

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problemas elípticos superlineares com não linearidades assimétricas

Wallisom da Silva Rosa

São Carlos - SP

MARÇO DE 2015

O presente trabalho teve suporte financeiro da CAPES
(Prodoutoral e Reuni)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Wallisom da Silva Rosa
BOLSISTA CAPES (PRODOUTORAL E REUNI)
Orientador: Prof Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Problemas elípticos superlineares com não linearidades assimétricas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

São Carlos - SP
MARÇO DE 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R788p Rosa, Wallisom da Silva
Problemas elípticos superlineares com não
linearidades assimétricas / Wallisom da Silva Rosa. -
- São Carlos : UFSCar, 2015.
95 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2015.

1. Problemas elípticos. 2. Métodos variacionais.
3. Métodos topológicos. 4. Linking. 5. Grau
topológico. I. Título.



Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Wallisom da Silva Rosa, realizada em 06/03/2015:



Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar



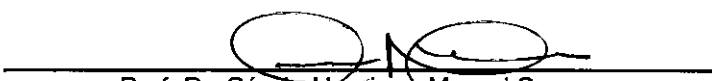
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
UFSCar



Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
UFSCar



Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
UNICAMP



Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
USP

À Eva.

*“Tinha eu 14 anos de idade
Quando meu pai me chamou
Perguntou se eu não queria
Estudar Filosofia, Medicina ou Engenharia
Tinha eu que ser Doutor”*

14 ANOS (PAULINHO DA VIOLA)

AGRADECIMENTOS

À Eva, minha musa inspiradora, com quem divido sonhos e realizações desde 2004.

À minha família, que suportou os momentos de ausência com a compreensão necessária.

À Universidade Federal de Uberlândia, em especial aos professores do Curso de Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, pela oportunidade do afastamento para cumprir essa etapa profissional.

A todos os amigos do doutorado que dividiram cada momento dessa jornada, em especial os amigos que ingressaram comigo: Allan, Carol, Eva, Japa e Marcos, e os colegas de orientação: Fabiana Ferreira e Moisés Nascimento.

Aos novos amigos são carlenses que fiz nesse período de morada provisória e aos amigos de Ituiutaba-MG, principalmente os afilhados André e Jussara que sempre nos acolheram em sua residência quando precisamos.

Aos professores da banca, que disponibilizaram tempo, conhecimento e paciência para contribuir com o trabalho.

Ao Professor Adilson Presoto pela leitura prévia do trabalho e precisas considerações.

Finalmente, ao meu orientador, Professor Odair, por aceitar essa empreitada e me guiar sempre de forma otimista nas decisões tomadas em toda parte da tese.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos resultados de existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não lineares assimétricos. A assimetria que consideramos aqui tem comportamento linear em $-\infty$ e superlinear em $+\infty$. Para obter tais resultados aplicamos métodos variacionais como teoremas de linking e métodos topológicos como a teoria do grau topológico.

Palavras Chave: Problemas Elípticos, Métodos Variacionais, Métodos Topológicos, Linking, Grau Topológico.

ABSTRACT

The aim of this work is to present results of existence of solutions for a class of nonlinear asymmetric elliptic problems. The asymmetry that we consider here has linear behavior on $-\infty$ and superlinear on $+\infty$. To obtain these results we apply variational methods as linking theorems and topological methods like topological degree theory.

Key Words: Elliptic Problems, Variational Methods, Topological Methods, Linking Theorems, Topological Degree.

SUMÁRIO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Um problema de Neumann com expoente crítico	7
1.1 Resultado principal	8
1.2 Preliminares e notações	9
1.3 Condição de compacidade	10
1.4 Condições geométricas	20
1.5 Prova do resultado principal	31
Notas do capítulo	31
2 Um sistema Hamiltoniano com condições de Neumann na fronteira	33
2.1 Hipóteses e resultado principal	34
2.2 Teorema de minimax	36

2.3	Formulação variacional	37
2.4	Condições geométricas	42
2.5	O caso $b = 0$ (ou $c = 0$)	47
2.6	Condição de compacidade	48
2.7	Prova do resultado principal	51
	Notas do capítulo	52
3	A ressonância no primeiro autovalor	53
3.1	O caso escalar	54
3.2	Estimativa <i>a priori</i> para o caso escalar	55
3.3	Existência de soluções para o caso escalar	58
3.4	Sistema ressonante	64
3.5	Estimativas <i>a priori</i> para as soluções do sistema	64
3.6	Existência de soluções para o sistema	68
	Notas do capítulo	72
A	Símbolos e notações	74
B	Desigualdades elementares	78
C	Resultados elementares	79
D	O grau topológico	83
D.1	O grau de Brouwer e suas propriedades	83
D.2	O grau de Leray-Schauder	88
	Bibliografia	92

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo provar a existência de soluções para uma classe de equações e sistemas elípticos com parte não linear assimétrica. Em cada capítulo consideraremos um problema que é superlinear em $+\infty$ e assintoticamente linear em $-\infty$.

No primeiro capítulo estudamos o problema de Neumann

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x, u) + (u^+)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $\lambda > 0$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico para a imersão de Sobolev.

Com as hipóteses que utilizamos sobre a função $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o problema (1) é do tipo superlinear em $+\infty$ e assintoticamente linear em $-\infty$. Para mostrar o resultado de existência de solução não trivial para esse problema utilizamos o Teorema do “Linking”, devido a Rabinowitz [Rabinowitz]. A presença do termo crítico $(u^+)^{2^*-1}$ dificulta a prova dos resultados de compacidade, geralmente comuns nas hipóteses dos teoremas de pontos críticos. Em geral, funcionais relacionados com equações que apresentam esse termo satisfazem a condição de Palais-Smale (condição PS) possivelmente apenas para valores do nível c da sequência num intervalo limitado da reta. Isso força um passo a mais: mostrar que o nível min-max pertence ao intervalo onde o funcional satisfaz a condição PS.

A motivação para o estudo da equação (1) é o problema subcrítico de Arcoya-Villegas

[Arcoya-Villegas]. O caso particular em que $g(x, s) = (s^+)^p$, com $p \in (1, 2^* - 1)$ fornece a equação:

$$-\Delta u = \lambda u + (u^+)^p + (u^+)^{2^*-1}.$$

Problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev têm sido objeto de estudo de diversos pesquisadores. O primeiro trabalho relevante nesse tema, utilizando a teoria de min-max, é o clássico artigo [Brezis-Nirenberg] que mostrou a existência de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2}, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A principal hipótese utilizada nesse trabalho foi $\lambda < \lambda_1$ (o primeiro autovalor do operador $-\Delta$, o operador Laplaciano, com condição de Dirichlet na fronteira). Posteriormente os artigos [Capozzi-et al.] e [Cerami-et al.] ampliaram a hipótese sobre λ de forma a cobrir qualquer valor real e obtiveram ainda resultados de multiplicidade sobre as soluções do problema, relacionando a quantidade de soluções com a posição de λ em relação ao espectro do Laplaciano.

Inspirados por esses trabalhos surgiram muitos outros resultados trocando λu por funções mais gerais $g(x, u)$ que imitam tal comportamento linear próximo da origem e sempre relacionando λ com os autovalores do Laplaciano, por exemplo [Chabrowski-Ruf] (caso Neumann) e [Gazzola-Ruf] (caso Dirichlet).

Recentemente, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos para o problema assimétrico, em que a não linearidade se comporta de maneira diferente em $+\infty$ e $-\infty$.

Os artigos [Arcoya-Villegas] e [Papageorgiou-Smyrlis] estudaram uma equação com parte não linear assimétrica e condições de Neumann na fronteira, porém subcrítico. Nosso referencial para as hipóteses sobre $\lambda u + g(x, u)$ foram as hipóteses sobre a função f do artigo [Arcoya-Villegas] e acrescentamos o termo crítico motivados pelo trabalho [Calanchi-Ruf].

No artigo [Calanchi-Ruf] os autores estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x, u^+) + (u^+)^{2^*-1} + f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\lambda > \lambda_1$ e $f(x) = h + t\varphi_1$, onde φ_1 é a primeira autofunção do Laplaciano, com condições de Dirichlet, e $h \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N$. Um problema que possui o termo $f(x)$ com as características acima é dito do tipo Ambrosetti-Prodi. As técnicas variacionais utilizadas por esses autores serviram de fonte de inspiração para o problema estudado neste capítulo.

No Capítulo 2 estudamos um sistema Hamiltoniano cujas equações seguem quase as mesmas características do problema (1) quanto à assimetria, porém com os expoentes subcríticos.

Um sistema do tipo

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(x, u, v) \\ -\Delta v + v = g(x, u, v) \end{cases}$$

é chamado Hamiltoniano se existe uma função $H(x, u, v)$ tal que

$$(3) \quad f = \frac{\partial H}{\partial v} \quad \text{e} \quad g = \frac{\partial H}{\partial u}.$$

Estudamos no Capítulo 2 o sistema Hamiltoniano com condições de Neumann na fronteira:

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = au + bv + (v^+)^p, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v = cu + av + (u^+)^q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, a, b, c são constantes reais e p e q são tais que

$$1 < p, q < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}.$$

Obtivemos um resultado de existência de soluções não triviais para o sistema (4) utilizando o Teorema do Linking, de Felmer [Felmer], com argumentos similares aos do artigo [Massa].

Os artigos [De Figueiredo-Felmer] e [De Figueiredo-Ramos] trabalharam com um sistema Hamiltoniano utilizando espaços fracionários para a formulação variacional do problema. Serviram como referência, apesar de termos nos resumido a outras técnicas variacionais mais simples.

O Capítulo 3 foi dedicado ao estudo dos problemas com ressonância no primeiro autovalor. Entendemos como problemas “ressonantes” os problemas cuja equação é do tipo $-\Delta u = \lambda u + f(x, u)$ com λ igual a um autovalor (com a devida condição na fronteira). A ressonância no primeiro autovalor ($\lambda = \lambda_1$) é especialmente peculiar porque o funcional associado não satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.

A motivação para o estudo deste capítulo foi o artigo [Cuesta-et al.], no qual os autores trabalharam com os seguintes problemas de Dirichlet ressonantes:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + (u^+)^p + f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + (v^+)^p + f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \lambda_1 v + (u^+)^q + g(x), & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Supondo $f \in L^r(\Omega)$, $r > N$, $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$ e

$$(5) \quad \int_{\Omega} f(x)\varphi_1(x)dx < 0,$$

onde φ_1 é a primeira autofunção do Laplaciano com condições de Dirichlet na fronteira e normalizada em $L^2(\Omega)$, os autores mostraram que a equação escalar possui ao menos uma solução em $W^{2,r}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para o sistema, além de f e g satisfazerem a hipótese (5), os expoentes p e q deveriam satisfazer

$$\frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1} \frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1}$$

e

$$\frac{1}{q+1} + \frac{N-1}{N+1} \frac{1}{p+1} > \frac{N-1}{N+1}.$$

Em ambos os casos, os autores utilizaram a teoria do grau topológico juntamente com o índice de Morse.

Estudamos neste capítulo a equação escalar de Neumann:

$$(6) \quad \begin{cases} -\Delta u = (u^+)^p + f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e o sistema Hamiltoniano:

$$(7) \quad \begin{cases} -\Delta u = (v^+)^p + f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = (u^+)^q + g(x), & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui também supomos que f e g satisfazem uma hipótese tal qual (5). Note que, no caso Neumann, φ_1 é constante (logo, tem sinal definido) e por isso tivemos que supor que f e g têm integrais estritamente negativas em Ω .

Assim como no artigo [Cuesta-et al.], utilizamos métodos topológicos para obtenção dos resultados de existência de soluções obtidos nesse capítulo. A teoria do Grau de Leray-Schauder foi uma ferramenta fundamental neste processo. No Apêndice D incluímos um resumo da teoria utilizada para provar os resultados principais.

Para obtermos as essenciais estimativas *a priori* sobre as soluções de (6), diferentemente das hipóteses do artigo [Cuesta-et al.], supomos $1 < p < \frac{N}{N-2}$ e $f \in L^r(\Omega)$, para algum $r > N/2$. Para o sistema (7) supomos

$$1 < p, q < \frac{N}{N-2}$$

e $f, g \in L^r(\Omega)$, para algum $r > N/2$. Essa parte do trabalho foi inspirada pelo artigo [Kannan-Ortega] no qual os autores estudam uma equação do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) + f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz:

(G₁) g é localmente Lipschitziana;

(G₂) $\lim_{s \rightarrow -\infty} g(s) = \infty$;

(G₃) $|g(s)| \leq M$ para $s \geq 0$;

(G₄) existem constantes α, β e um expoente p tais que

$$|g(s)| \leq \alpha|s|^p + \beta,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ onde

$$1 \leq p < \frac{N}{N-2}, \quad N \geq 3.$$

Observe que $g(s) = (s^+)^p$ não satisfaz as hipóteses (G_2) e (G_3) .

Por fim, incluímos nos apêndices um resumo das notações e de todos os resultados suplementares a essa tese.

CAPÍTULO 1

UM PROBLEMA DE NEUMANN COM EXPOENTE CRÍTICO

Nesse capítulo buscamos uma solução não trivial para o problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x, u) + (u^+)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $\lambda > 0$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico para a imersão de Sobolev

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$u^+ = \max(u, 0)$ e $u^- = \max(-u, 0)$. Assim, $u = u^+ - u^-$.

A função $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(g1) $g(x, s) = 0$ se $s \leq 0$ e $g(x, s) > 0$ se $s > 0$;

(g2) existem $\sigma \in (1, 2^* - 1)$ e uma constante $K > 0$ tais que:

$$|g(x, s)| \leq K|s|^\sigma, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

$$(g3) \quad \frac{\partial g}{\partial s}(x, 0) = 0;$$

(g4) existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que

$$0 < G(x, s) \leq \theta s g(x, s), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s > 0,$$

onde $G(x, s) = \int_0^s g(x, t) dt$ é uma primitiva de g .

1.1 Resultado principal

Suponha u uma solução de (1.1) com $u^+(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Então, dadas as hipóteses sobre a função g , o problema (1.1) se resume a um problema de autovalor do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u < 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

o qual só terá solução se $\lambda = \lambda_1 = 0$, pois a única autofunção com sinal definido é a primeira (nesse caso, qualquer função constante negativa seria solução do problema).

Por outro lado, se $\lambda = 0$ então utilizando a primeira autofunção $\varphi_1 = 1$ como função-teste e integrando (1.1), obtemos:

$$\int_{\Omega} g(x, u) dx = - \int_{\Omega} (u^+)^{2^*-1} dx \leq 0.$$

Como g é contínua e satisfaz (g_1) , devemos ter:

$$\int_{\Omega} g(x, u) dx = 0$$

o que obriga $u^+ = 0$ q.t.p. em Ω , e daí, pelo visto acima, as soluções do problema (1.1) são constantes negativas. Portanto, se $\lambda = 0$ as únicas soluções do problema (1.1) são as autofunções negativas do primeiro autovalor (constantes < 0).

Quando $\lambda < 0$, sabe-se que

$$\|u\|_{\star} = \left(\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \lambda u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma equivalente à norma padrão em $H^1(\Omega)$. Com esse fato, juntamente com a hipótese (g_2) , é possível mostrar que o funcional associado ao problema (1.1) pode ser separado em uma parte associada a essa norma citada e outra parte que é superquadrática, satisfazendo as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Este capítulo se propõe a mostrar a existência de uma solução não trivial de (1.1) para $\lambda > 0$ qualquer. Mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Suponha $\lambda > 0$ e as hipóteses $(g_1) - (g_4)$. Então o problema (1.1) admite pelo menos uma solução não trivial.*

1.2 Preliminares e notações

Estamos interessados em soluções $u \in H^1(\Omega)$, que é um espaço de Hilbert munido com a norma¹

$$\|u\| = (|u|_2^2 + |\nabla u|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

onde $|\cdot|_p$ denotará sempre a norma no espaço $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$.

Seja λ_1 o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condições de Neumann na fronteira:

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que $\lambda_1 = 0$ e as autofunções correspondentes são as funções constantes.

Denote por $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ os autovalores de $-\Delta$ com condição de Neumann na fronteira e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ as autofunções associadas com norma 1 em $H^1(\Omega)$.

O funcional $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , associado ao problema (1.1) é dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx.$$

A derivada de J é dada por

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u) \varphi dx - \int_{\Omega} (u^+)^{2^*-1} \varphi dx,$$

¹Em vários momentos no texto, para simplificar as notações, utilizaremos simplesmente H^1 para nos referirmos a $H^1(\Omega)$.

para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$. Os pontos críticos de J são soluções fracas de (1.1).

Lembre que

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

onde

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N), u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)\}.$$

A constante S é atingida pela função

$$(1.2) \quad U(x) = \frac{c_N}{(N(N-2) + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde $c_N > 0$ é uma constante que depende apenas de N . A função em (1.2) satisfaz a equação

$$-\Delta U = U^{2^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Ademais,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}}.$$

Usaremos adiante a seguinte notação:

$$(1.3) \quad u_\epsilon^*(x) = \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} U\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0.$$

1.3 Condição de compacidade

Lema 1.2. (Brézis-Lieb) *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^N e $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Se

(a) $\{u_n\}$ *é limitada em $L^p(\Omega)$*

(b) *e $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω , quando $n \rightarrow \infty$*

então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Demonstração. Ver [Willem], p. 21. □

Proposição 1.3. *Dado $s_0 > 0$ e θ como na hipótese (g4), existe $K = K(s_0) > 0$ tal que*

$$(1.4) \quad g(x, s) \geq K s^{\frac{1}{\theta}-1}, \quad \forall s \geq s_0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Demonstração. Com efeito, da hipótese (g4) segue que:

$$\frac{1}{\theta s} \leq \frac{g(x, s)}{G(x, s)}, \quad \forall s \geq s_0.$$

Integrando de s_0 até s , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}(\ln s - \ln s_0) &\leq \int_{s_0}^s \frac{g(x, t)}{G(x, t)} dt \\ &= \ln(G(x, s)) - \ln(G(x, s_0)), \end{aligned}$$

logo, para todo $s \geq s_0$,

$$\begin{aligned} G(x, s) &\geq G(x, s_0) s_0^{-\frac{1}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}} \Rightarrow s\theta g(x, s) \geq G(x, s_0) s_0^{-\frac{1}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}} \\ &\Rightarrow g(x, s) \geq \frac{1}{\theta} G(x, s_0) s_0^{-\frac{1}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}-1} = K s^{\frac{1}{\theta}-1}, \end{aligned}$$

donde segue (1.4). □

Corolário 1.4. *Tem-se:*

$$(1.5) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x, s)}{s} = +\infty.$$

Demonstração. Basta notar que dado $s_0 > 0$ arbitrário, pela Proposição 1.3 vale a desigualdade (1.4) com $\theta < 1/2$. Logo, para todo $s \geq s_0$ temos:

$$\frac{g(x, s)}{s} \geq K s^{\frac{1}{\theta}-2} \rightarrow +\infty, \quad \text{se } s \rightarrow +\infty,$$

visto que $(1/\theta) - 2 > 0$. □

Lema 1.5. *Suponha $\lambda > 0$, (g1) – (g4) e seja $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ uma sequência (PS) para J , isto é, uma sequência tal que, para todo n :*

(1.6)

$$|J(u_n)| = \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u_n) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx \right| \leq c,$$

(1.7)

$$|\langle J'(u_n), \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u_n \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) \varphi dx - \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*-1} \varphi dx \right| \leq \epsilon_n \|\varphi\|,$$

para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$, onde $c > 0$ é constante e $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. Então $\{u_n\}$ é limitada.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\{u_n\}$ tem uma subsequência ilimitada (a qual continuaremos a chamar de $\{u_n\}$), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = +\infty.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|u_n\| \geq 1$, $\forall n$. Defina

$$z_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Obviamente, $\|z_n\| = 1$, $\forall n$. Então, utilizando os teoremas C.6 e C.7 (ver Apêndice C), existe uma subsequência (que continuaremos a chamar $\{z_n\}$) tal que:

$$(1.8) \quad z_n \rightharpoonup z_0, \text{ em } H^1 := H^1(\Omega),$$

$$(1.9) \quad z_n \rightarrow z_0, \text{ em } L^2(\Omega),$$

$$(1.10) \quad z_n(x) \rightarrow z_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$(1.11) \quad |z_n(x)| \leq q(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde $z_0 \in H^1$ e $q \in L^2(\Omega)$.

Defina:

$$f(x, s) = \begin{cases} \lambda s + g(x, s) + s^{2^*-1}, & \text{se } s > 0 \\ \lambda s, & \text{se } s \leq 0 \end{cases}$$

Dividindo (1.7) por $\|u_n\|$, obtemos:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla z_n \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} z_n \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{g(x, u_n)}{\|u_n\|} \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^{2^*-1}}{\|u_n\|} \varphi dx \right| \leq \epsilon_n \frac{\|\varphi\|}{\|u_n\|},$$

para toda $\varphi \in H^1$. Ou simplesmente:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla z_n \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \varphi dx \right| \leq \epsilon_n \frac{\|\varphi\|}{\|u_n\|}, \quad \forall \varphi \in H^1.$$

Passando o limite quando $n \rightarrow \infty$, deduzimos de (1.8) que:

$$(1.12) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \varphi dx = \int_{\Omega} \nabla z_0 \nabla \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1$.

Mostraremos que $z_0 = 0$ e depois chegaremos a uma contradição. Faremos isso em duas etapas:

Passo 1. $z_0(x) \leq 0$, para quase todo $x \in \Omega$

Passo 2. $\int_{\Omega} z_0(x) dx = 0$.

Os passos 1 e 2 implicam que $z_0 \equiv 0$.

Passo 1. $z_0(x) \leq 0$, para quase todo $x \in \Omega$

Escolha $\varphi = z_0^+$ em (1.12). Daí:

$$(1.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0(x) dx = \int_{\Omega^+} |\nabla z_0|^2 dx < \infty,$$

com $\Omega^+ = \{x : z_0(x) > 0\}$.

Mas, por outro lado, usando o fato que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = +\infty, \text{ q.t.p. em } \Omega^+,$$

e o Corolário 1.4, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\lambda u_n + g(x, u_n) + (u_n^+)^{2^*-1}]}{\|u_n\|} z_0(x) \frac{u_n}{u_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda u_n + g(x, u_n) + (u_n^+)^{2^*-1}}{u_n} \right] z_n(x) z_0(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lambda + \frac{g(x, u_n)}{u_n} + (u_n^+)^{2^*-2} \right] z_n(x) z_0(x) = +\infty, \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \Omega^+$. Portanto, se $|\Omega^+| > 0$, obtemos, pelo Lema de Fatou, que:

$$\begin{aligned} +\infty &= \int_{\Omega^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0 dx = \int_{\Omega^+} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0 dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0 dx, \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0(x) dx = +\infty,$$

o que contradiz (1.13). Portanto, $|\Omega^+| = 0$ e $z_0(x) \leq 0$, para quase todo $x \in \Omega$.

Passo 2. $\int_{\Omega} z_0(x) dx = 0$.

Lembre que agora nosso problema está posto assim:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) = \lambda u + g(x, u^+) + (u^+)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Tome $\varphi = u_n$ em (1.7), multiplique por $\frac{1}{2}$ e subtraia de (1.6) para obter:

$$\left| \int_{\Omega} \left[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n) \right] dx \right| \leq C + \frac{\epsilon_n \|u_n\|}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$.

Dividindo por $\|u_n\|$, temos:

$$\left| \int_{\Omega} \left[\frac{\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)}{\|u_n\|} \right] dx \right| \leq \frac{C}{\|u_n\|} + \frac{\epsilon_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

logo,

$$(1.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left[\frac{\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)}{\|u_n\|} \right] dx = 0.$$

Por outro lado, fixando $s^* > 0$ e usando a continuidade de f , existe K_{s^*} , tal que:

$$\left| \frac{f(x, u)u}{2} - F(x, u) \right| \leq K_{s^*}, \quad \forall u \in (-\infty, s^*].$$

(Note que para $u \leq 0$ o lado esquerdo da desigualdade é nulo!)

Daí,

$$\left| \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \right| \leq \frac{K_{s^*} |\Omega|}{\|u_n\|}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos:

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \right| \leq 0.$$

Logo,

$$(1.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \right| = 0.$$

Ainda com $s^* > 0$ fixado e chamando

$$I = \int_{u_n(x) > s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)}{\|u_n\|} dx,$$

temos por (g4) as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
I &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_{u_n(x) > s^*} \frac{f(x, u_n)u_n}{\|u_n\|} dx \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{u_n(x) > s^*} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{u_n(x) > s^*} \frac{[f(x, u_n) - \lambda u_n + \lambda u_n]}{\|u_n\|} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{[f(x, u_n) - \lambda u_n + \lambda u_n]}{\|u_n\|} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{[f(x, u_n) - \lambda u_n]}{\|u_n\|} dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \lambda \int_{u_n(x) \leq s^*} z_n(x) dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \frac{K_2}{\|u_n\|} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \lambda \int_{u_n(x) \leq s^*} z_n(x) dx,
\end{aligned}$$

onde $K_2 > 0$ é uma constante positiva (que depende da limitação de $|f(x, u) - \lambda u|$ em $(-\infty, s^*]$). Se considerarmos (1.12), com $\varphi \equiv 1$, (1.14) e (1.15) e tomarmos o limite quando n tende a infinito na desigualdade acima, obtemos:

$$0 \geq -\left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \lambda \int_{\Omega} z_0 dx \geq 0$$

com $s^* > 0$ fixado. Consequentemente,

$$\int_{\Omega} z_0(x) dx = 0,$$

e isso conclui o passo 2.

Dos passos 1 e 2, concluímos que $z_0 \equiv 0$. Mostremos que isso nos leva a uma contração.

Afirmção 1.6. *Tem-se:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx = 0.$$

Com efeito, fazendo $\varphi = u_n$ em (1.7), multiplicando por $1/2$ e subtraindo de (1.6), obtemos:

$$\left| \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \right| \leq c + \epsilon_n \|u_n\|.$$

Por (g4), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx - \theta \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_n f(x, u_n) dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ &\leq c + \epsilon_n \|u_n\|. \end{aligned}$$

Daí,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} C \left(\frac{1}{\|u_n\|^2} + \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \right) = 0,$$

donde segue a afirmação.

Por outro lado, considerando (1.7), com $\varphi = z_n$ e dividindo por $\|u_n\|$, obtemos de $\|z_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que:

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx \right| = \left| 1 - \int_{\Omega} z_n^2 dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|_2^2 = 1,$$

o que contradiz a convergência em (1.9) com $z_0 \equiv 0$.

Portanto, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$. □

Lema 1.7. *Suponha $\lambda > 0$ e (g1) – (g4). Seja $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ tal que:*

(1.16)

$$J(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u_n) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx \rightarrow c,$$

(1.17)

$$|\langle J'(u_n), \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u_n \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) \varphi dx - \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*-1} \varphi dx \right| \leq \epsilon_n \|\varphi\|,$$

para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$, onde $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Se

$$(1.18) \quad c < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$$

então a sequência $\{u_n\}$ tem uma subsequência convergente.

Demonstração. Sabemos, pelo Lema 1.5, que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$. Daí, passando para uma subsequência, se necessário, temos:

$$(1.19) \quad u_n \rightharpoonup u, \text{ em } H^1(\Omega),$$

$$(1.20) \quad u_n \rightarrow u, \text{ em } L^2(\Omega),$$

$$(1.21) \quad u_n(x) \rightarrow u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como $\{u_n^+\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$, segue que $\{u_n^+\}$ é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$. Observe que, fazendo $q = \frac{2N}{N+2}$, obtemos:

$$|(u_n^+)^{2^*-1}|_q = \int_{\Omega} [(u_n^+)^{\frac{N+2}{N-2}}]^{\frac{2N}{N+2}} dx = \int_{\Omega} (u_n^+)^{\frac{2N}{N-2}} dx = |u_n^+|_{2^*}^{2^*},$$

logo, $\{(u_n^+)^{2^*-1}\}$ é limitada em $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Passando novamente a uma subsequência, se necessário, podemos supor que:

$$(u_n^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1}, \text{ em } L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega).$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e (1.20), temos:

$$\left| \int_{\Omega} (u_n \varphi - u \varphi) dx \right| = \left| \int_{\Omega} (u_n - u) \varphi dx \right| \leq \|u_n - u\|_2 \|\varphi\|_2 \rightarrow 0, \quad \forall \varphi \in H^1,$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n \varphi dx = \int_{\Omega} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1.$$

Segue, por (1.19) e o Teorema das Imersões de Sobolev, que existe $\tilde{q} \in L^\sigma(\Omega)$, $1 < \sigma < 2^* - 1$, tal que $|u_n(x)| \leq \tilde{q}(x)$ q.t.p. em Ω . Pela hipótese (g_2) , temos para q.t. $x \in \Omega$:

$$|g(x, u_n)| \leq K |u_n|^\sigma \leq K \tilde{q}(x)^\sigma \in L^1(\Omega).$$

Logo, como $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω , podemos usar os fatos acima juntamente com o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\begin{aligned} \langle J'(u_n), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u_n \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) \varphi dx - \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*-1} \varphi dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u) \varphi dx - \int_{\Omega} (u^+)^{2^*-1} \varphi dx \\ &= \langle J'(u), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$. Portanto, u resolve fracamente a equação

$$-\Delta u = \lambda u + g(x, u) + (u^+)^{2^*-1}.$$

Ademais, escolhendo $\varphi = u$ e substituindo na fórmula da derivada de J obtemos:

$$0 = \langle J'(u), u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} g(x, u) u dx - \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx,$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} g(x, u) u dx + \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx.$$

Substituindo na expressão de $J(u)$, obtemos, usando (g4):

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(x, u) u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) |u^+|_{2^*}^{2^*} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(x, u) u dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx \\ &= \frac{1}{N} |u^+|_{2^*}^{2^*} + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} g(x, u) u dx - G(x, u) \right] dx \\ &\geq \frac{1}{N} |u^+|_{2^*}^{2^*} + \int_{\Omega} [\theta g(x, u) u - G(x, u)] dx \geq 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$(1.22) \quad J(u) \geq 0.$$

Escreva $v_n = u_n - u$. Pelo Lema 1.2, temos:

$$\frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx = \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx + \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*} dx + o(1).$$

Usando o fato que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω juntamente com o Teorema da Convergência Dominada e o resultado acima (via Lema 1.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [J(u) + J(v_n)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_n - u)^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u_n - u) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} [(u_n - u)^+]^{2^*} dx \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*} dx - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u_n) dx \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \right. \\
&\quad \left. \int_{\Omega} G(x, u_n) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = c.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando novamente o Lema 1.2 e o Teorema da Convergência Dominada, e denotando

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx - \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*} dx \right],$$

temos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx + \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u_n^2 dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) u_n dx - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} g(x, u) u dx + \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle J'(u_n), u_n \rangle - \langle J'(u), u \rangle + \\
&\quad + 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Podemos supor então que existe $d > 0$ tal que:

$$|\nabla v_n|_2^2 \rightarrow d \quad \text{e} \quad |v_n^+|_{2^*}^{2^*} \rightarrow d.$$

Pela Desigualdade de Sobolev,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla(v_n^+ + v_n^-)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v_n^+|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_n^-|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla v_n^+|^2 dx \geq S|v_n^+|_{2^*}^2,$$

ou seja,

$$|\nabla v_n|_2^2 \geq S|v_n^+|_{2^*}^2.$$

Então:

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx \geq S|v_n^+|_{2^*}^2 = S(|v_n^+|_{2^*}^2)^{\frac{2}{2^*}} \Rightarrow d \geq Sd^{\frac{2}{2^*}}.$$

Se $d = 0$ então, como já sabemos que $v_n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, segue que:

$$\|v_n\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\Omega} v_n^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

logo, $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$ e a prova está completa.

Suponha $d > 0$. Então

$$d \geq S^{\frac{N}{2}}.$$

Portanto, como $v_n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. em Ω , temos:

$$\begin{aligned} \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) S^{\frac{N}{2}} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) d = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2^*}d \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_n^2 dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(x, v_n) dx - \frac{1}{2^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n^+|_{2^*}^2 \\ &\leq J(u) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} v_n^2 dx - \int_{\Omega} G(x, v_n) dx - \frac{1}{2^*} |v_n^+|_{2^*}^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [J(u) + J(v_n)] = c < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}, \end{aligned}$$

o que é uma contradição!

Logo, $d = 0$ e $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente em $H^1(\Omega)$. \square

1.4 Condições geométricas

Sejam $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ os autovalores de $-\Delta$ e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ as correspondentes autofunções, com condições de Neumann na fronteira. Pode-se supor, sem perda de

generalidade, que $0 \in \Omega$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\zeta_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $0 \leq \zeta_m \leq 1$, $|\nabla \zeta_m|_\infty \leq 4m$ e

$$\zeta_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B_{2/m}, \\ 1, & \text{se } x \in \Omega \setminus B_{3/m}. \end{cases}$$

Definimos as “autofunções aproximadas” por $\varphi_i^m = \zeta_m \varphi_i$. Então, a seguinte estimativa ocorre (ver [Chabrowski-Ruf]):

Lema 1.8. *Quando $m \rightarrow \infty$, temos $\varphi_i^m \rightarrow \varphi_i$ em $H^1(\Omega)$. Além disso, no espaço $H_{j,m}^- = \langle \varphi_1^m, \dots, \varphi_j^m \rangle$, temos:*

$$\max\{|\nabla u|_2^2 : u \in H_{j,m}^-, |u|_2^2 = 1\} \leq \lambda_j + c_j m^{2-N}$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i^m \nabla \varphi_j^m dx = \delta_{ij} + O(m^{2-N}),$$

onde c_j independe de m .

Seja $\xi \in C_0^1(B_{1/m})$ uma função corte tal que $\xi(x) = 1$ se $x \in B_{1/2m}$, $0 \leq \xi(x) \leq 1$ em $B_{1/m}$ e $|\nabla \xi|_\infty \leq 4m$. Considere agora a família de funções dadas por

$$u_\epsilon(x) = \xi(x) u_\epsilon^*(x) \in H, \quad \epsilon > 0.$$

Lembre que a função $u_\epsilon^*(x)$ foi definida em (1.3). O próximo lema também pode ser encontrado no artigo [Chabrowski-Ruf].

Lema 1.9. *Para $\epsilon \rightarrow 0$ e para m fixado, tem-se:*

$$(a) \quad |\nabla u_\epsilon|_2^2 = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2})$$

$$(b) \quad |u_\epsilon|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N)$$

$$(c) \quad |u_\epsilon|_2^2 \geq K_1 \epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2}), \text{ onde } K_1 > 0 \text{ é constante.}$$

Ademais, para $m \rightarrow \infty$ e $\epsilon = o(1/m)$, temos:

$$(d) \quad |\nabla u_\epsilon|_2^2 = S^{\frac{N}{2}} + O((\epsilon m)^{N-2})$$

$$(e) \quad |u_\epsilon|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}} + O((\epsilon m)^N).$$

enquanto (c) ocorre independentemente de m .

Observação 1.10. *Lembre que:*

$$\begin{aligned} f(x) = o[g(x)] \quad \text{quando } x \rightarrow x_0 \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ \text{e } f(x) = O[g(x)] \quad \text{quando } x \rightarrow x_0 \quad \text{se } \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty. \end{aligned}$$

Nosso objetivo aqui é aplicar o Teorema do Linking, de Rabinowitz [Rabinowitz], ao problema (1.1).

Desde que $\lambda > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Considere $H^+ = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle^\perp$. Sejam $S_r = \partial B_r \cap H^+$, $H_m^- = \langle \varphi_1^m, \dots, \varphi_k^m \rangle$ e $Q_m^\epsilon = (B_R \cap H_m^-) \oplus [0, R] \{u_\epsilon\}$, para $m \in \mathbb{N}$ fixado². Defina a família de aplicações

$$\mathcal{H} = \{h : Q_m^\epsilon \rightarrow H \text{ contínua} : h|_{\partial Q_m^\epsilon} = Id\},$$

e seja

$$(1.23) \quad \bar{c} = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in h(Q_m^\epsilon)} J(u) = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(h(v)).$$

O Teorema do Linking, de Rabinowitz [Rabinowitz], estabelece que se:

- (1) $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição $(PS)_{\bar{c}}$
- (2) existem números reais $0 < r < R$ e $\beta_1 > \beta_0$ tais que

$$(1.24) \quad J(v) \geq \beta_1, \text{ para todo } v \in S_r,$$

$$(1.25) \quad J(v) \leq \beta_0, \text{ para todo } v \in \partial Q_m^\epsilon,$$

então³ o valor \bar{c} , definido por (1.23) satisfaz $\bar{c} \geq \beta_1$, e é um valor crítico para J .

²Entendemos por $[0, R] \{u_\epsilon\}$ o conjunto $\{su_\epsilon : 0 \leq s \leq R\}$.

³Observe que os conjuntos acima dependem de m e de ϵ . Escolheremos m suficientemente grande e ϵ suficientemente pequeno para que as condições geométricas do Teorema do Linking sejam satisfeitas.

Note primeiramente que para $v \in H_m^- \oplus \mathbb{R}\{u_\epsilon\}$, $v = w + su_\epsilon$, temos, por construção, $\text{supp}(u_\epsilon) \cap \text{supp}(w) = \emptyset$. Isso implica que

$$J(v) = J(w + su_\epsilon) = J(w) + J(su_\epsilon).$$

Começemos mostrando que o funcional J satisfaz a condição (1.24).

Lema 1.11. *Existem $r > 0$ e $\beta_1 > 0$ tais que*

$$J(v) \geq \beta_1, \text{ para todo } v \in S_r = \partial B_r \cap H^+.$$

Demonstração. Seja $v \in H^+$.

Afirmção 1.12. *Defina $\|\cdot\|_* : H^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\|v\|_* = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla v|_2, \quad v \in H^+.$$

Então, $\|\cdot\|_$ define uma norma em H^+ que é equivalente à norma usual $\|\cdot\|$ de $H^1(\Omega)$, restrita a H^+ .*

Das propriedades da definição de norma, apenas uma não é imediata:

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Lembre que as funções constantes não nulas são autofunções associadas ao autovalor $\lambda_1 = 0$, logo, não pertencem a H^+ . Portanto, dado $v \in H^+$, temos:

$$\|v\|_* = 0 \Leftrightarrow \nabla v \equiv 0 \Leftrightarrow v \equiv \text{constante} \Rightarrow v \equiv 0.$$

Para mostrar a equivalência das normas, note primeiramente que uma desigualdade é óbvia, pois:

$$\|v\|_*^2 = |\nabla v|_2^2 \leq |v|_2^2 + |\nabla v|_2^2 = \|v\|^2, \quad \forall v.$$

Por outro lado, usando a caracterização variacional de λ_{k+1} , obtemos:

$$\|v\|^2 = |v|_2^2 + \|v\|_*^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|v\|_*^2 + \|v\|_*^2 = \left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} + 1 \right) \|v\|_*^2, \quad \forall v \in H^+,$$

donde termina a prova da afirmação.

Pela caracterização variacional de λ_{k+1} , a hipótese (g_2) , o Teorema das Imersões de Sobolev (Ver Apêndice C, Teorema C.7) e a Afirmação 1.12, obtemos⁴:

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} G(x, v) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - K \int_{\Omega} |v|^{\sigma+1} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx \\ &\geq c_1 \|v\|^2 - c_2 \|v\|^{\sigma+1} - c_3 \|v^+\|^{2^*}. \end{aligned}$$

Note que $\|v\| \geq \|v^+\|$ (basta usar a definição), logo

$$\|v\|^{2^*} \geq \|v^+\|^{2^*}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} J(v) &\geq c_1 \|v\|^2 - c_2 \|v\|^{\sigma+1} - c_3 \|v\|^{2^*} \\ &= \|v\|^2 (c_1 - c_2 \|v\|^{\sigma+1-2} - c_3 \|v\|^{2^*-2}). \end{aligned}$$

Desde que $2^* > \sigma + 1 > 2$, é possível encontrar $r > 0$ suficientemente pequeno e $\beta_1 > 0$ tal que

$$J(v) \geq \beta_1 > 0,$$

para todo $v \in H^+$ com $\|v\| = r$, ou seja, (1.24) se verifica. \square

Lema 1.13. *Existem constantes $R > r$ e $\beta_0 < \beta_1$ tais que para ϵ suficientemente pequeno, tem-se:*

$$J|_{\partial Q_m^\epsilon} < \beta_0.$$

Demonstração. Seja $v = w + su_\epsilon \in Q_m^\epsilon = (H_m^- \cap B_R) \oplus [0, R]\{u_\epsilon\}$. Desde que $J(v) = J(w) + J(su_\epsilon)$, podemos estimar $J(w)$ e $J(su_\epsilon)$ separadamente.

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w^2 dx - \int_{\Omega} G(x, w) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (w^+)^{2^*} dx \quad \text{e} \\ J(su_\epsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla su_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (su_\epsilon)^2 dx - \int_{\Omega} G(x, su_\epsilon) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} [(su_\epsilon)^+]^{2^*} dx. \end{aligned}$$

⁴Lembre também que $\lambda < \lambda_{k+1}$.

Pela hipótese (g1), temos $\int_{\Omega} G(x, u) dx \geq 0$, qualquer que seja $u \in H^1(\Omega)$, logo:

$$(1.26) \quad J(w) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (w^+)^{2^*} dx \quad e$$

$$(1.27) \quad J(su_{\epsilon}) \leq \frac{s^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx - \frac{\lambda s^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} u_{\epsilon}^2 dx - \frac{s^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} |u_{\epsilon}|^{2^*} dx.$$

Seja $\partial Q_m^{\epsilon} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, onde:

$$\Gamma_1 = \{v \in H^1(\Omega) : v = w + su_{\epsilon}, w \in H_m^-, \|w\| = R, 0 \leq s \leq R\},$$

$$\Gamma_2 = \{v \in H^1(\Omega) : v = w + Ru_{\epsilon}, w \in H_m^- \cap \bar{B}_R\},$$

$$\Gamma_3 = H_m^- \cap \bar{B}_R.$$

Pelo Lema 1.8, segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq (\lambda_k + c_k m^{2-N}) \int_{\Omega} w^2 dx, \quad \forall w \in H_m^-.$$

Caso 1. Suponha $v \in \Gamma_1$, isto é, $v = w + su_{\epsilon}$, com $\|w\| = R$ e $0 \leq s \leq R$.

(i) Se $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, escolha m_0 tal que $c_k m^{2-N} < \frac{\lambda - \lambda_k}{2}$, para $m \geq m_0$. Então, usando as estimativas do Lema 1.9 juntamente com as desigualdades (1.26) e (1.27), obtemos⁵:

$$\begin{aligned} J(v) &= J(w) + J(su_{\epsilon}) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2-N}} \right) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{s^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx \\ &\leq \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2-N}} \right) \|w\|^2 + \frac{s^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx \\ &\leq -c_1 R^2 + S^{\frac{N}{2}} \frac{s^2}{2} + R^2 O(\epsilon^{N-2}) \\ &\leq -c_1 R^2 + c_2 + R^2 O(\epsilon^{N-2}), \quad \text{com } c_1, c_2 > 0. \end{aligned}$$

⁵Na terceira linha estamos usando o fato que $\|w\|_* = \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em H_m^- . Sabe-se que $\|\cdot\|_*$ define uma norma no subespaço $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$. Portanto, das propriedades de norma só esta verificar que: $\|w\|_* = 0$ se, e somente se, $w = 0$. Isso ocorre porque a única função constante em H_m^- é a função nula, pois todas as funções em H_m^- se anulam na bola $B_{2/m}$. Como H_m^- tem dimensão finita então as normas $\|w\|$ e $\|w\|_*$ são equivalentes.

Logo⁶, $J(v) \leq 0$ escolhendo R suficientemente grande.

(ii) $\lambda = \lambda_k$.

Para $w = R\bar{w} \in H_m^-$ com $\|\bar{w}\| = 1$ escreva $\bar{w} = \alpha y + \beta \varphi_k^m$, com $y \in \langle \varphi_1^m, \dots, \varphi_{k-1}^m \rangle$ e $\|y\| = 1$. Então, usando a desigualdade (1.26):

$$J(w) \leq \frac{R^2}{2} \int_{\Omega} (|\alpha \nabla y + \beta \nabla \varphi_k^m|^2 - \lambda_k |\alpha y + \beta \varphi_k^m|^2) dx - \frac{R^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} (\bar{w}^+)^{2^*} dx.$$

Usando o Lema 1.8, obtemos uma estimativa para a primeira integral como segue: definindo

$$I = \int_{\Omega} (|\alpha \nabla y + \beta \nabla \varphi_k^m|^2 - \lambda_k |\alpha y + \beta \varphi_k^m|^2) dx,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \alpha^2 \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + 2\alpha\beta \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi_k^m dx + \\ &\quad + \beta^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k^m|^2 dx - \lambda_k \left(\alpha^2 \int_{\Omega} y^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha\beta \int_{\Omega} y \varphi_k^m dx + \beta^2 \int_{\Omega} (\varphi_k^m)^2 dx \right) \\ &= \alpha^2 \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} y^2 dx \right) + \\ &\quad + \beta^2 \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi_k^m|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (\varphi_k^m)^2 dx \right) + \\ &\quad + 2\alpha\beta \left(\int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi_k^m dx - \int_{\Omega} y \varphi_k^m dx \right) \\ &\leq \alpha^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1} + c_{k-1} m^{2-N}} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \\ &\quad + \beta^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_k + c_k m^{2-N}} \right) \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k^m|^2 dx + \\ &\quad + 2\alpha\beta c m^{2-N} \\ &\leq -c_1 \alpha^2 (1 + c_2 m^{2-N}) + \beta^2 c_3 m^{2-N} + 2\alpha\beta c_4 m^{2-N} \\ &\leq -c\alpha^2 + c_1 (\beta^2 + 2\alpha\beta) m^{2-N}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$J(w) \leq \frac{R^2}{2} [-c\alpha^2 + c_1 (\beta^2 + 2\alpha\beta) m^{2-N}] - \frac{R^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} (\bar{w}^+)^{2^*} dx,$$

com $c, c_1 > 0$.

⁶A constante c_1 é positiva devido à escolha de m_0 no início da demonstração.

Note agora que se $|\alpha| \geq \delta > 0$, para algum $\delta > 0$, então, como a segunda integral é não negativa, temos:

$$J(w) \leq -\frac{c\delta^2 R^2}{2} + c_1 m^{2-N}$$

e daí $J(w) \leq 0$ para $R \geq R_1(\delta)$.

Mostremos agora que existe $\delta > 0$ tal que se $|\alpha| \leq \delta$, então existe uma constante $c_2 > 0$ tal que:

$$\int_{\Omega} (\bar{w}^+)^{2^*} dx \geq c_2 > 0,$$

para todo $w \in H_m^- \cap \partial B_R$. Para isso precisamos provar que existem $\delta > 0$ e $\eta > 0$ tal que

$$\max_{\Omega} (\alpha y + \beta \varphi_k^m) \geq \eta > 0, \quad \text{para todo } y \in H_{k-1,m}^-, \|y\| = 1, |\alpha| \leq \delta.$$

Por contradição, suponha que existam sequências $|\alpha_n| \leq 1/n$, $y_n \in H_{k-1,m}^-$, com $\|y_n\| = 1$ tais que

$$\max_{\Omega} (\alpha_n y_n + \beta_n \varphi_k^m) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Então $\alpha_n y_n \rightarrow 0$ em $H^1(\Omega)$, $\beta_n^2 = 1 - \alpha_n^2 + O(m^{2-N}) \rightarrow \beta^2 = 1 + O(m^{2-N}) \geq 1/2$, para $m \geq m_0$. Portanto, concluímos que

$$\max_{\Omega} (\beta \varphi_k^m) = 0,$$

com

$$\beta^2 \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para } m \geq m_0, \quad \text{isto é, } (\varphi_k^m)^+ = 0.$$

Isto é uma contradição, visto que $\varphi_k^m \rightarrow \varphi_k$ em $H^1(\Omega)$, o que implica que φ_k^m deve mudar de sinal, para m grande. Portanto, existem $\delta > 0$, $\eta > 0$ tais que

$$\max_{\Omega} \{\bar{w}, |\alpha| \leq \delta\} \geq \eta > 0, \quad \forall \bar{w} \in H_{k,m}^-, \|\bar{w}\| = 1, m \geq m_0.$$

Denotando $\Omega_{\bar{w}} = \{x \in \Omega : \bar{w}(x) \geq \eta/2\}$, então $|\Omega_{\bar{w}}| \geq \nu > 0$, para todo $\bar{w} \in H_{k,m}^-$, com $\|\bar{w}\| = 1$ e $|\alpha| \leq \delta$, $m \geq m_0$, desde que as funções $\bar{w} \in H_{k,m}^-$ e a família $H_{k,m}^-$ é equicontínua. Então,

$$\int_{\Omega} (\bar{w}^+)^{2^*} dx \geq \int_{\Omega_{\bar{w}}} (\bar{w}^+)^{2^*} dx \geq \int_{\Omega} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2^*} dx = \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2^*} |\Omega_{\bar{w}}|.$$

Assim, podemos concluir que existe $R_2 > 0$ tal que

$$J(w) \leq cR^2 - R^{2^*} \int_{\Omega} (\bar{w}^+)^{2^*} dx \leq cR^2 - R^{2^*} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2^*} \nu \leq 0,$$

para todo $R \geq R_2$. Em particular, $J(w) \rightarrow -\infty$ quando $R \rightarrow +\infty$.

Assim, existem $R_0 > 0$ suficientemente grande e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tais que $J(v) \leq 0$ para $R \geq R_0$.

Caso 2. Se $v \in \Gamma_2$, isto é, $v = w + Ru_\epsilon$, com $\|w\| \leq R$, então, usando novamente (1.26) e (1.27) e lembrando que $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$, obtemos:

$$\begin{aligned} J(v) &= J(w) + J(Ru_\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w^2 dx + \frac{R^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \frac{R^{2^*}}{2^*} \int_{B_{\frac{1}{m}}} u_\epsilon^{2^*} dx \\ &\leq \frac{1}{2} (\lambda_k + c_k m^{2-N}) \int_{\Omega} w^2 dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} w^2 dx + \frac{R^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \frac{R^{2^*}}{2^*} \int_{B_{\frac{1}{m}}} u_\epsilon^{2^*} dx \\ &\leq c_1 m^{2-N} \int_{\Omega} w^2 dx + \frac{R^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \frac{R^{2^*}}{2^*} \int_{B_{\frac{1}{m}}} u_\epsilon^{2^*} dx \\ &\leq c_2 m^{2-N} \|w\|^2 + \frac{R^2}{2} \int_{B_{\frac{1}{m}}} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \frac{R^{2^*}}{2^*} \int_{B_{\frac{1}{m}}} u_\epsilon^{2^*} dx \\ &\leq c_2 m^{2-N} R^2 + \frac{R^2}{2} \left(S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) \right) - \frac{R^{2^*}}{2^*} \left(S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N) \right) \\ &= \left(c_2 m^{2-N} + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2} + O(\epsilon^{N-2}) \right) R^2 - \left(\frac{S^{\frac{N}{2}}}{2^*} + O(\epsilon^N) \right) R^{2^*}. \end{aligned}$$

Como $2^* > 2$, é possível encontrar $R > 0$ suficientemente grande tal que $J(v) < 0$.

Observação 1.14. Na quinta linha estamos usando o fato que H_m^- tem dimensão finita e, portanto, as normas $\|w\|$ e $|w|_2$ são equivalentes.

Agora, fixe $R > 0$ tal que a estimativa do Caso 2 seja válida.

Caso 3. Seja $v \in \Gamma_3$, isto é, $v = w \in H_m^- \cap B_R$. Assim como fizemos no Caso 2, temos:

$$\begin{aligned}
J(w) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (w^+)^{2^*} dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} w^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} (\lambda_k + c_k m^{2-N}) \int_{\Omega} w^2 dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} w^2 dx \\
&\leq c m^{2-N} \int_{\Omega} w^2 dx \\
&\leq c m^{2-N} R^2 \leq \beta_0,
\end{aligned}$$

se m é suficientemente grande. Isso prova (1.25). \square

No próximo lema mostraremos que \bar{c} (definido em (1.23)) pertence ao intervalo no qual o Lema 1.7 se aplica.

Lema 1.15. *Suponha $\lambda > 0$, $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Então:*

$$(1.28) \quad \bar{c} = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in h(Q_m^\epsilon)} J(u) = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(h(v)) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Demonstração. Note que:

$$\bar{c} = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(h(v)) \leq \inf_{h=Id} \sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(Id(v)) = \sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(v).$$

Portanto, para obter (1.28), basta mostrar que

$$(1.29) \quad \sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(v) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Suponha, por contradição, que

$$\sup_{v \in Q_m^\epsilon} J(v) \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Considere o conjunto $J_0 = \{v \in Q_m^\epsilon : J(v) \geq 0\}$. J_0 é fechado pois é imagem inversa do fechado $[0, +\infty)$ pelo funcional J , de classe C^1 . Também é limitado pois está contido em

Q_m^ϵ . Como H_m^- tem dimensão finita, segue que J_0 é compacto, para todo $\epsilon > 0$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existem $w_\epsilon \in H_m^-$ e $s_\epsilon \geq 0$ tais que

$$J(v_\epsilon) = \max_{v \in Q_m^\epsilon} J(v) \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}, \quad v_\epsilon = w_\epsilon + s_\epsilon u_\epsilon.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} v_\epsilon^2 dx - \int_{\Omega} G(x, v_\epsilon) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} [(v_\epsilon)^+]^{2^*} dx \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Caso 1. $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$

Lembre que $J(v_\epsilon) = J(w_\epsilon) + J(s_\epsilon u_\epsilon)$. Para $w_\epsilon \in H_m^-$, temos pelo Lema 1.9:

$$\begin{aligned} J(w_\epsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w_\epsilon^2 dx - \int_{\Omega} G(x, w_\epsilon) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} [(w_\epsilon)^+]^{2^*} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w_\epsilon^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} (\lambda_k + c_k m^{2-N}) \int_{\Omega} w_\epsilon^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} w_\epsilon^2 dx \\ &= \frac{1}{2} [c_k m^{2-N} - (\lambda - \lambda_k)] |w_\epsilon|_2^2. \end{aligned}$$

Tomando m suficientemente grande tal que $c_k m^{2-N} < \lambda - \lambda_k$, segue que $J(w_\epsilon) < 0$. Portanto (Ver Observação 1.16 logo abaixo),

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \leq J(v_\epsilon) = J(w_\epsilon) + J(s_\epsilon u_\epsilon) \leq J(s_\epsilon u_\epsilon) \leq \max_{s \geq 0} J(su_\epsilon) = \frac{1}{N} \left[\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} u_\epsilon^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}}} \right]^{\frac{N}{2}} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

o que é uma contradição.

Observação 1.16. No artigo [Chabrowski-Ruf] mostra-se que

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} u_\epsilon^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}}} \leq \begin{cases} \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0) \epsilon \log \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + O(\epsilon), & \text{se } N = 3 \\ \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0) \epsilon + O(\epsilon^2 \log \left(\frac{1}{\epsilon} \right)), & \text{se } N = 4 \\ \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0) \epsilon + O(\epsilon^2), & \text{se } N \geq 5, \end{cases}$$

onde $H(0)$ é a curvatura média de $\partial\Omega$ em 0 e $A_N > 0$ é uma constante que depende apenas de N .

Caso 2. $\lambda = \lambda_k$.

Nesse caso, como acima obtemos:

$$J(w_\epsilon) \leq \frac{1}{2} c_k m^{2-N} |w_\epsilon|_2^2,$$

daí,

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \leq J(v_\epsilon) = J(w_\epsilon) + J(s_\epsilon u_\epsilon) \leq \frac{1}{2} c_k m^{2-N} |w_\epsilon|_2^2 + \frac{1}{N} \left[\frac{\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx}{\left(\int_\Omega u_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{N}}} \right]^{\frac{N}{2}},$$

que pode ainda ser tomado menor que $\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$, tomando m suficientemente grande, chegando à mesma contradição do caso anterior.

Logo, segue (1.29). □

1.5 Prova do resultado principal

Nesta seção provaremos o Teorema 1.1 enunciado abaixo:

Teorema 1.1. Suponha $\lambda > 0$ e $(g_1) - (g_4)$. Então o problema (1.1) admite pelo menos uma solução não trivial.

Demonstração. Pelos Lemas 1.11 e 1.13, segue que J satisfaz as condições geométricas do Teorema do Linking.

O Lema 1.15 mostra que o nível \bar{c} pertence ao intervalo onde o Lema 1.7 é válido.

Portanto, o limite forte u , obtido pelo Lema 1.7, é uma solução não trivial de (1.1). □

Notas do capítulo

Observe que a função $g \equiv 0$ não satisfaz as hipóteses (g_1) e (g_4) . Ou seja, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + (u^+)^{2^*-1}, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

não é diretamente um caso particular do que foi estudado neste capítulo. Porém, é possível adaptar a maioria das contas deste capítulo para esse problema e obter as mesmas conclusões.

O artigo [Arcoya-Villegas] trabalha com o seguinte problema superlinear e subcrítico:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com as mesmas hipóteses⁷ sobre Ω e $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

(f₁) Existe $\sigma \in (1, 2^* - 1)$ e existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$|f(x, s)| \leq K_1 + K_2|s|^\sigma, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

(f₂) Existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} [f(x, s) - \lambda s] = 0,$$

uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$;

(f₃) Existem $s_0 > 0$ e $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tais que

$$0 < F(x, s) \leq \theta s f(x, s), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \geq s_0,$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ é uma primitiva de f ;

(f₄) $\frac{f(x, s)}{s} > 0$, para todo $x \in \bar{\Omega}$, e para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(f₅) Existem $\epsilon > 0$ e $\alpha \in (0, \lambda_2)$ tais que

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq \alpha, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}.$$

O problema (1.1), como já mencionamos, é praticamente um caso particular do problema tratado em [Arcoya-Villegas] acrescentando o termo crítico $(u^+)^{2^*-1}$. Acreditamos ser possível generalizar o problema (1.1) e trabalhar com o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) + (u^+)^{2^*-1}, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com as mesmas hipóteses sobre a função f do artigo [Arcoya-Villegas]. Essa será uma ideia a ser desenvolvida em projetos futuros.

⁷Neste trabalho os autores também tratam o caso $N = 2$ e nesse caso $2^* = \infty$.

CAPÍTULO 2

UM SISTEMA HAMILTONIANO COM CONDIÇÕES DE NEUMANN NA FRONTEIRA

Nesse capítulo ampliaremos nossos estudos sobre equações com não linearidades assimétricas para um sistema elíptico Hamiltoniano. Estudaremos aqui o seguinte sistema Hamiltoniano com condições do tipo Neumann na fronteira:

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = au + bv + (v^+)^p, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v = cu + dv + (u^+)^q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, a, b, c, d são constantes reais e p e q são tais que

$$1 < p, q < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}.$$

Considerando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $U = [u \ v]^T$, o sistema (2.1) passa a ter a seguinte

forma matricial:

$$(2.2) \quad \begin{cases} -\Delta U + U = AU + [(v^+)^p \ (u^+)^q]^T, & \text{se } x \in \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que pela condição (3) (citada na Introdução deste trabalho) devemos ter necessariamente $a = d$ e a matriz A fica então da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Uma condição necessária para que a matriz A tenha autovalores reais é que $bc \geq 0$ e, nesse caso, os autovalores são dados por

$$\nu_{1,2} = a \pm \sqrt{bc}.$$

Optamos pelo operador $-\Delta + I$ ao invés de $-\Delta$ pelo fato que, com condições de Neumann na fronteira, o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H^1(\Omega)$ é 0, como já vimos nos capítulos anteriores. No caso do sistema isso prejudica a formulação variacional.

Se denotarmos por $\sigma(-\Delta + I)$ e $\sigma(-\Delta)$ os espectros de tais operadores, é possível verificar facilmente que

$$\sigma(-\Delta + I) = \{\lambda_k + 1 : \lambda_k \in \sigma(-\Delta)\},$$

sendo assim o primeiro autovalor de $-\Delta + I$ é 1. Ademais, os autovetores associados a cada autovalor são os mesmos pra ambos os operadores.

Como no Capítulo 1, quando nos referirmos a λ_k estaremos falando de um autovalor do operador $-\Delta$ em $H^1(\Omega)$ e quando nos referirmos a φ_k estaremos falando do autovetor associado a λ_k .

2.1 Hipóteses e resultado principal

A seguir enunciaremos as hipóteses sobre os coeficientes a, b e c .

Vamos supor que a, b e c são constantes reais tais que

$$(2.3) \quad bc \geq 0 \text{ e } a \pm \sqrt{bc} \notin \sigma(-\Delta + I).$$

Lembre que $\nu_{1,2} = a \pm \sqrt{bc}$ são os autovalores da matriz A e a hipótese que os relaciona com o espectro do operador $-\Delta + I$ será explicada pelo lema a seguir:

Lema 2.1. *Se A tem autovalores reais dados por $\nu_{1,2} \notin \sigma(-\Delta + I)$ e $U = [u \ v]^T$ então o sistema*

$$(2.4) \quad \begin{cases} -\Delta U + U = AU, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

só admite a solução trivial $(0, 0)$.

Demonstração. Como A tem autovalores reais, A pode ser reduzida à sua forma de Jordan. Isso significa que as equações se reduzem a equações escalares que só tem a solução nula desde que os autovalores de A não pertencem ao espectro de $-\Delta + I$. \square

Com essas hipóteses provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Se $\nu_{1,2} \notin \sigma(-\Delta + I)$ então o sistema (2.1) admite solução não-trivial.*

Para provar esse resultado utilizaremos um Teorema de Minimax, devido a Felmer [Felmer], que será enunciado na seção seguinte (Teorema 2.7). A demonstração do Teorema 2.2 se baseará no artigo [Massa]. Nele o autor utiliza o seguinte lema cuja demonstração é imediata.

Lema 2.3. *Se (U, V) é uma solução de*

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\Delta U + U = aU + bV/\delta + (V^+)^p/\delta, & x \in \Omega, \\ -\Delta V + V = c\delta U + aV + \delta^q(U^+)^q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\delta > 0$, então $\mathbf{u} = (u, v) = (\delta U, V)$ é uma solução de (2.1).

Utilizando o Lema 2.3, se $b, c \neq 0$, consideraremos o sistema (2.5) com $\delta = \sqrt{b/c}$. A matriz obtida com essa escolha passa a ter ambas as diagonais com coeficientes iguais, a principal com coeficientes iguais a a e a secundária com coeficientes iguais a \sqrt{bc} . Portanto, a partir de agora consideraremos apenas o seguinte sistema:

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = au + bv + C_1(v^+)^p, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v = bu + av + C_2(u^+)^q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com C_1, C_2 constantes positivas.

Observação 2.4. Quando $b = c = 0$ a prova que faremos a seguir continua válida e o sistema passa a ser exatamente o (2.6) com $b = 0$, não sendo necessário utilizar o Lema 2.3.

Observação 2.5. O caso em que apenas um dos coeficientes b ou c é nulo será provado separadamente.

Provaremos a seguinte proposição:

Proposição 2.6. Suponha que $a \pm b \notin \sigma(-\Delta + I)$. Então o sistema (2.6) admite uma solução não trivial.

2.2 Teorema de minimax

Como mencionado anteriormente, encontraremos uma solução não trivial para o problema (2.1) usando um Teorema de Minimax devido a Felmer, [Felmer], o qual enunciaremos abaixo.

Teorema 2.7. (Minimax, de Felmer) *Sejam $E = X \oplus Y$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{F} : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo a condição de Palais-Smale e tendo a estrutura*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \langle L\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_E + b(\mathbf{u})$$

onde

(H₁) $L : E \rightarrow E$ é um operador linear contínuo e auto-adjunto;

(H₂) $b' : E \rightarrow E$ é um operador compacto;

(H₃) o operador linear $P_X \exp(\mu L) : X \rightarrow X$ é invertível para todo $\mu > 0$.

Suponha também que exista $\mathbf{z} \in Y$, com $\|\mathbf{z}\|_E = 1$, e existam constantes reais $M > \rho > 0$, $R > 0$ tais que

(S) $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \geq \xi > 0$, para todo $\mathbf{u} \in S = \{\mathbf{u} \in Y : \|\mathbf{u}\|_E = \rho\}$;

(Q) $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq 0$, para todo $\mathbf{u} \in \partial Q$, onde

$$Q = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + s\mathbf{z} : \mathbf{w} \in X, \|\mathbf{w}\|_E \leq R, 0 \leq s \leq M\}.$$

Então \mathcal{F} possui um ponto crítico com valor crítico $e \geq \xi$.

2.3 Formulação variacional

Considere o espaço de Hilbert $E = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ munido com o produto escalar

$$\langle (u, v), (w, z) \rangle_E = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla w + \nabla v \nabla z + uw + vz] dx$$

e denote por $\|\cdot\|_E$ a norma em E associada a esse produto escalar.

Considere a forma bilinear contínua e simétrica dada por:

$$B((u, v), (w, z)) = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla z + \nabla v \nabla w + uz + vw - a(uz + vw) - b(uw + vz)] dx.$$

O funcional associado ao sistema (2.6) é dado por $\mathcal{F} : E \rightarrow \mathbb{R}$, tal que se $\mathbf{u} = (u, v)$ então:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - H(\mathbf{u}) \\ (2.7) \quad &= \int_{\Omega} \left[(\nabla u \nabla v + uv) - \frac{1}{2}[b(u^2 + v^2) + 2auv] \right] dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[\frac{(v^+)^{p+1}}{p+1} + \frac{(u^+)^{q+1}}{q+1} \right] dx. \end{aligned}$$

Sabe-se que o funcional \mathcal{F} é de classe C^1 e seus pontos críticos são soluções do sistema (2.6).

Vamos primeiramente encontrar uma base ortogonal de E que diagonaliza a forma bilinear B .

Proposição 2.8. Para todo $i \in \mathbb{N}$, os autovalores do problema

$$(2.8) \quad B(\mathbf{u}, \gamma) = \mu \langle \mathbf{u}, \gamma \rangle_E, \quad \forall \gamma = (\phi, \psi) \in E,$$

formam uma sequência dupla dada por:

$$(2.9) \quad \mu_{\pm i} = \frac{-b \pm (\lambda_i + 1 - a)}{\lambda_i + 1}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Denotando por u_j e v_j os coeficientes de Fourier para u e v em relação à base $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e usando a equação (2.8) com a função teste $(\varphi_i, 0)$ obtemos por um lado:

$$\begin{aligned} B((u, v), (\varphi_i, 0)) &= B\left(\left(\sum_j u_j \varphi_j, \sum_j v_j \varphi_j\right), (\varphi_i, 0)\right) \\ &= \int_{\Omega} \left[\nabla \left(\sum_j v_j \varphi_j\right) \nabla \varphi_i + \left(\sum_j v_j \varphi_j\right) \varphi_i - \right. \\ &\quad \left. - a \left(\sum_j v_j \varphi_j\right) \varphi_i - b \left(\sum_j u_j \varphi_j\right) \varphi_i \right] dx \\ &= \lambda_i v_i + v_i - a v_i - b v_i \\ &= (\lambda_i + 1 - a)v_i - b u_i. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle (u, v), (\varphi_i, 0) \rangle_E &= \int_{\Omega} \left[\nabla \left(\sum_j u_j \varphi_j\right) \nabla \varphi_i + \left(\sum_j u_j \varphi_j\right) \varphi_i \right] dx \\ &= \lambda_i u_i + u_i = (\lambda_i + 1)u_i. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos:

$$(\lambda_i + 1 - a)v_i - b u_i = \mu(\lambda_i + 1)u_i,$$

ou seja,

$$(2.10) \quad -[\mu(\lambda_i + 1) + b]u_i + (\lambda_i + 1 - a)v_i = 0.$$

Utilizando agora a função teste $(0, \varphi_i)$, obtemos outra equação de forma análoga:

$$(2.11) \quad (\lambda_i + 1 - a)u_i - [\mu(\lambda_i + 1) + b]v_i = 0.$$

De (2.10) e (2.11) obtemos o seguinte sistema, para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} -[\mu(\lambda_i + 1) + b] & \lambda_i + 1 - a \\ \lambda_i + 1 - a & -[\mu(\lambda_i + 1) + b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que tem solução não trivial se, e somente se,

$$(\lambda_i + 1 - a)^2 - [\mu(\lambda_i + 1) + b]^2 = 0,$$

ou seja, para cada $i \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência dupla de autovalores dada por:

$$\mu_{\pm i} = \frac{-b \pm (\lambda_i + 1 - a)}{\lambda_i + 1}.$$

□

Observação 2.9. Note que

$$(2.12) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu_{\pm i} = \pm 1.$$

Observação 2.10. Se para algum $i \in \mathbb{N}$, $a = \lambda_i + 1$, ou seja, se a é um autovalor do operador $-\Delta + I$ com condição de Neumann na fronteira, então

$$\mu_{\pm i} = -\frac{b}{a}.$$

Proposição 2.11. Para cada $i \in \mathbb{N}$, o autovetor associado ao autovalor $\mu_{\pm i}$ é dado por $(\varphi_i, \pm \varphi_i)$.

Demonstração. Suponha primeiramente o caso em que $a \neq \lambda_i + 1$. Vamos encontrar o autovetor associado ao autovalor μ_i . O outro caso (μ_{-i}) é análogo!

Da equação (2.11) e da fórmula (2.9) obtemos:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\mu_i(\lambda_i + 1) + b}{(\lambda_i + 1 - a)} v_i \\ &= \frac{\left[\frac{-b + (\lambda_i + 1 - a)}{\lambda_i + 1} \right] (\lambda_i + 1) + b}{\lambda_i + 1 - a} v_i \\ &= \frac{-b + (\lambda_i + 1 - a) + b}{\lambda_i + 1 - a} v_i = v_i. \end{aligned}$$

Se para algum $i \in \mathbb{N}$ tivermos $a = \lambda_i + 1$ então $\mu_i = -b/a$, pela Observação 2.10.

Denotando por x_i e y_i os coeficientes de Fourier de ϕ e ψ , respectivamente, em relação à base $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, obtemos da equação (2.8) com $(u, v) = (\varphi_i, \varphi_i)$ e $\mu = -b/a$ que:

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{u}, \gamma) &= B((\varphi_i, \varphi_i), (\sum_j x_j \varphi_j, \sum_j y_j \varphi_j)) \\
&= \int_{\Omega} \left[\nabla \varphi_i \nabla \left(\sum_j (x_j + y_j) \varphi_j \right) + (1 - a - b) \varphi_i \left(\sum_j (x_j + y_j) \varphi_j \right) \right] dx \\
&= \lambda_i (x_i + y_i) + (1 - a - b)(x_i + y_i) \\
&= (\lambda_i + 1 - a - b)(x_i + y_i) \\
&= -b(x_i + y_i) \\
&= -\frac{b}{a} [(\lambda_i + 1)(x_i + y_i)] \\
&= -\frac{b}{a} (\lambda_i x_i + \lambda_i y_i + x_i + y_i) \\
&= -\frac{b}{a} \int_{\Omega} \left[\nabla \varphi_i \nabla \left(\sum_j (x_j + y_j) \varphi_j \right) + \varphi_i \left(\sum_j (x_j + y_j) \varphi_j \right) \right] dx \\
&= \mu_i \langle (\varphi_i, \varphi_i), (\phi, \psi) \rangle_E, \quad \forall (\phi, \psi) \in E,
\end{aligned}$$

ou seja, mesmo quando $a = \lambda_i + 1$ os autovalores são da forma $(\varphi_i, \pm \varphi_i)$. \square

A proposição a seguir será útil para agilizar as demonstrações na próxima seção.

Proposição 2.12. *Tem-se:*

$$(a) \quad \|(\varphi_i, \pm \varphi_i)\|_E = \sqrt{2(\lambda_i + 1)}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Para os próximos itens, considere:

$$\Psi_{\pm i} = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda_i + 1)}} (\varphi_i, \pm \varphi_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

$$(b) \quad \langle \Psi_i, \Psi_j \rangle_E = \delta_{ij};$$

$$(c) \quad B(\Psi_i, \Psi_j) = \mu_i \delta_{ij};$$

$$(d) \quad \langle \Psi_i, \Psi_j \rangle_{[L^2(\Omega)]^2} = \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i + 1}.$$

Além disso, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se $\mathbf{u} = (u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} c_j \Psi_j$ então:

$$(e) \|\mathbf{u}\|_E^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} c_j^2;$$

$$(f) B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \mu_j c_j^2;$$

$$(g) \|\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_j}{\lambda_j + 1}.$$

Demonstração. Imediato das definições! □

Com essa estrutura em E , definimos:

$$E^+ = \overline{\text{span}\{\Psi_i : \mu_i > 0, i \in \mathbb{Z}^*\}}$$

$$E^- = \overline{\text{span}\{\Psi_i : \mu_i < 0, i \in \mathbb{Z}^*\}}$$

$$E^0 = \overline{\text{span}\{\Psi_i : \mu_i = 0, i \in \mathbb{Z}^*\}}.$$

O lema a seguir será de suma importância na próxima seção.

Lema 2.13. *Existe $\xi^* > 0$ tal que*

$$(2.13) \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 2\xi^* \|\mathbf{u}\|_E^2, \quad \text{para } \mathbf{u} \in E^+,$$

$$(2.14) \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq -2\xi^* \|\mathbf{u}\|_E^2, \quad \text{para } \mathbf{u} \in E^-.$$

Ademais, se $a \pm b \notin \sigma(-\Delta + I)$ então $E^0 = \{0\}$.

Demonstração. Tendo em vista as expressões da Proposição 2.12, as desigualdades (2.13) e (2.14) são satisfeitas tomando

$$2\xi^* = \inf\{|\mu_i| : |\mu_i| > 0, i \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Tal ínfimo é estritamente positivo, por (2.12).

Quanto à última afirmação, suponha $i \in \mathbb{N}$. Então:

$$\mu_i = 0 \Rightarrow -b + (\lambda_i + 1 - a) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i + 1 = a + b$$

$$\Rightarrow a + b \in \sigma(-\Delta + I).$$

Analogamente, se $\mu_{-i} = 0$ então $a - b \in \sigma(-\Delta + I)$. Logo, se $a \pm b \notin \sigma(-\Delta + I)$ então $\mu_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}^*$ e $E^0 = \{0\}$. □

Defina \tilde{n} como sendo o menor número natural tal que para $i \geq \tilde{n}$ tenhamos:

$$\lambda_i + 1 - a > |b|$$

e considere

$$(2.15) \quad E_h = \overline{\text{span} \{ \Psi_i : |i| \geq \tilde{n}, i \in \mathbb{Z}^* \}},$$

$$(2.16) \quad E_l = \overline{\text{span} \{ \Psi_i : |i| < \tilde{n}, i \in \mathbb{Z}^* \}}.$$

Lema 2.14. (a) Se $(u, v) \in E^+ \cap E_h$ então $u = v$.

(b) Se $(u, v) \in E^- \cap E_h$ então $u = -v$.

Demonstração. Suponha $(u, v) \in E_h$. Então:

$$(u, v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^*, |i| \geq \tilde{n}} c_i \Psi_i.$$

Mas,

$$|i| \geq \tilde{n} \Rightarrow i \geq \tilde{n} \text{ ou } -i \geq \tilde{n} \Rightarrow \lambda_i + 1 - a > |b| \Rightarrow -(\lambda_i + 1 - a) < -b < \lambda_i + 1 - a.$$

Logo, por (2.9), se $|i| \geq \tilde{n}$

$$\mu_i > 0 \text{ e } \mu_{-i} < 0.$$

Assim, se $(u, v) \in E^+$, pela definição dos autoespaços E^+ e E^- na Proposição 2.11, segue que $u = v$ e da mesma forma, se $(u, v) \in E^-$, segue que $u = -v$. \square

2.4 Condições geométricas

Nesta seção mostraremos que com a estrutura variacional construída na seção anterior o funcional \mathcal{F} satisfaz as hipóteses (S) e (Q) do Teorema 2.7. O próximo lema mostra que \mathcal{F} satisfaz a hipótese (S).

Lema 2.15. *Existem constantes reais $\rho, \xi > 0$ tais que*

$$(2.17) \quad \mathcal{F}(\mathbf{u}) \geq \xi, \text{ para } \mathbf{u} = (u, v) \in E^+ \text{ e } \|\mathbf{u}\|_E = \rho.$$

Demonstração. Seja \mathbf{u} como acima. Note que $\|\mathbf{u}\|_E^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \rho^2$. Usando a desigualdade (2.13) e as imersões contínuas de $H^1(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - C_1 \int_{\Omega} \frac{(v^+)^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{(u^+)^{q+1}}{q+1} dx \\ &\geq \xi^* \|\mathbf{u}\|_E^2 - C_1 \int_{\Omega} \frac{|v|^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{|u|^{q+1}}{q+1} dx \\ &\geq \xi^* (\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2) - C(\|v\|_{H^1(\Omega)}^{p+1} + \|u\|_{H^1(\Omega)}^{q+1}) \\ &\geq \xi^* (\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2) - C(\|\mathbf{u}\|_E^{p+1} + \|\mathbf{u}\|_E^{q+1}) \\ &\geq \xi^* \rho^2 - C(\rho^{p+1} + \rho^{q+1}), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Como $p, q > 1$, podemos escolher $0 < \rho < 1$ e $\xi > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}) &\geq \xi^* \rho^2 - C\rho^{\min\{p,q\}+1} \\ &\geq \rho^2(\xi^* - C\rho^{\min\{p,q\}-1}) > \xi > 0, \end{aligned}$$

o que mostra (2.17). □

Lema 2.16. *Existe $\mathbf{g} = (g, g) \in E^+ \cap E_h$, com $\|\mathbf{g}\|_E = 1$ e $|g^+|_{\infty} = \infty$.*

Demonstração. Como $H^1(\Omega)$ não está mergulhado em $L^{\infty}(\Omega)$ (aqui é importante a hipótese $N \geq 3$), existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que $|u^+|_{\infty} = \infty$. Escreva $u = \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j \varphi_j$.

Remova as componentes de u nas direções dos autovetores φ'_i s tais que $i < \tilde{n}$. Fazendo isso estamos subtraindo apenas uma combinação linear finita de funções regulares, logo, se v é a função obtida dessa operação então ainda temos $|v^+|_{\infty} = \infty$.

Agora note que $(v, v) \in E^+ \cap E_h$, pois para todo $i \geq \tilde{n}$ temos $\Psi_i = (\varphi_i, \varphi_i) / \sqrt{2(\lambda_i + 1)}$ e $\mu_i > 0$.

Finalmente, para obter \mathbf{g} tal que $\|\mathbf{g}\|_E = 1$ basta fazer

$$\mathbf{g} = \frac{(v, v)}{\|(v, v)\|_E}.$$

□

No lema a seguir mostraremos que \mathcal{F} satisfaz a hipótese (Q) do Teorema 2.7.

Lema 2.17. *Seja $\mathbf{g} = (g, g)$ como no Lema 2.16. Então existem $R, \theta > 0$, com $R\theta > \rho$, tais que $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq 0$ para:*

(i) $\mathbf{u} \in E^-$;

(ii) $\mathbf{u} = \mathbf{w} + s\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{w} \in E^-$, $\|\mathbf{w}\|_E = R$ e $0 \leq s \leq \theta R$;

(iii) $\mathbf{u} = \mathbf{w} + s\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{w} \in E^-$, $\|\mathbf{w}\|_E \leq R$ e $s = \theta R$.

Demonstração. (i) Dado $\mathbf{u} = (u, v) \in E^-$, pela desigualdade (2.14) segue que:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - C_1 \int_{\Omega} \frac{(v^+)^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{(u^+)^{q+1}}{q+1} dx \leq -\xi^* \|\mathbf{u}\|_E^2 \leq 0.$$

(ii) Sejam $\mathbf{w} = (w, z) \in E^-$ com $\|\mathbf{w}\|_E = R$ e $0 \leq s \leq \theta R$.

Como $\mathbf{g} \in E^+ \cap E_h \subset E^+$ segue que \mathbf{g} e \mathbf{w} são ortogonais em relação à forma bilinear B e ao produto escalar de E . Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - C_1 \int_{\Omega} \frac{(v^+)^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{(u^+)^{q+1}}{q+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2}B(\mathbf{w} + s\mathbf{g}, \mathbf{w} + s\mathbf{g}) \\ &= \frac{1}{2} [B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + s^2 B(\mathbf{g}, \mathbf{g})] \\ &\leq -\xi^* \|\mathbf{w}\|_E^2 + \frac{s^2}{2} B(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \\ &\leq -\xi^* R^2 + \frac{\theta^2 R^2}{2} B(\mathbf{g}, \mathbf{g}), \end{aligned}$$

pois, pela desigualdade (2.13), $B(\mathbf{g}, \mathbf{g})$ é positivo. Logo, se denotarmos $2B_g = B(\mathbf{g}, \mathbf{g})$, temos:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq R^2(-\xi^* + \theta^2 B_g).$$

Basta então fixar θ tal que

$$\theta < \sqrt{\frac{\xi^*}{B_g}}$$

e a parte (ii) está provada.

(iii) Considere agora $\|\mathbf{w}\|_E \leq R$, $s = \theta R$ e sejam

$$P_l \mathbf{w} = (\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{e} \quad P_h \mathbf{w} = (\delta_1, \delta_2),$$

onde P_l e P_h são as projeções ortogonais sobre os espaços E_l e E_h , respectivamente. Daí, $P_h \mathbf{w} \in E^- \cap E_h$ e portanto $P_h \mathbf{w} = (\delta_1, -\delta_1)$, segundo o Lema 2.14.

Escreva agora:

$$(2.18) \quad \int_{\Omega} [(z + \theta Rg)^+]^{p+1} dx = R^{p+1} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\sigma_2 - \delta_1}{R} + \theta g \right)^+ \right]^{p+1} dx,$$

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} [(w + \theta Rg)^+]^{q+1} dx = R^{q+1} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\sigma_1 + \delta_1}{R} + \theta g \right)^+ \right]^{q+1} dx,$$

Como σ_1 e σ_2 são combinações lineares de um número finito de autovetores do Laplaciano com condição de Neumann na fronteira, segue que ambos pertencem a um subespaço de dimensão finita, logo, existe $C > 0$ tal que

$$|\sigma_1|, |\sigma_2| \leq \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |P_l \mathbf{w}|_{\max} \leq C \|P_l \mathbf{w}\|_E \leq C \|\mathbf{w}\|_E,$$

ou seja, (trocando a constante C por $C/2$ por uma simples questão de ajuste de contas)

$$|\sigma_1|, |\sigma_2| \leq \frac{C}{2} \|\mathbf{w}\|_E \leq \frac{CR}{2}.$$

Escolhendo $R > 1$ obtemos:

$$\frac{|\sigma_1|}{R}, \frac{|\sigma_2|}{R} \leq \frac{C}{2} < C.$$

Como g e θ são fixados e $|g^+|_{\infty} = \infty$, segue que o conjunto

$$\Omega^* = \{x \in \Omega : \theta g > C + 1\}$$

tem medida positiva. Note que $\theta g > C + 1$ implica

$$\max\{\theta g \pm \delta_1/R\} > C + 1,$$

para toda função δ_1 e qualquer $R \in \mathbb{R}$. Então $\Omega^* \subset \Omega_{\pm}^*$, onde

$$\Omega_{\pm}^* = \{x \in \Omega : \theta g \pm \delta_1/R > C + 1\}.$$

Note que os conjuntos Ω_{\pm}^* não dependem de \mathbf{w} e R , mas Ω^* depende.

Então

$$\text{ou } |\Omega_{-}^*| \geq \frac{|\Omega^*|}{2} \quad \text{ou } |\Omega_{+}^*| \geq \frac{|\Omega^*|}{2},$$

e portanto, para qualquer \mathbf{w} dado da forma acima e $R > 1$ segue que:

$$(2.20) \quad \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\sigma_2 - \delta_1}{R} + \theta g \right)^+ \right]^{p+1} dx \geq \frac{|\Omega^*|}{2}$$

ou

$$(2.21) \quad \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\sigma_1 + \delta_1}{R} + \theta g \right)^+ \right]^{q+1} dx \geq \frac{|\Omega^*|}{2}.$$

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\sigma_2 - \delta_1}{R} + \theta g \right)^+ \right]^{p+1} dx &\geq \int_{\Omega_-^*} \left[\left(\theta g - \frac{\delta_1}{R} + \frac{\sigma_2}{R} \right)^+ \right]^{p+1} dx \\ &\geq \int_{\Omega_-^*} \left[\left(C + 1 + \frac{\sigma_2}{R} \right)^+ \right]^{p+1} dx \\ &\geq \int_{\Omega_-^*} \left[\left(-\frac{\sigma_2}{R} + 1 + \frac{\sigma_2}{R} \right)^+ \right]^{p+1} dx \\ &= \int_{\Omega_-^*} 1 dx = |\Omega_-^*| \geq \frac{|\Omega^*|}{2}. \end{aligned}$$

O outro caso é análogo!

De (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) obtemos:

$$-C_1 \int_{\Omega} \frac{(v^+)^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{(u^+)^{q+1}}{q+1} dx \leq -R^{p+1} \frac{|\Omega^*|}{2} - R^{p+1} \frac{|\Omega^*|}{2} \leq -\tilde{C} R^{\min\{p,q\}+1},$$

onde \tilde{C} não depende de R e \mathbf{w} . Portanto, podemos finalmente estimar $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ nesse caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}) &\leq \frac{1}{2} B(\mathbf{w} + \theta R \mathbf{g}, \mathbf{w} + \theta R \mathbf{g}) - \tilde{C} R^{\min\{p,q\}+1} \\ &\leq -\xi^* \|\mathbf{w}\|_E^2 + \frac{1}{2} \theta^2 R^2 B(\mathbf{g}, \mathbf{g}) - \tilde{C} R^{\min\{p,q\}+1} \\ &\leq R^2 \left(\theta^2 B_g - \tilde{C} R^{\min\{p,q\}-1} \right). \end{aligned}$$

Como $p, q > 1$, podemos escolher $R > 1$ suficientemente grande (também deve ser tal que $R > \rho/\theta$) tal que a última expressão acima fica negativa, como queríamos. \square

2.5 O caso $b = 0$ (ou $c = 0$)

Nessa seção resolveremos o caso citado na Observação 2.5. Considere o sistema

$$(2.22) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = au + bv + (v^+)^p, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v = 0 + av + (u^+)^q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com C_1, C_2 constantes positivas. Ou seja, o sistema (2.1) com $b \neq 0$ e $c = 0$. Note que os autovalores de A coincidem com a , mas a matriz A não é diagonal. Nesse caso, o Lema 2.3 nos permite escolher o parâmetro não nulo (no caso b) tão pequeno quanto quisermos.

Primeiramente vamos considerar a forma B desprezando o termo $\int_{\Omega} bv^2 dx$. Trabalharemos com a forma

$$(2.23) \quad B((u, v), (w, z)) = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla z + \nabla v \nabla w + uz + vw - a(uz + vw)] dx$$

e faremos as mesmas construções da Seção 2.3 para obter os autovalores e autovetores de B . Daí, obtemos o valor correspondente de ξ^* do Lema 2.13 e, pelo Lema 2.3, podemos considerar o sistema equivalente ao (2.22):

$$(2.24) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = au + bv + C_1(v^+)^p, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + v = 0 + av + C_2(u^+)^q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde escolhemos o parâmetro δ de forma apropriada tal que $b = \xi^*$.

Mostremos, a menos da condição de compacidade (que será vista na próxima seção), a seguinte proposição:

Proposição 2.18. *Suponha $a \notin \sigma(-\Delta + I)$, $b = \xi^*$ e suponha ainda que o funcional \mathcal{F} associado ao sistema (2.24) satisfaz a condição de Palais-Smale. Então existe uma solução não-trivial para o sistema (2.22).*

Demonstração. Com efeito, uma solução de (2.24) é um ponto crítico do funcional \mathcal{F} :

$E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} bv^2 dx - H(\mathbf{u}) \\ &= \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v + uv] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [bv^2 + 2auv] dx - \\ &\quad - C_1 \int_{\Omega} \frac{(v^+)^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{(u^+)^{q+1}}{q+1} dx,\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{2} \int_{\Omega} bv^2 dx$ será considerado como uma pequena perturbação que estimamos como:

$$\left| \int_{\Omega} bv^2 dx \right| \leq \xi^* |v|_2^2 \leq \xi^* \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|(u, v)\|_E^2$$

e então obtemos as novas versões das desigualdades (2.13) e (2.14):

$$\begin{aligned}B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} bv^2 &\geq \xi^* \|\mathbf{u}\|_E^2, \quad \text{para } \mathbf{u} \in E^+, \\ B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} bv^2 &\leq -\xi^* \|\mathbf{u}\|_E^2, \quad \text{para } \mathbf{u} \in E^-\end{aligned}$$

Tais desigualdades permitem usar os mesmos argumentos como na Seção 2.4 para esse caso e então obter uma solução de (2.24) via Teorema 2.7. \square

2.6 Condição de compacidade

Nessa seção mostraremos que o funcional \mathcal{F} satisfaz a condição de Palais-Smale, necessária para a aplicação do Teorema 2.7.

Lema 2.19. *Com as hipóteses consideradas o funcional \mathcal{F} satisfaz a condição de Palais-Smale. Isto é, se $\{\epsilon_n\}$ é uma sequência de números reais positivos convergindo para zero e $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência em E tal que:*

$$(2.25) \quad |\mathcal{F}(\mathbf{u}_n)| \leq T,$$

$$(2.26) \quad |\mathcal{F}'(\mathbf{u}_n)(\phi, \psi)| \leq \epsilon_n \|(\phi, \psi)\|_E, \quad \forall (\phi, \psi) \in E,$$

então $\{\mathbf{u}_n\}$ admite uma subsequência convergente.

Demonstração. Das equações (2.25) e (2.26) segue que¹:

$$(2.27) \quad |\mathcal{F}(\mathbf{u}_n)| = \left| \frac{1}{2}B(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) - C_1 \int_{\Omega} \frac{(v_n^+)^{p+1}}{p+1} dx - C_2 \int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^{q+1}}{q+1} dx \right| \leq T,$$

$$(2.28) \quad \mathcal{F}'(\mathbf{u}_n)(\phi, \psi) = B(\mathbf{u}_n, (\phi, \psi)) - C_1 \int_{\Omega} (v_n^+)^p \psi dx - C_2 \int_{\Omega} (u_n^+)^q \phi dx \leq \epsilon_n \|(\phi, \psi)\|_E.$$

Vamos supor, sem comprometimento às contas, que $C_1 = C_2 = 1$.

Mostraremos primeiro que $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência limitada em E . Por contradição, suponha que exista uma subsequência de $\{\mathbf{u}_n\}$ (a qual continuaremos a chamar de $\{u_n\}$) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_E = \infty.$$

Defina:

$$(U_n, V_n) = \frac{(u_n, v_n)}{\|\mathbf{u}_n\|_E}.$$

Passando a uma subsequência se necessário, existe (U, V) em E tal que:

$$(U_n, V_n) \rightharpoonup (U, V) \text{ em } E$$

$$\text{e } (U_n, V_n) \rightarrow (U, V) \text{ em } L^r \times L^r, \text{ para } 1 \leq r < 2^*.$$

Agora observe que:

$$\int_{\Omega} (v_n^+)^p v_n dx = \int_{\Omega} (v_n^+)^{p+1} dx \text{ e } \int_{\Omega} (u_n^+)^q u_n dx = \int_{\Omega} (u_n^+)^{q+1} dx.$$

Então, fazendo $\mathcal{F}(\mathbf{u}_n) - \frac{1}{2}\mathcal{F}'(\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$, temos:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} (v_n^+)^{p+1} dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\Omega} (u_n^+)^{q+1} dx \leq T + \epsilon_n \|\mathbf{u}_n\|_E.$$

Dividindo a desigualdade por $\|\mathbf{u}_n\|_E$ e usando o fato que $\epsilon_n \rightarrow 0$, obtemos:

$$(2.29) \quad \frac{1}{\|\mathbf{u}_n\|_E} \int_{\Omega} (v_n^+)^{p+1} dx \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{\|\mathbf{u}_n\|_E} \int_{\Omega} (u_n^+)^{q+1} dx.$$

Dado $(\phi, \psi) \in E$ arbitrário, considerando agora

$$\frac{\mathcal{F}'(\mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{u}_n\|_E}(\phi, \psi),$$

¹No caso da Seção 2.5, basta considerar a forma B como sendo a forma B daquela situação mais o termo $\int_{\Omega} bv\psi dx$.

obtemos:

$$(2.30) \quad B((U_n, V_n), (\phi, \psi)) - \int_{\Omega} \frac{(v_n^+)^p \psi}{\|\mathbf{u}_n\|_E} dx - \int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^q \phi}{\|\mathbf{u}_n\|_E} dx \rightarrow 0.$$

Usando a convergência fraca de (U_n, V_n) e (2.29), obtemos:

$$(2.31) \quad B((U, V), (\phi, \psi)) = 0, \quad \forall (\phi, \psi) \in E.$$

Isso significa que (U, V) é uma solução da equação

$$(-\Delta + I)(U, V)^T = A(U, V)^T.$$

Pela hipótese sobre os autovalores de A ($a \pm b \notin \sigma(-\Delta + I)$), segue pelo Lema 2.1 que $(U, V) = (0, 0)$.

Considere agora

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}_n\|_E^2} \mathcal{F}'(u_n, v_n)(v_n, u_n).$$

Então:

$$B((U_n, V_n), (V_n, U_n)) - \int_{\Omega} \frac{(v_n^+)^p}{\|\mathbf{u}_n\|_E} U_n dx - \int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^q}{\|\mathbf{u}_n\|_E} V_n dx \rightarrow 0,$$

e isso implica

$$B((U_n, V_n), (V_n, U_n)) \rightarrow 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} B((U_n, V_n), (V_n, U_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} [|\nabla U_n|^2 + |\nabla V_n|^2 + U_n^2 + V_n^2] dx - \right. \\ &\quad \left. - a \int_{\Omega} (U_n^2 + V_n^2) dx - 2b \int_{\Omega} U_n V_n dx \right\} \end{aligned}$$

e as últimas integrais convergem a zero visto que $U_n \rightarrow U$ e $V_n \rightarrow V$ em L^r , $1 \leq r < 2^*$, e como vimos acima $(U, V) = (0, 0)$. Logo,

$$\int_{\Omega} [|\nabla U_n|^2 + |\nabla V_n|^2 + U_n^2 + V_n^2] dx \rightarrow 0.$$

Isso é uma contradição, pois

$$\int_{\Omega} [|\nabla U_n|^2 + |\nabla V_n|^2 + U_n^2 + V_n^2] dx = \|(U_n, V_n)\|_E^2 = 1.$$

Portanto, $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência limitada.

Mostremos agora que $\{\mathbf{u}_n\}$ admite uma subsequência convergente. Como $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência limitada em E , passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ em } E$$

$$\text{e } (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \text{ em } L^r \times L^r, \text{ para } 1 \leq r < 2^*.$$

Considerando $\mathcal{F}'(u_n, v_n)(v_n - v, 0)$ e $\mathcal{F}'(u_n, v_n)(0, u_n - u)$, obtemos:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \text{ e } \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx,$$

o que implica que a convergência é de fato forte em E . Portanto, \mathcal{F} satisfaz PS. \square

2.7 Prova do resultado principal

Nessa seção mostraremos que o sistema (2.1) admite uma solução não trivial. Lembre que o objetivo é mostrar a Proposição 2.6 que, via Lema 2.3, implica no Teorema 2.2.

Proposição 2.20. *Existe um ponto crítico $\mathbf{u} \in E$ para o funcional \mathcal{F} , com $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \geq \xi > 0$, ou seja, $\mathbf{u} \neq (0, 0)$.*

Demonstração. Tal resultado é uma consequência do Teorema de Minimax 2.7.

A condição de Palais-Smale é garantida pelo Lema 2.19, enquanto que as condições geométricas (S) e (Q) são garantidas, respectivamente, pelos Lemas 2.15 e 2.17, bastando definir os conjuntos S e Q como abaixo:

$$S = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in E^+, \|\mathbf{u}\|_E = \rho\},$$

$$Q = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + s\mathbf{g} : \mathbf{w} \in E^-, \|\mathbf{w}\|_E \leq R, 0 \leq s \leq \theta R\}.$$

Falta apenas verificar as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_3) .

Tome $L : E \rightarrow E$ dado por:

$$(2.32) \quad L(u, v) = \frac{1}{2}(v, u).$$

Claramente, L é linear, contínuo e auto-adjunto.

Afirmção 2.21. *Para todo $\mu > 0$, $P^- \exp(\mu L) : E^- \rightarrow E^-$ é um operador linear invertível.*

De fato, L é diagonal com relação à base que estamos considerando, pois:

$$L\Psi_{\pm i} = \pm \frac{1}{2} \Psi_{\pm i},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, $\exp(\mu L)$ também é diagonal e tem a forma:

$$\exp(\mu L)\Psi_{\pm i} = \exp(\pm\mu/2)\Psi_{\pm i},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, o que mostra que tal operador é invariante e invertível sobre E^- .

Isso verifica as hipóteses (H_1) e (H_3) .

A hipótese (H_2) , sobre a compacidade da derivada b' , segue imediatamente da escolha dos expoentes p, q e da compacidade da imersão de Sobolev em tais casos. \square

Notas do capítulo

Em princípio tentamos trabalhar com o sistema (2.1) utilizando as mesmas hipóteses sobre p e q utilizadas nos artigos [De Figueiredo-Felmer] e [De Figueiredo-Ramos]. Em tais artigos, os autores supõem que os expoentes p e q pertencem a uma região limitada por hipérboles críticas. Para provar o resultado de existência de soluções não triviais os autores utilizaram técnicas variacionais juntamente com a teoria dos espaços fracionários.

Tentamos adaptar as mesmas técnicas para o problema (2.1), mas infelizmente não conseguimos provar um lema equivalente ao Lema 2.16. Note que na prova do Lema 2.16 a caracterização dos espaços E^+ e E^- foi importantíssima para que pudéssemos escolher \mathbf{g} com coordenadas iguais, o que facilitou a prova das condições geométricas.

Com a teoria dos espaços fracionários, os espaços E^+ e E^- não apresentavam caracterização simples, o que nos impediu naquele momento de escolher \mathbf{g} de forma ótima para a prova das condições geométricas.

CAPÍTULO 3

A RESSONÂNCIA NO PRIMEIRO AUTOVALOR

Neste capítulo faremos o estudo do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (u^+)^p + f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = (v^+)^p + f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = (u^+)^q + g(x), & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde os expoentes p, q satisfazem:

$$1 < p, q < \frac{N}{N-2} = \frac{2^*}{2}$$

e f, g satisfazem uma hipótese enunciada abaixo. Tais problemas são do tipo Neumann ressonantes em $\lambda_1 = 0$.

A título de completude, um resumo da teoria do grau topológico que utilizaremos para provar os resultados principais desse capítulo consta no Apêndice D.

3.1 O caso escalar

Estudaremos nessa seção a equação

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = (u^+)^p + f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

(H₁) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave em \mathbb{R}^N , $N \geq 3$;

(H₂) $1 < p < \frac{N}{N-2}$;

(H₃) f pertence a $L^r(\Omega)$, para algum $r > N/2$, e satisfaz:

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} f(x) dx < 0.$$

Usaremos métodos topológicos para encontrar uma solução para a equação (3.1). Para isso, precisaremos de estimativas *a priori* sobre possíveis soluções da equação. No capítulo 1 vimos que se $f \equiv 0$ então a equação (3.1) só admite soluções triviais¹. A hipótese (3.2) é uma condição necessária tanto para a existência de soluções com parte positiva não trivial (nesse caso também é uma condição suficiente) quanto para a existência dessa estimativa *a priori*.

Por exemplo, se u é uma solução da equação então, utilizando a função teste $\varphi_1 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} -\Delta u \varphi_1 = (u^+)^p \varphi_1 + f(x) \varphi_1 &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 dx = \int_{\Omega} (u^+)^p \varphi_1 dx + \int_{\Omega} f(x) \varphi_1 dx \\ &\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} (u^+)^p dx + \int_{\Omega} f(x) dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = - \int_{\Omega} (u^+)^p dx \leq 0 \end{aligned}$$

e a equação (3.1) tem solução com parte positiva não trivial se, e somente se (3.2) ocorre.

Mostraremos o seguinte teorema:

¹Basta refazer os argumentos do início do Capítulo 1 com $g \equiv 0$ e trocar 2^* por p .

Teorema 3.1. *Suponha (H_1) , (H_2) e (H_3) . Então (3.1) possui ao menos uma solução em $W^{2,r}(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.*

Observação 3.2. *Da teoria da regularidade, toda solução fraca de (3.1) pertence a $W^{2,r}(\Omega)$. Como $r > N/2$, pelo teorema C.11 (ver Apêndice C), temos $W^{2,r}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ e, para todo $u \in W^{2,r}(\Omega)$, é verdadeira a seguinte desigualdade:*

$$(3.3) \quad \|u\|_{W^{2,r}} \geq C|u|_{\infty}.$$

3.2 Estimativa a priori para o caso escalar

Seção destinada à estimativa a priori para as soluções do problema (3.1).

Desde que $\lambda_1 = 0$ e as autofunções associadas são funções constantes, dado $u \in H^1(\Omega)$, podemos decompor

$$(3.4) \quad u = \bar{u} + \tilde{u}$$

onde $\bar{u} \in \mathbb{R}$ é constante e $\int_{\Omega} \tilde{u}(x)dx = 0$.

Teorema 3.3. *Suponha (H_1) , (H_2) e (H_3) . Se $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução de (3.1) então existem $\sigma < 1$ e funções contínuas $\rho_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, dependendo apenas de Ω e σ , tais que $\rho_i(0) = 0$ e*

$$(3.5) \quad |\tilde{u}|_{\infty} \leq |\bar{u}|^{\sigma} \rho_1(|f|_r) + \rho_2(|f|_r),$$

onde \tilde{u} é definido em (3.4), $|\cdot|_{\infty}$ é a norma em $C^0(\bar{\Omega})$ e $|\cdot|_r$ é a norma em $L^r(\Omega)$.

Demonstração. Desde que

$$p < \frac{N}{N-2} = \frac{N/2}{(N/2)-1},$$

por continuidade, existe \bar{r} tal que $r > \bar{r} > N/2$ e

$$p < \frac{\bar{r}}{\bar{r}-1} \Rightarrow \frac{p(\bar{r}-1)}{\bar{r}} < 1.$$

Considere $u = \bar{u} + \tilde{u}$ uma solução de (3.1). Então utilizando a função teste $\varphi_1 = 1$ obtemos:

$$0 = \int_{\Omega} (u^+)^p dx + \int_{\Omega} f(x) dx = 0 \Rightarrow |u^+|_p^p = - \int_{\Omega} f(x) dx \leq |f|_1,$$

ou seja,

$$(3.6) \quad |u^+|_p^p \leq |f|_1.$$

Por outro lado, como \bar{u} é constante, temos $\Delta u = \Delta \tilde{u}$, logo, usando a equação (3.1), obtemos:

$$|\Delta \tilde{u}|_{\bar{r}} \leq |(u^+)^p|_{\bar{r}} + |f|_{\bar{r}},$$

e, por (3.6),

$$\begin{aligned} |(u^+)^p|_{\bar{r}} &= \int_{\Omega} [(u^+)^p]^{\bar{r}} dx = \int_{\Omega} |(u^+)^p|^{\bar{r}-1} |u^+|^p dx \\ &\leq |u^+|_{\infty}^{p(\bar{r}-1)} \int_{\Omega} (u^+)^p dx \leq |u^+|_{\infty}^{p(\bar{r}-1)} |f|_1. \end{aligned}$$

Logo, como $L^{\bar{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ ($\bar{r} > 1$ e Ω limitado), obtemos:

$$(3.7) \quad |\Delta \tilde{u}|_{\bar{r}} \leq C |u^+|_{\infty}^{\frac{p(\bar{r}-1)}{\bar{r}}} |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + |f|_{\bar{r}}.$$

Pela Observação 3.2, u (e também \tilde{u}) satisfaz a desigualdade (3.3).

Também, pelo artigo [Kannan-Ortega] (p. 393), é válida a desigualdade abaixo:

$$(3.8) \quad \|\tilde{u}\|_{W^{2,t}} \leq C |\Delta u|_t, \quad \text{para } 1 < t < \infty.$$

Fazendo $\sigma = p(\bar{r} - 1)/\bar{r} < 1$ e utilizando a Desigualdade de Young (ver Apêndice B, Teorema B.1 e Corolário B.2) com $p' = 1/\sigma$, obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|_{\infty}^{\sigma} |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} &= |\tilde{u}|_{\infty}^{\sigma} (\epsilon p')^{\sigma} \cdot \frac{|f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}}}{(\epsilon p')^{\sigma}} \\ &\leq \frac{1}{p'} |\tilde{u}|_{\infty} \epsilon p' + C(\epsilon, \sigma, |f|_{\bar{r}}) \\ &= \epsilon |\tilde{u}|_{\infty} + C(\epsilon, \sigma, |f|_{\bar{r}}). \end{aligned}$$

Observe que $C(\epsilon, \sigma, 0) = 0$. Portanto, utilizando os resultados acima e (3.7), obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|_{\infty} &\leq C \|\tilde{u}\|_{W^{2,\bar{r}}} \leq C |\Delta u|_{\bar{r}} = C |\Delta \tilde{u}|_{\bar{r}} \\ &\leq C |u|_{\infty}^{\frac{p(\bar{r}-1)}{\bar{r}}} |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + |f|_{\bar{r}} \\ &\leq C |\bar{u}|^{\sigma} |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + C |\tilde{u}|_{\infty}^{\sigma} |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + |f|_{\bar{r}} \\ &\leq C |\bar{u}|^{\sigma} |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + C \epsilon |\tilde{u}|_{\infty} + C(\epsilon, \sigma, |f|_{\bar{r}}) + |f|_{\bar{r}}. \end{aligned}$$

Lembre que $r > \bar{r}$ e Ω é limitado, logo $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^{\bar{r}}(\Omega)$. Podemos escolher ϵ tal que $C\epsilon < 1/2$ e daí obtemos:

$$|\tilde{u}|_\infty \leq |\bar{u}|^\sigma \rho_1(|f|_r) + \rho_2(|f|_r),$$

onde $\rho_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ são contínuas, dependem apenas de Ω e σ , e $\rho_i(0) = 0$, $i = 1, 2$.

□

Proposição 3.4. *Fixada $f \in L^r(\Omega)$, existe $M > 0$ suficientemente grande tal que*

$$|\bar{u}| \leq M,$$

para toda solução u do problema (3.1) associada a tal f .

Demonstração. Com efeito, suponha que exista uma sequência de soluções $\{u_k\}$ de (3.1) tal que $\{\bar{u}_k\}$ seja ilimitada, isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{u}_k|_\infty = \infty$. Então:

$$v_k = \frac{u_k}{|\bar{u}_k|_\infty} = \frac{\bar{u}_k}{|\bar{u}_k|_\infty} + \frac{\tilde{u}_k}{|\bar{u}_k|_\infty} \rightarrow \pm 1.$$

Para ver isso, divida (3.5) por $|\bar{u}_k|$ e conclua que $\tilde{u}_k/|\bar{u}_k| \rightarrow 0$ visto que $\sigma < 1$.

Se existe uma subsequência $\bar{u}_k \rightarrow -\infty$ então para tal subsequência $v_k \rightarrow -1$, logo, $u_k \rightarrow -\infty$ e $(u_k)^+ \equiv 0$ para k suficientemente grande. Mas isso é um absurdo pois $\int_\Omega f(x)dx < 0$ e

$$\int_\Omega (u_k^+)^p dx + \int_\Omega f(x)dx = 0.$$

Se existe uma subsequência $\bar{u}_k \rightarrow +\infty$ então, como anteriormente, $(u_k)^+ \rightarrow \infty$ e utilizamos o Lema de Fatou para concluir que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega (u_k^+)^p dx = \infty$ obtendo outra contradição usando novamente a igualdade acima. O que termina a prova da proposição.

□

Corolário 3.5. *Com as hipótese do Teorema 3.3, temos:*

$$(3.9) \quad |\tilde{u}|_\infty \leq \rho(|f|_r),$$

onde $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua, dependendo apenas de Ω e $\sigma < 1$, com $\rho(0) = 0$.

Demonstração. Pela Proposição 3.4, fixada $f \in L^r(\Omega)$, existe $M > 0$ tal que $|\bar{u}| \leq M$ para toda solução $u = \bar{u} + \tilde{u}$ do problema (3.1). Portanto, da estimativa (3.5) segue que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|_\infty &\leq |\bar{u}|^\sigma \rho_1(|f|_r) + \rho_2(|f|_r) \\ &\leq M^\sigma \rho_1(|f|_r) + \rho_2(|f|_r) = \rho(|f|_r), \end{aligned}$$

donde temos (3.9). \square

3.3 Existência de soluções para o caso escalar

Esta seção é dedicada à prova do Teorema 3.1.

Para o que interessa, vamos introduzir a seguinte formulação do problema (3.1) via teoria do ponto fixo.

Sabe-se que o funcional $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (3.1) é de classe C^2 e é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} (u^+)^{p+1} dx - \int_{\Omega} f(x)u dx.$$

Sabemos que soluções fracas de (3.1) são pontos críticos do funcional J , isto é, satisfazem $\langle J'(u), \varphi \rangle = 0$, para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$. Assim, se u é solução fraca de (3.1), então u satisfaz

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (u^+)^p \varphi dx - \int_{\Omega} f(x) \varphi dx = 0,$$

para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$.

A segunda derivada do funcional J é dada abaixo:

$$J''(u).(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} p(u_+)^{p-1} v w dx, \quad \forall v, w \in H^1(\Omega).$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \langle J'(u), \varphi \rangle &= \left[\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx \right] - \left[\int_{\Omega} (u^+)^p \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx + \int_{\Omega} f(x) \varphi dx \right] \\ &= \langle u, \varphi \rangle_{H^1} - \langle T_f(u), \varphi \rangle_{H^1}, \end{aligned}$$

onde $T_f : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ é tal que, se $v = T_f(u)$, então v é solução fraca do problema

$$\begin{cases} (-\Delta + I)v = (u^+)^p + u + f(x), & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ou seja, $T_f(u) = (-\Delta + I)^{-1}((u^+)^p + u + f)$. T_f é uma aplicação contínua e compacta e $T_f(u) = u$ se, e somente se, u é solução de (3.1).

No que segue, $\deg(\cdot, \cdot, \cdot)$ denota o grau de Leray-Schauder. A ideia aqui é utilizar os resultados da Seção D.2 (Ver Apêndice D).

Como mencionamos acima, encontrar um ponto crítico para o funcional J é equivalente a encontrar um ponto fixo para T_f , ou equivalentemente, resolver a equação $u - T_f(u) = 0$ em $H^1(\Omega)$.

Mostraremos na Proposição 3.6 que toda solução u_0 de (3.1) com f “suficientemente pequena” é não degenerada e, além disso, o operador $T'_f(u_0)$ não possui valores característicos² entre 0 e 1. Com isso concluiremos que o grau de cada solução isolada de (3.1) com tal f é não nulo. Para provar o Teorema 3.1, utilizaremos a propriedade (D5), da invariância homotópica do grau.

A ideia para a primeira parte é utilizar o Teorema D.15 com $T = T_f$ e $x_0 = u_0$. Se u_0 é uma solução de (3.1), desde que T_f é compacto, o Lema D.12 garante que $T'_f(u_0)$ é compacto e existe apenas um número finito de valores característicos de $T'_f(u_0)$ no intervalo $(0, 1)$. Mostraremos na Proposição 3.6 que 1 não é valor característico de $T'_f(u_0)$, logo, u_0 é solução não degenerada e, pelo Teorema D.15, segue que:

$$i(I - T_f, u_0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de $T'_f(u_0)$ no intervalo $(0, 1)$. Na mesma proposição mostraremos que o intervalo $(0, 1)$ não contém nenhum valor característico de $T'_f(u_0)$, logo, $\beta = 0$. Pela propriedade (D8) do grau, calculamos o grau $\deg(I - T_f, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0)$ como a soma desses índices calculados em cada solução (no caso será uma soma finita de 1's).

Observe que se u_0 é tal que $u_0 - T_f(u_0) = 0$ então resolver $T'(u_0)v = v$ é equivalente a resolver o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = p(u_0^+)^{p-1}v, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

²Lembre que se λ é um autovalor não nulo de $T'_f(u_0)$, o valor característico associado a ele é $\mu = \lambda^{-1}$.

o qual chamamos de *linearização* de (3.1) em torno de uma solução particular u_0 . Ao calcularmos os autovalores³ do problema linearizado estaremos, de fato, calculando os valores característicos de $T'_f(u_0)$.

É possível mostrar diretamente que $T'(u_0)v = (-\Delta + I)^{-1}(p(u_0^+)^{p-1}v + v)$, o que ajuda a visualizar a relação de $T'(u_0)$ com a segunda derivada do funcional J .

Proposição 3.6. *Existem $\epsilon > 0$ e $R_0 > 0$ tais que se f é uma função satisfazendo (H_3) , com $|f|_r < \epsilon$, e para a qual (3.1) possui ao menos uma solução, então:*

$$\deg(I - T_f, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0,$$

para todo $R \geq R_0$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $f \in L^r(\Omega)$ com $|f|_r \leq \epsilon$, qualquer solução do problema (3.1) com tal f satisfaz uma estimativa *a priori* tal como no Corolário 3.5.

Afirmção 3.7. *Dada $f \in L^r(\Omega)$, tal que $|f|_r < \epsilon$, toda solução $u = \bar{u} + \tilde{u}$ do problema (3.1) com tal f satisfaz*

$$(3.10) \quad u^+(x) < \left(\frac{\lambda_2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} := R_0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, seja ρ a função dada pelo Corolário 3.5 e seja $\epsilon < 1$ tal que

$$\rho(\epsilon) < \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Dada $f \in L^r(\Omega)$ satisfazendo (H_3) e tal que $|f|_r \leq \epsilon$, pelo Corolário 3.5, qualquer solução $u = \bar{u} + \tilde{u}$ de (3.1) satisfaz

$$(3.11) \quad |\tilde{u}|_\infty < \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{R_0}{2}.$$

Se $\bar{u} \leq 0$ então obtemos para q.t. $x \in \Omega$:

$$u(x) = \bar{u} + \tilde{u}(x) \leq |\tilde{u}|_\infty < \frac{R_0}{2},$$

³Como veremos adiante, esse será um problema de autovalor com peso.

logo, $u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \leq (R_0/2) < R_0$ para q.t. $x \in \Omega$.

Agora suponha $\bar{u} \geq 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f|_r < \delta \Rightarrow \bar{u} < \frac{R_0}{2}.$$

Com efeito, supondo o contrário, existiriam seqüências $\{f_k\}$, $\{\bar{u}_k\}$, $\{\delta_k\}$, com $\delta_k \searrow 0$ e tais que

$$|f_k|_r = \delta_k \text{ e } \bar{u}_k \geq \frac{R_0}{2} > 0.$$

Note que, para todo k tem-se:

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} (u_k^+)^p dx + \int_{\Omega} f_k(x) dx = 0 \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_k^+)^p dx = 0.$$

Pela continuidade da função ρ em 0, desde que $|f_k|_r \rightarrow 0$, temos:

$$|\tilde{u}_k|_{\infty} \leq \frac{R_0}{4} \Rightarrow -\frac{R_0}{4} \leq \tilde{u}_k(x) \leq \frac{R_0}{4} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

para k suficientemente grande. Logo,

$$u_k(x) = \bar{u}_k + \tilde{u}_k(x) \geq \frac{R_0}{2} - \frac{R_0}{4} = \frac{R_0}{4},$$

q.t.p. em Ω , para k suficientemente grande. Isso implica que

$$u_k^+(x) = \max\{u_k(x), 0\} \geq R_0/4,$$

q.t.p. em Ω , para k suficientemente grande, contrariando (3.12).

Portanto, se $\bar{u} \geq 0$, basta escolher ϵ ainda menor que δ dado acima e obtemos para q.t. $x \in \Omega$:

$$u(x) \leq \bar{u} + |\tilde{u}|_{\infty} < \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2} = R_0 \Rightarrow u^+(x) \leq R_0,$$

o que conclui a demonstração de (3.10).

Vamos mostrar agora que toda solução do problema (3.1) com $|f|_r < \epsilon$ é não degenerada e calcular o valor de β , definido no Teorema D.15.

Lembre que o problema (3.1) linearizado em u_0 é dado por:

$$(3.13) \quad \begin{cases} -\Delta v = p(u_0^+)^{p-1}v, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Denote por $\mu_1(a) < \mu_2(a) < \dots$ os autovalores do seguinte problema com peso a :

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu a(x)v, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela desigualdade (3.10),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} > u_0^+(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega &\Rightarrow \frac{\lambda_2}{p} > (u_0^+(x))^{p-1} \text{ q.t.p. } x \in \Omega \\ &\Rightarrow \lambda_2 > p(u_0^+(x))^{p-1} := a(x) > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Utilizando a primeira autofunção φ_1 (constante) obtemos:

$$0 = \varphi_1 \int_{\Omega} \mu_1(a)a(x)dx \Rightarrow \mu_1(a) = 0,$$

pois $a(x) > 0$ q.t.p em Ω .

Considere os problemas de autovalor com os pesos $k(x) = \lambda_2$ e $a(x)$. Vimos acima que $a(x) < k(x)$, então⁴ $\mu_2(a) > \mu_2(k(x))$. Como $\mu_2(k(x)) = \mu_2(\lambda_2) = 1$, segue que:

$$(3.14) \quad \mu_1(a) = 0 < 1 < \mu_2(a).$$

Logo, $\mu = 1$ não é valor característico de $T'_f(u_0)$. Daí $v \equiv 0$ é a única solução de (3.13) e, portanto, u_0 é uma solução não degenerada de (3.1). Como não existem autovalores de (3.13) entre 0 e 1, não existem valores característicos de $T'_f(u_0)$ entre 0 e 1, logo, $\beta = 0$.

Pela estimativa (3.10) o grau acima está bem definido para todo $R \geq R_0$. Ademais, desde que todas as possíveis soluções de $u = T_f(u)$ são não degeneradas, segue que elas são isoladas e que existe apenas um número finito delas em $B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R)$.

Lembramos que o índice⁵ de cada solução é igual à $(-1)^\beta$ onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de $T'_f(u_0)$ contidos no intervalo $(0, 1)$. Desde que $\beta = 0$ para qualquer solução de $T_f(u) = u$, temos:

$$d(I - T_f, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0) = \sum (-1)^0 = \sum 1 \neq 0.$$

□

⁴Essa relação entre autovalores de problemas de autovalor com peso pode ser encontrada minuciosamente em [Ambrosetti-Malchiodi], Seção 1.4.1, ou em [De Figueiredo-Gossez].

⁵Definido na Seção D.2 (Ver Apêndice D).

Observação 3.8. Para a prova do Teorema 3.1 será suficiente provar a existência de ao menos uma função f para a qual podemos provar que

$$\deg(I - T_f, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Vamos finalmente à prova do resultado de existência de soluções para o problema (3.1), que enunciaremos novamente a seguir.

Teorema 3.1. Suponha (H_1) , (H_2) e (H_3) . Então (3.1) possui ao menos uma solução em $W^{2,r}(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.

Demonstração. A primeira autofunção normalizada em $L^2(\Omega)$ é $\varphi_1 = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$.

Dado $\epsilon > 0$ e $R_0 > 0$ como na Proposição 3.6, escolha $f_1 = -(t|\Omega|^{-\frac{1}{2}})^p = -t^p|\Omega|^{-\frac{p}{2}}$, com $t > 0$. Note que $u = t\varphi_1 = t|\Omega|^{-\frac{1}{2}}$ é solução do problema (3.1) para tal f_1 .

Escolheremos t a seguir para que $|f_1|_r < \epsilon$.

$$|f_1|_r = \left(\int_{\Omega} |f_1|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = \left(|\Omega| t^{pr} |\Omega|^{-\frac{pr}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} = t^p |\Omega|^{\frac{2-pr}{2r}}.$$

Logo, $|f_1|_r < \epsilon$ se tomarmos t tal que

$$0 < t < \left(\frac{\epsilon}{|\Omega|^{\frac{2-pr}{2r}}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Então, pela Proposição 3.6:

$$\deg(I - T_{f_1}, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0$$

para $R \geq R_0$.

Considere agora a seguinte homotopia:

$$(3.15) \quad \begin{cases} -\Delta u = (u^+)^p + (1 - \tau)f + \tau f_1, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\tau \in [0, 1]$. Da estimativa *a priori* do Corolário 3.5, juntamente com a Afirmação 3.7, todas as soluções do problema (3.15) são uniformemente limitadas em $C^0(\Omega)$ por, digamos:

$$R_1 := \rho(\max\{|f|_r, |f_1|_r\}).$$

Daí, se $R > \max\{R_0, R_1\}$ temos:

$$\deg(I - T_f, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0) = \deg(I - T_{f_1}, B_{C^0(\bar{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0,$$

e a conclusão do teorema segue. \square

3.4 Sistema ressonante

Nesta seção estudaremos o seguinte sistema:

$$(3.16) \quad \begin{cases} -\Delta u = (v^+)^p + f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = (u^+)^q + g(x), & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f, g satisfazem a hipótese (H_3) e os expoentes p, q satisfazem:

$$(H_4) \quad 1 < p, q < \frac{N}{N-2}.$$

Com essas hipóteses provaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.9. *Suponha que f e g satisfazem (H_3) e que p e q satisfazem (H_4) . Então existe pelo menos uma solução $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ do sistema (3.16).*

3.5 Estimativas *a priori* para as soluções do sistema

Integrando as equações do sistema (3.16) utilizando $\varphi_1 = 1$ como função teste, obtemos:

$$(3.17) \quad \int_{\Omega} (v^+)^p dx + \int_{\Omega} f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} (u^+)^q dx + \int_{\Omega} g(x) dx = 0$$

$$(3.18) \quad \Rightarrow |v^+|_p^p \leq |f|_1 \quad \text{e} \quad |u^+|_q^q \leq |g|_1.$$

De forma análoga ao que foi feito na Seção 3.2, considere as decomposições $u = \bar{u} + \tilde{u}$ e $v = \bar{v} + \tilde{v}$.

Teorema 3.10. *Suponha as mesmas hipóteses do Teorema 3.9 e seja $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ uma solução do sistema (3.16). Então existem constantes $\sigma, \sigma' < 1$ e uma função contínua $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dependendo apenas de p, q, σ, σ' e Ω , tal que $\gamma(0) = 0$ e*

$$(3.19) \quad |\tilde{u}|_\infty + |\tilde{v}|_\infty \leq \gamma(|f|_r + |g|_r).$$

Demonstração. Assim como fizemos na prova do Teorema 3.3, é possível escolher \bar{r} , tal que $r > \bar{r} > N/2$, $\sigma = p(\bar{r} - 1)/\bar{r} < 1$ e $\sigma' = q(\bar{r} - 1)/\bar{r} < 1$

Usando (3.17) e (3.18), temos:

$$|\Delta \tilde{u}|_{\bar{r}} \leq |(v^+)^p|_{\bar{r}} + |f|_{\bar{r}} \leq |v^+|_\infty^\sigma |f|_1^{\frac{1}{\bar{r}}} + |f|_{\bar{r}}$$

e

$$|\Delta \tilde{v}|_{\bar{r}} \leq |(u^+)^q|_{\bar{r}} + |g|_{\bar{r}} \leq |u^+|_\infty^{\sigma'} |g|_1^{\frac{1}{\bar{r}}} + |g|_{\bar{r}}.$$

Agora, utilizando as desigualdades (3.3) e (3.8), juntamente com o fato que $\bar{r} > N/2$ e os resultados acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|_\infty &\leq C \|\tilde{u}\|_{W^{2,\bar{r}}} \leq C |\Delta \tilde{u}|_{\bar{r}} = C |\Delta u|_{\bar{r}} \\ &\leq C |\bar{v}|^\sigma |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + C |\tilde{v}|_\infty^\sigma |f|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + C |f|_{\bar{r}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\tilde{v}|_\infty &\leq C \|\tilde{v}\|_{W^{2,\bar{r}}} \leq C |\Delta \tilde{v}|_{\bar{r}} = C |\Delta v|_{\bar{r}} \\ &\leq C |\bar{u}|^{\sigma'} |g|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + C |\tilde{u}|_\infty^{\sigma'} |g|_{\bar{r}}^{\frac{1}{\bar{r}}} + C |g|_{\bar{r}}. \end{aligned}$$

Daí, utilizamos a Desigualdade de Young com σ, σ' e a imersão $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^{\bar{r}}(\Omega)$, para obter:

$$(3.20) \quad |\tilde{u}|_\infty + |\tilde{v}|_\infty \leq \gamma_1(|f|_r + |g|_r) + \gamma_2(|g|_r) |\bar{u}|^{\sigma'} + \gamma_3(|f|_r) |\bar{v}|^\sigma,$$

onde as γ_i 's são funções contínuas de \mathbb{R}^+ em \mathbb{R}^+ , que dependem apenas de Ω , de σ e σ' , tais que $\gamma_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Afirmção 3.11. *Seja $E \subset L^r(\Omega)$ um subconjunto limitado satisfazendo (H_3) . Então, existe uma constante $M > 0$ suficientemente grande tal que $\max\{|\bar{u}|, |\bar{v}|\} \leq M$, para toda solução (u, v) do sistema (3.16) associada a um par $(f, g) \in E$.*

Com efeito, dada $(f, g) \in E$, suponha que exista uma sequência de soluções $\{(u_k, v_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ do sistema (3.16) associada a (f, g) tal que $\max\{|\bar{u}_k|, |\bar{v}_k|\} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Passando para subsequências sempre que necessário, temos alguns casos a considerar:

Caso 1. $|\bar{u}_k| \leq C$ e $|\bar{v}_k| \rightarrow \infty$

Então:

$$w_k = \frac{v_k}{|\bar{v}_k|} = \frac{\bar{v}_k}{|\bar{v}_k|} + \frac{\tilde{v}_k}{|\bar{v}_k|} \rightarrow \pm 1,$$

pois $\tilde{v}_k/|\bar{v}_k| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Para ver isso, divida⁶ (3.20) por $|\bar{v}_k|$, use o fato que $|\bar{u}_k| \leq C$ e que os expoentes à direita em (3.20) são menores que 1.

- Se existe uma subsequência $\bar{v}_k \rightarrow -\infty$ então $w_k \rightarrow -1$. Logo, $v_k \rightarrow -\infty$ e $v_k^+ \equiv 0$ para k suficientemente grande. Isso é um absurdo, pois para todo k , por (3.17):

$$\int_{\Omega} (v_k^+)^p dx + \int_{\Omega} f(x) dx = 0$$

e f satisfaz a hipótese (H_3) .

- Se existe uma subsequência $\bar{v}_k \rightarrow +\infty$, usando o mesmo raciocínio acima, teríamos $(v_k)^+ \rightarrow \infty$ para k suficientemente grande e, pelo Lema de Fatou:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v_k^+)^p dx = +\infty.$$

Mas, por (3.18), temos:

$$|v_k^+|_p^p \leq |f|_1.$$

Como Ω é limitado, sabe-se que $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. E, como E é um subconjunto limitado de $L^r(\Omega)$, obtemos uma contradição, pois:

$$|v_k^+|_p^p \leq |f|_1 \leq C_1 |f|_r \leq C, \quad \forall k.$$

Caso 2. $|\bar{v}_k| \leq C$ e $|\bar{u}_k| \rightarrow \infty$

Análogo ao Caso 1.

Caso 3. $|\bar{u}_k|, |\bar{v}_k| \rightarrow \infty$

Algumas situações podem ocorrer:

⁶Antes, faça $\tilde{v}_k \leq |\tilde{u}_k|_{\infty} + |\tilde{v}_k|_{\infty}$.

3.1. $\bar{u}_k, \bar{v}_k \rightarrow -\infty$ ou $\bar{u}_k, \bar{v}_k \rightarrow +\infty$

Neste caso considere:

$$w_k = \frac{u_k + v_k}{|\bar{u}_k + \bar{v}_k|} = \frac{\bar{u}_k + \bar{v}_k}{|\bar{u}_k + \bar{v}_k|} + \frac{\tilde{u}_k + \tilde{v}_k}{|\bar{u}_k + \bar{v}_k|}.$$

Note que $|\bar{u}_k + \bar{v}_k| \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Assim como nos casos anteriores, usando (3.20), a segunda parcela da soma acima tende a zero. Isso implica $w_k \rightarrow \pm 1$, logo, para k suficientemente grande, ou $u_k + v_k \gg 1$ ou $u_k + v_k \ll -1$. Assim, podemos concluir que pelo menos uma das sequências $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ é ilimitada (tendendo a $\pm\infty$) e obtemos contradições análogas as dos casos 1 e 2 utilizando as igualdades (3.17) e (3.18).

3.2. $\bar{u}_k \rightarrow -\infty$ e $\bar{v}_k \rightarrow +\infty$ (ou, analogamente, $\bar{u}_k \rightarrow +\infty$ e $\bar{v}_k \rightarrow -\infty$)

Nesse caso, considere (para k suficientemente grande):

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{v_k - u_k}{|\bar{v}_k - \bar{u}_k|} = \frac{\bar{v}_k + \tilde{v}_k - \bar{u}_k - \tilde{u}_k}{\bar{v}_k - \bar{u}_k} \\ &= \frac{\bar{v}_k - \bar{u}_k}{\bar{v}_k - \bar{u}_k} + \frac{\tilde{v}_k - \tilde{u}_k}{\bar{v}_k - \bar{u}_k} \\ &= 1 + \frac{\tilde{v}_k - \tilde{u}_k}{\bar{v}_k - \bar{u}_k}. \end{aligned}$$

Para k suficientemente grande:

$$\left| \frac{\tilde{v}_k - \tilde{u}_k}{\bar{v}_k - \bar{u}_k} \right|_{\infty} \leq \frac{|\tilde{u}_k|_{\infty} + |\tilde{v}_k|_{\infty}}{\bar{v}_k - \bar{u}_k},$$

logo, por (3.20):

$$\frac{\tilde{v}_k - \tilde{u}_k}{\bar{v}_k - \bar{u}_k} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Daí, $v_k - u_k \rightarrow +\infty$ e, como anteriormente, utilizando (3.17) e (3.18) chegamos a uma contradição. Portanto, a afirmação está provada.

Pela Afirmação 3.11, existe $M > 0$ suficientemente grande tal que $\max\{|\bar{u}|, |\bar{v}|\} \leq M$, logo

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|_{\infty} + |\tilde{v}|_{\infty} &\leq \gamma_1(|f|_r + |g|_r) + \gamma_2(|g|_r)|\bar{u}|^{\sigma'} + \gamma_3(|f|_r)|\bar{v}|^{\sigma} \\ &\leq \gamma_1(|f|_r + |g|_r) + \gamma_2(|g|_r)M^{\sigma'} + \gamma_3(|f|_r)M^{\sigma} \\ &= \gamma(|f|_r + |g|_r), \end{aligned}$$

onde $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua que depende apenas de Ω , σ e σ' , e $\gamma(0) = 0$, e o teorema está provado. \square

3.6 Existência de soluções para o sistema

Nesta seção provaremos o Teorema 3.9.

A ideia é a mesma da Seção 3.3. Trabalharemos com o operador $T_{(f,g)}$ e utilizaremos os resultados da Seção D.2. Como na prova do Teorema 3.1, começaremos provando que as soluções (u, v) de (3.16) são não degeneradas e que $\beta = 0$, desde que f, g sejam “suficientemente pequenas” e satisfaçam a hipótese (H_3) .

A linearização de (3.16) em alguma solução (u_0, v_0) é:

$$(3.21) \quad \begin{cases} -\Delta w = p(v_0^+)^{p-1}z, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta z = q(u_0^+)^{q-1}w, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tanto a prova que as soluções são não degeneradas quanto o cálculo de β serão consequências dos lemas a seguir.

Lema 3.12. *Existe $\epsilon > 0$ tal que quaisquer que sejam $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$ com $a, b \geq 0$ q.t.p., a, b não identicamente nulos, $|a|_\infty < \epsilon$, $|b|_\infty < \epsilon$ e $0 < c < \epsilon$, o sistema*

$$(3.22) \quad \begin{cases} -\Delta w = ta(x)z + (1-t)cz, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta z = tb(x)w + (1-t)cw, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui apenas a solução trivial $w = z = 0$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que para todo $\epsilon_n = 1/n$, existam seqüências de funções não identicamente nulas satisfazendo:

$$0 \leq a_n(x), b_n(x) \leq \frac{1}{n},$$

e seqüências de números reais $t_n \in [0, 1]$, $c_n \in (0, 1/n]$ tais que (3.22) tem solução não trivial (w_n, z_n) para tais escolhas dos coeficientes correspondentes.

Considere as seqüências

$$\tilde{w}_n = \frac{w_n}{|w_n|_2} \quad \text{e} \quad \tilde{z}_n = \frac{z_n}{|z_n|_2}.$$

Temos duas possibilidades para $|z_n|_2/|w_n|_2$ quanto à sua limitação.

(i) $|z_n|_2/|w_n|_2$ é limitada.

Nesse caso, considere:

$$(3.23) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{w}_n = (t_n a_n(x) + (1 - t_n) c_n) \frac{z_n}{|w_n|_2}, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando (3.23) por \tilde{w}_n , obtemos:

$$-\Delta \tilde{w}_n \cdot \tilde{w}_n = (t_n a_n(x) + (1 - t_n) c_n) \frac{z_n}{|w_n|_2} \cdot \tilde{w}_n.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{w}_n|^2 dx &= \int_{\Omega} (t_n a_n(x) + (1 - t_n) c_n) \frac{z_n}{|w_n|_2} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \frac{z_n}{|w_n|_2} \tilde{w}_n dx \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{|z_n|_2}{|w_n|_2} \cdot |\tilde{w}_n|_2 \leq \frac{1}{n} \frac{|z_n|_2}{|w_n|_2}. \end{aligned}$$

Logo, $|\nabla \tilde{w}_n|_2 \rightarrow 0$ e portanto, $\{\tilde{w}_n\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$. Daí, existe $\tilde{w} \in H^1(\Omega)$ tal que, passando a uma subseqüência, se necessário:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_n &\rightharpoonup \tilde{w}, \quad \text{em } H^1(\Omega) \quad \text{e} \\ \tilde{w}_n &\rightarrow \tilde{w}, \quad \text{em } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

logo, $|\tilde{w}|_2 = 1$.

Passando o limite (no sentido fraco) em (3.23), temos:

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w} = 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, $\tilde{w} = \pm \varphi_1 = \pm |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$ e $\tilde{w}_n \rightarrow \pm \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$ (convergência forte), pois $|\nabla(\tilde{w}_n - (\pm \varphi_1))|_2 = |\nabla \tilde{w}_n|_2 \rightarrow 0$ e $\tilde{w}_n \rightarrow \pm \varphi_1$ em $L^2(\Omega)$, como vimos acima.

Também ocorre que $\tilde{w}_n \rightarrow \pm\varphi_1$ em $C^0(\overline{\Omega})$. Isso é uma consequência da teoria da regularidade para equações elípticas aplicada ao problema:

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{w}_n \pm \varphi_1) = (t_n a_n(x) + (1 - t_n)c_n) \frac{z_n}{|w_n|_2}, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial(\tilde{w}_n \pm \varphi_1)}{\partial\nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, \tilde{w}_n (e portanto w_n) tem sinal definido para n suficientemente grande.

Por outro lado, testando a segunda equação do sistema (3.22) com $\varphi_1 = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$, deduzimos que:

$$\int_{\Omega} (t_n b_n(x) + (1 - t_n)c_n) w_n dx = 0,$$

o que é uma contradição pois w_n tem sinal definido e o termo que está multiplicando é não negativo e não trivial.

(ii) $|z_n|_2/|w_n|_2 \rightarrow \infty$.

Nesse caso, a sequência $|w_n|_2/|z_n|_2$ é limitada e temos a mesma situação do caso (i) trabalhando agora com a segunda equação do sistema (3.22). \square

Lema 3.13. *Fixe $\lambda_1 = 0 < c < \lambda_2$. Então o problema de autovalor com parâmetro μ :*

$$(3.24) \quad \begin{cases} -\Delta w = \mu cz, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta z = \mu cw, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial\nu} = \frac{\partial z}{\partial\nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui um único autovalor μ no intervalo $[0, 1]$, dado por

$$\mu_1 = 0.$$

Demonstração. Escreva $w = \sum t_i \varphi_i$ e $z = \sum s_i \varphi_i$. Testando a primeira equação do sistema (3.24) com φ_j obtemos:

$$\begin{aligned} -\Delta \left(\sum t_i \varphi_i \right) \varphi_j &= \mu c \left(\sum s_i \varphi_i \right) \varphi_j \Rightarrow t_j \lambda_j = \mu c s_j \\ &\Rightarrow \lambda_j t_j - \mu c s_j = 0 \end{aligned}$$

e, de forma análoga, da segunda equação:

$$\mu c t_j - \lambda_j s_j = 0.$$

Logo, montando o sistema com essas duas equações, a fim de encontrar os autovetores do problema de autovalor (3.24), devemos ter:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_j & -\mu c \\ \mu c & -\lambda_j \end{bmatrix} = 0,$$

o que fornece a sequência dupla de autovalores dada por:

$$\mu_j = \pm \frac{\lambda_j}{c}.$$

Portanto, como $\lambda_1 = 0$ e $0 < c < \lambda_2$, segue que:

$$0 = \mu_1 < 1 < \mu_2 = \frac{\lambda_2}{c}$$

e o resultado segue. □

Finalmente vamos à prova do resultado principal referente ao sistema (3.16):

Teorema 3.9. *Suponha que f e g satisfazem (H_3) e que p e q satisfazem (H_4) . Então existe pelo menos uma solução $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ do sistema (3.16).*

Demonstração. Vamos introduzir a seguinte formulação do problema via teoria do ponto fixo.

Seja $T_{(f,g)} : C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega) \times C^0(\Omega)$ a aplicação:

$$T_{(f,g)}(u, v) = ((-\Delta + I)^{-1}((v^+)^p + u + f), (-\Delta + I)^{-1}((u^+)^q + v + g)).$$

A aplicação $T_{(f,g)}$ é contínua, compacta e $T_{(f,g)}(u, v) = (u, v)$ se, e somente se, (u, v) é solução de (3.16).

Escolha f_1, g_1 como $f_1 = -(\gamma\varphi_1)^p$ e $g_1 = -(\delta\varphi_1)^q$, com $\varphi_1 = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$ (a primeira autofunção do Laplaciano com condição de Neumann na fronteira e normalizada em $L^2(\Omega)$) e $\gamma, \delta > 0$ a serem escolhidos de forma apropriada. É fácil verificar que $(u_0, v_0) = (\delta\varphi_1, \gamma\varphi_1)$ é uma solução de (3.16) com (f_1, g_1) .

Considere a seguinte homotopia:

$$(3.25) \quad \begin{cases} -\Delta u = (v^+)^p + (1 - \tau)f + \tau f_1, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (u^+)^q + (1 - \tau)g + \tau g_1, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $0 \leq \tau \leq 1$. Como estamos considerando um subconjunto finito $\{f, f_1, g, g_1\}$ de $L^r(\Omega)$ (logo, limitado), podemos aplicar a estimativa *a priori* do Teorema 3.10 (juntamente com a Afirmação 3.11) para concluir que todas as soluções do sistema (3.25) são uniformemente limitadas em $C^0(\bar{\Omega}) \times C^0(\bar{\Omega})$ por alguma constante que depende continuamente de γ e δ .

Daí, para $R > 0$ suficientemente grande,

$$\deg(Id - T_{(f,g)}, B_{[C^0(\Omega)]^2}(0, R), 0) = \deg(Id - T_{(f_1, g_1)}, B_{[C^0(\Omega)]^2}(0, R), 0).$$

Agora, vamos escolher γ e δ suficientemente pequenos tais que o Lema 3.12 se aplica para

$$a = p(v^+)^{p-1} \quad \text{e} \quad b = q(u^+)^{q-1},$$

onde (u, v) é uma solução qualquer de (3.16) com (f_1, g_1) .

Obtemos, com $t = 1$ em (3.22), que (u, v) é não degenerada. Ademais, o valor de β para $Id - T_{(f_1, g_1)}$ em (u, v) pode ser calculado sobre a homotopia dada em (3.22) e coincide com o valor de β para a solução trivial de (3.22) com $t = 0$. Usando o Lema D.12 e o Lema 3.13 deduzimos que $\beta = 0$ e daí:

$$\deg(Id - T_{(f_1, g_1)}, B_{[C^0(\Omega)]^2}(0, R), 0) = \sum (-1)^0 = \sum 1 \neq 0,$$

o que conclui a prova do Teorema 3.9. □

Observação 3.14. *Observe que na prova do Lema 3.13 já mostramos também que não existem valores característicos de $T'_{(f_1, g_1)}(u, v)$ no intervalo aberto $(0, 1)$.*

Notas do capítulo

Ao contrário do que foi feito nos capítulos anteriores, para obter os resultados de existência desse capítulo, optamos pelos métodos topológicos ao invés dos métodos variacionais. Essa escolha se deve à ressonância no primeiro autovalor. Não é possível provar

que funcionais associados a problemas ressonantes no primeiro autovalor satisfazem a condição de Palais-Smale, condição de compacidade que aparece em todos os Teoremas de Linking utilizados nos capítulos anteriores.

A motivação para o estudo desse capítulo deve-se ao artigo [Cuesta-et al.], que trata os casos vistos aqui com condição de Dirichlet na fronteira e com outras hipóteses sobre os expoentes p e q , como mencionamos na Introdução desse trabalho. As estimativas *a priori* que obtivemos aqui são bem mais próximas dos resultados obtidos no artigo [Kannan-Ortega], e são bem diferentes das estimativas *a priori* de [Cuesta-et al.].

Outro ponto interessante é a diferença no cálculo do grau. No artigo [Cuesta-et al.], que trata o problema com condições de Dirichlet na fronteira, o valor de β coincide com o índice de Morse das soluções e é igual a 1. Assim o grau de $I - T_f$ calculado em tal artigo é uma soma de -1 's. Em relação aos problemas estudados neste capítulo, vimos que $\beta = 0$. Porém, é possível mostrar que o índice de Morse das soluções é 1, mostrando que a segunda forma quadrática associada ao funcional J , em cada solução, é estritamente negativa no autoespaço das constantes e positiva em seu complementar.

APÊNDICE A

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

As notações que utilizamos neste trabalho são as notações padrões. Por conveniência, listaremos os principais símbolos e notações que aparecem no decorrer do texto. Todas as informações aqui contidas podem ser encontradas de forma detalhada nos livros [Badiale-Serra], [Evans] e [Gilbarg-Trudinger].

- Ω sempre representa um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N . O espaço \mathbb{R}^N é dotado com a medida de Lebesgue dx , e toda integral é no sentido de Lebesgue. A medida de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ é denotada por $|E|$. Dizemos que uma propriedade ocorre em “quase toda parte em Ω ” (“*q.t.p. em Ω* ”) se existe um conjunto $E \subset \Omega$ com $|E| = 0$ tal que a propriedade é válida em todo ponto de $\Omega \setminus E$. Às vezes dizemos também “para quase todo $x \in \Omega$ ” (“*para q.t. $x \in \Omega$* ”) para significar o mesmo.
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. Logo, $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$.
- Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, o *gradiente* de u em $x = (x_1, \dots, x_N)$ é o vetor

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right).$$

- Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, o *Laplaciano* de u , denotado por $-\Delta$ é

definido por:

$$-\Delta u(x) = - \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(x) \right\} = - \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}(x).$$

- $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- $C^k(\Omega)$, para $k = 1, 2, \dots$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são k -vezes diferenciáveis em Ω e cujas k -ésimas derivadas são contínuas em Ω .
- $C^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω , ou seja, $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.
- $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u \in C^\infty(\Omega)$ e u tem suporte compacto em Ω , ou seja, $\text{supp}(u) \subset\subset \Omega$.

- $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$, é o espaço das funções Lebesgue-mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

- $|\cdot|_p$ é a norma em $L^p(\Omega)$, definida como

$$|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções Lebesgue-mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\sup \text{ess}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty$, onde

$$\sup \text{ess}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \}.$$

- $|\cdot|_\infty$ é a norma em $L^\infty(\Omega)$, definida como

$$|u|_\infty = \sup \text{ess}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

- $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev, definido como

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N \right\},$$

onde as derivadas $\partial u/\partial x_i$ são todas no sentido das distribuições. $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx.$$

- $\|\cdot\|$ é a norma em $H^1(\Omega)$, definida como

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1}} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, para $N \geq 3$, é o espaço definido como segue: seja¹ $2^* = 2N/(N-2)$.

Então:

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, \dots, N \right\}.$$

Esse espaço tem uma estrutura de Hilbert quando munido do produto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx,$$

e sua norma correspondente

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia $H^1(\Omega)$ e tem norma e produto escalar tais como o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R})$, porém com as integrais em Ω .
- Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, onde cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado um *multi-índice* de *ordem* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$.
- Dado um multi-índice α , defina:

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N} u.$$

- $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis (no sentido das distribuições) e tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$. Note que $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

¹Tal expoente 2^* , como veremos adiante, é o expoente crítico para a imersão de Sobolev.

-
- $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ é a norma em $W^{k,p}(\Omega)$ definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^{\alpha}u|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Se $u \in C^1(\Omega)$, chamamos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla u$$

a derivada normal (exterior) de u com relação ao campo de vetores normais unitários ν , definidos em $\partial\Omega$.

APÊNDICE B

DESIGUALDADES ELEMENTARES

A seguir enunciaremos as principais desigualdades utilizadas no decorrer do texto cujas demonstrações encontram-se detalhadas em [Evans].

Teorema B.1. (Desigualdade de Young) *Sejam $1 < p, q < \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

quaisquer que sejam $a, b > 0$.

Corolário B.2. (Desigualdade de Young com ϵ) *Dados $a, b > 0$ e $\epsilon > 0$, temos:*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q$$

para $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Teorema B.3. (Desigualdade de Hölder) *Suponha $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} uv dx \leq |u|_p |v|_q.$$

Corolário B.4. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se $u, v \in L^2(\Omega)$ então*

$$\int_{\Omega} uv dx \leq |u|_2 |v|_2.$$

APÊNDICE C

RESULTADOS ELEMENTARES

Teorema C.1. (Fórmulas de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e suave e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$(i) \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

$$(ii) \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS,$$

onde $\nu = \nu(x)$ é o normal exterior a $\partial\Omega$ no ponto x , $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ e dS é a medida de superfície em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [Evans], p. 628. □

Teorema C.2. (Lema de Fatou) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções não negativas e integráveis. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n dx.$$

Demonstração. Ver [Brezis], p. 90. □

Teorema C.3. (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponha que*

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;

(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Demonstração. Ver [Brezis], p. 90. □

Teorema C.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;

(ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω .

Demonstração. Ver [Brezis], p. 94. □

Teorema C.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado tal que $|\Omega| < \infty$. Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Se $|\Omega| = \infty$ o resultado é falso!

Demonstração. Ver [Brezis], p. 118. □

Teorema C.6. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $\{u_n\}$ seja uma sequência limitada em X . Então, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e $u \in X$ tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Em particular, uma sequência limitada em um espaço de Hilbert possui uma subsequência fracamente convergente.

Demonstração. Ver [Brezis], Teorema 3.18, p.69. \square

Teorema C.7. (Teorema das Imersões de Sobolev) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira Lipschitz, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $kp < N$ então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$; a inclusão é compacta se $q < \frac{np}{n-kp}$.*

Demonstração. Ver [Struwe], p.265. \square

Corolário C.8. (Desigualdade de Sobolev) *Se $N \geq 3$ e Ω é um domínio limitado com fronteira C^1 então:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2} = 2^*$ e a inclusão é compacta se $q < 2^*$. Além disso, para todo $u \in H^1(\Omega)$, temos a seguinte desigualdade:

$$|u|_q \leq C \|u\|_{H^1},$$

onde $C = C(N, \Omega)$.

Teorema C.9. (Desigualdades Variacionais) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio limitado com fronteira C^1 e seja $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a sequência de autovetores do operador $-\Delta$ com condições de Neumann na fronteira. Denote por $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a sequência de autovetores associados à sequência de autovalores $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e por $V_k = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então:*

$$(i) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \lambda_k \int_{\Omega} u^2 dx, \text{ para todo } u \in V_k;$$

$$(ii) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_{k+1} \int_{\Omega} u^2 dx, \text{ para todo } u \in V_k^\perp, \text{ onde a ortogonalidade é tomada em relação ao produto escalar de } L^2(\Omega).$$

Demonstração. Ver [De Figueiredo-Gossez]. \square

Corolário C.10. (Desigualdade de Poincaré) *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} u^2 dx,$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Teorema C.11. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio que satisfaz a propriedade do cone interior (isto é, existe um cone fixado K_Ω tal que cada $x \in \Omega$ é o vértice de um cone $K_\Omega(x) \subset \bar{\Omega}$ e congruente a K_Ω) então existem as imersões:*

$$(i) \quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega), \text{ para } kp < N;$$

$$(ii) \quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^m(\Omega), \text{ para } 0 \leq m < k - \frac{N}{p},$$

onde $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \text{ para } |\alpha| \leq m\}$.

Demonstração. Ver observação logo abaixo do Corolário 7.11 de [Gilbarg-Trudinger], p. 158. □

APÊNDICE D

O GRAU TOPOLÓGICO

O grau topológico (ou simplesmente “grau”) de uma aplicação é uma ferramenta clássica muito utilizada na resolução de equações funcionais. Foi introduzido primeiramente por L. Brouwer para dimensões finitas e estendido por J. Leray e J. Schauder para dimensões infinitas. Existem muitas referências sobre o tema das quais destacamos os livros [Ambrosetti-Malchiodi], [Arcoya] e [Kesavan].

Trataremos o grau de uma forma axiomática, listando suas principais propriedades sem nos preocuparmos com provas de resultados. Tudo o que será enunciado aqui pode ser encontrado minuciosamente nas referências acima.

D.1 O grau de Brouwer e suas propriedades

Suponha que:

- (a) Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N , com fronteira dada por $\partial\Omega$;
- (b) f é uma aplicação contínua de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R}^N ; as componentes de f serão denotadas por f_i ;

(c) p é um ponto em \mathbb{R}^N tal que $p \notin f(\partial\Omega)$.

Para cada tripla (f, Ω, p) satisfazendo (a), (b) e (c), podemos associar um inteiro $\deg(f, \Omega, p)$, denominado o grau de f (com relação a Ω e a p), com as seguintes propriedades básicas:

(D1) (Normalização) Se $I_{\mathbb{R}^N}$ denota a aplicação identidade em \mathbb{R}^N , então:

$$\deg(I_{\mathbb{R}^N}, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega, \\ 0, & \text{se } p \notin \Omega. \end{cases}$$

(D2) (Propriedade Solução) Se $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$ então existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = p$.

(D3) $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - p, \Omega, 0)$.

(D4) (Decomposição) Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $p \notin f(\partial\Omega_1) \cap f(\partial\Omega_2)$ então

$$\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p).$$

(D5) (Invariância Homotópica) Uma homotopia $H \in C([0, 1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é *admissível* (com relação a Ω e p), se $H(t, x) \neq p$ para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Se H é uma homotopia admissível, então $\deg(H(t, \cdot), \Omega, p)$ é constante com relação a $t \in [0, 1]$. Em particular, se $f(x) = H(0, x)$ e $g(x) = H(1, x)$ então

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p).$$

A seguir faremos um resumo do procedimento padrão seguido pela maioria dos autores para definir o grau. A ideia é definir o grau primeiramente para funções de classe C^1 e valores regulares p e depois para estender a definição para funções contínuas e qualquer p , utilizamos argumentos de aproximação.

Suponha $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Lembre que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e daí, $f'(x)$ pode ser representada por uma matriz real $N \times N$, cujo determinante será denotado por $J_f(x)$ (“*Jacobiano*” de f no ponto x). Seja S o conjunto dos pontos críticos de f .

Definição D.1. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ é tal que $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$ então, definimos o grau de f em Ω com relação a p como:

$$(D.1) \quad \deg(f, \Omega, p) = \begin{cases} 0, & \text{se } f^{-1}(p) = \emptyset, \\ \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sgn}(J_f(x)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde “sgn” é a função sinal: se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então

$$\text{sgn}(x) \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

Observação D.2. Como $p \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$, sabemos que $f'(x)$ está bem definida para $x \in f^{-1}(p)$ e que $J_f(x) \neq 0$. Assim, $J_f(x)$ tem sinal definido e, pelo Teorema da Função Inversa, f é invertível em uma vizinhança de x . Consequentemente, como $\bar{\Omega}$ é compacto, o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito, logo, o grau está bem definido para funções de classe C^1 .

Para estender a definição acima para qualquer função contínua e qualquer ponto p , utilizamos um procedimento de aproximação. Primeiro aproximamos p por valores regulares p_k aplicando o Teorema de Sard.

Teorema D.3. Sejam $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $S_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$. Então $f(S_f)$ é um conjunto de medida nula.

De acordo com o Teorema de Sard, existe uma sequência $p_k \notin S_f$, tal que $p_k \rightarrow p$. Para p_k suficientemente próximo de p , p_k verifica (c) e daí faz sentido considerar $\deg(f, \Omega, p_k)$, dado por (D.1). Ademais, é possível mostrar que para $k \gg 1$, $\deg(f, \Omega, p_k)$ é uma constante que independe da sequência $\{p_k\}$. Portanto, podemos definir o grau de $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ em qualquer $p \in \Omega$ fazendo:

$$\deg(f, \Omega, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f, \Omega, p_k).$$

Analogamente, dada $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, seja $f_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $f_k \rightarrow f$ uniformemente em $\bar{\Omega}$. Se $k \gg 1$, então qualquer (f_k, Ω, p) satisfaz (a) – (c) e podemos considerar o grau $\deg(f_k, \Omega, p)$. Mais uma vez, é possível mostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f_k, \Omega, p)$ não depende da escolha da sequência $\{f_k\}$ e assim podemos definir o grau de f por

$$\deg(f, \Omega, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f_k, \Omega, p).$$

A seguir exibiremos mais propriedades do grau de Brouwer.

Teorema D.4. (Dependência dos Valores de Fronteira) *Sejam $f, g \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ e seja $p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$. Então*

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p).$$

Demonstração. Ver [Ambrosetti-Malchiodi], página 28. □

O grau também satisfaz as seguintes propriedades:

(D6) (Continuidade) Se $f_k \rightarrow f$ uniformemente em $\bar{\Omega}$, então $\deg(f_k, \Omega, p) \rightarrow \deg(f, \Omega, p)$.

Ademais, $\deg(f, \Omega, p)$ é contínuo em relação a p .

(D7) (Propriedade de Excisão) Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um aberto tal que $f(x) \neq p$ para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Então

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p).$$

A propriedade de excisão permite definir o índice de uma solução isolada de $f(x) = p$.

Seja $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$ e suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \neq p$ para todo $x \in \overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$. Usando a propriedade de excisão, com $\Omega = B_r(x_0)$ e $\Omega_0 = B_\rho(x_0)$, com $\rho \in (0, r)$, deduzimos que

$$\deg(f, B_\rho(x_0), p) = \deg(f, B_r(x_0), p), \quad \forall \rho \in (0, r).$$

Definimos tal valor comum como sendo o *índice* de f com relação a x_0 :

$$i(f, x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \deg(f, B_\rho(x_0), p), \quad p = f(x_0).$$

Ademais, se $f^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \Omega$ então:

(D8) $\deg(f, \Omega, p) = \sum_{j=1}^k i(f, x_j)$.

Para verificar isso, é suficiente tomar $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_j) = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Fazendo $\Omega_0 = B_\rho(x_1) \cup \dots \cup B_\rho(x_k)$ e usando a propriedade da decomposição **(D4)** juntamente com a propriedade de excisão **(D7)**, obtemos:

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p) = \sum_{j=1}^k \deg(f, B_\rho(x_j), p) = \sum_{j=1}^k i(f, x_j),$$

o que prova (D8).

Sejam $f \in C^1$ e p um valor regular, isto é, $J_f(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in f^{-1}(p)$. Como já mencionamos anteriormente, se p é um valor regular de f então o conjunto $f^{-1}(p)$ é discreto. Em particular, qualquer solução x_0 de $f(x) = p$ é isolada e faz sentido considerar o índice $i(f, x_0)$.

Lema D.5. *Suponha que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e seja $x_0 \in \Omega$ tal que $p = f(x_0)$ é um valor regular de f . Então:*

$$i(f, x_0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de $f'(x_0)$.

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que a única solução de $f(x) = p$ em $B_r = B_r(x_0)$ é x_0 . Então, $i(f, x_0) = \deg(f, B_r, p)$ e, por (D.1), $i(f, x_0) = \text{sgn}(J_f(x_0))$.

Usando a forma normal de Jordan, sabemos que o determinante Jacobiano $J_f(x_0)$ é dado por:

$$J_f(x_0) = \prod_{j=1}^N \lambda_j,$$

onde λ_j 's são os autovalores de $f'(x_0)$ repetidos de acordo com sua multiplicidade algébrica.

Agora, lembre que:

- cada λ_j é diferente de zero, porque x_0 é regular;
- se um autovalor é complexo, digamos igual a $a + ib$, então seu conjugado $a - ib$ também é um autovalor de $f'(x_0)$ e o produto deles é $a^2 + b^2 > 0$.

Logo, segue que $\text{sgn}(J_f(x_0)) = (-1)^\beta$, o que conclui a prova.

□

Algumas aplicações do grau de Brouwer podem ser encontradas nas referências já citadas. Dentre tais aplicações destacam-se o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema de Borsuk-Ulam.

D.2 O grau de Leray-Schauder

Nesta seção definiremos o grau de Leray-Schauder, que estende a noção de grau topológico para aplicações $f \in C(X, X)$, onde X é um espaço de Banach e f é uma perturbação da identidade $I = I_X$, no sentido que será definido abaixo.

Sejam D um subconjunto aberto e limitado do espaço de Banach X e S uma perturbação compacta da identidade I , isto é, $S \in C(\overline{D}, X)$ tal que $S = I - T$ onde T é compacto, isto é, T transforma conjuntos limitados em pré-compactos (cujo fecho é compacto).

Seja $p \notin S(\partial D)$. É possível verificar que $S(\partial D)$ é fechado e daí:

$$r := \text{dist}(p, S(\partial D)) > 0.$$

Desde que todo operador compacto pode ser uniformemente aproximado por operadores de posto finito, existe uma sequência $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $T_k \in C(\overline{D}, X)$, tal que $T_k \rightarrow T$ uniformemente em \overline{D} e

$$(D.2) \quad T_k(\overline{D}) \subset E_k \subset X, \quad \text{com} \quad \dim(E_k) < \infty.$$

Definiremos o grau de $I - T$ como o limite dos graus de $I - T_k$, que iremos introduzir em seguida. Em [Ambrosetti-Malchiodi], os autores mostram que tomando k suficientemente grande tal que

$$(D.3) \quad \sup_{x \in \overline{D}} \|T(x) - T_k(x)\| \leq \frac{r}{2},$$

concluimos que $p \notin S_k(\partial D)$ e daí faz sentido considerar o grau de Brouwer $\text{deg}(S_k, D, p)$ e é possível mostrar que

$$\text{deg}(S_k, D, p) = \text{deg}((I - T_k)|_{D \cap E_k}, D \cap E_k, p).$$

Definição D.6. *Seja $p \notin S(\partial D)$, onde $S = I - T$ com T compacto. Então:*

$$\text{deg}(S, D, p) = \text{deg}(I - T_k, D, p),$$

para qualquer T_k satisfazendo (D.2) e (D.3).

Observação D.7. No trabalho [Ambrosetti-Malchiodi] mostra-se que a definição acima independe da escolha da aproximação $\{T_k\}$.

Observação D.8. É possível verificar também que o grau de Leray-Schauder satisfaz todas as propriedades (D1)-(D8).

Algumas aplicações do grau de Leray-Schauder podem ser encontradas nas referências citadas, como o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e aplicações a resoluções de algumas equações elípticas.

É possível estender a noção de índice da Seção D.1 para o índice de uma solução isolada x_0 de $S(x) = x - T(x) = p$ fazendo:

$$i(S, x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \deg(S, B_r(x_0), p), \quad p = S(x_0),$$

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}.$$

Com essa definição de índice mais geral, é possível provar um resultado análogo ao Lema D.5.

Observação D.9. Lembre que o espectro de um operador linear compacto T em um espaço de Banach X é, no máximo, enumerável, com 0 sendo possivelmente seu único ponto de acumulação. Se $\lambda \neq 0$ pertence ao espectro de T , dizemos que ele é um **autovalor** de T e seu inverso $\mu = \lambda^{-1}$ é chamado **valor característico** de T .

Observação D.10. A sequência

$$\ker(I - \mu T) \subset \ker(I - \mu T)^2 \subset \ker(I - \mu T)^3 \subset \dots$$

é estacionária, isto é, existe um inteiro positivo k tal que

$$\ker(I - \mu T)^{k-1} \neq \ker(I - \mu T)^k = \ker(I - \mu T)^l,$$

para todo $l \geq k$. O espaço $\ker(I - \mu T)^k$ tem dimensão finita e sua dimensão é chamada a **multiplicidade algébrica** de μ . Se T é simétrico, então $k = 1$, isto é, as multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.

Observação D.11. *Se μ não é um valor característico de T , então $I - \mu T$ é invertível com inversa contínua.*

Assim, com as notações anteriores, se $\mu = 1$ não é um valor característico de $T'(x_0)$ então $S'(x_0)$ é invertível. Em particular, o Teorema da Função Inversa se aplica e daí x_0 é uma solução isolada de $x - T(x) = p$.

Lema D.12. *Seja $T \in C(X, X)$ um operador compacto e diferenciável em x_0 . Então $T'(x_0)$ é um operador linear compacto e existe apenas um número finito de valores característicos de $T'(x_0)$ contidos no intervalo $(0, 1)$. Além disso, cada um deles tem multiplicidade algébrica finita.*

Demonstração. Ver [Ambrosetti-Malchiodi], página 41. □

Lema D.13. *Seja $T \in C^1(\bar{D}, X)$ um operador compacto e suponha que 1 não é valor característico de $T'(x_0)$. Sejam $S(x) = x - T(x)$ e $x_0 \in X$ tal que $S(x_0) = p$. Então temos:*

$$i(S, x_0) = \deg(S'(x_0), B_r(x_0), p), \quad r \ll 1.$$

Demonstração. Ver [Ambrosetti-Malchiodi], página 41. □

Lema D.14. *Seja L um operador linear e compacto em X e suponha que 1 não seja um valor característico de L . Então*

$$\deg(I - L, B_r(0), 0) = (-1)^\beta, \quad r > 0,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de L contidos no intervalo $(0, 1)$.

Demonstração. Ver [Ambrosetti-Malchiodi], página 42. □

Teorema D.15. *Seja $T \in C^1(\bar{D}, X)$ um operador compacto tal que 1 não é um valor característico de $T'(x_0)$, para algum $x_0 \in D$. Então, tomando $S(x) = x - T(x)$ e $S(x_0) = p$, tem-se que x_0 é uma solução isolada de $S(x) = p$ e*

$$i(S, x_0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma da multiplicidade algébrica de todos os valores característicos de $T'(x_0)$ contidos no intervalo $(0, 1)$.

Demonstração. A prova é uma aplicação dos Lemas D.13 e D.14. □

BIBLIOGRAFIA

- [Adams] Adams, R.A., **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.
- [Ambrosetti-Malchiodi] Ambrosetti, A., Malchiodi, A., **Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems**. Cambridge University Press, 2007.
- [Arcoya] Arcoya, D., **Topological Methods and Differential Equations II**. School on Nonlinear Differential Equations, ICTP, 2006.
- [Arcoya-Villegas] Arcoya, D., Villegas, S., **Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$** . *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 219(1995), p. 499-513.
- [Bartolo-et al.] Bartolo, P., Benci, V., Fortunato, D., **Abstract Critical Point Theorems and Applications to Some Nonlinear Problems With "Strong" Resonance at Infinity**. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 7, N^o 9 (1983), p. 981-1012.
- [Badiale-Serra] Badiale, M., Serra, E., **Semilinear Elliptic Equations for Beginners. Existence Results via Variational Approach**. Springer-Verlag, London, 2011.
- [Brezis] Brezis, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, 2010.

- [Brezis-Nirenberg] Brezis, H., Nirenberg, L., **Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents**. Comm. Pure Appl. Math, t. XXXVI, 1983.
- [Calanchi-Ruf] Calanchi, M., Ruf, B., **Elliptic equations with one-side critical growth**. E.J. Diff. Equ., Vol. 2002 (2002), N^o 89, p. 1-21.
- [Capozzi-et al.] Capozzi, A., Fortunato, D., Palmieri, G., **An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent**. Annales de l'I.H.P., section C, tome 2, n^o 6 (1985), p. 463-470.
- [Cerami-et al.] Cerami, G., Fortunato, D., Struwe, M., **Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents**. Annales de l'I.H.P., section C, tome 1, n^o 5 (1984), p. 341-350.
- [Chabrowski-Ruf] Chabrowski, J., Ruf, B., **On the critical Neumann problem with perturbations of lower order**. Colloquium mathematicum. - ISSN 0010-1354. - ISSN 1730-6302. - 108:2(2007), p. 225-246.
- [Chang] Chang, K.C., **Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems**. Birkhäuser Boston, 1993.
- [Clément-et al.] Clément, P., De Figueiredo, D.G., Mitidieri, E., **A priori estimates for positive solutions of semilinear elliptic systems via Hardy-Sobolev inequalities**. Nonlinear partial differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser. 343, (1996), p. 73-91.
- [Cuesta-et al.] Cuesta, M., De Figueiredo, D.G., Srikanth, P.N., **On a superlinear elliptic problem**. Calculus of Variations, 17, p. 221-233 (2003).
- [De Figueiredo-Felmer] De Figueiredo, D.G., Felmer, P., **On superquadratic elliptic systems**. Trans. Amer. Math. Soc.. 343, p. 99-116 (1996).
- [De Figueiredo-Gossez] De Figueiredo, D.G., Gossez, J.P., **Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation**. Commun. in Partial Differential Equations, 17 (1&2). p. 339-346 (1992).

- [De Figueiredo-Ramos] De Figueiredo, D.G., Ramos, M., **On Linear Perturbations of Superquadratic Elliptic Systems**. Reaction Diffusion Systems, Lecture Notes in Pure and Applied Math, Editors G. Caristi & E. Mitidieri, Marcel Dekker Publ., Vol. 194 : p.121-130 (1998).
- [De Paiva] de Paiva, F.O., **Multiple Solutions for elliptic problems with asymmetric nonlinearity**. J. Math. Anal. Appl., 292 (2004), p. 317-327.
- [De Paiva-Presoto] de Paiva, F.O., Presoto, A.E., **Semilinear elliptic problems with asymmetric nonlinearities**. Preprint, 2013.
- [Evans] Evans, L.C., **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, AMS, Providence, 1998.
- [Felmer] Felmer, P., **Periodic solutions of 'superquadratic' Hamiltonian systems**. J. Diff. Eqns., 102 (1993), p.188-207.
- [Gazzola-Ruf] Gazzola, F., Ruf, B., **Lower-order perturbations of critical growth non-linearities in semilinear elliptic equations**. Advances in Diff. Equations, 2 (4) (1997), p. 555-572.
- [Gilbarg-Trudinger] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer-Verlag, NY, 1983.
- [Kannan-Ortega] Kannan, R., Ortega, R., **Superlinear elliptic boundary value problems**. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 37 (1987), N. 3, p.386-399.
- [Kesavan] Kesavan, S., **Nonlinear Functional Analysis, A First Course**. Hindustan Book Agency (India), 2004.
- [Massa] Massa, E., **Multiplicity results for a superlinear elliptic system with partial interference with the spectrum**. Nonl. Anal., 67(2007), p. 295-306.
- [Mawhin] Mawhin, J., **Ambrosetti-Prodi type results in nonlinear boundary value problems**. Differential Equations and Mathematical Physics, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1285 (1987), p.290-313

- [Mawhin-Willem] Mawhin, J., Willem, M., **Critical point theory and Hamiltonian systems**. Applied Math. Sciences, vol. 74, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Papageorgiou-Smyrlis] Papageorgiou, N.S., Smyrlis, G., **A multiplicity theorems for Neumann problems with asymmetric nonlinearity**. Annali di Matematica, 189(2010), p. 253-272.
- [Rabinowitz] Rabinowitz, P.H., **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. CBMS Reg. Conf. Series Math., 65, Amer. Math Soc., Providence, R.I., 1986.
- [Struwe] Struwe, M., **Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems**. Springer, 4^a edição, 2008.
- [Willem] Willem, M., **Minimax Theorems**, PNLDE 24, New York. Birkhäuser, 1996.