UNIVERSIDADE FEDERAL DE SAO CARLOS
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas, paralelas e semi-paralelas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Marcos Paulo Tassi

São Carlos - SP
Maio de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SAO CARLOS
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas, paralelas e semi-paralelas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Marcos Paulo Tassi

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

São Carlos - SP
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Tassi, Marcos Paulo.
T213ch	Classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas, paralelas e semi-paralelas em S^n X R / Marcos Paulo Tassi. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
	76 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.
	1. Matemática. 2. Hipersuperfícies. I. Título.
	CDD: 510 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcos Paulo Tassi, realizada em 30/03/2015:

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
UFSCar

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
UFSCar

Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis
ICMC-USP

Agradecimentos

Agradeço meus familiares, principalmente o meu pai, João Pedro, que sempre me incentivou e me apoiou.

Agradeço todos os meus professores, em especial o Professor Guillermo Lobos, pela orientação neste trabalho.

Agradeço os meus amigos, com quem compartilhei grandes momentos durante esses dois anos: Ronaldo, Rodrigo, Renata, Igor, Chico, Patrícia, Gonzalo e meus colegas do mestrado e da graduação.

Agradeço o Professor Ruy Tojeiro e a Professora Irene Ignazia pelas críticas e sugestões ao trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro e ao PICME.

Resumo

O objetivo desta dissertação de mestrado é exibir uma classificação das hipersuperfícies paralelas e semi-paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, baseada no trabalho de Joeri Van der Veken e Luc Vrancken, em [12].

A classificação que apresentaremos é uma generalização da classificação de hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$ dada por H.B. Lawson (ver [8]), da classificação de hipersuperfícies semi-paralelas obtida por J. Deprez para o espaço euclidiano (ver [5]) e por F. Dillen para o caso das formas espaciais de curvatura seccional positiva (ver [6]).

Abstract

The aim of this Masters dissertation is to show a classification of parallel and semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, based on the work of Joeri Van der Veken and Luc Vrancken, in [12].

The classification that we will present is a generalization of the classification of parallel hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{S}^n$ given by H.B. Lawson (see [8]), the classification of semi-parallel hypersurfaces obtained by J. Deprez for the euclidean space (see [5]) and by F. Dillen for the case of space forms of positive sectional curvature (see [6]).

Sumário

Introdução

Esta dissertação é baseada principalmente no trabalho de J. Van der Veken e L. Vrancken, em [12].

No primeiro capítulo, dedicaremos aos pré-requisitos. As equações fundamentais de uma imersão isométrica serão adaptadas para o caso de uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e usaremos o método do referencial móvel para provar um teorema fundamental de hipersuperfícies em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, dado por B. Daniel, em [4].

Teorema 1 *(ver [4], pag. 9) Seja M^n uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$, conexão de Levi-Civita ∇ e tensor curvatura R. Seja S uma função que para cada ponto $p \in M^n$ associa um operador auto-adjunto $S_p : T_pM^n \to T_pM^n$, de forma diferenciável. Sejam T e θ, respectivamente, um campo de vetores e uma função real diferenciável, definidos em M^n, tais que $||T||^2 = \operatorname{sen}^2\theta$. Suponha que as equações de compatibilidade sejam válidas para $\langle\cdot,\cdot\rangle, S, T$ e $\cos\theta$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, existe uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com campo normal N de modo que o operador da segunda forma fundamental de f, A_N, é dado por $df \circ S \circ df^{-1}$ (em que df^{-1} é a inversa à esquerda de df) e que $\partial_t = df(T) + \cos\theta N$. Mais ainda, f é única a menos de isometrias de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ que preservam ambas as orientações de $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{R}$.*

Apresentaremos no segundo capítulo uma versão adaptada da caracterização das hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, por seu operador da segunda forma fundamental, baseado no artigo [10], de B. Mendonça e R. Tojeiro.

Teorema 2 *(ver [10], pag. 5) Sejam $n \geq 3$ e $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície cujo operador da segunda forma fundamental é dado por:*

$$A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{bmatrix}.$$

Suponha que $A_N T = \lambda T$, em que T é a projeção de ∂_t em $f(M^n)$. Então, M^n é um aberto de uma hipersuperfície de rotação.

No terceiro capítulo, apresentaremos uma classificação das hipersuperfícies totalmente geodésicas e totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3 *(ver [12], pag. 359) Seja M^n uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há duas opções:*

(i) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$, com $t_0 \in \mathbb{R}$, ou,

(ii) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Teorema 4 *(ver [12], pag. 362) Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície totalmente umbílica, com função ângulo θ, e seja p um ponto de M^n no qual $\operatorname{sen}\theta(p) \neq 0$. Então, existem coordenadas $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ definidas em uma vizinhança de p em M^n de tal modo que θ só depende de u, o operador da segunda forma fundamental de f é dado por $A_N = \theta' id$, e,*

$$(\theta')^2 + \operatorname{sen}^2\theta = c,$$

em que c é uma constante real estritamente positiva. Além disso, localmente, existe uma isometria de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ que leva $f(M^n)$ em uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil dada por

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\operatorname{sen}\theta(u), 0, \ldots, 0, \theta'(u), \sqrt{c}\int \operatorname{sen}\theta du\right).$$

Reciprocamente, toda hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil α, θ e c como enunciados acima, é totalmente umbílica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Exibiremos no quarto capítulo uma classificação das hipersuperfíces semi-paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e, finalmente, no quinto capítulo usaremos tal classificação para identificar quais são as hipersuperfícies paralelas, uma vez que toda hipersuperfície paralela é semi-paralela.

Teorema 5 *(ver [12], pag. 366) Seja M^n uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há quatro possibilidades:*

(i) $n = 2$ e M^2 tem curvatura nula (i.e., $R = 0$),

(ii) M^n é totalmente umbílica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$,

(iii) M^n é um aberto de uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com a curva perfil sendo ou uma reta vertical, ou parametrizada por

$$\alpha(s) = \left(\cos(s), 0, \ldots, 0, \operatorname{sen}(s), \pm\int_{s_0}^{s}\sqrt{C\cos^2\sigma - 1}\,d\sigma\right),$$

(iv) M^n é um aberto de uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfíce semi-paralela de $\mathbb{S}^n$.

Teorema 6 *(ver [12], pag. 367) Seja M^n uma hipersuperfície paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há duas possibilidades:*

(i) M^n *é um aberto de* $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$*,*

(ii) M^n *é um aberto de uma hipersuperfície de* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *da forma* $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$*, em que* $\tilde{M}^{n-1}$ *é uma hipersuperfície paralela de* $\mathbb{S}^n$*.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introdutório vamos fixar algumas notações e adaptar as fórmulas que envolvem conexões e curvaturas para o caso particular de hipersuperfícies de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

1.1 Noções Básicas de Hipersuperfícies

Comecemos considerando uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ entre duas variedades Riemannianas M^n e $\tilde{M}^{n+1}$, de dimensão n e $n+1$ respectivamente, isto é, f é uma hipersuperfície. Sejam ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita e, R e $\tilde{R}$ os tensores curvatura de M^n e $\tilde{M}^{n+1}$, respectivamente. Quando mencionarmos que M^n é hipersuperfície de $\tilde{M}^{n+1}$, estará implícita uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$. Além disso, identificamos localmente M^n com $f(M^n)$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(M^n)$ e $\mathcal{D}(M^n)$, respectivamente, o conjunto dos campos tangentes a M^n e o conjunto das funções reais diferenciáveis definidas em M^n. Considere N um campo de vetores unitário normal a M^n e $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$. Definimos as seguintes aplicações:

$A_N : \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)$ dada por $A_N X \doteq -\tilde{\nabla}_X N$, denominada *operador da segunda forma fundamental* de f;

$h : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \to \mathcal{D}(M^n)$ dada por $h(X, Y) = \langle A_N X, Y \rangle$, chamada de *segunda forma fundamental* de f.

Vamos convencionar que o tensor curvatura de uma variedade Riemanniana é dado por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

A fórmula de Gauss e as equações de Gauss e Codazzi para a hipersuperfície f, respectivamente, são dadas por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N; \tag{1.1}$$

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + h(Y,W)h(X,Z) - h(X,W)h(Y,Z); \tag{1.2}$$

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z,N\rangle = (\nabla h)(X,Y,Z) - (\nabla h)(Y,X,Z), \tag{1.3}$$

em que

$$(\nabla h)(X,Y,Z) \doteq X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z).$$

Definição 1.1.1 Seja $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Dizemos que:

a) f é *totalmente geodésica* se $h = 0$;

b) f é *totalmente umbílica* se existir $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$, diferenciável, tal que $h(\cdot,\cdot) = \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle$.

c) f é *paralela* se $\nabla h = 0$;

d) f é *semi-paralela* se $R \cdot h = 0$, em que

$$(R \cdot h)(X,Y,Z,W) \doteq -h(R(X,Y)Z,W) - h(Z,R(X,Y)W). \tag{1.4}$$

1.2 Fórmulas e Equações Fundamentais de uma Hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Vamos agora adaptar as fórmulas da seção anterior ao ambiente que estamos interessados, à saber:

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1},x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Seja $i : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+2}$ a inclusão. Neste caso, i é um mergulho e com isso induzimos em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ a métrica Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}$. Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, denotamos por $X_{\mathbb{S}^n}$ o campo de vetores que a cada ponto $(p,t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ associa a projeção de $X(p,t)$ em $T_p\mathbb{S}^n$.

Sejam D a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}$, ou seja $D_X Y = dY \cdot X$ é a derivação usual de $\mathbb{R}^{n+2}$, e $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Sejam $\overline{R}$ e $\tilde{R}$ os respectivos tensores curvatura de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Note que $\xi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+2}$, dado por $\xi(x_1,\ldots,x_{n+1},x_{n+2}) = (x_1,\ldots,x_{n+1},0)$, é um campo de vetores unitário e normal a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Também, $D_X\xi = X_{\mathbb{S}^n}$, pois se $\{E_0,\ldots,E_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $X = \sum\limits_{i=1}^{n+2} x_i E_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, então

$$D_X\xi = D_{\sum\limits_{i=1}^{n+2} x_i E_i}\xi = \sum_{i=1}^{n+1} x_i E_i = X_{\mathbb{S}^n}.$$

Se denotamos por $\tilde{A}_\xi$ o operador da segunda forma fundamental da inclusão de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$, na direção ξ, e consideramos $\tilde{h}(X,Y) \doteq \langle \tilde{A}_\xi X, Y\rangle = \langle -D_X\xi, Y\rangle$, então $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, da fórmula de Gauss (1.1),

$$D_XY = \tilde{\nabla}_XY + \tilde{h}(X,Y)\xi,$$

e daí,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_XY &= D_XY - \tilde{h}(X,Y)\xi \\ &= D_XY - \langle \tilde{A}_\xi X, Y\rangle\xi = D_XY - \langle -D_X\xi, Y\rangle\xi \\ &= D_XY - \langle -X_{\mathbb{S}^n}, Y\rangle\xi = D_XY + \langle X_{\mathbb{S}^n}, Y_{\mathbb{S}^n}\rangle\xi.\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula de Gauss para $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com relação a $\mathbb{R}^{n+2}$ é dada por

$$\tilde{\nabla}_XY = D_XY + \langle X_{\mathbb{S}^n}, Y_{\mathbb{S}^n}\rangle\xi. \tag{1.5}$$

Como $\overline{R} = 0$, usando a equação (1.2), temos a seguinte expressão:

$$0 = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle + \tilde{h}(X,Z)\tilde{h}(Y,W) - \tilde{h}(Y,Z)\tilde{h}(X,W),$$

ou seja,

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \tilde{h}(Y,Z)\tilde{h}(X,W) - \tilde{h}(X,Z)\tilde{h}(Y,W).$$

Mas, $\tilde{h}(X,Y) = \langle \tilde{A}_\xi X, Y\rangle = \langle -D_X\xi, Y\rangle$, e como $D_X\xi = X_{\mathbb{S}^n}$, concluímos que

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle -Y_{\mathbb{S}^n}, Z\rangle\langle -X_{\mathbb{S}^n}, W\rangle - \langle -X_{\mathbb{S}^n}, Z\rangle\langle -Y_{\mathbb{S}^n}, W\rangle,$$

e portanto, obtemos que a equação de Gauss para a inclusão de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ é dada por:

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle Y_{\mathbb{S}^n}, Z_{\mathbb{S}^n}\rangle\langle X_{\mathbb{S}^n}, W_{\mathbb{S}^n}\rangle - \langle X_{\mathbb{S}^n}, Z_{\mathbb{S}^n}\rangle\langle Y_{\mathbb{S}^n}, W_{\mathbb{S}^n}\rangle. \tag{1.6}$$

De agora em diante $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ denotará uma hipersuperfície com campo unitário normal N. Sejam $\dfrac{\partial}{\partial t} = \partial_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$ o campo de vetores dado por $\partial_t(p,s) = c'(p,s)$, em que c_p é a curva $s \mapsto (p,s) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, e T a projeção de ∂_t no plano tangente a M^n. Também chamaremos T de *direção principal*.

Observação 1.2.1 *Note que ∂_t é um campo unitário e paralelo ao longo de qualquer caminho de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, pois $\tilde{\nabla}_X\partial_t = D_X\partial_t - \langle X_{\mathbb{S}^n}, (\partial_t)_{\mathbb{S}^n}\rangle\xi = 0$, já que ∂_t é constante.*

Definimos θ como o ângulo entre ∂_t e N, ou seja, $\cos\theta = \langle \partial_t, N\rangle$. Chamaremos θ, às vezes, de *função ângulo*. Também convém escrever

$$\partial_t = T + \langle \partial_t, N\rangle N = T + \cos\theta N.$$

Vamos deduzir as equações de Gauss e Codazzi da hipersuperfície M^n para o ambiente $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, com o auxílio do campo T. Usando a equação (1.6) e a decomposição

$$X = X_{\mathbb{S}^n} + \langle X, \partial_t\rangle\partial_t = X_{\mathbb{S}^n} + \langle X, T + \langle \partial_t, N\rangle N\rangle\partial_t = X_{\mathbb{S}^n} + \langle X, T\rangle\partial_t,$$

temos:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle Y_{\mathbb{S}^n}, Z_{\mathbb{S}^n}\rangle\langle X_{\mathbb{S}^n}, W_{\mathbb{S}^n}\rangle - \langle X_{\mathbb{S}^n}, Z_{\mathbb{S}^n}\rangle\langle Y_{\mathbb{S}^n}, W_{\mathbb{S}^n}\rangle\\
&= \langle Y - \langle Y,T\rangle\partial_t, Z - \langle Z,T\rangle\partial_t\rangle\langle X - \langle X,T\rangle\partial_t, W - \langle W,T\rangle\partial_t\rangle\\
&- \langle X - \langle X,T\rangle\partial_t, Z - \langle Z,T\rangle\partial_t\rangle\langle Y - \langle Y,T\rangle\partial_t, W - \langle W,T\rangle\partial_t\rangle\\
&= \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle\langle W,T\rangle - \langle Z,T\rangle\langle Y,T\rangle\langle X,W\rangle\\
&- \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle + \langle Y,W\rangle\langle Z,T\rangle\langle X,T\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, por (1.2), a equação de Gauss para a hipersuperfície f, expressa em termos do campo T, fica:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle\langle Y,Z\rangle X - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle T - \langle Z,T\rangle\langle Y,T\rangle X\\
&- \langle X,Z\rangle Y + \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle T + \langle Z,T\rangle\langle X,T\rangle Y\\
&+ \langle A_N Y, Z\rangle A_N X - \langle A_N X, Z\rangle A_N Y, W\rangle.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Da equação (1.3), segue-se que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}(X,Y)Z,N\rangle &= (\nabla h)(X,Y,Z) - (\nabla h)(Y,X,Z)\\
&= X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) - Y(h(X,Z)) + h(\nabla_Y X, Z)\\
&+ h(X, \nabla_Y Z)\\
&= X(\langle A_N Y, Z\rangle) - \langle A_N \nabla_X Y, Z\rangle - \langle A_N Y, \nabla_X Z\rangle\\
&- Y(\langle A_N X, Z\rangle) + \langle A_N \nabla_Y X, Z\rangle + \langle A_N X, \nabla_Y Z\rangle\\
&= X(\langle A_N Y, Z\rangle) - \langle A_N \nabla_X Y, Z\rangle - X(\langle A_N Y, Z\rangle)\\
&+ \langle \nabla_X A_N Y, Z\rangle - Y(\langle A_N X, Z\rangle) + \langle A_N \nabla_Y X, Z\rangle + Y(\langle A_N X, Z\rangle)\\
&- \langle \nabla_Y A_N X, Z\rangle\\
&= \langle \nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X - A_N[X,Y], Z\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $N = \dfrac{1}{\cos\theta}(\partial_t - T)$, temos que

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z,N\rangle = \frac{1}{\cos\theta}(\langle \tilde{R}(X,Y)Z,\partial_t\rangle - \langle \tilde{R}(X,Y)Z,T\rangle).$$

Mas, usando as fórmulas (1.2) e (1.7), para a segunda parcela do lado direito obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}(X,Y)Z,T\rangle &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle + h(X,Z)h(Y,T) - h(Y,Z)h(X,T) \\
&= \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle\langle T,T\rangle - \langle Z,T\rangle\langle Y,T\rangle\langle X,T\rangle \\
&- \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\langle T,T\rangle + \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle X,T\rangle \\
&= \langle \langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X + \langle Y,T\rangle\langle T,T\rangle X - \langle X,T\rangle\langle T,T\rangle Y, Z\rangle \\
&= (1 - ||T||^2)\langle\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, como $\cos\theta = \langle N, \partial_t\rangle$ e $\partial_t = T + \cos\theta N$, temos que

$$||T||^2 = 1 - \cos^2\theta.$$

Assim,

$$\frac{1}{\cos\theta}\langle \tilde{R}(X,Y)Z,T\rangle = \cos\theta\langle\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X, Z\rangle.$$

E quanto a $\langle \tilde{R}(X,Y)Z,\partial_t\rangle$, lembramos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, $\tilde{\nabla}_X \partial_t = 0$. Daí,

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z,\partial_t\rangle = -\langle \tilde{R}(X,Y)\partial_t, Z\rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\partial_t - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\partial_t - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}\partial_t, Z\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle \nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X - A_N[X,Y], Z\rangle = \cos\theta\langle\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y, Z\rangle, \tag{1.8}$$

$\forall Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Assim, a equação de Codazzi para a hipersuperfície f, em termos do campo T, fica:

$$\nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X - A_N[X,Y] = \cos\theta(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y). \tag{1.9}$$

Mais duas relações são válidas. Usando que $\tilde{\nabla}_X(\partial_t) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, por definição, segue-se que

$$\begin{aligned}
\nabla_X T &= (\tilde{\nabla}_X(\partial_t - \cos\theta N))^T = (\tilde{\nabla}_X\partial_t - X(\cos\theta)N - \cos\theta\tilde{\nabla}_X N)^T \\
&= -\cos\theta(\tilde{\nabla}_X N)^T = \cos\theta A_N X,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

em que o superíndice T significa a parte tangencial a M^n. Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
X(\cos\theta) &= X(\langle N,\partial_t\rangle) = \langle \tilde{\nabla}_X N, \partial_t\rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X\partial_t\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X N, \partial_t\rangle = \langle -A_N X, \partial_t\rangle = -\langle A_N X, T\rangle.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.3 Teorema Fundamental para Hipersuperfícies em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

As equações de Gauss, Ricci e Codazzi na Geometria Riemanniana têm importância por estarem relacionadas com teoremas de existência e unicidade de subvariedades, cujos tensores curvaturas verificam tais equações. Esses teoremas são chamados "Teoremas Fundamentais de Subvariedades". A versão para o nosso ambiente que será utilizada nesta dissertação segue abaixo. É um teorema de existência e unicidade de hipersuperfícies em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, devido a B. Daniel.

Baseado nas equações fundamentais de hipersuperfícies de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.1 Sejam $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana, $\nu : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, T um campo tangente a M^n e S uma função que a cada ponto $p \in M^n$, associa um operador auto-adjunto $S(p) : T_pM^n \to T_pM^n$, de forma diferenciável. Dizemos que a lista $(\langle\cdot,\cdot\rangle, S, T, \nu)$ satisfaz as *equações de compatibilidade* para $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ se, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$,

$$||T||^2 + \nu^2 = 1, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & \langle SY, Z\rangle SX - \langle SX, Z\rangle SY \\ & - \langle X, Z\rangle Y + \langle Y, Z\rangle X + \langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle T \\ & + \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle Y - \langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle T - \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle X, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = \nu(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y), \tag{1.14}$$

$$\nabla_X T = \nu SX, \tag{1.15}$$

$$X(\nu) = d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle. \tag{1.16}$$

Teorema 1.3.2 *(ver [4], pag. 9) Seja $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, com conexão de Levi-Civita ∇ e tensor curvatura R. Seja S uma função que para cada ponto $p \in M^n$ associa um operador auto-adjunto $S_p : T_pM^n \to T_pM^n$, de forma diferenciável. Sejam T e θ, respectivamente, um campo de vetores e uma função real diferenciável, definidos em M^n, tais que $||T||^2 = \operatorname{sen}^2\theta$. Suponha que as equações (1.13), (1.14), (1.15) e (1.16) sejam válidas para $(\langle\cdot,\cdot\rangle, S, T, \cos\theta)$. Então, existe uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com campo normal N cujo operador da segunda forma fundamental A_N é dado por $df \circ S \circ df^{-1}$ (em que df^{-1} é a inversa à esquerda de df) e que $\partial_t = df(T) + \cos\theta N$. Mais ainda, f é única a menos de isometrias de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ que preservam ambas as orientações de $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{R}$.*

Para prová-lo, usaremos o método do referencial móvel de Cartan, baseando-se no artigo [4].

Sejam M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, cuja conexão de Levi-Civita e tensor curvatura são, respectivamente, ∇ e R, e S uma função que para cada ponto $p \in M^n$ associa um operador auto-adjunto $S_p : T_pM^n \to T_pM^n$, de forma diferenciável. Consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M^n. Tal referencial existe se escolhermos um ponto $y \in M^n$, tomarmos uma base ortonormal de T_yM^n e, em cada ponto numa vizinhança de y onde a aplicação exponencial exp_y é um difeomorfismo, fazer o transporte paralelo dessa base ortonormal. Consideremos também $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ a base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$, ou seja, os $\omega^i : TM^n \to \mathbb{R}$ são, para cada $y \in M$, funcionais lineares de T_yM^n definidos da seguinte maneira:

$$\omega^i(e_k) = \langle e_i, e_k \rangle = \delta^i_k. \tag{1.17}$$

Também definimos:

$$\omega^{n+1} = 0, \tag{1.18}$$

e as 1-formas ω^i_j, ω^{n+1}_j, ω^i_{n+1} e ω^{n+1}_{n+1} em M^n, dadas por:

$$\omega^i_j(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle; \tag{1.19}$$

$$\omega^{n+1}_j(e_k) = \langle Se_k, e_j \rangle; \tag{1.20}$$

$$\omega^i_{n+1} = -\omega^{n+1}_i; \tag{1.21}$$

$$\omega^{n+1}_{n+1} = 0. \tag{1.22}$$

Disso e do fato de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ser um referencial ortonormal, podemos escrever

$$\nabla_{e_k} e_j = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_j(e_k) e_i,$$

$$Se_k = \sum_{j=1}^{n} \langle Se_k, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} \omega^{n+1}_j(e_k) e_j.$$

Também definimos $R^i_{klj} = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle$.

Usaremos as seguintes fórmulas com respeito às 1-formas diferenciais:

$$\omega \wedge \sigma(e_r, e_s) = \omega(e_r)\sigma(e_s) - \omega(e_s)\sigma(e_r), \tag{1.23}$$

$$d\omega(e_r, e_s) = e_r(\omega(e_s)) - e_s(\omega(e_r)) - \omega([e_r, e_s]). \tag{1.24}$$

Vejamos agora algumas proposições e lemas que nos auxiliarão para a demonstração do Teorema 1.3.2.

Proposição 1.3.3 *As seguintes fórmulas são válidas:*

(i) $d\omega^i + \sum_{r=1}^{n} \omega^i_r \wedge \omega^r = 0;$

(ii) $\sum_{r=1}^{n} \omega^{n+1}_r \wedge \omega^r = 0;$

(iii) $d\omega^i_j + \sum_{r=1}^{n} \omega^i_r \wedge \omega^r_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} R^i_{klj} \omega^k \wedge \omega^l;$

(iv) $d\omega_j^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \omega_r^{n+1} \wedge \omega_j^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l.$

Demonstração (i) Para todo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned}
d\omega^i(e_r, e_s) &= e_r(\omega^i(e_s)) - e_s(\omega^i(e_r)) - \omega^i([e_r, e_s]) \\
&= e_r(\delta_i^s) - e_s(\delta_i^r) - \omega^i([e_r, e_s]) \\
&= -\omega^i([e_r, e_s]) = -\langle [e_r, e_s], e_i \rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_r} e_s - \nabla_{e_s} e_r, e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_{e_s} e_r, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_r} e_s, e_i \rangle = \omega_r^i(e_s) - \omega_s^i(e_r).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \wedge \omega^k(e_r, e_s) &= \sum_{k=1}^{n} (\omega_k^i(e_r)\omega^k(e_s) - \omega_k^i(e_s)\omega^k(e_r)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_k^i(e_r)\delta_s^k - \omega_k^i(e_s)\delta_r^k) = \omega_s^i(e_r) - \omega_r^i(e_s).
\end{aligned}$$

Logo, $d\omega^i + \sum_{r=1}^{n} \omega_r^i \wedge \omega^r = 0$.

(ii) Para todo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \omega_k^{n+1} \wedge \omega^k(e_r, e_s) &= \sum_{k=1}^{n} (\omega_k^{n+1}(e_r)\omega^k(e_s) - \omega_k^{n+1}(e_s)\omega^k(e_r)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_k^{n+1}(e_r)\delta_k^s - \omega_k^{n+1}(e_s)\delta_k^r) \\
&= \omega_s^{n+1}(e_r) - \omega_r^{n+1}(e_s) \\
&= \langle Se_r, e_s \rangle - \langle Se_s, e_r \rangle = 0,
\end{aligned}$$

pois S é auto-adjunto. Logo, $\sum_{r=1}^{n} \omega_r^{n+1} \wedge \omega^r = 0$.

(iii) Se $v = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k$, então

$$\begin{aligned}
\omega_j^i(v) &= \left\langle \nabla_{\sum_{k=1}^{n} v_k e_k} e_j, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^k(v).
\end{aligned}$$

Logo, $\omega_j^i = \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^k$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} e_l(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^l \wedge \omega^k(e_a, e_b) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} e_l(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)(\delta_l^a\delta_k^b - \delta_k^a\delta_l^b)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(e_a(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^k(e_b) - e_b(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^k(e_a)).\end{aligned}$$

E, como

$$\begin{aligned}d(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega^k)(e_a, e_b) &= e_a(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega^k)(e_b) - e_b(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega^k)(e_a)\\ &\quad - \langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega^k([e_a, e_b])\\ &= e_a(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^k(e_b) - e_b(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^k(e_a)\\ &\quad + \langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle d\omega^k(e_a, e_b),\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}d\omega_j^i(e_a, e_b) &= d\left(\sum_{k=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega^k\right)(e_a, e_b) = \sum_{k=1}^{n} d(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega^k)(e_a, e_b)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(e_a(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^k(e_b) - e_b(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^k(e_a)) + \sum_{k=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle d\omega^k(e_a, e_b)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} e_l(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^l \wedge \omega^k(e_a, e_b) + \sum_{k=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle d\omega^k(e_a, e_b)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} e_l(\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle)\omega^l \wedge \omega^k(e_a, e_b) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega_l^k \wedge \omega^l(e_a, e_b)\end{aligned}$$

pois, pelo ítem (i), $d\omega^k = -\sum_{l=1}^{n}\omega_l^k \wedge \omega^l$, e, $d(\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle)\omega^k = \sum_{l=1}^{n} e_l\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\omega^l \wedge \omega^k$. Agora, como $\omega_l^k = \sum_{s=1}^{n}\langle\nabla_{e_s}e_l, e_k\rangle\omega^s$, então

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\omega_l^k \wedge \omega^l &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\left(\sum_{s=1}^{n}\langle\nabla_{e_s}e_l, e_k\rangle\omega^s\right)\wedge\omega^l\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\langle\nabla_{e_k}e_j, e_i\rangle\langle\nabla_{e_s}e_l, e_k\rangle\omega^s \wedge \omega^l\\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left\langle\sum_{k=1}^{n}\langle\nabla_{e_s}e_l, e_k\rangle\nabla_{e_k}e_j, e_i\right\rangle\omega^s \wedge \omega^l\\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left\langle\nabla_{\sum_{k=1}^{n}\langle\nabla_{e_s}e_l, e_k\rangle e_k}e_j, e_i\right\rangle\omega^s \wedge \omega^l\\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{\nabla_{e_s}e_l}e_j\rangle\omega^s \wedge \omega^l\end{aligned}$$

$$= -\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle \nabla_{\nabla_{e_k}e_l}e_j, e_i\rangle \omega^l \wedge \omega^k.$$

Por outro lado, usando o fato de $\wedge$ ser bilinear alternada e de $e_l(\langle e_i, e_r\rangle) = 0$ (e portanto, $\langle \nabla_{e_l}e_r, e_i\rangle = -\langle \nabla_{e_l}e_i, e_r\rangle$), temos ainda que

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n}\omega_r^i \wedge \omega_j^r &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle \nabla_{e_l}e_r, e_i\rangle \omega^l\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n}\langle \nabla_{e_k}e_j, e_r\rangle \omega^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\langle \nabla_{e_l}e_r, e_i\rangle\langle \nabla_{e_k}e_j, e_r\rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\langle \nabla_{e_l}e_i, e_r\rangle\langle \nabla_{e_k}e_j, e_r\rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\langle \sum_{r=1}^{n}\langle \nabla_{e_l}e_i, e_r\rangle e_r, \nabla_{e_k}e_j\right\rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle \omega^l \wedge \omega^k.
\end{aligned}$$

Juntando essas informações, é válido que:

$$d\omega_j^i + \sum_{r=1}^{n}\omega_r^i \wedge \omega_j^r = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_j + \nabla_{\nabla_{e_k}e_l}e_j\rangle \omega^l \wedge \omega^k. \tag{1.25}$$

Se trocarmos os índices, podemos ainda escrever

$$d\omega_j^i + \sum_{r=1}^{n}\omega_r^i \wedge \omega_j^r = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_j + \nabla_{\nabla_{e_l}e_k}e_j\rangle \omega^l \wedge \omega^k. \tag{1.26}$$

Assim, somando as equações (1.25) e (1.26), fica

$$\begin{aligned}
2(d\omega_j^i + \sum_{r=1}^{n}\omega_r^i \wedge \omega_j^r) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_j + \nabla_{\nabla_{e_k}e_l}e_j - \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_j - \nabla_{\nabla_{e_l}e_k}e_j\rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_j - \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_j + \nabla_{\nabla_{e_k}e_l - \nabla_{e_l}e_k}e_j\rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_j - \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_j + \nabla_{[e_k,e_l]}e_j\rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}R_{klj}^i \omega^l \wedge \omega^k.
\end{aligned}$$

Logo, $d\omega_j^i + \sum\limits_{r=1}^{n}\omega_r^i \wedge \omega_j^r = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}R_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l$.

(iv) Se $v = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k e_k$, então

$$\begin{aligned}\omega_j^{n+1}(v) &= \left\langle S\left(\sum_{k=1}^n v_k e_k\right), e_j\right\rangle = \sum_{k=1}^n v_k \langle Se_k, e_j\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle v, e_k\rangle\langle Se_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle \omega^k(v).\end{aligned}$$

Logo, $\omega_j^{n+1} = \sum\limits_{k=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle\omega^k$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n e_l(\langle Se_k, e_j\rangle)\omega^l \wedge \omega^k(e_a, e_b) &= \sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^n e_l(\langle Se_k, e_j\rangle)(\delta_l^a\delta_k^b - \delta_k^a\delta_l^b) \\ &= e_a(\langle Se_b, e_j\rangle) - e_b(\langle Se_a, e_j\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^n (e_a(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k(e_b) - e_b(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k(e_a)).\end{aligned}$$

Daí, como

$$\begin{aligned}d(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k)(e_a, e_b) &= e_a(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k(e_b)) - e_b(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k(e_a)) \\ &- \langle Se_k, e_j\rangle\omega^k([e_a, e_b]) \\ &= e_a(\langle Se_k, e_j\rangle)\omega^k(e_b) - e_b(\langle Se_k, e_j\rangle)\omega^k(e_a) \\ &+ \langle Se_k, e_j\rangle d\omega^k(e_a, e_b),\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}d\omega_j^{n+1}(e_a, e_b) &= d\left(\sum_{k=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle\omega^k\right) = \sum_{k=1}^n d(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k)(e_a, e_b) \\ &= \sum_{k=1}^n e_a(\langle Se_k, e_j\rangle)\omega^k(e_b) - e_b(\langle Se_k, e_j\rangle)\omega^k(e_a) + \sum_{k=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle d\omega^k(e_a, e_b) \\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n e_l(\langle Se_k, e_j\rangle)\omega^l \wedge \omega^k(e_a, e_b) - \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle\omega_l^k \wedge \omega^l(e_a, e_b),\end{aligned}$$

pois, pelo ítem (i), $d\omega^k = -\sum\limits_{l=1}^n \omega_l^k \wedge \omega^l$.

Como $\omega_l^k = \sum\limits_{s=1}^n \langle\nabla_{e_s} e_l, e_k\rangle\omega^s$, então

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle\omega_l^k \wedge \omega^l &= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle\left(\sum_{s=1}^n \langle\nabla_{e_s} e_l, e_k\rangle\omega^s\right) \wedge \omega^l \\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{s=1}^n \langle Se_k, e_j\rangle\langle\nabla_{e_s} e_l, e_k\rangle\omega^s \wedge \omega^l\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left\langle \nabla_{e_s} e_l, \sum_{k=1}^{n}\langle Se_k, e_j\rangle e_k \right\rangle \omega^s \wedge \omega^l \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left\langle \nabla_{e_s} e_l, \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, Se_j\rangle e_k \right\rangle \omega^s \wedge \omega^l \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\langle Se_j, \nabla_{e_s} e_l\rangle \omega^s \wedge \omega^l \\
&= -\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle Se_j, \nabla_{e_k} e_l\rangle \omega^l \wedge \omega^k.
\end{aligned}
$$

Agora, usando novamente o fato de $\wedge$ ser bilinear alternada e que $e_l(\langle e_i, e_r\rangle) = 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n}\omega_r^{n+1}\wedge\omega_j^r &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k, e_r\rangle\omega^k\right)\wedge\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_l} e_j, e_r\rangle\omega^l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\langle Se_k, e_r\rangle\langle\nabla_{e_l} e_j, e_r\rangle\omega^k\wedge\omega^l \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\langle \nabla_{e_l} e_j, \sum_{r=1}^{n}\langle Se_k, e_r\rangle e_r\right\rangle\omega^k\wedge\omega^l \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_l} e_j, Se_k\rangle\omega^k\wedge\omega^l.
\end{aligned}
$$

Concluímos, então, que

$$
\begin{aligned}
d\omega_j^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\omega_r^{n+1}\wedge\omega_j^r &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\langle\nabla_{e_l} Se_k, e_j\rangle + \langle Se_k, \nabla_{e_l} e_j\rangle \\
&\quad + \langle Se_j, \nabla_{e_k} e_l\rangle - \langle Se_k, \nabla_{e_l} e_j\rangle)\omega^l\wedge\omega^k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_l} Se_k + S\nabla_{e_k} e_l, e_j\rangle\omega^l\wedge\omega^k. \qquad (1.27)
\end{aligned}
$$

Trocando os índices em (1.27), escrevemos

$$
d\omega_j^i + \sum_{r=1}^{n}\omega_r^i\wedge\omega_j^r = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_k} Se_l + S\nabla_{e_l} e_k, e_j\rangle\omega^l\wedge\omega^k. \qquad (1.28)
$$

Somando as equações (1.27) e (1.28), tem-se

$$
\begin{aligned}
2\left(d\omega_j^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\omega_r^{n+1}\wedge\omega_j^r\right) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\nabla_{e_l} Se_k - \nabla_{e_k} Se_l - S\nabla_{e_l} e_k \\
&\quad + S\nabla_{e_k} e_l, e_j\rangle\omega^l\wedge\omega^k,
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
d\omega_j^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \omega_r^{n+1} \wedge \omega_j^r &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \langle \nabla_{e_l} S e_k - \nabla_{e_k} S e_l + S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l,
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

Definição 1.3.4 Definimos os números:

$$T^k = \langle T, e_k \rangle, \quad \text{para } k \in \{1, \dots, n\}; \tag{1.29}$$

$$T^{n+1} = \nu; \tag{1.30}$$

$$T^0 = 0; \tag{1.31}$$

e as 1-formas:

$$\omega_j^0(e_k) = T^j T^k - \delta_j^k; \tag{1.32}$$

$$\omega_{n+1}^0(e_k) = \nu T^k = T^{n+1} T^k; \tag{1.33}$$

$$\omega_0^i = -\omega_i^0; \tag{1.34}$$

$$\omega_0^{n+1} = -\omega_{n+1}^0; \tag{1.35}$$

$$\omega_0^0 = 0. \tag{1.36}$$

Definição 1.3.5 Em M^n, definimos η como a seguinte 1-forma:

$$\eta(X) = \langle T, X \rangle. \tag{1.37}$$

Também definimos a 1-forma matricial Ω por:

$$\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha, \qquad \text{para} \quad \alpha, \beta \in \{0, \dots, n+1\}.$$

Em seguida, iremos provar três lemas e uma proposição, cruciais para a demonstração do Teorema 1.3.2.

Lema 1.3.6 *É válido que:*

$$d\eta = 0.$$

Demonstração Usando a definição dada pela fórmula (1.24) e a equação (1.15), temos que

$$
\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= X \cdot \eta(Y) - Y \cdot \eta(X) - \eta([X,Y]) \\
&= X(\langle T, Y \rangle) - Y(\langle T, X \rangle) - \langle T, [X,Y] \rangle
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle + \langle T, \nabla_X Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle - \langle T, \nabla_Y X\rangle - \langle T, [X,Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle \\
&= \langle \nu SX, Y\rangle - \langle \nu SY, X\rangle = 0,
\end{aligned}$$

uma vez que S é auto-adjunto, ∇ é simétrica e vale a equação (1.12). □

Lema 1.3.7 *É válido que:*

$$dT^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_\alpha^\gamma.$$

Demonstração Inicialmente, suponha que $0 < \alpha < n+1$. Pela definição de T^α e por (1.15), temos

$$\begin{aligned}
dT^\alpha(X) = X(\langle T, e_\alpha\rangle) &= \langle \nabla_X T, e_\alpha\rangle + \langle T, \nabla_X e_\alpha\rangle \\
&= \nu\langle SX, e_\alpha\rangle + \langle T, \nabla_X e_\alpha\rangle.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Para obter o outro lado da igualdade, há três casos a considerar. Primeiro, suponha que $1 \leq \alpha \leq n$. Usando a definição de ω_α^γ, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_\alpha^\gamma(X) &= T^0\omega_\alpha^0(X) + \sum_{k=1}^{n} \langle T, e_k\rangle \langle \nabla_X e_\alpha, e_k\rangle + T^{n+1}\omega_\alpha^{n+1}(X) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle T, e_k\rangle \langle \nabla_X e_\alpha, e_k\rangle + \nu\langle SX, e_\alpha\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X e_\alpha, \sum_{\gamma=1}^{n} \langle T, e_\gamma\rangle e_\gamma \right\rangle + \nu\langle SX, e_\alpha\rangle \\
&= \langle \nabla_X e_\alpha, T\rangle + \nu\langle SX, e_\alpha\rangle.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Juntando (1.38) e (1.39), concluímos que

$$dT^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_\alpha^\gamma. \tag{1.40}$$

Suponha agora que $\alpha = n+1$. Por definição $dT^{n+1}(X) = d\nu(X)$ e, por (1.16), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_{n+1}^\gamma(X) &= T^0\omega_{n+1}^0(X) + \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_{n+1}^\gamma(X) + T^{n+1}\omega_{n+1}^{n+1}(X) \\
&= \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_{n+1}^\gamma(X) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_\gamma^{n+1}(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \langle SX, e_\gamma\rangle = \left\langle SX, -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma e_\gamma \right\rangle \\
&= -\langle SX, T\rangle = d\nu(X).
\end{aligned}$$

Assim,

$$dT^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_\alpha^\gamma. \tag{1.41}$$

Finalmente, suponha que $\alpha = 0$. Então $dT^0(X) = d0(X) = 0$, e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_0^\gamma(X) &= T^0\omega_0^0(X) + \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_0^\gamma(X) + T^{n+1}\omega_0^{n+1}(X) \\
&= \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_0^\gamma(X) + T^{n+1}\omega_0^{n+1}(X) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_\gamma^0(X) - T^{n+1}\omega_{n+1}^0(X) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \omega_\gamma^0 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) - T^{n+1}\omega_{n+1}^0 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k T^\gamma \omega_\gamma^0(e_k) - T^{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k \omega_{n+1}^0(e_k) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k T^\gamma (T^\gamma T^k - \delta_\gamma^k) - \nu \sum_{k=1}^{n} x_k(\nu T^k) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k T^\gamma T^\gamma T^k + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k T^k \delta_\gamma^k - \nu^2 \sum_{k=1}^{n} x_k T^k \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma T^\gamma \langle X, T\rangle + \sum_{k=1}^{n} T^k \langle X, T\rangle - \nu^2 \left\langle T, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\rangle \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} (T^\gamma)^2 \langle X, T\rangle + (1-\nu^2)\langle X, T\rangle \\
&= (-||T||^2 + 1 - \nu^2)\langle X, T\rangle = 0,
\end{aligned}$$

pois, por hipótese, $||T||^2 + \nu^2 = 1$. Logo, $dT^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_\alpha^\gamma$. □

Lema 1.3.8 *É válido que:*

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0.$$

Demonstração Considere $\Psi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$. Pelas definições dadas pelas fórmulas (1.23) e (1.24), temos que

$$\begin{aligned} d\Omega(e_r,e_s)^\alpha_\beta &= (e_r\Omega(e_s) - e_s(\Omega(e_r)) - \Omega([e_r,e_s]))^\alpha_\beta \\ &= e_r(\omega^\alpha_\beta(e_s)) - e_s(\omega^\alpha_\beta(e_r)) - \omega^\alpha_\beta([e_r,e_s]) \\ &= d\omega^\alpha_\beta(e_r,e_s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega\wedge\Omega(e_r,e_s)^\alpha_\beta &= (\Omega(e_r)\Omega(e_s) - \Omega(e_s)\Omega(e_r))^\alpha_\beta \\ &= \sum_{\gamma=0}^{n+1}\Omega(e_r)^\alpha_\gamma\Omega(e_s)^\gamma_\beta - \sum_{\gamma=0}^{n+1}\Omega(e_s)^\alpha_\gamma\Omega(e_r)^\gamma_\beta \\ &= \sum_{\gamma=0}^{n+1}\omega(e_r)^\alpha_\gamma\omega(e_s)^\gamma_\beta - \sum_{\gamma=0}^{n+1}\omega^\alpha_\gamma(e_s)\omega^\gamma_\beta(e_r) \\ &= \sum_{\gamma=0}^{n+1}\omega^\alpha_\gamma\wedge\omega^\gamma_\beta(e_r,e_s), \end{aligned}$$

que por linearidade das coordenadas, nos leva a concluir que

$$d\Omega(X,Y)^\alpha_\beta = d\omega(X,Y)^\alpha_\beta \Rightarrow d\Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta,$$

e que

$$(\Omega\wedge\Omega)^\alpha_\beta = \sum_{\gamma=0}^{n+1}\omega^\alpha_\gamma\wedge\omega^\gamma_\beta.$$

Logo, se $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, pela Proposição 1.3.3 (ítem (iii)),

$$\begin{aligned} \Psi^i_j = (d\Omega+\Omega\wedge\Omega)^i_j = (d\Omega)^i_j + (\Omega\wedge\Omega)^i_j &= d\omega^i_j + \sum_{\gamma=0}^{n+1}\omega^i_\gamma\wedge\omega^\gamma_j \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}R^i_{klj}\omega^k\wedge\omega^l - \sum_{r=1}^{n}\omega^i_r\wedge\omega^r_j &+ \sum_{\gamma=0}^{n+1}\omega^i_\gamma\wedge\omega^\gamma_j \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}R^i_{klj}\omega^k\wedge\omega^l + \omega^i_{n+1}\wedge\omega^{n+1}_j &+ \omega^i_0\wedge\omega^0_j. \end{aligned}$$

Assim, de (1.13), obtemos que

$$\begin{aligned} R^i_{klj} = \langle R(e_k,e_l)e_j,e_i\rangle &= \langle Se_l,e_j\rangle\langle Se_k,e_i\rangle - \langle Se_k,e_j\rangle\langle Se_l,e_i\rangle - \langle e_k,e_j\rangle\langle e_l,e_i\rangle \\ &+ \langle e_l,e_j\rangle\langle e_k,e_i\rangle + \langle e_l,T\rangle\langle e_k,e_j\rangle\langle e_i,T\rangle + \langle e_k,T\rangle\langle e_j,T\rangle\langle e_l,e_i\rangle \\ &- \langle e_k,T\rangle\langle e_l,e_j\rangle\langle e_i,T\rangle - \langle e_l,T\rangle\langle e_j,T\rangle\langle e_k,e_i\rangle \\ &= \omega^{n+1}_i(e_k)\omega^{n+1}_j(e_l) - \omega^{n+1}_i(e_l)\omega^{n+1}_j(e_k) - \delta^k_j\delta^l_i \\ &+ \delta^l_j\delta^k_i + T^lT^i\delta^k_j + T^kT^j\delta^l_i - T^kT^i\delta^l_j - T^lT^j\delta^k_i \\ &= \omega^{n+1}_i\wedge\omega^{n+1}_j(e_k,e_l) - \delta^k_j\delta^l_i + \delta^l_j\delta^k_i + T^lT^i\delta^k_j + T^kT^j\delta^l_i \\ &- T^kT^i\delta^l_j - T^lT^j\delta^k_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{R}^i_{klj} + \omega_i^{n+1} \wedge \omega_j^{n+1}(e_k, e_l) \\
&= \overline{R}^i_{klj} - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_k, e_l),
\end{aligned}
$$

em que $\overline{R}^i_{klj} \doteq \delta^l_j \delta^k_i - \delta^k_j \delta^l_i + T^l T^i \delta^k_j + T^k T^j \delta^l_i - T^k T^i \delta^l_j - T^l T^j \delta^k_i$.
Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^i_{klj} &= \delta^l_j \delta^k_i - \delta^k_j \delta^l_i + T^l T^i \delta^k_j + T^k T^j \delta^l_i - T^k T^i \delta^l_j - T^l T^j \delta^k_i \\
&= (T^i T^k - \delta^k_i)(T^j T^l - \delta^l_j) - (T^i T^l - \delta^l_i)(T^j T^k - \delta^k_j) \\
&= \omega_i^0(e_k)\omega_j^0(e_l) - \omega_i^0(e_l)\omega_j^0(e_k) = \omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_k, e_l) \\
&= -\omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_k, e_l).
\end{aligned}
$$

Logo, $R^i_{klj} = -\omega_j^0 \wedge \omega_0^i(e_k, e_l) - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_k, e_l)$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R^i_{klj} \omega^k \wedge \omega^l(e_a, e_b) &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_k, e_l) \\
&+ \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_k, e_l))\omega^k \wedge \omega^l(e_a, e_b) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_k, e_l) \\
&+ \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_k, e_l))(\delta^a_k \delta^b_l - \delta^b_k \delta^a_l) \\
&= -\frac{1}{2}(\omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_a, e_b) - \omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_b, e_a) \\
&+ \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_a, e_b) - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_b, e_a)) \\
&= -\omega_0^i \wedge \omega_j^0(e_a, e_b) - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}(e_a, e_b),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R^i_{klj} \omega^k \wedge \omega^l = -\omega_0^i \wedge \omega_j^0 - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1}.
$$

Portanto, concluímos que $\Psi^i_j = 0$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Agora, se $j \in \{1, \ldots, n\}$, pela Proposição 1.3.3, temos

$$
\begin{aligned}
\Psi^{n+1}_j &= (d\Omega + \Omega \wedge \Omega)^{n+1}_j = (d\Omega)^{n+1}_j + (\Omega \wedge \Omega)^{n+1}_j \\
&= d\omega_j^{n+1} + \sum_{\gamma=0}^{n+1} \omega_\gamma^{n+1} \wedge \omega_j^\gamma \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l \\
&- \sum_{r=1}^n \omega_r^{n+1} \wedge \omega_j^r + \sum_{\gamma=0}^{n+1} \omega_\gamma^{n+1} \wedge \omega_j^\gamma
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j\rangle \omega^k \wedge \omega^l + \omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0.$$

Além disso, pela equação (1.14), obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j\rangle &= \langle \nu(\langle e_l, T\rangle e_k - \langle e_k, T\rangle e_l), e_j\rangle \\ &= \nu\langle e_k, T\rangle\langle e_l, e_j\rangle - \nu\langle e_l, T\rangle\langle e_k, e_j\rangle \\ &= \nu(T^l\delta_j^k - T^k\delta_j^l) \\ &= T^lT^{n+1}\delta_j^k - T^kT^{n+1}\delta_j^l,\end{aligned}$$

uma vez que $T^{n+1} = \nu$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_k, e_l) &= \omega_0^{n+1}(e_k)\omega_j^0(e_l) - \omega_0^{n+1}(e_l)\omega_j^0(e_k) \\ &= -(\nu T^k)(T^jT^l - \delta_j^l) + (\nu T^l)(T^jT^k - \delta_j^k) \\ &= T^lT^{n+1}\delta_j^k - T^kT^{n+1}\delta_j^l \\ &= -\langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j\rangle.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j\rangle \omega^k \wedge \omega^l(e_a, e_b) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_k, e_l))\omega^k \wedge \omega^l(e_a, e_b) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_k, e_l))(\delta_k^a\delta_l^b - \delta_k^b\delta_l^a) \\ &= -\frac{1}{2}(\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_a, e_b) - \omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_b, e_a)) \\ &= -\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_a, e_b),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j\rangle \omega^k \wedge \omega^l = -\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0.$$

Portanto, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}\Psi_j^{n+1} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0(e_k, e_l))\omega^k \wedge \omega^l + \omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0 \\ &= -\omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0 + \omega_0^{n+1} \wedge \omega_j^0 = 0.\end{aligned}$$

Calcularemos agora Ψ_j^0, para $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por definição de ω_j^0 e η,

$$\begin{aligned}\omega_j^0(e_k) &= T^jT^k - \delta_j^k = T^j\langle T, e_k\rangle - \langle e_j, e_k\rangle\\ &= T^j\eta(e_k) - \omega^j(e_k),\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\omega_j^0 = T^j\eta - \omega^j.$$

Pelo Lema 1.3.6, $d\eta = 0$. Logo, obtemos que

$$\begin{aligned}d\omega_j^0 &= d(T^j\eta - \omega^j) = dT^j \wedge \eta + T^j \wedge d\eta - d\omega^j = dT^j \wedge \eta - d\omega^j\\ &= dT^j \wedge \eta + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^j \wedge \omega^k, \qquad (1.42)\end{aligned}$$

sendo que esta última igualdade segue da Proposição 1.3.3.
Agora, calculando explicitamente $\Psi_j^0(e_r, e_s)$, usando que

$$\begin{aligned}d\Omega_j^i(e_r, e_s) &= (e_r(\Omega(e_s)) - e_s(\Omega(e_r)) - \Omega([e_r, e_s]))_j^i\\ &= e_r(\omega_j^i(e_s)) - e_s(\omega_j^i(e_r)) - \omega_j^i([e_r, e_s])\\ &= d\omega_j^i(e_r, e_s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Omega \wedge \Omega)_j^i(e_r, e_s) &= (\Omega(e_r)\Omega(e_s) - \Omega(e_s)\Omega(e_r))_j^i\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \Omega(e_r)_k^i\Omega(e_s)_j^k - \sum_{k=0}^{n+1} \Omega(e_s)_k^i\Omega(e_r)_j^k\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(\Omega(e_r)_k^i\Omega(e_s)_j^k - \Omega(e_r)_k^i\Omega(e_s)_j^k)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(\omega_k^i(e_r)\omega_j^k(e_s) - \omega_k^i(e_r)_j^k\omega(e_s))\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \omega_k^i \wedge \omega_j^k(e_r, e_s),\end{aligned}$$

e, também o Lema 1.3.7, obtemos que

$$\begin{aligned}\Psi_j^0(e_r, e_s) &= d\omega_j^0(e_r, e_s) + \sum_{k=0}^{n} \omega_k^0 \wedge \omega_j^k(e_r, e_s) + \omega_{n+1}^0 \wedge \omega_j^{n+1}(e_r, e_s)\\ &= dT^j \wedge \eta(e_r, e_s) + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^j \wedge \omega^k(e_r, e_s)\\ &+ \sum_{k=0}^{n} \omega_k^0 \wedge \omega_j^k(e_r, e_s) + \omega_{n+1}^0 \wedge \omega_j^{n+1}(e_r, e_s)\\ &= dT^j(e_r)\eta(e_s) - dT^j(e_s)\eta(e_r) + \sum_{k=1}^{n}(\omega_k^j(e_r)\omega^k(e_s) - \omega_k^j(e_s)\omega^k(e_r))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{n}(\omega_k^0(e_r)\omega_j^k(e_s)-\omega_k^0(e_s)\omega_j^k(e_r))+\omega_{n+1}^0(e_r)\omega_j^{n+1}(e_s)-\omega_{n+1}^0(e_s)\omega_j^{n+1}(e_r)\\
&=dT^j(e_r)\eta(e_s)-dT^j(e_s)\eta(e_r)+\sum_{k=1}^{n}(\omega_k^j(e_r)\delta_s^k-\omega_k^j(e_s)\delta_r^k)\\
&+\sum_{k=0}^{n}((T^rT^k-\delta_r^k)\omega_j^k(e_s))-(T^sT^k-\delta_s^k)\omega_j^k(e_r)+T^{n+1}T^r\omega_j^{n+1}(e_s)-T^{n+1}T^s\omega_j^{n+1}(e_r)\\
&=(dT^j(e_r)\eta(e_s)-dT^j(e_s)\eta(e_r))+(\omega_s^j(e_r)-\omega_r^j(e_s))\\
&+\left(T^r\sum_{k=1}^{n}T^k\omega_j^k(e_s)-T^s\sum_{k=1}^{n}T^k\omega_j^k(e_r)-\omega_j^r(e_s)+\omega_j^s(e_r)\right)\\
&+(T^{n+1}T^r\omega_j^{n+1}(e_s)-T^{n+1}T^s\omega_j^{n+1}(e_r))\\
&=\left(T^s\sum_{k=1}^{n+1}T^k\omega_j^k(e_r)-T^r\sum_{k=1}^{n+1}T^k\omega_j^k(e_s))+(\omega_s^j(e_r)-\omega_r^j(e_s)\right)\\
&+\left(T^r\sum_{k=1}^{n}T^k\omega_j^k(e_s)-T^s\sum_{k=1}^{n}T^k\omega_j^k(e_r)-\omega_j^r(e_s)+\omega_j^s(e_r)\right)\\
&+(T^{n+1}T^r\omega_j^{n+1}(e_s)-T^{n+1}T^s\omega_j^{n+1}(e_r))=0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\Psi_j^0=0$, $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$.

Vamos calcular agora a entrada Ψ_{n+1}^0.
Como $\omega_{n+1}^0(e_k)=\nu T^k=\nu\langle T,e_k\rangle=\nu\eta(e_k)$, então

$$
\omega_{n+1}^0=\nu\eta=T^{n+1}\eta,
$$

e daí,

$$
d\omega_{n+1}^0=d(T^{n+1}\eta)=dT^{n+1}\wedge\eta+T^{n+1}\wedge d\eta=dT^{n+1}\wedge\eta.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Psi_{n+1}^0(e_r,e_s)&=d\omega_{n+1}^0(e_r,e_s)+\sum_{k=0}^{n}\omega_k^0\wedge\omega_{n+1}^k(e_r,e_s)+\omega_{n+1}^0\wedge\omega_{n+1}^{n+1}(e_r,e_s)\\
&=d\omega_{n+1}^0(e_r,e_s)+\sum_{k=0}^{n}\omega_k^0\wedge\omega_{n+1}^k(e_r,e_s)\\
&=(dT^{n+1}\wedge\eta(e_r,e_s))+\sum_{k=0}^{n}\omega_k^0(e_r)\omega_{n+1}^k(e_s)-\omega_k^0(e_s)\omega_{n+1}^k(e_r)\\
&=(dT^{n+1}(e_r)\eta(e_s)-dT^{n+1}(e_s)\eta(e_r))+\sum_{k=0}^{n}(T^kT^r-\delta_k^r)\omega_{n+1}^k(e_s)\\
&-(T^kT^s-\delta_k^s)\omega_{n+1}^k(e_r)\\
&=(T^sdT^{n+1}(e_r)-T^rdT^{n+1}(e_s))+\left(T^r\sum_{k=1}^{n}T^k\omega_{n+1}^k(e_s)-T^s\sum_{k=1}^{n}T^k\omega_{n+1}^k(e_r)\right)
\end{aligned}
$$

$$+ (-\omega^r_{n+1}(e_s) + \omega^s_{n+1}(e_r)).$$

Como S é auto-adjunto, temos que $\omega^s_{n+1}(e_r) = \langle Se_r, e_s\rangle = \langle e_r, Se_s\rangle = \omega^r_{n+1}(e_s))$. Além disso, pelo Lema 1.3.7, $dT^{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} T^k\omega^k_{n+1}$. Com essas informações, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi^0_{n+1}(e_r, e_s) &= (T^s dT^{n+1}(e_r) - T^r dT^{n+1}(e_s)) + \left(T^r\sum_{k=1}^{n} T^k\omega^k_{n+1}(e_s) - T^s\sum_{k=1}^{n} T^k\omega^k_{n+1}(e_r)\right)\\
&+ (-\omega^r_{n+1}(e_s) + \omega^s_{n+1}(e_r))\\
&= T^s\sum_{k=1}^{n+1} T^k\omega^k_{n+1}(e_r) - T^r\sum_{k=1}^{n+1} T^k\omega^k_{n+1}(e_s) + T^r\sum_{k=1}^{n} T^k\omega^k_{n+1}(e_s)\\
&- T^s\sum_{k=1}^{n} T^k\omega^k_{n+1}(e_r) = 0.
\end{aligned}$$

As igualdades $\Psi^0_0 = 0$ e $\Psi^{n+1}_{n+1} = 0$ decorrem do fato de $\omega^0_0 = 0$ e $\omega^{n+1}_{n+1} = 0$, pois daí $d\Omega^0_0 = d\omega^0_0 = 0$, $d\Omega^{n+1}_{n+1} = d\omega^{n+1}_{n+1} = 0$, $(\Omega\wedge\Omega)^0_0 = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\omega^0_0\wedge\omega^k_j = 0$ e $(\Omega\wedge\Omega)^{n+1}_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\omega^{n+1}_{n+1}\wedge\omega^k_j = 0$.

Finalmente, pelo fato de $\omega^i_l = -\omega^l_i$, temos que $d\Omega^i_{n+1} = d\omega^i_{n+1} = d\omega^{n+1}_i = -d\Omega^{n+1}_i$ e $(\Omega\wedge\Omega)^i_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\omega^i_k\wedge\omega^k_{n+1} = -\sum\limits_{k=0}^{n+1}\omega^{n+1}_k\wedge\omega^k_i = -(\Omega\wedge\Omega)^{n+1}_i$. Portanto, podemos concluir que $\Psi^i_{n+1} = -\Psi^{n+1}_i = 0$, como já verificamos. □

Definição 1.3.9 Para cada $y \in M$ fixo, definimos o conjunto $\mathcal{Z}(y)$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{Z}(y) = \{Z \in SO(\mathbb{R}^{n+2}); Z^{n+1}_\beta = T^\beta(y)\},$$

ou seja, $\mathcal{Z}(y)$ é o subconjunto das matrizes de $SO(\mathbb{R}^{n+2})$ cuja última linha é o vetor unitário $T(y)$ (o índice 0 denota a primeira linha ou primeira coluna).

Observação 1.3.10 Para cada $y \in M$ fixo, o conjunto $\mathcal{Z}(y)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$. A prova disso está incluída na demonstração da próxima proposição.

Proposição 1.3.11 *Suponha que as equações de compatibilidade dadas na Definição 1.3.1 sejam válidas para $(M^n, \langle,\rangle, S, \nu)$ em $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$. Tome $y_0 \in M^n$ e $A_0 \in \mathcal{Z}(y_0)$. Então, existe uma vizinhança U_1 de y_0 em M^n, e uma única aplicação $A : U_1 \to SO(\mathbb{R}^{n+2})$ que satisfaz as seguintes igualdades:*

$$A^{-1}dA = \Omega, \quad \forall y \in U_1,$$

$$A(y) \in \mathcal{Z}(y),$$

$$A(y_0) = A_0.$$

Demonstração Seja $\varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \to U$ um sistema de coordenadas em M^n. Consideremos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{F} = \{(y, Z) \in U \times SO(\mathbb{R}^{n+2}); Z \in \mathcal{Z}(y)\}.$$

Tal conjunto é uma variedade diferenciável de dimensão $n + \frac{n(n+1)}{2}$. Para demonstrar isso, notemos inicialmente que pelo fato de $SO(\mathbb{R}^{n+1})$ ser uma variedade diferenciável, existe uma parametrização $\psi : V \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \Gamma$, em que

$$\Gamma = \left\{ A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(n+2, \mathbb{R}); B \in SO(\mathbb{R}^{n+1}) \right\}.$$

Agora, consideremos $y \in U$ e $Z \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$. Seja $L : U \to SO(\mathbb{R}^{n+2})$ uma aplicação diferenciável tal que $L(y)^{n+1}_{\beta} = T^{\beta}(y)$, $\forall \beta \in \{0, \ldots, n+1\}$. A existência da aplicação L se justifica da seguinte maneira: a aplicação $\overline{T} : U \to \mathbb{R}^{n+2}$ dada por

$$\overline{T}(u) = (T^0(u), T^1(u), \ldots, T^{n+1}(u)),$$

é uma função de U na esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Basta então considerar $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ uma parametrização ortogonal de $\mathbb{S}^{n+1}$, para definir a i-ésima linha de $L(y)$ como sendo o i-ésimo campo coordenado de φ no ponto y.

Afirmação 1 *$Z \in \mathcal{Z}(y)$ se, e somente se, $ZL(y)^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para algum $B \in SO(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Demonstração De fato, se $Z \in \mathcal{Z}(y)$, em particular $Z \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$, e como $L(y)^{-1} \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$, concluímos que $ZL(y)^{-1} \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$. Além disso, sabemos que a última linha de Z é o vetor $T(y)$, e como $L(y)^{-1} = L(y)^t$, a última coluna de $L(y)^{-1}$ é também o vetor $T(y)$. Todas as outras linhas de Z são vetores ortogonais a $T(y)$, assim como todas as outras colunas de $L(y)^{-1}$. Portanto, $(ZL(y)^{-1})^{n+1}_{\beta}$ é o produto interno de $T(y)$ com a β-ésima coluna de $L(y)^{-1}$. Logo, $(ZL(y)^{-1})^{n+1}_{\beta} = \delta^{n+1}_{\beta}$. Analogamente, $(ZL(y)^{-1})^{\alpha}_{n+1} = \delta^{\alpha}_{n+1}$. Portanto, $ZL(y)^{-1}$ é da forma $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para algum $B \in SO(\mathbb{R}^{n+1})$.

Reciprocamente, se existe $B \in SO(\mathbb{R}^{n+1})$ de forma que $ZL(y)^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $Z = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L(y) \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$ e,

$$Z^{n+1}_{\beta} = \sum_{\gamma=0}^{n+1} \left(\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{n+1}_{\gamma} Z(y)^{\gamma}_{\beta} = \sum_{\gamma=0}^{n+1} \delta^{n+1}_{\gamma} L(y)^{\gamma}_{\beta} = L(y)^{n+1}_{\beta} = T^{\beta}(y).$$

Logo, $Z \in \mathcal{Z}(y)$. $\square$

Concluímos que para parametrizar $\mathcal{F}$, basta considerar a aplicação $\Psi : \varphi^{-1}(U) \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathcal{F}$ definida por

$$\Psi(u, v) = (\varphi(u), \psi(v)L(\varphi(u))).$$

Em particular, a aplicacão $v \mapsto \psi(v)L(\varphi(y))$ é uma parametrização de $\mathcal{Z}(y)$. Assim, o espaço tangente no ponto $(y, Z) \in \mathcal{F}$ é dado por:

$$T_{(y,Z)}\mathcal{F} = \{(u, \zeta) \in T_yU \oplus T_Z SO(\mathbb{R}^{n+2}); \zeta_\beta^{n+1} = (dT^\beta)_y(u)\}.$$

Seja $\rho : U \times SO(\mathbb{R}^{n+2}) \to SO(\mathbb{R}^{n+2})$ a projeção em $SO(\mathbb{R}^{n+2})$ e consideremos a seguinte 1-forma matricial definida em $\mathcal{F}$:

$$\Theta = (I \circ \rho)d\rho - \Omega,$$

em que $I : SO(\mathbb{R}^{n+2}) \to SO(\mathbb{R}^{n+2})$ é a inversão de matrizes. Mais precisamente, para cada $(y, Z) \in \mathcal{F}$, temos a aplicação $\Theta_{(y,Z)} : T_{(y,Z)}\mathcal{F} \to M(n + 2, \mathbb{R})$, definida por:

$$\Theta_{(y,Z)}(u, \zeta) = \rho(y, Z)^{-1} d\rho_{(y,Z)}(u, \zeta) - \Omega(u)(y) = Z^{-1}\zeta - \Omega_y(u).$$

Veremos que Θ induzirá uma distribuição involutiva, e desta obteremos a aplicação A.

Afirmação 2 *Para cada $(y, Z) \in \mathcal{F}$ fixo, o espaço*

$$\mathcal{D}(y, Z) = ker\Theta_{(y,Z)}$$

tem dimensão n.

Demonstração Começamos caracterizando os elementos de $\mathcal{D}(y, Z)$. Note que $\Theta_{(y,Z)}(u, \zeta) \in \mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2}) = \{B \in M(n + 2, \mathbb{R}); B^t = -B\}$. De fato, $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2})$ é um espaço vetorial e, como $\forall \alpha, \beta \in \{0, \ldots, n + 1\}$,

$$\Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha = -\Omega_\beta^\alpha,$$

$$\begin{aligned}(Z^{-1}dZ)_\beta^\alpha &= \sum_{\gamma=0}^{n+1} (Z^{-1})_\gamma^\alpha (dZ)_\beta^\gamma = \sum_{\gamma=0}^{n+1} (Z^t)_\gamma^\alpha (dZ)_\beta^\gamma \\ &= \sum_{\gamma=0}^{n+1} Z_\alpha^\gamma (-dZ)_\gamma^\beta = -((Z^{-1}dZ)^t)_\beta^\alpha,\end{aligned}$$

temos que, $\Omega, Z^{-1}dZ \in \mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2})$, ou seja, $\Theta_{(y,Z)}(u, \zeta) \in \mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2})$. Além disso, pelo Lema 1.3.7,

$$
\begin{aligned}
(Z\Theta)^{n+1}_\beta &= (Z(Z^{-1}dZ - \Omega))^{n+1}_\beta = (dZ - Z\Omega))^{n+1}_\beta \\
&= dZ^{n+1}_\beta - \sum_{\gamma=0}^{n+1} Z^{n+1}_\gamma \Omega^\gamma_\beta = dZ^{n+1}_\beta - \sum_{\gamma=0}^{n+1} Z^{n+1}_\gamma \Omega^\gamma_\beta \\
&= dT^\beta - \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega^\gamma_\beta = 0.
\end{aligned}
$$

Desse modo, concluímos que $\Theta_{(y,Z)}(u,\zeta)$ pertence ao espaço

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2}); (ZH)^{n+1}_\beta = 0\},$$

o qual tem dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$.

Como a aplicação $F : SO(\mathbb{R}^{n+2}) \to \mathbb{S}^{n+2}$ dada por $F(Z)_\beta = Z^{n+1}_\beta, \beta \in \{0, \ldots, n+1\}$ é uma submersão ($dF_Z(H)_\beta = H^{n+1}_\beta$), concluímos que

$$H \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (ZH)^{n+1}_\beta = 0 \Leftrightarrow dF_Z(ZH) = 0 \Leftrightarrow ZH \in \ker dF_Z.$$

Agora, sendo $T_Z SO(\mathbb{R}^{n+2}) = \mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2})$, podemos concluir que o conjunto

$$W = \{(0, ZH); H \in \mathcal{H}\}$$

é um subespaço vetorial de $T_{(y,Z)}\mathcal{F}$, pois tomando $u = 0 \in T_y U$, se $\zeta = ZH \in \mathfrak{so}(\mathbb{R}^{n+2})$ com $H \in \mathcal{H}$, temos que

$$\zeta^{n+1}_\beta = (ZH)^{n+1}_\beta = 0 = (dT^\beta)(0).$$

Além disso, se $(0, ZH) \in W$, então:

$$\Theta_{(y,Z)}(0, ZH) = Z^{-1}ZH + \Omega_y(0) = H,$$

ou seja, $\Theta_{(y,Z)}$ restrita a W é a aplicação $(0, ZH) \in W \mapsto H \in \mathcal{H}$, que é claramente sobrejetora. Portanto, se a restrição de $\Theta_{(y,Z)}$ a um subespaço vetorial é sobrejetora, ela também deverá ser.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, a dimensão do núcleo de $\Theta_{(y,Z)}$ deve ser $dim(T_{(y,Z)}\mathcal{F}) - dim(\mathcal{H}) = (n + \frac{n(n+1)}{2}) - \frac{n(n+1)}{2} = n$, como queríamos. □

Afirmação 3 *A distribuição $\mathcal{D}$ é involutiva, ou seja, se $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(y, Z)$, então $[\xi_1, \xi_2] \in \mathcal{D}(y, Z)$.*

Demonstração Como

$$d\rho_{(y,Z)}(u, \zeta) = \zeta \quad \text{e} \quad d(I \circ \rho)_{(y,Z)}(u, \zeta) = dI_{(\rho(y,Z))}(\zeta) = -Z^{-1}\zeta Z^{-1},$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} d(I\circ\rho)\wedge d\rho_{(y,Z)}((u_1,\zeta_1),(u_2,\zeta_2)) &= d(I\circ\rho)_{(y,Z)}(u_1,\zeta_1)d\rho_{(y,Z)}(u_2,\zeta_2) \\ &\quad - d(I\circ\rho)_{(y,Z)}(u_2,\zeta_2)d\rho_{(y,Z)}(u_1,\zeta_1) \\ &= -Z^{-1}\zeta_1 Z^{-1}\zeta_2 + Z^{-1}\zeta_2 Z^{-1}\zeta_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $(\Theta+\Omega)_{(y,Z)}(u,\zeta) = -Z^{-1}\zeta$, concluímos que

$$(-(\Theta+\Omega)\wedge(\Theta+\Omega))_{(y,Z)}((u_1,\zeta_1),(u_2,\zeta_2)) = -Z^{-1}\zeta_1 Z^{-1}\zeta_2 + Z^{-1}\zeta_2 Z^{-1}\zeta_1,$$

ou seja, $d(I\circ\rho)\wedge d\rho = -(\Theta+\Omega)\wedge(\Theta+\Omega)$. Desse modo, usando o Lema 1.3.8 e o fato de que $\wedge$ é alternada, obtemos

$$\begin{aligned} d\Theta &= d((I\circ\rho)d\rho - \Omega) \\ &= d(I\circ\rho)\wedge d\rho + (I\circ\rho)\wedge dd\rho - d\Omega \\ &= d(I\circ\rho)\wedge d\rho - d\Omega \\ &= -(\Theta+\Omega)\wedge(\Theta+\Omega) - d\Omega \\ &= -\Theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\Omega - \Omega\wedge\Theta - \Omega\wedge\Omega - d\Omega \\ &= -\Theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\Omega - \Omega\wedge\Theta = 0. \end{aligned}$$

Logo, se $\xi_1,\xi_2 \in \mathcal{D}(y,Z)$, então $d\Theta_{(y,Z)}(\xi_1,\xi_2) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 = d\Theta_{(y,Z)}(\xi_1,\xi_2) &= \xi_1\cdot\Theta_{(y,Z)}(\xi_2) - \xi_2\cdot\Theta_{(y,Z)}(\xi_1) - \Theta_{(y,Z)}([\xi_1,\xi_2]) \\ &= \xi_1\cdot 0 - \xi_2\cdot 0 - \Theta_{(y,Z)}([\xi_1,\xi_2]), \end{aligned}$$

ou seja,

$$[\xi_1,\xi_2] \in ker\Theta_{(y,Z)} = \mathcal{D}(y,Z).$$

□

Assim, pelo Teorema de Frobenius, $\mathcal{D}$ é integrável. Seja (y_0,A_0) um ponto de $\mathcal{F}$ e consideremos $\mathcal{A}$ a variedade integral em uma vizinhança desse ponto, ou seja, $T_{(y,Z)}\mathcal{A} = \mathcal{D}(y,Z)$, para todo ponto (y,Z) nessa tal vizinhança.

Se $\zeta \in T_{A_0}SO(\mathbb{R}^{n+2})$ é tal que $(0,\zeta) \in T_{(y_0,A_0)}\mathcal{A} = \mathcal{D}(y_0,A_0) = ker\Theta_{(y_0,A_0)}$, então $0 = \Theta_{(y_0,A_0)}(0,\zeta) = A_0^{-1}\zeta - \Omega_0(0) = A_0^{-1}\zeta$ e, desse modo, acabamos de provar que

$$T_{(y_0,A_0)}\mathcal{A} \cap (\{0\}\times T_{A_0}SO(\mathbb{R}^{n+2})) = \{0\},$$

ou seja, a parte tangente a $\mathcal{A}$ em (y_0,A_0) é tangente a $T_{y_0}U$. Disso e do teorema das funções implícitas, $\mathcal{A}$ é localmente o gráfico de uma função $A: U_1 \to SO(\mathbb{R}^{n+2})$, em que U_1 é uma vizinhança de y_0 em U.

Verificamos agora que A satisfaz as propriedades requeridas no enunciado. Desde que $\mathcal{A}$ é subvariedade de $\mathcal{F}$, obtemos que $(y,A(y)) \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in U_1$, o que acarreta que

$A(y) \in \mathcal{Z}(y), \quad \forall y \in U_1$. Sendo $\sigma : y \mapsto (y, A(y))$ parametrização de $\mathcal{A}$, temos

$$d\sigma_y(\eta, \zeta) = (\eta, dA_y\zeta) \in T_{(y,A(y))}\mathcal{A} = \mathcal{D}(y, A(y)) = \ker \Theta(y, A(y)).$$

Daí, $\Theta(y, A(y))(u, dA_y\zeta) = A(y)^{-1}dA_y\zeta - \Omega_y(u) = 0$. Logo, $A^{-1}dA = \Omega$.

Finalmente, a unicidade da aplicação A segue do fato das equações $dA = A\Omega$ e $A(y_0) = A_0$ constituírem um PVI linear, finalizando a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 1.3.2: Dividiremos esta demonstração em três partes, e consideramos as mesmas notações para todas as 1-formas definidas anteriormente.

Parte 1: *Nesta parte vamos provar o Teorema 1.3.2 localmente.*

Sejam $y_0 \in M^n$, $A \in \mathcal{Z}(y_0)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Considere, numa vizinhança de y_0 em M^n, um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Sendo M^n simplesmente conexo, pela Proposição 1.3.11 existe uma vizinhança U_1 de y_0 em M^n e uma única aplicação $A : U_1 \to SO(\mathbb{R}^{n+2})$ que verifica

$$A^{-1}dA = \Omega, \quad \forall y \in U_1,$$

$$A(y) \in \mathcal{Z}(y),$$

$$A(y_0) = A_0.$$

E, como toda variedade diferenciável é localmente simplesmente conexa, podemos supor U_1 simplesmente conexo.

Definimos $f^0 = A_0^0$, $f^i = A_0^i$, para $1 \leq i \leq n$, e f^{n+1} como sendo a única função que satisfaz $df^{n+1} = \eta$ e $f^{n+1}(y_0) = t_0$ (ou seja, $f^{n+1}(y) = t_0 + \int\limits_{\gamma_y} \eta$, em que γ_y pode ser qualquer curva em U_1 tal que $\gamma_y(0) = y_0$ e $\gamma_y(1) = y$, uma vez que U_1 é simplesmente conexo e $d\eta = 0$). Com isso, obtemos uma aplicação $f : U_1 \to \mathbb{R}^{n+2}$ dada por $f = (f^0, f^1, \ldots, f^n, f^{n+1})$. Mostraremos que seu contradomínio é $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e que ela, de fato, é uma imersão isométrica de U_1 em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Como $A(y) \in \mathcal{Z}(y), \quad \forall y \in U_1$, temos que $A_0^{n+1} = T^0 = 0$. Assim, uma vez que $A(y) \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$, obtemos $\sum\limits_{\gamma=0}^{n} (f^\gamma)^2 = \sum\limits_{\gamma=0}^{n} (A_0^\gamma)^2 = \sum\limits_{\gamma=0}^{n+1} (A_0^\gamma)^2 = 1$, ou seja, $(f^0(y), f^1(y), \ldots, f^n(y)) \in \mathbb{S}^n$, $\forall y \in U_1$. Portanto, $f(y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\forall y \in U_1$.

Por hipótese, $dA = A\Omega$. Portanto, para $\alpha < n + 1$, temos

$$\begin{aligned} df^\alpha(e_k) &= d(A_0^\alpha)(e_k) = (A\Omega)_0^\alpha(e_k) \\ &= \left(\sum_{\gamma=0}^{n+1} A_\gamma^\alpha \Omega_0^\gamma \right)(e_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\gamma=0}^{n} A^\alpha_\gamma \omega^\gamma_0(e_k) + A^\alpha_{n+1}\omega^{n+1}_0(e_k) \\
&= \sum_{\gamma=0}^{n} A^\alpha_\gamma(\delta^k_\gamma - T^\gamma T^k) - A^\alpha_{n+1}T^{n+1}T^k \\
&= A^\alpha_k - T^k \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma A^\alpha_\gamma, \\
&= A^\alpha_k - T^k \delta^\alpha_{n+1} \\
&= A^\alpha_k. \qquad (1.43)
\end{aligned}$$

Para $\alpha = n+1$, temos

$$df^{n+1}(e_k) = \eta(e_k) = \langle T, e_k\rangle = T^k = A^{n+1}_k. \qquad (1.44)$$

Dessa maneira, $df(e_k)$ é dada pela k-ésima coluna da matriz A.

Sendo $A(y) \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$, em particular, $A(y)$ é inversível, implicando que o posto de df_y é n, $\forall y \in U_1$. Logo, $df(y)$ é injetora, $\forall y \in U_1$, ou seja, $f : U_1 \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é uma imersão. Mais ainda, como $A(y)$ é uma transformação ortogonal, temos que $\langle df_y(e_p), df_y(e_q)\rangle = \langle A(y)(e_p), A(y)(e_q)\rangle = \langle e_p, e_q\rangle$, $\forall p, q \in \{0, \ldots, n+1\}$ e assim, f é uma imersão isométrica.

As colunas de A formam um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$. Das colunas 1 a n temos um referencial ortonormal em $T_{f(y)}f(M^n)$ (pois são as imagens do referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ pela diferencial de f), a coluna 0 é a projeção de $f(y)$ em $\mathbb{S}^n \times \{0\}$, ou seja, $df_y(e_0(y)) = \xi(f(y)) = (f^0(y), \ldots, f^n(y), 0)$ e a coluna $n+1$ de A é o vetor unitário $N(f(y))$, normal a $f(M^n)$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ no ponto $f(y)$.

Definindo $X_k = df(e_k)$, usando que f é uma imersão isométrica e que S satisfaz as equações de compatibilidade, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\langle A_N X_k, X_j\rangle &= -\langle X_j, \tilde{\nabla}_{X_k} N\rangle = \langle \tilde{\nabla}_{X_k} X_j, N\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_{df(e_k)} df(e_j), df(e_{n+1})\rangle = \langle df(\nabla_{e_k} e_j), df(e_{n+1})\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_k} e_j, e_{n+1}\rangle = -\langle e_j, \nabla_{e_k} e_{n+1}\rangle \\
&= \langle S e_k, e_j\rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja, o operador da segunda forma fundamental de $f(M^n)$ localmente é dado por $A_N = df \circ S \circ df^{-1}$, em que df^{-1} é a inversa à esquerda de df (df é injetora, pois f é imersão).

Finalmente, por (1.43) e (1.44), no referencial ortonormal $\{\xi, X_1, \ldots, X_n, N\}$ os coeficientes de $\partial_t = E^{n+1}$ (em que $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n+1} = \partial_t\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+2}$) são dados pela última linha da matriz A e, como $T^0 = A^0_0 = 0$ e $A(y) \in SO(\mathbb{R}^{n+2})$, $\forall y \in U_1$, temos

$$\partial_t = T^0\xi + \sum_{j=1}^{n} T^j X_j + T^{n+1}N = df\left(\sum_{j=1}^{n} T^j e_j\right) + \nu N = df(T) + \nu N,$$

provando o teorema na vizinhança U_1 de y_0.

Dedicaremos as próximas etapas a mostrar que a função f obtida aqui pode ser estendida de uma única maneira em todo o M^n.

Parte 2: *Provaremos nesta parte que a função f é, localmente, única, a menos de isometrias de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.*

Suponha $\tilde{f} : U_2 \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ outra função que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.2, em que U_2 é uma vizinhança de y_0 simplesmente conexa contida em U_1. Definimos de maneira análoga o referencial $\{\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n, \tilde{X}_{n+1}\}$ por: $\tilde{X}_j(\tilde{f}(y)) = d\tilde{f}_y(e_j)$, se $1 \leq j \leq n$, $\tilde{X}_{n+1}(\tilde{f}(y))$, o vetor unitário normal a $\tilde{f}(M^n)$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ no ponto $\tilde{f}(y)$ e $\tilde{X}_0(\tilde{f}(y)) = \xi(\tilde{f}(y))$, o vetor normal unitário a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ no ponto $\tilde{f}(y)$. Também definimos $\tilde{A}$ como sendo a matriz das coordenadas dos vetores $\tilde{X}_\beta$ na base $\{E_0, E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}\}$, ou seja,

$$\tilde{X}_\beta = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \tilde{A}_\beta^\alpha E_\alpha.$$

A menos de uma isometria Φ de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$ e que para todo $\beta \in \{0, \ldots, n+1\}$, $X_\beta(y_0) = \tilde{X}_\beta(y_0)$, ou seja, $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$.

Agora, como

$$T(y) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \langle T(y), e_\alpha(y)\rangle e_\alpha(y) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} T^\alpha(y) e_\alpha(y),$$

resulta que

$$d\tilde{f}_y(T(y)) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} T^\alpha(y) d\tilde{f}_y(e_\alpha(y)) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} T^\alpha(y)\tilde{X}_\alpha(y).$$

Logo, $T^\alpha(y) = \langle d\tilde{f}_y(T(y)), \tilde{X}_\alpha(y)\rangle$. Mas,

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{f}_y(T(y)), \tilde{X}_\alpha(y)\rangle &= \langle d\tilde{f}_y(T(y)) + \nu(y)N(\tilde{f}(y)), \tilde{X}_\alpha(y)\rangle \\
&= \langle \partial_t(\tilde{f}(y)), \tilde{X}_\alpha(y)\rangle \\
&= \langle E_{n+1}(\tilde{f}(y)), \tilde{X}_\alpha(y)\rangle = \tilde{A}_\alpha^{n+1}(y),
\end{aligned}$$

$\forall 1 \leq \alpha \leq n$, e também,

$$\tilde{A}^{n+1}_{n+1}(y) = \langle \tilde{X}_{n+1}(y), \partial_t(\tilde{f}(y)) \rangle = \langle N(\tilde{f}(y)), \partial_t(\tilde{f}(y)) \rangle = \nu(y) = T^{n+1}(y),$$

$$\tilde{A}^{n+1}_0(y) = \langle \tilde{X}_0(y), \partial_t(\tilde{f}(y)) \rangle = \langle \xi(\tilde{f}(y)), \partial_t(\tilde{f}(y)) \rangle = 0 = T^0(y).$$

Portanto, $\tilde{A} \in \mathcal{Z}(y)$, $\forall y \in U_2$.

Também, se $\tilde{\tilde{A}}$ for a aplicação original (ou seja, $\tilde{\tilde{A}} = \Phi \tilde{A}$), temos

$$\tilde{A}^{-1} d\tilde{A} = (\tilde{\tilde{A}}\Phi^{-1})(d(\Phi\tilde{A})) = \tilde{\tilde{A}}^{-1} d\tilde{\tilde{A}} = \Omega.$$

Em suma, $A^{-1}dA = \Omega$, $\tilde{A}^{-1}d\tilde{A} = \Omega$, $A(y), \tilde{A}(y) \in \mathcal{Z}(y)$, $\forall y \in U_2$ e $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$. Pela unicidade da aplicação A dada pela Proposição 1.3.11, concluímos que $A(y) = \tilde{A}(y)$, $\forall y \in U_2$.

Agora, notamos que as coordenadas de $\xi(\tilde{f}(y)) = (\tilde{f}^0, \ldots, \tilde{f}^n, 0)$ são dadas pela coluna 0 da matriz $\tilde{A}(y)$. Logo, para $0 \leq \beta \leq n$, temos que $f^\beta = A^\beta_0 = \tilde{A}^\beta_0 = \tilde{f}^\beta$.

Finalmente, como $df^{n+1} = \eta = d\tilde{f}^{n+1}$ (pois $\eta(e_\beta) = T^\beta = A^{n+1}_\beta = \tilde{A}^{n+1}_\beta = d\tilde{f}^{n+1}(e_\beta)$, $\forall \beta \in \{0, \ldots, n+1\}$) e $f^{n+1}(y_0) = \tilde{f}^{n+1}(y_0)$, pela unicidade da aplicação f concluímos que $f(y) = \tilde{f}(y)$, $\forall y \in U_2$. Portanto $f = \tilde{f}$ em U_2, finalizando a segunda parte do Teorema 1.3.2.

Parte 3: *Provaremos agora que f pode ser estendida para toda a variedade M^n, e como provamos acima, de uma única forma.*

Fixe um ponto $y_0 \in M^n$. Se $y \in M^n$, considere $\gamma : [0,1] \to M^n$ um caminho em M^n com $\gamma(0) = y_0$ e $\gamma(1) = y$. Para cada ponto $w \in \gamma([0,1])$, conseguimos uma aplicação $f_w : W_w \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ dada pela Parte 1, em que W_w é uma vizinhança simplesmente conexa de w em M^n. Observamos que $\{W\}_{w \in \gamma([0,1])}$ cobre $\gamma([0,1])$ e, como este é compacto, conseguimos extrair uma subcobertura finita $\{W_1, \ldots, W_k\}$ com $W_1 = U_1$.

Sendo f_i as respectivas aplicações, estendemos f_i da seguinte maneira: na Parte 2 vimos que através de uma isometria glogal Φ_i de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, obtivemos $f_i = \Phi_i \circ f_{i+1}$ em $W_i \cap W_{i+1}$. Portanto, chamando $\tilde{f}_1 = f_1, \tilde{f}_2 = \Phi_1 \circ \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k = \Phi_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1}$, estendemos f a W_k de uma única maneira, e em particular definimos $f(y)$ em todo o conjunto U.

Suponha que $\tilde{f}$ e $\tilde{\tilde{f}}$ são duas extensões de f, como feito acima. O próprio M^n é uma vizinhança simplesmente conexa de p de forma que as funções $\tilde{A}$ e $\tilde{\tilde{A}}$ construídas como na Parte 2, via $\tilde{f}$ e $\tilde{\tilde{f}}$, satisfazem todas as propriedades da Proposição 1.3.11. Pelos argumentos da Parte 2, $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$ e daí, em particular, segue a independência de caminhos. $\square$

Capítulo 2

Hipersuperfícies de Rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Neste capítulo iremos definir o conceito de hipersuperfície de rotação no ambiente $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e estabelecer um critério para identificar tais superfícies através do operador da segunda forma fundamental.

2.1 A Segunda Forma Fundamental de uma Hipersuperfície de Rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Vamos começar definindo uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Consideremos P^3 um subespaço vetorial tridimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$ que contenha o eixo x_{n+2}, e P^2 um subespaço bidimensional de P^3 que também contenha o eixo x_{n+2}.

Seja $\mathcal{I}$ o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^{n+2}$ que levam P^2 pontualmente nele mesmo. Finalmente, consideremos $\alpha : I \to (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}) \cap P^3$ uma curva que não intersecta P^2.

Definição 2.1.1 A hipersuperfície de rotação M^n de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil α e eixo de rotação P^2 é definida como a $\mathcal{I}$-órbita de α, ou seja,

$$M^n = \{T(\alpha(s)) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}; s \in I \text{ e } T \in \mathcal{I}\}.$$

Obteremos uma parametrização de uma hipersuperfície de rotação e calcularemos o seu operador da segunda forma fundamental.

Sem perda de generalidade, iremos considerar que P^3 é gerado por e_1, e_{n+1} e e_{n+2} e que P^2 seja gerado por e_1 e e_{n+2}. Identificaremos $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}) \cap P^3$ com $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

Como veremos adiante, $\alpha'(s)$ é proporcional a $T(\alpha(s))$, a menos que α pertença a um plano ortogonal a ∂_t, e daí $T = 0$.

Temos dois casos a considerar. No primeiro iremos supor que a curva α não é a vertical de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Então, podemos escrever

$$\alpha(s) = (\cos(s), 0, \ldots, 0, \operatorname{sen}(s), a(s)), \tag{2.1}$$

para uma certa função a e com s definido num intervalo em que $\operatorname{sen}(s)$ não se anula, pois α não intersecta P^2.

Para que uma isometria de $\mathbb{R}^{n+2}$ deixe P^2 pontualmente fixo, ela deverá ter a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & B & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

em que $B \in SO(\mathbb{R}^n)$.

Para obter a parametrização da hipersuperfície de rotação M^n, que por sua vez é a $\mathcal{I}$-órbita da curva α, basta notar que

$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & B & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sen}(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(s) \\ \operatorname{sen}(s) B^n \\ a(s) \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

em que B^n é a n-ésima coluna de B. Como $B^n \in \mathbb{S}^n$, podemos parametrizar o conjunto dos B^n's tais que $B \in SO(\mathbb{R}^n)$ com a função $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, uma parametrização ortogonal da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} \varphi_n^2 = 1$ e $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} = \delta_{ij} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2$. Obtemos a seguinte parametrização para M^n:

$$f(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s)\varphi_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \operatorname{sen}(s)\varphi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}), a(s)). \tag{2.4}$$

Calculando as derivadas parciais de f e ξ no ponto $f(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (-\operatorname{sen}(s), \cos(s)\varphi_1, \ldots, \cos(s)\varphi_n, a'(s)), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \operatorname{sen}(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \ldots, \operatorname{sen}(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0\right), \\ \xi(f(s, t_1, \ldots, t_{n-1})) &= (\cos(s), \operatorname{sen}(s)\varphi_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \operatorname{sen}(s)\varphi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}), 0). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s) \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k)^2 + a'(s)^2 = 1 + a'(s)^2,$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle = \operatorname{sen}^2(s) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} = \operatorname{sen}^2(s)\ \delta_{ij} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2,$$
$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = \operatorname{sen}(s)\cos(s) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \varphi_k = 0.$$

Definindo

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} (-\operatorname{sen}(s) a'(s), \cos(s) a'(s)\varphi_1, \ldots, \cos(s) a'(s)\varphi_n, -1),$$

verificamos que

$$\langle N, N \rangle = \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2} \left(\operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s) \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i)^2 \right) \frac{1}{1 + a'(s)^2} = 1,$$
$$\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \left(\operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s) \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i)^2 - 1 \right) = 0,$$
$$\begin{aligned} \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \left(\operatorname{sen}(s)\cos(s) \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(s)\cos(s)(s) a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i^2}{\partial t_j} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(s)\cos(s) a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \frac{1}{2} \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i)^2}{\partial t_j} = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \langle N, \xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \langle (-\operatorname{sen}(s) a'(s), \cos(s) a'(s)\varphi_1, \ldots, \cos(s) a'(s)\varphi_n, -1), \\ &\quad (\cos(s), \operatorname{sen}(s)\varphi_1, \ldots, \operatorname{sen}(s)\varphi_n, 0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Concluímos que N é uma campo unitário normal a M^n, tangente a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Podemos então calcular o operador da segunda forma fundamental de M^n. Mas, antes disso, observe que para quaisquer campos X e Y tangentes a M^n vale:

$$\begin{aligned} \langle A_N X, Y \rangle &= \langle -\tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = X \langle N, Y \rangle - \langle -\tilde{\nabla}_X Y, N \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle D_X Y + \langle X_{\mathbb{S}^n}, Y_{\mathbb{S}^n} \rangle \xi, N \rangle \\ &= \langle D_X Y, N \rangle, \end{aligned}$$

em que $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, D é a conexão de $\mathbb{R}^{n+2}$ e a relação $\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y + \langle X_{\mathbb{S}^n}, Y_{\mathbb{S}^n} \rangle \xi$ é a equação (1.5). Usando o fato de que φ é uma parametrização ortogonal de $\mathbb{S}^{n-1}$, obtemos que:

$$\left\langle A_N \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = \frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t_i \partial t_j} \varphi_k$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}\varphi_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}\right)\\
&= \frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k)^2\right) - \delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2\right)\\
&= \frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2\right)\\
&= -\frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)\delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2}{\sqrt{1+a'(s)^2}},\\
\left\langle A_N\frac{\partial f}{\partial t_i},\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle &= \frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}\varphi_k\\
&= \frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k)^2\right) = 0,\\
\left\langle A_N\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle &= \frac{a'(s)\cos(s)\operatorname{sen}(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} - \frac{a'(s)\cos(s)\operatorname{sen}(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\left(\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k)^2 - a''(s)\right)\\
&= \frac{-a''(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}.
\end{aligned}
$$

Todas essas equações mostram que $\left\{\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial t_n}\right\}$ é uma base ortogonal de autovetores de A_N, e portanto, podemos calcular os autovalores de A_N da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \left\langle A_N\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle\cdot\frac{1}{\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle}\\
&= -\frac{a''(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\cdot\frac{1}{1+a'(s)^2}\\
&= -\frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (2.5)\\
\mu_i &= \left\langle A_N\frac{\partial f}{\partial t_i},\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\rangle\cdot\frac{1}{\left\langle\frac{\partial f}{\partial t_i},\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\rangle}\\
&= -\frac{a'(s)\operatorname{sen}(s)\cos(s)\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2(s)\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2}\\
&= -\frac{a'(s)\cot^2(s)}{(1+a'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Assim, $\mu_i = \mu = -\frac{a'(s)\cot(s)}{(1+a'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Em particular, nos pontos de α (em que $\varphi_i = \delta_{in}$), temos que $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s, t_1, \ldots, t_n) = \alpha'(s)$ e, sendo $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial t_n}\right\}$ ortogonal,

$$T = \mathrm{proj}_{M^n}\partial_t = \frac{\left\langle \dfrac{\partial}{\partial s}, \partial_t \right\rangle}{\left\langle \dfrac{\partial}{\partial s}, \dfrac{\partial}{\partial s} \right\rangle}\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Em outras palavras, T é autovetor associado a λ.

Agora, analisemos o caso em que α é a reta vertical de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. A curva α pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\alpha(s) = (\cos(c), 0, \ldots, 0, \mathrm{sen}(c), s), \tag{2.7}$$

sendo c uma constante tal que $\mathrm{sen}(c) \neq 0$, pois α não intersecta P^2. Parametrizamos M^n por:

$$f(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\cos(c), \mathrm{sen}(c)\varphi_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \mathrm{sen}(c)\varphi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}), s), \tag{2.8}$$

em que $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ é a mesma parametrização ortogonal da esfera de dimensão $(n-1)$ considerada anteriormente. Calculando as derivadas parciais de f e o campo ξ no ponto $f(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= (0, 0, \ldots, 0, 1),\\
\frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \mathrm{sen}(c)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \ldots, \mathrm{sen}(c)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0\right),\\
\xi(f(s, t_1, \ldots, t_{n-1})) &= (\cos(c), \mathrm{sen}(c)\varphi_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \mathrm{sen}(c)\varphi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}), 0).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= 1,\\
\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \mathrm{sen}^2(c)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} = \mathrm{sen}^2(c)\delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2,\\
\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Definindo $N = (\mathrm{sen}(c), -\cos(c)\varphi_1, \ldots, -\cos(c)\varphi_n, 0)$, verificamos que:

$$\begin{aligned}
\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= 0,\\
\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= -\mathrm{sen}(c)\cos(c)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}\varphi_k = 0, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle N, N\rangle &= \operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s)\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i)^2 = 1,\\
\langle N, \xi\rangle &= \operatorname{sen}(c)\cos(c) - \operatorname{sen}(c)\cos(c)\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i)^2 = 0,
\end{aligned}
$$

concluíndo que N é um campo unitário normal a M^n, tangente a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Novamente, como no caso anterior, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left\langle A_N \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N\right\rangle &= -\operatorname{sen}(c)\cos(c)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t_i \partial t_j}\varphi_k\\
&= -\operatorname{sen}(c)\cos(c)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}\varphi_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}\right)\\
&= -\operatorname{sen}(c)\cos(c)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k)^2\right) - \delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2\right)\\
&= -\operatorname{sen}(c)\cos(c)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{1}{2}\right) - \delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2\right)\\
&= -\operatorname{sen}(c)\cos(c)\delta_{ij}\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2,\\
\left\langle A_N \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N\right\rangle &= 0,\\
\left\langle A_N \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s}, N\right\rangle &= 0.
\end{aligned}
$$

Tais equações mostram novamente que $\left\{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_n}\right\}$ é uma base ortogonal de autovetores de A_N. Calculando os autovalores de A_N, obtemos:

$$
\lambda = \left\langle A_N \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle \cdot \frac{1}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle} = 0, \tag{2.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_i &= \left\langle A_N \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i}\right\rangle \cdot \frac{1}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i}\right\rangle}\\
&= -\operatorname{sen}(c)\cos(c)\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2(c)\left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|\right|^2} = -\cot(c).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Assim, $\mu_i = \mu = -\cot(c)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nos pontos de α (em que $\varphi_i = \delta_{in}$), temos que $\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha'(s) = \partial_t$. Isso implica que ∂_t é tangente, e portanto, igual a T. Em particular, $T = \frac{\partial f}{\partial s}$. Concluímos novamente que T é autovetor associado a λ.

Portanto, em ambos os casos o operador da segunda forma fundamental de M^n terá no máximo dois autovalores distintos, e se houver dois, um deles terá múltiplicidade 1 e corresponderá ao autoespaço gerado por T.

2.2 Caracterização de Hipersuperfícies de Rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

O objetivo desta seção é provar um teorema que fornece uma condição suficiente para que uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ seja uma hipersuperfície de rotação. Este teorema é baseado em um resultado mais geral obtido por Bruno Mendonça e Ruy Tojeiro, em [10] (ver Corolário 5, pág. 5), para subvariedades de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em qualquer codimensão.

Teorema 2.2.1 *(ver [10], pag. 5) Sejam $n \geq 3$ e $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície cujo operador da segunda forma fundamental é dado por:*

$$A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{bmatrix},$$

Suponha que $A_N T = \lambda T$. Então, M^n é um aberto de uma hipersuperfície de rotação.

Foi visto na Seção 2.1 que a recíproca desse resultado é válida. Como vimos nas equações (2.4) e (2.8), a parametrização de hipersuperfícies de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ pode ser escrita na forma

$$f(s,t) = \alpha_0(s)\hat{g}(t) + \alpha_1(s)e_n + h(s)e_{n+1}, \tag{2.11}$$

em que $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$, $\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)e_i$ é uma parametrização da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$, $\alpha_0(s)^2 + \alpha_1(s)^2 = 1$ e $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+2}$. Nosso objetivo é escrever a hipersuperfície f do enunciado do Teorema 2.2.1 como em (2.11).

Para demonstrar o Teorema 2.2.1, incluiremos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ e estudaremos a hipersuperfície f neste último. Para isso, é necessário relacionar os operadores da segunda forma fundamental de f e $\tilde{f}$, em que $\tilde{f} = i \circ f$ e $i : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+2}$ é a inclusão canônica.

Sejam D, $\tilde{\nabla}$ e ∇ as respectivas conexões de Levi-Civita $\mathbb{R}^{n+2}$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e M^n. Lembramos que estamos usando a decomposição $\partial_t = df \cdot T + \cos\theta N$. Consideremos também $\hat{\nu} = \pi \circ i$, em que $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a projeção canônica das $n+1$ primeiras coordenadas. Temos, para todo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, que

$$\begin{aligned} D_Z\hat{\nu} &= d\pi \cdot di \cdot Z = di \cdot Z - \langle di \cdot Z, di \cdot \partial_t \rangle di \cdot \partial_t \\ &= di \cdot (Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$di \cdot (A^i_{\hat{\nu}} Z) = -(D_Z\hat{\nu})^T = -di \cdot (Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t).$$

Concluímos que

$$A^i_{\hat{\nu}} Z = -Z + \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t. \tag{2.12}$$

Seja ξ um campo normal a f em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Pela fórmula de Gauss, temos que

$$D_X di \cdot \xi = di \cdot \tilde{\nabla}_X \xi + \alpha_i(df \cdot X, \xi).$$

em que α_i denota a segunda forma fundamental da inclusão i, ou seja, $\langle \alpha_i(W, Z), \zeta \rangle = \langle A^i_\zeta W, Z \rangle$. Para a primeira parcela, temos

$$\begin{aligned} di \cdot \tilde{\nabla}_X \xi &= di \cdot ((\tilde{\nabla}_X \xi)^T + (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp) \\ &= di \cdot (-df \cdot A^f_\xi X + (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp) \\ &= -di \cdot df \cdot A^f_\xi X + di \cdot \nabla^\perp_X \xi \\ &= -d\tilde{f} \cdot A^f_\xi X + di \cdot \nabla^\perp_X \xi. \end{aligned}$$

E, usando a equação (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha_i(df \cdot X, \xi), \hat{\nu} \rangle &= \langle A^i_{\hat{\nu}} df \cdot X, \xi \rangle \\ &= \langle -df \cdot X + \langle df \cdot X, \partial_t \rangle \partial_t, \xi \rangle \\ &= \langle df \cdot X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle df \cdot X, \partial_t \rangle &= \langle df \cdot X, df \cdot T + \cos\theta N \rangle \\ &= \langle df \cdot X, df \cdot T \rangle + \cos\theta \langle df \cdot X, N \rangle \\ &= \langle X, T \rangle, \end{aligned}$$

e, como $\langle \partial_t, \xi \rangle = \langle df \cdot T + \cos\theta N, \xi \rangle = \cos\theta \langle N, \xi \rangle$, obtemos que

$$\langle \alpha_i(df \cdot X, \xi), \hat{\nu} \rangle = \cos\theta \langle X, T \rangle \langle N, \xi \rangle,$$

ou seja,

$$\alpha_i(df \cdot X, \xi) = \cos\theta \langle X, T \rangle \langle N, \xi \rangle \nu, \tag{2.13}$$

em que $\nu = \hat{\nu} \circ \tilde{f}$. Portanto,

$$D_X di \cdot \xi = -d\tilde{f} \cdot A^f_\xi X + di \cdot \nabla^\perp_X \xi + \cos\theta \langle X, T \rangle \langle N, \xi \rangle \nu. \tag{2.14}$$

Disso, concluímos que

$$-d\tilde{f} \cdot A^{\tilde{f}}_{di \cdot \xi} X = (D_X di \cdot \xi)^T = -d\tilde{f} \cdot A^f_\xi X,$$

e, sendo $d\tilde{f}$ injetora,

$$A^{\tilde{f}}_{di\cdot\xi}X = A^{f}_{\xi} \cdot X. \tag{2.15}$$

Além disso,

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_{X} di \cdot \xi = (D_X di \cdot \xi)^{\perp} = di \cdot \nabla^{\perp}_{X}\xi + \cos\theta\langle X, T\rangle\langle N, \xi\rangle\nu. \tag{2.16}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
D_X\nu = D_X\hat{\nu}\circ f &= d(\hat{\nu}\circ f)\cdot X = d\hat{\nu}\cdot(df\cdot X)\\
&= D_{df\cdot X}\hat{\nu} = di\cdot(df\cdot X - \langle df\cdot X, \partial_t\rangle\partial_t)\\
&= di\cdot df\cdot X - \langle df\cdot X, \partial_t\rangle di\cdot\partial_t\\
&= d\tilde{f}\cdot X - \langle X, T\rangle di\cdot\partial_t\\
&= d\tilde{f}\cdot X - \langle X, T\rangle di\cdot(df\cdot T + \cos\theta N)\\
&= d\tilde{f}\cdot(X - \langle X, T\rangle T) + \cos\theta\langle X, T\rangle di\cdot N.
\end{aligned}$$

Assim,

$$-d\tilde{f}\cdot A^{\tilde{f}}_{\nu}X = (D_X\nu)^T = d\tilde{f}\cdot(X - \langle X, T\rangle T),$$

e, portanto,

$$A^{\tilde{f}}_{\nu}X = -X + \langle X, T\rangle T. \tag{2.17}$$

Em particular,

$$A^{\tilde{f}}_{\nu}T = -\cos^2\theta T, \tag{2.18}$$

$$A^{\tilde{f}}_{\nu}X = -X, \quad \forall X \in \{T\}^{\perp}. \tag{2.19}$$

Considere agora $g : N^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ uma imersão isométrica com campo unitário normal η. Usaremos a notação $\tilde{g} = i\circ j\circ g$ e $\tilde{\eta} = di\cdot dj\cdot\eta$, em que $i : \mathbb{S}^n\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+2}$ e $j : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ são as inclusões canônicas. Seja $f : N^{n-1}\times I \to \mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x, s) \doteq (i\circ f) = \alpha_0(s)\tilde{g}(x) + \alpha_1(s)\tilde{\eta}(x) + \alpha_2(s)e_{n+1}, \tag{2.20}$$

e $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular com $\alpha_0(s)^2 + \alpha_1(s)^2 = 1$, $\forall s \in I$, de modo que α_2' nunca se anula em I.

Proposição 2.2.2 *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ uma imersão isométrica dada como na equação* (2.20)*, em termos de uma imersão isométrica $g : N^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ totalmente umbílica. Então, f é uma hipersuperfície de rotação cuja curva perfil está contida em $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R} \subset \mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$.*

Demonstração Pelo fato de g ser totalmente umbílica, temos que $g(N^{n-1})$ é uma esfera de dimensão $n-1$ contida em $\mathbb{S}^n$. Portanto, em $\mathbb{R}^{n+1}$ existe um subespaço afim n-dimensional $v + W$ que contém $g(N^{n-1})$. Vamos assumir que W seja gerado por $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ e que $v \perp W$. Em particular, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $v = be_n$.

Considere a função $h : N^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+2}$ dada por $h(x) = \tilde{g}(x) - v$. Se a é o raio da esfera $\tilde{g}(N^{n-1})$, definimos $\overline{g} = \frac{1}{a}h$, ou seja, $\overline{g}$ é uma homotetia de h em $\mathbb{R}^{n+2}$ de modo que $\overline{g}(N^{n-1})$ esteja contido em $W \cap \mathbb{S}^n$. Em particular, $\tilde{g} = a\overline{g} + v$. Como homotetias e translações preservam os espaços tangentes, concluímos que os espaços tangentes de $\tilde{g}(N^{n-1})$ e $\overline{g}(N^{n-1})$ são os mesmos. Assim, os espaços normais de $\tilde{g}(N^{n-1})$ e $\overline{g}(N^{n-1})$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ são os mesmos, e dados respectivamente por

$$span\{\tilde{g}, \tilde{\eta}, e_{n+1}\} \qquad \text{e} \qquad span\{\overline{g}, e_n, e_{n+1}\}.$$

Desse modo, podemos escrever $\tilde{\eta} = c\overline{g} + de_n$. Como $\tilde{f}$ é dada por

$$\tilde{f}(x,s) = \alpha_0(s)\tilde{g}(x) + \alpha_1(s)\tilde{\eta}(x) + \alpha_2(s)e_{n+1},$$

usando que $\tilde{g} = a\overline{g} + v = a\overline{g} + be_n$, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x,s) &= \alpha_0(s)(a\overline{g}(x) + be_n) + \alpha_1(s)(c\overline{g}(x) + de_n) + \alpha_2(s)e_{n+1}\\ &= (a\alpha_0(s) + c\alpha_1(s))\overline{g}(x) + (b\alpha_0(s) + d\alpha_1(s))e_n + \alpha_2(s)e_{n+1}.\end{aligned}$$

Como $\|\tilde{g}\| = 1$, então $a^2 + b^2 = 1$. Do mesmo modo, $\|\tilde{\eta}\| = 1 \Rightarrow c^2 + d^2 = 1$. E como $\langle \tilde{g}, \tilde{\eta} \rangle = 0$, então $ac - bd = 0$. Daí, definindo $\tilde{\alpha}_0 = (a\alpha_0 + c\alpha_1)$ e $\tilde{\alpha}_1 = (b\alpha_0 + d\alpha_1)$, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0^2 + \tilde{\alpha}_1^2 &= (a\alpha_0 + c\alpha_1)^2 + (b\alpha_0 + d\alpha_1)^2\\ &= a^2\alpha_0^2 + 2ac\alpha_0\alpha_1 + c^2\alpha_1^2 + b^2\alpha_0^2 + 2bd\alpha_0\alpha_1 + d^2\alpha_1^2\\ &= (a^2 + b^2)\alpha_0^2 + 2(ac + bd)\alpha_0\alpha_1 + (c^2 + d^2)\alpha_1^2\\ &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1,\end{aligned}$$

por hipótese.

Como $\overline{g}(N^{n-1})$ está contida na esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ de $span\{e_0, \ldots, e_{n-1}\} \cong \mathbb{R}^n$, considerando $\Psi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to N^{n-1}$ uma parametrização de N^{n-1}, então $\hat{g} = \overline{g} \circ \Psi$ é uma parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}$, e daí a equação

$$\tilde{f}(x,s) = \tilde{\alpha}_0(s)\hat{g}(x) + \tilde{\alpha}_1(s)e_n + \alpha_2(s)e_{n+1} \tag{2.21}$$

representa a parametrização de uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, com curva perfil $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \alpha_2)$ contida em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. $\square$

Para o que segue até o final desta seção, usaremos a seguinte notação: se $x \in N^{n-1}$, $X \in T_xN^{n-1}$ e $s \in I$, denotamos por $X^{\mathcal{H}}$ o único vetor em $T_{(x,s)}M^n$ tal que $d\pi_1 \cdot X^{\mathcal{H}} = X$ e $d\pi_2 \cdot X^{\mathcal{H}} = 0$, em que $\pi_1 : M^n \to N^{n-1}$ e $\pi_2 : M^n \to I$ são as projeções canônicas.

Demonstração do Teorema 2.2.1: A demonstração será dividida em duas partes.

Parte 1: *Mostraremos que a imersão f do Teorema 2.2.1 é dada, localmente, como em* (2.20)*, em termos da imersão g e de tal modo que $d\tilde{f} \cdot T$ seja normal a $\tilde{g}$.*

Primeiramente, notemos que o campo T é o gradiente da função $H = \langle \tilde{f}, di \cdot \partial_t \rangle$. De fato, para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ temos que

$$X(H) = \langle D_X \tilde{f}, di \cdot \partial_t \rangle = \langle d\tilde{f} \cdot X, di \cdot \partial_t \rangle = \langle di \cdot df \cdot X, di \cdot \partial_t \rangle = \langle df \cdot X, df \cdot T + N \rangle = \langle X, T \rangle.$$

Portanto, a distribuição $\{T\}^\perp$ é involutiva. Além disso, como T é gradiente de H, usando a equação (1.10) é válido que:

$$\langle \nabla_T X, T \rangle = T(\langle T, X \rangle) - \langle \nabla_T T, X \rangle = -\langle \nabla_T T, X \rangle = -\cos\theta \langle A_N^f T, X \rangle = -\cos\theta \lambda \langle T, X \rangle = 0,$$

$\forall X \in \{T\}^\perp$, ou seja, a parte tangente de $\nabla_T X$ à distribuição gerada por T é nula. Portanto, a distribuição gerada por T é totalmente geodésica.

Como $\{T\}^\perp$ é distribuição involutiva, para cado ponto de M^n existe, em uma vizinhança U desse ponto, um difeomorfismo $\psi : N^{n-1} \times I \to U \subset M^n$, em que I é um intervalo aberto contendo 0, de tal modo que $\psi(x, \cdot) : I \to M^n$, para cada $x \in N^{n-1}$, parametriza as curvas integrais de $\{T\}$, e $\psi(\cdot, s) : N^{n-1} \to M^n$, para cada $s \in I$, parametriza as folhas da distribuição $\{T\}^\perp$.

Denotemos por $E_1 = d\psi^{-1}(\{T\}^\perp)$ e $E_2 = d\psi^{-1}(\{T\})$. Observemos ainda que, com a métrica induzida por ψ em U, E_1 e E_2 são distribuições ortogonais e E_2 é totalmente geodésica. Fazendo $\tilde{f} = i \circ f \circ \psi : N^{n-1} \times I \to \mathbb{R}^{n+2}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{f} \cdot X, di \cdot \partial_t \rangle &= \langle di \cdot df \cdot d\psi \cdot X, di \cdot \partial_t \rangle \\ &= \langle df \cdot d\psi \cdot X, \partial_t \rangle \\ &= \langle df \cdot d\psi \cdot X, df \cdot T + \cos\theta N \rangle \\ &= \langle df \cdot d\psi \cdot X, df \cdot T \rangle = \langle d\psi \cdot X, T \rangle = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

para todo $X \in E_1$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle A^{\tilde{f}}_{di \cdot N} X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= \mu \left\langle X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0, \qquad \forall X \in E_1, \\ \left\langle A^{\tilde{f}}_{\nu} X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= -\left\langle X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0, \qquad \forall X \in E_1, \end{aligned}$$

sendo esta última pela equação (2.19). Portanto, para todo $\forall X \in E_1$, $\alpha_{\tilde{f}}\left(X, \frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$.

Assim, como E_2 é totalmente geodésica, para todo $X \in E_1$ a parte tangente de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X$ a E_2 é nula, ou seja, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X \in E_1$, e daí, usando a fórmula de Gauss,

$$D_{\frac{\partial}{\partial s}} d\tilde{f} \cdot X = d\tilde{f} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X + \alpha_{\tilde{f}}\left(X, \frac{\partial}{\partial s}\right) = d\tilde{f} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X \in d\tilde{f} \cdot E_1.$$

Concluímos dessa maneira que $d\tilde{f} \cdot E_1$ é constante ao longo das curvas integrais de E_2.

Agora, pela equação (2.22), $\tilde{g} \doteq \tilde{f}(\cdot, 0)$ está contido em um subespaço afim ortogonal a $di \cdot \partial_t$. Iremos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{g}(N^{n-1}) \subset \mathbb{S}^n \times \{0\}$.

Definindo $\hat{f} = \pi \circ \tilde{f}$, em que $\pi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$ é a projeção canônica, temos que $\hat{f}(x,s) \in \mathbb{S}^n \times \{0\}$ e daí, $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = 1$. Em particular, $\langle d\hat{f} \cdot X, \hat{f} \rangle = \dfrac{1}{2} X(\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle) = 0$. Além disso, podemos escrever:

$$\tilde{f} = \hat{f} + H di \cdot \partial_t.$$

Obtemos, para todo $X \in E_1$ que

$$\langle d\tilde{f} \cdot X, \tilde{f} \rangle = \langle d\hat{f} \cdot X + dH \cdot X di \cdot \partial_t, \hat{f} + H di \cdot \partial_t \rangle = \langle d\hat{f} \cdot X, \hat{f} \rangle = 0. \tag{2.23}$$

Concluímos assim que $\tilde{f}(x,s) \in (d\tilde{f}(x,s) \cdot E_1)^{\perp}$. Mais ainda, como $d\tilde{f}(x,s) \cdot E_1$ é constante ao longo das curvas integrais de E_2, temos que $d\tilde{f}(x,s) \cdot E_1 = d\tilde{f}(x,0) \cdot E_1 = d\tilde{g}(x) \cdot T_x N^{n-1}$, $\forall s \in I$. Logo,

$$\tilde{f}(x,s) \in (d\tilde{g}(x) \cdot T_x N^{n-1})^{\perp} \tag{2.24}$$

Seja $g : N^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ definida por $\tilde{g} = i \circ j \circ g$ e considere η uma direção normal unitária a $g(N^{n-1})$ em $\mathbb{S}^n$. Denotamos $\tilde{\eta} = di \cdot dj \cdot \eta$. O conjunto $\{\tilde{g}, \tilde{\eta}, di \cdot \partial_t\}$ é ortonormal e gera o fibrado normal de $\tilde{g}$, e portanto, $\tilde{f}(s,x)$ pode ser escrito como combinação linear desses elementos. Fica,

$$\tilde{f}(x,s) = \langle \tilde{f}(x,s), \tilde{g}(x) \rangle \tilde{g}(x) + \langle \tilde{f}(x,s), \tilde{\eta}(x) \rangle \tilde{\eta}(x) + \langle \tilde{f}(x,s), di \cdot \partial_t \rangle di \cdot \partial_t.$$

Além disso, para todo campo X ortogonal a $\dfrac{\partial}{\partial s}$, temos que

$$X(\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle) = \langle d\tilde{f} \cdot X, \tilde{g} \rangle + \langle \tilde{f}, d\tilde{g} \cdot X \rangle = 0,$$

$$X(\langle \tilde{f}, \tilde{\eta} \rangle) = \langle d\tilde{f} \cdot X, \tilde{\eta} \rangle + \langle \tilde{f}, D_X \tilde{\eta} \rangle = 0,$$

$$X(\langle \tilde{f}, di \circ \partial t \rangle) = X(H) = \left\langle X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0,$$

Portanto, $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle, \langle \tilde{f}, \tilde{\eta} \rangle$ e $\langle \tilde{f}, di \cdot \partial_t \rangle$ só dependem de s, e dessa maneira, podemos escrever $\alpha_0(s) = \langle \tilde{f}(x,s), \tilde{g}(x) \rangle, \alpha_1(s) = \langle \tilde{f}(x,s), \tilde{\eta}(x) \rangle$ e $\alpha_2(s) = \langle \tilde{f}(x,s), di \cdot \partial_t \rangle$. Assim,

$$\tilde{f}(x,s) = \alpha_0(s) \tilde{g}(x) + \alpha_1(s) \tilde{\eta}(x) + \alpha_2(s) di \cdot \partial_t.$$

Finalmente, como $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = 1$, temos que $\alpha_0(s)^2 + \alpha_1(s)^2 = 1$, $\forall s \in I$.

Parte 2: *Mostraremos que g é totalmente umbílica.*

Primeiro vamos verificar algumas propriedades de $\tilde{f}$. A diferencial de $\tilde{f}$ é dada por

$$d\tilde{f}(x,s) X^{\mathcal{H}} = d\tilde{g}(\alpha_0(s) I - \alpha_1(s) A^g_\eta(x)) X, \quad \forall X \in T_x N, \tag{2.25}$$

em que $I : T_xN \to T_xN$ é o operador identidade. Para ver isso, tome $\gamma : J \to N^{n-1}$ curva com $0 \in J$, $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X$, e considere, para cada $s \in I$ a curva $\gamma_s : J \to M^n$ dada por $\gamma_s(t) = (\gamma(t), s)$. Então, $\gamma_s(0) = (x, s)$ e $\gamma_s'(0) = X^{\mathcal{H}}$, e daí, usando a equação (2.20), temos

$$\begin{aligned}
d\tilde{f}(x,s)X^{\mathcal{H}} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{f}(\gamma_s(t)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha_0(s)\tilde{g}(\gamma(t)) + \alpha_1(s)\tilde{\eta}(\gamma(t)) + \alpha_2(s)e_{n+1}) \\
&= \alpha_0(s)\frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{g}(\gamma(t)) + \alpha_1(s)\frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{\eta}(\gamma(t)) \\
&= \alpha_0(s)d\tilde{g}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) + \alpha_1(s)d\tilde{\eta}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\
&= \alpha_0(s)d\tilde{g}(x)X + \alpha_1(s)d\tilde{\eta}(x)X \\
&= \alpha_0(s)d\tilde{g}(x)X - \alpha_1(s)(-d\tilde{\eta}(x))X \\
&= d\tilde{g}(x)(\alpha_0(s)I - \alpha_1(s)(d\tilde{g}(x)A_{\tilde{\eta}}^{\tilde{g}})X \\
&= d\tilde{g}(x)(\alpha_0(s)I - \alpha_1(s)A_{\tilde{\eta}}^{\tilde{g}})X \\
&= d\tilde{g}(x)(\alpha_0(s)I - \alpha_1(s)A_{\eta}^{g})X,
\end{aligned}$$

pois $A_{\tilde{\eta}}^{\tilde{g}} = A_{\eta}^{g}$.

Agora, considere $P_s(x) : T_xN \to T_xN$ o operador dado por

$$P_s(x) \doteq \alpha_0(s)I - \alpha_1(s)A_{\eta}^{g}(x). \tag{2.26}$$

Como $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são imersões, pela equação (2.25) concluímos que $P_s(x)$ é um operador injetivo, logo um isomorfismo. Também através da equação (2.25), concluímos que, em $\mathbb{R}^{n+2}$, todo campo normal a $\tilde{f}(M^n)$ é um campo normal a $\tilde{g}(N^{n-1})$. Para todo campo ξ normal a $\tilde{f}(M^n)$ vale

$$\begin{aligned}
-d\tilde{f}(x,s)A_{\xi}^{\tilde{f}}(x,s)X^{\mathcal{H}} = (D_{X^{\mathcal{H}}}\xi)^T &= \left(\frac{d}{dt}|_{t=0}\xi(\gamma_s(t))\right)^T \\
&= -d\tilde{g}(x)A_{\xi}^{\tilde{g}}(x)X \\
&= -d\tilde{g}(x)P_s(x)P_s(x)^{-1}A_{\xi}^{\tilde{g}}(x)X \\
&= -d\tilde{f}(x,s)(P_s(x)^{-1}A_{\xi}^{\tilde{g}}(x)X)^{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Como $d\tilde{f}(x,s)$ é injetora, segue que

$$A_{\xi}^{\tilde{f}}(x,s)X^{\mathcal{H}} = (P_s(x)^{-1}A_{\xi}^{\tilde{g}}(x)X)^{\mathcal{H}}. \tag{2.28}$$

Para mostrar que g é totalmente umbílica, notemos que pela equação (2.26), $A_{\tilde{\eta}}^{\tilde{g}} = A_{\eta}^{g}$ é múltiplo da identidade se, e somente se, $P_s(x)$ for múltiplo da identidade.

Vamos provar agora que $P_s(x)$ é múltiplo da identidade. As direções normais a $\tilde{f}$ são $\nu = \alpha_0\tilde{g} + \alpha_1\tilde{\eta}$ e $\tilde{N} = di \cdot N$. Como toda direção normal a $\tilde{f}$ é normal a $\tilde{g}$, podemos escrever $\tilde{N} = \beta_0\tilde{g} + \beta_1\tilde{\eta} + \beta_2 e_{n+1}$.

Considere $\zeta = a\nu + b\tilde{N}$, de tal forma que $\zeta = \tilde{g} + ee_{n+1}$. Em particular, ζ é normal a $\tilde{f}$. Então, $A^{\tilde{f}}_{\zeta} = aA^{\tilde{f}}_{\nu} + bA^{\tilde{f}}_{\tilde{N}}$ e $A^{\tilde{g}}_{\zeta} = A^{\tilde{g}}_{\tilde{g}} + A^{\tilde{g}}_{ee_{n+1}}$. Mas, para todo campo X tangente a $\tilde{g}$, temos

$$-d\tilde{g}A^{\tilde{g}}_{\tilde{g}}X = (D_X\tilde{g})^T = (d\tilde{g}\cdot X)^T = d\tilde{g}\cdot X,$$

$$-d\tilde{g}A^{\tilde{g}}_{ee_{n+1}}X = (D_X ee_{n+1})^T = (X(e)e_{n+1} + eD_X e_{n+1})^T = 0.$$

Com a equação (2.28), para todo $X \in \{T\}^{\perp}$,

$$-aX + b\mu X = A^{\tilde{f}}_{\zeta}X = P_s(x)^{-1}A^{\tilde{g}}_{\zeta}(x)X = -P_s(x)^{-1}X,$$

logo,

$$P_s(x)^{-1} = (a - b\mu)id \Rightarrow P_s(x) = \frac{1}{a - b\mu}id,$$

como queríamos.

Portanto, g é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{S}^n$, e pela Proposição 2.2.2, f é uma hipersuperfície de rotação com curva perfil contida em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. $\square$

Capítulo 3

Hipersuperfícies Totalmente Umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Neste capítulo exibiremos a classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

3.1 Classificação das Hipersuperfícies Totalmente Geodésicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Primeiramente, veremos as hipersuperfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.1.1 *(ver [12], pag. 365) Seja M^n uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há duas opções:*

(i) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$, com $t_0 \in \mathbb{R}$, ou,

(ii) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Demonstração Seja M^n uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, ou seja, $A_N = 0$. Usando a equação de Codazzi (1.9),

$$0 = \nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X - A_N[X,Y] = \cos\theta(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y), \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M^n),$$

o que acarreta que ou $T = 0$, ou $\cos\theta = 0$.

Se $T = 0$, então M^n é ortogonal a ∂_t em todo ponto. Neste caso, M^n será um aberto de uma hipersuperfície da forma $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Se $\cos\theta = 0$, então $\langle N, \partial_t\rangle = 0$, dizendo assim que em cada ponto de M^n o espaço tangente tem sempre uma componente em ∂_t. Logo, M^n será da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n$. Como $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, então $\tilde{M}^{n-1}$ é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n$, ou seja, $\tilde{M}^{n-1}$ é um aberto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Portanto, M^n é um aberto de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. $\square$

3.2 Classificação das Hipersuperfícies Totalmente Umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Apresentaremos agora uma correspondência que há entre as hipersuperfícies totalmente umbílicas e as soluções de uma EDO, que definiremos a seguir.

Proposição 3.2.1 *(ver [12], pag. 359) Seja M^n uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com função ângulo θ e seja p um ponto de M^n em que $\operatorname{sen}\theta(p) \neq 0$. Então, existem coordenadas locais $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ em uma vizinhança de p em M^n na qual θ só depende de u e tal que $\Phi := 2\theta$ é solução da seguinte EDO de dimensão 1:*

$$\Phi'' + \operatorname{sen}\Phi = 0, \tag{3.1}$$

*conhecida como **equação de Sine-Gordon**.*

Reciprocamente, se começarmos com um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com coordenadas locais $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ e uma solução $\Phi(u)$ da equação (3.1) que não se anule em U, podemos definir $\theta = \dfrac{\Phi}{2}$, uma função λ e uma métrica Riemanniana em U de tal forma que exista uma imersão isométrica $F : U \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com operador da segunda forma fundamental dador por $A_N = \lambda Id$ (ou seja, $F(U)$ é totalmente umbílica) e função ângulo θ.

Antes da demonstração lembraremos o conceito de produto torcido de variedades Riemannianas.

Definição 3.2.2 Sejam (N_1, g_1) e (N_2, g_2) duas variedades Riemannianas e $f : N_1 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O *produto torcido* de N_1 por N_2 via f é o produto cartesiano $M = N_1 \times N_2$ dotado da seguinte métrica:

$$g((X,U),(Y,W)) = g_1(X,Y) + f^2 g_2(U,W).$$

O produto torcido de N_1 por N_2 via f será denotado por $M = N_1 \times_f N_2$.

Citamos uma proposição que será útil, cuja demonstração pode ser encontrada em [11], pág. 210.

Proposição 3.2.3 *Seja $M = N_1 \times_f N_2$ um produto torcido de variedades Riemannianas com conexão de Levi-Civita ∇ e tensor curvatura R. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(N_1)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(N_2)$, então*

$$R(X,U)Y = \frac{H^f(X,Y)}{f} U,$$

em que H^f é a Hessiana de f, e

$$R(U,V)W = R^{N_2}(U,V)W - \frac{\langle grad(f), grad(f)\rangle}{f^2}(\langle V,W\rangle U - \langle U,W\rangle V).$$

Demonstração (Proposição 3.2.1) ($\Rightarrow$) Assuma que M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com operador da segunda forma fundamental dado por $A_N = \lambda Id$. Uma vez que $\operatorname{sen}\theta(p) \neq 0$ e as funções sen e θ são contínuas, existe uma vizinhanca U de p em M^n na qual $\operatorname{sen}\theta$ não se anula. Seja X um campo tangente a U. Para todo campo Y tangente a U valem:

$$\begin{aligned}
&\nabla_X A_N Y = \nabla_X \lambda Y = \lambda \nabla_X Y + X(\lambda)Y,\\
&\nabla_Y A_N X = \lambda \nabla_Y X + Y(\lambda)X,\\
&A_N[X,Y] = \lambda[X,Y].
\end{aligned}$$

Logo, pela simetria de ∇, temos $\nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X - A_N[X,Y] = X(\lambda)Y - Y(\lambda)X$. Pela equação de Codazzi (1.9), obtemos

$$X(\lambda)Y - Y(\lambda)X = \cos\theta(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y). \tag{3.2}$$

Igualando os coeficientes dessa combinação linear, segue-se que

$$X(\lambda) = -\cos\theta\langle X,T\rangle, \tag{3.3}$$

e pela equação (1.11), obtemos

$$X(\cos\theta) = \langle -A_N X, T\rangle = -\lambda\langle X,T\rangle. \tag{3.4}$$

Agora, consideremos $\mathcal{D}(p) = \{T(p)\}^{\perp}$, para $p \in U$. Verificamos no Capítulo 2 que T é um gradiente. Logo, $\mathcal{D}$ é uma distribuição involutiva. Pelo Teorema de Frobenius, podemos escolher coordenadas locais $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ em U de modo que $\partial_u = \dfrac{T}{\operatorname{sen}\theta}$ e $\partial_u \perp \partial_{v_i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Das equações (3.3) e (3.4) obtemos

$$\partial_{v_i}\lambda = -\cos\theta\langle\partial_{v_i}, T\rangle = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\langle\partial_{v_i}, \partial_u\rangle = 0,$$

Portanto, λ e θ só dependem de u. Agora, denotando $\lambda' = \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}$ e $\theta' = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}$, usando o fato de que $(\cos\theta)' = -(\operatorname{sen}\theta)\theta'$ implica em $\theta' = -\dfrac{(\cos\theta)'}{\operatorname{sen}\theta}$, obtemos

$$\lambda' = \frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\cos\theta\langle\partial_u, T\rangle = -\cos\theta\left\langle\frac{T}{\operatorname{sen}\theta}, T\right\rangle = -\cos\theta\operatorname{sen}\theta, \tag{3.5}$$

$$-(\operatorname{sen}\theta)\theta' = \frac{\partial\cos\theta}{\partial u} = -\lambda\langle\partial_u, T\rangle = -\lambda\left\langle\frac{T}{\operatorname{sen}\theta}, T\right\rangle = -\lambda\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \theta' = \lambda. \tag{3.6}$$

Finalmente, definindo $\Phi = 2\theta$, segue-se que

$$\Phi'(u) = 2\theta'(u) = 2\lambda,$$

e, portanto,

$$\Phi''(u) = 2\lambda' = -2\cos\theta \operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen} 2\theta = -\operatorname{sen}\Phi.$$

Assim, concluímos que Φ é solução da equação (3.1).

($\Leftarrow$) Consideremos U um aberto de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas locais $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ e $\Phi(u)$ uma solução da equação (3.1) que não se anula em U. Definimos em U uma métrica Riemanniana g por

$$g = du^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} dv_i dv_j,$$

a função $\theta(u) = \dfrac{\Phi(u)}{2}$, o campo $T = \operatorname{sen}\theta \partial_u$ e uma funcão S que associa para cada ponto $p \in M^n$ o operador auto-adjunto dado por $S(p) = \theta'(p) Id$.

A idéia é aplicar o Teorema 1.3.2, para garantir a existênvia de uma imersão isométrica $F : (U, g) \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ cujo operador da segunda forma fundamental é S, direção principal T e função ângulo θ. Para que tais equações sejam válidas, vamos impor condições sobre as funções g_{ij}.

Afirmação 4 *As equações de compatibilidade* (1.14) *e* (1.16) *são verificadas por* g, θ, λ *e* T.

Demonstração Primeiro verificamos a validade da equação (1.14). Denotando $X = x_u \partial_u + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \partial_{v_i}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] &= \nabla_X \theta' Y - \nabla_Y \theta' X - \theta'[X,Y] \\
&= X(\theta')Y + \theta' \nabla_X Y - Y(\theta')X - \theta' \nabla_Y X - \theta'[X,Y] \\
&= X(\theta')Y - Y(\theta')X \\
&= x_u \theta'' Y - y_u \theta'' X \\
&= \theta''(x_u Y - y_u X),
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\cos\theta(g(Y,T)X - g(X,T)Y) &= \cos\theta(g(Y, \operatorname{sen}\theta\partial_u)X - g(X, \operatorname{sen}\theta\partial_u)Y) \\
&= \cos\theta \operatorname{sen}\theta (y_u X - x_u Y) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)(y_u X - x_u Y) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\Phi (y_u X - x_u Y) \\
&= \frac{1}{2}\Phi''(x_u Y - y_u X) \\
&= \theta''(x_u Y - y_u X).
\end{aligned}$$

Agora verificamos a equação (1.16) usando a linearidade da conexão com respeito ao índice. Temos que:

$$\begin{aligned}\partial_u(\cos\theta) &= -(\operatorname{sen}\theta)\theta' = -(\operatorname{sen}\theta)\lambda \\ &= -g(\lambda\partial_u, \operatorname{sen}\theta\partial_u) \\ &= -g(S\partial_u, T).\end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\partial_{v_i}(\cos\theta) = 0 = -\lambda\operatorname{sen}\theta g(\partial_{v_i}, \partial_u) = -g(\lambda\partial_{v_i}, \operatorname{sen}\theta\partial_u) = -g(S\partial_{v_i}, T),$$

como queríamos. □

Resta verificar sob quais condições a métrica g satisfaz as equações de compatibilidade (1.13) e (1.15).

Proposição 3.2.4 *As equações* (1.13) *e* (1.15) *são equivalentes as seguintes equações:*

$$\langle R(\partial_u, X)\partial_u, Y\rangle = -(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle X, Y\rangle, \tag{3.7}$$

$$\langle R(X, Y)\partial_u, Z\rangle = 0, \tag{3.8}$$

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = (1 + (\theta')^2)(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle, \tag{3.9}$$

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u = 0, \tag{3.10}$$

$$\operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u = (\cos\theta)\theta' X, \tag{3.11}$$

em que X, Y, Z e W são campos tangentes definidos em U e ortogonais a T, ∇ é a conexão de Levi-Civita de (U, g) e R o tensor curvatura de (U, g, ∇).

Demonstração ($\Rightarrow$) Utilizando a equação (1.13), obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\langle R(\partial_u, X)\partial_u, Y\rangle &= \langle X, \partial_u\rangle\langle\partial_u, Y\rangle - \langle X, \partial_u\rangle\langle\partial_u, T\rangle\langle Y, T\rangle - \langle\partial_u, T\rangle\langle X, T\rangle\langle\partial_u, Y\rangle \\ &- \langle\partial_u, \partial_u\rangle\langle X, Y\rangle + \langle\partial_u, \partial_u\rangle\langle X, T\rangle\langle Y, T\rangle + \langle X, Y\rangle\langle\partial_u, T\rangle\langle\partial_u, T\rangle \\ &+ \langle S\partial_u, Y\rangle\langle SX, \partial_u\rangle - \langle S\partial_u, \partial_u\rangle\langle SX, Y\rangle \\ &= -\langle\partial_u, \partial_u\rangle\langle X, Y\rangle + \langle\partial_u, \operatorname{sen}\theta\partial_u\rangle\langle\partial_u, \operatorname{sen}\theta\partial_u\rangle\langle X, Y\rangle \\ &- (\theta')^2\langle\partial_u, \partial_u\rangle\langle X, Y\rangle) \\ &= (\operatorname{sen}^2\theta - 1 - (\theta')^2)\langle X, Y\rangle \\ &= -(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle X, Y\rangle,\end{aligned}$$

que é a equação (3.7). Além disso,

$$\langle R(X, Y)\partial_u, Z\rangle = \langle Y, \partial_u\rangle\langle X, Z\rangle - \langle Y, \partial_u\rangle\langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle - \langle\partial_u, T\rangle\langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle$$

$$\begin{aligned}
&- \langle X, \partial_u\rangle\langle Y, Z\rangle + \langle X, \partial_u\rangle\langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle + \langle Y, Z\rangle\langle \partial_u, T\rangle\langle X, T\rangle\\
&- \langle SX, Z\rangle\langle SY, \partial_u\rangle + \langle SX, \partial_u\rangle\langle SY, Z\rangle\\
&= -(\theta')^2(\langle X, Z\rangle\langle Y, \partial_u\rangle - \langle X, \partial_u\rangle\langle Y, Z\rangle) = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a equação (3.8) e, também,

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, W\rangle &= \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, T\rangle\langle W, T\rangle - \langle Z, T\rangle\langle Y, T\rangle\langle X, W\rangle\\
&- \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle + \langle X, Z\rangle\langle Y, T\rangle\langle W, T\rangle + \langle Y, W\rangle\langle Z, T\rangle\langle X, T\rangle\\
&+ \langle SX, W\rangle\langle SY, Z\rangle - \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle\\
&= \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle\\
&+ (\theta')^2(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle)\\
&= (1 + (\theta')^2)(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle),
\end{aligned}$$

que é a equação (3.9).
Agora, usando os símbolos de Christoffel, obtemos que

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u = \Gamma^0_{uu}\partial_u + \sum_{m=1}^{n-1}\Gamma^m_{uu}\partial_{v_m},$$

e com o fato de que $g_{uu} = 1$ e $g_{uk} = 0 = g_{ku}$, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, temos que

$$\Gamma^\alpha_{uu} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial_u}g_{u\beta} + \frac{\partial}{\partial_u}g_{\beta u} - \frac{\partial}{\partial_\beta}g_{uu}\right)g^{\beta\alpha} = 0.$$

Logo, $\nabla_{\partial_u}\partial_u = 0$.
Finalmente, pela equação (1.15) e usando que X é ortogonal a ∂_u, resulta

$$\begin{aligned}
\theta'\cos\theta X = \cos\theta SX &= \nabla_X T = \nabla_X \operatorname{sen}\theta\partial_u\\
&= X(\operatorname{sen}\theta)\partial_u + \operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u\\
&= x_u\cos\theta\theta'\partial_u + \operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u\\
&= \operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u = \theta'\cos\theta X.$$

($\Leftarrow$) Sejam $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ e $\tilde{W}$ campos tangentes a U. Usando a decomposição $\tilde{X} = x_u\partial_u + X$, em que X é ortogonal a ∂_u, e que

$$\langle R(\partial_u, \partial_u)\partial_u, \partial_u\rangle = \langle R(\partial_u, \partial_u)\partial_u, W\rangle = \langle R(\partial_u, \partial_u)Z, \partial_u\rangle = \langle R(X, Y)Z, \partial_u\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle R(\partial_u, \partial_u)Z, W\rangle &= \langle R(\partial_u, Y)\partial_u, \partial_u\rangle = \langle R(\partial_u, Y)Z, W\rangle = \langle R(X, \partial_u)\partial_u, \partial_u\rangle = 0,\\
\langle R(X, \partial_u)Z, W\rangle &= \langle R(X, Y)\partial_u, \partial_u\rangle = \langle R(X, Y)\partial_u, W\rangle = 0,\\
\langle R(\partial_u, Y)\partial_u, W\rangle &= \langle R(X, \partial_u)Z, \partial_u\rangle = -(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle Y, W\rangle,\\
\langle R(\partial_u, Y)Z, \partial_u\rangle &= \langle R(X, \partial_u)\partial_u, W\rangle = (\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle Y, Z\rangle,\\
\langle R(X, Y)Z, W\rangle &= (1 + (\theta')^2)(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle).
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W}\rangle = &-x_u z_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle Y, W\rangle + x_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle Y, Z\rangle\\
&+ y_u w_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle X, W\rangle - y_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle X, Z\rangle\\
&+ (1 + (\theta')^2)(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando que $T = \operatorname{sen}\theta\partial_u$, temos que

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{W}\rangle - \langle\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle\langle\tilde{X}, T\rangle\langle\tilde{W}, T\rangle - \langle\tilde{Z}, T\rangle\langle\tilde{Y}, T\rangle\langle\tilde{X}, \tilde{W}\rangle - \langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle\langle\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle\\
&+ \langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle\langle\tilde{Y}, T\rangle\langle\tilde{W}, T\rangle + \langle\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle\langle\tilde{Z}, T\rangle\langle\tilde{X}, T\rangle + \langle S\tilde{X}, \tilde{W}\rangle\langle S\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle - \langle S\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle\langle S\tilde{Y}, \tilde{W}\rangle\\
&= -x_u z_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle Y, W\rangle + x_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle Y, Z\rangle + y_u w_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle X, W\rangle\\
&- y_u(\cos^2\theta + (\theta')^2)\langle X, Z\rangle + (1 + (\theta')^2)(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle).
\end{aligned}$$

Concluímos assim que a equação (1.13) é verificada. E quanto à equação (1.15), decorre de

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tilde{X}}T &= \nabla_{x_u\partial_u + X}T\\
&= x_u\nabla_{\partial_u}T + \nabla_X T\\
&= x_u\nabla_{\partial_u}(\operatorname{sen}\theta)\partial_u + \nabla_X(\operatorname{sen}\theta)\partial_u\\
&= x_u(\partial_u(\operatorname{sen}\theta)\partial_u + \operatorname{sen}\theta\nabla_{\partial_u}\partial_u) + X(\operatorname{sen}\theta)\partial_u + \operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u\\
&= x_u(\cos\theta)\theta'\partial_u + \operatorname{sen}\theta\nabla_X\partial_u\\
&= (\cos\theta)\theta'(x_u\partial_u) + (\cos\theta)\theta' X\\
&= (\cos\theta)\theta'\tilde{X} = \cos\theta S\tilde{X},
\end{aligned}$$

e portanto, a Proposição 3.2.4 está provada. □

Voltemos á demonstração da Proposição 3.2.1. Da equação (3.11) e do fato de que $\Gamma^m_{\alpha\beta} = \Gamma^m_{\beta\alpha}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\partial_u g_{ij} = \partial_u(\langle\partial_{v_i}, \partial_{v_j}\rangle) &= \langle\nabla_{\partial_u}\partial_{v_i}, \partial_{v_j}\rangle + \langle\partial_{v_i}, \nabla_{\partial_u}\partial_{v_j}\rangle\\
&= \langle\nabla_{\partial_{v_i}}\partial_u, \partial_{v_j}\rangle + \langle\partial_{v_i}, \partial_{v_j}\partial_u\rangle\\
&= \langle(\cot\theta)\theta'\partial_{v_i}, \partial_{v_j}\rangle + \langle\partial_{v_i}, (\cot\theta)\theta'\partial_{v_j}\rangle\\
&= 2(\cot\theta)\theta'\langle\partial_{v_i}, \partial_{v_j}\rangle = 2(\cot\theta)\theta' g_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo, g_{ij} é solução da EDP

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 2(\cot\theta)\theta'\varphi,$$

e, portanto, $g_{ij} = (\operatorname{sen}^2\theta)c_{ij}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ para alguma função c_{ij}. Assim, a métrica g tem a forma de um produto torcido:

$$g = du^2 + \operatorname{sen}^2\theta(u)\sum_{i,j=1}^{n-1} c_{ij}(v_1,\ldots,v_{n-1})dv_i dv_j = du^2 + (\operatorname{sen}^2\theta)g_c, \tag{3.12}$$

Em particular, temos a seguinte consequência:

Afirmação 5 *As equações* (3.10) *e* (3.11) *são verificadas pela métrica* g*.*

Demonstração Para provar a validade da equação (3.10), note que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial u}g_{0\alpha} + \frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha 0} - \frac{\partial}{\partial v_\alpha}g_{00}\right)g^{\alpha 0}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial u}\delta_{0\alpha} + \frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha 0} + \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\delta_{00}\right)g^{\alpha 0} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_{\partial_u}\partial_u = \Gamma_{uu}^0\partial_u + \sum\limits_{l=0}^{n-1}\Gamma_{uu}^l\partial_{v_l} = 0$.
Para provar a validade da equação (3.11), considere X um campo ortogonal a T dado por $X = \sum\limits_{l=1}^{n-1} x_l\partial_{v_l}$. Então,

$$\nabla_X\partial_u = \sum_{l=1}^{n-1} x_l\nabla_{\partial_{v_l}}\partial_u = \sum_{l=1}^{n-1} x_l(\Gamma_{lu}^0\partial_u + \sum_{m=1}^{n-1}\Gamma_{lu}^m\partial_{v_m}).$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{lu}^0 &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial v_l}g_{u\alpha} + \frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha l} + \frac{\partial}{\partial v_\alpha}g_{lu}\right)g^{\alpha 0}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial v_l}\delta_{0\alpha} + \frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha l} + \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\delta_{l0}\right)g^{\alpha 0}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha l}g^{\alpha 0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial u}g_{kl}g^{k0}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(\cot\theta)\theta' g_{kl}g^{k0} = \sum_{k=1}^{n-1}(\cot\theta)\theta' g_{lk}g^{k0}\\
&= (\cot\theta)\theta'\delta_{l0} = 0,
\end{aligned}$$

pois $l \geq 1$, e,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{lu}^m &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial v_l}g_{u\alpha} + \frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha l} + \frac{\partial}{\partial v_\alpha}g_{lu}\right)g^{\alpha m}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial v_l}\delta_{0\alpha} + \frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha l} + \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\delta_{l0}\right)g^{\alpha m}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial u}g_{\alpha l}g^{\alpha m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial u}g_{kl}g^{km}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(\cot\theta)\theta' g_{kl}g^{km} = \sum_{k=1}^{n-1}(\cot\theta)\theta' g_{lk}g^{km}\\
&= (\cot\theta)\theta'\delta_{lm}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X\partial_u = \sum_{l=1}^{n-1}x_l\sum_{m=1}^{n-1}(\cot\theta)\theta'\delta_{lm}\partial_{v_m} = (\cot\theta)\theta'\sum_{l=1}^{n-1}x_l\partial_{v_l} = (\cot\theta)\theta' X,$$

concluindo a prova da Afirmação 5 $\square$

O próximo passo é fazer a escolhas das funções c_{ij} de modo que as equações (3.7), (3.8) e (3.9) sejam verificadas. Da Proposição 3.2.3, e usando que $\nabla_{\partial u}\partial_u = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
R(\partial_u, X)\partial_u &= \frac{H^{\operatorname{sen}\theta}(\partial_u,\partial_u)}{\operatorname{sen}\theta}X \doteq \frac{\partial_u(\partial_u(\operatorname{sen}\theta)) - \nabla_{\partial u}\partial_u(\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\\
&= (-(\theta')^2 + \cot\theta(\theta''))X = -((\theta')^2 + \cos^2\theta)X,
\end{aligned}$$

pois $\theta'' = \dfrac{\Phi''}{2} = -\dfrac{\operatorname{sen}\Phi}{2} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Assim, vemos que a validade da equação (3.7) não depende da escolha dos c_{ij} 's.

Agora, $\operatorname{grad}(\operatorname{sen}\theta)$ é, por definição, o único campo de vetores que satisfaz $\langle \operatorname{grad}\operatorname{sen}\theta, X\rangle = X(\operatorname{sen}\theta)$. Como θ só depende de u, temos que $\langle\operatorname{grad}\operatorname{sen}\theta,\partial_u\rangle = \partial_u(\operatorname{sen}\theta) = (\cos\theta)\theta'$ e $\langle\operatorname{grad}\operatorname{sen}\theta,\partial_{v_i}\rangle = \partial_{v_i}(\operatorname{sen}\theta) = 0$. Logo, $\operatorname{grad}(\operatorname{sen}\theta) = (\cos\theta)\theta'\partial_u$. Assim, se X, Y, Z forem ortogonais a T, novamente pela Proposição 3.2.3,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= R_c(X,Y)Z - \frac{||\operatorname{grad}(\operatorname{sen}\theta)||^2}{\operatorname{sen}^2\theta}(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)\\
&= R_c(X,Y)Z - \frac{\cos^2\theta(\theta')^2}{\operatorname{sen}^2\theta}(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)\\
&= R_c(X,Y)Z - \cot^2\theta(\theta')^2(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y),
\end{aligned}$$

em que R_c é o tensor curvatura associado à métrica g_c. Logo, para que as equações (3.8) e (3.9) sejam verificadas, devemos ter

$$\langle R(X,Y)Z,\partial_u\rangle = \langle R(X,Y)\partial_u, Z\rangle = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \qquad \langle R_c(X,Y)Z - \cot^2\theta(\theta')^2(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y, \partial_u\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \qquad \langle R_c(X,Y)Z, \partial_u\rangle = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad \langle R(X,Y)Z,W\rangle = (1+(\theta')^2)(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)\\
&\Leftrightarrow \qquad \langle R_c(X,Y)Z - \cot^2\theta(\theta')^2(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y), W\rangle\\
& \qquad = (1+(\theta')^2)(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\\
&\Leftrightarrow \qquad \langle R_c(X,Y)Z,W\rangle - \cot^2\theta(\theta')^2(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)\\
& \qquad = (1+(\theta')^2)(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)\\
&\Leftrightarrow \qquad \langle R_c(X,Y)Z,W\rangle = \left(1+\frac{(\theta')^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle).
\end{aligned}
$$

Juntando essas duas informações, concluímos que as equações (3.8) e (3.9) serão verificadas se, e somente se,

$$
R_c(X,Y)Z = \left(1+\frac{(\theta')^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y), \tag{3.13}
$$

ou, equivalentemente,

$$
R_c(X,Y)Z = ((\theta')^2 + \operatorname{sen}^2\theta)(g_c(Y,Z)X - g_c(X,Z)Y). \tag{3.14}
$$

Lembramos que $(\theta')^2+\operatorname{sen}^2\theta$ é constante, uma vez que $\phi = 2\theta$ é solução da equação (3.1). Assim, a equação (3.14) será satisfeita se, e somente se, g_c for uma métrica com curvatura seccional constante $c = (\theta')^2 + \operatorname{sen}^2\theta$. De fato, se X, Y são campos tangentes a (M^n, g_c) então

$$
\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{-g_c(R_c(X,Y)X,Y)}{g_c(X,X)g_c(Y,Y) - g_c(X,Y)^2}\\
&= -\frac{g_c(((\theta')^2+\operatorname{sen}^2\theta)(g_c(Y,X)X - g_c(X,X)Y),Y)}{g_c(X,X)g_c(Y,Y) - g_c(X,Y)^2}\\
&= -((\theta')^2+\operatorname{sen}^2\theta)\frac{g_c(Y,X)g_c(X,Y) - g_c(X,X)g_c(Y,Y)}{g_c(X,X)g_c(Y,Y) - g_c(X,Y)^2}\\
&= (\theta')^2 + \operatorname{sen}^2\theta = c.
\end{aligned}
$$

Portanto, basta tomar os c_{ij}'s de modo que a metrica g_c possua curvatura seccional constante igual a c. Isso conclui a demonstração da Proposição 3.2.1. □

Agora apresentamos o teorema de classificação.

Teorema 3.2.5 *(ver [12], pag. 362) Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície totalmente umbílica, com função ângulo θ, e seja p um ponto de M^n no qual $\operatorname{sen}\theta(p) \neq 0$. Então, existem coordenadas $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ definidas em uma vizinhança de p em M^n de tal modo que θ só depende de u, o operador da segunda forma fundamental de f é dado* *por* $A_N = \theta' id$, *e,*

$$(\theta')^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = c, \tag{3.15}$$

em que c *é uma constante real estritamente positiva. Além disso, localmente, existe uma isometria de* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *que leva* $f(M^n)$ *em uma hipersuperfície de rotação de* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *com curva perfil dada por*

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\operatorname{sen} \theta(u), 0, \ldots, 0, \theta'(u), \sqrt{c} \int \operatorname{sen} \theta du \right). \tag{3.16}$$

Reciprocamente, toda hipersuperfíce de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *com curva perfil dada pela equação* (3.16), *em que* θ *e* c *satisfazem a equação* (3.15) *é totalmente umbílica em* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Demonstração ($\Rightarrow$) Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície totalmente umbílica, com função ângulo θ e operador da segunda forma fundamental dado por $A_N = \lambda id$. Como $\operatorname{sen} \theta(p) \neq 0$ e as funções sen e θ são contínuas, existe vizinhança U de p em M^n no qual $\operatorname{sen} \theta$ nunca se anula.

Na primeira parte da demostração da Proposição 3.2.1, mostramos a existência de um sistema de coordenadas $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ em U, no qual λ e θ só dependem de u, e de tal forma que as equações (3.5) e (3.6) são verificadas. Daí,

$$\begin{aligned}
((\theta')^2 + \operatorname{sen}^2 \theta)' &= (\lambda^2 + \operatorname{sen}^2 \theta)' \\
&= 2\lambda\lambda' + 2\theta' \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&= -2\theta' \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2\theta' \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $(\theta')^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = c$, uma constante real positiva, uma vez que $\operatorname{sen} \theta$ não se anula em U. Ademais, nas coordenadas $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$, tinhamos que $(\operatorname{sen} \theta)\partial_u = T$ e $\partial_u \perp \partial_{v_i}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Assim, a métrica de U nas coordenadas $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ tem a forma

$$g = du^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} dv_i dv_j,$$

A hipersuperfície f satisfaz as 4 equações de compatibilidade, e portanto, a Proposição 3.2.4. Disso e uma vez que θ satisfaz a equação (3.15), como na demonstração da segunda parte da Proposição 3.2.4, concluímos que nas coordenadas em U, g tem a forma

$$g = du^2 + (\operatorname{sen}^2 \theta) g_c(v_1, ..., v_{n-1}),$$

em que g_c é uma métrica Riemanniana de curvatura seccional c.

Pelo Teorema 1.3.2 existe, a menos de isometrias de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, uma única imersão isométrica $F : U \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ tal que a projeção de ∂_t em $F(U)$ é $dF(T) = dF(\operatorname{sen} \theta \partial_u)$, o ângulo entre o vetor normal N a $F(U)$ e ∂_t é θ, e o operador da segunda forma fundamental de $F(U)$ é dado por $A_N = \theta' id = \lambda id$.

Afirmação 6 *A função $F : (U, g) \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ dada por*

$$F(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\varphi_1 \operatorname{sen}\theta(u), \ldots, \varphi_n \operatorname{sen}\theta(u), \theta'(u), \sqrt{c}\int \operatorname{sen}\theta(u)du\right), \quad (3.17)$$

em que $(\varphi_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \ldots, \varphi_n(v_1, \ldots, v_{n-1}))$ é uma parametrização da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ que satisfaz $c_{ij} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial v_i}\frac{\partial\varphi_k}{\partial v_j}$, é uma imersão isométrica que verifica as seguintes propriedades:

(i) A projeção de ∂_t em $F(U)$ é $dF(T) = dF(\operatorname{sen}\theta\partial_u)$,

(ii) O ângulo entre o vetor normal N a $F(U)$ e ∂_t é θ,

(iii) O operador da segunda forma fundamental de $F(U)$ é dado por $S = \theta' id$.

Demonstração A aplicação F é uma imersão pois em cada ponto $(u, v_1, \ldots, v_n)$ os vetores

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{c}}(\varphi_1(\cos\theta(u))\theta'(u), \ldots, \varphi_n(\cos\theta(u))\theta'(u), \theta''(u), \sqrt{c}\operatorname{sen}\theta(u)),$$
$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_i}\operatorname{sen}\theta(u), \ldots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial v_i}\operatorname{sen}\theta(u), 0, 0\right),$$

são LI. Mais ainda, F é uma imersão isométrica, pois

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle &= \frac{1}{c}(\cos^2\theta(\theta')^2 + (\theta'')^2 + c\operatorname{sen}^2\theta)\\
&= \frac{1}{c}(\cos^2\theta(c - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + c\operatorname{sen}^2\theta)\\
&= 1 = g(\partial_u, \partial_u),\\
\left\langle\frac{\partial F}{\partial v_i}, \frac{\partial F}{\partial v_j}\right\rangle &= \frac{1}{c}\operatorname{sen}^2\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial v_i}\frac{\partial\varphi_k}{\partial v_j}\\
&= g(\partial_{v_i}, \partial_{v_j}).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$dF(T) = dF(\operatorname{sen}\theta\partial_u) = \operatorname{sen}\theta dF(\partial_u) = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial F}{\partial u},$$

e como ∂_t é ortogonal a $\frac{\partial F}{\partial v_i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\operatorname{proj}_{F(U)}\partial_t = \frac{\left\langle\partial_t, \frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle}{\left\langle\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle}\frac{\partial F}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Portanto, $\operatorname{proj}_{F(U)}\partial_t = dF(T)$.

Da relação $\partial_t = dF(T) + \cos\theta N$, temos $N = \frac{1}{\cos\theta}(\partial_t - dF(T)) = \frac{1}{\cos\theta}\left(\partial_t - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial F}{\partial u}\right)$.

Daí,

$$N(u, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{\sqrt{c}}(-\varphi_1(\operatorname{sen}\theta)\theta', \ldots, -\varphi_n(\operatorname{sen}\theta)\theta', \operatorname{sen}^2\theta, \sqrt{c}\cos\theta). \tag{3.18}$$

Ademais, $\langle N, \partial_t\rangle = \cos\theta$ e,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u} &= \frac{1}{\sqrt{c}}(\varphi_1(\theta''\cos\theta - \operatorname{sen}\theta(\theta')^2), \ldots, \varphi_n(\theta''\cos\theta - \operatorname{sen}\theta(\theta')^2),\\
&\quad - \theta'\cos(2\theta), \sqrt{c}(\cos\theta)\theta'),\\
\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v_i} &= \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_i}(\cos\theta)\theta', \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial v_i}(\cos\theta)\theta', 0, 0\right),\\
\frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j} &= \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v_i \partial v_j}\operatorname{sen}\theta, \ldots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v_i \partial v_j}\operatorname{sen}\theta, 0, 0\right).
\end{aligned}$$

Assim, usando que $(\theta')^2 = c - \operatorname{sen}^2\theta$, ou equivalentemente, $\theta'' = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, do mesmo modo que foi feito no início do Capítulo 2, resulta

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u}, N\right\rangle &= \frac{1}{c}(\theta'\operatorname{sen}^2\theta(\theta')^2 - \theta'\theta''\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \theta'\theta''\operatorname{sen}^2\theta\cos 2\theta + c(\cos^2\theta)\theta')\\
&= \frac{\theta'}{c}(\operatorname{sen}^2\theta(c - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos 2\theta + c\cos^2\theta)\\
&= \frac{\theta'}{c}(c\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta + c\theta')\\
&= \frac{c\theta'}{c} = \theta',\\
\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v_i}, N\right\rangle &= 0,\\
\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j}, N\right\rangle &= \frac{-1}{c}(\operatorname{sen}^2\theta)\theta'\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial v_i \partial v_j}\varphi_k = \frac{1}{c}(\operatorname{sen}^2\theta)\theta'\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_j}.
\end{aligned}$$

Logo, $S = \theta' id$. Isso conclui a Afirmação 6. □

Portanto, a menos de isometrias de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $f = F$.

($\Leftarrow$) Se $f : M^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície de rotação com curva perfil α dada por (3.16) e com função θ satisfazendo a equação (3.15), então pela Proposição 3.2.1 existe um sistema de coordenadas $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ no qual $f(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ é dada como no lado direito da equação (3.17). Assim, o vetor normal N é dado pela equação (3.18), e concluímos que seu operador da segunda forma fundamental é $A_N = \theta' id$, o que mostra que f é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. □

Capítulo 4

Hipersuperfícies Semi-Paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

O objetivo deste capítulo será classificar as hipersuperfícies semi-paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Para tanto, iremos investigar o operador da segunda forma fundamental e, através deste, descrever as hipersuperfícies no teorema principal (ver Teorema 4.1.6).

4.1 Classificação das Hipersuperfícies Semi-Paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

A classificação de hipersuperfícies semi-paralelas em formas espaciais foram obtidas por J. Deprez, para o espaço euclidiano (ver [5]), e por F. Dillen, para as formas espaciais de curvatura seccional não nula (ver [6]).

Definição 4.1.1 *(ver [9], pag. 18)* Seja $\mathbb{S}^{n-1}(c)$ uma esfera centrada em um ponto $o \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor tal que a reta $t \mapsto o + tv$ é ortogonal a $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. O *cone elíptico* é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, descrita como a união das semirretas emanando de v (o vértice) e intersectando os pontos de $\mathbb{S}^{n-1}(c)$, com a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 4.1.2 *(ver [5], pag. 304) Seja M^n uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, há três possibilidades:*

(i) M^n tem curvatura nula;

(ii) M^n é paralela;

(iii) M^n é um cone elíptico, ou um produto de um cone elíptico de dimensão n_1 com um $(n - n_1)$-plano de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 4.1.3 *(ver [6], pag. 194) Seja M^n uma hipersuperfúcie semi-paralela de uma forma espacial $\tilde{M}^{n+1}(c)$, com $c \neq 0$. Então, há três possibilidades:*

(i) $n = 2$ *e* M^2 *tem curvatura nula ;*

(ii) M^n *é paralela;*

(iii) existe uma forma espacial $\tilde{M}^2(c)$ *totalmente geodésica, e um vetor* u *em algum subespaço vetorial tridimensional de* $\mathbb{R}^{n+2}$ *que contém* $\tilde{M}^2(c)$*, de tal forma que* M^n *é uma hipersuperfície de rotação cuja curva perfil é uma* u*-hélice em* $\tilde{M}^2(c)$*, e cujo eixo é* $u^\perp$*. Mais ainda,* M^n *é isométrica ao cone.*

Para classificar as hipersuperfícies semi-paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, estudaremos como deve ser seu operador da segunda forma fundamental. O próximo lema nos fornece a caracterização desses operadores.

Lema 4.1.4 *(ver [12], pag. 364) Seja* M^n *uma hipersuperfície semi-paralela de* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *com direção principal* T *e função ângulo* θ*, como nos capítulos anteriores. Então, existe um referencial ortonormal* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *em* M^n *com respeito ao qual o operador da segunda forma fundamental* A_N *tem uma das seguintes formas:*

(i) $A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$,

(ii) $A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{bmatrix}$, *com* $\lambda\mu = -\cos^2\theta$ *e, se* $n \geq 3$, $T = \|T\| e_1$,

(iii) $A_N = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \lambda & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & \mu & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mu \end{bmatrix}$, *com* $\lambda\mu = -1$ *e* $e_1 = T = \partial_t$.

Demonstração Seja M^n uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal satisfazendo $A_N e_i = \lambda_i e_i$ (tal referencial existe pois A_N é auto-adjunto). Vamos denotar $T = \sum_{i=1}^{n} T^i e_i$. Pela equação de Gauss (1.7), se $i \neq j$ obtemos que,

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_j &= \langle A_N e_j, e_j \rangle A_N e_i - \langle A_N e_i, e_j \rangle A_N e_j + \langle e_j, e_j \rangle e_i \\ &\quad - \langle e_i, e_j \rangle e_j + \langle e_j, T \rangle \langle e_i, e_j \rangle T + \langle e_i, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \langle e_i, T\rangle\langle e_j, e_j\rangle T - \langle e_j, T\rangle\langle e_j, T\rangle e_i \\
&= \lambda_j\lambda_i e_i + e_i + T^iT^je_j - T^iT - T^jT^je_i \\
&= (\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2)e_i + T^iT^je_j - T^iT.
\end{aligned}
$$

Se $i = j$, $R(e_i, e_i)e_i = 0$. Além disso, caso $n \geq 3$ e se i, j, k forem distintos, temos que

$$
\begin{aligned}
R(e_i, e_j)e_k &= \langle A_Ne_j, e_k\rangle A_Ne_i - \langle A_Ne_i, e_k\rangle A_Ne_j + \langle e_j, e_k\rangle e_i \\
&- \langle e_i, e_k\rangle e_j + \langle e_j, T\rangle\langle e_i, e_k\rangle T + \langle e_i, T\rangle\langle e_k, T\rangle e_j \\
&- \langle e_i, T\rangle\langle e_j, e_k\rangle T - \langle e_j, T\rangle\langle e_k, T\rangle e_i \\
&= T^iT^ke_j - T^jT^ke_i.
\end{aligned}
$$

Com essas esquações podemos calcular $R \cdot h$ como segue:

$$
\begin{aligned}
(R \cdot h)(e_i, e_j, e_i, e_i) &= -h(R(e_i, e_j)e_i, e_i) - h(e_i, R(e_i, e_j)e_i) \\
&= h(R(e_j, e_i)e_i, e_i) + h(e_i, R(e_j, e_i)e_i) \\
&= 2\langle R(e_j, e_i)e_i, A_Ne_i\rangle \\
&= 2\langle(\lambda_j\lambda_i + 1 - (T^i)^2)e_j + T^iT^je_i - T^jT, \lambda_ie_i\rangle \\
&= 2(T^iT^j - T^jT^i) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(R \cdot h)(e_i, e_j, e_i, e_j) &= -h(R(e_i, e_j)e_i, e_j) - h(e_i, R(e_i, e_j)e_j) \\
&= h(R(e_j, e_i)e_i, e_j) - h(R(e_i, e_j)e_j, e_i) \\
&= \langle(\lambda_j\lambda_i + 1 - (T^i)^2)e_j + T^iT^je_i - T^jT, \lambda_je_j\rangle \\
&- \langle(\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2)e_i + T^iT^je_j - T^iT, \lambda_ie_i\rangle \\
&= \lambda_j(\lambda_j\lambda_i + 1 - (T^i)^2) - (T^j)^2\lambda_j - \lambda_i(\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2) + \lambda_i(T^i)^2 \\
&= (\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^i)^2 - (T^j)^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(R \cdot h)(e_i, e_j, e_k, e_i) &= -h(R(e_i, e_j)e_k, e_i) - h(e_k, R(e_i, e_j)e_i) \\
&= -h(R(e_i, e_j)e_k, e_i) + h(R(e_j, e_i)e_i, e_k) \\
&= -\langle T^iT^ke_j - T^jT^ke_i, \lambda_ie_i\rangle \\
&+ \langle(\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^i)^2)e_j + T^iT^je_i - T^jT, \lambda_ke_k\rangle \\
&= \lambda_iT^jT^k - \lambda_kT^jT^k = (\lambda_i - \lambda_k)T^jT^k,
\end{aligned}
$$

e, finalmente, para i, j, k, l distintos (caso $n \geq 4$),

$$
\begin{aligned}
(R \cdot h)(e_i, e_j, e_k, e_l) &= -h(R(e_i, e_j)e_k, e_l) - h(e_k, R(e_i, e_j)e_l) \\
&= -\langle T^iT^ke_j - T^jT^ke_i, \lambda_le_l\rangle - \langle T^iT^le_j - T^jT^le_i, \lambda_ke_k\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora que M^n é hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, ou seja, $R \cdot h = 0$. Então, através das equações acima, para i, j, k distintos, obtemos:

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i \lambda_j + 1 - (T^i)^2 - (T^j)^2) = 0, \tag{4.1}$$

$$(\lambda_i - \lambda_k) T^j T^k = 0. \tag{4.2}$$

Se todos os autovalores de A_N são iguais, temos o caso (i), e em particular M^n será totalmente umbílica. Vamos supor que A_N possua ao menos 2 autovalores distintos. Para fixar a notação, consideremos dois índices i e j tais que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Também vamos supor que $T \neq 0$. Como consequência, $\cos\theta \neq \pm 1$. Para o caso em que $T = 0$, assim como no Teorema 3.1.1, concluímos que M^n é um aberto de $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ e portanto, M^n é totalmente geodésica, obtendo o caso (i) do lema. Consideramos dois casos:

Caso 1: $T \notin span\{e_i, e_j\}$.

Então $n \geq 3$, pois $\{T, e_i, e_j\}$ é LI. Logo, existe um índice $k \in \{1, \dots, n\} - \{i, j\}$ tal que $T^k \neq 0$. Da equação (4.2), sendo $(\lambda_j - \lambda_i) T^k T^i = 0$, resulta que $T^i = 0$, e de $(\lambda_i - \lambda_j) T^k T^j = 0$, temos $T^j = 0$. Logo, $T \perp span\{e_i, e_j\}$. Ademais, da equação (4.1),

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i \lambda_j + 1 - (T^i)^2 - (T^j)^2) = 0,$$

seguindo daí que

$$\lambda_i \lambda_j = -1.$$

Caso 2: $T \in span\{e_i, e_j\}$.

Da equação (4.1) e do fato de que $\|T\|^2 = 1 - \cos^2\theta$, temos

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i \lambda_j + 1 - (T^i)^2 - (T^j)^2) = 0,$$

que implica em

$$0 = \lambda_i \lambda_j + 1 - (T^i)^2 - (T^j)^2 = \lambda_i \lambda_j + 1 - \|T\|^2 = \lambda_i \lambda_j + \cos^2\theta,$$

ou seja,

$$\lambda_i \lambda_j = -\cos^2\theta.$$

Resumindo,

- Se $T \notin span\{e_i, e_j\}$, então $\lambda_i \lambda_j = -1$.
- Se $T \in span\{e_i, e_j\}$, então $\lambda_i \lambda_j = -\cos^2\theta$.

Agora, assuma que A_N possui exatamente dois autovalores distintos, digamos

$$\begin{aligned} A_N e_i &= \lambda e_i, \qquad\quad i \in \{1, \dots, k\}, \\ A_N e_i &= \mu e_i, \quad i \in \{k-1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Se $\lambda\mu = -1$, concluímos que não existe $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{k-1, \dots, n\}$ tais que $T \in span\{e_i, e_j\}$, caso contrário, $-\cos^2\theta = -1$, o que não ocorre, uma vez que estamos supondo $T \neq 0$. Logo, pelo **caso 1**, $T \perp span\{e_i, e_j\}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\forall j \in \{k-1, \dots, n\}$. Mas disso, concluímos que $T = 0$, um absurdo. Assim, $\lambda\mu = -\cos^2\theta \neq -1$ e $T \in span\{e_i, e_j\}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\forall j \in \{k-1, \dots, n\}$. As únicas maneiras disso ocorrer são quando $k = 1$ ou $n - (k+1) + 1 = 1$ $(k = n-1)$. Mais ainda, se $n \geq 3$, então existe ao menos 3 índices i_0, k, l tais que que $T \in span\{e_{i_0}, e_k\} \cap span\{e_{i_0}, e_l\}$, e disso concluímos que $T = \|T\| e_{i_0}$. Reorganizamos a ordem dos índices e trocamos λ com μ, se necessário, de modo que λ seja um autovalor relacionado a e_1 e que $T = \|T\|e_1$, caso $n \geq 3$. Assim, obtemos o caso (ii) do enunciado.

Assuma que A_N tenha no mínimo três autovalores distintos, digamos λ, μ e ν. Se $\lambda\mu = \lambda\nu = -1$, então $\mu = \dfrac{-1}{\lambda} = \nu$, o que é um absurdo. Restam duas possibilidades.

Suponhamos que $\lambda\mu = -1$ e $\lambda\nu = -\cos^2\theta \neq -1$. Temos que $\mu\nu = -\cos^2\theta \neq -1$, caso contrário, como na situação anterior, teríamos $\lambda = \dfrac{-1}{\mu} = \nu$. Por um lado $\mu\nu = -\cos^2\theta \leq 0$ mas, por outro,

$$\mu\nu = \frac{\lambda\nu\lambda\nu}{\lambda^2} = \frac{\cos^2\theta}{\lambda^2} \geq 0,$$

Logo, a única possibilidade é que $\nu = \cos\theta = 0$, uma vez que $\lambda, \mu \neq 0$.

Suponhamos agora que $\lambda\mu = \lambda\nu = -\cos^2\theta$. Se $\cos\theta \neq 0$, então $\mu = \dfrac{-\cos^2\theta}{\lambda} = \nu$, o que novamente nos dá uma contradição. Logo, $\cos\theta = 0$, e como λ, μ e ν são distintos, concluímos que $\lambda = 0$.

Em todas as possibilidades, portanto, 0 deve ser autovalor de A_N e $\cos\theta = 0$.

Para finalizar, vamos mostrar que: T é autovetor relacionado ao autovalor 0; A_N possui no máximo 2 autovalores não nulos, e os autovalores não nulos de A_N, digamos λ e μ são tais que $\lambda\mu = -1$.

Sejam $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ os autovalores de A_N, sem contar multiplicidades. Reorganizando os índices, se necessário, assuma que $\lambda_1 = 0$. Uma vez que $\lambda_1\lambda_i = 0 \neq -1$, $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, segue do **caso 1** que $T \in span\{e_1, e_i\}$, $\forall i \in \{2, \dots, n\}$. Logo, T também está na intersecção de todos esses subespaços, e disso concluímos daí que T está na direção de e_1, ou seja $T = \|T\|e_1$. Em particular, isso mostra que T é autovetor relacionado ao auto valor 0. Disso decorre que $T \perp span\{e_i, e_j\}$, $\forall i, j \in \{2, \dots, n\}$. Pelo **caso 1**, concluímos que $\lambda_i\lambda_j = -1$, $\forall i \in \{2, \dots, n\}$. Isso mostra que o autovalor 0 tem multiplicidade 1. Além disso, se fixarmos $i_0 \in \{2, \dots, n\}$, temos que para todo $i, j \in \{2, \dots, n\} - \{i_0\}$ vale

$$\lambda_i = \frac{-1}{\lambda_{i_0}} = \lambda_j.$$

Portanto, A_N possui no máximo dois autovalores não nulos, λ e μ digamos, e são tais $\lambda\mu = -1$.

Finalmente, como $\cos\theta = 0$, então $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, logo $T = \partial_t$. Em particular $\|T\| = \|\partial_t\| = 1$ e reorganizamos o referencial tomando $e_1 = T$. Isso conclui a demonstração do lema. $\square$

Em termos do operador da segunda forma fundamental, o Lema 4.1.4 fornece uma caracterização das hipersuperfícies semi-paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e será o nosso principal instrumento para classificar tais objetos. Porém, antes de exibir a classificação, exibiremos uma proposição que nos permite identificar hipersuperfícies semi-paralelas de $\mathbb{S}^n$.

Proposição 4.1.5 *(ver [6], pag. 197, Prop 2.1) Seja M^n uma hipersuperfície de uma forma espacial $\tilde{M}^{n+1}(c)$, com $c \neq 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $R \cdot h = 0$, ou seja, M^n é semi-paralela em $\tilde{M}^{n+1}(c)$.

(2) Em cada ponto de M^n o operador da segunda forma fundamental tem a seguinte forma

$$A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \qquad \text{com } \lambda\mu = -c \text{ ou } \lambda = \mu.$$

Teorema 4.1.6 *(ver [12], pag. 366) Seja M^n uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há quatro possibilidades:*

(i) $n = 2$ e M^2 tem curvatura nula (i.e., $R = 0$),

(ii) M^n é totalmente umbílica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$,

(iii) M^n é um aberto de uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil sendo ou uma reta vertical, ou parametrizada por

$$\alpha(s) = \left(\cos(s), 0, \ldots, 0, \operatorname{sen}(s), \pm\int_{s_0}^{s} \sqrt{C\cos^2\sigma - 1}\,d\sigma\right),$$

(iv) M^n é um aberto de uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n$.

Demonstração Seja M^n uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e A_N seu operador da segunda forma fundamental. De acordo com o Lema 4.1.4, há três possibilidades para A_N.

Caso 1a: $A_N = \lambda Id$.

Neste caso M^n é totalmente umbílica, e já foi classificada no Capítulo 2. Em particular, obtemos o caso (ii) do enunciado.

Caso 1b: $n = 2$.

Suponha que M^n não é totalmente umbílica, pois este caso já foi tratado. Afirmamos que M^n tem curvatura nula em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, ou seja $R = 0$. De fato, se $\{e_1, e_2\}$ for um referencial ortonormal para M^n então para $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$

$$R(e_i, e_i) = 0, \qquad \text{e}, \qquad \langle R(e_i, e_j)e_i, e_i\rangle = 0.$$

E como M^2 é semi-paralela,

$$0 = R \cdot h(e_i, e_j, e_i, e_j) = (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2 - (T^i)^2),$$

ou seja,

$$\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2 - (T^i)^2 = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle &= \langle(\lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2)e_i + T^iT^je_j - T^iT, e_i\rangle \\ &= \lambda_i\lambda_j + 1 - (T^j)^2 - (T^i)^2 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $R(e_i, e_j) = 0$. Em particular, acabamos de obter o caso (i) do enunciado.

Caso 2: $A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{bmatrix}$, com $\lambda\mu = -\cos^2\theta$ e $T = \|T\|e_1$, caso $n \geq 3$

Pelo Teorema 2.2.1, M^n é um aberto de uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. A igualdade $\lambda\mu = -\cos^2\theta$ descrita no Lema 4.1.4 determina a curva perfil α dessa hipersuperfície de rotação. Vejamos como.

Lembre-se que das equações (2.9) e (2.10) para o caso de α não ser uma reta vertical, temos que

$$\lambda(s) = \frac{-a''(s)}{(1 + a'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \mu(s) = \frac{-a'(s)\cot(s)}{(1 + a'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Além disso, se α for uma reta vertical dada por $\alpha(s) = (\cos(c), 0, \ldots, 0, \operatorname{sen}(c), s)$ então, pelas equações (2.5) e (2.5),

$$\lambda(s) = 0, \qquad \mu(s) = -\cot(c).$$

Tratamos desses dois subcasos separadamente.

Subcaso 1: α não é uma reta vertical.

Então,

$$\lambda\mu = \frac{a'(s)a''(s)\cot(s)}{(1+(a'(s))^2)^2}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
-\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta - 1 &= \left\langle \partial_t, \frac{T}{\|T\|} \right\rangle^2 - 1 \\
&= \left\langle \partial_t, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \right\rangle^2 - 1 \\
&= \frac{a'(s)^2}{1+(a'(s))^2} - 1 = \frac{-1}{1+(a'(s))^2},
\end{aligned}$$

pois $\alpha(s) = (\cos(s), 0, \ldots, 0, a(s))$ e $\|\alpha'(s)\|^2 = 1 + (a'(s))^2$. Assim, a equação $\lambda\mu = -\cos^2\theta$ é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \frac{a'(s)a''(s)\cot(s)}{(1+(a'(s))^2)^2} = \frac{-1}{1+(a'(s))^2} \\
\Leftrightarrow \quad & a'(s)a''(s)\cot(s) = -1 - (a'(s))^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a'(s)a''(s) = -\tan(s) - (a'(s))^2\tan(s) \\
\Leftrightarrow \quad & 2(a'(s)^2)\tan(s) = 2a'(s)a''(s) + 2\tan(s) \\
\Leftrightarrow \quad & ((a'(s))^2)' + 2\tan(s)(a'(s))^2 + 2\tan(s) = 0,
\end{aligned}$$

cuja solução é dada por $a'(s)^2 = C\cos^2(s) - 1$, $C \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\alpha(s) = \left(\cos(s), 0, \ldots, 0, \operatorname{sen}(s), \pm \int_{s_0}^{s} \sqrt{C\cos^2\sigma - 1}\, d\sigma \right),$$

obtendo assim o caso (iii) do enunciado.

Subcaso 2: α é uma reta vertical.

Neste caso, $\alpha'(s) = \partial_t = T$ e $\cos\theta = 0$. Como $T = \partial_t$, concluímos que M^n é um aberto de uma hipersuperfície da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. O operador da segunda forma fundamental de $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{S}^n$ é $S = -\cot(c) \cdot id$, (pois $S = (A_N)|_{\{\partial_t\}^\perp}$, como veremos abaixo), e assim $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n$. Obtemos os casos (iv) e (iii) do enunciado.

Caso 3: $A_N = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \lambda & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & \mu & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda\mu = -1$ e $e_1 = T = \partial_t$.

No último caso do Lema 4.1.4, ∂_t é tangente em todo ponto de M^n e portanto M^n é um aberto de uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n$. Se denotarmos por S o operador da segunda forma fundamental de $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{S}^n$, para todo campo X tangente a $\tilde{M}^{n-1}$, temos que $SX = A_N X$. Daí, concluímos que S tem a forma

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda\mu = -1.$$

De acordo com a Proposição 4.1.5, esta condição é equivalente a $\tilde{M}^{n-1}$ ser semi-paralela em $\mathbb{S}^n$. Obtemos assim o caso (iii) do enunciado. $\square$

Para finalizar este capítulo, mostraremos que no **Caso 2** e no **Caso 3**, $S = (A_N)|_{\{\partial_t\}^\perp}$. De fato, se N é um vetor normal a $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{S}^n$, então o mesmo será normal a $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Daí, pela fórmula de Gauss (1.1), para todo campo X tangente a $\tilde{M}^{n-1}$ temos que:

$$\begin{aligned} SX = -(D_X N)^T &= [-(\tilde{\nabla}_X N) + \langle \tilde{A}_{\partial_t} X, N \rangle \partial_t]^T \\ &= -\tilde{\nabla}_X N = A_N X, \end{aligned}$$

em que $\tilde{A}_{\partial_t}$ é o operador da segunda forma fundamental da inclusão de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, que é o operador nulo, pois $\mathbb{S}^n$ é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, e o superíndice T denota a parte tangente a $\mathbb{S}^n$.

Capítulo 5

Hipersuperfícies Paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Neste capítulo será apresentada uma classificação das hipersuperfícies paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. A idéia é identificar no Teorema 4.1.6 quais são paralelas, uma vez que toda hipersuperfície paralela é semi-paralela.

5.1 Classificação das Hipersuperfícies Paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

As hipersuperfícies paralelas da esfera $\mathbb{S}^n$ foram classificadas por H.B. Lawson (ver [8]). O resultado que ele demonstrou segue após a definição:

Definição 5.1.1 Sejam p e q inteiros positivos tais que $p + q = n$. Definimos o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^{n+2}$, chamado de *Toro de Clifford Generalizado*:

$$S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\times S^q\left(\sqrt{\frac{q}{n}}\right) = \left\{(x_1,\ldots,x_{p+1},y_1,\ldots,y_{q+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}; \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 = \frac{p}{n} \quad e \quad \sum_{i=j}^{q+1} y_j^2 = \frac{q}{n}\right\}.$$

Observação 5.1.2 Em particular, $S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right) \times S^q\left(\sqrt{\frac{q}{n}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

Proposição 5.1.3 *(ver [8], pág. 190) Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $\nabla h = 0$, então existe um inteiro $0 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ de modo que $f(M^n)$ é um aberto do produto $S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times S^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.*

Vamos começar a classificação das hipersuperfícies paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 5.1.4 *(ver [12], pag. 367) Seja M^n uma hipersuperfície paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há duas possibilidades:*

(i) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$, em que $t_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) M^n é um aberto de uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície paralela de $\mathbb{S}^n$.

Demonstração Vamos verificar cada caso do Teorema 4.1.6 e encontrar quais são as hipersuperfícies paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Caso i: ($n = 2$ e M^n tem curvatura nula). As hipersuperfíces paralelas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ foram classificadas em [1], que diz: as hipersuperfícies paralelas com curvatura nula de dimensão 2 de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ são abertos de produtos cartesianos de esferas de dimensão 1 contidas em $\mathbb{S}^2$ com $\mathbb{R}$.

Caso ii: (M^n totalmente umbílica). Neste caso, o operador da segunda forma fundamental é $A_N = \lambda Id$. Suponhamos que M^n seja paralela, ou seja, $(\nabla h)(X, Y, Z) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Mas, por outro lado, calculando explicitamente,

$$
\begin{aligned}
& (\nabla h)(X, Y, Z) = X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X(\lambda\langle Y, Z\rangle) - \lambda\langle\nabla_X Y, Z\rangle - \lambda\langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X(\lambda)\langle Y, Z\rangle + \lambda X(\langle Y, Z\rangle) - \lambda\langle\nabla_X Y, Z\rangle - \lambda\langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X(\lambda)\langle Y, Z\rangle + \lambda(X(\langle Y, Z\rangle) - \langle\nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X(\lambda)\langle Y, Z\rangle = 0, \\
\Leftrightarrow \quad & X(\lambda) = 0.
\end{aligned}
$$

ou seja, λ é constante em M^n.

Pela equação (3.3), $0 = T(\lambda) = -\cos\theta\langle T, T\rangle = -\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$. Logo, $\cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$. Então, ou $\cos\theta = 0$, ou $\operatorname{sen}\theta = 0$.

Se $\operatorname{sen}\theta = 0$, então $\cos\theta = \pm 1$, o que implica N paralelo a ∂_t. Daí, M^n é um aberto de $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ é totalmente geodésica, concluímos que M^n também é totalmente geodésica. Obtemos dessa maneira o caso (i) do enunciado.

Se $\cos\theta = 0$, então ∂_t é tangente a M^n em todo ponto, ou seja, M^n é um aberto de uma hipersuperfície da forma $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfíce semi-paralela de $\mathbb{S}^n$. Mas, como $\cos\theta = 0$, então $-(\operatorname{sen}\theta)\theta' = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = \pm 1$, seguindo daí que $\theta' = \lambda = 0$. Disso, temos que $A_N = 0$, ou seja, M^n é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Em particular, isso acarreta que $\tilde{M}^{n-1}$ é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n$. Obtemos, assim, o caso (ii) do enunciado.

Também, concluímos que toda hipersuperfície totalmente umbílica e paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica.

Caso iii: (M^n é uma hipersuperfície de rotação e $\lambda\mu = -\cos^2\theta$).

Tome X e Y campos LI e ortogonais a T. Através da equação de Codazzi (1.9) e do fato de $\{T\}^\perp$ ser uma distribuição involutiva, temos que

$$\begin{aligned}\mu[X,Y] = A_N[X,Y] &= \nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X - \cos\theta(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y)\\ &= \nabla_X A_N Y - \nabla_Y A_N X\\ &= X(\mu)Y + \mu\nabla_X Y - Y(\mu)X - \mu\nabla_Y X,\end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = X(\mu)Y - Y(\mu)X.$$

Assim, como X e Y são LI, concluímos $X(\mu) = Y(\mu) = 0$. Logo, μ é constante nas direções perpendiculares a T.

Seja agora $\alpha(s)$ a curva perfil de M^n e escolha um campo de vetores $X(s)$ ao longo de $\alpha(s)$ que satisfaça as seguintes condições:

(a) $X(s) \perp \alpha'(s)$ (ou, equivalentemente, $X(s) \perp T(\alpha(s))$),

(b) $X(s)$ é paralelo ao longo de $\alpha(s)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$,

(c) $\|X(s)\| = 1$.

A existência de X se justifica tomando um campo ortogonal ao subespaço P^3 (descrito no Capítulo 2) e tangente a M^n.

Denotando por $\tilde{h}$ a segunda forma fundamental da inclusão de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ e usando a fórmula de Gauss (1.1), concluímos que

$$\begin{aligned}0 = D_T X &= \tilde{\nabla}_T X + \tilde{h}(T,X)\xi\\ &= \nabla_T X + h(T,X)N + \tilde{h}(T,X)\xi\end{aligned}$$

pois X é paralelo ao longo de α em $\mathbb{R}^{n+2}$. E, como $\{\nabla_T X, N, \xi\}$ é LI, concluímos que

$$\nabla_T X = 0. \tag{5.1}$$

Agora suponhamos que M^n é paralela em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Usando o fato que X é unitário e perpendicular a T (logo, $A_N X = \mu X$) e a equação (5.1), obtemos

$$\begin{aligned}0 = (\nabla h)(T,X,X) &= T(h(X,X)) - 2h(\nabla_T X, X)\\ &= T(\mu\langle X,X\rangle)\\ &= T(\mu).\end{aligned}$$

Portanto, μ é constante na direção T. Ou seja, μ é constante em M^n.

Usando a equação de Codazzi (1.9) e a equação (1.10), se $X \perp T$, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X A_N T - \nabla_T A_N X - A_N[X,T] &= \cos\theta(\langle T,T\rangle X - \langle X,T\rangle T)\\ &= \cos\theta\|T\|^2 X\\ &= \cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta X.\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& \nabla_X(\lambda T) - \nabla_T(\mu X) - A_N(\nabla_X T - \nabla_T X) = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta X \\
\Rightarrow \quad & X(\lambda)T + \lambda \nabla_X T - T(\mu)X - \mu\nabla_T X - A_N(\cos\theta A_N X) + A_N(\nabla_T X) = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta X \\
\Rightarrow \quad & X(\lambda)T + \lambda\mu\cos\theta X - \mu\nabla_T X - \mu^2\cos\theta X + \mu\nabla_T X = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta X.
\end{aligned}
$$

em que da penúltima para a última linha da equação usamos que

$$
\langle \nabla_T X, T\rangle = T(\langle X, T\rangle) - \langle X, \nabla_T T\rangle = \cos\theta\langle X, A_N T\rangle = 0,
$$

para concluír que $A_N(\nabla_T X) = \mu\nabla_T X$.

Usando o fato que $\lambda\mu = -\cos^2\theta$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& X(\lambda)T + \lambda\mu\cos\theta X - \mu\nabla_T X - \mu^2\cos\theta X + \mu\nabla_T X = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta X \\
\Rightarrow \quad & X(\lambda)T - \cos^3\theta X - \mu^2\cos\theta X = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta X \\
\Rightarrow \quad & X(\lambda)T - \cos\theta(\mu^2 + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)X = 0 \\
\Rightarrow \quad & X(\lambda)T - \cos\theta(\mu^2 + 1)X = 0.
\end{aligned}
$$

Como X e T são LI, concluímos que $X(\lambda) = 0$ e $\cos\theta(\mu^2+1) = 0$. Em particular, $\cos\theta = 0$. Isso significa que M^n é um aberto de um produto da forma $\tilde{M}^{n-1}\times\mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n$. A equação (1.11) assegura que $-\langle A_N T, X\rangle = X(\cos\theta) = X(0) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M^n)$. Em particular, $A_N T = 0$, ou seja, $\lambda = 0$.

Agora, considerando $\tilde{M}^{n-1}$ como subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$, sua codimensão será 2. Os campos N e ν (vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$) são normais a $\tilde{M}^{n-1}$. Usando a fórmula de Gauss (1.1), vamos calcular os operadores da segunda forma fundamental de $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, nas direções N e ν, os quais denotamos respectivamente por S_N e S_ν. Se X for tangente a $\tilde{M}^{n-1}$, em particular X é ortogonal a T e, pelo fato de $\mathbb{S}^n$ ser totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$, obtemos

$$
S_N X \doteq -(D_X N)^T = -(\tilde{\nabla}_X N)^T \doteq A_N X = \mu X,
$$

$$
S_\nu X \doteq -(D_X\nu)^T = -X_{\mathbb{S}^n} = -X.
$$

Portanto, os operadores da segunda forma fundamental de $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ são dados por $S_N = \mu id$ e $S_{-\nu} = id$, respectivamente.

Porém, N e $-\nu$ geram um plano Π, normal a $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos tomar dois vetores N_1 e N_2 em Π, através de uma rotação de N e $-\nu$ por um ângulo $\zeta \neq k\pi$, de modo que os novos operadores da segunda forma fundamental são dados por $S_{N_1} = \sqrt{\mu^2+1}\ id$ e $S_{N_2} = 0$. De fato, rotacionando N e $-\nu$ em Π por um ângulo $\zeta \neq k\pi$, obtemos

$$S_{N_1} = -dN_1 = -dRN = -d(\cos\zeta N - \operatorname{sen}\zeta(-\nu)) = \cos\zeta S_N - \operatorname{sen}\zeta S_{-\nu},$$

$$S_{N_2} = -dN_2 = -dR(-\nu) = -d(\operatorname{sen}\zeta N + \cos\zeta(-\nu)) = \operatorname{sen}\zeta S_N + \cos\zeta S_{-\nu},$$

em que R é a rotação pelo ângulo ζ. Em suma,

$$S_{N_1} = (\mu\cos\zeta - \operatorname{sen}\zeta)id,$$

$$S_{N_2} = (\mu\operatorname{sen}\zeta + \cos\zeta)id.$$

Daí, $\zeta \neq k\pi$ e, portanto, $\operatorname{sen}\zeta \neq 0$. Assim, se queremos $S_{N_2} = 0$, então $\mu\operatorname{sen}\zeta + \cos\zeta = 0 \Leftrightarrow \zeta = arc\cot(-\mu)$.

Como $S_{N_2} = 0$, N_2 é constante em $\tilde{M}^{n-1}$. Logo, $\tilde{M}^{n-1}$ está contido em um subespaço afim de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$, gerado por $\{N_2\}^{\perp}$. E como $S_{N_1} = \sqrt{\mu^2+1}\ id$, concluímos que $\tilde{M}^{n-1}$ é um aberto de uma esfera de dimensão $n-1$ e raio $\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}$, contida no subespaço afim que acabamos de citar. Portanto, $\tilde{M}^{n-1}$ é uma hipersuperfície paralela de $\mathbb{S}^n$. Obtemos o caso (ii) do teorema.

Caso iv: ($M^n \subset \tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$, em que $\tilde{M}^{n-1}$ é hipersuperfície semi-paralela de $\mathbb{S}^n$).

Neste caso, $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ é paralela em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ se, e somente se, $\tilde{M}^{n-1}$ é paralela em $\mathbb{S}^n$. Ao mostrarmos essa equivalência, obteremos o caso (ii) do teorema.

Se N é normal a $\tilde{M}^{n-1}$, então $N = (N, 0)$ será normal a $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Daí, denotando por S_N e A_N os respectivos operadores da segunda forma fundamental de $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{S}^n$ e $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, usando a fórmula de Gauss (1.1), obtemos que

$$A_N X = -\tilde{\nabla}_X N = -D_X N + \langle X, -D_N\partial_t\rangle\partial_t = -D_X N = S_N X.$$

Logo, $A_N = S_N$. Se ∇ e $\overline{\nabla}$ forem as respectivas conexões de Levi-Civita de $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e $\tilde{M}^{n-1}$, temos novamente por (1.1) que

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \langle X, -D_Y\partial_t\rangle\partial_t = \overline{\nabla}_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M}^{n-1}),$$

e, se h e $\overline{h}$ forem as respectivas segundas formas fundamentais de $\tilde{M}^{n-1} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e de $\tilde{M}^{n-1}$ em $\mathbb{S}^n$, temos, para X, Y, Z tangentes a $\tilde{M}^{n-1}$, que

$$\begin{aligned}
& (\nabla h)(X,Y,Z) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X(\overline{h}(Y,Z)) - \overline{h}(\overline{\nabla}_X Y, Z) - \overline{h}(Y, \overline{\nabla}_X Z) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\overline{\nabla h})(X,Y,Z) = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, se X, Y forem ortogonais a ∂_t, então

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(\partial_t, X, Y) &= \partial_t(h(X,Y)) - h(\nabla_{\partial_t} X, Y) - h(X, \nabla_{\partial_t} Y) \\
&= 0 - h(0,Y) - h(X,0) = 0, \\
(\nabla h)(X, \partial_t, Y) &= X(h(\partial_t, Y)) - h(\nabla_X \partial_t, Y) - h(\partial_t, \nabla_X Y) \\
&= X(\langle 0, Y\rangle) - \langle 0, A_N Y\rangle - \langle 0, \nabla_X Y\rangle = 0, \\
(\nabla h)(X, Y, \partial_t) &= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Observação 5.1.5 Tendo em vista a classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ dada no Teorema 3.2.5 e das hipersuperfícies paralelas no Teorema 5.1.4, concluímos que nem toda hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é paralela. Um exemplo é obtido igualando as curvaturas $\lambda(s)$ e $\mu(s)$ dadas nas equações (2.5) e (2.6). Feito isso, obteremos a seguinte EDO:

$$a''(s) = a'(s)\cot^2(s)(1 + a'(s)^2).$$

Por fim, basta tomar solução $a(s)$ de modo que $a'(s)$ não seja constante, o que é equivalente a μ não ser constante, e obter a parametrização da hipersuperfície através da equação (2.4).

Referências Bibliográficas

[1] M. Belkhelfa; F. Dillen; J. Inoguchi, *Surfaces with parallel second fundamental form in Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces*, in: PDE's, Submanifolds and Affine Differential Geometry, Banach Center Publ., Polish Acad.Sci., Warsaw, **57** (2002), 67-87.

[2] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[3] M.P. do Carmo; M. Dajczer, *Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 277, number 2, June 1983.

[4] B. Daniel, *Isometric immersions into* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 6255-6282.

[5] J. Deprez, *Semi-parallel Hypersurfaces*, Rend. Sem. Mat. Univer. Politec. Torino, **44** (1986), 303-316.

[6] F. Dillen, *Semi-parallel hypersurfaces of a real space form*, Israel J. Math., **75** (1991), 193-202.

[7] F. Dillen; J. Fastenakels; J. Van der Veken, *Rotation Hypersurfaces in* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, Note Mat. **29** (2009), 41-54.

[8] H.B. Lawson, *Local Rigidity Theorems for Minimal Hypersurfaces*, Ann. of Math., **89** (1969), 187-197.

[9] U. Lumiste, *Semiparallel Submanifolds in Space Forms*, Springer, New York, 2009.

[10] B. Mendonça; R. Tojeiro, *Umbilical Submanifolds of* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, Canadian Journal of Mathematics, **66**, (2014), 400-428.

[11] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York (1982).

[12] J. Van der Veken; L. Vrancken, *Parallel and semi-parallel hypersurfaces of* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, Bull Braz. Math Soc., (2008), 355-370.

[13] J. Van der Veken; *Submanifolds of homogeneous spaces*, Tese de Doutorado, Katholieke Universiteit, Leuven, (2007).

[14] F.W. Warner, *Foundations on Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York, 1983.