad \text{com } t \to \infty, \quad \alpha_i = cte. \tag{1.4}$$

A estabilidade dessas soluções deve-se competição de dois efeitos que, aparentemente, seriam responsáveis por destruí-las: dispersão e não-linearidade [4, 6, 12]. De fato, esses termos estão explícitos na equação KdV e são dados, respectivamente, por u_{xxx} e uu_x.

Para entendermos o significado desses termos, vamos considerá-los individualmente. A mais simples equação de onda dispersiva [4] é dada por

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.5}$$

Considerando que ela admite solução periódica de amplitude unitária, número de onda k e frequência ω

$$u(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}, \tag{1.6}$$

e substituindo-a na eq.(1.5), obtemos a equação, chamada *relação de dispersão*

$$\omega = k - k^3. \tag{1.7}$$

Substituindo esse resultado no argumento da eq.(1.6), obtemos

$$kx - \omega t = k\left(x - \frac{\omega}{k} t\right) \quad \Rightarrow \quad kx - (k - k^3)t = k\left(x - (1 - k^2)t\right),$$

e por comparação, vemos que a solução se propaga com velocidade

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2, \tag{1.8}$$

que depende de k. Agora veja: a solução $u(x,t)$ pode ser escrita como uma combinação linear de soluções da forma (1.3). Se cada uma dessas componentes tem números de onda distintos elas se propagam com velocidades diferentes e têm formas diferentes. Com isso, a onda como um todo, ou *pacote de onda*, se dispersa, pois seu perfil muda a medida que ela se propaga. Essas componentes têm suas velocidades dadas pela eq.(1.7), chamada *velocidade de fase*. A velocidade do pacote de onda é chamada *velocidade de grupo*, e é dada por

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2. \tag{1.9}$$

Vemos que ambas velocidades têm expressões diferentes. Isso é para ser esperado visto que trata-se de uma equação dispersiva: o pacote de onda se desloca com velocidade diferentes das ondas que o compõem, levando ao "alargamento", dispersão, da onda.

De forma semelhante, vejamos o caso da não-linearidade isoladamente. Consideremos a equação

$$u_t + (1 + u)u_x = 0, \tag{1.10}$$

que é a mais simples equação não-linear [4] e vamos considerar que sua solução seja dada pela eq.(1.6), que substituídas na eq.(1.10) resultará na relação de dispersão

$$\omega(k) = k + ku. \tag{1.11}$$

Observe que agora a frequência depende da própria amplitude u da onda. Com isso, vemos que a velocidade $c = 1 + u$ também é diretamente proporcional à amplitude da onda. Desta forma, pontos mais altos da onda se deslocam com maior velocidade que pontos mais baixos, levando à inclinação da onda na direção de sua propagação e, consequente, à quebra da onda.

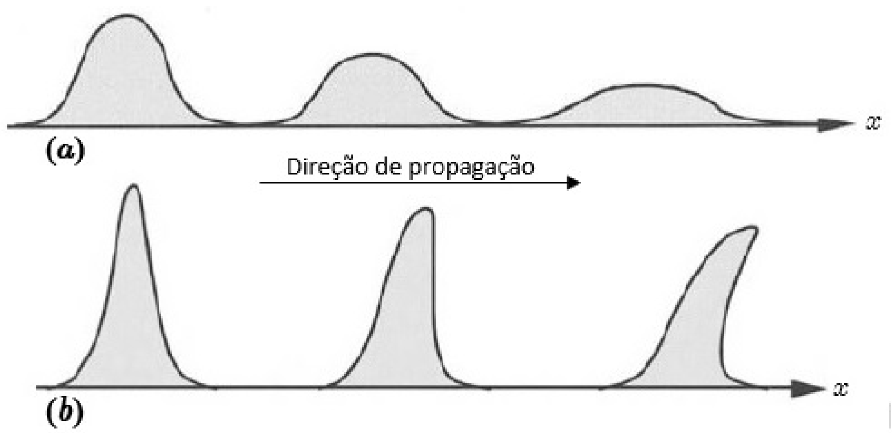

Figura 1 – (a) Onda com dispersão; (b) onda não-linear. Fonte: adaptado de [12].

Além da combinação dos efeitos dispersivo e não-linear, outra característica dos sólitons é que quanto maior a amplitude (mais alta) da onda, menor será seu comprimento (mais estreita) - nesse caso, chamamos de comprimento a extensão da onda na direção da propagação.

Por fim, vejamos um resultado curioso: embora os sólitons possam interagir e sair da interação sem que haja diminuição em suas velocidades e nem mudança de suas formas eles não são soluções que satisfazem ao *princípio de superposição*, por serem soluções de uma equação não-linear. A principal característica de um sistema linear é que suas soluções devem satisfazer ao princípio de superposição, que se enuncia da seguinte maneira: sejam $f(x,t)$ e $g(x,t)$ duas soluções linearmente independentes de uma equação que descreve um dado sistema; quando qualquer combinação linear $\alpha f(x,t) + \beta g(x,t)$, onde α e β são constantes, é solução da mesma equação, dizemos que o sistema é linear. Dessa forma, não podemos combinar soluções tipo sóliton para obter outras[1].

1.3 A solução da equação KdV

A importância da equação KdV reside, principalmente, no fato de que ela é a equação mais simples que incorpora dispersão e não-linearidade [4, 14], podendo, assim, ser usada para descrever um grande número de fenômenos. Para procurarmos soluções tipo onda solitária da equação KdV, vamos considerar uma solução dada da forma $u(x,t) = f(x-ct)$, onde c é a velocidade com a qual a onda se propaga, e vamos aplicá-la na eq.(1.2)

$$u_t = -cf', \qquad u_x = f', \qquad u_{xxx} = f''',$$

onde a linha ($'$) indica derivada com relação a ξ. Daí, a equação KdV será

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0. \tag{1.12}$$

Vemos que com esse procedimento reduzimos uma EDP (a equação KdV) a uma EDO. Podemos integrá-la, obtendo

$$-cf - 3f^2 + f'' = A,$$

onde A é constante de integração. Podemos integrar novamente essa equação depois de a multiplicarmos por f', de onde obtemos

$$\frac{1}{2}(f')^2 - Af - \frac{1}{2}cf^2 - f^3 = B \tag{1.13}$$

onde B é constante de integração. Vamos usar a condição de contorno $f, f', f'' \to 0$ quando $\xi \to \pm\infty$, e substituindo-as na eq.(1.13) vemos que as constantes A e B são nulas. Assim, obtemos

$$(f')^2 = f^2(2f + c),$$

que integrando nos leva à expressão

$$\int \frac{df}{f(2f+c)^{1/2}} = \int d\xi.$$

Essa equação é resolvida se fizermos a substituição $f = -c(\text{sech}^2\theta)/2$, e assim temos

$$u(x,t) = f(x-ct) = -\frac{c}{2}\text{sech}^2\left[\frac{c^{1/2}}{2}(x - ct + C)\right], \tag{1.14}$$

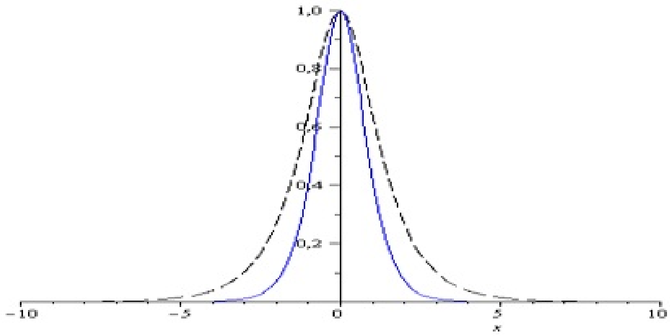

Figura 2 – Perfil da solução $u(x,t)$. A linha contínua é a $\mathrm{sech}^2 u$ e a linha tracejada é a $\mathrm{sech}\, u$.

onde C é uma constante de integração. Essa solução é uma onda com perfil tipo sino, e na Figura 2 abaixo temos o gráfico da secante hiperbólica em comparação com o gráfico da solução.

A equação KdV pode ainda ser resolvida de outras maneiras, entre elas encontra-se o método do espalhamento inverso, que consiste em resolver a equação KdV quando se fixa um inicial (encontrar uma única solução com um valor fixo da(s) variável(is) independente(s)) [4, 6, 13].

Leis de conservação

Vamos escrever a equação KdV (1.1) da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial x}(3u^2 - u_{xx}).$$

Essa equação tem a forma de uma equação de continuidade,

$$\frac{\partial}{\partial t}T + \frac{\partial}{\partial x}X = 0$$

onde T é chamado de *densidade conservada* e X é o *fluxo* [4]. Essa equação, ou *lei de conservação*, descreve quantidades que se conservam ao longo do tempo em um sistema. Ao integrarmos a eq.(1.15) num intervalo de $-\infty$ a $+\infty$ e considerando a condição u e suas derivadas tendem a zero quando $x \to \pm\infty$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = (3u^2 - u_{xx})|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} u dx = D, \tag{1.15}$$

onde D é a constante de movimento. A integral de u é chamada constante de movimento e o integrando u é a chamado de densidade conservada. Dependendo do problema em questão podemos ter conservação de carga, massa, momento, etc. Essa equação descreve

[1] Esse resultado pode ser visto em [4, 13], em que se analisa a interação de dois sólitons e, em seguida, a para de N sólitons, cujas soluções, no momento da interação, não correspondem à soma das soluções individuais.

a conservação da massa. Se multiplicarmos a eq.(1.1) por u podemos encontrar outras quantidades conservadas da KdV:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u^2 - 2u^3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = E, \tag{1.16}$$

onde E é a constante de movimento. Essa equação descreve a conservação do momento. Para obtermos a equação que corresponde à conservação da energia do sistema podemos multiplicar a eq.(1.2) por $3u^2$ e somar ao produto de u_x pela derivada da KdV em relação a x, tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} - 6uu_x^2 + u_xu_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2\right) = 0, \tag{1.17}$$

que integrando resulta em

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right) dx = F, \tag{1.18}$$

onde F é a constante de movimento. Em suma, as três últimas quantidades conservadas são

$$T_1 = u, \qquad T_2 = u^2, \qquad T_3 = u^3 + \frac{1}{2}u_x^2.$$

Essas três não são as únicas quantidades conservadas da KdV. Os físicos Miura, Gardner e Kruskal encontraram mais oito leis de conservação [4, 15]. Posteriormente foi possível mostrar que a equação KdV possui um número infinito de leis de conservação - resultado que não desenvolveremos neste trabalho.

2 Grupos e equações diferenciais

Como vimos, iremos lidar com equações diferenciais parciais que não possuem um método específico para serem resolvidas. Sendo assim, no presente capítulo faremos um rápido estudo sobre o método de transformações de simetria desenvolvido por Sophus Lie[2], que consiste em buscar soluções invariantes de equações diferenciais a partir da análise de suas propriedades algébricas. Esse método pode ser aplicado a um grande número de equações diferenciais. Entre as referências utilizadas para fundamentar este capítulo [10, 16–18], a mais usada foi [16].

2.1 Grupo e transformações infinitesimais

Se pegarmos uma bola e olharmos para ela de diferentes ângulos veremos que ela tem exatamente a mesma forma, como se nada tivesse acontecido. Transformações que realizamos sobre objetos deixando-os *invariantes* são chamadas de *simetrias* [17].

Outro exemplo é o das chamadas *transformações de ponto* que transformam, mapeiam, um ponto de coordenadas (x, y) em outro ponto de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$. De modo mais formal, para que uma transformação seja uma simetria é necessário que ela satisfaça algumas propriedades, tais que juntas constituem o conceito de *grupo*, definido como segue.

Definição 2. *Seja $G = \{g_i; i = 1, 2, ..., n\}$ um conjunto qualquer com n elementos e $\cdot$ uma operação que pode ser realizada entre os elementos de G, também chamada de* lei de composição *ou* multiplicação*. O conjunto G é dito um* grupo *se valem as seguintes propriedades:*

Fechamento *A operação $\cdot$ relaciona dois elementos g_i e g_j de G produzindo um terceiro elemento $g_k = g_i \cdot g_j$ que também pertence a G;*

Associatividade *Para g_i, g_j e $g_k \in G$, vale que*

$$g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k \ ;$$

Elemento identidade *Para todo g_i existe um elemento $e \in G$, chamado identidade, tal que*

$$g_i \cdot e = e \cdot g_i = g_i \ ;$$

Inversas *Para cada g_i existe um elemento $g_i^{-1} \in G$, chamado* inversa*, tal que*

$$g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = e.$$

[2] Marius Sophus Lie (1842-1899): Matemático norueguês que desenvolveu estudos no campo dos grupos de transformações aplicados à teoria das equações diferenciais.

Grupos em que a multiplicação de dois elementos não depende da ordem, isto é, se os elementos $g_a = g_i{\cdot}g_j$ e $g_b = g_j{\cdot}g_i$ são iguais, são chamados *abelianos* ou *comutativos*. Se $g_a{\neq}g_b$ o grupo é *não-comutativo*. A noção de grupo é aplicada em diversos ramos da Física, como na Mecânica quântica, na Mecânica clássica, na Física do estado sólido, e também em outras áreas da ciência como na Química e Biologia, além da Matemática. Alguns exemplos são os seguintes:

(a) O conjunto dos números inteiros $G = \mathbb{Z}$ com a operação de grupo sendo a soma $\{+\}$ forma um grupo, visto que o fechamento e a associatividade são facilmente verificados, a identidade é 0 e as inversas de cada g são os inteiros $-g$. Contudo, se a operação é de multiplicação usual $\{\cdot\}$, as três primeiras propriedades são verificadas, com a identidade sendo $\mathrm{e} = 1$, mas com inversas dadas na forma $g^{-1} = 1/g$ e que, nesse caso, não são inversas, já que elementos da forma $1/g$ não pertencem aos inteiros. Logo, para essa operação, G não é um grupo.

(b) O conjunto dos números reais $G = \mathbb{R}$ forma um grupo com relação à operação de soma (com identidade $\mathrm{e} = 0$ e inversas $g^{-1} = -g$) e com relação à operação de multiplicação (com identidade $\mathrm{e} = 1$ e inversas $g^{-1} = 1/g$).

(c) Rotações no plano: Consideremos um vetor $\mathbf{u}$ no plano. Esse vetor sofre uma rotação R_θ por um ângulo θ no sentido anti-horário, transformando $\mathbf{u}$ num vetor $\mathbf{v}$. Em seguida o vetor $\mathbf{v}$ é rotacionado por um ângulo ϕ produzindo o vetor $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} = R_\theta \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = R_\phi \mathbf{v}.$$

Agora se o vetor $\mathbf{u}$ for rotacionado por um ângulo $\theta + \phi$ ele resultará exatamente no vetor $\mathbf{w}$. Isso indica que a aplicação sucessiva das rotações θ no vetor $\mathbf{u}$ e ϕ no vetor $\mathbf{v}$ são equivalentes à aplicação da rotação por um ângulo $\theta + \phi$ sobre o vetor $\mathbf{u}$, ambos processos resultando no vetor $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{w} = R_{\theta+\phi}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad R_{\theta+\phi} = R_\theta{\cdot}R_\phi,$$

onde $\cdot$ indica o produto das duas rotações. Essas rotações, ou *operações*, formam o *grupo das rotações* no plano ou *grupo* $SO(2)$[3] e costumam ser representadas por matrizes. As rotações: são fechadas, pois como vimos a composição de duas rotações é uma rotação; são associativas, pois havendo uma terceira rotação R_η vale que $(R_\theta{\cdot}R_\phi){\cdot}R_\eta = R_\theta{\cdot}(R_\phi{\cdot}R_\eta)$; tem inversa para cada rotação, desfazendo-a e retornando para o vetor inicial; e tem a rotação identidade que transforma o vetor nele mesmo.

Um grupo de grande importância na Física é o *grupo de Lie*, ou grupo contínuo. Os elementos desse grupo satisfazem às propriedades do grupo variando de forma contínua; a lei de composição do grupo é uma função suave. Sua definição é dada como segue [16]:

[3] O grupo $SO(2)$ é representado por matrizes $2{\times}2$ ortogonais com determinante igual a 1.

Definição 3. *Seja g e h dois elementos quaisquer do grupo G. Dizemos que G é um* grupo de Lie *quando a operação, ou lei de composição, entre os elementos do grupo e a inversão são funções suaves, f e i, dadas, respectivamente, por:*

$$f : G{\times}G{\to}G, \quad \textit{onde} \quad f(g,h) = g{\cdot}h \qquad e \qquad i : G{\to}G, \quad \textit{onde} \quad i(g) = g^{-1}. \tag{2.1}$$

Há ainda o chamado grupo de Lie *local*, com o qual lidaremos mais frequentemente, que consiste em considerar apenas os elementos $g{\in}G$ que pertencem à vizinhança do elemento identidade do grupo.

Outro conceito importante é o de *ação* de grupo. Sendo g um elemento qualquer do grupo G e M um conjunto qualquer com elementos, dizemos que G age em M se o elemento $g{\cdot}x$ é definido e pertence a M. O que vimos no exemplo de grupo dado na letra (c) foi a ação do grupo de rotações $G = SO(2)$ sobre os elementos de um espaço $M = \mathbb{R}^2$, os seja, sobre vetores no plano. Grupos que agem sobre os elementos de um dado conjunto são chamados de *grupos de transformação*.

Antes de prosseguirmos vale ressaltar que o conjunto M, que será muito explorado ao longo deste capítulo, deve ser entendido como um espaço[4] de dimensão m que satisfaz, basicamente, às seguintes propriedades: é formado por uma união de subconjuntos abertos U_i; e existem funções χ_i um-a-um que associam esses subconjuntos $U_i{\subset}M$ a subconjuntos abertos $V_i{\subset}\mathbb{R}^m$.

Definição 4. *Sejam x um elemento qualquer de um conjunto M, dois elementos quaisquer g e h de um grupo G de Lie local com e sendo sua identidade, e V um subconjunto aberto de $G{\times}M$, onde*

$$\{e\}{\times}M{\subset}V{\subset}G{\times}M.$$

Dizemos que G é um grupo de transformações locais *agindo em M quando existe uma função suave $\Psi : V{\to}M$ tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) Para cada $g{\subset}G$ a função Ψ é um-a-um, associando um par (g,x) a um elemento $\Psi(g,x) = \tilde{x}$ de M.

(b) Sendo $\Psi(h,x){\in}M$ e (h,x), $(g,\Psi(h,x))$, $(g{\cdot}h,x) \in V$, então

$$\Psi(g,\Psi(h,x)) = \Psi(g{\cdot}h,x). \tag{2.2}$$

(c) Para todo $x{\in}M$ vale que $\Psi(e,x) = x$.

(d) Sendo $\Psi(g,x){\in}M$ e (g,x), $g^{-1},\Psi(g,x) \in V$, então

$$\Psi(g^{-1},\Psi(g,x)) = x, \tag{2.3}$$

onde $g^{-1}{\in}G$.

[4] Esse espaço é chamado de *variedade*, cuja definição mais formal pode ser vista em [16]. Sempre utilizaremos as letras M e N para nos referirmos a esses tipos de espaços.

Podemos indicar $\Psi(g, x)$ por $g{\cdot}x$, sempre atentando para o detalhe de que g e x não são elementos do mesmo conjunto. Veja ainda que na eq.(2.2) o mesmo $\cdot$ foi utilizado para indicar a lei de composição entre os elementos g e h do grupo. Este ponto não deve ser confundido com aquele em $g{\cdot}x$. Para não haver confusão o leitor pode usar a expressão $g{\cdot}h = f(g, h)$. Sempre que utilizarmos a expressão *local* estaremos nos referindo ao conceito de grupo aplicado a elementos próximos da identidade.

Outro conceito importante é o de *órbita*. Se G é um grupo de transformação local de um conjunto M e este contém um subconjunto O tal que a ação do grupo mapeia elementos de O nele mesmo, dizemos que O é a órbita de G. Ou seja: se $x{\in}O{\subset}M$, $g{\in}G$ e o elemento $g{\cdot}x$ é definido em M, então $g{\cdot}x{\in}O$.

A definição seguinte refere-se ao *grupo de transformação de Lie a um-parâmetro*, com o qual lidaremos ao longo deste trabalho.

Definição 5. *Além de satisfazer às propriedades da Definição 3, um* grupo de transformação de Lie a um-parâmetro *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) O elemento $g{\in}G$ é um parâmetro contínuo real, onde $G{\subset}\mathbb{R}$, e $g = 0$ corresponde ao elemento identidade.

(b) A função Ψ é suave com relação a $x{\in}M$ e analítica com relação a $g{\in}G$.

(c) A lei de composição $g{\cdot}h = f(g, h)$ é uma função analítica de g e h.

Sabendo que os elementos de G são parâmetros reais iremos representá-los por letras gregas, por exemplo $g{\to}\epsilon$ e $h{\to}\delta$. Alguns exemplos são o grupo das *translações*, onde $G = \mathbb{R}$ e $M = \mathbb{R}^2$, tal que

$$\tilde{x} = \Psi(\epsilon, x) = x + \epsilon x_0, \tag{2.4}$$

onde x_0 é um vetor fixo do plano. Outro exemplo é a *transformação de escala* no plano. O elemento x do espaço $M = \mathbb{R}^2$ tem coordenadas $x = (x_1, x_2)$ e a transformação Ψ leva x em $\tilde{x}{\in}M$ através de:

$$\Psi(\epsilon, x) = (\epsilon x_1, \epsilon^2 x_2).$$

As transformações de ponto, já mencionadas, também são um exemplo de grupo de transformação a um-parâmetro, em que as coordenadas novas $\tilde{x}, \tilde{y}$ dependem das antigas x, y e do parâmetro

$$\tilde{x} = \tilde{x}(\epsilon; x, y), \qquad \tilde{y} = \tilde{y}(\epsilon; x, y), \tag{2.5}$$

têm inversa, a identidade existe para $\epsilon = 0$, com

$$\tilde{x} = \tilde{x}(0; x, y) = x, \qquad \tilde{y} = \tilde{y}(0; x, y) = y,$$

e a composição de duas transformações de ponto é uma transformação

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{x}}(\tilde{\epsilon}; \tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\tilde{x}}(\tilde{\tilde{\epsilon}}; x, y), \qquad \tilde{\tilde{y}} = \tilde{\tilde{y}}(\tilde{\epsilon}; \tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\tilde{y}}(\tilde{\tilde{\epsilon}}; x, y).$$

Outra forma de expressar as transformações que fazemos nas variáveis é através das *transformações infinitesimais*,

$$\tilde{x}(\epsilon, x) = \tilde{x}(0, x) + \epsilon\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} + \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\epsilon^2}|_{\epsilon=0} + ... = x + \epsilon\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2). \tag{2.6}$$

2.2 Gerador infinitesimal e fluxo

Para entendermos melhor como se dão as transformações infinitesimais, vejamos alguns conceitos. Considere um ponto $x{\in}M$ com m coordenadas $(x_1, ..., x_m)$ e uma função $\varphi : I{\to}M$, onde $I{\subset}\mathbb{R}$. Para cada $\epsilon{\in}I$ a função φ, chamada *curva* $\mathcal{C}$ sobre M, define um elemento $\varphi(\epsilon) = x$ de M. A derivada dessa função $\dot{\varphi}(\epsilon)$ é o *vetor tangente* à $\mathcal{C}$ no ponto x, dado por

$$\mathbf{v}|_x = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\epsilon} = \dot{\varphi}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \dot{\varphi}_m\frac{\partial}{\partial x_m}. \tag{2.7}$$

Agora veja que por um único $x{\in}M$ passam várias curvas de modo que em cada uma delas existe um vetor que as tangencia no ponto x. O conjunto desses vetores é chamado de *espaço tangente* a M, simbolizado por $TM|_x$. O conjunto de espaços tangentes é chamado de *agrupamento tangente*.

Entre os inúmeros vetores que tangenciam x e que pertencem ao espaço tangente $TM|_x$ há um vetor tangente que varia suavemente de ponto a ponto de M. Esses vetores formam um *campo vetorial* sobre M, dado por [16]

$$\mathbf{v} = \xi_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \xi_m(x)\frac{\partial}{\partial x_m}, \tag{2.8}$$

onde $\xi_m(x)$ são funções suaves, dadas por

$$\xi_i = \frac{dx_i}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}, \qquad i = 1, ..., m,$$

para $\epsilon = 0$.

Quando um vetor tangente $\dot{\varphi}(\epsilon)$ a uma curva $x = \varphi(\epsilon)$ em um ponto x coincide com o campo vetorial no mesmo ponto a curva passa a ser chamada de *curva integral*:

$$\dot{\varphi}(\epsilon) = \mathbf{v}|_{\varphi(\epsilon)}. \tag{2.9}$$

Sendo assim quando o campo vetorial $\mathbf{v}$ calculado em todos os pontos dessa curva coincide, respectivamente, com todos os vetores $\dot{\varphi}(\epsilon)$ que a tangencia em cada um de seus pontos chamamos essa curva de *fluxo* $\Psi(\epsilon, x)$ gerado por $\mathbf{v}$. Para um $x{\in}M$ fixo se fizermos ϵ variar em um subconjunto dos reais $\mathbb{R}$ que contenha 0 teremos os pontos da curva integral que passa por x; quando $\epsilon = 0$ o ponto da curva $\Psi(\epsilon, x)$ é o próprio x: $\Psi(0, x) = x$. Além dessa propriedade, o fluxo de um campo vetorial satisfaz a relação

$$\Psi(\delta, \Psi(\epsilon, x)) = \Psi(\delta + \epsilon, x),$$

como visto pela eq.(2.2), onde $\delta \in \mathbb{R}$, e

$$\frac{d}{d\epsilon}\Psi(\epsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\epsilon,x)}. \tag{2.10}$$

De acordo com essas propriedades vemos que o fluxo gerado por um campo vetorial é um grupo de transformação a um-parâmetro, que consiste da ação do grupo local dos $\mathbb{R}$ sobre um conjunto M. Escrevendo $\Psi(\epsilon, x)$ como um expansão em torno da identidade do grupo $\epsilon = 0$, temos

$$\Psi(\epsilon, x) = \Psi(0, x) + \epsilon\frac{d\Psi}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2) = x + \epsilon\xi(x) + O(\epsilon^2), \tag{2.11}$$

onde $\xi(x) = (\xi_1, ..., \xi_m)$ são os coeficientes de $\mathbf{v}$. Com isso, o campo vetorial é denotado *gerador infinitesimal* da ação do grupo, ou seja, $\mathbf{v}$ é o gerador infinitesimal do grupo de transformação de Lie a um-parâmetro. Para encontrarmos o grupo a um parâmetro (ou fluxo) gerado por um campo vetorial $\mathbf{v}$ fazemos a *exponenciação* do campo vetorial, através de

$$\exp(\epsilon\mathbf{v})x \equiv \Psi(\epsilon, x). \tag{2.12}$$

Exemplos:

- Para um $x \in M$, onde $M = \mathbb{R}$. Um campo vetorial $\partial/\partial x$ produz

  $$\exp(\epsilon\mathbf{v})x = (1 + \epsilon\mathbf{v})x = x + \epsilon,$$

  onde desconsideramos os termos de ordem superior.

- Quando $M = \mathbb{R}^m$, o campo vetorial sobre M tem a forma $\mathbf{v}_a = \sum a_i \partial/\partial x_i$, onde $a = (a_1, ..., a_m)$ são os coeficientes de $\mathbf{v}$. Assim,

  $$\exp(\epsilon\mathbf{v}_a)x = (1 + \epsilon\mathbf{v}_a)x = x + \epsilon a, \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}^m.$$

- Grupo das rotações no plano: quando um ponto de coordenada (x, y) sofre uma rotação no plano por um ângulo ϵ ele torna-se um ponto de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$, tal que

  $$\tilde{x}(\epsilon; x, y) = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \qquad \tilde{y}(\epsilon; x, y) = x\sin\epsilon + y\cos\epsilon. \tag{2.13}$$

  Essas transformações formam o grupo das rotações, ou fluxo: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(\epsilon; (x, y))$. O campo vetorial que gera esse grupo tem a forma geral dada por:

  $$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2}\xi_i(x, y)\frac{\partial}{\partial x_i} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.14}$$

  onde

  $$\xi(x, y) = \frac{d\tilde{x}}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = -y, \qquad \eta(x, y) = \frac{d\tilde{y}}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = x. \tag{2.15}$$

  Logo, $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ é o gerador infinitesimal, onde $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$.

2.3 Álgebra de Lie

Vejamos alguns conceitos importantes antes de seguirmos para a definição de uma álgebra de Lie. Considerem uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$. Queremos saber como ela varia de acordo com o fluxo gerado pelo campo vetorial $\mathbf{v}$ sobre M. Em outras palavras, queremos saber de que forma $f(x)$ muda quando seu argumento são pontos $\tilde{x} \in M$, onde $\tilde{x} = \Psi(\epsilon, x)$, obtidos a partir da variação de ϵ. Para isso, calculamos a derivada de f em relação a ϵ:

$$\frac{d}{d\epsilon} f(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) = \sum_{i=1}^{m} \xi(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) = \mathbf{v}(f)(\exp(\epsilon\mathbf{v})x), \tag{2.16}$$

onde usamos a regra da cadeia. Usando esse resultado, podemos agora $f(\exp(\epsilon\mathbf{v})x)$como uma série de Taylor

$$f(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) = f(x) + \epsilon\mathbf{v}(f)(x) + O(\epsilon^2),$$

onde usamos

$$\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} f(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) = \sum_{i=1}^{m} \xi(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \mathbf{v}(f)(x).$$

Com a eq.(2.16) vemos que a função f sofre uma mudança infinitesimal sob o fluxo gerado pelo campo vetorial. Se continuarmos escrevendo essa série para outros termos

$$f(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) = f(x) + \epsilon\mathbf{v}(f)(x) + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbf{v}^2(f)(x) + ... + O(\epsilon^{k+1}), \tag{2.17}$$

onde $\mathbf{v}^2(f) = \mathbf{v}(\mathbf{v}(f))$ e se considerarmos que essa série converge, termos a *série de Lie*

$$f(\exp(\epsilon\mathbf{v})x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{v}^k(f)(x). \tag{2.18}$$

Podemos ainda escrever a série de Lie para o próprio fluxo

$$\exp(\epsilon\mathbf{v})x = x + \epsilon\xi(x) + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbf{v}^2(\xi)(x) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{v}^k(x). \tag{2.19}$$

Esses resultados também valem para funções f tais que $f : M \to \mathbb{R}^m$.

Campos vetoriais sobre um espaço M podem relacionar-se originando outros campos vetoriais. A mais importante dessas operações é dada pelos *colchetes de Lie* ou *comutadores*. Assim, sendo $f : M \to \mathbb{R}$, o comutador entre dois campos vetoriais $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ será

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{u}(f)) - \mathbf{u}(\mathbf{v}(f)). \tag{2.20}$$

O colchete de Lie tem as seguintes propriedades

Bilinearidade: Sendo os campos vetoriais $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$, e as constantes a e a', temos

$$[a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}', \mathbf{u}] = a[\mathbf{v}, \mathbf{u}] + a'[\mathbf{v}', \mathbf{u}], \qquad [\mathbf{v}, a\mathbf{u} + a'\mathbf{u}'] = a[\mathbf{v}, \mathbf{u}] + a'[\mathbf{v}, \mathbf{u}']. \tag{2.21}$$

Anti-simetria: $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$=-[$\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$].

Identidade de Jacobi: $[\mathbf{w},[\mathbf{v},\mathbf{u}]]+[\mathbf{u},[\mathbf{w},\mathbf{v}]]+[\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{w}]]=0$.

Os geradores infinitesimais de grupos de transformação de Lie a um-parâmetro, ou seja, os campos vetoriais, formam um espaço vetorial, denotado por $\mathfrak{g}$, satisfazendo as propriedades de bilinearidade, anti-simetria e identidade de Jacobi. Esse espaço vetorial é a *álgebra de Lie* do grupo de Lie G em questão.

Teorema 1. *O comutador de quaisquer dois geradores infinitesimais de um grupo de transformações de Lie é também um gerador infinitesimal, dado por*

$$[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j] = c_{ij}^k \boldsymbol{v}_k, \tag{2.22}$$

onde as constantes c_{ij}^k são chamadas de constantes de estrutura.

Mais formalmente uma álgebra de Lie é definida como:

Definição 6. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial, onde o comutador é a lei de combinação dos elementos de $\mathfrak{g}$, satisfazendo as propriedades de anti-simetria e identidade de Jacobi, com a comutação sendo uma operação fechada.*

Além de serem aplicados a grupo de transformação a um-parâmetro, esses conceitos são válidos para grupos a $r-$parâmetro. O conjunto dos geradores infinitesimais de um grupo de Lie G formam a base da álgebra $\mathfrak{g}$ de Lie.

Definição 7. *Um subespaço $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ é chamado uma* subálgebra *da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se para qualquer $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \in \mathfrak{h}$ o comutador $[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j] \in \mathfrak{h}$.*

2.4 Grupos e simetria de equações diferenciais

Estamos interessados em usar as simetrias de uma equação diferencial para obtermos suas soluções. Para isso, usaremos os conceitos das seções anteriores para obtermos transformações que possamos realizar nas variáveis dependentes e independentes das equações diferenciais que tenham a propriedade de transformar soluções do sistema de equações em outras soluções [16]. Essas transformações formam o chamado *grupo de simetria* do sistema. Antes de estudarmos essas transformações aplicadas às equações diferenciais, veremos alguns conceitos aplicados a equações algébricas, e que podem ser estendidos às equações diferenciais.

2.4.1 Simetrias de equações algébricas

Seja o seguinte sistema de equações algébricas

$$H_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1, ..., l,$$

onde $H_1(x), ..., H_l(x)$ são funções suaves reais definidas para x em um conjunto M. O ponto $x \in M$ é dito *solução* do sistema de equações acima, pois todas elas são satisfeitas nesse ponto, ou seja, iguais a zero. Consideremos agora um grupo de transformações locais G agindo sobre M, em que $g \in G$ e $g \cdot x \in M$. Então quando $g \cdot x \in M$ também é solução de H_ν dizemos que G é *grupo de simetria* do sistema, pois transforma soluções x em outras soluções $g \cdot x$.

Se G é um grupo de transformações locais agindo em M e é grupo de simetria de um subconjunto $\mathcal{M}$ de M, então $\mathcal{M}$ é dito *G-invariante* ou *subconjunto invariante*, isto é, $x \in \mathcal{M}$ e $g \in G$, tal que $g \cdot x \in \mathcal{M}$.

Exemplo 1. *Caso de uma translação de retas no plano. Sendo $M = \mathbb{R}^2$, o subconjunto $\mathcal{M}$ de pontos que formam as retas $y = cx + d$ é G-invariante quando G é o grupo de translações dado por*

$$\tilde{x} = x + \epsilon, \ \tilde{y} = y + c\epsilon,$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Agora considere dois conjuntos M e N, em que G é grupo de transformação local sobre M e exista uma função $\zeta : M \to N$. Dizemos que ζ é uma *função invariante*, ou simplesmente *invariante*, quando

$$\zeta(g \cdot x) = \zeta(x),$$

para $x, g \cdot x \in M$ e $g \in G$. Um caso particular ocorre quando $N = \mathbb{R}$ em que a função real $\zeta : M \to \mathbb{R}$ é invariante de G.

Exemplo 2. *De acordo com o Exemplo 1, a função*

$$\zeta(x, y) = y - cx = d$$

é um invariante sob G, visto que

$$\zeta(x + \epsilon, y + c\epsilon) = \zeta(x, y).$$

Mas a condição necessária e suficiente para que uma função seja invariante segue na proposição abaixo:

Proposição 1. *Seja G um grupo de transformações agindo na variedade M. Uma função real $\zeta : M \to \mathbb{R}$ é uma função invariante para G se e somente se*

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0 \text{ } \textit{para todo } x \in M,$$

e para todo gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ *de G.*

Essa proposição significa que a função $\zeta(x)$ é um invariante se e somente se $\mathbf{v}_k(\zeta) = 0$ para $k = 1, ..., r$. Em outras palavras, para que ζ seja um invariante ela deve ser solução do sistema de equações diferenciais parciais lineares homogêneas de primeira ordem dado por

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = 0.$$

Para encontrarmos esses invariantes consideremos um gerador infinitesimal associado a um grupo de transformação a um-parâmetro G sobre M, tal que para a função ζ invariante de G, temos

$$\mathbf{v}(\zeta) = \xi_1(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + ... + \xi_m(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x_m} = 0. \tag{2.23}$$

A partir da teoria das EDPs, a solução geral dessa pode ser obtida através da integração do correspondente *sistema característico* de EDOs, dado por

$$\frac{dx_1}{d\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{d\xi_2(x)} = ... = \frac{dx_m}{d\xi_m(x)}. \tag{2.24}$$

As soluções desse sistema tomam a forma

$$\zeta_1(x_1, ..., x_m) = c_1, \quad \zeta_2(x_2, ..., x_m) = c_2, \quad ..., \quad \zeta_{m-1}(x_1, ..., x_m) = c_{m-1},$$

onde os c_i são constantes de integração e os $\zeta_i(x)$ são funções que dependem apenas de x. Portanto, as funções $\zeta_1, ..., \zeta_{m-1}$ são as soluções funcionalmente independentes da eq.(2.23). Outras soluções da (2.23) que dependem funcionalmente das funções $\zeta_1, ..., \zeta_{m-1}$ também são invariantes.

Exemplo 3. *Consideremos $G = SO(2)$ o grupo de rotações no plano com o gerador infinitesimal $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$. O sistema característico para esse caso será*

$$\frac{\partial x}{y} = -\frac{\partial y}{x}.$$

Integrando essa equação obtemos $x^2 + y^2 = c$, onde c é uma constante de integração. Portanto, $\zeta(x, y) = x^2 + y^2$ é o único invariante independente do grupo de rotação; qualquer outro invariante do grupo de rotação será função desse $\zeta(x, y)$.

2.4.2 Sistemas de equações diferenciais

Agora iremos aplicar os conceitos da seção anterior para sistemas de equações diferenciais. Vamos representar por $\mathcal{S}$ um sistema de equações diferenciais com p variáveis independentes, representadas por $x = (x_1, ..., x_p)$, e q variáveis dependentes, representadas por $u = (u_1, ..., u_q)$. O ponto x pertence ao espaço das variáveis independentes $X = \mathbb{R}^p$, enquanto $u = (u_1, ..., u_q) \in U$, onde $U = \mathbb{R}^q$ é o espaço das variáveis dependentes. Sendo $X \times U$ um espaço das variáveis dependentes e independentes, dizemos que um *grupo de simetria* de $\mathcal{S}$ será um grupo G de transformações locais agindo em um subconjunto aberto

$M{\subset}X{\times}U$ tal que G transforma soluções do sistema em outras soluções [16]. Ou seja, se as soluções de $\mathcal{S}$ são dadas por $u = f(x)$ e $g{\cdot}f(x)$ é definido, então $u = g{\cdot}f$ também é uma solução, onde $g{\in}G$.

Vejamos como um grupo de Lie G age sobre uma solução $u = f(x)$ transformando-a em outra solução $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ através de um exemplo. Consideremos uma equação diferencial com uma variável independente x e uma variável dependente u, em que $X = \mathbb{R}$ e $U = \mathbb{R}$, cuja solução será dada por $u = f(x)$. Vamos escolher o grupo das rotações $SO(3)$ como o grupo que vai agir sobre um subconjunto $M{\subset}X{\times}U{=}\mathbb{R}^2$, tal que

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta{\cdot}(x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta).$$

onde $\theta{\in}G$. Se a solução é especificada por $u = f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes, a ação de G sobre $(x, u) = (x, ax + b)$ resultará em

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = (x\cos\theta - (ax + b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax + b)\cos\theta),$$

onde $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Agora

$$\tilde{x} = x\cos\theta - ax\sin\theta - b\sin\theta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}.$$

Assim,

$$ax + b = \frac{a\tilde{x} + b\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta}. \tag{2.25}$$

2.4.2.1 Prolongações

Nas seções anteriores vimos como encontrar o grupo das transformações realizadas nas variáveis dependentes e independentes. No contexto das equações diferenciais precisamos encontrar ainda as transformações a serem realizadas nas derivadas das variáveis dependentes.

Como sabemos, X e U são, respectivamente espaço das variáveis independentes e das variáveis dependentes. Vimos que os grupos agem em $M{\subset}X{\times}U$ transformando pontos de (x, u) em pontos de $(\tilde{x}, \tilde{u})$, onde $x = (x_1, ..., x_p)$ e $u = (u_1, ..., u_q)$, como foi dito no início desta seção. Agora, com derivadas de ordem n que podem estar contidas numa equação diferencial, fazemos o grupo agir num espaço que além de conter as variáveis dependentes e independentes contém ainda as derivadas das variáveis dependentes. Esse espaço, chamado *espaço de jato* do espaço fundamental $X{\times}U$, é representado por [16]

$$M^{(n)} = X{\times}U{\times}U_1{\times}U_2{\times}\ldots{\times}U_n, \tag{2.26}$$

onde U_1 é o espaço cujas componentes são (u_x), formado pelas derivadas de primeira ordem das variáveis dependentes com relação às independentes, U_2 é o espaço formado pelas derivadas de segunda ordem das variáveis dependentes com relação às independentes, onde seus pontos têm coordenadas (u_{xx}), e assim por diante. Um ponto do espaço de jato tem as coordenadas

$$(x, u^{(n)}) = (x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, ...)$$

As transformações a serem realizadas nas derivadas promovem as chamadas *prolongações* do grupo de transformações (ou melhor, prolongação da ação do grupo G sobre M), simbolizadas por $\mathrm{pr}^{(n)}G$, onde n indica a ordem da equação. Essa prolongação também se refletem nos campos vetoriais que geram tal grupo, que são as *transformações infinitesimais prolongadas* [7], ou a prolongação dos campos vetoriais, denotadas por $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$. O grupo que age sobre o espaço de jato é chamado de grupo prolongado porque além das transformações que realizamos nas variáveis dependentes e independentes esse grupo contém as transformações a serem realizadas sobre as derivadas. Iremos explicar esse processo ilustrando para o caso de uma EDO, e em seguida para uma EDP.

Vamos considerar uma EDO de ordem n com uma variável independente x e uma dependente u, dada de forma genérica por [10]

$$H(x, u, u_x, u_{xx}, ...) = 0, \tag{2.27}$$

onde u_x é a derivada de primeira ordem em relação a x, e assim por diante. As transformações a um-parâmetro realizadas sobre as variáveis x e u são dadas como transformações infinitesimais por

$$\tilde{x}(\epsilon; x, u) = x + \epsilon\xi(x, u) + ... = x + \epsilon\mathbf{v}x + ..., \qquad \xi = \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} \tag{2.28}$$

$$\tilde{u}(\epsilon; x, u) = u + \epsilon\phi(x, u) + ... = u + \epsilon\mathbf{v}u + ..., \qquad \phi = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}. \tag{2.29}$$

Com isso, o campo vetorial que gera essas transformações tem a expressão

$$\mathbf{v} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.30}$$

Contudo, estamos mais interessados em obter as transformações infinitesimais prolongadas, para obtermos a expressão de $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$, dadas por

$$\tilde{u}_x = u_x + \epsilon\phi^1(x, u, u_x) + ... = u_x + \epsilon\mathbf{v}u_x + ... \tag{2.31}$$

$$\tilde{u}_{(n)} = u_{(n)} + \epsilon\phi^n(x, u, u_x, ...) + ... = u_{(n)} + \epsilon\mathbf{v}u_{(n)} + ... \tag{2.32}$$

onde $\tilde{u}_{(n)}$ é a derivada de ordem n de $\tilde{u}$ em relação a $\tilde{x}$ e $u_{(n)}$ é a derivada de ordem n de u em relação a x. Agora, precisamos obter as expressões para ϕ^1, ϕ^2,...,ϕ^n, que poderão ser encontradas ao calcularmos

$$\tilde{u}_x = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}, \qquad \tilde{u}_{xx} = \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2}, \qquad \text{etc.} \tag{2.33}$$

Da a primeira das eq.(2.33), vejamos que

$$d\tilde{u} = du + \epsilon d\phi + ... = \left[\frac{du}{dx} + \epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)\right]dx, \tag{2.34}$$

$$d\tilde{x} = dx + \epsilon d\xi + ... = \left[1 + \epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)\right]dx. \tag{2.35}$$

Agora introduzimos os operadores D/Dx, dados por

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + ... \tag{2.36}$$

chamados de *derivadas totais*. Escrevendo $u_x = du/dx$, temos

$$d\tilde{u} = \left(\frac{du}{dx} + \epsilon \frac{D\phi}{Dx} \right) dx, \qquad d\tilde{x} = \left(1 + \epsilon \frac{D\xi}{Dx} \right) dx. \tag{2.37}$$

Assim,

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = \left(u_x + \epsilon \frac{D\phi}{Dx} + ... \right) \left(1 - \epsilon \frac{D\xi}{Dx} + ... \right) = u_x + \epsilon \left(\frac{D\phi}{Dx} - u_x \frac{D\xi}{Dx} \right) = u_x + \epsilon \phi^x + ..., \tag{2.38}$$

onde

$$\phi^x = \frac{D\phi}{Dx} - u_x \frac{D\xi}{Dx}. \tag{2.39}$$

Com isso, a prolongação do campo vetorial é dada por

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \xi(x,u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x,u) \frac{\partial}{\partial u} + \phi^x(x,u,u_x) \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{xx}(x,u,u_x,u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + ..., \tag{2.40}$$

onde ξ, ϕ e ϕ^x são dados pelas eq.(2.28), (2.29) e (2.39). Os outros coeficientes ϕ^{xx}, ϕ^{xxx},..., podem ser obtidos a partir da eq.(2.39), em que

$$\phi^{xx} = \frac{D\phi^x}{Dx} - u_{xx} \frac{D\xi}{Dx}, \qquad \phi^{xxx} = \frac{D\phi^{xx}}{Dx} - u_{xxx} \frac{D\xi}{Dx}, \qquad ... \tag{2.41}$$

Agora consideremos um sistema de l equações diferenciais parciais dado por [10]

$$H_\nu(x^r, u^\alpha, u^\alpha_r, u^\alpha_{rs}, ...) = 0, \qquad \nu = 1, ..., l \tag{2.42}$$

com p variáveis independentes x^r, com q variáveis dependentes u^α e suas derivadas dadas por

$$u^\alpha_r = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^r}, \qquad u^\alpha_{rs} = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^r \partial x^s}, \qquad \text{etc.}, \tag{2.43}$$

onde $r, s = 1, ..., p$ e $\alpha = 1, ..., q$. Veja que agora os índices sobrescritos indicam a variável em questão, por exemplo $x^1 = x$, $x^2 = t$. E o índice subscrito indica a variável com relação à qual a derivada está sendo tomada, por exemplo: se tivermos uma EDP com duas variáveis independentes $x^1 = x$, $x^2 = t$ e uma variável dependente $u^1 = u(x,t)$ – pois $\alpha = 1$ –, então $u^1_1 = u_{x_1} = u_x$, $u^1_2 = u_t$, $u^1_{12} = u_{xt}$, e assim por diante.

Vamos considerar que as variáveis independentes e dependentes satisfazem a uma transformação dada por

$$\tilde{x}^r = \tilde{x}^r(\epsilon; x^i, u^\beta), \qquad \tilde{u}^\alpha = \tilde{u}^\alpha(\epsilon; x^i, u^\beta), \tag{2.44}$$

com $i = 1, ..., p$ e $\beta = 1, ..., q$, que depende de um parâmetro ϵ tal que essas transformações formam um grupo, com $\tilde{u}^\alpha = u^\alpha$ e $\tilde{x}^r = x^r$ para $\epsilon = 0$ (é importante ressaltar que o desenvolvimento desta seção também se aplica a grupos de transformação a um número qualquer de parâmetros). A correspondente transformação infinitesimal será

$$\tilde{x}^r = x^r + \epsilon\xi^r(x^i, u^\beta) + ..., \qquad \xi^r = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \tag{2.45}$$

$$\tilde{u}^\alpha = u^\alpha + \epsilon\phi^\alpha(x^i, u^\beta) + ..., \qquad \phi^\alpha = \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}, \tag{2.46}$$

e é gerada por

$$\mathbf{v} = \sum_{r=1}^{p} \xi^r(x^i, u^\beta)\frac{\partial}{\partial x^r} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi^\alpha(x^i, u^\beta)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{2.47}$$

Temos que estender as transformações e o gerador para as derivadas das variáveis dependentes, de onde obtemos

$$\tilde{u}_r^\alpha \equiv \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial \tilde{x}^r}, \qquad \tilde{u}_{rs}^\alpha \equiv \frac{\partial^2 \tilde{u}^\alpha}{\partial \tilde{x}^r \partial \tilde{x}^s}, \qquad \text{etc.} \tag{2.48}$$

Para obtermos a extensão do gerador $\mathbf{v}$, começamos a analisar a transformação infinitesimal da primeira das equações (2.48)

$$\tilde{u}_r^\alpha = u_r^\alpha + \epsilon\phi_r^\alpha + ..., \qquad \phi_r^\alpha \equiv \frac{\partial \tilde{u}_r^\alpha}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}. \tag{2.49}$$

A expressão para ϕ_r^α é obtida por meio de

$$d\tilde{u}^\alpha = du^\alpha + \epsilon d\phi^\alpha + ... = \left[\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} + \epsilon\left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right)\right] dx^i + ..., \tag{2.50}$$

$$d\tilde{x}^r = dx^r + \epsilon d\xi^r + ... = \left[\delta_s^r + \epsilon\left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x^s} + \frac{\partial \xi^n}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^s}\right)\right] dx^s + ... \tag{2.51}$$

Agora aplicamos as derivadas totais, D/Dx^r, dadas por

$$\frac{D}{Dx^r} = \frac{\partial}{\partial x^r} + u_r^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{rs}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_s^\alpha} + ... \tag{2.52}$$

substituindo-a nas eq.(2.50) e (2.51), tal que

$$d\tilde{u}^\alpha = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} + \epsilon\frac{D\phi^\alpha}{Dx^i}\right) dx^i + ..., \tag{2.53}$$

$$d\tilde{x}^r = \left(\delta_s^r + \epsilon\frac{D\xi^r}{Dx^s}\right) dx^s + ... \tag{2.54}$$

Usando esses resultados, a primeira das eq.(2.48) será

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial \tilde{x}^r} = \frac{u_i^\alpha + \epsilon\frac{D\phi^\alpha}{Dx^i} + ...}{\delta_s^r + \epsilon\frac{D\xi^r}{Dx^s} + ...}\delta_s^i &= \left(u_i^\alpha + \epsilon\frac{D\phi^\alpha}{Dx^i} + ...\right)\left(\delta_s^r - \epsilon\frac{D\xi^i}{Dx^r} + ...\right) \\ &= u_r^\alpha + \epsilon\frac{D\phi^\alpha}{Dx^r} - \epsilon u_i^\alpha \frac{D\xi^i}{Dx^r} + ... \end{aligned} \tag{2.55}$$

Comparando essa equação com a eq(2.49) vemos que ϕ_r^α é dado por

$$\phi_r^\alpha = \frac{D\phi^\alpha}{Dx^r} - u_i^\alpha \frac{D\xi^i}{Dx^r} = \frac{D}{Dx^r}(\phi^\alpha - u_i^\alpha \xi^i) + \xi^i u_{ir}^\alpha. \tag{2.56}$$

Com isso, a $n-$ésima prolongação do campo vetorial será

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \xi^r\frac{\partial}{\partial x^r} + \phi^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \phi^\alpha_r\frac{\partial}{\partial u^\alpha_r} + \phi^\alpha_{rs}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{rs}} + \phi^\alpha_{rsv}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{rsv}} + ... \tag{2.57}$$

De maneira ilustrativa, podemos ver que se temos uma EDP de $n-$ésima ordem com duas variáveis independentes, $x^1 = x$ e $x^2 = t$, e uma variável dependente, $u^1 = u(x,t)$, a $n-$ésima prolongação será

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \xi^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\phi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\phi^1_1\frac{\partial}{\partial u^1_1}+\phi^1_2\frac{\partial}{\partial u^1_2}+\phi^1_{11}\frac{\partial}{\partial u^1_{11}}+\phi^1_{12}\frac{\partial}{\partial u^1_{12}}+\phi^1_{21}\frac{\partial}{\partial u^1_{21}}+\phi^1_{22}\frac{\partial}{\partial u^1_{22}}+...$$

Substituindo $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \tau$, $\phi^1 = \phi$, e assim por diante, temos

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial t}+\phi\frac{\partial}{\partial u}+\phi^x\frac{\partial}{\partial u_x}+\phi^t\frac{\partial}{\partial u_t}+\phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}+\phi^{tx}\frac{\partial}{\partial u_{tx}}+\phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}+... \tag{2.58}$$

Os termos $\phi^1_1 = \phi_x$, $\phi^1_2 = \phi_t$,..., foram reescritos na forma ϕ^x, ϕ^x,..., para que não houvesse confusão da expressão ϕ_x com $\partial\phi/\partial x$.

Retornando à eq.(2.47), os coeficientes ϕ^α_{rs}, ϕ^α_{rsv},... podem ser obtidos da mesma forma que ϕ^α_r

$$\phi^\alpha_{rs} = \frac{D\phi^\alpha_r}{Dx^s} - u^\alpha_{ri}\frac{D\xi^i}{Dx^s}, \qquad \phi^\alpha_{rsv} = \frac{D\phi^\alpha_{rs}}{Dx^v} - u^\alpha_{rsi}\frac{D\xi^i}{Dx^v}, \qquad ... \tag{2.59}$$

Agora que sabemos como calcular as prolongações do campo vetorial para EDOs e EDPs, vamos enunciar o *critério infinitesimal de invariância* [16], que às vezes é chamando de condição de simetria. Com ele poderemos encontrar o grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais e com isso procurar por seus invariantes, o que nos leva a uma solução do sistema.

Teorema 2 (Critério de invariância infinitesimal). *Seja um sistema de equações diferenciais $H_\nu(x, u^{(n)}) = 0$, com $\nu = 1, ..., l$, definido sobre $M\subset X\times U$. Se G é um grupo de transformações local agindo em M e vale que $pr^{(n)}\boldsymbol{v}[H_\nu(x, u^{(n)})] = 0$ sempre que $H_\nu(x, u^{(n)}) = 0$ para todo gerador infinitesimal $\boldsymbol{v}$ de G, então G é um grupo de simetria do sistema.*

Agora ilustraremos esse método para o caso de uma EDP de segunda ordem.

2.5 Ilustrando o método: Equação do calor

Nessa seção usaremos o critério de invariância infinitesimal para obtermos os coeficientes do campo vetorial **v** e, por consequência, o grupo de simetria mais geral da equação diferencial de interesse [16]. Para isso usaremos o exemplo da equação de calor em uma haste unidimensional, dada por

$$u_t = u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.60}$$

Seguiremos a sequência de passos abaixo:

- veja que os coeficientes ξ^r e ϕ^α do gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ são funções de x^i e u^β, como pode ser visto na eq.(2.47);

- por sua vez, os coeficientes ϕ^α_r, ϕ^α_{rs},..., da prolongação $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ são funções das derivadas de ξ^r e ϕ^α, como nas eq.(2.56) e (2.59);

- aplicando o critério de invariância (Teorema 2), em que $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}[H_\nu(x^i, u^\beta)] = 0$ sempre que $H_\nu(x^i, u^\beta)$, teremos uma equação formada por produtos entre derivadas de u^β em relação a x^i e derivadas de ξ^r e ϕ^α em relação a x^i e a u^β;

- em seguida, iremos agrupar os coeficientes dos produtos ou potencias das derivadas de u e igualá-los a zero;

- as equações formadas por esses coeficientes igualados a zero são chamadas de *equações definidoras*, e podem ser facilmente resolvidas. Através delas encontraremos as expressões para os coeficientes de $\mathbf{v}$, por meio dos quais é possível encontrar transformações que reduzem a EDP em uma EDO.

Vamos iniciar escrevendo o campo vetorial para esse caso, dado por

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.61}$$

Como estamos lidando com uma equação de segunda ordem a prolongação do campo vetorial é dada por

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}. \tag{2.62}$$

Utilizar o critério infinitesimal de invariância vamos aplicar a prolongação à eq.(2.60):

$$pr^{(2)}\mathbf{v}[H(x,t,u^{(2)})] = 0 \quad \text{sempre que} \quad H(x,t,u^{(2)}) = 0,$$

onde $H(x,t,u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0$. Seguindo esses passos, obtemos

$$pr^{(2)}\mathbf{v}[H(x,t,u^{(2)})] = pr^{(2)}\mathbf{v}[u_t - u_{xx}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi^t = \phi^{xx}, \tag{2.63}$$

de modo que esse resultado deve ser satisfeito sempre que $u_t - u_{xx} = 0$.

Visto que ϕ^t e ϕ^{xx} são coeficientes da prolongação, podemos obtê-los usando as eq.(2.39), trocando x por t, e (2.41). Assim,

$$\phi^t = \frac{D\phi}{Dt} - u_x\frac{D\xi}{Dt} - u_t\frac{D\tau}{Dt} \quad \text{e} \quad \phi^{xx} = \frac{D\phi^x}{Dx} - u_{xx}\frac{D\xi}{Dx} - u_{xt}\frac{D\tau}{Dt},$$

que são obtidas de forma detalhada no Apêndice A e dadas, respectivamente, por

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - (u_t)^2\tau_u. \tag{2.64}$$

$$\phi^{xx} = \phi_{xx} + (2\phi_{ux} - \xi_{xx})u_x + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} + (\phi_{uu} - 2\xi_{ux})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 - 3\xi_u u_x u_{xx} \\ - \tau_{xx}u_t - 2\tau_{ux}u_t u_x - \tau_{uu}u_t u_x^2 - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \quad (2.65)$$

Com isso a reescrevemos a eq.(2.63) na forma

$$\phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 = \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\ - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \quad (2.66)$$

Substituindo u_t por u_{xx} na equação, obtemos

$$\phi_t - \phi_{xx} + (\xi_{xx} - \xi_t - 2\phi_{xu})u_x + (2\xi_{xu} - \phi_{uu})u_x^2 + (\xi_{uu})u_x^3 + (\phi_u - \tau_t + \tau_{xx} - \phi_u + 2\xi_x)u_{xx} \\ + (-\tau_u + \tau_u)u_{xx}^2 + (2\tau_x)u_{xt} + (2\tau_{xu} - \xi_u + 3\xi_u)u_x u_{xx} + (\tau_{uu})u_x^2 u_{xx} + (2\tau_u)u_x u_{xt} = 0. \quad (2.67)$$

Para que a equação acima seja satisfeita cada um dos coeficientes das derivadas de u e seus produtos devem ser iguais a zero:

Derivadas de u	Coeficientes nulos	Derivadas de u	Coeficientes nulos
1	$\phi_t - \phi_{xx} = 0$	u_{xx}^2	$-\tau_u + \tau_u = 0$
u_x	$\xi_{xx} - 2\phi_{xu} - \xi_t = 0$	u_{xt}	$2\tau_x = 0$
u_x^2	$2\xi_{xu} - \phi_{uu} = 0$	$u_x u_{xx}$	$2\tau_{xu} - \xi_u + 3\xi_u = 0$
u_x^3	$\xi_{uu} = 0$	$u_x^2 u_{xx}$	$\tau_{uu} = 0$
u_{xx}	$\phi_u - \tau_t + \tau_{xx} - \phi_u + 2\xi_x = 0$	$u_x u_{xt}$	$2\tau_u = 0$

As dez equações acima são facilmente resolvidas, de modo que poderemos encontrar as expressões para ξ, τ e ϕ. Vejamos inicialmente que

$$\tau_u = 0 \quad \text{e} \quad \tau_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau(t), \quad (2.68)$$

e τ depende apenas de t. Para a equação correspondente ao coeficiente $u_x u_{xx}$ temos

$$-\xi_u = -3\xi_u - 2\tau_{xu} \quad \Rightarrow \quad \xi_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \xi(x,t), \quad (2.69)$$

onde usamos o fato de que $\tau = \tau(t)$ fazendo com que $\tau_{xu} = 0$ e que ξ é função de x e t. Com o coeficiente de u_{xx} notamos que

$$-\tau_t = -\tau_{xx} - 2\xi_x \quad \Rightarrow \quad \tau_t(t) = 2\xi_x(x,t).$$

Integrando essa equação, resulta que

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}x\tau_t(t) + \gamma(t) \quad (2.70)$$

sendo γ uma função de t que resulta da integração em x. Com a equação do coeficiente u_x^2,

$$\phi_{uu} = 2\xi_{xu},$$

vemos que $\phi_{uu} = 0$, pois ξ não depende de u e $\xi_{xu} = 0$. Integrando $\phi_{uu} = 0$ duas vezes, temos

$$\phi_u(x,t,u) = \omega(x,t) \quad \Rightarrow \quad \phi(x,t,u) = \omega(x,t,u)u + \mu(x,t). \tag{2.71}$$

Usando as eq.(2.70) e eq.(2.71), vemos que

$$\xi_{xx} = 0, \quad \xi_t = \frac{1}{2}x\tau_{tt}(t) + \gamma_t(t), \quad \phi_{xu} = \omega_x, \tag{2.72}$$

e reescrevemos equação para o coeficiente de u_x

$$-2\omega_x = \frac{1}{2}x\tau_{tt}(t) + \gamma_t. \tag{2.73}$$

Integrando obtemos

$$\omega(x,t) = -\frac{1}{8}x^2\tau_{tt}(t) - \frac{1}{2}x\gamma_t(t) + \rho(t). \tag{2.74}$$

Usando as eq.(2.71) e eq.(2.74) e efetuando algumas derivações obtemos

$$\phi_t = -\frac{1}{8}x^2u\tau_{ttt} - \frac{1}{2}xu\gamma_{tt} + u\rho_t + \mu_t \quad \text{e} \quad \phi_{xx} = \frac{1}{4}u\tau_{tt} + \mu_{xx} \tag{2.75}$$

que serão substituídas na equação do coeficiente de ordem zero de u. Contudo veja ainda que da expressão para ϕ dada pela eq.(2.71) temos

$$\phi_t = \phi_{xx} \quad \Rightarrow \quad \omega_t u + \mu_t = \omega_{xx}u + \mu_{xx} \quad \Rightarrow \quad (\omega_t - \omega_{xx})u + \mu_t - \mu_{xx} = 0. \tag{2.76}$$

Igualando as potências de u a zero vemos que $\omega_t = \omega_{xx}$ e $\mu_t = \mu_{xx}$. Usando este resultado na primeira equação da eq.(2.75) e igualando as duas resulta

$$-\frac{1}{8}x^2\tau_{ttt} - \frac{1}{2}x\gamma_{tt} + \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}. \tag{2.77}$$

Agrupando os coeficientes da potências de x e igualando-os a zero, então

$$\tau_{ttt}(t) = 0, \qquad \gamma_{tt}(t) = 0, \qquad \rho_t(t) = -\frac{1}{4}\tau_{tt}(t). \tag{2.78}$$

Tomando a primeira dessas equações e integrando três vezes temos

$$\tau_{tt}(t) = A \quad \Rightarrow \quad \tau_t(t) = At + B \quad \Rightarrow \quad \tau(t) = \frac{A}{2}t^2 + Bt + C, \tag{2.79}$$

onde A, B e C são constantes de integração. Considerando as duas últimas equações de (2.78) obtemos

$$\gamma_t(t) = D \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = Dt + E \quad \text{e} \quad \rho_t(t) = -\frac{1}{4}A \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = -\frac{1}{4}At + F, \tag{2.80}$$

onde D, E e F são constantes de integração. Substituindo τ_{tt}, γ_t e ρ das eq.(2.79) e eq.(2.80) na eq.(2.74) resulta

$$\omega(x,t) = -\frac{1}{8}x^2A - \frac{1}{2}xD - \frac{1}{4}At + F \quad \text{ou} \quad \omega(x,t) = -a_6x^2 - a_5x - 2a_6t + a_3, \tag{2.81}$$

onde escrevemos as constantes como $A = 8a_6$, $D = 2a_5$ e $F = a_3$ por conveniência. Com isso, temos

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}Axt + \frac{1}{2}Bx + Dt + E \quad \text{ou} \quad \xi(x,t) = 4a_6xt + a_4x + 2a_5t + a_1, \tag{2.82}$$

onde novamente redefinimos as constantes $B = 4a_4$ e $E = a_1$. Para τ temos

$$\tau(t) = \frac{1}{2}At^2 + Bt + C \quad \text{ou} \quad \tau(t) = 4a_6t^2 + 2a_4 + a_2, \tag{2.83}$$

onde fizemos $C = a_2$. Por fim, usando esses resultados a expressão para ϕ será

$$\phi(x,t,u) = (a_3 - a_5x - 2a_6t - a_6t^2)u + \mu(x,t). \tag{2.84}$$

Logo, as transformações infinitesimais de simetria da equação de calor estão representadas no gerador por

$$\mathbf{v} = (a_1+a_4x+2a_5t+4a_6xt)\frac{\partial}{\partial x}+(a_2+2a_4+4a_6t^2)\frac{\partial}{\partial t}+[(a_3-a_5x-2a_6t-a_6x^2)u+\mu(x,t)], \tag{2.85}$$

onde μ é uma solução arbitrária da equação de calor. Para obtermos todos os geradores independentes que formam a álgebra de Lie das simetrias iremos considerar que todas as constantes em $\mathbf{v}$ se anulem, exceto uma. Fazendo isso para cada uma das constantes não nulas obteremos seis campos vetoriais independentes mais um campo que corresponde a uma subálgebra, dados na tabela abaixo:

Constantes	Geradores
$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_1 = 1$ e $\mu = 0$	$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$
$a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_2 = 1$ e $\mu = 0$	$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$
$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_3 = 1$ e $\mu = 0$	$\mathbf{v}_3 = u\frac{\partial}{\partial u}$
$a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$, $a_4 = 1$ e $\mu = 0$	$\mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0$, $a_5 = 1$ e $\mu = 0$	$\mathbf{v}_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = 1$ e $\mu = 0$	$\mathbf{v}_6 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u}$
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mu = \mu(x,t)\frac{\partial}{\partial u}$

Poderíamos prosseguir com a análise das propriedades algébricas desses resultados, contudo estamos mais interessados, por ora, nas expressões desses campos: através delas poderemos escrever o sistema característico que, por sua vez, levar-nos à função invariante.

Para o gerador $\mathbf{v}_4$ o sistema característico será

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}. \tag{2.86}$$

Ao integrarmos, teremos apenas um invariante, e ele será dado pela constante de integração:

$$\ln x = \ln t^{1/2} + c, \qquad \zeta(x,t) = xt^{-1/2}, \tag{2.87}$$

onde $\zeta(x,t)$ é o invariante. Com isso, a solução u da equação de calor é uma função que depende de x e t através de ζ

$$u(x,t) = f(\zeta) = f(xt^{-1/2}). \tag{2.88}$$

Vamos reescrever u_t e u_{xx} em termos de $f(\zeta)$

$$u_t = -\frac{1}{2}\frac{\zeta}{t}\frac{df}{d\zeta} \qquad u_{xx} = \frac{1}{t}\frac{df}{d\zeta}$$

pois $\partial\zeta/\partial t = -\zeta/2t$ e $\partial\zeta/\partial x = t^{-1/2}$. Escrevendo $df/d\zeta = f_\zeta$, temos

$$\frac{1}{t}f_{\zeta\zeta} = -\frac{1}{2}\frac{\zeta}{t}f_\zeta \quad \Rightarrow \quad f_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2}\zeta f_\zeta = 0. \tag{2.89}$$

Vemos que com esse procedimento conseguimos reduzir uma EDP a uma EDO.

3 Equação KdV com dispersão não-linear

Como já mencionado na introdução, estamos interessados em estudar equações do tipo

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \tag{3.1}$$

por vezes chamadas de equações $K(m,n)$, que são equações com estrutura semelhante à KdV, mas que, para alguns valores de n, o termo de dispersão é não-linear, tornando a eq.(3.1) puramente não-linear. Como mencionado, o estudo dessas equações surgiu com o interesse em se compreender as regras que governam a formação de estruturas com extensão finita, como padrões de gotas [8].

Antes de estudarmos a eq.(3.1) é importante consideramos casos particulares em que $n = 1$, pois são casos em que a dispersão é linear.

3.1 Caso particular: $n = 1$

Quando $n = 1$, para qualquer m, a eq.(3.1) pode ser reescrita na forma [19]

$$u_t + mu^{m-1}u_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.2}$$

Essa equação também será representada por $H(x, t, u, u_x, u_t, ..., u_{xxx}) = 0$. Vamos usar o método descrito no capítulo 2 para obtermos suas soluções. Sendo assim, a primeira coisa que faremos é procurar os coeficientes de seu campo vetorial

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.3}$$

cuja forma prolongada será dada por

$$\mathrm{pr}^{(3)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \tag{3.4}$$

Usando o critério de invariância infinitesimal $\mathrm{pr}^{(3)}\mathbf{v}[H] = 0$, obtemos a equação

$$\phi^t + \phi^{xxx} + m\phi^x u^{m-1} + m(m-1)\phi u^{m-2}u_x = 0. \tag{3.5}$$

Como já vimos no capítulo anterior os coeficientes ϕ^t e ϕ^x são dados pelas equações (2.66) e (2.67). O coeficiente ϕ^{xxx} é obtido da mesma forma, sendo dado por

$$\begin{aligned}\phi^{xxx} &= \phi_{xxx} + (3\phi_{xxu} + \phi_{ux} - \xi_{xxx})u_x + (3\phi_{uux} + \phi_{uu} - 3\xi_{xxu} - \xi_{ux})u_x^2 + (\phi_u - 3\xi_x)u_{xxx} \\ &+(\phi_{uuu} - 3\xi_{uux} - \xi_{uu})u_x^3 + (2\phi_{ux} - 3\xi_{xx})u_{xx} + (2\phi_{uu} - 8\xi_{ux})u_x u_{xx} - 5\xi_{uu}u_x^2 u_{xx} - \xi_{uuu}u_x^4 - 4\xi_u u_x u_{xxx} \\ &- \tau_{xxx}u_t - 3\tau_{xxu}u_x u_t - 3\tau_{uux}u_x^2 u_t - 2\tau_{ux}u_{xx}u_t - 2\tau_{uu}u_x u_{xx}u_t - \tau_{uuu}u_x^3 u_t - \tau_u u_{xxx}u_t - \tau_{ux}u_x u_t \\ &- \tau_{uu}u_x^2 u_t - 3\xi_u u_{xx}^2 - 3\tau_{xx}u_{xt} - 6\tau_{xu}u_x u_{xt} - 3\tau_{uu}u_x^2 u_{xt} - 3\tau_u u_{xx}u_{xt} - 3\tau_x u_{xxt} - 3\tau_u u_x u_{xxt},\end{aligned} \tag{3.6}$$

que foi desenvolvido em detalhe no Apêndice A. Usando essas equações reescrevemos a eq.(3.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
\phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 + D_x^3\phi - u_x D_x^3\xi - u_t D_x^3\tau - 3u_{xx}D_x^2\xi - 3u_{xt}D_x^2\tau \\
- 3u_{xxx}D_x\xi - 3u_{xxt}D_x\tau + m\phi_x u^{m-1} + m(\phi_u - \xi_x)u^{m-1}u_x \\
- m\tau_x u^{m-1}u_t - m\xi_u u^{m-1}u_x^2 - m\tau_u u^{m-1}u_x u_t + m(m-1)\phi u^{m-2}u_x = 0.
\end{aligned}
$$

Agora escreveremos as derivadas totais na forma explícita (que também pode ser visto no Apêndice A) e substituiremos u_t por $-u_{xxx} - mu_x^{m-1}$, obtendo

$$
\begin{aligned}
\phi_t - \xi_t u_x + (\tau_t - \phi_u)u_{xxx} + m(\tau_t - \phi_u)u^{m-1}u_x + \xi_u u_x u_{xxx} + m\xi_u u^{m-1}u_x - \tau_u u_{xxx}^2 \\
- 2m\tau_u u^{m-1}u_x u_{xxx} - m^2\tau_u u^{2m-2}u_x^2 + \phi_{xxx} + 3\phi_{xxu}u_x + 3\phi_{uux}u_x^2 + 2\phi_{ux}u_{xx} + 2\phi_{uu}u_x u_{xx} \\
+ \phi_{uuu}u_x^3 + \phi_u u_{xxx} + \phi_{ux}u_x + \phi_{uu}u_x^2 - \xi_{xxx}u_x - (3\xi_{xxu} + \xi_{ux})u_x^2 - (3\xi_{uux} + \xi_{uu})u_x^3 \\
- \xi_{uuu}u_x^4 - 2\xi_{ux}u_x u_{xx} - 2\xi_{uu}u_x^2 u_{xx} - \xi_u u_x u_{xxx} + \tau_{xxx}u_{xxx} + (3\tau_{xxu} + \tau_{ux})u_x u_{xxx} \\
+ (3\tau_{uux} + \tau_{uu})u_x^2 u_{xxx} + 2\tau_{ux}u_{xx}u_{xxx} + 2\tau_{uu}u_x u_{xx}u_{xxx} + \tau_{uuu}u_x^3 u_{xxx} + \tau_u u_{xxx}^2 + m\tau_{xxx}u^{m-1}u_x \\
+ m(3\tau_{xxu} + \tau_{ux})u^{m-1}u_x^2 + m(3\tau_{uux} + \tau_{uu})u^{m-1}u_x^3 + 2m\tau_{ux}u^{m-1}u_x u_{xx} + 2m\tau_{uu}u^{m-1}u_x^2 u_{xx} \\
+ m\tau_{uuu}u^{m-1}u_x^4 + m\tau_u u^{m-1}u_x u_{xxx} - 3\xi_{xx}u_{xx} - 6\xi_{ux}u_x u_{xx} - 3\xi_{uu}u_x^2 u_{xx} - 3\xi_u u_{xx}^2 \\
- 3\tau_{xx}u_{xt} - 6\tau_{ux}u_x u_{xt} - 3\tau_{uu}u_x^2 u_{xt} - 3\tau_u u_{xx}u_{xt} - 3\xi_x u_{xxx} - 3\xi_u u_x u_{xxx} - 3\tau_x u_{xxt} \\
- 3\tau_u u_x u_{xxt} + m\phi_x u^{m-1} + m(\phi_u - \xi_x)u^{m-1}u_x + m\tau_x u^{m-1}u_{xxx} + m^2\tau_x u^{2m-2}u_x \\
- m\xi_u u^{m-1}u_x^2 - m\tau_u u^{m-1}u_x u_t + m(m-1)\phi u^{m-2}u_x = 0 \quad (3.7)
\end{aligned}
$$

Nosso objetivo agora é agrupar todos os termos com derivadas de u em relação a x e t, suas potências e produtos de derivadas e em seguida igualaremos seus coeficientes a zero, obtendo as equações definidoras. Vejamos um a um:

(a) Vamos considerar inicialmente a equação formada pelos coeficientes das potências $u^0 = 1$, ou seja, os coeficientes que não são multiplicados por potências de derivadas de u

$$\phi_t + mu^{m-1}\phi_x + \phi_{xxx} = 0. \quad (3.8)$$

(b) Os coeficientes de $u_{xx}u_{xt}$ u_{xxt} e $u_x u_{xxt}$ indicam que $\tau_x = 0$ e $\tau_u = 0$ não é função nem de x e nem de u, logo $\tau = \tau(t)$;

(c) O coeficiente de u_{xx}^2 é $\xi_u = 0$, o que significa que $\xi = \xi(x, t)$;

(d) Com essas considerações sobre τ e ξ podemos ver que o coeficiente de u_{xxx}, resulta na equação $\tau_t = 3\xi_x$, que pode ser integrada tal que

$$\xi(x, t) = \frac{1}{3}\tau_t(t)x + \alpha(t). \quad (3.9)$$

(e) Os coeficientes de $u_x u_{xx}$ e u_x^3 são, respectivamente, $\phi_{uu} = 0$ e $\phi_{uuu} = 0$;

(f) Tendo em vista a expressão que foi obtida para $\xi(x,t)$, o coeficiente de u_{xx} resulta na equação $\phi_{ux} = \frac{3}{2}\xi_{xx} = 0$. Integrando duas vezes, temos $\phi(t,u) = \beta(t)u + \gamma(t)$. Usando esses resultado na eq.(3.5) vemos facilmente que β e γ são constantes. Logo, a expressão para ϕ será

$$\phi(u) = au + b. \tag{3.10}$$

Visto que $\xi = \xi(x,t)$, $\phi = \phi(u)$ e $\tau = \tau(t)$, o coeficiente de u_x torna-se na equação

$$-\xi_t + m(\tau_t - \xi_x)u^{m-1} + m(m-1)u^{m-2}\phi = 0.$$

Usando as eq.(3.9) e (3.10), obtemos

$$-\frac{1}{3}\tau_{tt}x - \alpha_t(t) + m\left(\frac{2}{3}\tau_t + (m-1)a\right)u^{m-1} + m(m-1)bu^{m-2} = 0,$$

que resulta

$$-\alpha_t(t) + m\left(\frac{2}{3}\tau_t + (m-1)a\right)u^{m-1} + m(m-1)bu^{m-2} = 0. \tag{3.11}$$

Como o coeficiente de x é zero, temos

$$\tau_{tt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau(t) = ct + d, \tag{3.12}$$

onde c e d são constantes.

Com isso, o gerador infinitesimal terá os coeficientes

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}cx + \alpha(t)\right)\frac{\partial}{\partial x} + (ct+d)\frac{\partial}{\partial t} + (au+b)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.13}$$

Os valores das constantes e a expressão para α no gerador dependem dos valores de m. Vejamos para alguns casos usando a eq.(3.11).

Caso 1. *Para $m = 0$: os coeficientes das potências de u tornam-se todos nulos, incluindo $\alpha_t = 0$, de modo que $\alpha = cte. = a_1$. Logo,*

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}cx + a_1\right)\frac{\partial}{\partial x} + (ct+d)\frac{\partial}{\partial t} + (au+b)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.14}$$

Caso 2. *Para $m = 1$: a eq.(3.11) produzirá duas equações: $\tau_t = 0$ e $\alpha_t = 0$, que integradas resultam em constantes $\alpha = a_1$ e $\tau = a_2 = d$. O gerador será, portanto,*

$$\mathbf{v} = a_1\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial t} + (au+b)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.15}$$

Caso 3. *Para $m = 2$: temos*

$$\alpha_t(t) = 2b \quad e \quad \frac{2}{3}c + a = 0,$$

onde $\tau_t = c$. Assim, $\alpha(t) = 2bt + a_1$, onde a_3 é constante, e $a = -2c/3$. Logo,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}cx + 2bt + a_1\right)\frac{\partial}{\partial x} + (ct+d)\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{2}{3}cu + b\right)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.16}$$

Caso 4. *Para $m \neq 1, 2$: da eq.(3.11), obtemos*

$$\alpha_t = 0, \quad \frac{2}{3}\tau_t + (m-1)a = 0, \quad b = 0 = 0,$$

de onde obtemos $\alpha = a_1$ e $a = -2c/[3(m-1)]$, onde usamos $\tau_t = c$. Logo,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}cx + a_1\right)\frac{\partial}{\partial x} + (ct+d)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2c}{3(m-1)}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.17}$$

Vimos como obter os geradores infinitesimais para os casos em que $m = 0, 1, 2$ e m qualquer. Contudo, não vimos como usar esses geradores para obtermos as soluções das equações. Vejamos para o caso geral, isto é, para m qualquer, em que o gerador é dado pela eq.(3.13). Podemos escrever esse gerador de forma mais simples fazendo a seguinte escolha de suas constantes: $a_1 = a_2 = 0$ e $a_4 = 3$. Assim, o gerador que utilizaremos será

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{m-1}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.18}$$

Aplicando o gerador a essa equação podemos ver que, de fato, ela satisfaz a condição de invariância infinitesimal. Agora escrevemos o sistema característico

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3t} = -\frac{1}{2}(m-1)\frac{du}{u}.$$

O primeiro invariante é dado pela primeira equação do sistema

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3t} \quad \Rightarrow \quad \zeta(x,t) = xt^{-1/3}.$$

O próximo invariante é dado por

$$\frac{dt}{3t} = -\frac{1}{2}(m-1)\frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad v(\zeta) = ut^{\gamma}, \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{2}{3(m-1)},$$

onde x e t em u estão relacionados por ζ. Podemos reescrever a eq.(3.2) usando $u = t^{-\gamma}v$ e derivamos v em relação a ζ. Assim:

$$u_x = t^{-\gamma-1/3}v' \quad , \quad u_{xxx} = t^{-\gamma-1}v''' \quad , \quad u_t = t^{-\gamma-1}\left(-\gamma v - \frac{1}{3}\zeta v'\right),$$

onde usamos $\zeta_x = t^{-1/3}$ e $\zeta_t = -t^{-4/3}x/3$. Com isso, a eq.(3.2) será reduzida à seguinte EDO

$$v''' + mv^{m-1}v' - \frac{1}{3}\zeta v' - \gamma v = 0. \tag{3.19}$$

Essa é a equação que será reduzida da eq.(3.2) através do gerador de simetria dado por (3.18).

Observação 1. *Vejamos, em particular, que para o caso de $m = 3$, a eq.(3.19) será*

$$v''' + 3v^2v' - \frac{1}{3}\zeta v' - \frac{1}{3}v = 0,$$

pois $\gamma = 1/3$. Essa equação se reduz a uma equação Painlevé tipo-II, visto que

$$\frac{d}{d\zeta}v'' + \frac{d}{d\zeta}v^3 - \frac{1}{3}\frac{d}{d\zeta}(\zeta v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'' + v^3 - \frac{1}{3}(\zeta v) + \delta = 0,$$

onde δ é constante de integração.

Veja que nos quatro casos que vimos para $m = 0, 1, 2$ e $m \neq 1, 2$ é possível escolher constantes tais que tenhamos um gerador da forma

$$\mathbf{v} = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial t}.$$

Usando esse campo vetorial vamos procurar pelo invariante para obtermos uma equação mais simples de se resolvida. Do sistema característico, obtemos

$$\frac{dx}{\omega} = \frac{dt}{k} \qquad \Rightarrow \qquad \zeta(x,t) = kx - \omega t, \tag{3.20}$$

onde fizemos $a_1 = \omega$ e $d = k$. Portanto a solução será uma função

$$u(x,t) = f(\zeta) = f(kx - \omega t).$$

Para substituirmos essa solução na eq.(3.1) vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\omega f_\zeta, \qquad \frac{\partial u^m}{\partial x} = \frac{\partial f^m}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = k(f^m)_\zeta, \qquad \frac{\partial^3 u^n}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f^n}{\partial \zeta^3}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^3 = k^3 (f^n)_{\zeta\zeta\zeta}.$$

Sendo assim, como $n = 1$, a equação é escrita como

$$-\omega f_\zeta + k(f^m)_\zeta + k^3 f_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \tag{3.21}$$

Integrando essa equação, temos

$$-\omega f + k^3 f_{\zeta\zeta} + k f^m = \frac{1}{2}A,$$

onde A é constante de integração. Multiplicamos a equação por f_ζ e integramos, resultando

$$f_\zeta^2 = \frac{\omega}{k^3} f^2 + Af - \frac{2}{(m+1)k^2} f^{m+1} + B$$

onde B é constante. Integrando novamente temos a expressão

$$\int \frac{df}{\sqrt{Af + \frac{\omega}{k^3} f^2 - \frac{2}{(m+1)k^2} f^{m+1} + B}} = \zeta + C, \tag{3.22}$$

onde C é constante. A maior parte das soluções dessa equação são dadas na forma de funções elípticas.

3.2 Caso geral: Equação KdV completamente não-linear

Agora aplicaremos o método de simetria diretamente à eq.(3.1), para $n \neq 1$, [19]

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0.$$

O campo vetorial e sua prolongação são iguais ao do caso $n = 1$, dados pelas eq.(3.3) e (3.4). Usando o critério de invariância, onde

$$\mathrm{pr}^{(3)}[u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx}] = 0 \quad \text{sempre que} \quad u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \tag{3.23}$$

e escrevendo a eq.(3.1) na forma

$$u_t + mu^{m-1}u_x + n(n-1)(n-2)u^{n-3}u_x^3 + 3n(n-1)u^{n-2}u_xu_{xx} + nu^{n-1}u_{xxx} = 0, \quad (3.24)$$

temos a equação

$$\begin{aligned}\phi^t &+ n(n-1)(n-2)(n-3)\phi u^{n-4}u_x^3 + 3n(n-1)(n-2)\phi^x u^{n-3}u_x^2 + 3n(n-1)(n-2)\phi u^{n-3}u_xu_{xx} + \\ &+ 3n(n-1)\phi^x u^{n-2}u_{xx} + 3n(n-1)\phi^{xx}u^{n-2}u_x + n(n-1)\phi u^{n-2}u_{xxx} + n\phi^{xxx}u^{n-1} + \\ &+ m(m-1)\phi u^{m-2}u_x + m\phi^x u^{m-1} = 0\end{aligned}$$

Substituindo as expressões para ϕ^t, ϕ^x, ϕ^{xx} e ϕ^{xxx}, obtidas na seção anterior, e escrevendo $u_t = -(u^m)_x - (u^n)_{xxx}$, dada pela eq.(3.24), obtemos a equação:

$$\begin{aligned}
&\phi_t + (E\tau_t u^{m-1} - E\phi_u u^{m-1} - \xi_t)u_x + (E\xi_u u^{m-1} - E^2\tau_u u^{2m-2})u_x^2 + (A\tau_t u^{n-1} - A\phi_u u^{n-1})u_{xxx} \\
&+ (ABC\tau_t u^{n-3} - ABC\phi_u u^{n-3})u_x^3 + (ABC\xi_u u^{n-3} - 2ABCE\tau_u u^{m+n-4})u_x^4 + [-(ABC)^2\tau_u u^{2n-6}]u_x^6 \\
&+ [-6(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}]u_x^4u_{xx} + (-A^2\tau_u u^{2n-2})u_{xxx}^2 + (3AB\tau_t u^{n-2} - 3AB\phi_u u^{n-2})u_xu_{xx} \\
&+ (3AB\xi_u u^{n-2} - 6ABE\tau_u u^{m+n-3})u_x^2u_{xx} + (A\xi_u u^{n-1} - 2AE\tau_u u^{m+n-2})u_xu_{xxx} \\
&+ [-9(AB)^2\tau_u u^{2n-4}](u_xu_{xx})^2 + (-2A^2BC\tau_u u^{2n-4})u_x^3u_{xxx} \\
&+ (-6A^2B\tau_u u^{2n-3})u_xu_{xx}u_{xxx} + ABCD\phi u^{n-4}u_x^3 + 3ABC\phi u^{n-3}u_xu_{xx} + AB\phi u^{n-2}u_{xxx} + EF\phi u^{m-2}u_x \\
&+ 3ABC\phi_x u^{n-3}u_x^2 + 3ABC\phi_u u^{n-3}u_x^3 - 3ABC\xi_x u^{n-3}u_x^3 - 3ABC\xi_u u^{n-3}u_x^4 + 3(ABC)^2\tau_x u^{2n-6}u_x^5 \\
&+ 9(AB)^2C\tau_x u^{2n-5}u_x^3u_{xx} + 3A^2BC\tau_x u^{2n-4}u_x^2u_{xxx} + 3ABCE\tau_x u^{m+n-4}u_x^3 + 3(ABC)^2\tau_u u^{2n-6}u_x^6 \\
&+ 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}u_x^4u_{xx} + 3A^2BC\tau_u u^{2n-4}u_x^3u_{xxx} + 3ABCE\tau_u u^{m+n-4}u_x^4 + 3AB\phi_x u^{n-2}u_{xx} \\
&+ 3AB\phi_u u^{n-2}u_xu_{xx} - 3AB\xi_x u^{n-2}u_xu_{xx} - 3AB\xi_u u^{n-2}u_x^2u_{xx} + 3(AB)^2C\tau_x u^{2n-5}u_x^3u_{xx} \\
&+ 9(AB)^2\tau_x u^{2n-4}u_xu_{xx}^2 + 3A^2B\tau_x u^{2n-3}u_{xx}u_{xxx} + 3ABE\tau_x u^{m+n-3}u_xu_{xx} + 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}u_x^4u_{xx} \\
&+ 9(AB)^2\tau_u u^{2n-4}(u_xu_{xx})^2 + 3A^2B\tau_u u^{2n-3}u_xu_{xx}u_{xxx} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3}u_x^2u_{xx} + E\phi_x u^{m-1} \\
&+ E\phi_u u^{m-1}u_x - E\xi_x u^{m-1}u_x - E\xi_u u^{m-1}u_x^2 + ABCE\tau_x u^{m+n-4}u_x^3 + 3ABE\tau_x u^{m+n-3}u_xu_{xx} \\
&+ AE\tau_x u^{m+n-2}u_{xxx} + E^2\tau_x u^{2m-2}u_x + ABCE\tau_u u^{m+n-4}u_x^4 + 3ABE\tau_u u^{m+n-3}u_x^2u_{xx} \\
&+ AE\tau_u u^{m+n-2}u_xu_{xxx} + E^2\tau_u u^{2m-2}u_x^2 + +[9(AB)^2\tau_u u^{2n-4}](u_xu_{xx})^2 + (3A^2B\tau_u u^{2n-3})u_xu_{xx}u_{xxx} \\
&+ 3AB\phi_{xx}u^{n-2}u_x + (6AB\phi_{xu}u^{n-2} - 3AB\xi_{xx}u^{n-2} + 3ABE\tau_{xx}u^{m+n-3})u_x^2 + (3AB\phi_{uu}u^{n-2} \\
&- 6AB\xi_{xu}u^{n-2} + 6ABE\tau_{xu}u^{m+n-3})u_x^3 + [-3AB\xi_{uu}u^{n-2} + 3ABE\tau_{uu}u^{m+n-3} + 3(AB)^2C\tau_{xx}u^{2n-5}]u_x^4 \\
&+ [6(AB)^2C\tau_{xu}u^{2n-5}]u_x^5 + [3(AB)^2C\tau_{uu}u^{2n-5}]u_x^6 + (3AB\phi_u u^{n-2} - 6AB\xi_x u^{n-2})u_xu_{xx} \\
&+ [-9AB\xi_u u^{n-2} + 9(AB)^2\tau_{xx}u^{2n-4} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3}]u_x^2u_{xx} + [-6AB\tau_u u^{n-2}]u_x^2u_{xt} \\
&+ (3A^3B^2C\tau_{xx}u^{2n-3})u_xu_{xxx} + [18(AB)^2\tau_{xu}u^{2n-2}]u_x^3u_{xx} + (6A^2B\tau_{xu}u^{2n-3})u_x^2u_{xxx} \\
&+ [9(AB)^2\tau_{uu}u^{2n-4} + 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}]u_x^4u_{xx} + (3A^2B\tau_{uu}u^{2n-3})u_x^3u_{xxx} \\
&+ A\phi_{xxx}u^{n-1} + (3A\phi_{xxu}u^{n-1} + A\phi_{ux}u^{n-1} - A\xi_{xxx}u^{n-1})u_x + (2A\phi_{ux}u^{n-1} - 3A\xi_{xx}u^{n-1})u_{xx} \\
&+ (A\phi_u u^{n-1} - 3A\xi_x u^{n-1})u_{xxx} + (3A\phi_{uux}u^{n-1} + A\phi_{uu}u^{n-1} - 3A\xi_{xxu}u^{n-1} - A\xi_{ux}u^{n-1})u_x^2 \\
&+ (A\phi_{uuu}u^{n-1} - 3A\xi_{uux}u^{n-1} - A\xi_{uu}u^{n-1})u_x^3 + (-A\xi_{uuu}u^{n-1})u_x^4 + (-3A\xi_u u^{n-1})u_{xx}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(2A\phi_{uu}u^{n-1}-8A\xi_{ux}u^{n-1})u_xu_{xx}+(-5A\xi_{uu})u_x^2u_{xx}+(-4A\xi_uu^{n-1})u_xu_{xxx}+(A^2\tau_uu^{2n-2})u_{xxx}^2\\
&+(-3A\tau_{xx}u^{n-1})u_{xt}+(-6A\tau_{ux}u^{n-1})u_xu_{xt}+(-3A\tau_{uu}u^{n-1})u_x^2u_{xt}+(-3A\tau_uu^{n-1})u_{xx}u_{xt}\\
&+(-3A\tau_xu^{n-1})u_{xxt}+(-3A\tau_uu^{n-1})u_xu_{xxt}+(A^2BC\tau_{xxx}u^{2n-4}+3AE\tau_{uux}u^{m+n-2}\\
&+AE\tau_{uu}u^{m+n-2})u_x^3+(3A^2B\tau_{xxx}u^{2n-3}+2AE\tau_{ux}u^{m+n-2})u_xu_{xx}+(3A^2BC\tau_{xxu}u^{2n-4}\\
&+AE\tau_{uuu}u^{m+n-2}+A^2BC\tau_{ux}u^{2n-4})u_x^4+(9A^2B\tau_{xxu}u^{2n-3}+2AE\tau_{uu}u^{m+n-2}\\
&+3A^2B\tau_{ux}u^{2n-3})u_x^2u_{xx}+(A^2\tau_{xxx}u^{2n-2})u_{xxx}+(AE\tau_{xxx}u^{m+n-2})u_x+(3A^2\tau_{xxu}u^{2n-2}\\
&+AE\tau_uu^{m+n-2}+A^2\tau_{ux}u^{2n-2})u_xu_{xxx}+(3AE\tau_{xxu}u^{m+n-2}+AE\tau_{ux}u^{m+n-2})u_x^2+(3A^2BC\tau_{uux}u^{2n-4}\\
&+A^2BC\tau_{uu}u^{2n-4})u_x^5+(9A^2B\tau_{uux}u^{2n-3}+2A^2BC\tau_{ux}u^{2n-4}+3A^2B\tau_{uu}u^{2n-3})u_x^3u_{xx}\\
&+(3A^2\tau_{uux}u^{2n-2}+A^2\tau_{uu}u^{2n-2})u_x^2u_{xxx}+(6A^2B\tau_{uu}u^{2n-3})(u_xu_{xx})^2+(6A^2B\tau_{ux}u^{2n-3})u_xu_{xx}^2\\
&+(2A^2\tau_{ux}u^{2n-2})u_{xx}u_{xxx}+(2A^2BC\tau_{uu}u^{2n-4}+3A^2B\tau_{uuu}u^{2n-3})u_x^4u_{xx}+(A^2BC\tau_{uuu}u^{2n-4})u_x^6\\
&+(2A^2\tau_{uu}u^{2n-2}+3A^2B\tau_uu^{2n-3})u_xu_{xx}u_{xxx}+(A^2\tau_{uuu}u^{2n-2}+A^2BC\tau_uu^{2n-4})u_x^3u_{xxx}=0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

que é obtida em mais detalhes no Apêndice B. Devemos agora agrupar os coeficientes das potências das derivadas de u e igualá-las a zero. Isso está feito em mais detalhes no Apêndice B, mas aqui destacaremos apenas os coeficientes que terão maior relevância para o desenvolvimento adiante. Esse procedimento nos ajudará a encontrar as expressões para os coeficientes ξ, τ e ϕ do campo vetorial.

Os coeficientes de u_{xxt} e u_xu_{xxt}

$$u_{xxt}: \quad -3A\tau_xu^{n-1}=0 \quad \text{e} \quad u_xu_{xxt}: \quad -3A\tau_uu^{n-1}=0,$$

mostram que $\tau_x=0$ e $\tau_u=0$, indicando que τ é uma função apenas de t, $\tau=\tau(t)$. Usando esses resultados, vemos que a equação formada pelos coeficientes de u_{xxx},

$$A\tau_tu^{n-1}+AB\phi u^{n-2}-3A\xi_xu^{n-1}=0$$

tornar-se

$$(\tau_t-3\xi_x)u^{n-1}+(n-1)\phi u^{n-2}=0,$$

pois $B=n-1$. Nessa equação, os coeficientes de u^{n-1} e u^{n-2} devem ser nulos, e como estamos considerando os casos em que $n\neq 1$ esses coeficientes são nulos quando $\phi=0$ e $\tau_t=3\xi_x$. O coeficiente de u_{xx}^2 é $\xi_u=0$, assim $\xi=\xi(x,t)$. Integrando de τ_t, temos

$$\tau_t=3\xi_x \quad \Rightarrow \quad \xi(x,t)=\frac{1}{3}\tau_tx+\alpha(t). \tag{3.26}$$

A equação formada pelos coeficientes de u_x,

$$E\tau_tu^{m-1}-\xi_t-E\xi_xu^{m-1}-A\xi_{xxx}u^{n-1}=0,$$

torna-se

$$m(\tau_t-\xi_x)u^{m-1}-\xi_t=0, \tag{3.27}$$

onde $\xi_{xxx} = 0$, devido à expressão obtida para $\xi(x,t)$. Como os coeficientes de u^{m-1} e $u^0 = 1$ devem ser nulos, temos que

$$\tau_t = \xi_x \quad \text{e} \quad \xi_t = 0.$$

Logo essas equações são satisfeitas quando ξ e τ são constantes. Sendo $\xi = a_1$ e $\tau = a_2$, e sendo $\phi = 0$, o campo vetorial tem a forma

$$\mathbf{v} = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.28}$$

Com isso, o sistema característico

$$\frac{dx}{\omega} = \frac{dt}{k},$$

onde fizemos $a_1 = \omega$ e $a_2 = k$, produz a função invariante $\zeta(x,t) = kx - \omega t$, de modo que as soluções da eq.(3.25) são funções

$$u(x,t) = f(kx - \omega t), \tag{3.29}$$

onde $f = f(x,t)$ através de $\zeta(x,t) = kx - \omega t$.

Agora, vamos usar essa função invariante e reescrever a equação inicial. Para isso, veja que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\omega f_\zeta, \qquad \frac{\partial u^m}{\partial x} = \frac{\partial f^m}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = k(f^m)_\zeta, \qquad \frac{\partial^3 u^n}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f^n}{\partial \zeta^3}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^3 = k^3 (f^n)_{\zeta\zeta\zeta}.$$

Sendo assim, a equação é escrita como

$$-\omega f_\zeta + k(f^m)_\zeta + k^3 (f^n)_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \tag{3.30}$$

Integrando, obtemos

$$n(f^{n-1} f_\zeta)_\zeta - \frac{\omega}{k^3} f + \frac{1}{k^2} f^m = A,$$

onde A é constante de integração. Vamos multiplicar a equação por $f^{n-1} f_\zeta$ e integrarmos

$$(f^{n-1} f_\zeta)^2 - \frac{2\omega}{n(n+1)k^3} f^{n+1} + \frac{2}{n(m+n)k^2} f^{m+n} = \frac{2A}{n^2} f^n + B, \tag{3.31}$$

onde B é constante. Podemos integrá-la novamente, obtendo

$$\int \frac{f^{n-1} df}{\sqrt{\frac{2\omega}{n(n+1)k^3} f^{n+1} - \frac{2}{n(m+n)k^2} f^{m+n} + \frac{2A}{n^2} f^n + B}} = \zeta + C, \tag{3.32}$$

onde C é constante de integração. Para diferentes valores de m e n podemos obter várias integrais.

Vejamos caso em que $m = n = 2$, extensamente estudado por Rosenau e Hyman [8]. Para esses valores de m e n a eq.(3.31) será

$$f_\zeta^2 - \frac{\omega}{3k^3} f + \frac{1}{4k^2} f^2 = \frac{A}{2} + \frac{B}{f^2}. \tag{3.33}$$

Antes de integrarmos vamos considerar as constantes $A = B = 0$. Usando a eq.(3.32) e considerando $\beta = 4\omega/3k$, temos

$$2k \int \frac{df}{\sqrt{\beta f - f^2}} = \zeta + C.$$

Integrando o primeiro membro, temos

$$2k\arcsin\left(\frac{f-\beta/2}{\beta/2}\right) = \zeta + C \quad \Rightarrow \quad f(\zeta) = \frac{\beta}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\zeta + C}{2k}\right)\right). \tag{3.34}$$

Para o caso em que a constante $C = k\pi$, a expressão para a solução será [19]

$$f(\zeta) = \frac{\beta}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\zeta}{2k}\right)\right),$$

na qual podemos usar a identidade trigonométrica $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, de onde obtemos a solução

$$u(x,t) = f(\zeta) = \frac{4\omega}{3k}\cos^2\left(\frac{kx - \omega t}{4k}\right) \tag{3.35}$$

pois $\beta = 4\omega/3k$ e $\zeta = kx - \omega t$. Sabemos que o cosseno é uma função periódica. Contudo, veja que quando $Kx - \omega t = \pm 2k\pi$, para $k = 0, 1, 2, ...$, a solução $u(x,t) = 0$ deixa de ser única: qualquer período entre $[-2\pi, 2\pi]$, para $k = 1$, entre $[-4\pi, 4\pi]$, para $k = 2$, etc., torna-se uma entidade isolada [20]. Portanto, podemos remover todos estes outros períodos e ficar com apenas um, tal que este tenha a propriedade de ser não-nulo quando $kx - \omega t$ assume valores no intervalo $[-2k\pi, 2k\pi]$ e é nulo fora dele

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{4\omega}{3k}\cos^2\left[\frac{1}{4k}(kx - \omega t)\right] & \text{se } |kx - \omega t| \leq 2k\pi, \\ 0 & \text{se } |kx - \omega t| \geq 2k\pi \end{cases} \tag{3.36}$$

Soluções desse tipo são chamadas *compactons*, por terem suporte compacto [8]. Os compactons são um caso particular de onda viajante e que têm algumas propriedades semelhantes às dos sólitons [20].

Em suma, essas soluções possuem as seguintes características:

(a) têm suporte compacto, ou seja, é não nula num intervalo finito do seu domínio de definição e nula fora desse intervalo [21];

(b) a velocidade do compacton depende da sua amplitude (altura);

(c) o comprimento (extensão) da onda compacton independe da amplitude da onda (e, consequentemente, da velocidade), diferentemente dos sólitons, que quanto maior a amplitude, menos é o comprimento;

(d) assim como os sólitons, os compactons interagem entre si e após a interação preservam forma e velocidade iniciais;

(e) no caso do sóliton da KdV, dado pela eq.(1.14) a solução é proporcional a uma secante hiperbólica (ao quadrado) e que, por sua vez, é uma função de exponenciais. Sendo assim, para o argumento $\xi = x - ct \to \infty$ vemos que o sóliton tem "caudas" que se estendem, prolongam, até o infinito. No caso dos compactons isso não acontece porque, independente dos valores que o argumento $kx - \omega t$ assumir, a solução só será não nula dentro de um intervalo finito, não se estendendo até o infinito. Devido a isso essas soluções por vezes são chamadas de "sólitons com comprimento de onda finito" [8].

Ainda para o caso $K(2,2)$ foram obtidas quatros leis de conservação [8], cujas quantidades conservadas são

$$T_1 = u, \qquad T_2 = u^3, \qquad T_3 = T_4 = u\cos x + \beta,$$

onde β é $\beta = 0$ para T_3 e $\beta = -\pi/2$ para T_4. Os fluxos são, respectivamente

$$X_1 = u^2 + (u^2)_{xx}, \qquad X_2 = \frac{3}{2}u^4 + 6u^3 u_{xx}, \qquad X_3 = X_4 = \sin(x+\beta)(u^2)_x + \cos(x+\beta)(u^2)_{xx}.$$

Posteriormente mostrou-se [11] que essas são realmente as únicas quantidades conservadas da equação $K(2,2)$.

Contudo, não é para quaisquer valores de m e n que as soluções serão compactons. Vejamos o caso em que $m = 2$ e $n = 3$ [19]. Usando a eq.(3.32) para $A = B = 0$ e fazendo $\beta = 5\omega/4k$, temos

$$\int \frac{df}{\sqrt{\beta - f}} = \zeta + C,$$

que integrando, temos

$$f = \frac{5\omega}{4k} - \frac{1}{4}(\zeta + C)^2. \tag{3.37}$$

Para o caso $m = 3$ e $n = 2$, fazendo $\beta = 5\omega/3k$, a eq.(3.32) será

$$k\sqrt{5}\int \frac{df}{\sqrt{\beta f - f^3}} = \zeta + C,$$

cuja solução é uma função elíptica. Por fim, para o caso $m = n = 3$, temos

$$\int \frac{df}{\sqrt{\beta - f^2}} = \zeta + C,$$

onde $\beta = 3\omega/2k$. Integrando, temos

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{3\omega}{2k}}\sin(\zeta + C). \tag{3.38}$$

Conclusão

Vimos que a equação KdV, que descreve um grande número de fenômenos que se encontram em diversos campos da Física, variando desde a mecânica dos fluidos até a física de partículas, pode ter termos modificados tal que possa descrever um número maior de fenômenos. Das várias versões dessa equação, escolhemos trabalhar com as equações $K(m, n)$ com dispersão não-linear, das quais, para alguns valores de m e n pudemos obter um novo tipo de soluções tipo ondas solitárias, chamadas compactons. Essas soluções são semelhantes aos sólitons da KdV, principalmente no que diz respeito à forma com a qual interagem entre si, emergindo com mesmas forma e velocidade após a interação. Contudo, possuem características diferentes das dos sólitons, como o fato de terem extensão finita.

O conteúdo discutido nesta dissertação de mestrado está em fase inicial, que ainda está em desenvolvimento e que apenas alguns conceitos introdutórios foram estudados. Temos o objetivo de dar continuidade ao estudo, buscando entender propriedades mais profundas sobre as EDPs não-lineares tipo $K(m, n)$ que apresentam soluções com suporte compacto em paralelo com teoria sóliton.

Referências

1 MACHADO, K. D. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 1. ed. [S.l.]: Editora Toda Palavra, 2012. v. 1. Citado na página 10.

2 MARION, J.; THORNTON, S. **Classical dynamics of particles and systems**. 5. ed. [S.l.]: Thomson Brooks Cole, 2004. Citado na página 10.

3 DUNAJSKI, M. **Solitons, instantons, and twistors**. 1. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2010. (Oxford graduate texts in mathematics). Citado na página 10.

4 DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. **Solitons: an introduction**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. (Cambridge texts in applied mathematics). Citado 7 vezes nas páginas 10, 13, 15, 16, 17, 18 e 19.

5 RAJARAMAN. **Solitons and instantons - an introduction to solitons and instantons in Quantum Field Theory**. 1. ed. [S.l.: s.n.]. (North-Holland Personal Library). Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

6 SCOTT, A. C.; CHU, F. Y. F.; MCLAUGHLIN, D. W. The soliton: A new concept in applied science. **Proceedings of The IEEE**, v. 61, p. 1443–1483, 1973. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 14, 15 e 18.

7 SOUZA, W. L. d. **Simetrias de Lie e a equação Korteweg-de Vries generalizada com coeficientes variáveis**. Dissertação (mestrado) — Instituto de Física - Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá - MT, Setembro 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 31.

8 ROSENAU, P.; HYMAN, J. M. Compactons: Solitons with finite wavelength. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 70, p. 564–567, Feb 1993. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.564>. Citado 6 vezes nas páginas 11, 12, 40, 47, 48 e 49.

9 ROSENAU, P. On solitons, compactons, and lagrange maps. **Physics Letters A**, v. 211, p. 265–275, 1996. Citado na página 11.

10 STEPHANI H., M. M. **Differential Equations: Their Solution Using Symmetries**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 12, 20, 31 e 32.

11 VODOVá, J. A complete list of conservation laws for non-integrable compacton equations of $k(m, m)$ type. **Nonlinearity**, v. 26, n. 3. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 49.

12 REMOISSENET, M. **Waves called solitons - concepts and experiments**. 3. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1999. (Advanced texts in physics). Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

13 LAMB, G. L. **Elements of soliton theory**. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1980. (Pure and applied mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.

14 CHALUB, F.; ZUBELLI, J. Sólitons: na crista da onda por mais de 100 anos. **Matemática Universitária**, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 30, p. 41–65, Jun 2001. Citado na página 17.

15 MIURA, R.; GARDNER, C.; KRUSKAL, M. Korteweg-de vries equation and generalizations. ii. existence of conservation laws and constants of motion. **Journal of Mathematical Physics**, v. 9, n. 8. Citado na página 19.

16 OLVER, P. **Applications of Lie groups to differential equations**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2000. (Graduate texts in mathematics). Citado 7 vezes nas páginas 20, 21, 22, 24, 27, 30 e 34.

17 HYDON, P. **Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Citado na página 20.

18 BLUMAN, G. W.; KUMEI, S. **Symmetries and differential equations**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1989. (Applied mathematical sciences). Citado na página 20.

19 BRACKEN, P. Symmetry properties of a generalized korteweg-de vries equation and some explicit solutions. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, v. 2005, n. 13, p. 2159–2173, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 40, 44, 48 e 49.

20 ROSENAU, P. What is... a compacton? **Notices of the AMS**, American Mathematical Society, v. 52, n. 7, p. 738–739, Aug 2005. Citado na página 48.

21 RIESZ, F.; SZ.-NAGY, B. **Functional Analysis**. 1. ed. [S.l.]: Dover publications, 1990. (Dover books on Mathematics). Citado na página 48.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculos adicionais para a equação de calor

No caso da equação de calor (2.60), precisamos calcular os coeficientes ϕ^t e ϕ^{xx} da prolongação. Contudo, alguns resultados que obtivermos serão válidos não só para ϕ, mas também para ξ e τ, visto que ξ, τ e ϕ funções de x, t e u. Por exemplo,

$$\phi^t = \frac{D\phi}{Dt} - u_x\frac{D\xi}{Dt} - u_t\frac{D\tau}{Dt}. \tag{A.1}$$

Usando a expressão das derivadas totais para t, vemos que

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u_t\frac{\partial\phi}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial\phi}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial\phi}{\partial u_t} + ... \tag{A.2}$$

e isso resulta

$$\frac{D\phi}{Dt} = \phi_t + u_t\phi_u. \tag{A.3}$$

Uma expressão semelhante é obtida para $D\xi/Dt$ e $D\tau/Dt$, bastando substituir ϕ por ξ e τ, respectivamente:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi_t + u_t\xi_u, \qquad \frac{D\tau}{Dt} = \tau_t + u_t\tau_u. \tag{A.4}$$

Usando esses resultados, a expressão para ϕ^t será

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - (u_t)^2\tau_u. \tag{A.5}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\phi^x = \frac{D\phi}{Dx} - u_x\frac{D\xi}{Dx} - u_t\frac{D\tau}{Dx}, \tag{A.6}$$

onde

$$\frac{D\xi}{Dx} = \xi_x + u_x\xi_u, \qquad \frac{D\tau}{Dx} = \tau_x + u_x\tau_u, \qquad \frac{D\phi}{Dx} = \phi_x + u_x\phi_u \tag{A.7}$$

com as derivadas totais de x dadas por

$$\frac{D\phi}{Dx} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + u_x\frac{\partial\phi}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial\phi}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial\phi}{\partial u_t} + ... \tag{A.8}$$

Logo, usando essas equações, vemos que

$$\phi^x = \phi_x + u_x\phi_u - u_x(\xi_x + u_x\xi_u) - u_t(\tau_x + u_x\tau_u),$$

ou, numa expressão semelhante à (5),

$$\phi^x = \phi_x - \tau_x u_t + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_u u_t u_x - (u_x)^2\xi_u. \tag{A.9}$$

Para ϕ^{xx}, temos

$$\phi^{xx} = \frac{D\phi^x}{Dx} - u_{xx}\frac{D\xi}{Dx} - u_{xt}\frac{D\tau}{Dx} \quad \Rightarrow \quad \phi^{xx} = \frac{D}{Dx}\left(\frac{D\phi}{Dx} - u_x\frac{D\xi}{Dx} - u_t\frac{D\tau}{Dx}\right) - u_{xx}\frac{D\xi}{Dx} - u_{xt}\frac{D\tau}{Dx}, \tag{A.10}$$

de onde obtemos

$$\phi^{xx} = D_x^2\phi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau, \tag{A.11}$$

onde $D_x = D/Dx$, $D_x^2 = D^2/Dx^2$. Veja que

$$D_x^2\phi = \frac{D}{Dx}\frac{D\phi}{Dx} = \frac{D}{Dx}(\phi_x + u_x\phi_u) \tag{A.12}$$

onde usamos as eq.(7) e (8), resultando na expressão

$$D_x^2\phi = \phi_{xx} + u_x\phi_{xu} + u_x(\phi_{ux} + u_x\phi_{uu}) + \phi_u u_{xx}. \tag{A.13}$$

Da mesma forma obtemos para ξ e τ

$$D_x^2\xi = \xi_{xx}+u_x\xi_{xu}+u_x(\xi_{ux}+u_x\xi_{uu})+\xi_u u_{xx}, \qquad D_x^2\tau = \tau_{xx}+u_x\tau_{xu}+u_x(\tau_{ux}+u_x\tau_{uu})+\tau_u u_{xx}. \tag{A.14}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}\phi^{xx} = {}& \phi_{xx}+u_x\phi_{xu}+u_x(\phi_{ux}+u_x\phi_{uu})+\phi_u u_{xx}-u_x\left(\xi_{xx}+u_x\xi_{xu}+u_x(\xi_{ux}+u_x\xi_{uu})+\xi_u u_{xx}\right)\\ & - u_t\left(\tau_{xx}+u_x\tau_{xu}+u_x(\tau_{ux}+u_x\tau_{uu})+\tau_u u_{xx}\right) - 2u_{xx}(\xi_x+u_x\xi_u) - 2u_{xt}(\tau_x+u_x\tau_u)\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\phi^{xx} = {}& \phi_{xx} + (2\phi_{ux} - \xi_{xx})u_x + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} + (\phi_{uu} - 2\xi_{ux})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 - 3\xi_u u_x u_{xx}\\ & - \tau_{xx}u_t - 2\tau_{ux}u_t u_x - \tau_{uu}u_t u_x^2 - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 2\tau_u u_x u_{xt}.\end{aligned} \tag{A.15}$$

Para ϕ^{xxx} usamos o resultado anterior

$$\phi^{xxx} = \frac{D\phi^{xx}}{Dx} - u_{xxx}\frac{D\xi}{Dx} - u_{xxt}\frac{D\tau}{Dx}. \tag{A.16}$$

Usando a eq.(12), vemos que

$$\frac{D\phi^{xx}}{Dx} = D_x(D_x^2\phi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau),$$

ou

$$\frac{D\phi^{xx}}{Dx} = D_x^3\phi - u_x D_x^3\xi - u_t D_x^3\tau - 2u_{xx}D_x^2\xi - 2u_{xt}D_x^2\tau - u_{xx}D_x^2\xi - u_{xt}D_x^2\tau - 2u_{xxx}D_x\xi - 2u_{xxt}D_x\tau, \tag{A.17}$$

onde $D_x u_x = u_{xx}$, $D_x u_t = u_{xt}$, $D_x u_{xx} = u_{xxx}$ e $D_x u_{xt} = u_{xxt}$. Com isso, a eq.(18) será

$$\phi^{xxx} = D_x^3\phi - u_x D_x^3\xi - u_t D_x^3\tau - 3u_{xx}D_x^2\xi - 3u_{xt}D_x^2\tau - 3u_{xxx}D_x\xi - 3u_{xxt}D_x\tau. \tag{A.18}$$

Utilizando a eq.(14)

$$D_x^3\phi = D_x(D_x^2\phi) = D_x(\phi_{xx} + u_x\phi_{xu} + u_x(\phi_{ux} + u_x\phi_{uu}) + \phi_u u_{xx}),$$

obtemos

$$D_x^3\phi = \phi_{xxx} + 3\phi_{xxu}u_x + 3\phi_{uux}u_x^2 + 2\phi_{ux}u_{xx} + 2\phi_{uu}u_xu_{xx} + \phi_{uuu}u_x^3 + \phi_u u_{xxx} + \phi_{ux}u_x + \phi_{uu}u_x^2. \tag{A.19}$$

A mesma expressão é obtida para $D_x^3\xi$ e $D_x^3\tau$, bastando substituir ξ e τ, respectivamente. Com isso, encontramos

$$\begin{aligned}
\phi^{xxx} &= \phi_{xxx} + 3\phi_{xxu}u_x + 3\phi_{uux}u_x^2 + 2\phi_{ux}u_{xx} + 2\phi_{uu}u_xu_{xx} + \phi_{uuu}u_x^3 + \phi_u u_{xxx} + \phi_{ux}u_x + \phi_{uu}u_x^2 \\
&- \xi_{xxx}u_x - 3\xi_{xxu}u_x^2 - 3\xi_{uux}u_x^3 - 2\xi_{ux}u_xu_{xx} - 2\xi_{uu}u_x^2u_{xx} - \xi_{uuu}u_x^4 - \xi_u u_xu_{xxx} - \xi_{ux}u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 \\
&- \tau_{xxx}u_t - 3\tau_{xxu}u_xu_t - 3\tau_{uux}u_x^2u_t - 2\tau_{ux}u_{xx}u_t - 2\tau_{uu}u_xu_{xx}u_t - \tau_{uuu}u_x^3u_t - \tau_u u_{xxx}u_t \\
&- \tau_{ux}u_xu_t - \tau_{uu}u_x^2u_t - 3\xi_{xx}u_{xx} - 3\xi_{xu}u_xu_{xx} - 3\xi_{ux}u_xu_{xx} - 3\xi_{uu}u_x^2u_{xx} - 3\xi_u u_{xx}^2 \\
&- 3\tau_{xx}u_{xt} - 3\tau_{xu}u_xu_{xt} - 3\tau_{ux}u_xu_{xt} - 3\tau_{uu}u_x^2u_{xt} - 3\tau_u u_{xx}u_{xt} - 3\xi_x u_{xxx} - 3\xi_u u_xu_{xxx} - 3\tau_x u_{xxt} - 3\tau_u u_xu_{xxt},
\end{aligned}$$

somando alguns termos dessa equação, temos

$$\begin{aligned}
\phi^{xxx} &= \phi_{xxx} + (3\phi_{xxu} + \phi_{ux} - \xi_{xxx})u_x + (3\phi_{uux} + \phi_{uu} - 3\xi_{xxu} - \xi_{ux})u_x^2 + (\phi_u - 3\xi_x)u_{xxx} \\
&+ (\phi_{uuu} - 3\xi_{uux} - \xi_{uu})u_x^3 + (2\phi_{ux} - 3\xi_{xx})u_{xx} + (2\phi_{uu} - 8\xi_{ux})u_xu_{xx} - 5\xi_{uu}u_x^2u_{xx} - \xi_{uuu}u_x^4 - 4\xi_u u_xu_{xxx} \\
&- \tau_{xxx}u_t - 3\tau_{xxu}u_xu_t - 3\tau_{uux}u_x^2u_t - 2\tau_{ux}u_{xx}u_t - 2\tau_{uu}u_xu_{xx}u_t - \tau_{uuu}u_x^3u_t - \tau_u u_{xxx}u_t - \tau_{ux}u_xu_t \\
&- \tau_{uu}u_x^2u_t - 3\xi_u u_{xx}^2 - 3\tau_{xx}u_{xt} - 6\tau_{xu}u_xu_{xt} - 3\tau_{uu}u_x^2u_{xt} - 3\tau_u u_{xx}u_{xt} - 3\tau_x u_{xxt} - 3\tau_u u_xu_{xxt},
\end{aligned} \tag{A.20}$$

onde consideramos $\tau_{xu} = \tau_{ux}$.

APÊNDICE B – Coeficientes do gerador da equação K(m,n)

Aplicando a prolongação à eq., temos

$$\phi^t + [n(n-1)(n-2)(n-3)u^{n-4}u_x^3 + 3n(n-1)(n-2)u^{n-3}u_x u_{xx} + n(n-1)u^{m-2}u_x]\phi$$
$$+[3n(n-1)(n-2)u^{n-3}u_x^2 + 3n(n-1)u^{n-2}u_{xx} + mu^{m-1}]\phi^x + [3n(n-1)u^{n-2}u_x]\phi^{xx} + nu^{n-1}\phi^{xxx} = 0, \tag{B.1}$$

que substituindo $n = A$, $n-1 = B$, $n-2 = C$, $n-3 = D$, $m = E$ e $m-1 = F$, temos

$$\phi^t + [ABCDu^{n-4}u_x^3 + 3ABCu^{n-3}u_x u_{xx} + ABu^{m-2}u_x]\phi$$
$$+ [3ABCu^{n-3}u_x^2 + 3ABu^{n-2}u_{xx} + Eu^{m-1}]\phi^x + [3ABu^{n-2}u_x]\phi^{xx} + Au^{n-1}\phi^{xxx} = 0. \tag{B.2}$$

Agora precisamos escrever explicitamente os termos ϕ^t, ϕ^x, ϕ^{xx} e ϕ^{xxx}, dados pelas eq.(A.5), (A.10), (A.17) e (A.24) do Apêndice A. Além disso, sempre que u_t aparecer na eq.(B.2) escreveremos a eq.(3.24)

$$u_t = -n(n-1)(n-2)u^{n-3}u_x^3 - 3n(n-1)u^{n-2}u_x u_{xx} - nu^{n-1}u_{xxx} - mu^{m-1}u_x, \tag{B.3}$$

onde fizemos $n = A$, $n-1 = B$,..., assim como na eq.(B.2). Sendo

$$u_t^2 = (ABC)^2u^{2n-6}u_x^6 + 6(AB)^2Cu^{2n-5}u_x^4u_{xx} + 9(AB)^2u^{2n-4}(u_x u_{xx})^2 + 2A^2BCu^{2n-4}u_x^3u_{xxx}$$
$$+2ABCEu^{m+n-4}u_x^4 + 6A^2Bu^{2n-3}u_x u_{xx}u_{xxx} + 6ABEu^{m+n-3}u_x^2u_{xx} + A^2u^{2n-2}u_{xxx}^2 + 2AEu^{m+n-2}u_x u_{xxx}$$
$$+ E^2u^{2m-2}u_x^2, \tag{B.4}$$

a eq.(B.2) será

$$\phi_t + (E\tau_t u^{m-1} - E\phi_u u^{m-1} - \xi_t)u_x + (E\xi_u u^{m-1} - E^2\tau_u u^{2m-2})u_x^2$$
$$+(ABC\tau_t u^{n-3} - ABC\phi_u u^{n-3})u_x^3 + (ABC\xi_u u^{n-3} - 2ABCE\tau_u u^{m+n-4})u_x^4 + [-(ABC)^2\tau_u u^{2n-6}]u_x^6$$
$$+ (A\tau_t u^{n-1} - A\phi_u u^{n-1})u_{xxx} + (-A^2\tau_u u^{2n-2})u_{xxx}^2 + (3AB\tau_t u^{n-2} - 3AB\phi_u u^{n-2})u_x u_{xx}$$
$$+ (3AB\xi_u u^{n-2} - 6ABE\tau_u u^{m+n-3})u_x^2u_{xx} + (A\xi_u u^{n-1} - 2AE\tau_u u^{m+n-2})u_x u_{xxx}$$
$$+ [-6(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}]u_x^4u_{xx} + [-9(AB)^2\tau_u u^{2n-4}](u_x u_{xx})^2 + (-2A^2BC\tau_u u^{2n-4})u_x^3u_{xxx}$$
$$+(-6A^2B\tau_u u^{2n-3})u_x u_{xx}u_{xxx} + ABCD\phi u^{n-4}u_x^3 + 3ABC\phi u^{n-3}u_x u_{xx} + AB\phi u^{n-2}u_{xxx} + EF\phi u^{m-2}u_x$$
$$+3ABC\phi_x u^{n-3}u_x^2 + 3ABC\phi_u u^{n-3}u_x^3 - 3ABC\xi_x u^{n-3}u_x^3 - 3ABC\xi_u u^{n-3}u_x^4 + 3(ABC)^2\tau_x u^{2n-6}u_x^5$$
$$+9(AB)^2C\tau_x u^{2n-5}u_x^3u_{xx} + 3A^2BC\tau_x u^{2n-4}u_x^2u_{xxx} + 3ABCE\tau_x u^{m+n-4}u_x^3 + 3(ABC)^2\tau_u u^{2n-6}u_x^6$$
$$+ 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}u_x^4u_{xx} + 3A^2BC\tau_u u^{2n-4}u_x^3u_{xxx} + 3ABCE\tau_u u^{m+n-4}u_x^4 + 3AB\phi_x u^{n-2}u_{xx}$$

$$+ 3AB\phi_u u^{n-2}u_x u_{xx} - 3AB\xi_x u^{n-2}u_x u_{xx} - 3AB\xi_u u^{n-2}u_x^2 u_{xx} + 3(AB)^2C\tau_x u^{2n-5}u_x^3 u_{xx}$$
$$+9(AB)^2\tau_x u^{2n-4}u_x u_{xx}^2+3A^2B\tau_x u^{2n-3}u_{xx}u_{xxx}+3ABE\tau_x u^{m+n-3}u_x u_{xx}+3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}u_x^4 u_{xx}$$
$$+ 9(AB)^2\tau_u u^{2n-4}(u_x u_{xx})^2 + 3A^2B\tau_u u^{2n-3}u_x u_{xx}u_{xxx} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3}u_x^2 u_{xx} + E\phi_x u^{m-1}$$
$$+ E\phi_u u^{m-1}u_x - E\xi_x u^{m-1}u_x - E\xi_u u^{m-1}u_x^2 + ABCE\tau_x u^{m+n-4}u_x^3 + 3ABE\tau_x u^{m+n-3}u_x u_{xx}$$
$$+ AE\tau_x u^{m+n-2}u_{xxx} + E^2\tau_x u^{2m-2}u_x + ABCE\tau_u u^{m+n-4}u_x^4 + 3ABE\tau_u u^{m+n-3}u_x^2 u_{xx}$$
$$+ AE\tau_u u^{m+n-2}u_x u_{xxx} + E^2\tau_u u^{2m-2}u_x^2+$$
$$+ 3AB\phi_{xx}u^{n-2}u_x + (6AB\phi_{xu}u^{n-2} - 3AB\xi_{xx}u^{n-2} + 3ABE\tau_{xx}u^{m+n-3})u_x^2 + (3AB\phi_{uu}u^{n-2}$$
$$-6AB\xi_{xu}u^{n-2}+6ABE\tau_{xu}u^{m+n-3})u_x^3+[-3AB\xi_{uu}u^{n-2}+3ABE\tau_{uu}u^{m+n-3}+3(AB)^2C\tau_{xx}u^{2n-5}]u_x^4$$
$$+ [6(AB)^2C\tau_{xu}u^{2n-5}]u_x^5 + [3(AB)^2C\tau_{uu}u^{2n-5}]u_x^6 + (3AB\phi_u u^{n-2} - 6AB\xi_x u^{n-2})u_x u_{xx}$$
$$+ [-9AB\xi_u u^{n-2} + 9(AB)^2\tau_{xx}u^{2n-4} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3}]u_x^2 u_{xx} + [-6AB\tau_u u^{n-2}]u_x^2 u_{xt}$$
$$+ (3A^3B^2C\tau_{xx}u^{2n-3})u_x u_{xxx} + [18(AB)^2\tau_{xu}u^{2n-2}]u_x^3 u_{xx} + (6A^2B\tau_{xu}u^{2n-3})u_x^2 u_{xxx}$$
$$+ [9(AB)^2\tau_{uu}u^{2n-4} + 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5}]u_x^4 u_{xx} + (3A^2B\tau_{uu}u^{2n-3})u_x^3 u_{xxx}$$
$$+ [9(AB)^2\tau_u u^{2n-4}](u_x u_{xx})^2 + (3A^2B\tau_u u^{2n-3})u_x u_{xx}u_{xxx}$$
$$+ A\phi_{xxx}u^{n-1} + (3A\phi_{xxu}u^{n-1} + A\phi_{ux}u^{n-1} - A\xi_{xxx}u^{n-1})u_x + (2A\phi_{ux}u^{n-1} - 3A\xi_{xx}u^{n-1})u_{xx}$$
$$+ (A\phi_u u^{n-1} - 3A\xi_x u^{n-1})u_{xxx} + (3A\phi_{uux}u^{n-1} + A\phi_{uu}u^{n-1} - 3A\xi_{xxu}u^{n-1} - A\xi_{ux}u^{n-1})u_x^2$$
$$+ (A\phi_{uuu}u^{n-1} - 3A\xi_{uux}u^{n-1} - A\xi_{uu}u^{n-1})u_x^3 + (-A\xi_{uuu}u^{n-1})u_x^4 + (-3A\xi_u u^{n-1})u_{xx}^2$$
$$+ (2A\phi_{uu}u^{n-1} - 8A\xi_{ux}u^{n-1})u_x u_{xx} + (-5A\xi_{uu})u_x^2 u_{xx} + (-4A\xi_u u^{n-1})u_x u_{xxx}$$
$$+ (-3A\tau_{xx}u^{n-1})u_{xt} + (-6A\tau_{ux}u^{n-1})u_x u_{xt} + (-3A\tau_{uu}u^{n-1})u_x^2 u_{xt} + (-3A\tau_u u^{n-1})u_{xx}u_{xt}$$
$$+ (-3A\tau_x u^{n-1})u_{xxt} + (-3A\tau_u u^{n-1})u_x u_{xxt}$$
$$+(A^2BC\tau_{xxx}u^{2n-4}+3AE\tau_{uux}u^{m+n-2}+AE\tau_{uu}u^{m+n-2})u_x^3+(3A^2B\tau_{xxx}u^{2n-3}+2AE\tau_{ux}u^{m+n-2})u_x u_{xx}$$
$$+(A^2\tau_{xxx}u^{2n-2})u_{xxx}+(AE\tau_{xxx}u^{m+n-2})u_x+(3A^2BC\tau_{xxu}u^{2n-4}+AE\tau_{uuu}u^{m+n-2}+A^2BC\tau_{ux}u^{2n-4})u_x^4$$
$$+ (9A^2B\tau_{xxu}u^{2n-3} + 2AE\tau_{uu}u^{m+n-2} + 3A^2B\tau_{ux}u^{2n-3})u_x^2 u_{xx}$$
$$+(3A^2\tau_{xxu}u^{2n-2}+AE\tau_u u^{m+n-2}+A^2\tau_{ux}u^{2n-2})u_x u_{xxx}+(3AE\tau_{xxu}u^{m+n-2}+AE\tau_{ux}u^{m+n-2})u_x^2$$
$$+(3A^2BC\tau_{uux}u^{2n-4}+A^2BC\tau_{uu}u^{2n-4})u_x^5+(9A^2B\tau_{uux}u^{2n-3}+2A^2BC\tau_{ux}u^{2n-4}+3A^2B\tau_{uu}u^{2n-3})u_x^3 u_{xx}$$
$$+ (3A^2\tau_{uux}u^{2n-2} + A^2\tau_{uu}u^{2n-2})u_x^2 u_{xxx} + (6A^2B\tau_{uu}u^{2n-3})(u_x u_{xx})^2$$
$$+(6A^2B\tau_{ux}u^{2n-3})u_x u_{xx}^2+(2A^2\tau_{ux}u^{2n-2})u_{xx}u_{xxx}+(2A^2BC\tau_{uu}u^{2n-4}+3A^2B\tau_{uuu}u^{2n-3})u_x^4 u_{xx}$$
$$+ (2A^2\tau_{uu}u^{2n-2} + 3A^2B\tau_u u^{2n-3})u_x u_{xx}u_{xxx} + (A^2BC\tau_{uuu}u^{2n-4})u_x^6$$
$$+ (A^2\tau_u u^{2n-2})u_{xxx}^2 + (A^2\tau_{uuu}u^{2n-2} + A^2BC\tau_u u^{2n-4})u_x^3 u_{xxx} = 0 \quad \text{(B.5)}$$

Agrupando os coeficientes da potências das derivadas de u, temos

$$u_x: \quad E\tau_t u^{m-1}-E\phi_u u^{m-1}-\xi_t+EF\phi u^{m-2}+E\phi_u u^{m-1}-E\xi_x u^{m-1}+E^2\tau_x u^{2m-2}+3AB\phi_{xx}u^{n-2}$$
$$+ 3A\phi_{xxu}u^{n-1} + A\phi_{ux}u^{n-1} - A\xi_{xxx}u^{n-1} + AE\tau_{xxx}u^{m+n-2} = 0,$$

$$u_{xx}: \quad 3AB\phi_x u^{n-2} + 2A\phi_{ux}u^{n-1} - 3A\xi_{xx}u^{n-1} = 0,$$

$$u_{xxx}: \quad A\tau_t u^{n-1}-A\phi_u u^{n-1}+AB\phi u^{n-2}+AE\tau_x u^{m+n-2}+A\phi_u u^{n-1}+A^2\tau_{xxx}u^{2n-2}-3A\xi_x u^{n-1} = 0,$$

$$u_x^2: \quad E\xi_u u^{m-1} - E^2\tau_u u^{2m-2} + 3ABC\phi_x u^{n-3} - E\xi_u u^{m-1} + E^2\tau_u u^{2m-2} + 6AB\phi_{xu} u^{n-2} - 3AB\xi_{xx} u^{n-2} + 3ABE\tau_{xx} u^{m+n-3} + 3A\phi_{uux} u^{n-1} + A\phi_{uu} u^{n-1} - 3A\xi_{xxu} u^{n-1} - A\xi_{ux} u^{n-1} + 3AE\tau_{xxu} u^{m+n-2} + AE\tau_{ux} u^{m+n-2} = 0,$$

$$u_x^3: \quad ABC\tau_t u^{n-3} - ABC\phi_u u^{n-3} + ABCD\phi u^{n-4} + 3ABC\phi_u u^{n-3} - 3ABC\xi_x u^{n-3} + 3ABCE\tau_x u^{m+n-4} + ABCE\tau_x u^{m+n-4} + 3AB\phi_{uu} u^{n-2} - 6AB\xi_{xu} u^{n-2} + 6ABE\tau_{xu} u^{m+n-3} + A\phi_{uuu} u^{n-1} - 3A\xi_{uux} u^{n-1} - A\xi_{uu} u^{n-1} + A^2BC\tau_{xxx} u^{2n-4} + 3AE\tau_{uux} u^{m+n-2} + AE\tau_{uu} u^{m+n-2} = 0,$$

$$u_x^4: \quad ABC\xi_u u^{n-3} - 2ABCE\tau_u u^{m+n-4} - 3ABC\xi_u u^{n-3} + 3ABCE\tau_u u^{m+n-4} + 3ABCE\tau_u u^{m+n-4} - 3AB\xi_{uu} u^{n-2} + 3ABE\tau_{uu} u^{m+n-3} + 3(AB)^2C\tau_{xx} u^{2n-5} - A\xi_{uuu} u^{n-1} + 3A^2BC\tau_{xxu} u^{2n-4} + AE\tau_{uuu} u^{m+n-2} + A^2BC\tau_{ux} u^{2n-4} = 0,$$

$$u_x^5: \quad 3(ABC)^2\tau_x u^{2n-6} + 6(AB)^2C\tau_{xu} u^{2n-5} + 3A^2BC\tau_{uux} u^{2n-4} + A^2BC\tau_{uu} u^{2n-4} = 0,$$

$$u_x^6: \quad -(ABC)^2\tau_u u^{2n-6} + 3(ABC)^2\tau_u u^{2n-6} + 3(AB)^2C\tau_{uu} u^{2n-5} + A^2BC\tau_{uuu} u^{2n-4} = 0,$$

$$u_{xx}^2: \quad -3A\xi_u u^{n-1} = 0,$$

$$u_{xxx}^2: \quad -A^2\tau_u u^{2n-2} + A^2\tau_u u^{2n-2} = 0,$$

$$u_x u_{xx}: \quad 3AB\tau_t u^{n-2} - 3AB\phi_u u^{n-2} + 3ABC\phi u^{n-3} + 3AB\phi_u u^{n-2} - 3AB\xi_x u^{n-2} + 3ABE\tau_x u^{m+n-3} + 3ABE\tau_x u^{m+n-3} + 3AB\phi_u u^{n-2} - 6AB\xi_x u^{n-2} + 2A\phi_{uu} u^{n-1} - 8A\xi_{ux} u^{n-1} + 3A^2B\tau_{xxx} u^{2n-3} + 2AE\tau_{ux} u^{m+n-2} = 0,$$

$$u_x^2 u_{xx}: \quad 3AB\xi_u u^{n-2} - 6ABE\tau_u u^{m+n-3} - 3AB\xi_u u^{n-2} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3} - 9AB\xi_u u^{n-2} + 9(AB)^2\tau_{xx} u^{2n-4} + 3ABE\tau_u u^{m+n-3} - 5A\xi_{uu} + 9A^2B\tau_{xxu} u^{2n-3} + 2AE\tau_{uu} u^{m+n-2} + 3A^2B\tau_{xu} u^{2n-3} = 0,$$

$$u_x^3 u_{xx}: \quad 9(AB)^2C\tau_x u^{2n-5} + 3(AB)^2C\tau_x u^{2n-5} + 18(AB)^2\tau_{xu} u^{2n-2} + 9A^2B\tau_{uux} u^{2n-3} + 2A^2BC\tau_{ux} u^{2n-4} + 3A^2B\tau_{uu} u^{2n-3} = 0,$$

$$u_x^4 u_{xx}: \quad -6(AB)^2C\tau_u u^{2n-5} + 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5} + 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5} + 9(AB)^2C\tau_{uu} u^{2n-4} + 3(AB)^2C\tau_u u^{2n-5} + 2A^2BC\tau_{uu} u^{2n-4} + 3A^2B\tau_{uuu} u^{2n-3} = 0,$$

$$u_x u_{xx}^2: \quad 9(AB)^2\tau_x u^{2n-4} + 6A^2B\tau_{ux} u^{2n-3} = 0,$$

$$(u_x u_{xx})^2: \quad -9(AB)^2\tau_u u^{2n-4} + 9(AB)^2\tau_u u^{2n-4} + 9(AB)^2\tau_u u^{2n-4} + 6A^2B\tau_{uu} u^{2n-3} = 0,$$

$$u_x u_{xxx}: \quad A\xi_u u^{n-1} - 2AE\tau_u u^{m+n-2} + AE\tau_u u^{m+n-2} + 3A^3B^2C\tau_{xx}u^{2n-3} - 4A\xi_u u^{n-1} + 3A^2\tau_{xxu}u^{2n-2} + 3AE\tau_u u^{m+n-2} + A^2\tau_{ux}u^{2n-2} = 0,$$

$$u_x^2 u_{xxx}: \quad 3A^2BC\tau_x u^{2n-4} + 6A^2B\tau_{xu}u^{2n-3} + 3A^2\tau_{uux}u^{2n-2} + A^2\tau_{uu}u^{2n-2} = 0,$$

$$u_x^3 u_{xxx}: \quad -2A^2BC\tau_u u^{2n-4} + 3A^2BC\tau_u u^{2n-4} + 3A^2B\tau_{uu}u^{2n-3} + A^2\tau_{uuu}u^{2n-2} + A^2BC\tau_u u^{2n-4} = 0,$$

$$u_{xx}u_{xxx}: \quad 3A^2B\tau_x u^{2n-3} + 2A^2\tau_{ux}u^{2n-2} = 0,$$

$$u_x u_{xx} u_{xxx}: \quad -6A^2B\tau_u u^{2n-3} + 3A^2B\tau_u u^{2n-3} + 3A^2\tau_u u^{2n-3} + 2A^2\tau_{uu}u^{2n-2} + 3A^2B\tau_u u^{2n-3} = 0,$$

$$u_x^2 u_{xt}: \quad -6AB\tau_u u^{n-2} - 3A\tau_{uu}u^{n-1} = 0, \qquad u_{xt}: \quad -3A\tau_{xx}u^{n-1} = 0, \qquad u_x u_{xt}: \quad -6A\tau_{ux}u^{n-1} = 0,$$

$$u_{xx}u_{xt}: \quad -3A\tau_u u^{n-1} = 0, \qquad u_{xxt}: \quad -3A\tau_x u^{n-1} = 0, \qquad u_x u_{xxt}: \quad -3A\tau_u u^{n-1} = 0.$$

A equação dada pelos coeficientes de u^0 é

$$\phi_t + E\phi_x u^{m-1} + A\phi_{xxx}u^{n-1} = 0. \tag{B.6}$$

Agora usaremos essas equações para obtermos as expressões de ξ, τ e ϕ. Os coeficientes de u_{xxt} e $u_x u_{xxt}$ mostram que $\tau_x = 0$ e $\tau_u = 0$, indicando que τ é uma função apenas de t, $\tau = \tau(t)$. Usando esses resultados, vemos que a equação formada pelos coeficientes de u_{xxx},

$$A\tau_t u^{n-1} + AB\phi u^{n-2} - 3A\xi_x u^{n-1} = 0$$

tornar-se

$$(\tau_t - 3\xi_x)u^{n-1} + (n-1)\phi u^{n-2} = 0,$$

pois $B = n - 1$. Nessa equação, os coeficientes de u^{n-1} e u^{n-2} devem ser nulos, e como estamos considerando os casos em que $n\neq 1$ esses coeficientes são nulos quando $\phi = 0$ e $\tau_t = 3\xi_x$. O coeficiente de u_{xx}^2 é $\xi_u = 0$, assim $\xi = \xi(x,t)$. Integrando de τ_t, temos

$$\tau_t = 3\xi_x \quad \Rightarrow \quad \xi(x,t) = \frac{1}{3}\tau_t x + \alpha(t). \tag{B.7}$$

A equação formada pelos coeficientes de u_x,

$$E\tau_t u^{m-1} - \xi_t - E\xi_x u^{m-1} - A\xi_{xxx}u^{n-1} = 0,$$

torna-se

$$m(\tau_t - \xi_x)u^{m-1} - \xi_t = 0, \tag{B.8}$$

onde $\xi_{xxx} = 0$, devido à expressão obtida para $\xi(x,t)$. Como os coeficientes de u^{m-1} e $u^0 = 1$ devem ser nulos, temos que

$$\tau_t = \xi_x \quad \text{e} \quad \xi_t = 0.$$

Logo essas equações são satisfeitas quando ξ e τ são constantes. Sendo $\xi = a_1$ e $\tau = a_2$, e sendo $\phi = 0$, o campo vetorial tem a forma

$$\mathbf{v} = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial t}. \tag{B.9}$$