UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Subordinação Fractal para Operadores de Schrödinger Unidimensionais

Vanderléa Rodrigues Bazão
Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
Coorientador: Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho

São Carlos, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Subordinação Fractal para Operadores de Schrödinger Unidimensionais

Vanderléa Rodrigues Bazão
Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
Coorientador: Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutor em Matemática.

São Carlos, 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B362s

Bazão, Vanderléa Rodrigues
Subordinação fractal para operadores de Schrödinger unidimensionais / Vanderléa Rodrigues Bazão. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
92 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Física Matemática. 2. Teoria Espectral. 3. Operadores de Schrodinger. 4. Subordinação Fractal. 5. Dimensão Hausdorff. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Vanderléa Rodrigues Bazão, realizada em 16/02/2016:

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira
UFSCar

Silas Luiz de Carvalho

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Roberto de Almeida Prado

Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado
UNESP

Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
USP

Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti
USP

Aos meus pais Milton e Janete, dedico!

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a DEUS pelo dom da vida, por guiar meus passos e me abençoar com saúde e sabedoria para realizar este trabalho.

Aos meus pais Milton e Janete que são meu alicerce, pelo amor e dedicação em todos os momentos, sem os quais este sonho não seria possível.

Ao meu amor Gilson pelo carinho, compreensão e por estar sempre ao meu lado em pensamentos, sonhos e ideais.

Ao Prof. Dr. César Rogério de Oliveira pela orientação, paciência, apoio e incentivo no desenvolvimento deste trabalho, sendo sua dedicação profissional um exemplo a ser seguido.

Ao Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho por coorientar este trabalho, pela atenção e toda dedicação prestada, em especial pelos valiosos seminários realizados em todas as vezes que pode estar em São Carlos.

Aos professores membros da comissão examinadora pelos comentários, correções e toda atenção dedicados a este trabalho, em particular ao Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado pela correção minuciosa de minha tese e por todo seu apoio e incentivo em meu caminhar acadêmico.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar e também do Departamento de Matemática da FCT-UNESP pelos preciosos ensinamentos transmitidos.

A todos meus amigos que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis e mais alegres.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“ Mas a sabedoria onde se encontra?
Onde está o lugar da inteligência?
O homem ignora o caminho dela,
ninguém a encontra na terra dos vivos.
O abismo diz: ‘Ela não está em mim’.
‘Não está comigo’, diz o mar.
Não pode ser adquirida com ouro maciço,
nem pode ser comparada a peso de prata.
Não pode ser posta em balança com o ouro de Ofir,
nem com o ônix precioso ou a safira.
Não pode ser comparada nem ao ouro nem ao vidro,
ninguém a troca por vaso de ouro fino.
Quanto ao coral e ao cristal, nem se fala.
A sabedoria vale mais que as pérolas.
Não pode ser igualada ao topázio da Etiópia,
nem pode ser equiparada ao mais puro ouro.
De onde vem, pois, a sabedoria?
Qual o lugar da inteligência?”

Jó 28:12–20, Bíblia Sagrada Ave Maria.

Conteúdo

Resumo

Estudamos as chamadas teorias de subordinação fractal para operadores de Schrödinger unidimensionais. Primeiramente, realizamos um levantamento dos resultados sobre subordinação de Hausdorff para operadores de Schrödinger unidimensionais discretos a fim de analisar as diferenças e semelhanças destes resultados com respeito à medida de empacotamento. Usando-se métodos de subordinação de empacotamento, obtivemos propriedades de continuidade das medidas espectrais de tais operadores com respeito a medidas de empacotamento. Então, aplicamos tais métodos na verificação de que operadores sturmianos com número de rotação de densidade quase limitada possuem espectro puramente α-empacotamento contínuo. Ademais, verificamos que propriedades dimensionais fractais de operadores de Schrodinger discretos, gerados por potenciais sturmianos de densidade limitada e por uma classe de potenciais esparsos, são preservadas sob perturbações adequadas com decaimento polinomial, quando o espectro destes operadores perturbados possuir alguma componente singular contínua. Por fim, realizamos um estudo introdutório sobre subordinação fractal para operadores de Schrödinger unidimensionais contínuos definidos em intervalos limitados.

Abstract

We study fractal subordinacy theory for one-dimensional Schrödinger operators. First, we review results on Hausdorff subordinacy for discrete one-dimensional Schrödinger operators in order to analyze the differences and similarities of these results with respect to the packing setting. By using methods of packing subordinacy, we have obtained packing continuity properties of spectral measures of such operators. Then, we apply these methods to Sturmian operators with rotation number of quasibounded density to show that they have purely α-packing continuous spectrum. Moreover, we show that spectral fractal dimensional properties of discrete Schrödinger operators with Sturmian potentials of bounded density and with sparse potentials are preserved under suitable polynomial decaying perturbations, when the spectrum of these perturbed operators have some singular continuous component. Finally, we performed an introductory study of fractal subordinacy for continuous one-dimensional Schrödinger operators defined in bounded intervals.

Capítulo

1

Introdução

Propriedades dinâmicas e espectrais de operadores de Schrödinger têm sido objetos de estudo de vários pesquisadores, por se tratarem de assuntos importantes e relevantes para a área de Física Matemática. Dentro desses estudos destacam-se resultados sobre as dimensões de Hausdorff e empacotamento das medidas espectrais dos operadores de Schrödinger (em espaços de Hilbert separáveis) que são tão interessantes quanto difíceis de se obter. A questão torna-se ainda mais atraente, se nos lembrarmos que essas dimensões estão diretamente relacionadas com expoentes dinâmicos associados a tais operadores.

Neste trabalho, estamos interessados em estudar propriedades dimensionais fractais, ou seja, de empacotamento e Hausdorff, da medida espectral associada aos operadores de Schrödinger discretos H da forma

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n), \tag{1.1}$$

com potencial (real) $V = \{V(n)\}$, em $l^2(\mathbb{Z})$.

As medidas de empacotamento foram inicialmente propostas por Tricot [54], e possuem muitos aspectos duais com a medida de Hausdorff (ver [10] para uma ampla discussão e resultados precisos).

Guarneri e Schulz-Baldes [26] relacionaram a dimensão de empacotamento das medidas espectrais de operadores de Schrödinger às suas propriedades de transporte, mais precisamente, com os expoentes de crescimento superiores do momento, em contraste com a relação entre expoentes inferiores e dimensão de Hausdorff (veja (1.2) abaixo).

Esta análise é particularmente importante para os operadores com medidas espectrais cujas dimensões de Hausdorff e empacotamento diferem. Seja δ_j o vetor que assume valor 1 na posição $n = j$ e 0 nas demais posições n. Para $q > 0$, os expoentes dinâmicos superior $\beta^+(q)$ e inferior $\beta^-(q)$ são definidos como

$$\beta^+(q) := \limsup_{T\to\infty} \frac{\ln\langle X^q\rangle(T)}{q\ln T}, \qquad \beta^-(q) := \liminf_{T\to\infty} \frac{\ln\langle X^q\rangle(T)}{q\ln T},$$

sendo que $\langle X^q\rangle(T) := \frac{2}{T}\int_0^\infty \sum_n |n|^q e^{-2t/T}|\langle e^{-itH}\delta_0, \delta_n\rangle|^2 dt$ representa a média temporal do momento de ordem q do operador posição X, definido por $(X\psi)(n) = n\psi(n)$, associada ao estado inicial δ_0.

Como o operador de Schrödinger H da forma (1.1) (com domínio adequado) é um operador auto-adjunto sobre o espaço de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$, temos por [21] que $e^{-itH}\delta_0$ pertence ao domínio de $|X|^q(\cdot) := \sum_n |n|^q \langle\cdot, \delta_n\rangle\, \delta_n$ para quaisquer $t, q > 0$; e $\beta^\pm(q)$ são funções não-decrescentes de q, com $\beta^\pm(q) \in [0, 1]$ para todo $q > 0$. Dessa forma, estes expoentes dinâmicos estão bem definidos, sendo que a dinâmica é chamada de balística se $\beta^-(q) = 1$, para todo $q > 0$, e quase-balística se $\beta^+(q) = 1$, para todo $q > 0$.

Vamos considerar que μ é a medida espectral do operador de Schrödinger (1.1), denotamos suas dimensões superior de empacotamento e Hausdorff por $\dim_{\mathrm{P}}^+(\mu)$ e $\dim_{\mathrm{H}}^+(\mu)$, respectivamente (ver Definição 2.8); as relações mencionadas acima entre essas grandezas [26] são as desigualdades

$$\beta^-(q) \geq \dim_{\mathrm{H}}^+(\mu), \qquad \beta^+(q) \geq \dim_{\mathrm{P}}^+(\mu). \tag{1.2}$$

Deste modo, as taxas de crescimento da média temporal dos momentos dinâmicos estão diretamente relacionadas com propriedades dimensionais espectrais.

Uma motivação inicial para este trabalho é estender, para operadores na "reta inteira $\mathbb{Z}$", alguns resultados de subordinação de empacotamento contínua para os operadores unidimensionais definidos na "semi-reta $\mathbb{N}$" [7]. Estes resultados foram propostos tentando fornecer informações sobre as propriedades dimensionais de empacotamento de medidas espectrais, e ampliar, em certo sentido, os conceitos de subordinação de Hausdorff propostos por Jitomirskaya e Last em [31, 32]. Tais adaptações sobre subordinação de empacotamento para operadores de Schrödinger unidimensionais constituem os principais resultados de [2].

As teorias fractais de subordinação (Hausdorff e empacotamento) são generalizações da teoria de subordinação, essa última introduzida por Gilbert e Pearson em [22, 25] (ver [34] para adaptação de [25] para operadores discretos). Esse conjunto de resultados explora a relação entre o comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores

$$(H\psi)(n) = E\psi(n) \tag{1.3}$$

para $n \in \mathbb{Z}$ e $E \in \mathbb{R}$, e o tipo espectral do operador H. Mais especificamente, a decomposição de uma medida espectral em suas partes pontual pura, absolutamente contínua e singular contínua pode ser investigada e refinada através da existência de soluções subordinadas para (1.3).

Uma solução ψ de (1.3) é chamada subordinada em $+\infty$ se

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\|\psi\|_L}{\|\Phi\|_L} = 0$$

para qualquer solução Φ de (1.3) que é linearmente independente com ψ, sendo que $\|\cdot\|_L$ denota a norma truncada para $L \in \mathbb{R}$ ($[L]$ é a parte inteira de L), ou seja,

$$\|\psi\|_L = \left[\sum_{n=1}^{[L]} |\psi(n)|^2 + (L - [L])|\psi([L]+1)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Notamos que uma solução subordinada ψ em $-\infty$ é definida analogamente.

Agora, dado $\alpha \in (0, 1]$, uma solução ψ de (1.3) é chamada α-Hausdorff (α-empacotamento) subordinada em $+\infty$ se

$$\liminf(\limsup)_{L\to\infty} \frac{\|\psi\|_L}{\|\Phi\|_L^{\alpha/(2-\alpha)}} = 0$$

para qualquer solução Φ de (1.3) que é linearmente independente com ψ.

Fixe $E \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, denote por $u_{1,\varphi,E}$ e $u_{2,\varphi,E}$ as soluções de (1.3) que satisfazem as condições iniciais ortogonais entre si

$$\begin{cases} u_{1,\varphi,E}(0) = -\sin\varphi & u_{2,\varphi,E}(0) = \cos\varphi \\ u_{1,\varphi,E}(1) = \cos\varphi & u_{2,\varphi,E}(1) = \sin\varphi \end{cases}. \tag{1.4}$$

Recordamos que a medida μ está suportada em um conjunto S, se $\mu(\mathbb{R}\backslash S) = 0$. Em particular [31, 32], tem-se que a parte α-Hausdorff contínua da medida espectral está suportada no conjunto de energias E em que (1.3) não possui solução α-Hausdorff subordinada em $-\infty$ ou em $+\infty$, e sua parte α-Hausdorff singular está suportada no conjunto de energias E em que $u_{1,\varphi,E}$ é uma solução α-Hausdorff subordinada em ambos $\pm\infty$.

Os resultados sobre subordinação de Hausdorff foram introduzidos inicialmente por Jitomirskaya e Last em [31, 32]. Devido à certa dualidade existente entre as medidas de Hausdorff e empacotamento, existe o interesse em se ampliar, em determinado sentido, esta teoria de subordinação de Hausdorff para as medidas fractais de empacotamento.

Neste sentido, para os operadores de Schrödinger discretos H da forma (1.1) foram estudados recentemente em [2, 33], resultados que caracterizam a medida espectral de H como α-empacotamento contínua, através da ausência de soluções α-empacotamento subordinada em $-\infty$ ou em $+\infty$, sendo denominada em [33] como uma medida α-espectral contínua. Entretanto, este tipo de caracterização da medida espectral para a parte α-empacotamento singular, ainda é uma questão em aberto.

Há uma maneira bem conhecida para demonstrar a não-existência de soluções α-Hausdorff subordinadas para uma energia fixa E (ver [12, 14, 32]). A existência de soluções limitadas polinomialmente da forma

$$C_1 L^{\gamma_1} \leq \|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2}, \tag{1.5}$$

para constantes positivas $C_1(E), C_2(E), \gamma_1, \gamma_2$ e toda solução u, com condição inicial normalizada (CIN, i.e., $|u(0)|^2 + |u(1)|^2 = 1$), da equação de autovalores (1.3) implica que não existe solução α-Hausdorff subordinada em $+\infty$ (similarmente em $-\infty$), com $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$.

Consequentemente, mostra-se que o espectro de H é puramente α-Hausdorff contínuo.

Em contrapartida, o seguinte resultado é uma ferramenta natural para demonstrar a não-existência de solução α-empacotamento subordinada para uma energia fixa E, sendo este o primeiro resultado original do desenvolvimento desta tese.

Teorema 1.1. *Sejam $\sigma(H)$ o espectro de H e μ_ϕ a medida espectral para o par (H, ϕ), com $\phi \in l^2(\mathbb{Z})$. Suponha que existam constantes positivas τ_1, τ_2 e uma sequência $L_j \to \infty$ de modo que, para cada $E \in \sigma(H)$, toda solução u com CIN de (1.3) satisfaz a estimativa*

$$C_1 L_j^{\tau_1} \leq \|u\|_{L_j} \leq C_2 L_j^{\tau_2}, \tag{1.6}$$

com $C_1 = C_1(E), C_2 = C_2(E)$ constantes positivas. Então, H possui espectro puramente α-empacotamento contínuo, com $\alpha = \frac{2\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$, ou seja, para quaisquer $\phi \in l^2$, μ_ϕ é puramente α-empacotamento contínua.

Observação 1.2. De modo similar à Observação 2 de [14], no caso de α-empacotamento existe uma versão do Teorema 1.1 para a semi-reta à esquerda obtida de modo análogo ao caso acima. Além disso, se conseguimos estabelecer o comportamento das soluções polinomialmente limitadas para a restrição do operador à semi-reta à direita, então a resultante α-empacotamento continuidade é independente do potencial na semi-reta à esquerda. Neste sentido, a semi-reta "mais contínua" domina e limita a dimensionalidade do problema na reta inteira.

Vamos aplicar o Teorema 1.1 para a família $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$ de operadores (1.1) com potenciais sturmianos (quase-periódicos)

$$V(n) = V_{\lambda,\theta,\rho}(n) = \lambda\chi_{[1-\theta,1)}(n\theta + \rho \bmod 1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

com constante $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, número de rotação irracional $\theta \in [0,1)$ e fase $\rho \in [0,1)$.

Recordemos que qualquer número irracional $\theta \in [0,1)$ possui uma expansão infinita em frações continuadas

$$\theta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} = [0; a_1, a_2, \ldots] \tag{1.7}$$

com $a_n \in \mathbb{N}$ unicamente determinados.

Definição 1.3. Sejam $\theta \in [0,1)$ um número irracional e (1.7) sua expansão em frações continuadas. Então, θ é dito ser um número de densidade limitada (quase limitada) se

$$\limsup(\liminf)_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i < \infty.$$

Um resultado bem conhecido [12, 14, 32] é que a família de operadores $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$ da forma (1.1) com $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, número de rotação irracional de densidade limitada $\theta \in [0,1)$ e fase $\rho \in [0,1)$, possui espectro puramente α_H-Hausdorff contínuo, para $\alpha_H = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$, com $\gamma_1 = \gamma_1(\theta,\lambda), \gamma_2 = \gamma_2(\theta,\lambda) > 0$ satisfazendo a condição (1.5) para toda solução com CIN u da equação de autovalores $H_{\lambda,\theta,\rho}u = Eu$.

Temos, pelo Teorema 1.1, que para obter resultados sobre α-empacotamento continuidade da medida espectral associada aos operadores $H_{\lambda,\theta,\rho}$, a relação (1.5) pode ser substituída pela relação (1.6) para alguma subsequência $L_j \to \infty$. Assim, em nosso trabalho introduzimos a nomenclatura de "número de rotação de densidade quase limitada" (Definição 1.3), a fim de enunciar o seguinte resultado para a versão de empacotamento, aplicada à família $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$ de operadores sturmianos.

Teorema 1.4. *Seja $\theta \in (0,1)$ um número irracional de densidade quase limitada. Então, para todo $\lambda \neq 0$, existe $\alpha = \alpha(\lambda,\theta) > 0$ de forma que para todo $\phi \in l^2(\mathbb{Z})$, a medida espectral para o par $(H_{\lambda,\theta,\rho}, \phi)$ é puramente α-empacotamento contínua.*

Como um caso particular do Teorema 1.4, notamos que podemos obter um resultado semelhante para números irracionais de densidade limitada, sendo observado que, em princípio, o valor dimensional α_P-empacotamento contínuo pode ser maior ou igual que o valor dimensional α_H-Hausdorff contínuo (ver detalhes na Seção 4.2).

Nesta tese também obtivemos resultados sobre a estabilidade da dimensão de Hausdorff e empacotamento para certos operadores de Schrödinger H da forma (1.1), quando realizamos perturbações adequadas $P = \{P(n)\}$ com decaimento polinomial, ou seja, quando o potencial V é substituído por $V + P$.

Particularmente, estaremos interessados na família $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$ de operadores sturmianos, sendo que a demonstração das propriedades de α_H-Hausdorff (α_P-empacotamento) continuidade da medida espectral depende muito da estrutura particular dos potenciais sturmianos (quase-periódicos). Desse modo, uma questão interessante a ser estudada é o fato desta propriedade dimensional ser preservada após certas perturbações do potencial.

O seguinte resultado analisa estabilidade para perturbações adequadas, ou seja, uma preservação da α_H-Hausdorff (α_P-empacotamento) continuidade das medidas espectrais, que se aplica quando o operador sturmiano perturbado possuir uma componente singular contínua.

Teorema 1.5. *Sejam $\theta \in (0,1)$ um número irracional de densidade limitada e γ_1, γ_2 como em* (1.5)*. Então, para todos $\rho \in [0,1)$ e $\lambda \neq 0$, qualquer componente singular contínua da medida espectral associada ao operador*

$$(H^P_{\lambda,\theta,\rho}\psi)(n) := (H_{\lambda,\theta,\rho}\psi)(n) + P(n)\psi(n), \quad \psi \in l^2(\mathbb{Z}), \tag{1.8}$$

com a perturbação satisfazendo $|P(n)| \leq C(1+|n|)^{-p}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, para algum $C > 0$ e $p > 3\gamma_2 - \gamma_1$, é também puramente α_H-Hausdorff (α_P-empacotamento) contínua.

Um exemplo particular e bastante conhecido de operador sturmiano é o operador de Fibonacci, que corresponde ao número de rotação $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (a razão áurea). Em [13] observa-se que, neste caso, com $\lambda > 0$,

$$\gamma_1 < \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{(2+2\lambda)^2}\right)}{16\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 > 1 + \frac{\ln[(5+2\lambda)^{1/2}(3+\lambda)c_\lambda]}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)},$$

sendo c_λ a maior raiz em módulo do polinômio $x^3 - (2+\lambda)x - 1$. Como uma ilustração, considere $\lambda = 1$, então de acordo com o Teorema 1.5, temos a α_H-Hausdorff

(α_P-empacotamento) estabilidade da componente singular contínua (quando existir), sob tais perturbações, se $p > 21,7$.

No entanto, uma vez que o espectro de um operador sturmiano é puramente singular contínuo de medida de Lebesgue nula, considerando-se uma perturbação de posto um $a\delta_1$ com intensidade $a \in \mathbb{R}$ resulta, do critério de Simon-Wolff [51], que o operador perturbado $H_{\lambda,\theta,\rho} + a\delta_1$ é pontual puro para todo a , enquanto que para as demais tipos de perturbações não se tem maiores informações sobre o tipo espectral do operador perturbado, sendo pontual puro ou se possui alguma componente singular contínua. Assim, o Teorema 1.5 é utilizado para determinar preservação da α_H-Hausdorff (α_P-empacotamento) continuidade das medidas espectrais, apenas quando o operador perturbado possuir uma componente singular contínua.

Destacamos que tal resultado obtido no Teorema 1.5 apresenta um contraste com os operadores que possuem a propriedade SULE (ver [17]), em particular hamiltonianas de modelos de Anderson, para as quais perturbações de posto um sempre resultam em dimensão de Hausdorff nula (pontual ou singular contínua).

A demonstração do Teorema 1.5 é uma consequência de um resultado mais geral que obtivemos, o qual enunciamos abaixo como o Teorema 1.6. Em particular, estamos interessados no conjunto de energias

$$S(H) := \left\{ E \mid \exists\, \varphi \text{ t.q. } u_{1,\varphi,E} \text{ é solução subordinada de (1.3) e } u_{1,\varphi,E} \notin l^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

Temos em [36] que, para qualquer φ, a parte singular contínua da medida espectral é suportada em $S(H)$. No caso de problemas na reta toda, o conjunto $S(H)$ acima deve ser substituído por (ver [22])

$$\left\{ E \mid \exists \text{ solução de (1.3) subordinada em ambos } \pm\infty \text{ e não pertence a } l^2(\mathbb{Z}) \right\},$$

sendo a parte singular contínua da medida espectral suportada neste conjunto.

Teorema 1.6. *Sejam $E \in S(H)$ e $u_{1,\varphi,E}$, $u_{2,\varphi,E}$ soluções de* (1.3) *satisfazendo a condição* (1.4). *Suponha que existam constantes positivas $\gamma_1, \gamma_2, C_1(E), C_2(E)$ de modo que* *toda solução de* (1.3) *com CIN obedeça a estimativa* (1.5) *para* $L > 0$ *suficientemente grande. Suponha também que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *para algum* $p > 3\gamma_2 - \gamma_1$, *e para alguma constante positiva* C_3 *tem-se*

$$|P(n)| \leq C_3(1+n)^{-p}. \tag{1.9}$$

Então, $E \in S(H+P)$, *e para todo* $\kappa \in [0,1]$,

$$\liminf(\limsup)_{L\to\infty} \frac{\|u_{1,\varphi,E}\|_L}{\|u_{2,\varphi,E}\|_L^\kappa} = \liminf(\limsup)_{L\to\infty} \frac{\|v_{1,\tilde{\varphi},E}\|_L}{\|v_{2,\tilde{\varphi},E}\|_L^\kappa}, \tag{1.10}$$

sendo $v_{1,\tilde{\varphi},E}$ *e* $v_{2,\tilde{\varphi},E}$ *soluções de* (1.3) *com o operador* $H+P$, *as quais satisfazem as condições* (1.4) *para alguma fase* $\tilde{\varphi}$.

Observação 1.7. A relação (1.10) acima estabelece que o comportamento assintótico das autofunções de determinado operador permanece estável sobre as perturbações P dada por (1.9). Ressaltamos que a condição (1.5) é tecnicamente essencial para se obter o resultado desejado no Teorema 1.6, sendo que esta estimativa é válida para os operadores sturmianos com número de rotação de densidade limitada. Notamos que a condição (1.5) também se verifica para uma classe de operadores esparsos [31, 53], sendo possível obter resultados de estabilidade nas dimensões de Hausdorff e empacotamento desses operadores sob determinadas perturbações (ver Teorema 5.1).

De acordo com as hipóteses do Teorema 1.6, temos uma espécie de estabilidade entre os conjuntos $S(H)$ e $S(H+P)$; notamos que como a perturbação P é compacta (sendo $p > 0$), o espectro essencial de qualquer H é preservado sob tais perturbações, de modo que no caso da componente singular contínua de H coincidir com o seu espectro essencial, então a componente singular contínua dos operadores correspondentes às perturbações $S(H+P)$ estará contida em $S(H)$ (em particular, qualquer componente α-Hausdorff (α-empacotamento) contínua).

Voltamos a enfatizar a sutileza que a medida espectral de $(H+P)$ do conjunto $S(H+P)$ pode ser zero, e assim o Teorema 1.6 não produz uma informação relevante sobre a dimensão Hausdorff (empacotamento) espectral. Entretanto, para o modelo sturmiano com número de rotação de densidade limitada, temos como consequência do Teorema 1.6

o seguinte

Corolário 1.8. *Seja $H_{\lambda,\theta,\rho}$ operadores sturmianos com número irracional de densidade limitada. Então, para todos $\rho \in [0,1)$ e $\lambda \neq 0$, nenhuma perturbação da forma* (1.9) *produz autovalores no espectro $\sigma(H_{\lambda,\theta,\rho})$.*

Deste modo, no caso do operador perturbado $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$ não possuir componente singular contínua, é possível obter alguma informação sobre o tipo espectral deste operador pelo Corolário 1.8, no sentido que, pela definição de $S(H)$, não é possível ter algum autovalor de $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$ pertencente ao espectro do operador sem a perturbação (lembremos que o espectro pontual $\sigma_{\mathrm{p}}(H_{\lambda,\theta,\rho}) = \emptyset$); no entanto, pela preservação do espectro essencial, $\sigma(H_{\lambda,\theta,\rho})$ é dado pelos pontos de acumulação dos possíveis valores próprios isolados de multiplicidade finita de $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$.

Com o objetivo de demonstrar os resultados centrais da primeira parte deste trabalho (a segunda parte seria apenas o sexto capítulo), que são os Teoremas 1.1, 1.4, 1.5 e 1.6, organizamos os primeiros capítulos desta tese da seguinte maneira.

No Capítulo 2, discutimos de forma resumida alguns conceitos relacionados às medidas e dimensões de Hausdorff e de empacotamento, α-derivadas superior e inferior de uma medida, transformada de Borel de uma medida e as m-funções de Weyl-Titchmarsh.

No Capítulo 3, apresentamos versões, para as dimensões de empacotamento, de alguns resultados de subordinação de Hausdorff propostos por Jitomirskaya-Last [31, 32]; primeiramente, consideramos o caso do operador H da forma (1.1) restrito à semi-reta positiva, para depois estendermos estes conceitos de subordinação de empacotamento para os operadores atuando na reta toda $l^2(\mathbb{Z})$. Consequentemente, obtemos a demonstração do Teorema 1.1, o qual caracteriza o espectro α-empacotamento contínuo de H através da ausência de solução α-empacotamento subordinada em $+\infty$ ou em $-\infty$.

No Capítulo 4, utilizamos os resultados desenvolvidos no Capítulo 3 para estudar propriedades dimensionais de empacotamento para a família de operadores $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$, do tipo (1.1), gerados por potenciais sturmianos com número de rotação de densidade quase limitada. Verificaremos que as autofunções associadas a estes operadores são estimadas da forma (1.6), desse modo como uma aplicação do Teorema 1.1, obtemos a demonstração do Teorema 1.4.

O Capítulo 5 consiste em analisar que propriedades dimensionais fractais de operadores (1.1) gerados por potenciais sturmianos de densidade limitada e para uma classe de potenciais esparsos são preservadas sob perturbações com adequado decaimento polinomial, quando o espectro desses operadores perturbados possuir alguma componente singular contínua. Notamos que em [1] foram analisadas tais propriedades relacionadas somente com a dimensão de Hausdorff, sendo que nesta tese estudamos estes resultados para ambas as dimensões de Hausdorff e empacotamento. O principal objetivo desse capítulo é demonstrar o Teorema 1.5 e suas aplicações, ou seja, os Teoremas 1.6 e 5.1.

No Capítulo 6 vamos realizar um estudo introdutório sobre subordinação fractal em intervalos; esse capitulo pode ser considerado como uma parte secundária desta tese, visto que ainda não temos uma demonstração completa do resultado que esperamos. Diferentemente do modelo estudado nos primeiros capítulos, consideramos o modelo de Schrödinger contínuo da forma

$$(Hu)(x) = -(\Delta u)(x) + (Vu)(x) = -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x), \tag{1.11}$$

atuando em $L^2(I)$, sendo I um intervalo limitado de $\mathbb{R}$, e $V(x)$ é o potencial dado por uma função real.

Nos casos em que $I = \mathbb{R}$ ou $I = [0, \infty)$, temos conhecimento de resultados sobre subordinação de Hausdorff e empacotamento [31, 32, 6], sendo estes resultados generalizações da teoria de subordinação de Gilbert e Pearson [22, 25]. Notamos que estes mesmos autores desenvolveram em [24, 46] versões semelhantes desta teoria de subordinação para operadores da forma (1.11) atuando em intervalos I limitados de $\mathbb{R}$. Desta forma, uma questão natural, que foi então aqui analisada, é a generalização destes resultados para as prováveis teorias de subordinação de Hausdorff e empacotamento para operadores contínuo da forma (1.11) em intervalos limitados.

O maior desafio para estudar este tipo de problema consiste em encontrar exemplos de potenciais $V(x)$ de modo que o respectivo operador de Schrödinger da forma (1.11) possua espectro puramente singular contínuo com alguma dimensão Hausdorff ou empacotamento não-trivial (i.e., que seja tratável do ponto de vista técnico). Um primeiro passo para obter estes exemplos foi trabalhar no artigo [45], que indica de forma muito resumida um operador deste tipo em um intervalo limitado, o qual possui espectro puramente singular contínuo. Mas ainda não se tem qualquer informação sobre suas propriedades espectrais com relação às dimensões fractais, sendo a obtenção destas informações nosso maior interesse no estudo deste modelo.

Ainda não foi possível obter precisamente um exemplo de tal modelo, em que temos algum controle de propriedades fractais de seus espectros. Entretanto, na Seção 6.3 analisamos explicitamente propriedades de um determinado potencial $V(x)$ definido em um intervalo limitado, o qual apresenta-se como um forte candidato em que seja possível obter alguma informação sobre sua dimensão fractal, devido a certa semelhança deste com os modelos analisados em [37, 45].

O último capítulo resume este trabalho, apresenta considerações finais que incluem alguns pontos a serem pesquisados num futuro próximo.

Capítulo

2

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos resumidamente alguns conceitos e resultados preliminares que serão importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes, que possuem o objetivo de demonstrar os Teoremas 1.1, 1.4, 1.5 e 1.6, enunciados na Introdução, além da discussão de propriedades fractais do espectro de (alguns) operadores de Sturm-Liouville em intervalos limitados no último capítulo. Este capítulo tem como objetivo fixar algumas notações e definições como referências para a apresentação do trabalho desenvolvido. Indicamos para o leitor mais interessado em conceitos básicos da teoria espectral de operadores de Schrödinger, relacionados com a teoria de subordinação e propriedades Hausdorff dimensionais, a leitura dos Apêndices da tese de doutorado [8] e referências lá citadas.

2.1 Medidas de Hausdorff e de empacotamento

Nesta seção, recordamos algumas definições e conceitos básicos sobre medidas de Hausdorff e de empacotamento, e indicamos as referências gerais [7, 20, 38, 41, 47].

Definição 2.1. Para qualquer subconjunto S de $\mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$, a medida exterior de Hausdorff α-dimensional, h^α, é dada por

$$h^\alpha(S) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf_{\delta\text{-coberturas}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^\alpha \right),$$

sendo a δ-cobertura uma cobertura de S por uma coleção enumerável de intervalos $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$, $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, com $|I_i| < \delta$ ($|I|$ denota o comprimento do intervalo I). A restrição de h^α

aos borelianos é chamada de medida de Hausdorff α-dimensional.

Observação 2.2. **(i)** O limite acima existe para qualquer S $\subset \mathbb{R}$ (podendo ser ∞).

(ii) h^α pode ser definida também para $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$. Para $\alpha < 0$, $h^\alpha(S) = \infty$ para qualquer $S \neq \emptyset$, e para $\alpha > 1$, $h^\alpha(\mathbb{R}) = 0$. Assim, não existe interesse maior em tais valores de α.

(iii) Seja $\alpha < t$ $(\alpha, t \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0)$. Suponha que $S \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_i$, com $|I_i| < \delta$. Temos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^{\alpha-t}|I_i|^t > \delta^{\alpha-t} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^t \ .$$

Assim, se $h^t(S) > 0 \Rightarrow h^\alpha(S) \geq \lim_{\delta \to 0} \delta^{\alpha-t}.h^t(S) = \infty \Rightarrow h^\alpha(S) = \infty$. De forma análoga, mostra-se que $h^\alpha(S) < \infty \Rightarrow h^t(S) = 0$. Portanto, para qualquer $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$, existe um único valor $\dim_H S \in [0,1]$, chamado de dimensão de Hausdorff de S, em que

$$h^\alpha(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \dim_H S \\ \infty & \text{se } \alpha < \dim_H S \end{cases} .$$

$h^{\dim_H S}(S)$ pode ser zero, finito ou infinito.

Agora, definamos a medida de empacotamento, inicialmente proposta por Tricot [54]; notaremos que esta medida possui aspectos duais à medida de Hausdorff.

Um δ-empacotamento de um conjunto arbitrário $S \subset \mathbb{R}$ é uma coleção disjunta contável $(B(x_k, r_k))_{k \in \mathbb{N}}$ de intervalos fechados centrados em $x_k \in S$, com raio $r_k \leq \delta/2$. Fixado $\alpha \in [0,1]$, a (α, δ)-pré-medida $P_\delta^\alpha(S)$ é definida como

$$P_\delta^\alpha(S) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (2r_k)^\alpha : (B(x_k, r_k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ é um } \delta\text{-empacotamento de } S \right\},$$

com o supremo tomado sobre todos os δ-empacotamentos de S.

Definição 2.3. Fixado $\alpha \in [0,1]$, a medida de α-empacotamento $P^\alpha(S)$ é construída por um procedimento de dois passos: Primeiro, considera-se o limite

$$\underline{P}^{\alpha}(S) = \lim_{\delta \to 0} P_{\delta}^{\alpha}(S)$$

e depois define-se

$$P^{\alpha}(S) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \underline{P}^{\alpha}(S_k) : S \subset \cup_{k=1}^{\infty} S_k,\ S_k \ \text{ são borelianos}\right\}.$$

Segue, desta definição, que $P^{\alpha}(S)$ é uma medida exterior em $\mathbb{R}$. Como na Observação 2.2, para $\alpha < 0$, $P^{\alpha}(S) = \infty$ para qualquer $S \neq \emptyset$, e para $\alpha > 1$, $P^{\alpha}(\mathbb{R}) = 0$. Logo, não existe interesse maior em tais valores de α.

Analogamente à dimensão de Hausdorff, define-se a dimensão de empacotamento do conjunto S, denotado por $\dim_{\mathrm{P}} S$, como o ínfimo de todos os α com $P^{\alpha}(S) = 0$, o qual coincide com o supremo de todos os α com $P^{\alpha}(S) = \infty$. Sabemos (ver [20]) que as dimensões de Hausdorff e empacotamento são relacionadas pela desigualdade

$$\dim_{\mathrm{H}} S \leq \dim_{\mathrm{P}} S.$$

Definição 2.4. Sejam μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}$, e $\alpha \in [0, 1]$.

(i) μ é chamada α-Hausdorff (α-empacotamento) contínua se $\mu(S) = 0$ para todo conjunto de Borel S com $h^{\alpha}(S) = 0$ (resp. $P^{\alpha}(S) = 0$).

(ii) μ é chamada α-Hausdorff (α-empacotamento) singular se μ está suportada em um conjunto de Borel S, isto é $\mu(\mathbb{R} \backslash S) = 0$, com $h^{\alpha}(S) = 0$ (resp. $P^{\alpha}(S) = 0$).

Introduzamos agora decomposições de uma medida boreliana com relação às dimensões de Hausdorff e de empacotamento.

Definição 2.5. Uma medida de Borel μ em $\mathbb{R}$ possui dimensão de Hausdorff (empacotamento) exata $\alpha = \dim_{\mathrm{H}}(\mu) \in (0, 1)$ (resp. $\alpha = \dim_{\mathrm{P}}(\mu) \in (0, 1)$) se:

(i) Para todo conjunto S com $\dim_{\mathrm{H}} S < \alpha$ (resp. $\dim_{\mathrm{P}} S < \alpha$), tem-se $\mu(S) = 0$.

(ii) Existe um conjunto de Borel S_0 com dimensão de Hausdorff (empacotamento) α no qual μ está suportada.

Definição 2.6. Uma medida de Borel μ em $\mathbb{R}$ é chamada

(i) 0-Hausdorff (empacotamento) dimensional, se está suportada em um conjunto S com $\dim_{\mathrm{H}} S = 0$ (resp. $\dim_{\mathrm{P}} S = 0$).

(ii) 1-Hausdorff (empacotamento) dimensional, se $\mu(S) = 0$ para todo conjunto S com $\dim_{\mathrm{H}} S < 1$ (resp. $\dim_{\mathrm{P}} S < 1$).

Observação 2.7. De acordo com as Definições 2.4 e 2.5, notamos que uma medida μ de Borel em $\mathbb{R}$ possui dimensão de Hausdorff (empacotamento) exata α se para todo $\varepsilon > 0$, μ é $(\alpha - \varepsilon)$-Hausdorff (resp. empacotamento) contínua e $(\alpha + \varepsilon)$-Hausdorff (resp. empacotamento) singular.

Definição 2.8. Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}$. A dimensão de Hausdorff (empacotamento) superior de μ é definida, respectivamente, por

$$\dim_{\mathrm{H}}^{+}(\mu) = \inf\{\dim_{\mathrm{H}} S \ : \ S \text{ é um boreliano e } \mu(\mathbb{R}\backslash S) = 0\},$$

$$\dim_{\mathrm{P}}^{+}(\mu) = \inf\{\dim_{\mathrm{P}} S \ : \ S \text{ é um boreliano e } \mu(\mathbb{R}\backslash S) = 0\}.$$

As dimensões de Hausdorff e empacotamento inferiores de μ são definidas, respectivamente, por

$$\dim_{\mathrm{H}}^{-}(\mu) = \sup\{\alpha : \mu(S) = 0 \text{ se } \dim_{\mathrm{H}} S < \alpha\},$$

e

$$\dim_{\mathrm{P}}^{-}(\mu) = \sup\{\alpha : \mu(S) = 0 \text{ se } \dim_{\mathrm{P}} S < \alpha\}.$$

Observação 2.9. Notemos que as dimensões de Hausdorff (empacotamento) superior e inferior de uma medida de Borel μ em $\mathbb{R}$ possuem as seguintes relações com as Definições 2.4 e 2.5:

1. Para todo $\varepsilon > 0$, μ é $(\alpha - \varepsilon)$-Hausdorff (empacotamento) contínua se, e somente se, $\dim_{\mathrm{H}}^{-}(\mu) \geq \alpha$ (resp. $\dim_{\mathrm{P}}^{-}(\mu) \geq \alpha$).

2. Para todo $\varepsilon > 0$, μ é $(\alpha+\varepsilon)$-Hausdorff (empacotamento) singular se, e somente se, $\dim_{\mathrm{H}}^{+}(\mu) \leq \alpha$ (resp. $\dim_{\mathrm{P}}^{+}(\mu) \leq \alpha$).

3. A medida μ possui dimensão de Hausdorff (empacotamento) α exata se, e somente se, $\dim_{\mathrm{H}}(\mu) = \dim_{\mathrm{H}}^{-}(\mu) = \dim_{\mathrm{H}}^{+}(\mu)$ (resp. $\dim_{\mathrm{P}}(\mu) = \dim_{\mathrm{P}}^{-}(\mu) = \dim_{\mathrm{P}}^{+}(\mu)$).

2.2 α-Derivadas superior e inferior

Nesta seção, introduzimos os conceitos de α-derivadas superior e inferior de uma medida boreliana finita. Vamos recordar que estudar o comportamento da α-derivada superior (inferior) de uma medida permite caracterizar os conjuntos em que as partes α-Hausdorff (resp. empacotamento) contínua e α-Hausdorff (resp. empacotamento) singular desta medida estão concentradas. Veja as referências [7, 20, 31, 38, 41, 47].

Definição 2.10. Sejam μ uma medida boreliana finita em $\mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$. A α-derivada superior de μ em $E \in \mathbb{R}$ é dada por

$$(\overline{D}^{\alpha}\mu)(E) := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu((E-\varepsilon, E+\varepsilon))}{(2\varepsilon)^{\alpha}},$$

e a α-derivada inferior de μ em $E \in \mathbb{R}$ por

$$(\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) := \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu((E-\varepsilon, E+\varepsilon))}{(2\varepsilon)^{\alpha}}.$$

O resultado seguinte, motivado por [48] e o Teorema 2 em [26], refere-se às decomposições da medida μ com respeito as medidas de Hausdorff e de empacotamento.

Teorema 2.11. *Suponha que $\alpha \in [0,1]$ e que μ seja uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$. Sejam*

$$T_{\infty}^{\alpha} = \{E \in \mathbb{R} : (\overline{D}^{\alpha}\mu)(E) = \infty\},$$

$$U_{\infty}^{\alpha} = \{E \in \mathbb{R} : (\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) = \infty\}.$$

Então, T_{∞}^{α} e U_{∞}^{α} são conjuntos de Borel com

1. $h^{\alpha}(T_{\infty}^{\alpha}) = 0$.

2. $P^\alpha(U_\infty^\alpha) = 0$.

3. $\mu(S \cap (\mathbb{R}\backslash T_\infty^\alpha)) = 0$, *para qualquer conjunto* S *com* $h^\alpha(S) = 0$.

4. $\mu(S \cap (\mathbb{R}\backslash U_\infty^\alpha)) = 0$, *para qualquer conjunto* S *com* $P^\alpha(S) = 0$.

Demonstração. Os itens (1) e (3) são bem conhecidos e demonstrados no Capítulo 3 de [48], e uma demonstração para os itens (2) e (4) pode ser encontrada em [7]. □

Observação 2.12. O teorema acima estabelece que é suficiente conhecer o comportamento de $(\overline{D}^\alpha\mu)$ e $(\underline{D}^\alpha\mu)$, para $\alpha \in [0,1]$ e E μ-q.t.p., para determinar a decomposição de μ (no sentido da Definição 2.4) com respeito a medidas de Hausdorff e empacotamento, respectivamente.

Consideremos a decomposição de μ de acordo com os conjuntos T_∞^α e U_∞^α, isto é, como

$$\mu = \chi_{T_\infty^\alpha}\mu + (1 - \chi_{T_\infty^\alpha})\mu \quad \text{e} \quad \mu = \chi_{U_\infty^\alpha}\mu + (1 - \chi_{U_\infty^\alpha})\mu,$$

respectivamente, em que χ_A denota a função característica de um conjunto A. Deste modo, o Teorema 2.11 implica que

Corolário 2.13. *Sejam* μ *uma medida de Borel finita em* $\mathbb{R}$. *Então, para todo* $\alpha \in [0,1]$, μ *possui a decomposição*

$$\mu = \mu_{\alpha Hs} + \mu_{\alpha Hc}, \qquad \mu = \mu_{\alpha Ps} + \mu_{\alpha Pc}$$

com respeito aos conjuntos T_∞^α *e* U_∞^α, *respectivamente, sendo que:*

1. $\mu_{\alpha Hs} := \mu(T_\infty^\alpha \cap \cdot)$ *é* α*-Hausdorff singular, e* $\mu_{\alpha Hc} := \mu((\mathbb{R}\backslash T_\infty^\alpha) \cap \cdot)$ *é* α*-Hausdorff contínua.*

2. $\mu_{\alpha Ps} := \mu(U_\infty^\alpha \cap \cdot)$ *é* α*-empacotamento singular, e* $\mu_{\alpha Pc} := \mu((\mathbb{R}\backslash U_\infty^\alpha) \cap \cdot)$ *é* α*-empacotamento contínua.*

Observação 2.14. Como $U_\infty^\alpha \subset T_\infty^\alpha$, segue que se μ for α-Hausdorff contínua, então μ é α-empacotamento contínua. Analogamente, se μ for α-empacotamento singular, então μ é α-Hausdorff singular.

2.3 Transformada de Borel

Nesta seção, estudaremos a relação entre a transformada de Borel de uma medida finita e os comportamentos das α-derivadas superior e inferior desta medida, que por sua vez estão relacionadas com a decomposição α-Hausdorff e empacotamento, respectivamente, da medida em estudo.

Definição 2.15. Seja μ uma medida finita em $\mathbb{R}$. A cada número complexo $z = E + i\varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, define-se a transformada de Borel de μ em z por

$$F_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t - z}.$$

Fixe $0 < \gamma \leq 1$ e $E \in \mathbb{R}$. Sejam

$$(\overline{Q}^\gamma \mu)(E) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\gamma \mathrm{Im} F_\mu(E + i\varepsilon),$$

$$(\overline{R}^\gamma \mu)(E) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\gamma |F_\mu(E + i\varepsilon)|.$$

Devido ao Teorema 3.1 em [17], essas grandezas definidas acima possuem a seguinte relação com a α-derivada superior, $\alpha \in [0, 1)$:

$$(\overline{D}^\alpha \mu)(E) \sim (\overline{Q}^{(1-\alpha)} \mu)(E) \sim (\overline{R}^{(1-\alpha)} \mu)(E), \tag{2.1}$$

no sentido que são ou todos infinitos, ou todos nulos, ou todos pertencentes a $(0, \infty)$.

Consequentemente, estudar o comportamento de $(\overline{Q}^\gamma \mu)(E)$ ou $(\overline{R}^\gamma \mu)(E)$ nos permite a determinação da dimensão de Hausdorff de determinados conjuntos. Deste modo, analisemos uma implicação semelhante desta com respeito a dimensão de empacotamento, em que se definem

$$(\underline{Q}^\gamma \mu)(E) := \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\gamma \mathrm{Im} F_\mu(E + i\varepsilon)$$

$$(\underline{R}^\gamma \mu)(E) := \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\gamma |F_\mu(x + i\varepsilon)|,$$

sendo possível obter o seguinte resultado relacionado com a α-derivada inferior.

Teorema 2.16. *Sejam μ uma medida finita em $\mathbb{R}$, $E \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0,1)$. Então*

$$(\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) = \infty \implies (\underline{R}^{(1-\alpha)}\mu)(E) = \infty.$$

Demonstração. Para concluir este teorema é suficiente demonstrar o seguinte

$$(\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) \leq 2^{1-\alpha}(\underline{Q}^{(1-\alpha)}\mu)(E) \leq 2^{1-\alpha}(\underline{R}^{(1-\alpha)}\mu)(E).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} F_{\mu}(E+i\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t-(E+i\varepsilon)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-E)d\mu(t)}{(t-E)^2+\varepsilon^2} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon\ d\mu(t)}{(t-E)^2+\varepsilon^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

e

$$\begin{aligned} \mu((E-\varepsilon,E+\varepsilon)) &= \int_{E-\varepsilon}^{E+\varepsilon} \frac{(t-E)^2+\varepsilon^2}{(t-E)^2+\varepsilon^2} d\mu(t) \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon^2}{(t-E)^2+\varepsilon^2} d\mu(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\mu((E-\varepsilon,E+\varepsilon))}{(2\varepsilon)^{\alpha}} &\leq 2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon\ d\mu(t)}{(t-E)^2+\varepsilon^2} \\ &= 2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\mathrm{Im}(F_{\mu}(E+i\varepsilon)) \\ &\leq 2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}|F_{\mu}(E+i\varepsilon)|. \end{aligned}$$

Portanto, segue pela definição que

$$(\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) \leq 2^{1-\alpha}(\underline{Q}^{(1-\alpha)}\mu)(E) \leq 2^{1-\alpha}(\underline{R}^{(1-\alpha)}\mu)(E),$$

e o teorema fica demonstrado.

$\square$

Observação 2.17. Entretanto, a recíproca do Teorema 2.16,

$$(\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) = \infty \quad \Longleftarrow \quad (\underline{R}^{(1-\alpha)}\mu)(E) = \infty,$$

ainda é um problema em aberto.

Vale observar que esta questão em aberto motivou os autores em [33] utilizarem a seguinte nomenclatura: Fixe $0 < \alpha < 1$; se para E μ-q.t.p.

$$(\underline{R}^{(1-\alpha)}\mu)(E) < \infty,$$

então dizemos que a medida μ é α-espectral contínua. Agora se E μ-q.t.p.,

$$(\underline{R}^{(1-\alpha)}\mu)(E) = \infty,$$

diz-se que a medida μ é α-espectral singular.

Consequentemente, pelo Teorema 2.16 e pelo Corolário 2.13, se uma medida μ for α-espectral contínua, então μ também será α-empacotamento contínua. Entretanto, se μ for α-espectral singular, ainda não é possível dizer que μ será α-empacotamento singular.

Nesta tese, não obtemos aplicações em que uma medida μ seja α-espectral singular. Deste modo, optamos em não utilizar esta nomenclatura e nem analisar resultados teóricos em que considere este tipo de decomposição espectral.

2.4 m-Funções de Weyl-Titchmarsh

Nesta seção, introduzimos as m-funções de Weyl-Titchmarsh; utilizando-se o Teorema Espectral, podemos obter uma caracterização das mesmas através da função de Green, nada mais que o núcleo do operador resolvente, e através desta caracterização obtemos a relação destas m-funções com a transformada de Borel da medida espectral associada ao operador (1.1) que estudamos neste trabalho. Para referências, veja [5, 14, 32, 43].

Para o operador H definido por (1.1) e $z = E + i\varepsilon$, considere a equação

$$Hu = zu. \tag{2.4}$$

Se $\varepsilon > 0$, então $z \notin \sigma(H)$ (espectro de H), e portanto pelo argumento de Combes-Thomas, que pode ser encontrado em [5], os expoentes de Lyapunov $\overline{\gamma}^{\pm}(z)$ são estritamente positivos. Daí, pelo teorema de Ruelle-Oseledec [42, 48] , existem soluções $\hat{u}_z^{\pm} \neq 0$ de (2.4) definidas em $l^2(\mathbb{Z}^{\pm})$, de forma que

$$|\hat{u}_z^{\pm}(\pm n)| \leq c.e^{-\overline{\gamma}^{\pm}(z)n},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e para alguma constante positiva $c < \infty$, sendo $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -2, -1, 0\}$. Isto implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{u}_z^{\pm}(\pm n)|^2 \leq c^2 \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2\overline{\gamma}^{\pm}(z)})^n = c^2 \frac{e^{2\overline{\gamma}^{\pm}(z)}}{e^{2\overline{\gamma}^{\pm}(z)} - 1} < \infty.$$

Recordamos que o Wronskiano, $W[u_1, u_2](n) = u_1(n+1)u_2(n) - u_1(n)u_2(n+1)$, de duas soluções linearmente independentes é constante e não nulo. Então, temos que $\hat{u}_z^{\pm}$ são as únicas soluções de (2.4)(a menos de normalização) que estão em $l^2(\mathbb{Z}^{\pm})$.

Sejam $u_{1,\varphi,z}^{\pm}$ e $u_{2,\varphi,z}^{\pm}$ soluções de (2.4), definidas em $\mathbb{Z}^{\pm}$, com condições iniciais (1.4). Como (2.4) é uma equação a diferença finita de segunda ordem, o espaço das soluções tem dimensão 2 e portanto, $\{u_{i,\varphi,z}^{\pm}\}_{i=1,2}$ forma uma base para este espaço, em $\mathbb{Z}^{\pm}$. Assim, as soluções $\hat{u}_z^{\pm}$ são escritas de modo único como

$$\hat{u}_z^{\pm} = [\hat{u}_z^{\pm}(0)\cos\varphi + \hat{u}_z^{\pm}(1)\ \sin\varphi]u_{2,\varphi,z}^{\pm} + [-\hat{u}_z^{\pm}(0)\ \sin\varphi + \hat{u}_z^{\pm}(1)\cos\varphi]u_{1,\varphi,z}^{\pm}.$$

Sejam $\hat{u}_{\varphi,z}^{\pm} \equiv \hat{u}_z^{\pm}$ com as normalizações $\hat{u}_z^{\pm}(0)\cos\varphi + \hat{u}_z^{\pm}(1)\ \sin\varphi = 1$. Portanto,

$$\hat{u}_{\varphi,z}^{\pm} = u_{2,\varphi,z}^{\pm} + (-\hat{u}_z^{\pm}(0)\ \sin\varphi + \hat{u}_z^{\pm}(1)\cos\varphi)u_{1,\varphi,z}^{\pm} \quad \text{e} \quad \hat{u}_z^{\pm}(0) = 1.$$

Definição 2.18. Para $z = E + i\varepsilon$ no semi-plano superior ($\varepsilon > 0$), as m-funções de

Weyl-Titchmarsh à direita e à esquerda são definidas unicamente por

$$\hat{u}^{\pm}_{\varphi,z} = u^{\pm}_{2,\varphi,z} \mp m^{\pm}_{\varphi}(z) u^{\pm}_{1,\varphi,z}.$$

Quando $\varphi = 0$, usaremos a notação $m^{\pm} = m^{\pm}_0$. Segue-se diretamente da Definição 2.18 que

$$m^{\pm}(z) = \mp \hat{u}^{\pm}_z(1). \tag{2.5}$$

Como em [12, 32], as funções $m^{\pm}$ e $m^{\pm}_{\varphi}$ se relacionam da seguinte forma:

$$m^{\pm}(z) = \frac{m^{\pm}_{\varphi}(z)\cos\varphi \mp \sin\varphi}{\cos\varphi \pm m^{\pm}_{\varphi}(z)\sin\varphi}. \tag{2.6}$$

Denotemos por $H^{\pm}$ os operadores da forma (1.1) restritos a $l^2(\mathbb{Z}^{\pm})$.

Definição 2.19. As funções de Green para o operador H^+ são definidas por

$$G^{+}_{\varphi}(n,m,z) = \begin{cases} \dfrac{u^{+}_{1,\varphi,z}(n)\hat{u}^{+}_{\varphi,z}(m)}{W[\hat{u}^{+}_{\varphi,z}, u^{+}_{1,\varphi,z}]}, & n \le m \\ \\ \dfrac{u^{+}_{1,\varphi,z}(m)\hat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}{W[\hat{u}^{+}_{\varphi,z}, u^{+}_{1,\varphi,z}]}, & m \le n \end{cases}$$

com $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

Para cada $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, tem-se que $G^{+}_{\varphi}(n,m,z)$ é o núcleo do operador resolvente $(H^+ - z)^{-1}$, isto é,

$$[(H^+ - z)^{-1}\psi](n) = \sum_{m=1}^{\infty} G^{+}_{\varphi}(n,m,z)\psi(m),\ \forall \psi \in l^2(\mathbb{Z}^+). \tag{2.7}$$

De fato, para cada $\varphi \in\ (-\pi/2, \pi/2]$, tomando-se

$$u_{\varphi}(n,z) = \sum_{m=1}^{\infty} G^{+}_{\varphi}(n,m,z)\psi(m)$$

e se usando a Definição 2.19, temos

$$u_\varphi(n,z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{u^+_{1,\varphi,z}(m)\hat{u}^+_{\varphi,z}(n)}{W[\hat{u}^+_{\varphi,z}, u^+_{1,\varphi,z}]}\ \psi(m)\ + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{u^+_{1,\varphi,z}(n)\hat{u}^+_{\varphi,z}(m)}{W[\hat{u}^+_{\varphi,z}, u^+_{1,\varphi,z}]}\ \psi(m).$$

Daí, aplicando-se H^+ a esta expressão e se fazendo alguns cálculos, vem que

$$H^+u_\varphi(n,z) = zu_\varphi(n,z) + \psi(n),$$

donde se segue o resultado.

Tomando-se $\psi = \delta_1 = (1,0,0,\ldots)$ em (2.7), obtemos

$$[(H^+ - z)^{-1}\delta_1](n) = \sum_{m=1}^{\infty} G^+_\varphi(n,m,z)\delta_1(m) = G^+_\varphi(n,1,z).$$

Em $l^2(\mathbb{Z}^+)$ consideraremos a medida espectral $\mu^+ \equiv \mu_{\delta_1}$ associada ao vetor δ_1 (que é cíclico para o operador H^+). Pelo Teorema Espectral temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu^+(t)}{t-z} &= \langle (H^+ - z)^{-1}\delta_1, \delta_1\rangle \\ &= G^+_\varphi(1,1,z) \\ &\overset{(\text{def } 2.19)}{=} \frac{u^+_{1,\varphi,z}(1)\hat{u}^+_{\varphi,z}(1)}{\hat{u}^+_{\varphi,z}(1)u^+_{1,\varphi,z}(0) - \hat{u}^+_{\varphi,z}(0)u^+_{1,\varphi,z}(1)} \\ &\overset{(\text{def } 2.18)}{=} -\cos\varphi\ \sin\varphi + m^+_\varphi(z)\cos^2\varphi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

No caso particular, $\varphi = 0$, temos

$$\int \frac{d\mu^+(t)}{t-z} = m^+(z).$$

Analogamente em $\mathbb{Z}^-$, tem-se

$$\int \frac{d\mu^-(t)}{t-z} = \langle (H^- - z)^{-1}\delta_0, \delta_0\rangle = \cos\varphi\ \sin\varphi + m^-_\varphi(z)\cos^2\varphi$$

em que $\mu^- \equiv \mu_{\delta_0}$ é a medida espectral associada ao vetor $\delta_0 = (\ldots,0,0,1)$ (que é cíclico para o operador H^-).

Consideremos agora o espaço $l^2(\mathbb{Z})$. Vamos utilizar $G_\varphi^\pm$ para descrever as funções G_φ, que possuem papel importante na determinação da função $m(z)$ em relação a $m_\varphi^\pm$.

Definição 2.20. As funções de Green para o operador H são definidas por

$$G_\varphi(n,m,z) = \begin{cases} \dfrac{\hat{u}^-_{\varphi,z}(n)\hat{u}^+_{\varphi,z}(m)}{W[\hat{u}^+_{\varphi,z},\hat{u}^-_{\varphi,z}]}, & n \leq m \\ \\ \dfrac{\hat{u}^-_{\varphi,z}(m)\hat{u}^+_{\varphi,z}(n)}{W[\hat{u}^+_{\varphi,z},\hat{u}^-_{\varphi,z}]}, & m \leq n \end{cases}$$

com $n, m \in \mathbb{Z}$.

De modo análogo a (2.7), mostra-se que para cada $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, $G_\varphi(n,m,z)$ é o núcleo do operador resolvente $(H-z)^{-1}$, isto é,

$$[(H-z)^{-1}\psi](n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_\varphi(n,m,z)\psi(m), \ \forall\psi \in l^2(\mathbb{Z}). \tag{2.9}$$

Notamos que a m-função $m(z)$ na reta toda é dada através do traço de uma matriz $M(z)$, que satisfaz (veja [14])

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} M(z) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left\langle (a\delta_0 + b\delta_1) | (H-z)^{-1}(a\delta_0 + b\delta_1) \right\rangle. \tag{2.10}$$

Desenvolvendo-se o lado direito de (2.10) e usando (2.9), temos

$$\left\langle (a\delta_0 + b\delta_1) | (H-z)^{-1}(a\delta_0 + b\delta_1) \right\rangle = \frac{a^2 - abm^+(z) - bam^+(z) - b^2 m^+(z)m^-(z)}{-m^+(z) - m^-(z)};$$

por outro lado, desenvolvendo-se o lado esquerdo de (2.10), obtemos

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 m_{11} - abm_{12} - bam_{21} - b^2 m_{22}.$$

Então, temos que

$$M(z) = \frac{1}{-m^+(z) - m^-(z)} \begin{bmatrix} 1 & m^+(z) \\ m^+(z) & -m^+(z)m^-(z) \end{bmatrix}.$$

Notamos que a função $m(z)$ pode ser definida como $m(z) = \mathrm{tr}(M(z))$, isto é, o traço de M (ver [5] para detalhes), desse modo podemos escrever que

$$m(z) = \frac{m^+(z)m^-(z) - 1}{m^+(z) + m^-(z)}. \tag{2.11}$$

Por outro lado, em $l^2(\mathbb{Z})$ a medida espectral é $\mu = \mu^+ + \mu^-$, em que $\mu^+ = \mu_{\delta_1}$, $\mu^- = \mu_{\delta_0}$ e o par de vetores $\{\delta_0, \delta_1\}$ é cíclico para o operador H. Pelo Teorema Espectral, temos

$$m(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t - z},$$

ou seja, a m-função é a transformada de Borel da medida μ.

Observação 2.21. De uma forma ingênua, poder-se-ia imaginar que $m(z)$ seria igual a $m_\varphi^+(z) + m_\varphi^-(z)$, mas vemos de (2.11) que isto não é verdade.

Capítulo

3

Empacotamento continuidade

Neste capítulo, estudamos resultados referentes à parte α-empacotamento contínua da medida espectral associada ao operador H da forma (1.1), sendo que tais resultados possuem aspectos duais à caracterização da parte α-Hausdorff contínua da respectiva medida espectral.

Analisemos alguns resultados de α-subordinação fractal de operadores unidimensionais definidos em $l^2(\mathbb{N})$ e $l^2(\mathbb{Z})$; na Seção 2.4, denotamos por $m(E+i\varepsilon)$ a transformada de Borel da medida espectral μ e, pelo Teorema 2.16, temos

$$(\underline{D}^{\alpha}\mu)(E) = \infty \implies \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha}|m(E+i\varepsilon)| = \infty.$$

Consequentemente, o estudo de propriedades dimensionais de empacotamento do espectro de H em $l^2(\mathbb{Z})$ pode ser abordado através do comportamento de $m(E+i\varepsilon)$, quando $\varepsilon \to 0$, que por sua vez pode ser reduzido ao estudo do comportamento de $m^{\pm}_{\varphi}(E+i\varepsilon)$, quando $\varepsilon \to 0$. Assim, baseando-se em resultados de [31, 32] sobre subordinação de Hausdorff, precisamos estudar o comportamento das soluções da equação de autovalores (1.3).

O principal objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema 1.1, que caracteriza a medida espectral α-empacotamento contínua do operador H através da ausência de solução α-empacotamento subordinada em $+\infty$, sendo que este resultado independe do potencial à esquerda.

Na Seção 3.3, discutiremos algumas aplicações do Teorema 3.4 para operadores H^+ da forma (1.1) restritos à semi-reta direita; essas aplicações consistem de resultados sobre α-

empacotamento continuidade da medida espectral μ^+, sendo estes resultados adaptações duais aos resultados da Seção 4 em [31] para o caso da dimensão de Hausdorff.

3.1 α-Subordinação fractal

Consideremos o operador H^+ (H restrito a $l^2(\mathbb{Z}^+)$) definido por (1.1), a correspondente equação de autovalores (1.3) e as soluções $u^+_{1,\varphi,E}$ e $u^+_{2,\varphi,E}$ definidas em $\mathbb{Z}^+$, satisfazendo as condições iniciais (1.4). Notamos que todos os resultados desta seção podem ser desenvolvidos de modo análogo em $\mathbb{Z}^-$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, define-se o comprimento $L^+_\varphi(\varepsilon) \in (0, \infty)$ pela igualdade

$$\|u^+_{1,\varphi,E}\|_{L^+_\varphi(\varepsilon)} \|u^+_{2,\varphi,E}\|_{L^+_\varphi(\varepsilon)} = \frac{1}{2\varepsilon} \ . \tag{3.1}$$

Observação 3.1. Como $W[u^+_{1,\varphi,E}, u^+_{2,\varphi,E}] = 1$, no máximo uma das soluções $u^+_{1,\varphi,E}$ ou $u^+_{2,\varphi,E}$ pertence a $l^2(\mathbb{Z}^+)$, e portanto o lado esquerdo de (3.1) é uma função contínua de L^+_φ, monotonicamente crescente, que é menor ou igual a 1 para $L^+_\varphi = 1$ e tende a infinito quando $L^+_\varphi \to \infty$. Por outro lado, $\frac{1}{2\varepsilon}$ é uma função contínua de ε, monotonicamente decrescente, que tende a infinito quando $\varepsilon \to 0$. Assim, a função $L^+_\varphi(\varepsilon)$ está bem definida por (3.1) e $L^+_\varphi(\varepsilon) \to \infty$ para $\varepsilon \to 0$.

Recordemos uma relação, devida a Jitomirskaya-Last, envolvendo as m-funções à direita e as soluções $u^+_{1,\varphi,E}$ e $u^+_{2,\varphi,E}$ de (1.3). Com essa relação, é possível estender resultados da teoria de subordinação de Gilbert-Pearson e assim obter propriedades dimensionais fractais do espectro de H^+, através do comportamento das soluções da respectiva equação de autovalores.

Teorema 3.2. *(Desigualdade de Jitomirskaya-Last, Teorema 1.1 em [31]) Seja H^+ definido por* (1.1)*, e sejam $E \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dados. Então, vale a desigualdade*

$$\frac{5-\sqrt{24}}{|m^+_\varphi(E+i\varepsilon)|} < \frac{\|u^+_{1,\varphi,E}\|_{L^+_\varphi(\varepsilon)}}{\|u^+_{2,\varphi,E}\|_{L^+_\varphi(\varepsilon)}} < \frac{5+\sqrt{24}}{|m^+_\varphi(E+i\varepsilon)|}. \tag{3.2}$$

Segue-se diretamente do Teorema 3.2 que:

Corolário 3.3. *Seja H^+ definido por (1.1), e sejam $E \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dados. Então, para qualquer $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$,*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |m_\varphi^+(E+i\varepsilon)| = \infty \;\Leftrightarrow\; \liminf_{L_\varphi^+\to\infty} \frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}} = 0,$$

e

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |m_\varphi^+(E+i\varepsilon)| = \infty \;\Leftrightarrow\; \limsup_{L_\varphi^+\to\infty} \frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}} = 0.$$

Recordamos da Seção 2.3 que o comportamento da transformada de Borel $F_{\mu^+}(E+i\varepsilon)$ da medida espectral μ^+ associada ao operador H^+ se relaciona com o comportamento das α-derivadas superior e inferior desta medida. Mais precisamente, em [17], foi demonstrado que

$$\left(\overline{D}^\alpha \mu^+\right)(E) = \infty \iff \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha} |F_{\mu^+}(E+i\varepsilon)| = \infty. \tag{3.3}$$

Temos como uma consequência direta do Teorema 2.16 o seguinte

$$\left(\underline{D}^\alpha \mu^+\right)(E) = \infty \implies \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha} |F_{\mu^+}(E+i\varepsilon)| = \infty. \tag{3.4}$$

Teorema 3.4. *Sejam $E \in \mathbb{R}, \alpha \in (0,1)$ e μ^+ a medida espectral associada ao operador H^+ da forma* (1.1). *Então,*

$$\left(\overline{D}^\alpha \mu^+\right)(E) = \infty \iff \liminf_{L_\varphi^+\to\infty} \frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}^\gamma} = 0 \tag{3.5}$$

e

$$\left(\underline{D}^\alpha \mu^+\right)(E) = \infty \implies \limsup_{L_\varphi^+\to\infty} \frac{\|u_{1,\beta,E}^+\|_{L_\varphi^+}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}^\gamma} = 0, \tag{3.6}$$

sendo $\gamma = \alpha/(2-\alpha)$ *e* $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Demonstração. Temos que a equivalência (3.5) é um resultado bem conhecido, a saber o Teorema 1.2 em [31]. Verifiquemos a implicação (3.6). Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, por (3.1) e pela desigualdade Jitomirskaya-Last, obtemos

$$\frac{5-\sqrt{24}}{2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(E+i\varepsilon)|} < \left(\frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+(\varepsilon)}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+(\varepsilon)}^\gamma}\right)^{2-\alpha} < \frac{5+\sqrt{24}}{2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(E+i\varepsilon)|}.$$

Assim, para $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(E+i\varepsilon)| = \infty \iff \limsup_{L_\varphi^+\to\infty} \frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}^\gamma} = 0. \tag{3.7}$$

Agora, em (2.8) temos

$$-\cos\varphi \ \sin\varphi + m_\varphi^+(z)\cos^2\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu^+(t)}{t-z}.$$

Daí, pela relação (3.4), segue-se que

$$\begin{aligned}\left(\underline{D}^\alpha\mu^+\right)(E) = \infty \quad &\Longrightarrow \quad \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha}|-\cos\varphi \ \sin\varphi + m_\varphi^+(z)\cos^2\varphi| = \infty \\ &\iff \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(z)| = \infty. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Logo, por (3.7) e (3.8),

$$\left(\underline{D}^\alpha\mu^+\right)(E) = \infty \implies \limsup_{L_\varphi^+\to\infty} \frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L_\varphi^+}^\gamma} = 0$$

para algum $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$. □

3.2 Ausência de solução α-empacotamento subordinada

Nesta seção, demonstraremos o Teorema 1.1, que estabelece a α-empacotamento continuidade da medida espectral associada aos operadores (1.1) em $l^2(\mathbb{Z})$ através de cotas superiores e inferiores da forma (1.6), para todas as soluções de (1.3). Para tanto, relacionaremos a ausência de solução α-empacotamento subordinada em $+\infty$ com o comportamento de fronteira das m-funções à direita.

Lema 3.5. *Fixe $E \in \mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $C_1, C_2 > 0$, e uma sequência $L_j \to \infty$, tal que toda solução de $(H - E)u = 0$ com CIN satisfaça a estimativa (1.6), ou seja,*

$$C_1 L_j^{\tau_1} \leq \|u\|_{L_j} \leq C_2 L_j^{\tau_2}.$$

Seja $\alpha = 2\tau_1/(\tau_1 + \tau_2)$. Existem uma constante $C_3 > 0$ e uma sequência $\varepsilon_j \to 0$, de modo que

$$|m_\varphi^+(E + i\varepsilon_j)| \leq C_3\, \varepsilon_j^{\alpha-1}, \qquad \forall\ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Demonstração. Considerando-se as soluções $u_{1,\varphi,E}^+$ e $u_{2,\varphi,E}^+$ de $(H-E)u = 0$ com condições iniciais (1.4), pela definição da função $L(\varepsilon)$ e pela Observação 3.1 existe uma sequência $\varepsilon_j \to 0$ com $L(\varepsilon_j) = L_j$, tal que por hipótese, temos

$$\frac{\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L(\varepsilon_j)}}{\|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L(\varepsilon_j)}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} \geq \frac{C_1 (L(\varepsilon_j))^{\tau_1}}{(C_2 (L(\varepsilon_j))^{\tau_2})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} = \frac{C_1}{C_2^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} (L(\varepsilon_j))^{\tau_1 - \tau_2 (\frac{\alpha}{2-\alpha})} = \frac{C_1}{C_2^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} > 0,$$

para uma sequência $L(\varepsilon_j) \to \infty$ e todo $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Pela desigualdade Jitomirskaya-Last (Teorema 3.2), segue-se que existe $0 < C_3 < \infty$ com

$$|m_\varphi^+(E + i\varepsilon_j)| \leq C_3 \varepsilon_j^{\alpha-1}, \qquad \forall\ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2].$$

□

O Lemma 3.6 a seguir é uma versão para medidas de empacotamento do correspondente resultado para medidas de Hausdorff demonstrado em [14]. Este resultado relaciona as m-funções m_φ^+ à direita com a m-função m na reta toda.

Lema 3.6. *Suponha que $E \in \sigma(H)$. Fixados $\alpha \in (0, 1)$, uma constante $C > 0$ e uma sequência $\varepsilon_j \to 0$, supomos que*

$$\sup_\varphi |m_\varphi^+(E + i\varepsilon_j)| \leq C \varepsilon_j^{\alpha-1}. \tag{3.9}$$

Então, para qualquer função $g\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^+ = \{x+iy : y>0\}$, *tem-se*

$$\left|\frac{m^+(E+i\varepsilon_j)g(E+i\varepsilon_j)-1}{m^+(E+i\varepsilon_j)+g(E+i\varepsilon_j)}\right| \leq C\varepsilon_j^{\alpha-1}. \tag{3.10}$$

Em particular, pode-se tomar $g = m^-$, *obtendo-se*

$$|m(E+i\varepsilon_j)| = \left|\frac{m^+(E+i\varepsilon_j)m^-(E+i\varepsilon_j)-1}{m^+(E+i\varepsilon_j)+m^-(E+i\varepsilon_j)}\right| \leq C\varepsilon_j^{\alpha-1}. \tag{3.11}$$

Consequentemente, μ *é* α*-empacotamento contínua.*

Demonstração. Fixe $E \in \sigma(H)$ e cada elemento da sequência $\varepsilon_j > 0$. Introduzindo-se novas variáveis $z = e^{2i\varphi}$ e $\nu = (m^+ - i)/(m^+ + i)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1+\nu z}{1-\nu z} &= \frac{1+\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{2i\varphi}}{1-\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{2i\varphi}} \\
&= \frac{e^{i\varphi}\left(e^{-i\varphi}+\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{i\varphi}\right)}{e^{i\varphi}\left(e^{-i\varphi}-\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{i\varphi}\right)} \\
&= \frac{(\cos\varphi - i\ \sin\varphi)(m^++i)+(m^+-i)(\cos\varphi+i\ \sin\varphi}{(\cos\varphi - i\ \sin\varphi)(m^++i)-(m^+-i)(\cos\varphi+i\ \sin\varphi)} \\
&= \frac{\sin(\varphi)+\cos(\varphi)m^+}{i(\cos(\varphi)-\sin(\varphi)m^+)} \\
&\overset{(2.6)}{=} -i\ m_\varphi^+.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (3.9) como

$$\sup_{|z|=1}\left|\frac{1+\nu z}{1-\nu z}\right| \leq C\varepsilon_j^{\alpha-1}.$$

Note que $\operatorname{Im}(m^+) > 0$ implica $|\nu| < 1$ e, portanto, $(1+\nu z)/(1-\nu z)$ define uma função analítica sobre $\{z : |z| \leq 1\}$. O ponto $z_1 = (g-i)/(g+i)$ está no interior do disco unitário ($|z_1| < 1$), pois $\operatorname{Im}(g) > 0$. Pelo princípio do módulo máximo temos

$$\sup_{|z|\leq 1}\left|\frac{1+\nu z}{1-\nu z}\right| = \sup_{|z|=1}\left|\frac{1+\nu z}{1-\nu z}\right| \leq C\varepsilon_j^{\alpha-1}.$$

Usando-se esta desigualdade para o ponto z_1 obtemos

$$\left|\frac{m^+g-1}{m^++g}\right| = \left|\frac{1+\nu z_1}{1-\nu z_1}\right| \le C\varepsilon_j^{\alpha-1},$$

e portanto a estimativa (3.10) está demonstrada. Em particular, tomando-se $g = m^-$ e usando (2.11), obtém-se (3.11). Então, $(\underline{D}^\alpha\mu)(E) < \infty$, e consequentemente μ é α-empacotamento contínua. □

Demonstração. (Teorema 1.1) Segue-se da hipótese (1.6), juntamente com os Lemas 3.5 e 3.6, que μ é α-empacotamento contínua. Como $\mu_\phi \ll \mu$, segue-se que μ_ϕ é α-empacotamento contínua. □

Ressaltamos com os resultados desta seção a caracterização do espectro α-empacotamento contínuo do operador H da forma (1.1) através da ausência de solução α-empacotamento subordinada em $+\infty$ (ou $-\infty$), e este resultado independe do potencial em $\mathbb{Z}^-$ (ou $\mathbb{Z}^+$), no sentido que o "mais contínuo" na semi-reta domina e limita por baixo a dimensão de empacotamento do espectro de H.

Observação 3.7. Pelo Teorema 1 em [14], temos que se existem constantes γ_1, γ_2 de forma que, para cada $E \in \sigma(H)$, toda solução com CIN de $(H-E)u = 0$ satisfaz a estimativa

$$C_1 L^{\gamma_1} \le \|u\|_L \le C_2 L^{\gamma_2} \tag{3.12}$$

para $L > 0$ suficientemente grande e constantes $C_1(E), C_2(E) > 0$. Seja $\alpha = 2\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Então $\sigma(H)$ é puramente α-Hausdorff contínuo, isto é, para qualquer $\phi \in l^2$, μ_ϕ é puramente α-Hausdorff contínua.

Então notamos, pelo Teorema 1.1, que para se obter resultados sobre a decomposição da medida espectral μ com respeito às medidas de empacotamento, podemos supor que a estimativa (3.12) é satisfeita somente para uma subsequência de $L_j \to \infty$; é natural se buscarem estimativas que caracterizam α-empacotamento continuidade diferentes das estimativas que caracterizam α-Hausdorff continuidade. Um exemplo desta situação será discutido na Seção 4.2.

3.3 Algumas consequências do Teorema 3.4

Nesta seção estudamos as adaptações de alguns resultados com respeito a dimensão Hausdorff da Seção 4 em [31] (detalhados em [43]) para α-empacotamento continuidade da medida espectral μ^+, através do comportamento assintótico de soluções da equação de autovalores (1.3) associada ao operador H^+. Notamos que alguns dos resultados abaixo já foram utilizados em [7] com o intiuto de se analisar a decomposição espectral de classes de operadores esparsos em relação às medidas de empacotamento.

Corolário 3.8. *Suponha que para algum $1 \le a < 2$ e qualquer E em algum conjunto de Borel A, toda solução v^+ de $H^+u = Eu$ satisfaça*

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{\|v^+\|_L^2}{L^a} < \infty. \tag{3.13}$$

Então, a restrição $\mu^+(A \cap \cdot)$ é $(2-a)$-empacotamento contínua.

Demonstração. Seja $E \in A$. Por hipótese,

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{\|u^+_{2,\varphi,E}\|_L^2}{L^a} < \infty.$$

Então, existem $0 < C < \infty$ e uma sequência $L_j \to \infty$ de modo que $\|u^+_{2,\varphi,E}\|^2_{L_j} < CL_j^a$. Sabemos [31] que $\|u^+_{1,\varphi,E}\|_{L_j}\|u^+_{2,\varphi,E}\|_{L_j} \ge \frac{1}{2}(L_j-1)$. Assim,

$$\|u^+_{1,\varphi,E}\|_{L_j} \ge \frac{1}{2}\,\frac{L_j-1}{\|u^+_{2,\varphi,E}\|_{L_j}} > \frac{1}{2}(L_j-1)(CL_j^a)^{-1/2}.$$

Seja $\gamma \equiv \dfrac{2-a}{2-(2-a)} = \dfrac{2-a}{a}$. Temos que

$$\frac{\|u^+_{1,\varphi,E}\|_{L_j}}{\|u^+_{2,\varphi,E}\|^\gamma_{L_j}} > \frac{1}{2}(L_j-1)(CL_j^a)^{-1/2}\frac{1}{(CL_j^a)^{\gamma/2}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{L_j}\right)C^{-1/a}.$$

Isto implica em

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{\|u^+_{1,\varphi,E}\|_L}{\|u^+_{2,\varphi,E}\|^\gamma_L} > \frac{1}{2}\,C^{-1/a} > 0.$$

Logo, pelo Teorema 3.4, $(\underline{D}^{2-a}\mu^+)(E) < \infty$. Portanto, $\mu^+(A \cap \cdot)$ é $(2-a)$-empacotamento contínua. $\square$

Observação 3.9. Note que para $a = 1$, o Corolário 3.8 implica, em particular, que energias para as quais $H^+u = Eu$ tem somente soluções limitadas devem ser associadas à parte absolutamente contínua da medida espectral μ^+. Este é um fato conhecido, o qual é uma consequência imediata da teoria de Gilbert-Pearson.

Uma maneira conveniente de se reescrever os resultados desta seção, para operadores unidimensionais da forma (1.1) em $l^2(\mathbb{Z}^+)$, se dá através da utilização das matrizes de transferência $T_n^+(E) = M_n(E)M_{n-1}(E)\cdots M_1(E)$, com

$$M_n(E) = \begin{pmatrix} E - V(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

de fato, dadas $u^+_{1,\varphi,E}$ e $u^+_{2,\varphi,E}$ soluções de (1.3) satisfazendo (1.4) para $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, podemos obter qualquer solução de (1.3) pela aplicação sucessiva de $T_n(E)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, isto é,

$$\begin{pmatrix} u^+_{1,\varphi,E}(n+1) \\ u^+_{1,\varphi,E}(n) \end{pmatrix} = T_n^+(E) \begin{pmatrix} u^+_{1,\varphi,E}(1) \\ u^+_{1,\varphi,E}(0) \end{pmatrix} = T_n^+(E) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} u^+_{2,\varphi,E}(n+1) \\ u^+_{2,\varphi,E}(n) \end{pmatrix} = T_n^+(E) \begin{pmatrix} u^+_{2,\varphi,E}(1) \\ u^+_{2,\varphi,E}(0) \end{pmatrix} = T_n^+(E) \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$T_n^+(E) = \begin{pmatrix} u^+_{1,\varphi,E}(n+1) & u^+_{2,\varphi,E}(n+1) \\ u^+_{1,\varphi,E}(n) & u^+_{2,\varphi,E}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

O seguinte resultado consiste do Corolário 19 em [7], o qual analisa o comportamento das soluções da equação de autovalores através das matrizes de transferência.

Corolário 3.10. *Suponha que para algum $1 \leq a < 2$ e qualquer E em algum conjunto de*

Borel A,

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L^a} \sum_{n=0}^{L} \|T_n^+(E)\|^2 < \infty. \tag{3.15}$$

Então, a restrição $\mu^+(A \cap \cdot)$ é $(2-a)$-empacotamento contínua.

Demonstração. Seja $E \in A$. Por (3.14) e pela equivalência das normas, existe uma constante positiva C tal que

$$C\left(|u_{1,\varphi,E}^+(n+1)|^2 + |u_{1,\varphi,E}^+(n)|^2 + |u_{2,\varphi,E}^+(n+1)|^2 + |u_{2,\varphi,E}^+(n)|^2\right) \leq \|T_n^+(E)\|^2,$$

o que implica em

$$C'\left(\|u_{1,\varphi,E}^+\|_{L+1}^2 + \|u_{2,\varphi,E}^+\|_{L+1}^2\right) \leq \sum_{n=0}^{L} \|T_n^+(E)\|^2. \tag{3.16}$$

Então, segue-se de (3.15) e de (3.16) que a hipótese (3.13) do Corolário 3.8 é satisfeita. Logo, concluímos que a restrição $\mu^+(A \cap \cdot)$ é $(2-a)$-empacotamento contínua. $\square$

Capítulo

4

Aplicação: Modelo sturmiano

Agora utilizaremos o Teorema 1.1 na obtenção de propriedades dimensionais de empacotamento de operadores de Schrödinger, da forma (1.1), gerados por potenciais sturmianos com número de rotação de densidade quase limitada (ver Definição 1.3). Deste modo, demonstraremos o Teorema 1.4 através da estimativa de cotas inferiores e superiores da forma (1.6), para todas as soluções da equação de autovalores $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$ e as energias no espectro de $H_{\lambda,\theta,\rho}$.

4.1 Potencial sturmiano com densidade quase limitada

Primeiramente, nesta seção, recordemos algumas propriedades básicas dos potenciais sturmianos [3, 15, 52]. Fixado um número de rotação irracional $\theta \in (0,1)$, sejam a_n os coeficientes da sua expansão em frações continuadas (1.7), sendo que para este número de rotação as aproximações racionais p_n/q_n associadas são obtidas de

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Defina as palavras S_n sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, \lambda\}$ (com $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ fixado) por

$$S_{-1} = \lambda \quad S_0 = 0 \quad S_1 = S_0^{a_1 - 1} S_{-1} \quad S_n = S_{n-1}^{a_n} S_{n-2}, \ n \geq 2. \tag{4.1}$$

Todos os potenciais da forma $V_{\lambda,\theta,\rho}(n) = \lambda\chi_{[1-\theta,1)}(n\theta + \rho \bmod 1)$, em que $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0,1)$ é número de rotação irracional e $\rho \in [0,1)$, satisfazem a relação (4.1); em particular, a palavra S_n tem comprimento q_n para cada $n \geq 0$.

Fixados λ e a energia E, para cada $w = w_1 \dots w_n \in \mathcal{A}^n$, denotamos por $M(\lambda, E, w)$ a matriz de transferência

$$M(\lambda, E, w) = \begin{pmatrix} E - w_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E - w_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se u for uma solução de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$, temos

$$U(n+1) = M(\lambda, E, V_{\lambda,\theta,\rho}(1) \dots V_{\lambda,\theta,\rho}(n))U(1), \tag{4.2}$$

com

$$U(n+1) = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix}.$$

O comportamento de $\|u\|_L$ pode ser investigado através de

$$\|U\|_L = \left(\sum_{n=1}^{[L]} \|U(n)\|^2 + (L - [L])\|U([L]+1)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo $\|U(n)\|^2 = |u(n)|^2 + |u(n-1)|^2$; temos que

$$\frac{1}{2}\|U\|_L^2 \leq \|u\|_L^2 \leq \|U\|_L^2 \ .$$

Notamos que o espectro de $H_{\lambda,\theta,\rho}$ é independente de ρ (ver [3]), e assim podemos denotá-lo por $\sigma(H_{\lambda,\theta})$. O objetivo principal desta seção é demonstrar o Teorema 1.4, e para isso é suficiente verificar as Proposições 4.1 e 4.4 nas subseções abaixo.

4.1.1 Limite inferior das soluções

Escrevamos

$$x_n = \mathrm{tr}(M(\lambda, E, S_{n-1})), \quad y_n = \mathrm{tr}(M(\lambda, E, S_n)), \quad z_n = \mathrm{tr}(M(\lambda, E, S_n S_{n-1})),$$

sendo omitida a dependência em λ e E . De acordo com resultados em [3, 14], para quaisquer $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0,1)$ irracional e todo $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$, existe $C_\lambda > 1$ de forma que

$$\max_n \{|x_n|, |y_n|, |z_n|\} \leq C_\lambda,$$

sendo que esta propriedade de limitação uniforme dos traços é importante para se obter cotas inferiores para todas as soluções de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$, correspondentes às energias $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$.

Proposição 4.1. *Suponha que θ seja um número irracional de densidade quase limitada. Então, para todo $\lambda > 0$, existem constantes positivas τ_1, C_1 e uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada solução u de (1.3) com CIN, e correspondentes energias $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$, temos que*

$$\|u\|_{q_{n_j}} \geq C_1 q_{n_j}^{\tau_1}.$$

O Lema 4.2 a seguir consiste do Lema 4.1 em [14].

Lema 4.2. *Sejam λ, θ, ρ arbitrários, $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$ e u uma solução de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$ com CIN. Então, para todo $n \geq 8$, vale a desigualdade*

$$\|U\|_{q_n} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-8}},$$

com $D_\lambda = \left(1 + \frac{1}{4C_\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lema 4.3. *Suponha que θ seja um número de densidade quase limitada. Então, existem uma constante C_θ e uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de forma que $q_{n_j} \leq C_\theta^{n_j}$.*

Demonstração. A demonstração do Lemma 4.3 segue a mesma estrutura da demonstração do Lemma 2.3 in [12], com adaptações para uma subsequência. Mais precisamente, consideramos a sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerada pela recursão

$$r_{n+1} = 2a_{n+1}r_n,$$

com condição inicial $r_1 = 2a_1$; indutivamente temos $q_n \leq r_n$ e $r_n = \prod_{i=1}^{n} 2a_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótese, θ é um número de densidade quase limitada; logo, existem uma constante B_θ e uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} 2a_i \leq B_\theta. \tag{4.3}$$

Assim, obtemos

$$\ln(q_{n_j})^{1/n_j} \leq \ln(r_{n_j})^{1/n_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\ln(2a_i) \leq B_\theta,$$

o que implica $q_{n_j} \leq (e^{B_\theta})^{n_j}$. Portanto, existem uma constante $C_\theta = e^{B_\theta}$ e uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em que $q_{n_j} \leq C_\theta^{n_j}$. □

Agora, temos condições de demonstrar a Proposição 4.1.

Demonstração. (Proposição 4.1) Temos, pelo Lema 4.2, que para todo $n_j \geq 8$,

$$\begin{aligned} \|U\|_{q_{n_j}} &\geq D_\lambda \|U\|_{q_{n_j-8}} \geq \ldots \geq D_\lambda^{[n_j/8]}\|U\|_{q_{n_j-8[n_j/8]}} \\ &\geq D_\lambda^{[n_j/8]}\|U\|_{q_0} \geq D_\lambda^{(n_j/8)-1}, \end{aligned}$$

com $D_\lambda > 1$ e $[n_j/8]$ denotando a parte inteira de $n_j/8$.

Segue-se, do Lema 4.3, a existência de uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em que $q_{n_j} \leq C_\theta^{n_j}$. Então, escolha $\tau_1 > 0$ de modo que $C_\theta^{8\tau_1} \leq D_\lambda$. Assim,

$$\frac{\|U\|_{q_{n_j}}}{q_{n_j}^{\tau_1}} \geq \frac{D_\lambda^{(n_j/8)-1}}{C_\theta^{n_j\tau_1}} = \frac{1}{D_\lambda}\left(\frac{D_\lambda^{1/8}}{C_\theta^{\tau_1}}\right)^{n_j} \geq \frac{1}{D_\lambda},$$

o que implica $\|U\|_{q_{n_j}} \geq D_\lambda^{-1} q_{n_j}^{\tau_1}$. Portanto,

$$\|u\|_{q_{n_j}} \geq C_1 q_{n_j}^{\tau_1},$$

com $C_1 = 1/D_\lambda\sqrt{2}$. □

4.1.2 Limite superior das soluções

Agora, buscaremos limitantes polinomiais superiores para toda solução u da equação $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$. Mais precisamente, demonstraremos o seguinte resultado:

Proposição 4.4. *Suponha que θ seja um número irracional de densidade quase limitada. Então, para todo $\lambda > 0$, existem constantes positivas τ_2, C_2 e uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada solução u de* (1.3) *com CIN, e correspondentes energias $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$, temos que*

$$\|u\|_{q_{n_j}} \leq C_2 q_{n_j}^{\tau_2}. \tag{4.4}$$

Para a demonstração da Proposição 4.4, seguiremos as técnicas desenvolvidas em [28, 29], que realiza estimativas (limitação superior) para a norma das matrizes de transferência associadas ao operador em estudo. Considerando $\rho = 0$, a fim de simplificar a notação, denotamos as matrizes de transferência por $M(m) := M(\lambda, E, V_{\lambda,\theta,0}(1)\ldots V_{\lambda,\theta,0}(m))$.

Lema 4.5. *Se $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$, então*

$$\|M(q_n)\| \leq J_1^{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Para qualquer inteiro positivo m decomposto como $m = \sum_{i=0}^n \epsilon_i q_i$, com todos ϵ_i inteiros (positivos), obtemos

$$\|M(m)\| \leq J_1^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}\, J_2^{\sum_{i=0}^{n} \epsilon_i},$$

sendo J_1 e J_2 constantes positivas com $J_1 \geq J_2$.

Demonstração. O Lema 4.5 segue exatamente do Corolário 5 e Teorema 9 em [28]. □

Lema 4.6. *Seja* $(q_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *a sequência obtida no Lema 4.3, e seja* m *um inteiro positivo com* $m < q_{n_j}$. *Então, temos a expansão*

$$m = \sum_{i=0}^{n_j-1} \epsilon_i q_i, \tag{4.5}$$

com $\epsilon_i \leq a_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n_j - 1$.

Demonstração. Para a sequência $(q_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, assumimos sem perda de generalidade que $q_{n_0} = q_0 = 1$ e $q_{n_1} = q_1 = a_1$. A demonstração se dá por indução em $j \in \mathbb{N}$. Se $q_{n_0} = 1 \leq m < q_{n_1} = a_1$, então $m = \epsilon_0 q_0 = \epsilon_0$, sendo $1 \leq \epsilon_0 \leq a_1$. Supomos que o resultado é válido para $m < q_{n_{j-1}}$.

Agora, consideramos $q_{n_{j-1}} \leq m < q_{n_j}$. Analisemos todos os possíveis valores que m pode assumir neste intervalo $[q_{n_{j-1}}, q_{n_j})$.

Para $q_{n_{j-1}} \leq m < q_{n_{j-1}+1}$, escreva $\epsilon_{n_{j-1}} = \left[\frac{m}{q_{n_{j-1}}}\right]$. Então, $m - \epsilon_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}} < q_{n_{j-1}}$ e

$$m - \epsilon_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}} = \sum_{i=0}^{n_{j-1}-1} \epsilon_i q_i\,,$$

para $\epsilon_i \leq a_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n_{j-1} - 1$. Além disso,

$$\epsilon_{n_{j-1}} < \left[\frac{q_{n_{j-1}+1}}{q_{n_{j-1}}}\right] = \left[\frac{a_{n_{j-1}+1} q_{n_{j-1}} + q_{n_{j-1}-1}}{q_{n_{j-1}}}\right] = a_{n_{j-1}+1}\,,$$

e $\epsilon_i = 0$ para $i = n_{j-1} + 1, \ldots, n_j - 1$.

O próximo passo é considerar a situação $q_{n_{j-1}+1} \leq m < q_{n_{j-1}+2}$, que decorre das mesmas considerações do caso anterior. Assim, procedendo-se indutivamente com esta análise sobre os valores de m, obtemos (4.5) com $q_{n_j-1} \leq m < q_{n_j}$, isto é

$$m - \epsilon_{n_j-1} q_{n_j-1} = \sum_{i=0}^{n_j-2} \epsilon_i q_i\,,$$

sendo $\epsilon_i \leq a_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n_j - 2$ e $\epsilon_{n_j-1} = \left[\frac{m}{q_{n_j-1}}\right] < a_{n_j}$. □

Finalmente, vejamos a demonstração da Proposição 4.4.

Demonstração. (Proposição 4.4) Se u for uma solução de (1.3) com CIN, temos, por (4.2), que $|u(m)| \leq \|M(m)\|$. Então,

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{q_{n_j}} &= \sum_{m=1}^{q_{n_j}} |u(m)|^2 \leq \sum_{m=1}^{q_{n_j}} \|M(m)\|^2 \\ &\leq q_{n_j} (J_1)^{4\sum_{i=1}^{n_j} a_i} \leq q_{n_j} (J_1)^{2B_\theta n_j} \\ &\leq q_{n_j} q_{n_j}^{\tau},\end{aligned}$$

com $\tau \geq \frac{2B_\theta \ln(J_1) n_j}{\ln(q_{n_j})}$, tendo sido usados os Lemas 4.5 e 4.6 na segunda desigualdade, e a relação (4.3) na terceira.

Temos, pelo Lemma 4.3 que existe $C_\theta > 1$ tal que $q_{n_j} \leq C_\theta^{n_j}$. Por outro lado, também sabemos que existe $\tilde{C}_\theta > 1$ de modo que $q_{n_j} \geq \tilde{C}_\theta^{n_j}$. Consequentemente,

$$\frac{2B_\theta \ln(J_1)}{\ln(C_\theta)} \leq \frac{2B_\theta \ln(J_1) n_j}{\ln(q_{n_j})} \leq \frac{2B_\theta \ln(J_1)}{\ln(\tilde{C}_\theta)}.$$

Portanto, concluímos que $\|u\|_{q_{n_j}} \leq q_{n_j}^{\tau_2}$, com $\tau_2 \geq \frac{1}{2} + \frac{B_\theta \ln(J_1)}{\ln(\tilde{C}_\theta)}$.

Observamos que a relação (4.4) foi verificada para $\rho = 0$. Entretanto, seguindo a mesma ideia da Proposição 5.2 em [14], mais especificamente, pela demonstração do Teorema 3 em [16] tal estimativa (4.4) é satisfeita para quaisquer $\rho \in [0, 1)$, através da análise do comportamento das autofunções associadas a subsequências de potenciais para $\rho = 0$. Desse modo, a proposição se verifica para todo $\rho \in [0, 1)$. □

Demonstração. (Teorema 1.4) Seja θ um irracional de densidade quase limitada. Então, pelas Proposições 4.1 e 4.4, existe uma sequência $(q_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, tal que para todo $\lambda > 0$, existem τ_1, τ_2, C_1, C_2 constantes positivas, de modo que toda solução (1.3) com CIN satisfaz

$$C_1 q_{n_j}^{\tau_1} \leq \|u\|_{q_{n_j}} \leq C_2 q_{n_j}^{\tau_2}.$$

Portanto, pelo Teorema 1.1 com a sequência $L_j = q_{n_j}$, o espectro de $H_{\lambda,\theta,\rho}$ é puramente α-empacotamento contínuo, com $\alpha = 2\tau_1/(\tau_1 + \tau_2)$. □

4.2 Potencial sturmiano com densidade limitada

Recordemo-nos [12, 14, 32] que o operador $H_{\lambda,\theta,\rho}$, com $\theta \in [0,1)$ um número irracional de densidade limitada, possui espectro puramente α_H-Hausdorff contínuo para algum $\alpha_H = 2\gamma_1/(\gamma_1+\gamma_2)$, em que $\gamma_1 = \gamma_1(\theta,\lambda)$ e $\gamma_2 = \gamma_2(\theta,\lambda)$ são obtidos da relação

$$C_1 L^{\gamma_1} \leq \|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2}, \tag{4.6}$$

com $L > 0$ suficientemente grande, $C_1, C_2 > 0$ constantes e u qualquer solução da equação $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$ com CIN, correspondente a $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$.

Notamos que todo número irracional de densidade limitada também é de densidade quase limitada; por conseguinte, como um caso particular do Teorema 1.4, temos

Corolário 4.7. *Seja $\theta \in (0,1)$ um número irracional de densidade limitada. Então, para todo $\lambda \neq 0$, existe um $\alpha = \alpha(\lambda,\theta) > 0$ tal que para todo $\rho \in [0,1)$ e todo $\phi \in l^2(\mathbb{Z})$, a medida espectral para o par $(H_{\lambda,\theta,\rho}, \phi)$ é puramente α_P-empacotamento contínua.*

Demonstração. Como θ é um número de densidade limitada, podemos reproduzir as demonstrações das Proposições 4.1 e 4.4, de modo que para todo $\lambda \neq 0$, existem constantes positivas τ_1, τ_2, C_1, C_2, satisfazendo

$$C_1 q_n^{\tau_1} \leq \|u\|_{q_n} \leq C_2 q_n^{\tau_2}, \tag{4.7}$$

para qualquer solução u de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$ com CIN, correspondente a $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$. Portanto, segue-se do Teorema 1.1 que o espectro de $H_{\lambda,\theta,\rho}$ é puramente α_P-empacotamento contínuo, com $\alpha_P = \frac{2\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$. $\square$

Observamos que para obter resultados sobre empacotamento continuidade com respeito à medida espectral μ, bastam que estimativas da forma (3.12) sejam satisfeitas somente para uma subsequência como verificado em (4.7). Então, existe a questão de que tais estimativas que caracterizam α_P-empacotamento continuidade serem diferentes das estimativas que caracterizam α_H-Hausdorff continuidade.

Pelo modo que as estimativas dos expoentes τ_1, τ_2 foram consideradas nas Proposições 4.1 e 4.4, temos que essas estimativas possuem importantes relações com os expoentes γ_1, γ_2 obtidos em [12, 14, 28]. Mais especificamente, vamos notar $\tau_1 > \gamma_1$ e, consequentemente, nossas estimativas levam a $\alpha_P > \alpha_H$ (para os valores por hora que encontramos).

De acordo com resultados de Iochum, Raymond e Testard [28], temos que se θ for um número irracional de densidade limitada, então existem $\gamma_2, C_2 > 0$, de forma que

$$\|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2}, \quad \forall L > 0,$$

para qualquer solução u de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$ com CIN e $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$. Como este expoente γ_2 foi utilizado em [12, 14] para determinar a α_H-Hausdorff continuidade do operador $H_{\lambda,\theta,\rho}$, vamos manter esta mesma estimativa, de modo que

$$\|u\|_{q_n} \leq C_2 q_n^{\gamma_2}.$$

Notamos que o expoente γ_1 é obtido em termos do expoente τ_1 através da Proposição 4.8, sendo esta uma reprodução da Proposição 2.1 em [12], a qual permite estimar a quantidade $\|U\|_L$ (e consequentemente $\|u\|_L$) para L suficientemente grande, fazendo-se a interpolação para os L's não-inteiros.

Proposição 4.8. *Suponha que a sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associada ao número de rotação θ satisfaça $q_n \leq C_\theta^n$. Então, para todo λ, existem constantes positivas γ_1, C_1 de modo que para todo $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta})$ e todo $\rho \in [0,1)$, qualquer solução u de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$ com CIN satisfaz*

$$\|u\|_L \geq C_1 L^{\gamma_1},$$

para L suficientemente grande.

Demonstração. Temos, pela Proposição 4.1, que existe $\tau_1 > 0$ com $\|U\|_{q_n} \geq D_\lambda^{-1} q_n^{\tau_1}$. Por hipótese, existe $1 < C_{\theta,1} < \infty$ tal que $q_{8n} \leq C_{\theta,1}^n$ e sabemos que existe $1 < C_{\theta,2} < \infty$ de modo que $q_n \geq C_{\theta,2}^n$. Escolha $\varepsilon \in \left(\frac{\ln C_{\theta,1} - \ln C_{\theta,2}}{\ln C_{\theta,1}}\tau_1, \tau_1\right)$. Seja $\gamma_1 \equiv \tau_1 - \varepsilon$. Temos

$$\tau_1 - \frac{\ln C_{\theta,1} - \ln C_{\theta,2}}{\ln C_{\theta,1}}\tau_1 > \tau_1 - \varepsilon > 0.$$

Daí,

$$\tau_1 \ln C_{\theta,1} - \tau_1 \ln C_{\theta,1} + \tau_1 \ln C_{\theta,2} > \gamma_1 \ln C_{\theta,1} \quad \text{e} \quad \gamma_1 > 0,$$

o que implica

$$\ln C_{\theta,1}^{\gamma_1} - \ln C_{\theta,2}^{\tau_1} < 0.$$

Logo,

$$\frac{C_{\theta,1}^{\gamma_1}}{C_{\theta,2}^{\tau_1}} < 1.$$

Escolha $n \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\left(\frac{C_{\theta,1}^{\gamma_1}}{C_{\theta,2}^{\tau_1}}\right)^n \leq \frac{1}{C_{\theta,1}^{\gamma_1}}$$

e tome L suficientemente grande de modo que $q_n \leq L < q_{n+1}$. Assim,

$$\|U\|_L \geq \|U\|_{q_n} \geq \frac{1}{D_\lambda} q_n^{\tau_1} \geq \frac{1}{D_\lambda} C_{\theta,2}^{n\tau_1} \geq \frac{1}{D_\lambda} C_{\theta,1}^{(n+1)\gamma_1} \geq \frac{1}{D_\lambda} q_{n+1}^{\gamma_1} \geq \frac{1}{D_\lambda} L^{\gamma_1}.$$

Portanto, para qualquer solução u de $(H_{\lambda,\theta,\rho} - E)u = 0$, existe $C_1 = \frac{1}{D_\lambda\sqrt{2}}$ tal que

$$\|u\|_L \geq C_1 \|U\|_L \geq C_1 L^{\gamma_1},$$

para L suficientemente grande. □

Recordemo-nos da demonstração da Proposição 4.8 em que foi considerado $\gamma_1 \equiv \tau_1 - \varepsilon$, com $\varepsilon \in \left(\frac{\ln C_{\theta,1} - \ln C_{\theta,2}}{\ln C_{\theta,1}}\tau_1, \tau_1\right)$. Portanto, concluímos que

$$\alpha_P = \frac{2\tau_1}{\tau_1 + \gamma_2} > \alpha_H = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Observação 4.9. Construamos um exemplo de um número irracional $\theta = [0; a_1, a_2, \ldots]$

de densidade quase limitada que não é de densidade limitada. Seja

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,;$$

para obter este irracional, basta construirmos (a_n) e uma subsequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de forma que $A_{n_j} \leq 2$ e $A_{n_j+1} \geq j$.

Para tanto, escreva $n_1 = 2$ e tome $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 3$; escolha $n_2 = 5$ com $a_4 = a_5 = 1$, $a_6 = 2 \times 6$; agora, considere $n_3 = 6A_6 = 19$ e escreva $a_7 = \ldots = a_{19}$=1, $a_{20} = 3 \times 20$. Procedendo-se desta maneira, obtemos a subsequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$n_{j+1} = A_{n_j+1}(n_j + 1), \quad \forall j > 2,$$

com os termos (a_n) dados por

$$a_n = \begin{cases} j(n_j + 1), & n \in J \\ 1, & n \notin J \end{cases},$$

sendo $J = \{n_j + 1 : j \in \mathbb{N}\}$.

Observação 4.10. O conjunto dos números de densidade quase limitada possui medida de Lebesgue nula. De fato, em [35] se demostrou que para quase todo $\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ com respeito à medida de Lebesgue, temos que $a_n > n \ln n$, para um número infinito de valores de n. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n \ln n \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i > \ln n.$$

Capítulo

5

Estabilidade da dimensão espectral

Neste capítulo estudamos, a estabilidade das dimensões de Hausdorff e empacotamento da medida espectral de operadores de Schrödinger H da forma (1.1) em $l^2(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{N})$, com potencial $V = \{V(n)\}$, sob certas perturbações com decaimento polinomial $P = \{P(n)\}$ (real). Recordamos que neste texto o termo medida espectral para o operador (1.1) atuando na semi-reta à direita (i.e., $l^2(\mathbb{N})$) se refere à medida associada ao vetor cíclico δ_0, enquanto que em $l^2(\mathbb{Z})$, este termo se refere à medida espectral associada a ambos δ_0 e δ_1.

Apresentaremos a demonstração do Teorema 1.6 e aplicaremos este resultado à família de operadores $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$ gerada por potenciais sturmianos com número de rotações de densidade limitada, e consequentemente obteremos a demonstração do Teorema 1.5.

Outra classe de operadores [31, 53] em que é possível determinar propriedades espectrais fractais (de Hausdorff e de empacotamento) é a dos operadores esparsos H_φ^α definidos por (1.1) em $l^2(\mathbb{N})$, satisfazendo a condição de contorno

$$\psi(0)\cos\varphi + \psi(1)\sin\varphi = 0, \quad \varphi \in (-\pi/2, \pi/2], \tag{5.1}$$

e, para cada $\alpha \in (0,1)$, com potenciais

$$V(n) = \begin{cases} x_j^{(1-\alpha)/2\alpha}, & n = x_j \in \mathcal{B} \\ 0, & n \notin \mathcal{B} \end{cases}, \tag{5.2}$$

sendo $\mathcal{B} = (x_j)_j = \left(2^{j^j}\right)_j$. A restrição da medida espectral deste operador ao intervalo

$(-2,2)$ possui dimensão de Hausdorff exata α e também possui a propriedade de ser 1-empacotamento dimensional, sempre para toda condição de contorno φ.

Assim, também podemos empregar o Teorema 1.6 na demonstração do seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Fixe $\alpha \in (0,1)$. Sejam H_φ^α como acima e*

$$(H_\varphi^{P,\alpha}\psi)(n) := (H_\varphi^\alpha\psi)(n) + P(n)\psi(n), \quad \psi \in l^2(\mathbb{N}), \tag{5.3}$$

com $|P(n)| \le C(1+n)^{-p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para algum $C > 0$ e $p > \min\{3/(2\alpha), (2-\alpha)/\alpha\}$. Então, qualquer componente singular contínua da medida espectral associada ao operador $H_\varphi^{P,\alpha}$, restrita a $(-2,2)$, também possui dimensão de Hausdorff α exata e preserva a propriedade de 1-empacotamento dimensional, para toda condição de contorno φ.

Para ilustrar o Teorema 5.1, consideramos $\alpha = 1/2$; então quando existir a componente singular contínua do espectro de $H_\varphi^{P,\alpha}$, temos que a dimensão de Hausdorff α exata e a propriedade de ser 1-empacotamento dimensional são preservadas se $p > 3$.

5.1 Operadores com perturbações de decaimento polinomial

Apresentamos nesta seção a demonstração do Teorema 1.6, o qual é baseado em resultados de [36]. Suponha que o comportamento das soluções da equação de autovalores (1.3), com $V = V_0$, seja conhecido; a ideia é usar este conhecimento para determinar o comportamento das soluções de (1.3) com o potencial $V = V_0 + P$, sendo que a perturbação P possui decaimento polinomial como em (1.9).

A fim de evitar notações carregadas, denotamos por $u_1 := u_{1,\varphi,E}$ a solução subordinada para $V = V_0$, e $u_2 := u_{2,\varphi,E}$ a correspondente solução satisfazendo a condição inicial ortogonal (1.4). Como usual [36], aplicamos o método da variação dos parâmetros para obter um sistema de soluções linearmente independentes da equação (1.3) para $V = V_0+P$, ou seja, analisaremos as soluções v da forma

$$v(n) = w_1(n)u_1(n) + w_2(n)u_2(n)$$

e com

$$v(n-1) - v(n) = w_1(n)\left[u_1(n-1) - u_1(n)\right] + w_2(n)\left[u_2(n-1) - u_2(n)\right].$$

Denotemos $w(n) := \begin{pmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{pmatrix}$; assim, a equação de autovalores (1.3) para $V = V_0 + P$ é equivalente ao sistema de equações

$$w(n+1) - w(n) = A(n)w(n), \tag{5.4}$$

com

$$A(n) = -P(n)\begin{pmatrix} u_1(n)u_2(n) & u_2(n)^2 \\ -u_1(n)^2 & -u_1(n)u_2(n) \end{pmatrix}.$$

Dada uma função monótona crescente positiva $f : \{0, 1, 2, \cdots\} \to [1, \infty)$, seja

$$G(n) := \max\left\{|P(n)|\left(|u_1(n)u_2(n)| + |u_2(n)|^2\right); |P(n)|\left(f(n)|u_1(n)|^2 + |u_1(n)u_2(n)|\right)\right\}.$$

Lema 5.2. *Seja f como acima e suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} G(n) < \infty.$$

Então, existem soluções $w^{\pm}$ de (5.4) de modo que, quando $n \to \infty$,

(i) $w_1^-(n) \to 1$ *e* $f(n)w_2^-(n) \to 0$,

(ii) $w_1^+(n) \to 0$ *e* $w_2^+(n) \to 1$.

Demonstração. A demonstração do Lema 5.2 segue os mesmos passos do Teorema 2.2

in [36], com adaptações simples para o caso discreto. Mais especificamente, denote

$$w^{-(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w^{-(m+1)}(n) = -\sum_{j=n}^{\infty} A(j) w^{-(m)}(j);$$

estamos interessados em determinar a convergência desta série. Consideremos a norma $\|\cdot\|_n^+$ em $\mathbb{C}^2$ definida por

$$\|w^{-(m)}(j)\|_n^+ = \max\{|w_1^{-(m)}(j)|, |w_2^{-(m)}(j)| f(n)\}.$$

Como f é crescente, se $j > n$, então $\|w^{-(m)}(j)\|_n^+ \le \|w^{-(m)}(j)\|_j^+$, e ainda como $f \ge 1$, segue-se que $\|A(j)w^{-(m)}(j)\|_n^+ \le G(j)\|w^{-(m)}(j)\|_j^+$. Então,

$$\begin{aligned} \|w^{-(m+1)}(j)\|_n^+ &\le \sum_{j=n}^{\infty} \|A(j)w^{-(m)}(j)\|_n^+ \le \sum_{j=n}^{\infty} \|A(j)w^{-(m)}(j)\|_j^+ \\ &\le \sum_{j=n}^{\infty} G(j)\|w^{-(m)}(j)\|_j^+. \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos

$$\sup_{j\ge n} \|w^{-(m+1)}(j)\|_j^+ \le \sup_{j \ge n} \|w^{-(m)}(j)\|_j^+ \sum_{j=n}^{\infty} G(j),$$

demonstrando a convergência da série; por indução,

$$\sup_{j\ge n} \|w^{-(m+1)}(j)\|_j^+ \le \left[\sum_{j=n}^{\infty} G(j)\right]^m.$$

Daí, resulta que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de maneira que a expressão

$$w^-(n) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} w^{-(m)}(n)$$

converge se $n \ge n_0$, com $\sum_{j=n_0}^{\infty} G(n) < 1$.

Logo, está bem-definida

$$w^-(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=n}^{\infty} A(j)w(j),$$

a qual é solução de (5.4). Além disso,

$$\left\| w^-(n) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_n^+ \longrightarrow 0,$$

quando $n \to \infty$, concluindo-se o item (i) deste lema. A demonstração do item (ii), se segue de modo análogo ao caso anterior, sendo que agora

$$w^{+(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w^{+(m+1)}(n) = -\sum_{j=n}^{\infty} A(j)w^{+(m)}(j).$$

Portanto, considerando-se $f = 1$, obtemos, de modo análogo ao item (i), uma solução w^+ de (5.4) que satisfaz (ii). $\square$

Na demonstração do Teorema 1.6, precisamos escolher uma função f tal que $G \in l^1(\mathbb{N})$ e de modo que possamos empregar ideias de [31]. O próximo resultado é uma (não completamente imediata) versão discreta do Lema 3.2 de [36].

Lema 5.3. *Seja $\{\xi(n)\}$ uma sequência tal que, para alguma constante positiva C_1,*

$$|\xi(n)| \leq C_1(1+n)^{-a}, \tag{5.5}$$

e sejam ψ_1, ψ_2 soluções de (1.3) satisfazendo

$$\|\psi_1\|_L \|\psi_2\|_L \leq C_2(1+L)^b, \tag{5.6}$$

para $L \in \mathbb{N}$. Se $a > b > 0$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi(n)\psi_1(n)\psi_2(n)| < \infty.$$

Demonstração. Seja $g : \{0, 1, \ldots\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) := \sum_{j=1}^{n} |\psi_1(j)\psi_2(j)|$ para $n \geq 1$ e $g(0) = 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e (5.6),

$$g(n) \leq C_2(1+n)^b. \tag{5.7}$$

Sem perda de generalidade, simplificamos a notação tomando-se $C_1 = C_2 = 1$. Por (5.5), para cada $L \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{L} |\xi(n)\psi_1(n)\psi_2(n)| &\leq \sum_{n=1}^{L} (1+n)^{-a}|\psi_1(n)\psi_2(n)| \\
&= \sum_{n=1}^{L} (1+n)^{-a}[g(n) - g(n-1)] \\
&= (2+L)^{-a}g(L) + \sum_{n=1}^{L} [(1+n)^{-a} - (2+n)^{-a}]g(n) \\
&\leq (2+L)^{-a}g(L) + \sum_{n=1}^{L} a(1+n)^{-a-1}g(n);
\end{aligned}$$

a segunda desigualdade é uma consequência do Teorema do Valor Médio aplicado à função $h(x) = (1+x)^{-a}$, $x \geq 0$, e a desigualdade

$$\max_{n \leq x \leq n+1} |h'(x)| \leq a(1+n)^{-a-1}.$$

Portanto, por (5.7), temos que

$$\sum_{n=1}^{L} |\xi(n)\psi_1(n)\psi_2(n)| \leq (2+L)^{-a}(1+L)^b + a\sum_{n=1}^{L} (1+n)^{b-a-1}.$$

Agora, como $a > b$, segue-se que

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{n=1}^{L} |\xi(n)\psi_1(n)\psi_2(n)| \leq a \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^{b-a-1} < \infty.$$

□

Pela definição de $G(n)$, a fim de se mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} G(n) < \infty$, é suficiente verificar que cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P(n)u_1(n)u_2(n)|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |P(n)||u_2(n)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)|P(n)||u_1(n)|^2$$

é finita. No que se segue, escolha, para cada $\gamma > 0$, $f(n) = (1+n)^{\gamma}$. Logo, pelo Lema 5.3 e pelas hipóteses (1.5) e (1.9), as séries acima serão finitas se

$$p > 2\gamma_2 \quad \text{e} \quad p - \gamma > 2\gamma_2; \tag{5.8}$$

ou seja, podemos escolher $\gamma > 0$ de modo que $\gamma_2 - \gamma_1 < \gamma < p - 2\gamma_2$ (lembre-se $p > 3\gamma_2 - \gamma_1$), e consequentemente (5.8) vale, o que implica em $G \in l^1(\mathbb{N})$.

Demonstração. (Teorema 1.6) Pelas considerações acima, existem soluções $w^{\pm}$ de (5.4), obtidas no Lema 5.2, de modo que

$$v_1(n) = w_1^-(n)u_1(n) + w_2^-(n)u_2(n), \quad v_2(n) = w_1^+(n)u_1(n) + w_2^+(n)u_2(n)$$

são soluções linearmente independentes de $(H+P)v = Ev$. Assim, basta demonstrar que

$$\frac{\|v_1\|_L}{\|u_1\|_L} \longrightarrow 1 \quad \text{e} \quad \frac{\|v_2\|_L}{\|u_2\|_L} \longrightarrow 1, \tag{5.9}$$

quando $L \to \infty$. De fato, se (5.9) for válido, temos que para cada $\kappa \in [0,1]$,

$$\left[\frac{\|v_1\|_L}{\|v_2\|_L^{\kappa}}\right]\left[\frac{\|u_1\|_L}{\|u_2\|_L^{\kappa}}\right]^{-1} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

o que comprova a afirmação (1.10). Note que (5.9) também assegura que v_1 não é de quadrado somável e que v_1 é uma solução subordinada, logo $E \in S(H+P)$.

A fim de se verificar (5.9), começamos observando que

$$\begin{aligned}
\frac{|\|v_1\|_L - \|u_1\|_L|}{\|u_1\|_L} &\leq \frac{\|v_1 - u_1\|_L}{\|u_1\|_L} \\
&\leq \frac{\|v_1 - w_1^- u_1\|_L}{\|u_1\|_L} + \frac{\|(w_1^- - 1)u_1\|_L}{\|u_1\|_L} \\
&= \frac{\|w_2^- u_2\|_L}{\|u_1\|_L} + \frac{\|(w_1^- - 1)u_1\|_L}{\|u_1\|_L}. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Como $w_1^-(n) \to 1$ (Lema 5.2), então para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que $|w_1^-(n) - 1| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Assim, para cada número inteiro $L > n_0$,

$$\frac{\|(w_1^- - 1)u_1\|_L^2}{\|u_1\|_L^2} \leq \frac{\sum_{n=1}^{n_0} |(w_1^-(n) - 1)u_1(n)|^2}{\|u_1\|_L^2} + \varepsilon^2,$$

e, consequentemente,

$$\frac{\|(w_1^- - 1)u_1\|_L}{\|u_1\|_L} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

sendo que $u_1 \notin l^2$. Também temos, pelo Lema 5.2, que $f(L)w_2^-(L) \to 0$ e $f(L) = (1+L)^\gamma$, com $\gamma > \gamma_2 - \gamma_1$. Assim, existe uma constante positiva C de maneira que

$$\frac{\|w_2^- u_2\|_L^2}{\|u_1\|_L^2} \leq \frac{C \sum_{n=1}^{L} (1+n)^{-2\gamma} |u_2(n)|^2}{\|u_1\|_L^2}.$$

Como no Lema 5.3, podemos escrever (também com $C_1 = C_2 = 1$)

$$\sum_{n=1}^{L} (1+n)^{-2\gamma} |u_2(n)|^2 \leq (2+L)^{2\gamma_2 - 2\gamma} + 2\gamma \sum_{n=1}^{L} (1+n)^{2\gamma_2 - 2\gamma - 1},$$

e sendo $\|u_1\|_L^2 \geq L^{2\gamma_1}$, temos

$$\frac{\|w_2^- u_2\|_L}{\|u_1\|_L} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

portanto, por (5.10),

$$\frac{\|v_1\|_L}{\|u_1\|_L} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

De modo semelhante ao que foi apresentado acima, temos que

$$\begin{aligned} \frac{|\|v_2\|_L - \|u_2\|_L|}{\|u_2\|_L} &\leq \frac{\|v_2 - u_2\|_L}{\|u_2\|_L} \\ &\leq \frac{\|v_2 - w_2^+ u_2\|_L}{\|u_2\|_L} + \frac{\|(w_2^+ - 1)u_2\|_L}{\|u_2\|_L} \\ &= \frac{\|w_1^+ u_1\|_L}{\|u_2\|_L} + \frac{\|(w_2^+ - 1)u_2\|_L}{\|u_2\|_L}. \end{aligned}$$

Agora, como $w_2^+(n) \to 1$ e $w_1^+(n) \to 0$, para $n \to \infty$, e sendo u_1 uma solução subordinada, segue-se que ambos os termos no lado direito da desigualdade acima tendem a zero para $L \to \infty$; logo,

$$\frac{\|v_2\|_L}{\|u_2\|_L} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

como necessário. □

5.2 Aplicações: Modelos sturmianos e esparsos

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 1.6 para demonstrar os Teoremas 1.5 e 5.1, cujas demonstrações são agora simples devido aos resultados já existentes na literatura [7, 14, 31, 32] para a família de operadores sturmianos $\{H_{\lambda,\theta,\rho}\}$ (de densidade limitada) e para classe de operadores esparsos H_φ^α gerados pelos potenciais (5.2).

Demonstração. (Teorema 1.5) Sabemos [28, 12, 14] que para operadores de Schrödinger $H_{\lambda,\theta,\rho}$, com potenciais sturmianos de densidade limitada, existem autofunções polinomialmente limitadas da forma

$$C_1 L^{\gamma_1} \leq \|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2},$$

para constantes positivas $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ e toda solução u da equação de autovalores $H_{\lambda,\theta,\rho}u = Eu$ com CIN. Com estas estimativas, foi verificado em [12, 14, 32] que o espectro de $H_{\lambda,\theta,\rho}$ é puramente α-Hausdorff contínuo, com $\alpha_H = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$, e pelo Corolário 4.7 a medida espectral deste operador é puramente α_P-empacotamento contínua (com o $\alpha_P = \frac{2\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$ obtido).

Recordemos que se obtivermos autofunções polinomialmente limitadas para a restrição do operador à semi-reta direita, o resultado sobre α-continuidade é independente do potencial na semi-reta esquerda.

Suponha que $\sigma(H^P_{\lambda,\theta,\rho})$ possua alguma componente singular contínua; como a perturbação possui decaimento $|P(n)| \leq C(1+|n|)^{-p}$, com $p > 3\gamma_2 - \gamma_1$, trata-se de uma perturbação compacta, e portanto o espectro essencial é preservado. Então, a componente singular contínua de $\sigma(H^P_{\lambda,\theta,\rho})$ está suportada em $S(H_{\lambda,\theta,\rho})$, e pelo Teorema 1.6, obtemos que o comportamento assintótico das autofunções do operador $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$ (isto é, as soluções de (1.3)) em (1.8) é análogo ao comportamento das autofunções dos operadores $H_{\lambda,\theta,\rho}$ (relação (1.10)). Portanto, novamente por resultados de α-subordinação, tal componente é ainda α_H-Hausdorff (α_P-empacotamento) contínua para estes operadores perturbados, com $\alpha_H = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$ (resp. $\alpha_P = \frac{2\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$). □

Notemos que o Corolário 1.8 se segue diretamente do fato de que o espectro $\sigma(H_{\lambda,\theta,\rho})$ é puramente singular contínuo, então, conforme obtido acima pelo Teorema 1.6, temos que $S(H_{\lambda,\theta,\rho}) \subset S(H^P_{\lambda,\theta,\rho})$; desse modo, o operador $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$ não possui autovalores em $\sigma(H_{\lambda,\theta,\rho})$, mas isso não implica que estas energias pertençam ao espectro singular contínuo de $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$. Na verdade, pode muito bem acontecer que $H^P_{\lambda,\theta,\rho}$ possua espectro pontual puro.

Demonstração. (Teorema 5.1) No Teorema 1.3 em [31], mostrou-se que a medida espectral do operador H^α_φ restrita a $(-2,2)$, com potencial $V_0 = V$ dado por (5.2), tem dimensão de Hausdorff α exata para quase toda condição de contorno (com relação à Lebesgue) $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$. No entanto, Tcheremchantsev apresentou em [53] (item 2 do Corolário 4.5) uma versão aprimorada deste resultado, a saber, que esta medida espectral restrita a $(-2,2)$ possui dimensão de Hausdorff α exata para qualquer condição de contorno $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$. Também, temos por [7, 9] que a medida espectral deste operador esparso H^α_φ restrita a $(-2,2)$ é 1-empacotamento dimensional, para qualquer condição de contorno $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Recordamos como em [31] que

$$\|u_1\|_L \|u_2\|_L \geq \frac{1}{2}(L-1). \tag{5.11}$$

Então, pela desigualdade (5.7) e (5.13) em [31], a estimativa (1.5) é satisfeita para $\gamma_2 > 1/(2\alpha)$, e se usando (5.11), obtemos $\gamma_1 \leq \max\{0, 1 - 1/(2\alpha)\}$. Portanto, como na demonstração do Teorema 1.5, por uma consequência direta do Teorema 1.6, obtemos que o comportamento assintótico das autofunções do operador $H_\varphi^{P,\alpha}$ em (5.3) é similar ao comportamento das autofunções do operador H_φ^α (relação (1.10)), e novamente por resultados de α-subordinação, segue-se que qualquer componente singular contínua da medida espectral para operador $H_\varphi^{P,\alpha}$ restrita à $(-2, 2)$ possui dimensão de Hausdorff α exata, também sendo 1-empacotamento dimensional, para qualquer condição de contorno $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$. $\square$

Capítulo

6

Subordinação fractal em intervalos

Neste capítulo, discutiremos resultados sobre subordinação de Hausdorff e empacotamento para o modelo de Schrödinger contínuo da forma (1.11), atuando em $L^2(I)$, sendo I um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ e $V(x)$ uma função real.

Vale recordar o modelo de Schrödinger para a partícula livre, ou seja $H = -d^2/dx^2$, que possui diferentes tipos espectrais dependendo do domínio em que estiver definido. Por exemplo, no caso deste operador estar definido em $L^2([0,1])$ com condições de contorno de Dirichlet, tem-se que seu espectro é pontual puro. Entretanto, se este mesmo operador estiver atuando em $L^2(\mathbb{R})$, então seu espectro é absolutamente contínuo em relação à medida de Lebesgue. Portanto, este simples exemplo evidencia a relevância que a escolha do domínio do operador possui com respeito à sua classificação espectral.

O grande desafio no estudo sobre subordinação de Hausdorff e empacotamento em intervalos é determinar exemplos de potenciais $V(x)$ de modo que os respectivos operadores de Schrödinger da forma (1.11) possuam espectro puramente singular contínuo com alguma dimensão de Hausdorff ou empacotamento não-triviais. Desse modo, gostaríamos de agradecer ao Prof. Rafael del Rio pela indicação do Exemplo iii) em ([45], p. 35), que indica um operador deste tipo, definido em um intervalo limitado, o qual possui espectro puramente singular contínuo. Seria interessante, portanto, obter informações sobre dimensões fractais do espectro desse modelo.

Na Seção 6.1 desta tese, vamos recordar as definições de autofunções subordinadas e sequencialmente subordinadas em um determinado ponto de um intervalo limitado [46], e introduzir os conceitos de autofunções α-Hausdorff (α-empacotamento) subordinadas e α-Hausdorff (α-empacotamento) sequencialmente subordinadas em intervalos.

Observamos que as referências [24, 46] apresentam versões da teoria de subordinação em relação à medida de Lebesgue para operadores da forma (1.11), atuando em intervalos limitados de $\mathbb{R}$. Desta forma, uma questão natural a ser verificada é a generalização de tais resultados para subordinação fractal de operadores em intervalos limitados. Estas questões são analisadas na Seção 6.1, sendo que consideramos modelos do tipo (1.11) atuando em intervalos limitados da forma $(0, b)$.

Na Seção 6.2, analisamos um exemplo de um modelo da forma (1.11) apresentado em [44] que possui espectro absolutamente contínuo em um determinado intervalo $(0, b)$. Seguindo ideias empregadas nas referências [37, 45], que verificam o fato de determinadas perturbações da partícula livre $-d^2/dx^2$ em $L^2(0, \infty)$ induzirem uma componente espectral singular contínua, na Seção 6.3 estudamos certas perturções do modelo descrito na Seção 6.2 por classes de potenciais gerados por variáveis aleatórias, conforme o modelo estudado na Seção 8 em [37].

As classes de potencias estudados na Seção 6.3 apresentam-se como um primeiro exemplo para modelos de operadores de Schrödinger em intervalos limitados, os quais indicam uma notável possibilidade de se obter alguma informação sobre propriedades fractais de seus espectros. Entretanto, resultados explícitos sobre a caracterização destas propriedades fractais são ainda desconhecidos. O que faremos é supor que certa hipótese (veja (6.24), ainda a ser demonstrada) é satisfeita.

6.1 Subordinação de operadores contínuos em intervalos

Nesta seção, estudaremos propriedades espectrais de operadores auto-adjuntos decorrentes da expressão diferencial

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad 0 < x < b < \infty, \tag{6.1}$$

sendo $V(x)$ integrável em todo subintervalo fechado de $(0,b)$.

$\mathcal{L}$ é uma expressão diferencial do tipo Sturm-Liouville com um ponto regular em 0 se para qualquer $c \in (0,b)$, tem-se que $\int_0^c |V(x)|dx < \infty$. Também, recorda-se que esta expressão diferencial deve satisfazer uma ou outra das seguintes condições:

- Se para cada $z \in \mathbb{C}$ e algum $c \in (0,b)$, todas as soluções de $\mathcal{L}u = zu$ estão em $L^2(c,b)$, então $\mathcal{L}$ é chamado *limit circle* em b.

- Se para cada $z \in \mathbb{C}$ e algum $c \in (0,b)$, não mais do que uma solução linearmente independente de $\mathcal{L}u = zu$ está em $L^2(c,b)$, então $\mathcal{L}$ é chamado *limit point* em b, e para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, exatamente uma solução está em $L^2(c,b)$.

Consideraremos $\mathcal{L}$ como em (6.1) sendo regular no ponto 0 e *limit point* em b. Desse modo, um operador auto-adjunto $\mathcal{H}$ pode ser obtido a partir $\mathcal{L}$ em um domínio adequado, que é obtido por uma condição de contorno em 0. Variando-se as condições de contorno em cada caso, obtemos famílias de operadores auto-adjuntos $\mathcal{H}$ decorrentes de $\mathcal{L}$.

Para cada um desses $\mathcal{H}$, existem uma função espectral $\rho(E)$ monótona não-decrescente e uma aplicação unitária U de $L^2(0,b)$ no espaço $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ tal que, para cada $f \in L^2(0,b)$ em que $\mathcal{H}f \in L^2(0,b)$, a operação de $\mathcal{H}f$ em $L^2(0,b)$ é unitariamente equivalente à multiplicação de Uf pela variável E no espaço $L^2_\rho(-\infty,\infty)$. Assim, temos formalmente

$$\mathcal{H}f = U^{-1}EUf$$

e

$$\int_0^b |\mathcal{H}f|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |EUf|^2 d\rho(E).$$

O resultado geral é convenientemente resumido no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser conferida em [5] (Capítulo 9).

Teorema 6.1. *Seja $\mathcal{L}$ como em (6.1), regular no ponto 0 e limit point em b. Considere um operador auto-adjunto $\mathcal{H}$ obtido de $\mathcal{L}$ com condição de contorno no ponto 0 da forma*

$$u(0)\cos(\varphi) + u'(0)\sin(\varphi) = 0, \tag{6.2}$$

sendo $\varphi \in [0,\pi)$ fixo. Sejam $f(r) \in L^2(0,b)$ e h uma função Borel mensurável em $\mathbb{R}$, com $h(\mathcal{H})f(r) \in L^2(0,b)$. Então, existe um isomorfismo U de $L^2(0,b)$ em $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ que satisfaz

$$U(h(\mathcal{H})f(x)) = \lim_{\tau\uparrow b,\varsigma\downarrow 0} h(E)\int_\varsigma^\tau u_1(x,E)f(x)dx, \tag{6.3}$$

e

$$\int_0^b |h(\mathcal{H})f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |h(\mathcal{H})Uf|^2 d\rho(E),$$

sendo que a convergência (6.3) está em $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ e $u_1(x,E)$ é a solução de $\mathcal{L}u = Eu$ satisfazendo $u_1(0,E) = -\sin(\varphi)$, $u_1'(0,E) = \cos(\varphi)$. A função $\rho(E)$ é monótona, não-decrescente, contínua e tem variação limitada em subintervalos compactos de $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\begin{aligned} h(\mathcal{H})f(x) &= U^{-1}(h(E)Uf(x)) \\ &= \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} u_1(x,E)h(E)Uf(x)d\rho(E), \end{aligned}$$

sendo a convergência em $L^2(0,b)$.

A função espectral $\rho(E)$ gera uma medida de Borel-Stieltjes ρ, que é a medida espectral associada ao operador $\mathcal{H}$, a qual está relacionada com a conhecida m-função de -Weyl-Titchmarsh através de

$$\rho(E_2) - \rho(E_1) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{E_1+\delta}^{E_2+\delta} \operatorname{Im}(m(E+i\varepsilon))dE,$$

e da relação inversa

$$m(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(E-z)} d\rho(E) + \cot(\varphi).$$

Considerando-se que $\mathcal{L}$ é *limit point* em b, a m-função $m(z)$ satisfaz

$$\hat{u}(x,z) := u_2(x,z) + m(z)u_1(x,z) \in L^2(0,b), \tag{6.4}$$

para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, sendo $u_1(x,z)$ e $u_2(x,z)$ soluções de $\mathcal{L}u = zu$ satisfazendo as condições iniciais ortogonais

$$\begin{cases} u_1(0,z) = -\sin\varphi & u_2(0,z) = \cos\varphi \\ u_1'(0,z) = \cos\varphi & u_2'(0,z) = \sin\varphi \end{cases}. \tag{6.5}$$

Devido às semelhanças da m-função de operadores $\mathcal{H}$ atuando em intervalos limitados $(0, b)$ e destes mesmos operadores definidos na semi-reta $(0, \infty)$, é natural buscarmos adaptações dos resultados de subordinação fractal (Hausdorff e empacotamento) que relacionam o comportamento das soluções equação de autovalores

$$(\mathcal{H}u)(x) = Eu(x), \tag{6.6}$$

e a decomposição fractal do espectro dos operadores $\mathcal{H}$ definidos no intervalo $(0, b)$.

Definição 6.2. i) Uma solução u de (6.6) é chamada subordinada no ponto b se

$$\lim_{L\to b} \frac{\|u\|_L}{\|v\|_L} = 0$$

para qualquer solução v de (6.6) linearmente independente com u, sendo denotado $\|u\|_L = \int_0^L |u(r)|^2 dr$.

ii) Dado $\alpha \in (0, 1]$, uma solução u de (6.6) é chamada α-Hausdorff (α-empacotamento) subordinada no ponto b se

$$\liminf(\limsup)_{L\to b} \frac{\|u\|_L}{\|v\|_L^{\alpha/(2-\alpha)}} = 0,$$

para qualquer solução v de (6.6) linearmente independente com u.

Sejam $u_{1,E}$ e $u_{2,E}$ soluções da correspondente equação de autovalores (6.6) definidas em $(0, b)$, satisfazendo as condições iniciais (6.5) para $\varphi \in [0, \phi)$ fixo. De modo análogo a (3.1), dado $\varepsilon > 0$, definem-se os comprimentos $L(\varepsilon) \in (0, b)$ pela igualdade

$$\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)} \|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)} = \frac{1}{2\varepsilon}. \tag{6.7}$$

Como na Observação 3.1, $W[u_{1,E}, u_{2,E}] = u_{1,E}u_{2,E}' - u_{1,E}'u_{2,E} = 1$, e no máximo uma das soluções $u_{1,E}$ ou $u_{2,E}$ pertence a $L^2(0,b)$, e portanto o lado esquerdo de (6.7) é uma função contínua de L, monotonicamente crescente, e tende a infinito quando $L \to b$. Por outro lado, $\frac{1}{2\varepsilon}$ é uma função contínua de ε, monotonicamente decrescente, que tende a infinito quando $\varepsilon \to 0$. Assim, a função $L(\varepsilon)$ está bem definida por (6.7) e $L(\varepsilon) \to b$ para $\varepsilon \to 0$.

Adaptemos a relação, devida a Jitomirskaya-Last (Teorema 3.2), envolvendo as m-funções e as soluções $u_{1,E}$ e $u_{2,E}$ de (6.6).

Teorema 6.3. *Seja $\mathcal{L}$ a expressão diferencial definida por* (6.1)*, a qual é regular em* 0 *e limit point em b. Seja $\mathcal{H}$ o operador auto-adjunto definido por $\mathcal{L}$ satisfazendo a condição de contorno* (6.2)*, e sejam $E \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ dados. Então, vale a desigualdade*

$$\frac{5-\sqrt{24}}{|m(E+i\varepsilon)|} < \frac{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}} < \frac{5+\sqrt{24}}{|m(E+i\varepsilon)|}. \tag{6.8}$$

Demonstração. Como na demonstração da desigualdade de Jitomirskaya-Last (Teorema 1.1 em [31]), é possível obter o resultado acima através da relação entre as soluções das equações $\mathcal{H}u = Eu$ e $\mathcal{H}u = (E+i\varepsilon)u$, sendo esta relação chamada de fórmula de variação dos parâmetros; para detalhes, veja [5, 46]. Pela definição da função $\hat{u}(x,z)$ em (6.4) e pela fórmula de variação dos parâmetros (ver Equação 7.2.8 em [46]),

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,z) \;&=\; -u_{2,E}(x) + m(z)u_{1,E}(x) + \mathrm{i}\varepsilon u_{2,E}(x)\int_0^x u_{1,E}(t)\hat{u}(t,z)dt \\ &\quad -\mathrm{i}\varepsilon u_{1,E}(x)|\int_0^x u_{2,E}(t)\hat{u}(t,z)dt. \end{aligned}$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned} |\hat{u}(x,z)| &\geq |u_{2,E}(x){-}m(z)u_{1,E}(x)|{-}\,\varepsilon\Big(|u_{2,E}(x)|\int_0^x |u_{1,E}(t)||\hat{u}(t,z)|dt \\ &\quad + |u_{1,E}(x)|\int_0^x |u_{2,E}(t)||\hat{u}(t,z)|dt\Big) \\ &\geq |u_{2,E}(x) - m(z)u_{1,E}(x)|{-}\,\varepsilon\Big(|u_{2,E}(x)|\|u_{1,E}\|_x\|\hat{u}\|_x \\ &\quad + |u_{1,E}(x)|\|u_{2,E}\|_x\|\hat{u}\|_x\Big) \\ &\geq |u_{2,E}(x) - m(z)u_{1,E}(x)|{-}\,\varepsilon\Big(|u_{2,E}(x)|\|u_{1,E}\|_L\|\hat{u}\|_L \\ &\quad + |u_{1,E}(x)|\|u^+_{2,E}\|_L\|\hat{u}\|_L\Big) \end{aligned}$$

para $0 \leq x \leq L$. Usando-se a norma $\| \cdot \|_L$, obtemos

$$\|\hat{u}\|_L \geq \|u_{2,E} - m(z)u_{1,E}\|_L - 2\varepsilon\|u_{1,E}\|_L\|u_{2,E}\|_L\|\hat{u}\|_L$$

para qualquer $L > 0$. Considerando-se $L = L(\varepsilon)$, o que implica $2\varepsilon\|u_{1,E}\|_L\|u_{2,E}\|_L = 1$ (por (6.7)), obtemos a desigualdade

$$2\|\hat{u}\|_{L(\varepsilon)} \geq \|u_{2,E} - m(z)u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}. \tag{6.9}$$

Sabemos que $\frac{\mathrm{Im}(m(z))}{\mathrm{Im}(z)} = \int_0^b |\hat{u}(x,z)|^2 dx$, (ver Equação (7.2.3) em [46]), de modo que

$$\begin{aligned} \frac{4\mathrm{Im}(m(z))}{\varepsilon} &= 4\int_0^b |\hat{u}(x,z)|^2 dx \\ &> 4\|\hat{u}\|^2_{L(\varepsilon)} \\ &\geq \|u_{2,E} - m(z)u_{1,E}\|^2_{L(\varepsilon)} \\ &\geq \|u_{2,E}\|^2_{L(\varepsilon)} + |m(z)|^2\|u^+_{1,E}\|^2_{L(\varepsilon)} \\ &\quad -2|m(z)|\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Novamente, usando-se $2\varepsilon\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)} = 1$, e se multiplicando os dois lados de (6.10) por 2ε, obtemos

$$8\mathrm{Im}(m(z)) > \frac{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}} + |m(z)|^2\frac{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}} - 2|m(z)|,$$

o que implica em

$$|m(z)|^2\frac{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}} - 10|m(z)| + \frac{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u^+_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}} < 0. \tag{6.11}$$

Resolvendo-se (6.11) como uma inequação quadrática na variável $|m(z)|$, obtemos

$$(5-\sqrt{24})\frac{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}} < |m(z)| < (5+\sqrt{24})\frac{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}},$$

e portanto

$$\frac{5-\sqrt{24}}{|m(z)|} < \frac{\|u_{1,E}\|_{L(\varepsilon)}}{\|u_{2,E}\|_{L(\varepsilon)}} < \frac{5+\sqrt{24}}{|m(z)|}.$$

□

Através dessa relação é possível generalizar resultados de subordinação fractal [7, 31, 32, 33] para obter propriedades dimensionais da medida espectral de $\mathcal{H}$ definido no intervalo $(0, b)$. Segue-se diretamente do Teorema 6.3 e da relação (6.7) o seguinte

Corolário 6.4. *Seja $\mathcal{H}$ como no Teorema 6.3, e sejam $E \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dados. Fixe $\alpha \in (0, 1]$. Então,*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{(1-\alpha)}|m(E+i\varepsilon)| = \infty \;\Leftrightarrow\; \liminf_{L\to b} \frac{\|u_{1,E}\|_L}{\|u_{2,E}\|_L^{\alpha/(2-\alpha)}} = 0,$$

e

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{(1-\alpha)}|m(E+i\varepsilon)| = \infty \;\Leftrightarrow\; \limsup_{L\to b} \frac{\|u_{1,E}\|_L}{\|u_{2,E}\|_L^{\alpha/(2-\alpha)}} = 0.$$

Notamos que a parte α-Hausdorff contínua da medida espectral está suportada no conjunto de energias E em que (6.6) não possui solução α-Hausdorff subordinada em b, e sua parte α-Hausdorff singular está suportada no conjunto de energias E em que $u_{1,\varphi,E}$ é uma solução α-Hausdorff subordinada em b. Observa-se, também, que é possível caracterizar a medida espectral como α-empacotamento contínua através da ausência de soluções α-empacotamento subordinadas em b.

Foram analisados em [46] resultados sobre a decomposição da medida espectral com relação à medida de Lebesgue usando-se uma variação da definição de subordinação, a saber, considerando-se sequências $\{L_j\}$ que se aproximam de b, ao invés do limite quando L se aproxima de b. Desse modo, vamos considerar a seguinte definição, que está intimamente relacionada à Definição 6.2.

Definição 6.5. i) Uma solução u de (6.6) é chamada sequencialmente subordinada no ponto b se existe uma sequência $L_j \to b$ de modo que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|u\|_{L_j}}{\|v\|_{L_j}} = 0,$$

para qualquer solução v de (6.6) linearmente independente com u.

ii) Dado $\alpha \in (0,1]$, uma solução u de (6.6) é chamada sequencialmente α-Hausdorff (α-empacotamento) subordinada no ponto b se existe uma sequência $L_j \to b$ de modo que

$$\liminf(\limsup)_{j\to\infty}\frac{\|u\|_{L_j}}{\|v\|_{L_j}^{\alpha/(2-\alpha)}} = 0$$

para qualquer solução v de (6.6) linearmente independente com u.

Teorema 6.6. *Seja $\mathcal{H}$ como no Teorema 6.3. Temos, então, seguinte:*

1. *Suponha que, para quase todo E com relação à medida de Lebesgue em um intervalo (E_1, E_2), exista uma solução u_E da equação de autovalores* (6.6) *subordinada em b. Então, $\mathcal{H}$ possui espectro puramente singular neste intervalo.*

2. *Suponha que, para todo E em um intervalo (E_1, E_2), não exista solução da equação de autovalores* (6.6) *sequencialmente subordinada em b. Então, $\mathcal{H}$ possui espectro puramente absolutamente contínuo neste intervalo.*

Demonstração. Esta demonstração consiste exatamente do Teorema 7.3 em [46]. □

Observação 6.7. Notamos, como no comentário que se segue após a demonstração do Teorema 7.3 em [46], que é possível estabelecer condições necessárias e suficientes para subordinação e subordinação sequencial. De fato, se $u_1(x,E)$ for sequencialmente subordinada em b, então sabemos que $\limsup_{\varepsilon\to 0} m(E+i\varepsilon) = \infty$. Logo, por resultados da teoria de variáveis complexas, também sabemos que $\lim_{\varepsilon\to 0} m(E+i\varepsilon) = \infty$, para quase todos os E com relação a medida de Lebesgue. Assim, subordinação sequencial para quase todos os valores de energia implica subordinação em quase toda parte, apesar de subordinação sequencial não implicar em subordinação.

Agora, com relação à decomposição fractal (Hausdorff e empacotamento), temos o seguinte:

Corolário 6.8. *Seja $\mathcal{H}$ como no Teorema 6.3 e considere ρ a medida espectral associada a este operador. Fixe $\alpha \in (0,1]$. Então, valem:*

1. *Suponha que para todo E em algum subconjunto Ω, a solução $u_{1,E}$ da equação de autovalores* (6.6) *é sequencialmente α-Hausdorff subordinada em b. Então, a restrição $\rho(\Omega \cap \cdot)$ é α-Hausdorff singular.*

2. *Suponha que para todo E em algum subconjunto Ω, não exista solução da equação de autovalores* (6.6) *sequencialmente α-empacotamento subordinada em b. Então, a restrição $\rho(\Omega \cap \cdot)$ é α-empacotamento contínua.*

Demonstração. 1. Segue-se do Corolário 6.4 que para todo E em um subconjunto Ω,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{(1-\alpha)} |m(E + i\varepsilon)| = \infty.$$

Então, pela relação (2.1), temos que $(\overline{D}^{\alpha}\rho)(E) = \infty$, e consequentemente a restrição $\rho(\Omega \cap \cdot)$ é α-Hausdorff singular.

2. Segue-se do Corolário 6.4 que para todo E em um subconjunto Ω,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{(1-\alpha)} |m(E + i\varepsilon)| < \infty.$$

Logo, pelo Teorema 2.16, segue-se que $(\underline{D}^{\alpha}\rho)(E) < \infty$. Portanto, a restrição $\rho(\Omega \cap \cdot)$ é α-empacotamento contínua. □

6.2 Modelo com espectro absolutamente contínuo

Nesta seção, estudamos uma família de operadores de Schrödinger em um intervalo limitado com potencias gerados por funções-δ. Tais operadores, introduzidos em [44], possuem componente espectral puramente absolutamente contínuo. Reproduziremos nesta seção algumas definições e notações utilizadas em [44], com o objetivo de definir, na Seção 6.3, um modelo de Schrödinger em que é possível obter alguma informação sobre as dimensões fractais.

Antes de apresentarmos a construção de um potencial $\tilde{V}(x)$ adequado, será conveniente introduzir uma função $V_a(x)$, dependendo de um valor positivo a, de modo que quando

a varia (e tende a zero) através de uma sequência de valores a_n, $V_{a_n}(x)$ determina o potencial $\tilde{V}(x)$ em subintervalos sucessivamente menores no intervalo $(0, b)$.

Primeiramente, consideraremos $V_a(x)$ dado por

$$\begin{aligned} V_a(x) &= y_1\delta(x-a) + y_2\delta(x-2a) + y_2\delta(x-3a) + y_1\delta(x-4a) \\ &\quad + y_2\delta(x-5a) + y_1\delta(x-6a) + y_1\delta(x-7a) + y_2\delta(x-8a), \end{aligned} \tag{6.12}$$

sendo $y_1 \equiv y_1(a) = (a^{-3/2} - a^{-1})$, $y_2 \equiv y_2(a) = (a^{-1/2} - a^{-1})$; δ representa a função-δ de Dirac.

Sejam $0 < a < 1$ e $f(x)$ satisfazendo a equação de autovalores

$$-f''(x) + V_a(x)f(x) = Ef(x), \qquad (E > 0).$$

Notamos que $f'(x)$ é descontínua em cada singularidade-δ $x = Ka$, com $K = 1, \ldots, 8$. Desse modo, adotamos a convenção de que $f'(x)$ é definida pelo limite à direita

$$f'(Ka) = \lim_{x \to Ka^+} f'(x).$$

Pela atuação da função-δ e solução direta da equação de autovalores, estudaremos as matrizes de transferência associadas a esta equação da forma

$$\begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \end{pmatrix} = M_a^{(1)} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} f(2a) \\ f'(2a) \end{pmatrix} = M_a^{(2)} \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \end{pmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} M_a^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(E^{1/2}a) & E^{-1/2}\sin(E^{1/2}a) \\ -E^{1/2}\sin(E^{1/2}a) & \cos(E^{1/2}a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(E^{1/2}a) & E^{-1/2}\sin(E^{1/2}a) \\ y_1\cos(E^{1/2}a) - E^{1/2}\sin(E^{1/2}a) & y_1E^{-1/2}\sin(E^{1/2}a) + \cos(E^{1/2}a) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_a^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(E^{1/2}a) & E^{-1/2}\sin(E^{1/2}a) \\ -E^{1/2}\sin(E^{1/2}a) & \cos(E^{1/2}a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(E^{1/2}a) & E^{-1/2}\sin(E^{1/2}a) \\ y_2\cos(E^{1/2}a) - E^{1/2}\sin(E^{1/2}a) & y_2E^{-1/2}\sin(E^{1/2}a) + \cos(E^{1/2}a) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notamos que para obter a matriz de transferência da posição 0 para $2a$, realizamos a multiplicação $M_a^{(2)}M_a^{(1)}$. Então, pela definição do potencial $V_a(x)$, para determinar a matriz de transferência da posição 0 para $8a$, basta efetuar as multiplicações destas matrizes.

Como estamos interessados em obter estimativas destas matrizes quando $a \to 0$, usaremos as expansões em séries das funções seno e cosseno para estimar os comportamentos destas matrizes. Com efeito, temos que

$$M_a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + O(a^2) & a + O(a^3) \\ a^{-3/2} - a^{-1} - \frac{1}{2}Ea^{1/2} + O(a) & a^{-1/2} - \frac{1}{6}Ea^{3/2} + O(a^2) \end{pmatrix},$$

$$M_a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}Ea^2 + O(a^{5/2}) & a + O(a^3) \\ a^{-1/2} - a^{-1} - \frac{1}{2}Ea + O(a^{3/2}) & a^{1/2} - \frac{1}{3}Ea^2 + O(a^{5/2}) \end{pmatrix}.$$

Calculando-se o produto destas matrizes, temos que

$$M_a^{(1)}M_a^{(2)} = \begin{pmatrix} a^{1/2} + O(a^2) & a + O(a^{3/2}) \\ -\frac{4}{3}Ea^{1/2} + O(a) & a^{-1/2} + O(a^{3/2})) \end{pmatrix},$$

$$M_a^{(2)}M_a^{(1)} = \begin{pmatrix} a^{-1/2} + O(a^{3/2}) & a^{1/2} + O(a) \\ -\frac{1}{3}Ea^{1/2} + O(a) & a^{1/2} + O(a^{3/2})) \end{pmatrix};$$

novamente ao se multiplicarem estas matrizes,

$$M_a^{(1)}(M_a^{(2)})^2M_a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + O(a^{3/2}) & O(a) \\ -\frac{5}{3}E + O(a^{1/2}) & 1 + O(a) \end{pmatrix},$$

$$M_a^{(2)}(M_a^{(1)})^2 M_a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1+O(a) & 1+O(a^{1/2}) \\ O(a) & 1+O(a) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculando-se o produto destas duas últimas matrizes,

$$M_a^{(2)}(M_a^{(1)})^2 M_a^{(2)} M_a^{(1)}(M_a^{(2)})^2 M_a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-\frac{5}{3}E+O(a^{1/2}) & 1+O(a^{1/2}) \\ -\frac{5}{3}E+O(a^{1/2}) & 1+O(a) \end{pmatrix}.$$

Logo, pela definição do potencial $V_a(x)$ em (6.12), podemos escrever

$$\begin{pmatrix} f(8a) \\ f'(8a) \end{pmatrix} = M_a(E) \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix},$$

sendo

$$M_a(E) = \begin{pmatrix} 1-\frac{5}{3}E+O(a^{1/2}) & 1+O(a^{1/2}) \\ -\frac{5}{3}E+O(a^{1/2}) & 1+O(a) \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Estamos agora em condições de apresentar um potencial $\tilde{V}(x)$ em $(0,b)$, definido em [44] de modo que o operador $\mathcal{H} = -d^2/dx^2 + \tilde{V}(x)$ possua espectro puramente absolutamente contínuo em um determinado intervalo. Analisaremos o comportamento assintótico das soluções $\psi_E(x)$ da equação de autovalores

$$-\psi_E''(x) + \tilde{V}(x)\psi(x) = E\psi_E(x). \tag{6.14}$$

Uma sequência crescente de pontos $\{b_n\}$ em $[0,b)$ define uma partição de $[0,b)$; em cada subintervalo $[b_n, b_{n+1})$, o potencial $\tilde{V}(x)$ é definido adequadamente por $V_{a_n}(x)$ da forma

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= V_{a_1}(x) + V_{a_2}(x-8a_1) + V_{a_3}(x-8(a_1+a_2)) + \\ &\quad + V_{a_4}(x-8(a_1+a_2+a_3)) + \ldots, \end{aligned} \tag{6.15}$$

sendo $\{a_n\}$ uma sequência decrescente de números positivos, de modo que

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 8a_n < \infty.$$

Observação 6.9. O potencial $\tilde{V}(x)$ é construído por blocos de sequências de funções-δ. O primeiro bloco consiste de oito funções-δ, dadas por (6.12) com $a = a_1$. O segundo bloco, por oito funções-δ, dadas por (6.12) com $a = a_2$, sendo deslocado por $8a_1$ à direita, de modo que este bloco segue imediatamente o primeiro. O terceiro bloco de mais oito funções-δ se segue ao segundo, com $a = a_3$, e assim por diante.

Notamos também que no limite $x \to b$, a amplitude das "barreiras" de $\tilde{V}(x)$ tende para infinito, enquanto que as distâncias entre elas tendem a zero; assim, o potencial $\tilde{V}(x)$ é não-limitado superiormente e inferiormente, quando x se aproxima de b.

Seja $\psi_E(x)$ uma solução da equação de autovalores (6.14), e consideramos as matrizes de transferência $M_n(E)$ e $M_{m,n}(E)$ dadas pelas equações

$$\begin{pmatrix} \psi_E(b_n) \\ \psi'_E(b_n) \end{pmatrix} = M_n(E) \begin{pmatrix} \psi_E(0) \\ \psi'_E(0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \psi_E(b_n) \\ \psi'_E(b_n) \end{pmatrix} = M_{m,n}(E) \begin{pmatrix} \psi_E(b_m) \\ \psi'_E(b_m) \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

respectivamente. Pela equação (6.16) e pela definição de $V(x)$, temos que

$$M_{n,n+1}(E) = M_{a_n}(E),$$

sendo $M_{a_n}(E)$ definida em (6.13) com $a = a_n$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} \|M_{n,n+1}(E) - M(E)\| = 0,$$

com

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{3}E & 1 \\ -\frac{5}{3}E & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Notamos que a convergência acima é uniforme para os valores de E em cada intervalo fechado e limitado. Consideraremos $0 < E < 12/5$, sendo extremamente importante a escolha do intervalo $(0, 12/5)$, pois no interior deste intervalo $M(E)$ possui distintos autovalores complexos unitários, denotados por $e^{\pm i\phi}$, com $\cos\phi = 1 - 5/6E$.

Pelo Lema 2 em [44], tem-se que para $0 < E < 12/5$ os limites

$$W(E) \equiv \lim_{n\to\infty} [M(E)]^{-n} M_n(E),$$

$$\frac{d}{dE}W(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dE}[M(E)]^{-n} M_n(E)$$

existem, sendo a convergência uniforme em cada subintervalo fechado de $(0, 12/5)$. Desse modo, assintoticamente quando $n \to \infty$, temos que

$$\begin{pmatrix} \psi_E(b_n) \\ \psi'_E(b_n) \end{pmatrix} = M_n(E) \begin{pmatrix} \psi_E(0) \\ \psi'_E(0) \end{pmatrix} \sim [M(E)]^n W(E) \begin{pmatrix} \psi_E(0) \\ \psi'_E(0) \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Agora, como foi notado no Lema 3 em [44], temos

$$\int_0^{b_n} [\psi_E(x)]^2 dx = \psi'_E(b_n)\frac{d}{dE}\psi_E(b_n) - \psi_E(b_n)\frac{d}{dE}\psi'_E(b_n). \tag{6.19}$$

Notamos pela equação acima que a norma $\|\psi_E\|_{b_n}$ pode ser analisada através das derivadas de ψ e ψ' com respeito à energia E, que por sua vez, pela relação (6.18), podem ser estimadas pela n-ésima potência da matriz $M(E)$. Usando-se estes argumentos, foi demonstrado no Lema 3 em [44] que

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{\|\psi_E\|^2_{b_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^{b_n} [\psi_E(x)]^2 dx < \infty. \tag{6.20}$$

Assim, pela relação (6.20), tem-se que a norma em $L^2(0, b_n)$ quando $b_n \to b$, comporta-se assintoticamente como $n^{1/2}$, para quaisquer soluções ψ_E no intervalo de energias $(0, 12/5)$. Este resultado é uma grande motivação para o desenvolvimento da Seção 6.3, em que estudamos perturbações adequadas do potencial $\tilde{V}(x)$, que induzem espectro singular continuo. Torna-se, assim, natural investigar as dimensões fractais (Hausdorff e empacotamento) de tais operadores através de resultados de subordinação discutidos na Seção 6.1.

Por fim, obtém-se um exemplo de um operador $\mathcal{H} = -d^2/dx^2 + \tilde{V}(x)$ atuando em $L^2(0, b)$, safisfazendo condições de contorno da forma (6.2) no ponto 0, o qual é limit point em b e regular em 0. Na Seção 4 de [44], utilizando-se os argumentos apresentados nesta seção e outros (ver [44] e Exemplo 14.6.c em [46]), foi demonstrado que este operador possui espectro puramente absolutamente contínuo no intervalo $(0, 12/5)$.

6.3 Modelos com espectro singular contínuo

Consideremos o potencial

$$V(x) = \tilde{V}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \delta(x - b_n), \qquad 0 < x < b, \tag{6.21}$$

sendo $\tilde{V}(x)$ como na Seção 6.2 definido em (6.15), $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 8a_n < \infty$ e a sequêcia $\{g_n\}$ definida adequadamente. O potencial $V(x)$ é uma perturbação de $\tilde{V}(x)$ por uma série de funções-δ situadas em pontos b_n que particionam o intervalo $(0, b)$.

Conforme discutido na Seção 6.2, devido a [44], sabemos que o operador diferencial $-d^2/dx^2 + \tilde{V}(x)$ possui espectro absolutamente contínuo no intervalo $(0, 12/5)$. Então, baseado nas referências [37, 45], segue-se que o espectro absolutamente contínuo do operador $-d^2/dx^2$ em $L^2(0, \infty)$ pode ser transformado em espectro singular contínuo através de certas perturbações no potencial. Neste contexto, temos interesse em analisar sob quais condições o operador $-d^2/dx^2 + V(x)$ em $L^2(0, b)$ possui espectro singular contínuo em $(0, 12/5)$.

Por exemplo, foi notado em [45] (ver também Exemplo 14.6.j em [46]) que se $g_n \equiv 1$, e consideradas as perturbações-δ em pontos de uma subsequência de $\{b_n\}$, então este operador possui espectro singular contínuo em $(0, 12/5)$. Entretanto, não se tem informações sobre as dimensões fractais destes modelos.

Usaremos agora a matriz auxiliar $M(E)$, definida em (6.17), para estudar o comportamento das soluções da equação de autovalores

$$-u''(x) + V(x)u(x) = Eu(x), \tag{6.22}$$

sendo o potencial $V(x)$ da forma (6.21). Como nos artigos [37, 45], utilizaremos as variáveis polares R e θ para analisar os comportamentos das soluções u_E associadas à esta equação de autovalores. Primeiramente, escreva

$$\begin{pmatrix} u_E(b_n) \\ u_E'(b_n) \end{pmatrix} = p_n[M(E)]^n f_+ + q_n[M(E)]^n f_-, \tag{6.23}$$

sendo

$$f_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

os autovetores de $M(E)$, associados aos autovalores $e^{\pm i\phi}$, respectivamente. Assim, definem-se R_n e $\theta_n \in [0, 2\pi)$ por

$$p_n = iR_n e^{i\theta_n} \qquad \text{e} \qquad q_n = -iR_n e^{-i\theta_n}.$$

Vamos considerar que as soluções u_E, associadas à equação de autovalores (6.22), satisfazem a seguinte hipótese

$$C_{1,E}\, n^{1/2} R_n \leq \|u_E\|_{b_n} \leq C_{2,E}\, n^{1/2} R_n, \tag{6.24}$$

sendo $C_{1,E}, C_{2,E}$ constantes positivas dependendo apenas da energia $E \in (0, 12/5)$.

Notamos que a hipótese (6.24) possui certo sentido, pois como em (6.19), seria possível escrever

$$\int_0^{b_n} [u_E(x)]^2 dx = u_E'(b_n) \frac{d}{dE} u_E(b_n) - u_E(b_n) \frac{d}{dE} u_E'(b_n).$$

Então, usando-se a estimativa acima para u_E e u_E', e suas derivadas com respeito à energia E, pela relação (6.23) a hipótese (6.24) se seguiria como a última relação na página 32 em [45].

Desse modo, considerando a hipótese (6.24) para obter informações sobre o comportamento assintótico das soluções u_E, precisamos estudar o comportamento da sequência $\{R_n\}$, quando $n \to \infty$. Segue pela definição do potencial $V(x)$ que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_E(b_n) \\ u'_E(b_n) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_n & 0 \end{pmatrix} M_{n,n-1}(E) \begin{pmatrix} u_E(b_{n-1}) \\ u'_E(b_{n-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_n & 1 \end{pmatrix} (M(E) + [O(a_n)]) \begin{pmatrix} u_E(b_{n-1}) \\ u'_E(b_{n-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_n & 1 \end{pmatrix} (M(E) + [O(a_n)]) \left(p_{n-1} e^{i(n-1)\phi} f_+ + q_{n-1} e^{-i(n-1)\phi} f_-\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_n & 1 \end{pmatrix} (M(E) + [O(a_n)]) \left(\tilde{p}_{n-1} f_+ + \tilde{q}_{n-1} f_-\right),
\end{aligned}$$

sendo que a matriz $\begin{pmatrix} O(a_n^{1/2}) & O(a_n^{1/2}) \\ O(a_n^{1/2}) & O(a_n) \end{pmatrix}$ foi denotada simplesmente por $[O(a_n)]$. Também, denotamos as sequências

$$\tilde{p}_n \equiv p_n e^{in\phi} = iR_n e^{i\tilde{\theta}_n} \quad \text{e} \quad \tilde{q}_n \equiv q_n e^{in\phi} = -iR_n e^{-i\tilde{\theta}_n},$$

com $\tilde{\theta}_n = \theta_n + n\phi$. Ainda, para simplificar a notação, denotamos os autovetores de $M(E)$ por

$$f_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f_- = \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Assumimos ainda, sem perda de generalidade, que $\sup_n |g_n| \leq 1$, donde se segue da equação acima que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_E(b_n) \\ u'_E(b_n) \end{pmatrix} &= \tilde{p}_{n-1} \left[e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ g_n + f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(a_n) \\ O(a_n) \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \tilde{q}_{n-1} \left[e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ g_n + f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(a_n) \\ O(a_n) \end{pmatrix} \right]. \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

Por outro lado, por definição, temos que

$$\begin{pmatrix} u_E(b_n) \\ u'_E(b_n) \end{pmatrix} = \tilde{p}_n \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \end{pmatrix} + \tilde{q}_n \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

Logo, pelas relações em (6.25) e (6.26), obtemos

$$\begin{cases} \tilde{p}_n = \tilde{p}_{n-1}[U_1 e^{i\phi} + O(a_n)] + \tilde{q}_{n-1}[U_2 e^{-i\phi} + O(a_n)] \\ \tilde{q}_n = \tilde{p}_{n-1}[U_3 e^{i\phi} + O(a_n)] + \tilde{q}_{n-1}[U_4 e^{-i\phi} + O(a_n)] \end{cases}, \tag{6.27}$$

sendo $U_1 = \frac{(g_n+f_1-f_2)}{(f_1-f_2)}$; $U_2 = \frac{g_n}{(f_1-f_2)}$; $U_3 = \frac{g_n}{(f_2-f_1)}$ e $U_4 = \frac{(g_n+f_2-f_1)}{(f_2-f_1)}$.

Multiplicando-se ambas as equações em (6.27), temos que

$$\begin{aligned} R_n^2 &= R_{n-1}^2 \Big[(U_1U_4 + U_2U_3 - U_1U_3 - U_2U_4) + 2(U_1U_3 + U_2U_4)\sin^2(\tilde{\theta}_n) \\ &\qquad + i(U_2U_4 - U_1U_3)\sin(2\tilde{\theta}_n) + O(a_n)\Big]. \end{aligned}$$

Recordando-se que $f_1 = 1 - \cos\phi + i\sin\phi$ e $f_2 = 1 - \cos\phi - i\sin\phi$, segue-se que

$$\frac{R_n^2}{R_{n-1}^2} = 1 - \frac{g_n}{\sin\phi}\sin(2\tilde{\theta}_n) + \frac{g_n^2}{\sin^2\phi}\sin^2(\tilde{\theta}_n) + O(a_n). \tag{6.28}$$

Algo muito interessante é o fato de que as estimativas para os chamados "raios de Prüfer" de operadores de Schrödinger discretos em [37], explicitamente a Equação 2.12.c em [37], coincidem com a relação (6.28), exceto pelo termo $O(a_n)$. Como a sequência $\{a_n\}$ decai rapidamente a zero, intuitivamente se espera que este termo não interfira no comportamento assintótico da sequência $\{R_n\}$. Adiante, justificaremos o resultado em algumas situações.

Neste sentido, tomaremos g_n assumindo os valores dos modelos de potencias estudados em [37], na tentativa de se obter alguma informação sobre as dimensões fractais destes operadores em intervalos limitados.

Como na Seção 8 em [37], assumiremos que $g_n \equiv g_n^\omega$ são variáveis aleatórias independentes, definidas em um espaço de probabilidade associado a uma medida ν. Suporemos ainda que

(i) $\mathbb{E}((g_n^\omega)^2) = \lambda^2 n^{-1}$, sendo λ uma constante positiva;

(ii) $\mathbb{E}(g_n^\omega) = 0$;

(iii) para algum $\epsilon > 0$, $\sup_\omega |g_n^\omega| \leq C n^{-(1/3)-\epsilon}$, com C constante positiva;

(iv) g_n^ω é independente de $\{g_j^\omega\}_{j=1}^{n-1}$,

sendo que $\mathbb{E}(g_n^\omega)$ denota o valor esperado da variável aleatória $\{g_n^\omega\}$.

Nota-se que o caso discutido em [19] é tal que $g_n^\omega = n^{-1} X_n(\omega)$, com $X_n(\omega)$ variáveis aleatórias independentes, limitadas e identicamente distribuídas. Se $\mathbb{E}(X) = 0$ e X for limitada, então (i)-(iv) são válidos.

Teorema 6.10. *Suponha que a sequência $\{g_n^\omega\}$ satisfaça os itens (i)-(iv) acima. Fixe $\phi \in (0, \pi)$, com $\phi \neq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$. Então, para ω ν-q.t.p., exceto para uma única possível solução da equação de autovalores* (6.22)*, os raios de Prüfer associados às demais soluções satisfazem*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln R_n}{\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right)} = \frac{\lambda^2}{8 \sin^2 \phi}. \tag{6.29}$$

Demonstração. De modo semelhante a demonstração do Teorema 8.2 em [37], fixadas a energia E e a condição inicial θ_0 associada a uma solução da equação de autovalores (6.22), temos pela relação (6.28) que

$$\ln R_n - \ln R_{n-1} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{g_n^\omega}{\sin \phi} \sin(2\tilde{\theta}_n) + \frac{(g_n^\omega)^2}{\sin^2 \phi} \sin^2(\tilde{\theta}_n) + y_n\right),$$

sendo $\{y_n\}$ uma sequência dependente da energia E, de modo que $|y_n| \leq C a_n$ para uma constante C e $n = 1, 2, 3, \ldots$ Como

$$\sup_\omega \left| \frac{g_n^\omega}{\sin \phi} \sin(2\tilde{\theta}_n) + \frac{(g_n^\omega)^2}{\sin^2 \phi} \sin^2(\tilde{\theta}_n) + y_n \right| \longrightarrow 0,$$

quando $n \to \infty$, vale a identidade

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Então, segue-se que

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{g_n^\omega}{\sin\phi}\sin(2\tilde{\theta}_n)+\frac{(g_n^\omega)^2}{\sin^2\phi}\sin^2(\tilde{\theta}_n)+y_n\right) &= -\frac{g_n^\omega}{\sin\phi}\sin(2\tilde{\theta}_n)+\frac{(g_n^\omega)^2}{\sin^2\phi}\sin^2(\tilde{\theta}_n)\\
&+ y_n-\frac{(g_n^\omega)^2}{2\sin^2\phi}\sin^2(2\tilde{\theta}_n)\\
&+ O\left((g_n^\omega)^3+a_n\right).
\end{aligned}$$

Agora, usando-se a relação trigonométrica

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4\theta)\right]\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos(4\theta),
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\ln R_n=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}((g_n^\omega)^2)}{\sin^2\phi}+C_1+C_2+C_3+C_4,$$

sendo as correções da forma

$$\begin{aligned}
&C_1=-\tfrac{1}{2\sin\phi}\textstyle\sum_{j=1}^n g_j^\omega\sin(2\tilde{\theta}_j)\\
&C_2=\tfrac{1}{2\sin^2\phi}\textstyle\sum_{j=1}^n\left[((g_j^\omega)^2)-\mathbb{E}((g_j^\omega)^2)\right]\left[\sin^2(\tilde{\theta}_j)-\tfrac{1}{2}\sin^2(2\tilde{\theta}_j)\right]\\
&C_3=\tfrac{1}{2\sin^2\phi}\textstyle\sum_{j=1}^n(\mathbb{E}(g_j^\omega)^2)\left[\tfrac{1}{2}\cos(2\tilde{\theta}_j)-\tfrac{1}{4}\cos(4\tilde{\theta}_j)\right]\\
&C_4=\textstyle\sum_{j=1}^n\mathrm{O}\left((g_j^\omega)^3+a_j\right).
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado deste teorema se segue se demonstrarmos que para cada $q=1,2,3,4$ e ω ν-q.t.p.,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|C_q(\omega)|}{\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right)}=0.$$

Para $q=1,2,3$, o limite acima se segue exatamente do Teorema 8.2 em [37], visto que as expressões obtidas para C_1,C_2,C_3 são análogas, sendo necessário considerar nesta etapa da demonstração que $\phi\neq\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}$.

Agora, para $q=4$ o resultado se segue da hipótese (iii) e da construção dos termos da sequência $\{a_n\}$, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty}8a_n=b<\infty$. $\square$

Observação 6.11. Notamos que no Teorema 8.2 e no Lema 8.8 em [37] (correspondente versão para o Teorema 6.12 abaixo), as relações da forma (6.30) e (6.29) aparecem em termos das normas das matrizes de transferência associadas à respectiva equação de autovalores. Entretanto, na prática estes resultados foram demonstrados em [37] se usando os raios de Prüfer, visto que pelo Teorema 2.3 em [37] o comportamento em norma das matrizes de transferência e destes raios são equivalentes.

Assim, neste trabalho, conforme a definição das variáveis R_n em (6.23) e a relação (6.24), para estudarmos o comportamento das soluções da equação de autovalores (6.22), devemos analisar o comportamento de tais variáveis. Assim sendo, optamos por não utilizar notações envolvendo normas das matrizes de transferência.

Teorema 6.12. *Suponha que a sequência $\{g_n^\omega\}$ satisfaça os itens (i)-(iv) acima. Fixe $\phi \in (0,\pi)$, com $\phi \neq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$. Então, para ω ν-q.t.p., existe uma solução u_{θ_ω} da equação de autovalores* (6.22) *de modo que $R^{(\theta_\omega)}$ satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln R_n^{\theta_\omega}}{\ln n} = -\frac{\lambda^2}{8\sin^2\phi}. \tag{6.30}$$

Demonstração. Seja $\beta = \frac{\lambda^2}{8\sin^2\phi}$. Sejam $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ os raios de Prüfer associados aos ângulos $\theta_n^{(1)}$ e $\theta_n^{(2)}$, respectivamente.

Pelo Teorema 6.10, para ω ν-q.t.p. e $k = 1, 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln R_n^{(k)}}{\ln n} = \beta. \tag{6.31}$$

Notamos, pela relação (6.26), que

$$u_E(b_n) = -2R_n \sin(\tilde{\theta}_n),$$

$$u_E'(b_n) = -2R_n[\sin(\phi)\cos(\tilde{\theta}_n) + (1-\cos\phi)\sin(\tilde{\theta}_n)].$$

Então, para quaisquer soluções $u_{k,E}$ linearmente independentes da equação de autovalores (6.22) associadas a $R^{(k)}$ e a $\theta^{(k)}$, $k = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned} W[u_{1,E}, u_{2,E}](b_n) &= u_{1,E}(b_n)u'_{2,E}(b_n) - u'_{1,E}(b_n)u_{2,E}(b_n) \\ &= 4R_n^{(1)}R_n^{(2)} \sin\phi \left(\sin(\tilde{\theta}_n^{(1)})\cos(\tilde{\theta}_n^{(2)}) - \sin(\tilde{\theta}_n^{(2)})\cos(\tilde{\theta}_n^{(2)})) \right) \\ &= 4R_n^{(1)}R_n^{(2)} \sin\phi \sin(\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}). \end{aligned}$$

Segue-se da constância do Wronskiano que

$$R_n^{(1)}R_n^{(2)} \sin\phi \sin(\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}) = C_\alpha.$$

Logo, por (6.31),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left|\sin(\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)})\right|}{\ln(n)} = -2\beta.$$

Portanto, para se concluir esta demonstração, pode-se seguir os mesmos passos do Lema 8.8, a partir da Equação 8.2, p. 20 em [37]. □

Observamos que os Teoremas 6.10 e 6.12 são versões do Teorema 8.2 e do Lema 8.8 em [37], respectivamente, sendo tais resultados essenciais para estudar as dimensões fractais destes operadores. Estes teoremas são válidos para $\phi \neq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$. Recordando que $\cos\phi = 1 - \frac{5}{6}E$, então para $E \in (0, \frac{12}{5})$ com

$$E \neq \frac{3(2-\sqrt{2})}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3(2+\sqrt{2})}{5},$$

segue-se pelo Teorema 6.12 e pela hipótese (6.24) que, ω ν-q.t.p., existe uma solução u_{E,θ_ω} da equação de autovalores (6.22) de modo que

$$\|u_{E,\theta_\omega}\|_{b_n} \approx n^{-\beta} n^{1/2}, \tag{6.32}$$

sendo que $r_1(n) \approx r_2(n)$ denota a relação $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln r_1}{\ln r_2} = C$, com $0 < C < \infty$ constante. Nota-se que se $\beta < 1/2$, então $\lim_{n\to\infty} \|u_{E,\theta_\omega}\|_{b_n} = \infty$, e consequentemente, temos que $u_{E,\theta_\omega} \notin L^2(0, b)$.

De modo semelhante, pelo Teorema 6.10 e pela hipótese (6.24), segue-se que para ω ν-q.t.p., toda solução u_E da equação de autovalores (6.22) possui o comportamento

$$\|u_E\|_{b_n} \approx n^{\beta} n^{1/2}. \tag{6.33}$$

Assim, para $0 < \beta < 1/2$, pelas relações (6.32) e (6.33), segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_{E,\theta_\omega}\|_{b_n}}{\|u_E\|_{b_n}} = 0,$$

sendo u_E uma solução linearmente independente de (6.22). Portanto, u_{E,θ_ω} é uma solução sequencialmente subordinada em b que não pertence ao espaço $L^2(0,b)$.

Proposição 6.13. *Fixe $\lambda < 2$ e considere o operador de Schrödinger gerado por um potencial da forma* (6.21)*, satisfazendo (i)-(iv) e a hipótese* (6.24)*. Considere $E \in \Omega$, sendo*

$$\Omega = \left(\frac{6-3\sqrt{4-\lambda^2}}{5}, \frac{6+3\sqrt{4-\lambda^2}}{5}\right) \Big\backslash \left\{\frac{3(2-\sqrt{2})}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3(2+\sqrt{2})}{5}\right\},$$

e defina

$$d(E,\lambda) = 1 - \frac{9\lambda^2}{60E - 25E^2}.$$

Então, ω ν-q.t.p., para toda energia $E \in \Omega$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma solução u_{E,θ_ω} da equação de autovalores (6.22)*, a qual é localmente $(d+\epsilon)$-Hausdorff subordinada em b. Por outro lado, nenhuma solução da respectiva equação de autovalores* (6.22) *é localmente $(d-\epsilon)$-empacotamento subordinada em b.*

Demonstração. Primeiramente, sendo $\cos\phi = 1 - \frac{5}{6}E$, para $E \in (0, \frac{12}{5})$ e $\phi \in (0,\pi)$, temos

$$\sin^2\phi = 1 - \cos^2(\phi) = \frac{60E - 25E^2}{36},$$

e como $\beta = \frac{\lambda^2}{8\sin^2\phi}$, segue-se que

$$\beta = \frac{9\lambda^2}{120E - 50E^2}.$$

Logo, $\beta < \frac{1}{2}$ se, e somente se, $\lambda < 2$ e $E \in \left(\frac{6-3\sqrt{4-\lambda^2}}{5}, \frac{6+3\sqrt{4-\lambda^2}}{5}\right)$. Desse modo, para $E \in \Omega$ e para qualquer $\epsilon > 0$, segue-se das relações (6.32) e (6.33) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_{E,\theta_\omega}\|_{b_n}}{\|u_E\|_{b_n}^{(\tilde{d}+\epsilon)}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\|u_{E,\theta_\omega}\|_{b_n}}{\|u_E\|_{b_n}^{(\tilde{d}-\epsilon)}} > 0,$$

sendo $\tilde{d} \equiv \tilde{d}(E,\lambda) = \frac{d(E,\lambda)}{2-d(E,\lambda)} = \frac{1-2\beta}{1+2\beta}$, e u_E uma solução linearmente independente de (6.22). $\square$

Por fim, se considerarmos a hipótese (6.24) podemos concluir alguma informação sobre a decomposição fractal para a família de operadores

$$\mathcal{H}_\omega = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^\omega \delta(x - b_n), \quad 0 < x < b.$$

No sentido que se fixado $\lambda < 2$ e a sequência $\{g_n^\omega\}$ satisfazendo (i)-(iv), pelas considerações acima para quase toda energia E no intervalo $\left(\frac{6-3\sqrt{4-\lambda^2}}{5}, \frac{6+3\sqrt{4-\lambda^2}}{5}\right)$, temos que u_{E,θ_ω} é uma solução sequencialmente subordinada em b. Portanto, pelo Teorema 6.6 (item 1), ω ν-q.t.p., o operador $\mathcal{H}_\omega$ possui espectro puramente singular neste intervalo. Também temos que u_{E,θ_ω} não pertence ao espaço $L^2(0,b)$, consequentemente este operador possui componente espectral singular contínua neste intervalo.

Ademais, pela Proposição 6.13 e pelo Corolário 6.8, ω ν-q.t.p., a medida espectral ρ_ω associada ao operador $\mathcal{H}_\omega$ possui a seguinte decomposição fractal local: Para qualquer $\epsilon > 0$, a restrição $\rho_\omega(\Omega\cap\cdot)$ é $(d+\epsilon)$-Hausdorff singular e $(d-\epsilon)$-empacotamento (espectral) contínua.

Se tivéssemos claramente a demonstração da hipótese (6.24), seria possível completar o objetivo de apresentar exemplos explícitos de operadores de Schrödinger contínuous em intervalos limitados com certo controle de propriedades fractais de seus espectros, entretanto tal estimativa ainda é uma questão em aberto.

Capítulo 7

Considerações Finais

Nesta tese estudamos resultados sobre subordinação fractal (Hausdorff e empacotamento) para operadores de Schrödinger unidimensionais. Tais resultados de subordinação são ferramentas poderosas na investigação da dimensão espectral destes operadores, pois estabelecem uma correspondência entre o comportamento de soluções da equação de autovalores e a decomposição fractal da medida espectral associada a esses operadores.

Analisamos resultados sobre subordinação de Hausdorff com o objetivo de identificar as diferenças e semelhanças desses resultados com respeito à medida de empacotamento. Desse modo, através de métodos de subordinação, obtivemos o primeiro resultado original desta tese (Teorema 1.1) sobre continuidade das medidas espectrais de tais operadores com respeito a medidas de empacotamento.

Por conseguinte, aplicamos esses métodos (veja Teorema 1.4) na verificação de que operadores sturmianos com número de rotação de densidade quase limitada possuem espectro puramente α-empacotamento contínuo. Ressaltamos que por este resultado e pela relação (1.2), obtemos um limitante inferior para o expoente dinâmico superior associado aos operadores sturmianos com número de rotação de densidade quase limitada. Ainda, notamos que utilizando a dimensão de Hausdorff tal resultado é conhecido [14] para operadores sturmianos com número de rotação de densidade limitada; logo aqui obtivemos informações sobre empacotamento continuidade para uma classe "maior" de operadores sturmianos.

Também estudamos dimensões fractais em classes de operadores de Schrödinger discretos sob perturbações com decaimento polinomial adequado. Resultados espectrais em modelos perturbados são assuntos complexos e delicados de se obterem, visto que não se sabe exatamente o comportamento espectral desses modelos, sendo que podem possuir espectro pontual puro (dimensão nula) ou podem possuir alguma componente singular contínua. Deste modo, quando o espectro desses operadores perturbados possuir alguma componente singular contínua, obtivemos que suas propriedades dimensionais fractais permanecem estáveis. Em particular, analisamos os modelos de operadores gerados por potenciais sturmianos de densidade limitada e por uma classe de potenciais esparsos (veja Teoremas 1.5 e 5.1).

Por fim, no Capítulo 6 fizemos um estudo introdutório sobre subordinação fractal para operadores de Schrödinger unidimensionais contínuos definidos em intervalos limitados. Iniciamos um estudo para prováveis resultados de subordinação Hausdorff e empacotamento de operadores em intervalos limitados, entretanto tal estudo nessecita de uma formalização mais explícita a qual pretendemos analisar em projetos de pesquisa futuros.

A maior dificuldade no estudo desses modelos é encontrar exemplos de potenciais de forma que os respectivos operadores de Schrödinger contínuous em intervalos possuam espectro puramente singular contínuo com alguma dimensão Hausdorff ou empacotamento não-triviais.

Um primeiro passo para obter estes exemplos foi estudar o artigo [45], que indica de forma muito resumida um operador deste tipo, definido em um intervalo limitado, o qual possui espectro puramente singular contínuo. Até o momento não temos conhecimento sobre as dimensões fractais (Hausdorff e empacotamento) deste modelo, sendo nosso objetivo obter tais informações.

Observamos na Seção 6.3 que este operador em determinadas condições, apresenta-se como uma possibilidade de um primeiro exemplo em que podemos obter alguma informação sobre suas propriedades dimensionais, devido a semelhança deste com os modelos analisados em [37, 44, 45, 55]. No entanto, existem alguns pontos em aberto, em particular a relação (6.24) que ainda precisa ser demonstrada.

Ademais, a busca de exemplos de outros modelos de potenciais que induzem componente espectral singular contínua, e consequentemente um estudo sobre suas propriedades fractais, fornece um conjunto de questões para problemas futuros de pesquisa.

Bibliografia

[1] Bazao, V. R., Carvalho, S. L., de Oliveira, C. R.: On the spectral Hausdorff dimension of 1D discrete Schrödinger operators under power decaying perturbations. Submetido para publicação (http://www.dm.ufscar.br/profs/oliveira/hausdorffPert.pdf).

[2] Bazao, V. R., Carvalho, S. L., de Oliveira, C. R.: Whole-line spectral packing continuity through power-law subordinacy. Submetido para publicação (http://www.dm.ufscar.br/profs/oliveira/packingSturm.pdf).

[3] Bellissard, J., Iochum, B., Scoppola, E. and Testard, D.: Spectral properties of one-dimensional quasicrystals, *Commun. Math. Phys.*, **125**: 527–543 (1989).

[4] Berezanskii, Y.: Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators. Transl. Math. Monogr., Vol. **17** (Providence, RI: Am. Math.Soc., 1968).

[5] Carmona, R. and Lacroix, J.: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators (Basel: Birkhäuser, 1990).

[6] Carvalho, S. L., de Oliveira, C. R.: Spectral and dynamical properties of sparse one-dimensional continuous Schrödinger and Dirac operators. *Edinb. Math. Soc. Proc.*, **56**: 1–34 (2013).

[7] Carvalho, S. L., de Oliveira, C. R.: Spectral packing dimensions through power-law subordinacy. Annales Henri Poincaré, **14**: 775–792, (2012).

[8] Carvalho, S. L.: Espectro e dimensão Hausdorff de operadores bloco-Jacobi com perturbações esparsas distribuídas aleatoriamente. Tese de doutorado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, (2010).

[9] Combes, J.M. and Mantica, G.: Fractal dimensions and quantum evolution associated with sparse potential Jacobi matrices. In: Graffi, S., Martinez, A. (eds.) Long time behavior of classical and quantum systems, Series on concrete and appl. math. Vol. 1., pp. 107–123. World Scientific, River Edge (2001).

[10] Cutler, C. D.: Strong duality principles for fractal dimension in Euclidean space. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **28**: 393–410 (1995).

[11] Cycon, H.L., Froese, R.G., Kirsch, W. and Simon, B.: Schrödinger Operators (Berlim: Springer-Verlag, 1987).

[12] Damanik, D.: α-Continuity Properties of one-dimensional Quasicrystals, *Commun. Math. Phys.*, **192**: 169–182 (1998).

[13] Damanik, D., Gorodetski, A.: Spectral and quantum dynamical properties of the weakly Fibonacci Hamiltonian, Commun. Math. Phys. 305, 221–277 (2011).

[14] Damanik, D., Killip, R. and Lenz, D.: Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals, III. α-Continuity, *Commun. Math. Phys.*, **212**: 191–204 (2000).

[15] Damanik, D. and Lenz, D.: Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals, I. Absence of eigenvalues, *Commun. Math. Phys.*, **207**: 687–696 (1999).

[16] Damanik, D. and Lenz, D.: Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals, II The Lyapunov expoent, *Lett. Math. Phys.*, **50**: 245–257 (1999).

[17] del Rio, R., Jitomirskaya, S., Last, Y. and Simon, B.: Operators with singular continuous spectrum, IV. Hausdorff dimensions, rank-one perturbations, and localization, *J. d'Analyse Math.,* **69**: 153–200 (1996).

[18] del Rio, R., Makarov, M., Simon, B.: Operators with singular continuous: II. Rank one operators, *Commun. Math. Phys.* **165**, 59–67 (1994).

[19] Deylon, F., Simon, B., Souillard, B.: From power pure point to continuous spectrum in disordered systems, *Ann. Inst. H. Poincaré* **42**, 283–309 (1985).

[20] Falconer, K.: The geometry of fractal sets (Cambridge: Cambridge U. Press, 1985).

[21] Germinet, F., Klein, A.: A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition, *Duke Math. J.* **124**: 309–350 (2004).

[22] Gilbert, D.J.: On subordinacy and analysis of the spectrum of Schrödinger operators with two singular endpoints, *Proc. Roy. Edinburgh* **112 A**: 213–229 (1989).

[23] Gilbert, D.J.: Asymptotic methods in the spectral analysis of Sturm-Liouville operators, in W. O. Amrein, A. M. Hinz and D. B. Pearson, Sturm-Liouville: Past and Present, Birkhäuser, Basel, 121–136 (2005).

[24] Gilbert, D.J.: On subordinacy and spectral multiplicity for a class of singular differential operators, *Proc. Roy. Edinburgh* **128 A**: 549–584 (1998).

[25] Gilbert, D.J. and Pearson, D.B.: On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **128**: 30–56 (1987).

[26] Guarneri, I., Schulz Baldes, H.: Lower bounds on wave-packted propagation by packing dimension of spectral measures. *Math. Phys. Electron. J.*, **5**: 1–16 (1999).

[27] Gordon, A. Ya.: Pure point spectrum under 1-parameter perturbations and instability of Anderson localization, Commun.. Math. Phys. 164, 489–505 (1994)

[28] Iochum, B., Raymond, L. and Testard, D.: Resistance of one-dimensional quasicrystals, *Physica* **187 A**: 353–368 (1992).

[29] Iochum, B. and Testard, D.: Power law growth for the resistance in the Fibonacci model, *J. Stat. Phys.*, **65**: 715–723 (1991).

[30] Jitomirskaya, S. and Last, Y.: Dimensional Hausdorff properties of singular continuous spectra, *Phys. Rev. Lett.*, **76**: 1765–1769 (1996).

[31] Jitomirskaya, S. and Last, Y.: Power-Law subordinacy and singular spectra, I. Half line operators, *Acta Math.*, **183**: 171–189 (1999).

[32] Jitomirskaya, S. and Last, Y.: Power law subordinacy and spectra singular, II. Line operators, *Commun. Math. Phys.*, **211**: 643–658 (2000).

[33] Jitomirskaya, S. and Zhang, S.: Quantitative continuity of singular continuous spectral measures and arithmetc criteria for quasiperiodic Schrödinger operators, arXiv:1510.07086.

[34] Khan, S. and Pearson, D.B.: Subordinacy and spectral theory for infinite matrices, *Helv. Phys. Acta*, **65**: 505–527 (1992).

[35] Khintchin, A.Ya.: Continued Fractions (Groningen: Noordhoff, 1963).

[36] Kiselev, A., Last, Y. and Simon, B.: Stability of singular spectral types under decaying pertubations, *Journal of Functional Analysis*, **198**: 1-27 (2002).

[37] Kiselev, A., Last, Y. and Simon, B.: Modified Prüfer and EFGP transforms and the spectral analysis of one-dimensional Schödinger operators, *Commun. Math. Phys.*, **194**: 1–45 (1998).

[38] Last, Y.: Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra, *J. Funct. Anal.*, **142**: 406–445 (1996).

[39] Last, Y. and Simon, B.: Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators, *Invent. Math.*, **135**: 329–367 (1999).

[40] Lang, S.: Introduction to Diophantine Approximations (New York: Addison-Wesley, 1966).

[41] Matilla, P.: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: Fractals and rectifiability. Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[42] Oseledec, V.: A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov charateristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19**: 197–231 (1968).

[43] Prado, R. A.: Subordinação e propriedades dimensionais do espectro de operadores de Schrödinger. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos (2002).

[44] Pearson, D.B.: An example in potential scattering illustrating the breakdown of asymptotic completeness, *Commun. Math. Phys.*, **40**: 125–146 (1975).

[45] Pearson, D.B.: Singular continuous measures in scattering theory, *Commun. Math. Phys.*, **60**: 13–36 (1978).

[46] Pearson, D.B.: Quantum Scattering and Spectral Theory (Londres: Academic Press, 1988).

[47] Rogers, C.A.: Hausdorff measures (London: Cambridge U. Press, 1970).

[48] Ruelle, D.: Ergodic theory of differentiable dynamical systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50**: 275–306 (1979).

[49] Simon, B. Spectral analysis of rank one pertubations and applications, *CRM Proc. Lecture Notes*, **8**: 109-149 (1995).

[50] Simon, B.: Spectral analysis and rank one perturbations and applications, CRM Lecture Notes (Feldman, J., Froese, R., Rosen, L., eds.), *Amer. Math. Soc.*, **8**: 109–149 (1995).

[51] Simon, B., Wolff, T. Singular continuous spectrum under rank one pertubations and localization for random Hamiltonianas, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**: 75-90 (1986).

[52] Süto, A.: The spectrum of a quasiperiodic Schrödinger Operator, *Commun. Math.Phys.*, **111**, 409-415 (1987).

[53] Tcheremchantsev, S.: Dynamical analysis of Schrödinger operators with growing sparse potentials, Commun. Math. Phys. 253, 221–252 (2005).

[54] Tricot, C. Jr.: Two definitions of fractional dimension, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **91**: 57–74 (1982).

[55] Zlatoš, A.: Sparse Potentials with fractional Hausdorff Dimension, *J. Funct. Anal.*, **207**: 216–252 (2004).