UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

FÁBIO LUIZ DIAS TOZO

TAREFAS EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM

SOROCABA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

FÁBIO LUIZ DIAS TOZO

TAREFAS EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM

Fábio Luiz Dias Tozo

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

FÁBIO LUIZ DIAS TOZO

TAREFAS EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Tozo, Fábio Luiz Dias
T757t Tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem de função afim / Fábio Luiz Dias Tozo. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
81 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Ensino médio. 2. Função afim. 3. Registros de representação semiótica. 4. Tarefas exploratórias-investigativas. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fábio Luiz Dias Tozo, realizada em 24/03/2016:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires
UESC

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Mariana Caseño, pela paciência, total apoio e dedicação e aos meus pais Arlindo Tozo e Marilde Tozo.

AGRADECIMENTOS

Ao Profº Dr. Paulo César Oliveira, orientador, pela permanente presença, paciência e contribuições durante a realização desse trabalho.

Aos meus colegas de mestrado: Claudio Pinheiro, Diogo, Thiago, pelo apoio e incentivo nos estudos e provas.

A escola OSE (Organização Sorocabana de Ensino) pela ajuda para a realização deste trabalho, local onde foram aplicadas as tarefas.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta pesquisa, cujos nomes não citei e, espero, me entendam e perdoem por não citá-los.

RESUMO

O objetivo desta dissertação foi verificar as dificuldades de tratamentos e conversões (língua natural, expressões algébricas, tabelas e forma gráfica) de ensino-aprendizagem da função afim aos alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular na cidade Sorocaba - SP. O trabalho foi desenvolvido, por meio de tarefas aplicadas em três etapas; junto a uma turma com vinte e seis alunos, divididos em treze duplas. Para tanto, tomou-se o cuidado de se colocar nas etapas das tarefas, diferentes formas de representação. O referencial teórico foi pautado no estudo dos registros de representação semiótica, desenvolvido por Raymond Duval, e das tarefas exploratório-investigativas, as quais serviram também de base na proposta de se diversificar os procedimentos metodológicos utilizados no ensino de função afim. A análise da produção escrita dos sujeitos da pesquisa buscou responder; C**omo alunos da primeira série do Ensino Médio mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas envolvendo o conceito de função afim?**

A articulação das tarefas exploratórias-investigativas com a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica instigaram os alunos ao processo de generalização do conceito e caracterização da função afim, por meio do uso do registro da língua natural na forma de justificativas.

Palavras-chave: Ensino Médio, função afim, registros de representação semiótica, tarefas exploratórias-investigativas.

ABSTRACT

The objective of this work was to verify the difficulties of treatments and conversions (natural language, algebraic expressions, tables and graphical form) function of teaching-learning in order to students of the first high school grade of a private school in the city Sorocaba - SP. The study was conducted by means of tasks implemented in three stages; a group of twenty-six students, divided into thirteen doubles. Therefore, we took care to put to task steps, different forms of representation. The theoretical framework was marked in the study of semiotic representation registers, developed by Raymond Duval, and exploratory and investigative tasks, which served also based on the proposal to diversify the methodological procedures used in the teaching function in order. The written production analysis of research subjects sought answer **how students of the first high school series have mobilized and coordinated semiotic representation registers in solving exploratory-investigative tasks involving the concept of affine function?**

The articulation of exploratory-investigative tasks, with the mobilization and coordination of semiotic representation registers, instigated the students to the process of generalization of the concept and characterization of affine function through the use of natural language record in the form of justification.

Keywords: High school, affine function, representation registers semiotics, exploratory-investigative tasks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática no Ensino Médio, por um lado, visa o valor formativo do indivíduo devido ao desenvolvimento de competências e habilidades; o qual contribui na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo. Por outro lado, desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Contudo, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental,

> mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2000, p.40-41).

Tomando por base este último caráter, a motivação de nos debruçarmos a escrever nossa dissertação de Mestrado emergiu da preocupação do autor em lidar com a crescente dificuldade apresentada pelos alunos na aprendizagem de “funções matemáticas”, mais precisamente, às várias representações semióticas da função afim ou, da função polinomial do 1º grau.

A Matemática no Ensino Médio ainda possui marcas herdadas da tendência tecnicista, predominante na década de 70 no ensino brasileiro, a qual segundo Fiorentini (1995), a matemática se reduz a um conjunto de técnicas, regras, algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los.

Na condição de educador matemático sentimos a necessidade de reagir, refletir e propor formas alternativas de “fazer matemática” de modo a superar essa tendência. A partir do biênio 2011-2012 desenvolvemos uma pesquisa cujo relato gerou uma Monografia apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Naquele momento, investigamos o objeto matemático função afim a partir da análise do material do Sistema de Ensino Cursinho da Poli, bem como do Sistema de Ensino Positivo; tomando por base a teoria dos registros de representação semiótica. O objetivo foi analisar que transformações de registros semióticos foram mobilizadas nestes materiais, pois nas apostilas analisadas foram poucas as atividades que estimulavam o aluno, sua criatividade, reflexão e formulação de novas situações, não favorecendo as mudanças de registros e as articulações entre eles, para facilitar o entendimento do tema abordado. (TOZO, 2012)

Os objetos matemáticos não são espontaneamente inteligíveis à percepção ou em uma situação intuitiva imediata, assim como os objetos chamados habitualmente de físicos ou reais. Desse modo, eles se constroem categoricamente em seus vários registros de representação semiótica. Para Duval (2003, p. 39),

> As representações semióticas são as produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem seus próprios limites de significância e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que se inserem em diferentes sistemas semióticos.

O contínuo interesse pelos problemas do ensino-aprendizagem do conceito de função provém da nossa prática docente, ao longo de 10 anos atuando no Ensino Médio, em escolas particulares na cidade de Sorocaba. Entendemos que as grandes dificuldades apresentadas por alunos em relação ao conteúdo função afim, nesse nível de escolaridade, estão relacionadas com a necessidade de desenvolver a pluralidade de registros de representação semiótica e suas possíveis transformações, as quais não tratadas adequadamente no âmbito escolar.

Isto pôde ser constatado pelas nossas observações quanto às dificuldades dos alunos ao fazer generalizações de fórmulas, realizar representações em tabelas e até mesmo representar pares ordenados no plano cartesiano. A conexão ou o estabelecimento de relações para obtenção de informações entre as diferentes formas de representar não é algo tão evidente; na maioria das vezes, são compreendidas de forma isolada.

Tais situações foram motivadoras para a continuidade dos nossos estudos. No Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da

UFSCar, desenvolvemos a dissertação de Mestrado tomando por base o mesmo objeto matemático; por um lado, tratado por meio de aplicação de tarefas exploratório-investigativas, segundo a perspectiva de Ponte (2005). Por outro lado, o conteúdo das tarefas propostas para alunos da primeira série do Ensino Médio privilegiou a possibilidade de mobilizar diversos registros de representação semiótica, no decorrer da atividade matemática.

O processo de formulação do problema de pesquisa bem como o planejamento das tarefas utilizadas no trabalho de campo desta pesquisa teve contribuições do GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática). Dos estudos realizados durante o ano de 2013 neste grupo de pesquisa, apropriamos da estratégia de ensino-aprendizagem exploratória, cuja "característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (PONTE, 2005, p.13).

O planejamento coletivo dos enunciados das tarefas no âmbito do GEPLAM privilegiou articular, em um mesmo instrumento de pesquisa, a valorização de oportunidades de reflexão escrita por parte dos alunos (PONTE, 2005), combinada com a possibilidade de mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2003).

A análise da produção de informações oriundas do trabalho de campo desenvolvido em sala de aula buscou responder a seguinte questão de investigação: **como alunos da primeira série do Ensino Médio mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas envolvendo o conceito de função afim?**

Na redação deste relatório de pesquisa, o texto foi distribuído em cinco capítulos, sendo a Introdução o primeiro capítulo.

Os demais capítulos completaram:

a) Capítulo II: apresentamos os subsídios teóricos (registros de representação semiótica e tarefas exploratórias-investigativas) determinantes para a construção do problema desta pesquisa;
b) Capítulo II: apresentamos uma análise da produção acadêmica em nível de teses e dissertações brasileiras dedicadas a discutir sobre o ensino-

aprendizagem do conceito de função linear, bem como uma descrição da proposta didático-pedagógica do Sistema de Ensino COC para o ensino de função linear;

c) Capítulo III: descrevemos as etapas que compõe o percurso metodológico da pesquisa;
d) Capítulo IV: composto pelas considerações finais deste relatório de pesquisa. Trata-se de um momento de resgate das intenções deste processo de investigação que culminou em resultados para a busca da resposta para a questão de pesquisa. Não menos importante, dedicamos também em apresentar as limitações deste trabalho, bem como as possibilidades para futuras pesquisas e a contribuição do Mestrado para o ser professor-pesquisador Fábio, autor desta obra.

Reservamos neste processo de redação a apresentação das referências bibliográficas que subsidiaram esta pesquisa.

2. APORTES TEÓRICOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos ao leitor o caminho que conduziu a formulação da questão de investigação, bem como a forma de compreender nossos aportes teóricos: registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas.

2.1 Os registros de representação semiótica na aprendizagem do conceito de função afim

A matemática é apresentada de várias maneiras de representações para um mesmo objeto, no nosso caso, pela escrita na língua natural, linguagem algébrica, gráfico, tabulares. As representações de natureza semiótica permitem o acesso ao objeto matemático que, na sua essência é abstrato. Este fato é um marco da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A natureza semiótica deve-se ao fato de que a aprendizagem frente aos objetos matemáticos ocorre na forma conceitual. Neste sentido, Duval (2003, 2009) estudou o funcionamento cognitivo do aluno na realização de tarefas matemáticas e seus possíveis problemas de aprendizagem.

Em sua teoria, Duval (2009) explicou que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático, denomina-se, registro semiótico. Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado.

No acesso ao objeto matemático deve ser enfatizado duas transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação. As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16).

Nas atividades matemáticas podemos representar um objeto utilizando vários registros de representação e, segundo a teoria de Duval, é a conversão dos vários registros sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento. Na realidade, a possibilidade de mudança de registro se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem conforme evidencia o pensamento a seguir:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento; de registro de representação. (DUVAL, 2003, p.14).

Para Duval (2009), a distinção entre objeto e representação é fundamental para a compreensão matemática. O alerta para que não haja confusão na relação objeto – representação deve-se ao fato de que diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático.

Duval (2003) apresentou uma classificação dos diferentes registros mobilizáveis na atividade matemática: multifuncionais e monofuncionais. O tratamento dos registros multifuncionais não envolvem algoritmos. Nesta categoria agrupamos a língua natural e as formas de raciocínio como argumentações escritas ou deduções válidas a partir de definições ou teoremas como formas de representações discursivas. Já as figuras unidimensionais, planas ou tridimensionais, assim como as construções geométricas são modalidades de registros multifuncionais cuja representação não é discursiva.

A outra categoria de registros, os monofuncionais, tem tratamento algoritmizável. Também contempla duas subcategorias: os diferentes sistemas de escrita matemática (numérica, algébrica e simbólica) são formas de representação discursiva. Já os gráficos cartesianos, incluindo suas variabilidades são tipos de registros monofuncionais cuja representação é não-discursiva.

Tomando por base nosso objeto de estudo, se conservarmos o mesmo sistema semiótico, há uma transformação de registro na forma de tratamento. Podemos tomar como exemplo o cálculo de diferentes pares ordenados associados a uma mesma lei de formação para uma função.

Já conversões são as transformações mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos. É importante salientar que converter implica em coordenar registros mobilizados. Uma conversão não conserva a explicação das mesmas propriedades do objeto. Assim, a representação do objeto no registro de chegada, por meio de uma conversão, não terá o mesmo significado que a representação no registro de partida.

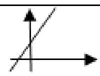
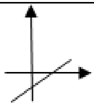
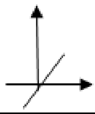
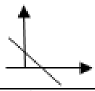
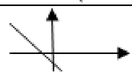
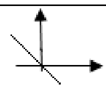
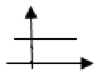
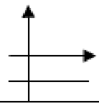
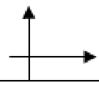
É comum observamos na condição de professor que o aluno expressa um melhor rendimento escolar quando constrói um gráfico de uma função a partir de sua lei de formação, em relação ao processo inverso (conversão do registro gráfico para o registro algébrico).

> (...) a conversão entre gráficos e expressões algébricas de funções supõe levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro lado, os valores dos coeficientes (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1) (DUVAL, 2003, p.17).

De acordo com Lima (1996, p.87) “uma função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, b $\mathbb{R}$ tais que f(x) = a.x + b para todo x $\mathbb{R}$”. As translações f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ formuladas por f(x) = x+b, inclusive a função identidade f(x) = x; também são funções afins. Ainda o mesmo autor destacou que as funções lineares f(x) = ax e as funções constantes f(x) = b são casos particulares da função afim.

Em relação às variáveis visuais e a variação de sinal doscoeficientes, produzimos um quadro a seguir:

Quadro 1: Variáveis visuais

Coeficiente a	Coeficiente b	Gráfico
a>0	b>0	
a>0	b<0	
a>0	b=0	
a<0	b>0	
a<0	b<0	
a<0	b=0	
a=0	b>0	
a=0	b<0	
a=0	b=0	

Fonte: arquivo do pesquisador.

Duas representações de um objeto não têm o mesmo conteúdo de um registro para outro. A aparente falta de correspondência entre os dois conteúdos da representação do mesmo objeto, de acordo com Duval (2000), é causada pelo fato que o conteúdo da representação não depende em primeiro lugar do objeto representado, mas sim do sistema de produção ativado. Cada registro fornece algumas possibilidades de tratamento, mas também não explicita as mesmas propriedades do objeto que são explicitadas num outro registro.

Duval (2000, p.55) propôs a seguinte questão: “Desde que não há um acesso direto ao objeto matemático separado das suas representações, como os estudantes podem aprender a reconhecer objetos matemáticos através de suas várias representações, quando os conteúdos são tão diferentes?”

É relevante ser lembrado que, do ponto de vista deste autor, a compreensão de um conceito ou objeto matemático, denominada de compreensão integrativa, está relacionada com suas representações semióticas na forma de registros gráficos, discursivos e não discursivos, pois tal,

> (...) compreensão integrativa é a articulação dos registros, a qual constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática [...] e não o inverso, qual seja o 'enclausuramento' em cada registro. [... Assim,] a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Esta é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto. [Além do que, a conversão entre tais registros é fundamental porque] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento [em um mesmo registro, porém], é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto [... Porque] duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm, de forma alguma, o mesmo conteúdo (DUVAL, 2003, p. 22).

A leitura das representações gráficas requer dos alunos a discriminação das diferentes variáveis visuais pertinentes constituintes deste tipo de representação. Requer também que os alunos tenham consciência das correspondências entre as variações visuais dos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica da relação. Este modo de pensar a leitura das representações gráficas vai à contramão da prática corrente, a qual utiliza regras de codificação para construir representações gráficas fundamentadas na associação entre pares ordenados de números e pontos do plano. Isto leva a um distanciamento cognitivo entre a interpretação global, que se espera dos alunos, e a leitura ponto a ponto na qual o professor se baseia para introduzir o registro gráfico.

Mas, afinal, o que vem a ser a teoria dos registros de representação semiótica?

O entendimento da teoria de registros de representações semióticas como sendo o emprego de signos (gráficos, figuras, fórmulas, escrita), pertencentes a um sistema de representação, constituído de significado e funcionamento, segundo os quais a construção do conhecimento acontece mediante a conversão estabelecida entre duas ou mais formas distintas de registro de representação. Segundo Duval (2003), essas representações semióticas são externas e conscientes do sujeito, ou seja, elas representam a compreensão manifestada sobre um objeto, o qual pode ser tratado de diversas formas. A correspondência existente entre as várias formas de tratamento de um objeto, ou seja, entre as várias formas de registro de representação, sentido de mostrar a compreensão acerca do objeto estudado.

Todo tipo de expressão tem sua forma particular de representação repleta de significados, seja através do diálogo, gestos ou por meio da escrita, faz necessário discutir os diferentes registros de representação empregados no processo de ensino-aprendizagem dos objetos matemáticos estudados, buscando estabelecer conexão entre eles. Portanto, para nós, aprender função afim consiste em desenvolver uma progressiva coordenação entre vários sistemas semióticos de representação.

Entendemos que podemos potencializar esta aprendizagem se, nós professores, formos capazes de produzir enunciados (tarefas) estimuladores da atividade matemática dos alunos. Pautamos em Ponte (2005, p.11-12) que nos instrui que “formulando tarefas adequadas o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas; é preciso ter atenção ao modo de propor e de conduzir a sua realização na sala de aula”.

A seleção de tarefas pode ser de vários tipos, por exemplo, umas mais desafiantes outras mais acessíveis, umas mais abertas outras mais fechadas. Ponte (2005, p.17-18) expôs que “uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas”.

Ponte (2005, p.11) analisou a gestão curricular sob o ponto de vista da estratégia posta em prática pelo professor em sala de aula. “Uma estratégia de ensino envolve usualmente diferentes tipos de tarefa, articuladas entre si. Um único tipo de tarefa dificilmente atingirá todos os objetivos curriculares valorizados pelo professor”.

Concordamos com Ponte (2005) e na condição de professor-pesquisador mesclamos diferentes tipos de tarefas para proporcionarmos a aprendizagem dos alunos nos diferentes conteúdos programáticos previstos. Porém, nesta dissertação, dada a formulação da nossa questão de pesquisa apresentamos o cenário da aplicação e análise de tarefas exploratórias-investigativas construídas a partir da valorização dos diversos registros de representação semiótica possíveis de serem mobilizados e coordenados entre si.

2.2 As potencialidades das tarefas exploratórias-investigativas no ensino-aprendizagem

A tarefa, segundo Ponte (2005), pode surgir de diversas maneiras, entre elas, pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno. Em nossa pesquisa a tarefa foi concebida desta forma e o professor também assumiu a função de pesquisador em uma turma de 1ª série do Ensino Médio.

Ponte (2005) expôs que há vários tipos de tarefa matemática como problemas, exercícios, exploração e investigação. Não temos a pretensão de discutir o que é cada uma delas, pois o que é mais importante é nos atermos para suas dimensões. Duas delas são o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio diz respeito ao nível de dificuldade da questão proposta aos alunos e o grau de estrutura que varia entre os polos aberto (tarefa comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado e/ou pedido) e fechado (o enunciado é claro e objetivo no que se propõe).

O cruzamento destas dimensões será apresentado a seguir:

Figura 1: Distribuição das tarefas nos quadrantes, mediante o grau de desafio e abertura.

Fonte: Ponte (2005, p.18)

Em nossa pesquisa tratamos o que Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) designaram de tarefas exploratório-investigativas cujo objetivo é instigar os alunos a pensar de maneira genérica, percebendo regularidades e explicitando-as através de expressões matemáticas. Esta pode ser uma alternativa poderosa para o desenvolvimento interrelacionado do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos, caracterizando este tipo de atividade como mais uma concepção de educação algébrica.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) conceberam que este tipo de tarefa tende ser mais livre e menos sistemática que as demais, usadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático, permitindo, aos alunos, várias alternativas de exploração e investigação. O ambiente exploratório-investigativo pode proporcionar aos alunos um envolvimento legítimo, pautado em seu interesse pela atividade social e mental resultante de tarefas abertas que permite os alunos criar suas próprias relações com o saber matemático a ser construído e/ou (re)significado.

Nossos alunos, sujeitos da pesquisa, estudavam em uma escola da rede particular de ensino de Sorocaba, na qual há uma grande preocupação sobre a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Atualmente, em proporções distintas, dois instrumentos têm sido fundamentais para o acesso de nossos alunos ao Ensino Superior: o tradicional vestibular e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Este processo de admissão gera no aluno uma expectativa muito grande com respeito ao Ensino Médio. Levando isso em consideração, inserimos em nossas aulas, com base no banco de questões do ENEM, tarefas de natureza exploratória-investigativa.

Investigar significa a procura de conhecer o desconhecido, portanto o termo investigar pode ser usado para designar atividades que envolvam procura de informação (PONTE; BROCADO, OLIVEIRA, 2009). Podemos então dizer que as investigações matemáticas em sala de aula é a busca do conhecimento matemático, assim segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009, p. 13) “para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as suas respectivas propriedades”.

A investigação matemática pensada no ambiente escolar como uma metodologia de ensino contribui com o processo de ensino-aprendizado dos alunos porque proporciona ao estudante o como fazer matemática.

Quando utilizamos a investigação matemática no processo de ensino-aprendizagem como um recurso metodológico, proporcionamos a oportunidade dos alunos explorarem o conteúdo estudado; a investigação estimula os alunos a utilizarem os conhecimentos matemáticos já vistos em sala de aula, de modo que esses conhecimentos auxiliam os alunos a compreenderem os procedimentos matemáticos que serão feitos durante a investigação, permitindo assim aos alunos uma melhor apropriação do objeto de estudo.

De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2009) a atividade investigativa é composta na maioria das vezes na introdução da tarefa, no desenvolvimento da investigação e a na discussão dos resultados. Ao introduzir uma tarefa exploratório-investigativa em sala de aula o professor deve apresentá-la brevemente aos seus alunos, oralmente ou por escrito, para que compreendam o que esta sendo pedido para realização da mesma.

Como as tarefas exploratório-investigativas são pouco estruturadas, os alunos começam a perceber que necessitam formularem hipóteses em relação às questões investigadas. Assim, com o decorrer da atividade investigativa os alunos compreendem que suas hipóteses formuladas têm aspecto temporário e precisam ser testadas. Após esse teste, os alunos passam a explicarem suas hipóteses com a utilização dos recursos matemáticos, para então apresentarem de forma expositiva suas conclusões aos demais alunos (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009).

A apreensão dos objetos matemáticos inicia ao submeter o aluno ao uso destas atividades cognitivas, ou seja, submetê-lo a situações onde ele tenha que se utilizar e coordenar diversos registros de representação, executando diferenciados tratamentos e variadas conversões do registro de representação.

3. UM OLHAR SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM NAS PESQUISAS ACADÊMICAS E DOCUMENTOS CURRICULARES

Neste capítulo apresentamos um panorama das pesquisas brasileiras envolvendo o estudo do conceito de função afim no âmbito do Ensino Médio, mais especificamente, aquelas que se dedicaram em abordar os registros de representação semiótica. Na sequencia apresentamos a abordagem do mesmo conceito no Sistema de Ensino COC.

3.1 Contribuições de teses e dissertações no ensino-aprendizagem do conceito de função afim

Apresentamos neste item um levantamento bibliográfico de teses e dissertações, no período de 2000 a 2015, acerca das pesquisas brasileiras sobre ensino-aprendizagem de função afim, o qual é denominado de Estado da Arte. Partimos da dissertação de mestrado de Ardenghi (2008) que analisou as pesquisas brasileiras no período de 1970 a 2005 sobre o conceito de função; entre elas, cinco dissertações trataram do conceito de função afim: Lopes (2003), Lopes (2004), Santos (2000), Santos (2002) e Santos (2005).

Posteriormente recorremos as seguintes fontes de pesquisa: Banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES (http://www.capes.gov.br/) e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD (http://bdtd.ibict.br/). Nesta fase da pesquisa trabalhamos com o uso de palavras-chave: tarefas exploratórias-investigativas, função do 1º grau, função afim, aulas investigativas e registros de representação semiótica.

Ferreira (2002) aponta dois aspectos relevantes na realização de um trabalho do tipo estado da arte. O primeiro envolve as tendências temáticas e os enfoques teórico-metodológicos, indicando os rumos que estão sendo trilhados pela pesquisa. O segundo aspecto é o que mobiliza o movimento físico da produção acadêmica, que responde questões sobre quem e de onde são os autores desses trabalhos, pesquisador, instituição.

Organizarmos as vinte e nove pesquisas encontradas em duas tabelas. Realizamos a leitura minuciosa de cada um dos trabalhos e fizemos o fichamento dos seguintes elementos, divididos em duas categorias: informações gerais (autor, título da pesquisa, ano, instituição de origem e tipo de pesquisa, ou seja, mestrado acadêmico, mestrado profissionalizante, doutorado); informações específicas (foco temático, aportes teóricos, questões de pesquisa ou objetivos, metodologia, resultados e contribuições para área).

A primeira tabela que apresentamos contém informações sobre a origem das pesquisas no cenário brasileiro, bem como seus respectivos autores e ano de defesa.

Tabela 1: Instituições que possuem dissertações sobre função afim.

Instituição	Autor (ano)	Pós-Graduação
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais	Pinto (2009)	Mestrado em Educação Tecnológica
Centro Universitário UNIVATES	Melo (2013)	Mestrado em Ensino de Ciências Exatas
Universidade Bandeirantes	Sales (2009)	Mestrado em Educação Matemática
Universidade do Extremo Sul Catarinense	Duarte (2011)	Mestrado em Educação
Universidade Estadual de Campinas	Cruz (2015) Stivam (2013)	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Estadual de Maringá	Luz (2010)	Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática
Universidade Santa Úrsula	Santos (2000)	Mestrado em Educação Matemática
Universidade Federal de Alagoas	Santos (2012)	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Federal de Goiás	Soares (2014)	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Universidade Federal de Juiz de Fora	Abreu (2011)	Mestrado Profissional em Educação Matemática
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	Lopes Jr (2006)	Mestrado em Educação
Universidade Federal de Santa Catarina	Lopes (2004)	Mestrado em Educação Científica e Tecnológica
Universidade Federal de São Carlos	Selingardi (2015), Macedo (2010)	Mestrado em Ensino de Ciências Exatas
Universidade Federal do Rio de Janeiro	Fonseca (2011)	Mestrado em Ensino de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Salin (2014), Schroer (2013)	Mestrado em Ensino de Matemática
Universidade Federal Rural de Pernambuco	Dornelas (2007) Nascimento (2009)	Mestrado em Ensino das Ciências Mestrado em Educação
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Reis (2011), Bica (2009), Lopes (2003). Santos (2002), Santos (2005) Scano (2009)	Mestrado em Educação Matemática

	Gonçalves Filho (2011)	
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul	Braga (2009)	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Nesse cenário destacamos que 16 pesquisas foram realizadas na Região Sudeste, 3 na Região Nordeste, 9 na Região Sul e 2 na Região Centro-Oeste; todas em nível de Mestrado. Destacam-se nesse quantitativo pesquisas oriundas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), totalizando 7 pesquisas, o que representa 24,1% do total.

Na tabela a seguir apresentamos a distribuição das pesquisas segundo seis focos temáticos identificados por nós, a partir da leitura na íntegra de cada uma das pesquisas.

Tabela 2: Mapeamento das pesquisas segundo o foco temático.

Foco temáticos	**Trabalhos**
Análise de livro didático	Bica (2009), Nascimento (2009)
Avaliação de sequência didática	Dornelas (2007), Lopes (2003), Schroer (2013), Delgado (2010), Lopes Jr (2006)
Ensino	Cruz (2015), Duarte (2011)
Modelagem matemática	Abreu (2011), Luz (2010), Macedo (2010), Gonçalves Filho (2011), Soares (2014)
Proposta didática interdisciplinar	Selingardi (2015), Lopes (2004)
Recursos computacionais	Pinto (2009), Braga (2009), Sales (2009), Fonseca (2011), Santos (2012), Melo (2013), Reis (2011), Salin (2014), Santos (2000), Santos (2002), Santos (2005), Scano (2009), Stivam (2013)

Fonte: Arquivo do pesquisador.

É relevante destacar a articulação do estudo de função afim via recursos computacionais, cujo registro que se prioriza nesses trabalhos é a representação gráfica de objetos matemáticos.

Considerando a articulação das tarefas exploratórias-investigativas com os registros de representação semiótica, nenhum dos vinte e nove trabalhos trataram desta relação. Quando pensamos exclusivamente em tarefas exploratórias-investigativas não encontramos nenhum trabalho desta natureza, dado o montante de pesquisas que catalogamos. Porém, quando o assunto é o estudo da função afim via registros de representação semiótica, encontramos onze pesquisas: Santos (2002), Lopes (2003), Lopes Jr (2006), Braga (2009), Scano (2009), Bica (2009), Delgado (2010), Fonseca (2011), Santos (2012), Reis (2011), Salin (2014).

Dedicamos a apresentar detalhes de cada uma das onze pesquisas, tendo por base o fator cronológico de cada uma das dissertações em questão.

Santos (2002) pesquisou a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes angular e linear da equação y =ax+b pela articulação dos registros gráfico e algébrico da função afim, com o auxílio do software Funcplus construído para esta finalidade.

Para atingir este objetivo foi elaborada uma sequência didática aplicada com o auxílio do referido software e com base nos aportes teóricos de Raymond Duval que leva em consideração a discriminação de variáveis visuais pertinentes e a percepção das variáveis correspondentes na escrita algébrica. A sequencia foi trabalhada com dez alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular em São Paulo.

Os resultados mostraram que o ambiente informatizado proporcionou uma nova forma de trabalhar com os alunos e avaliar seus desempenhos, mais especificamente na conversão do registro gráfico para o algébrico.

Lopes (2003) avaliou a aplicação de uma sequencia didática visando a introdução do conceito de função afim, cuja fundamentação teórica baseou-se em Rymond Duval e Bento Jesus Caraça. A proposta foi desenvolvida em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de São Paulo. Os resultados de pesquisa revelou a importância da multiplicidade de representações no processo de conceitualização, favorecendo a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes, no registro gráfico e seus correspondentes valores no registro algébrico.

Lopes Jr (2006) apoiado na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval explorou situações em que alunos da 1ª série do Ensino Médio foram chamados à construção do conceito de função do 1º grau. Esse estudo foi feito a partir de um levantamento de aspectos epistemológicos do conceito de função, de documentos oficiais que trataram do processo de ensino-aprendizagem, da análise de alguns materiais didáticos impressos e também, da aplicação e interpretação de uma sequência didática.

No planejamento da sequência didática exploramos os registros semióticos na forma de gráfico, escrita algébrica, tabelas e a língua natural; tentando compreender como essas formas de linguagem se mostram disponíveis para sua utilização e coordenação em torno do conceito matemático função do 1º grau. Nossa investigação se concentrou na análise de algumas atividades cognitivas envolvidas nas transformações (tratamentos e as conversões).

Os resultados da pesquisa de Lopes Jr (2006) apontaram alguns elementos didáticos que favoreceram a elaboração de atividades matemáticas que visam, não apenas as transformações entre os registros, mas, também, uma exploração mais intensa do funcionamento cognitivo dos alunos diante dessas transformações, diferentemente, do ensino tradicional que geralmente privilegiou algumas formas de representação ou apresentou conversões que levam em conta apenas um dos sentidos da transformação.

Braga (2009) investigou o processo de compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática em alunos do 9º ano (8ª série) do ensino fundamental, mediante a utilização da planilha Excel. Essa pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede particular de ensino de Porto Alegre e foi dividida em três etapas: aplicação de um questionário inicial, objetivando a caracterização dos estudantes e a delimitação da amostra de trinta discentes com características diferenciadas quanto ao conhecimento e à utilização da planilha. A segunda etapa envolveu a aplicação das atividades no laboratório de informática, evidenciando a possibilidade de transferência entre os registros algébrico, tabular e gráfico dessas funções e, por fim, a aplicação de um segundo questionário, com o propósito de avaliar o trabalho realizado.

Braga (2009) avaliou que a utilização desse recurso tecnológico promoveu a compreensão do conceito de função na perspectiva de um trabalho que enfatizou a conversão entre os registros de representação semiótica das funções de 1º e 2º graus, conforme a Teoria de Duval. A análise do último questionário revelou, segundo a autora, que a utilização da planilha nas aulas de Matemática facilitou a aprendizagem do conteúdo desenvolvido de um modo diferente do modelo tradicional.

Scano (2009) inicialmente preocupou-se em estudos preliminares realizados e observou que muitos trabalhos constataram dificuldades de aprendizagem que alunos de diferentes níveis de escolaridade apresentaram em relação ao estudo da função afim.

Este autor desenvolveu sua pesquisa apoiando-se nas metodologias da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, mediada pelo uso do software GeoGebra. O objetivo da pesquisa foi desenvolver uma sequência de ensino para iniciar o estudo com alunos do nono ano do Ensino Fundamental que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta, relacionando os coeficientes da equação da reta com o gráfico.

O estudo de Scano (2009) foi fundamentado na linha francesa da Didática Matemática, segundo os pressupostos teóricos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval.

Ao analisar as atividades propostas, Scano (2009) notou que os alunos da turma do 9º ano reconheceram que o gráfico de uma função afim é dado por uma reta de equação y=ax+b. A maioria representou corretamente o gráfico da função afim, a partir de sua representação algébrica e, ainda, identificou a forma algébrica de uma função com base em sua representação gráfica.

Scano (2009) concluiu que a maioria dos alunos desta turma articulou os registros de representação algébrica e gráfica no estudo da função afim. Os resultados obtidos na pesquisa permitiu evidenciar que os alunos utilizaram diferentes registros de representação no processo de iniciação aos estudos da função afim e articularam os diferentes registros, favorecendo a compreensão do aluno em relação a este saber matemático.

O trabalho de Bica (2009) teve por objetivo, analisar e investigar os aspectos visuais e textuais do tema função de forma geral, e em particular função afim, em livros didáticos de Matemática da 1ª série do Ensino Médio. Para isso, verificou-se qual o enfoque dado ao desenvolvimento conceitual da função afim, em especial sua representação gráfica; e como são promovidas as articulações entre os parâmetros algébricos e seus correspondentes visuais dos pontos de vista matemático e visual.

Para alcançar os objetivos foi desenvolvido um conjunto de critérios de investigação que permitiram realizar uma análise qualitativa em três livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio aprovados em 2005 pelo Programa

Nacional de Livros para o Ensino Médio do Ministério de Educação e Cultura. Analisando os critérios de avaliação do livro didático de matemática do catálogo dos livros selecionados pelo MEC, destacou a importância de alguns critérios do ensino da matemática associados ao tema deste trabalho, como por exemplo, no que diz respeito à forma de abordagem dos conteúdos.

A pesquisa foi fundamentada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os critérios de investigação tiveram como objetivo indicar se os livros propiciavam a apreensão global defendida por Duval.

Os resultados mostraram que apenas dois livros, promoviam a apreensão global e apresentavam diversidade de registros. Estes livros mostraram também coerência entre o texto teórico e os exercícios; muitos deles contextualizados.

Delgado (2010) desenvolveu sua pesquisa na modalidade estudo de caso, que teve como objetivo avaliar as dificuldades de ensino-aprendizagem da função afim aos alunos da 1ª série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual na cidade do Rio de Janeiro. O trabalho foi desenvolvido, por meio de atividades, junto a três turmas da qual o autor foi o professor, num total de cento e treze alunos participantes. Foram realizadas dez atividades, com algumas delas subdivididas, perfazendo um total de vinte e cinco itens.

O objetivo principal foi à verificação de quais transformações por conversão entre os diferentes registros de representação da função afim (língua natural, expressões algébricas, tabelas de valores e forma gráfica) os alunos possuíam maiores dificuldades e facilidades. Para tanto, tomou-se o cuidado de se colocar nas atividades, pelo menos, duas diferentes formas de representação semiótica.

A utilização de procedimentos metodológicos adequados, segundo Delgado (2010), propiciou uma melhor avaliação do aproveitamento dos alunos em relação ao conteúdo trabalhado. Muitas das dificuldades que apareceram no decorrer das atividades podem perfeitamente passar despercebidas, caso se siga apenas a sequência didática adotada pelos livros. O autor não concluiu, mas afirmou que a vivência com diferentes formas de representação, no caso a função afim, contribuiu para tornar os alunos capazes em relação ao processo de reconstrução do conhecimento, principalmente quando as atividades são realizadas em grupo, conforme foi trabalhado nesta pesquisa.

Fonseca (2011) propôs discutir e avaliar a utilização integrada do Mathlet como ferramenta nas aulas de matemática, no estudo da função afim, em turmas de 1ª série do Ensino Médio. As dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas, representações e análises gráficas, no ensino-aprendizagem de funções Afins, foram alguns dos problemas que motivaram a elaboração dessa pesquisa. A metodologia empregada consistiu na aplicação de uma sequência de atividades, com o auxilio dos Mathlets e dois testes. A partir dos registros dos alunos foram feitas as análises, baseadas nos dados produzidos no decorrer da aplicação de cada atividade.

As produções dos alunos, segundo Fonseca (2011) mostraram-nos que as dificuldades encontradas inicialmente, em estabelecer uma relação de dependência entre variáveis conduzindo a possíveis generalizações evoluíram gradativamente, levando os alunos a adquirirem um entendimento mais sólido dessas relações. À medida que interagiram com os mathlets, os alunos amadureciam as ideias de dependência, variável, domínio, imagem, representação gráfica e analítica da função afim, desenvolvendo estratégias de resolução de cada item das atividades.

Neste sentido, os resultados mostraram que a integração dos mathlets, como inovações tecnológicas, no ensino da função afim conduziu os alunos a uma autonomia crescente na realização das atividades. As situações propostas nas atividades levaram-nos a adquirirem uma maior experiência com álgebra, com a resolução de equação do 1º grau, com o uso da propriedade fundamental das grandezas proporcionais e da função afim, favorecendo o uso de vários procedimentos de resolução. Estes vários procedimentos estiveram presentes na realização dos testes, levando-os a obter um resultado satisfatório nos mesmos.

Reis (2011) desenvolveu sua pesquisa a partir da constatação das dificuldades apresentadas no conceito de função afim em alunos de 1ª série do Ensino Médio por meio da elaboração e aplicação de uma sequencia diagnóstica de tarefas seguida de outra, baseada nos erros cometidos e intermediada pelo software GeoGebra.

Na tentativa de compreender melhor o funcionamento cognitivo em relação às dificuldades dos alunos, Reis (2011) apoiou sua investigação na teoria dos registros de representação semiótica e a análise de dados baseou-se nos procedimentos metodológicos da Engenharia Didática de Michèle Artigue.

Os erros cometidos pelos estudantes na fase diagnóstica da aplicação das tarefas foram organizados nas seguintes categorias: dificuldades na conversão do registro gráfico para o algébrico com ou sem a determinação do coeficiente linear, reconhecimento do coeficiente angular e linear e dificuldades para converter o registro algébrico para o gráfico a partir da análise do sinal da função.

Estas categorias de erros foram utilizadas para elaborar as tarefas aplicadas com o auxílio do software GeoGebra. Porém, as mesmas não foram aplicadas com os alunos. Para futuras pesquisas, Reis (2011, p.136) sugeriu “a aplicação didática com o uso do software GeoGebra para verificar possíveis avanços na aprendizagem da função afim.

Santos (2012) destacou que tratamos do ensino de funções afim e quadrática, observamos que os professores de Matemática, orientados pelos livros didáticos atuais, exploram a construção de gráficos mediante a ligação de pontos no plano cartesiano. Este método, embora seja válido, não garante um esboço seguro e não favorece a observação de propriedades importantes das referidas funções.

Pensando nisto, este trabalho teve como objetivo verificar a eficiência de um roteiro produzido na forma de uma cartilha. Neste roteiro, Santos (2012) descreveu-se como traçar os gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus fazendo uso de materiais simples e indispensáveis, como o papel e o lápis, e também via software GeoGebra.

Para verificar a eficiência deste roteiro, constituiu-se um grupo de alunos composto por indivíduos que cursavam o Ensino Médio em escolas públicas de Alagoas e que participavam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Junior (PIBIC-Jr) sediado na Universidade Federal de Alagoas (UFAL). A metodologia adotada consistiu na aplicação de questionários - antes, durante e depois – de nossa intervenção de ensino: aulas expositivas, referente às funções afins e funções quadráticas, destacando a construção de seus gráficos; e uso do roteiro impresso que trabalhou a construção dos gráficos, fazendo uso, a princípio, de lápis e papel quadriculado e, em outro momento, de um software de geometria dinâmica.

A utilização do GeoGebra, além de tornar o esboço de gráficos mais rápidos, tornou compreensíveis as modificações gráficas sofridas quando mudamos os coeficientes das funções. Como fundamentação teórica, Santos (2012) contou com a contribuição da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (2008) e das formas representativas de uma função na visão de Raymond Duval (2009). Dos dez alunos participantes na pesquisa, sete apresentaram um avanço no desenvolvimento do traçado gráfico das funções consideradas e na compreensão das suas propriedades.

Desta maneira, Santos (2012) chegou à conclusão de que é possível estudar e observar as propriedades das funções afim e quadrática levando em consideração pontos específicos pertencentes a seus gráficos, tanto no papel quanto, e especialmente, no computador.

Salin (2014) também utilizou o software GeoGebra para investigar o papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem do conceito de função afim e quadrática, com turmas de alunos de uma primeira série do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre. O objetivo da pesquisa foi mostrar como ocorreu o desenvolvimento de múltiplas conexões entre as representações algébricas, gráfica e numérica de uma função, bem como a importância do software como recurso pedagógico quando se pretende trabalhar com múltiplas representações.

Em termos de resultado de pesquisa, Salin (2014) apontou que as observações de relações entre variáveis a partir da manipulação de pontos em uma construção no GeoGebra propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, através do processo constante de conversão de registros.

Das onze pesquisas abordadas, sete utilizaram o recurso computador como mediador na aprendizagem do aluno, valorizando a multiplicidade de registros de representação semiótica. As pesquisas destinadas à avaliação da sequencia didática por meio do uso de lápis e papel (LOPES (2003), LOPES JR (2006) e DELGADO (2010)) também ressaltaram a importância da multiplicidade de representações e coordenação dos respectivos registros semióticos no processo de conceitualização de função afim.

Bica (2009) em sua análise de livros didáticos para o Ensino Médio de registros de representação semiótica se fez presente na apreensão global do conceito de função.

Dado este panorama das produções acadêmicas em nível de Mestrado, nossa pesquisa também irá contemplar a diversidade de registros de representação semiótica na formulação de tarefas de natureza exploratória-investigativa, as quais serão aplicadas para uma turma de alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Sorocaba (SP).

3.2 O conceito de função afim no Sistema de Ensino COC

A Matemática no Ensino Médio, cujo conceito é de formação do indivíduo, estrutura o pensamento e o raciocínio dedutivo, pois é uma ferramenta que serve para a vida e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel de formação, de acordo com o suplemento didático-pedagógico do (antigo Curso Oswaldo Cruz (COC)), a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e formação, cuja utilidade transcende o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando curiosidade e investigação, proporcionando confiança para analisar e enfrentar situações, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade.

Ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. O ensino da matemática não pode perder o caráter científico da disciplina e do conteúdo matemático. Portanto, é necessário que o processo pedagógico em matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades matemáticas, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento.

A Matemática deve propiciar conhecimentos para desenvolver a capacidade de interpretação; levar à tomada de decisões enfrentando situações problemas; estabelecer relações e técnicas de cálculos para resolução de problemas; expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em matemática; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos, o conhecimento de outras áreas do currículo; apropriar de conhecimentos matemáticos, de forma que ele seja crítico, capaz de agir com autonomia nas suas relações sociais; desenvolver a capacidade de ativar suas estruturas mentais, facilitando a passagem do estágio das operações concretas para a das operações formais; utilizar a linguagem matemática da informação – coleta de dados, tabelas, gráficos, porcentagens – na produção de seus textos.

Em termos de conteúdos, os mesmos são organizados em quatro apostilas bimestrais, disponibilizadas aos professores e alunos. Esta organização curricular leva em conta os conhecimentos prévios, as vivências e o processo contínuo de formação dos alunos como pressupostos essenciais para a construção e a gestão do conhecimento.

Na escola (OSE-COC), na qual atuamos como professor e desenvolvemos a parte empírica desta pesquisa com 26 alunos da primeira série do Ensino Médio, é difundido que a utilização contínua deste material apostilado, permite aos estudantes progredir mais nos seus processos de aprendizagem, pois estudam todo o conteúdo previsto para o Ensino Médio em dois anos letivos e, na última série, ocorre apenas para revisão dos conteúdos; voltando-se essencialmente a formação do aluno para o vestibular.

O Sistema de Ensino COC disponibiliza aos professores meios eletrônicos que possibilitam conhecer todo o conteúdo previsto para uma dada disciplina, antes do início do ano letivo. Desta forma o objetivo é evitar que ocorram lacunas em relação ao cumprimento dos conteúdos programáticos e fornecer subsídios para que as aulas sejam formatadas de acordo com as orientações previamente definidas. O contraponto é que o docente não tem autonomia para possíveis alterações no cronograma do ano letivo, já que sua atividade docente fica condicionada ao cumprimento de um roteiro pronto para ministrar uma aula, tendo prazos e datas para começar e terminar o conteúdo.

Na primeira série do Ensino Médio, dentre os conteúdos básicos, destacamos funções. Sua conceitualização ocorre com a abordagem dos seguintes conteúdos específicos: função afim, função quadrática, aplicações de funções, equações e inequações, exponenciais, logaritmos, conceito de módulo, módulo de um número Real, função exponencial e função logarítmica.

A avaliação da aprendizagem destes conteúdos leva em conta:

a) Observar situações que envolvem funções, para formalizar o conceito;
b) Ler e interprete gráficos estatísticos relacionando ao conceito de função;
c) Comparar propostas de planos de saúde, de telefone, de salário para tomada de decisões;
d) Resolver problemas envolvendo pontos extremos de funções, obtidos por meios gráficos;
e) Analisar o crescimento /decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos;
f) Reconhecer a representação algébrica de uma função de primeiro grau, dado o seu gráfico;
g) Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau;
h) Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial e/ ou logarítmica, reconhecendo-as como funções inversas;
i) Resolver problemas que envolvam função exponencial e logarítmica.

O material apostilado do COC concebe que muitas de suas tarefas são planejadas na perspectiva de resolução de problemas. Trata-se de uma metodologia pela qual o estudante terá oportunidade de aplicar conhecimentos matemáticos já adquiridos em novas situações de modo a resolver a situação proposta.

A concepção de resolução de problemas apoia-se na visão de Schoenfeld (1997, p.16) “o professor deve fazer uso de práticas metodológicas para a resolução de problemas, as quais tornam as aulas mais dinâmicas e não restringem o ensino de matemática a modelos clássicos, como exposição oral e resolução de exercícios”. Ainda, na visão do autor, a resolução de problemas possibilita compreender os argumentos matemáticos e ajuda a vê-los como um conhecimento passível de ser apreendido pelos sujeitos do processo de ensino-aprendizagem.

No processo contínuo de avaliação da aprendizagem de nossos alunos da 1ª série do Ensino Médio constatamos que a apreensão do conceito de função afim ficou comprometida diante da necessidade de conversões nos diferentes registros de representação semiótica.

A teoria dos registros de representação semiótica considera importante a mobilização de diferentes registros de representação, para a compreensão de um objeto matemático, isto é, importante na matemática por seus objetos não estarem diretamente acessíveis à percepção do aluno. Essa teoria considera, também, que as frases em linguagem natural ou as equações e não simplesmente um traço ou um símbolo isolado, as letras, as palavras e os algarismos como representações semióticas. A aquisição dos conhecimentos matemáticos compreende o modo que o aluno estabelece relações entre conceitos. Um dos objetivos do ensino da matemática é levar o aluno a construir suas próprias relações com o saber que lhe é ensinado, porém, também é necessário que o professor tenha consciência da significação que ele mesmo dá ao saber que ensina.

A proposta da pesquisa foi colocada para a coordenação com o intuito de ajudar no entendimento e compreensão de um tema importante para a formação do aluno, pois função afim é utilizada em outras disciplinas, como na Física, Biologia, Química. Há também a preocupação quanto ao desempenho dos alunos na prova ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), pois no colégio, o Ensino Médio é uma formação continuada, dos alunos, para os grandes vestibulares do Estado de São Paulo.

Pontualmente, as dúvidas e os maiores erros dos nossos alunos ingressantes na 1ª série do Ensino Médio estavam em questões de análise e interpretação de gráficos. Para enfrentarmos estes obstáculos, elaboramos, aplicamos e avaliamos a utilização de tarefas exploratórias-investigativas para a conceitualização de função afim via mobilização dos diversos registros de representação semiótica.

4. O CONTEXTO DO TRABALHO DE CAMPO

Neste capítulo apresentamos nossa opção metodológica de pesquisa coerente com os propósitos da pesquisa, uma síntese descritiva do contexto escolar e, em particular das turmas da primeira série do Ensino Médio; além da descrição do planejamento das tarefas aplicadas.

4.1. Escolha da metodologia de pesquisa

Para responder a questão **como alunos da primeira série do Ensino Médio mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas envolvendo o conceito de função afim?** norteadora desta pesquisa, a opção metodológica adequada é a pesquisa qualitativa por estarmos interessados em noções de compreensão, significado e ação (COUTINHO, 2008). De acordo com esta autora estamos interessados em saber com os referidos alunos interpretam as tarefas propostas e, consequentemente, que atividades matemáticas são produzidas neste processo.

O percurso qualitativo desta pesquisa é permeado pela modalidade de estudos naturalistas ou de campo, especificamente, uma pesquisa de intervenção (NACARATO et al, 2005). A produção de informações para nossa pesquisa foi obtida via registros escritos das atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula. Trata-se de uma pesquisa de intervenção, devido à presença do professor-pesquisador na analise da aprendizagem de um conteúdo matemático específico.

Nas próximas seções apresentamos características do contexto investigado: a escola, a turma da 1ª série do Ensino Médio e as tarefas planejadas e aplicadas. Vale ressaltar que os conteúdos de matemática desenvolvidos na referida turma contam com a presença de dois professores, um para temas destinados a álgebra e outro para os temas da geometria. O professor-pesquisador atua com os temas voltados a geometria. No entanto, há um entrosamento entre os professores de modo que acompanhamento da aprendizagem dos nossos alunos seja contínuo nas duas áreas (álgebra e geometria) da matemática.

4.2 Organização Sorocabana de Ensino (OSE-COC)

A história desta instituição de ensino teve seu início na antiga Escola de Comércio de Sorocaba, em 1924, com a ideia em atender a necessidade de formação profissional de uma cidade em franca expansão industrial e comercial.

Já com a denominação Organização Sorocabana de Ensino (OSE), sua estrutura começou a funcionar em um novo prédio, em 1958, que deu origem à sede atual, no qual passou a oferecer o Curso Colegial Secundário, em sintonia com as necessidades do mercado e, em 1975, começou a funcionar o Curso de Processamento de Dados (Informática).

O convênio entre a OSE e o Sistema COC de Educação e Comunicação, antigo Curso Oswaldo Cruz (COC), fornecedor do material didático, foi firmado em 1992, com a implantação de seu cursinho pré-vestibular.

Com um corpo docente, formado por professores graduados, especialistas e mestres, material didático moderno e grande infra estrutura, o Ensino Médio da OSE-COC tem como objetivo preparar seus alunos, tanto para a universidade como para a vida profissional.

A escolha desta escola para o desenvolvimento da pesquisa deveu-se ao fato da concordância e apoio por parte da gestão escolar, atrelada à condição do autor deste trabalho ser professor da instituição desde 2013. A disciplina de matemática no Ensino Médio, é dividida em frentes, nos dois primeiros anos, são dois professores por disciplina, e no terceiro ano três professores.

No primeiro ano do Ensino Médio, a disciplina é dividida em Álgebra e Geometria. O professor de Álgebra inicia o tema função no segundo bimestre; período que começamos o desenvolvimento das etapas do trabalho de campo.

4.3 Os sujeitos participantes da pesquisa

A escola tinha três primeiras séries do Ensino Médio, sendo o primeiro A composto de alunos que iniciaram e concluíram o Ensino Fundamental na própria escola, e os primeiros B e C, alunos provenientes de outras escolas, sendo escolas públicas da mesma cidade.

No colégio, os trinta e três alunos do primeiro ano A do Ensino Médio, concluíram o Ensino Fundamental no próprio colégio. Nas outras duas salas, primeiro ano B e C do Ensino Médio, totalizando 76 alunos; 57 deles são provenientes de escolas públicas e 19 de outras escolas particulares da cidade de Sorocaba-SP.

Para estas turmas, temos dois professores de matemática, sendo o professor que ministra a frente de álgebra, formado em Engenharia Civil, e trabalha no colégio há 30 anos, e o professor-pesquisador que ministra a frente de Geometria.

Nossa pesquisa envolveu 26 alunos das três salas do primeiro ano do Ensino Médio da escola, os quais aceitaram espontaneamente nosso convite. A aplicação das tarefas ocorreu no horário extra-turno das nossas aulas regulares.

Inicialmente tivemos a participação de 34 alunos; no entanto, antes mesmo de iniciar as tarefas, 8 alunos desistiram de participar, por não ter bonificação na disciplina. Assim, dentre os 26 alunos que iniciaram e finalizaram as tarefas, 16 eram alunos cujo segmento do Ensino Fundamental foi feito em escola pública. Constatamos que a trajetória escolar deles na disciplina de matemática foi irregular: cinco alunos alegaram que não tiveram aulas de matemática nos anos anteriores, e onze alunos nunca haviam visto o conteúdo função afim. Os outros 10 alunos fizeram o Ensino Fundamental em nossa escola.

4.4 O planejamento das tarefas envolvendo o conceito de função afim

O professor responsável pela frente de álgebra cumpriu o conteúdo programático para o conteúdo função afim, no prazo estipulado pelo cronograma do sistema apostilado COC e teve acesso à proposta de nossas tarefas antes de iniciar o conteúdo de função afim. Este professor, assim como nossos gestores, foi favorável à nossa proposta de pesquisa e considerou que as tarefas estavam alinhadas aos propósitos de avaliação da aprendizagem deste conteúdo; já descrito no item 2.2.

Após ministrar o conteúdo de função afim, fizemos uma entrevista com o professor sobre as possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos das três turmas da 1ª série do Ensino Médio.

Os objetivos pretendidos para a aprendizagem de tal conteúdo, no que diz respeito à aprendizagem, foram:

a) Identificar e entender a interdependência entre grandezas e representa-las em um sistema de coordenadas cartesianas;
b) Aprender o significado de função, conceituar, analisar, representar e identificar uma função afim;
c) Produzir, ler, analisar e interpretar gráficos que representam funções afins em um plano cartesiano.

Ao indagarmos o professor sobre ‘qual a principal dificuldade encontrada na abordagem do tema função afim para os alunos?’ obtivemos a seguinte resposta: ‘a principal dificuldade foi quando os alunos não entenderam a relação de dependência, de y em função de x’.

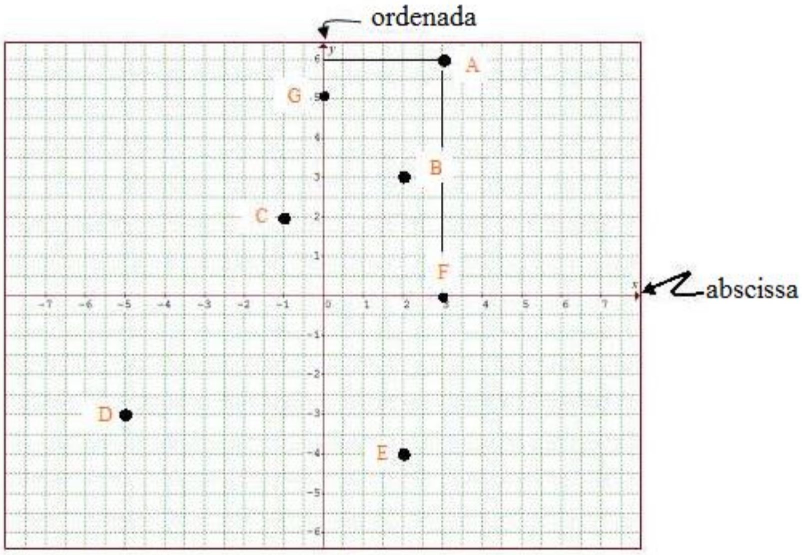
Dado que diversos alunos não apresentavam saberes prévios do conceito de função, em especial, função afim; solicitamos ao professor que descrevesse uma situação considerada adequada para introduzir o assunto função pela primeira vez para sua turma: ‘uma situação adequada é quando os alunos entendem a relação condicional entre dois conjuntos numéricos. Isto contribui na explicação de conjunto domínio, imagem e contradomínio’.

O professor em questão inicia o tratamento do conceito de função pela correspondência biunívoca entre dois conjuntos dos números reais.

Para finalizar a entrevista solicitamos que o professor elaborasse pelo menos duas tarefas distintas pertinentes ao tema função, cuja formulação descrevemos a seguir:

Figura 2: Formulação de tarefas do professor responsável pela frente de álgebra.

1- Explico plano cartesiano e passo uma atividade para determinar os pares ordenados.
Dados os pontos A(3,6), B(2,3), C(-1,2), D(-5,-3), E(2,-4), F(3,0), G(0,5), represente-os no plano cartesiano. Marcando o ponto A(3,6)
Primeiro: localiza-se o ponto 3 no eixo das abscissas
Segundo: localiza-se o ponto 6 no eixo das ordenadas
Terceiro: Traçar a reta perpendicular aos eixos, o encontro delas será o local do ponto.



2- Em uma certa cidade, os taxistas cobram R$4,50 a bandeirada mais R$2,00 por quilômetro rodado. Como é possível para um passageiro determinar o valor da corrida de 20km? E uma corrida qualquer?

Corrida de 20Km.
Preço= (2,00 x 20,00) + 4,50
Preço = 44,50
Corrida qualquer: 2x + 4,5

Fonte: Arquivo do pesquisador.

A primeira tarefa que o professor formulou não diz respeito diretamente ao ensino-aprendizagem de função, pois a projeção de pares ordenados não é exclusividade deste assunto. No entanto, o referido material apostilado inicia o estudo de função a partir da localização de pares ordenados no plano cartesiano.

As tarefas formuladas pelo professor condizem, em partes com a abordagem das pesquisas destacadas no item 2.1, pois destacar pontos aleatórios em um plano cartesiano tem pouca influencia a aprendizagem de função afim, apoiadas na teoria dos registros de representação semiótica, cujos apontamentos visam valorizar a diversidade de registros. Geralmente, são tratados os registros numérico, gráfico e algébrico como via de apreensão do conceito de função e de suas diferentes modalidades. Mais uma vez é importante ressaltar que não basta apenas a conversão dos registros de representação semiótica; pois este processo é uma condição necessária, porém, insuficiente para conceituar função.

Na avaliação do conteúdo da entrevista pelo professor-pesquisador e orientador da pesquisa, julgamos desnecessário fazer qualquer alteração no conteúdo de nossas tarefas. Neste sentido, o professor-pesquisador aplicou as tarefas para os 26 alunos, no período da tarde, durante quatro horas-aulas, com 45 minutos cada.

A postura do professor-pesquisador foi interferir o mínimo possível na produção das atividades matemáticas dos alunos. Para isto, o professor-pesquisador, no primeiro encontro, reforçou o propósito do nosso trabalho de pesquisa, fez as explicações necessárias para a realização das tarefas e entregou uma parte do material a ser respondido. Ao término do encontro recolheu as produções escritas dos alunos e, no segundo encontro, seguiu a mesma dinâmica de aplicação das tarefas.

5. A PRODUÇÃO DE INFORMAÇÕES

Neste capítulo apresentamos o conteúdo de cada uma das quatro tarefas apresentando inicialmente a análise da resposta esperada na atividade matemática (a priori) e, posteriormente, a análise da produção dos nossos alunos (a posteriori). Nesta análise apresentamos o desempenho das duplas bem como a análise qualitativa das dificuldades ocorridas na resolução. No decorrer da aplicação das tarefas foram formadas duplas, cuja identificação de cada aluno deu-se pelas letras do alfabeto (A, B, C,..).

5.1. Analise a priori da tarefa 1

Uma montadora de automóveis testou o desempenho de seu novo carro modelo flex (bi combustível). Na avaliação do consumo, as médias foram de 9 e 12 km/l na estrada, com etanol e gasolina, respectivamente.

a)João após comprar tal carro, fará três percursos, com distâncias de 36 km, 72 km e 108 km cada. Para estes casos, quantos litros de gasolina e etanol serão gastos, em média?

Resposta:

Km	Etanol	Gasolina
36	$x = \frac{36}{9} \Rightarrow x = 4l$	$y = \frac{36}{12} \Rightarrow y = 3l$
72	$x = \frac{72}{9} \Rightarrow x = 8l$	$y = \frac{72}{12} \Rightarrow y = 6l$
108	$x = \frac{108}{9} \Rightarrow x = 12l$	$y = \frac{108}{12} \Rightarrow y = 9l$

b) Sabendo que em determinado posto o preço do etanol é R$2,09 e o da gasolina R$3,17, qual é o valor gasto com combustível para cada situação descrita no item anterior?

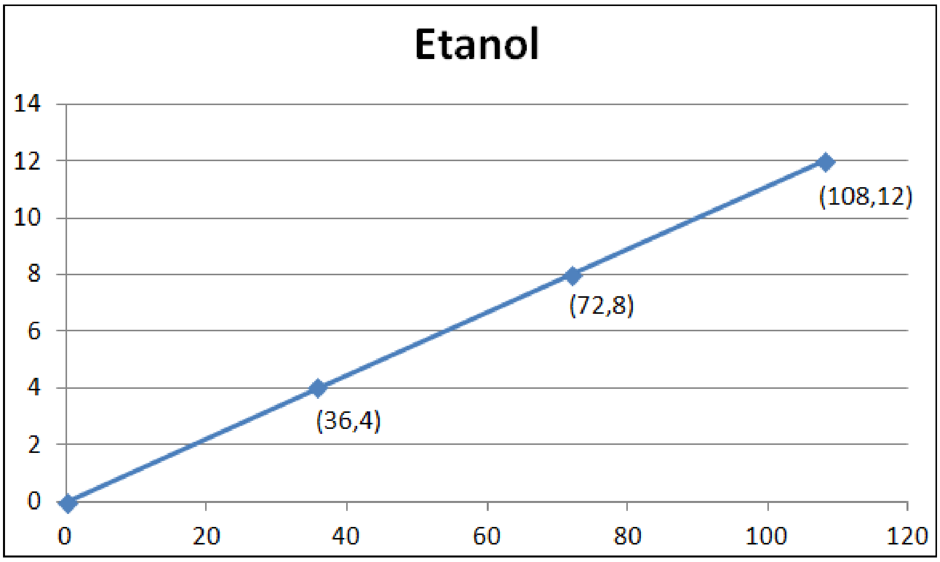
Valor (em R$) consumido com Etanol	Valor (em R$) consumido com Gasolina
$4x2,09 = 8,36$	$3x3,17 = 9,51$

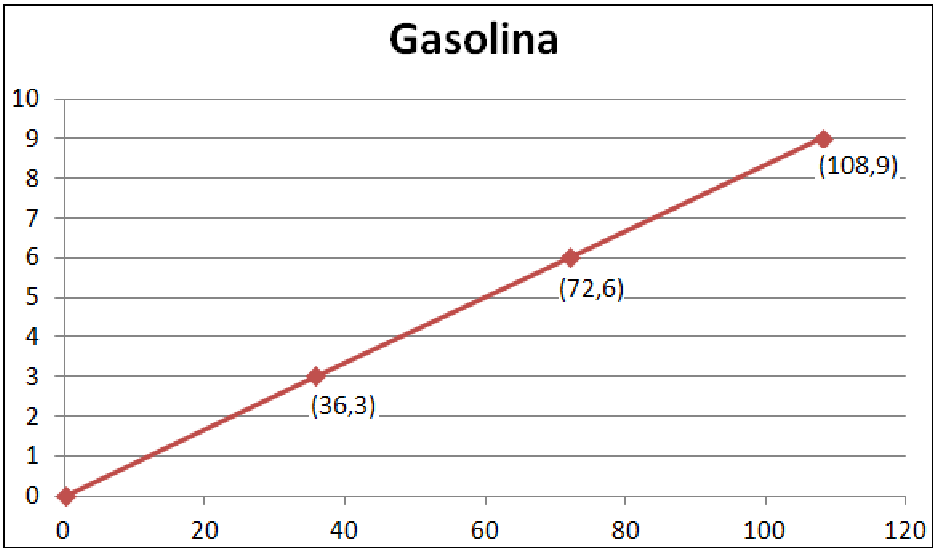
$8x2{,}09 = 16{,}72$	$6x3{,}17 = 19{,}02$
$12x2{,}09 = 25{,}08$	$9x3{,}17 = 28{,}53$

c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens **a** e **b**, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida?

Etanol	$f(x) = \frac{x}{9}$
Gasolina	$f(x) = \frac{x}{12}$

d) Para cada fórmula do item **c**, faça um esboço gráfico.





e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

A compreensão matemática está relacionada com a diversificação de registros de representação. Essa diversidade permite uma compreensão global do objeto matemático e rompe com a dificuldade da aprendizagem em um único registro de representação, possibilitando aos alunos fazer associações conceituais e não confundir o objeto matemático com sua representação.

Nessa tarefa, esperava-se que as duplas de alunos conseguissem relacionar a fórmula algébrica de cada combustível, com seus respectivos gráficos, e chegando a conclusão de que quanto maior a distancia percorrida, maior seria o consumo de combustível, e principalmente a relação entre coeficiente angular dos dois gráficos.

5.2. Analise a posteriori da tarefa 1

Para apresentarmos a análise sobre a produção da atividade matemática dos alunos, sistematizamos o desempenho deles em cada um dos itens da tarefa:

Tabela 3: Análise quantitativa de desempenho na tarefa 1.

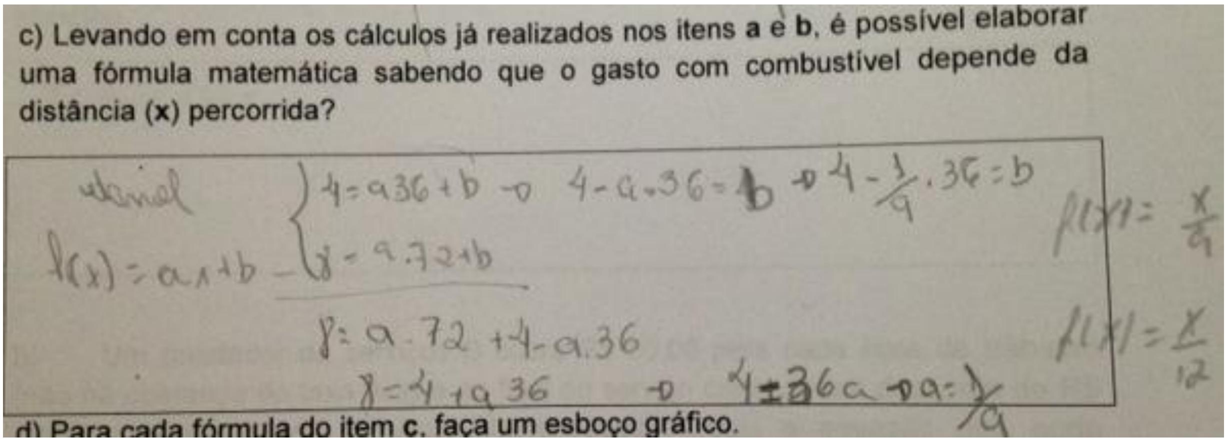
Item	Números de acertos	Dificuldade encontrada
A	13	Nenhuma
B	13	Nenhuma
C	9	Escrever a lei da função
D	3	Converter para a forma gráfica
E	5	Interpretação gráfica

Fonte: arquivo do pesquisador.

Esta tarefa permitiu aos alunos a exploração de algumas potencialidades da linguagem algébrica, tabular e gráfica na descoberta de propriedades de entendimento no objeto estudado, função afim. A análise das atividades dos alunos revelou dificuldade em relacionar a expressão algébrica com as expressões numéricas e com os gráficos que foram usadas para formular a hipótese inicial. Durante a resolução das tarefas, as dificuldades dos alunos na identificação de elementos comuns nas expressões numéricas e algébricas parecem originar dificuldades no seu raciocínio formal e consequente demonstração da hipótese inicial.

Nos itens ‘a’ e ‘b’, houve a mudança de registro de representação semiótica, da língua natural para a numérica, garantindo um entendimento e rendimento esperado dos alunos. No item ‘c’, cujo objetivo era elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida, nove duplas concluíram corretamente.

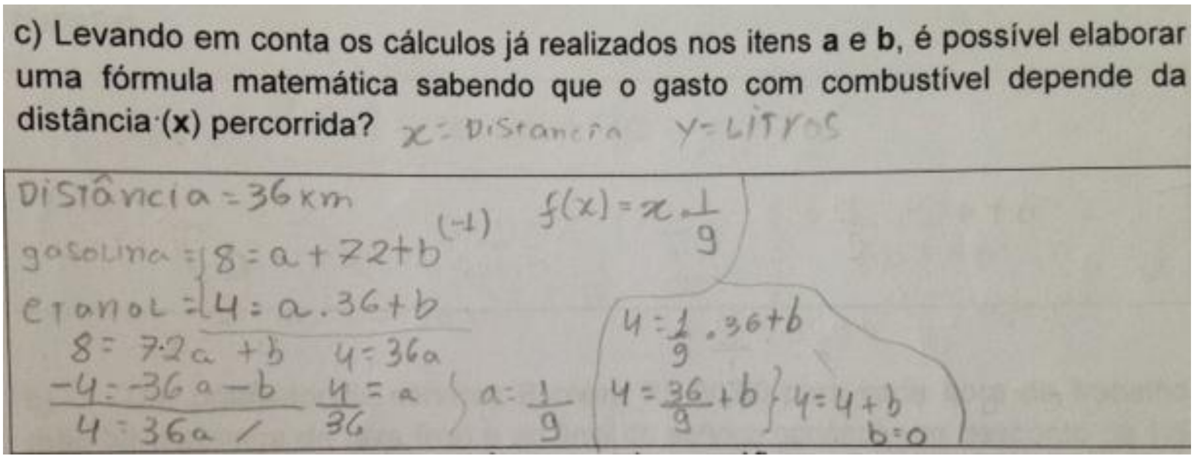
Figura 3: Protocolo da dupla AB (tarefa 1).



Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla AB, concluiu corretamente a tarefa, encontrando a lei de formação da função, realizando a conversão do registro na forma numérica para a forma algébrica.

Figura 4: Protocolo da dupla GH (tarefa 1).



c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens **a e b**, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida? x = Distancia y = Litros

Distância = 36 km

$f(x) = x \cdot \frac{1}{9}$

gasolina = 8 = a + 72 + b (-1)

etanol = 4 = a . 36 + b

$8 = 72a + b$ $\quad 4 = 36a$

$-4 = -36a - b$ $\quad \frac{4}{36} = a$ $\quad a = \frac{1}{9}$

$4 = 36a$

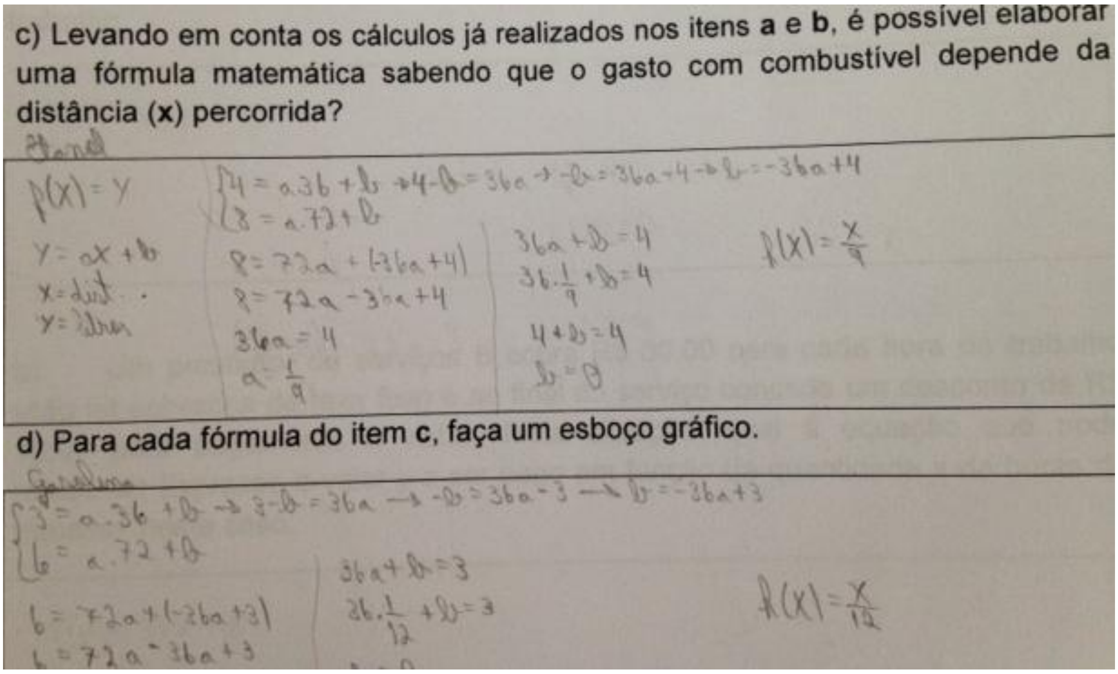
$4 = \frac{1}{9} \cdot 36 + b$

$4 = \frac{36}{9} + b$ $\quad 4 = 4 + b$ $\quad b = 0$

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla GH realizou todo o tratamento algébrico para determinar a lei da função, partindo de um mesmo sistema semiótico, ou seja, um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. No caso do combustível gasolina, a dupla escreveu corretamente a relação funcional exigida. No que diz respeito ao etanol, não houve a realização de nenhum cálculo que conduzisse à lei da função correspondente. A ausência desta última lei de função não interferiu na resolução dos itens ‘d’ e ‘e’, os quais estão corretos. O bom desempenho nos dois últimos itens deu-se pelo resgate das respostas corretas nos itens ‘a’ e ‘b’. É interessante destacar que esta dupla obteve um bom desempenho nas respostas dos cinco itens dessa tarefa devido à utilização da diversidade de registros de representação semiótica disponíveis em sua atividade matemática. Estes alunos não se prenderam ao conteúdo de uma resposta dada para obter a solução do item posterior na tarefa.

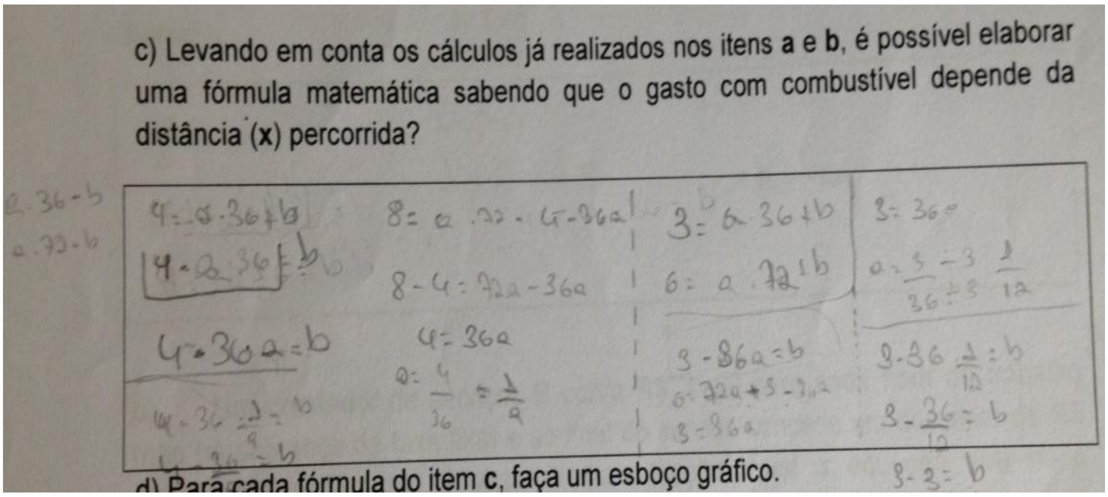
Figura 5: Protocolo da dupla RS (tarefa 1).



Fonte: arquivo do pesquisador.

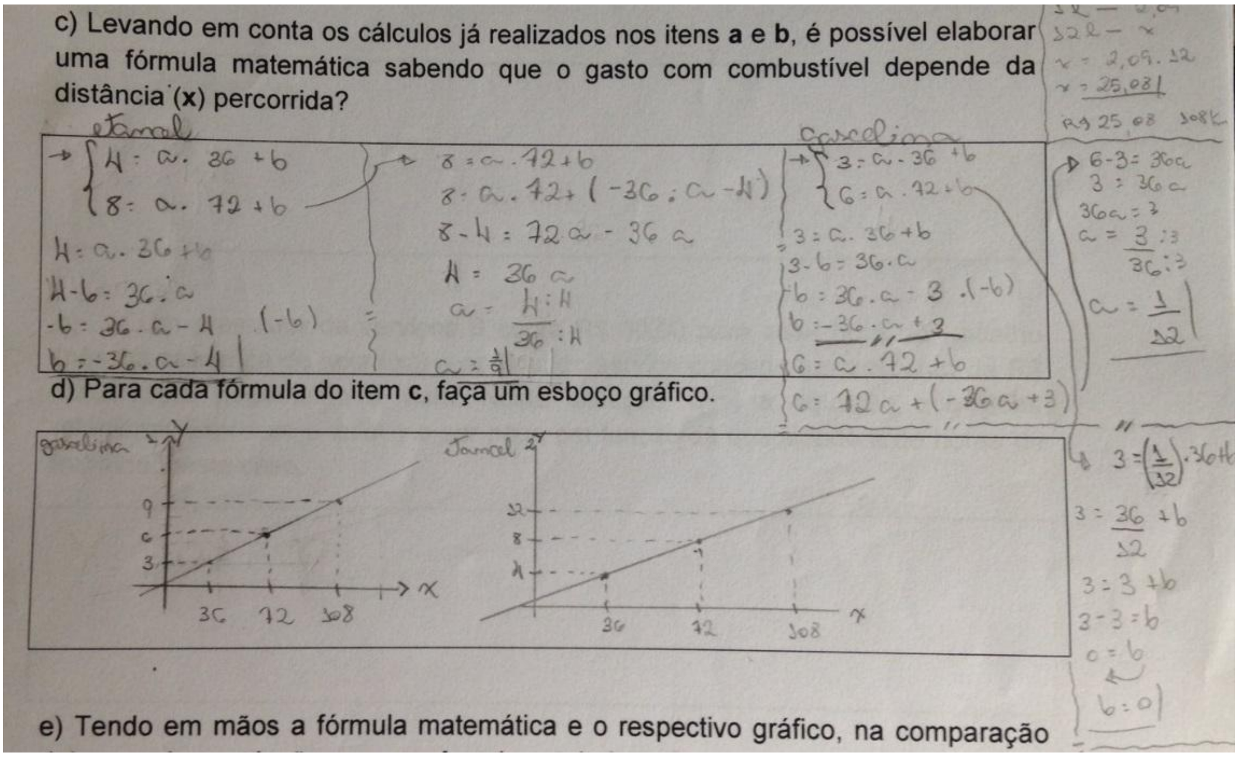
A dupla RS resolveu corretamente a fórmula para os dois combustíveis, porém para a Gasolina, juntamente com a sua resolução, em lugar errado ao pedido, mostrando assim uma falta de organização e construção do pensamento.

Figura 6: Protocolo da dupla KL (tarefa 1**).**



Fonte: arquivo do pesquisador.

Figura 7: Protocolo da dupla MN (tarefa 1).



c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens **a** e **b**, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida?

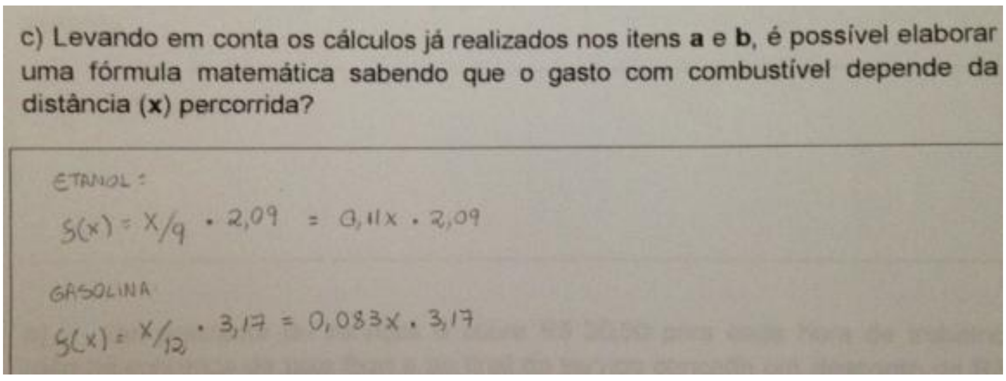
d) Para cada fórmula do item **c**, faça um esboço gráfico.

e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação

Fonte: arquivo do pesquisador.

As duplas KL e MN realizaram todo o tratamento algébrico para determinar a lei da função, porém não concluíram o raciocínio, escrevendo a correspondente expressão algébrica. Os alunos mostraram capazes de realizar tratamentos, como a simplificação de expressões algébricas, mas revelaram dificuldades na conversão da linguagem natural para algébrica, o que limita seriamente o seu raciocínio, que precisaria basear numa variedade de registros de representação e na sua coordenação (DUVAL, 2004).

Figura 8: Protocolo da dupla PQ (tarefa 1).



c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens **a** e **b**, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida?

ETANOL:

$g(x) = X/9 \cdot 2{,}09 = 0{,}11X \cdot 2{,}09$

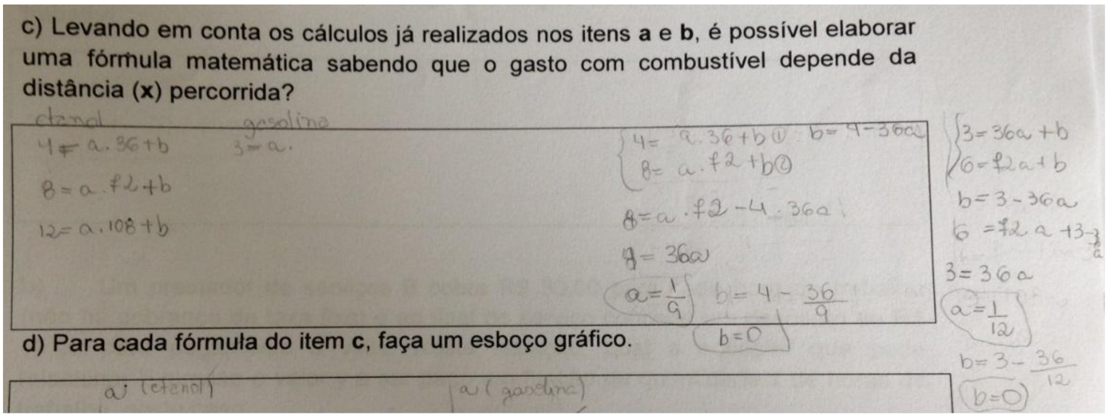
GASOLINA

$g(x) = X/12 \cdot 3{,}17 = 0{,}083X \cdot 3{,}17$

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla PQ confundiu a relação entre o gasto de combustível, com o valor por litro a ser pago, e chegaram a uma função completamente equivocada, não conseguindo realizar a conversão corretamente.

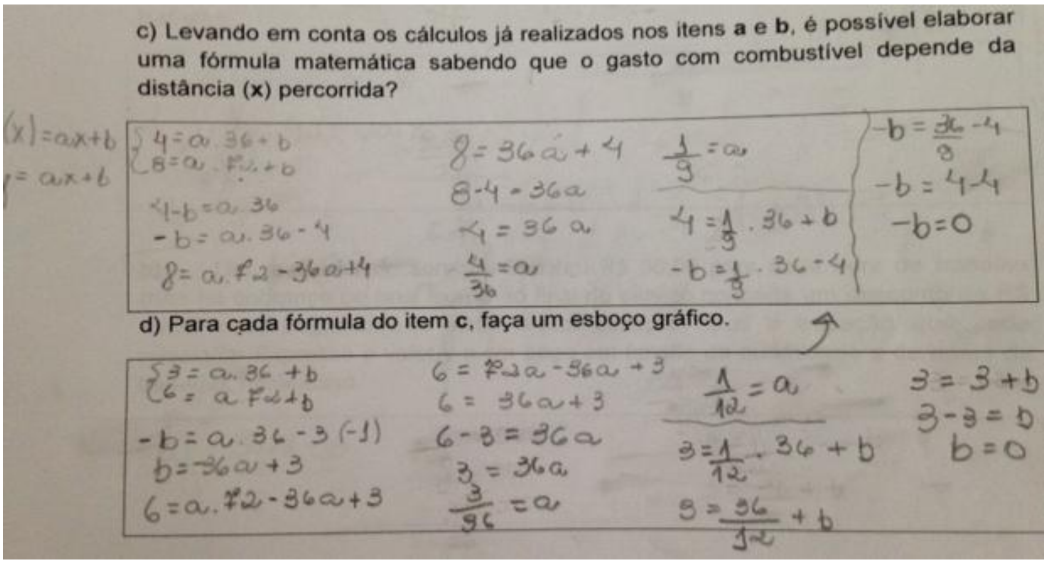
Figura 9: Protocolo da dupla TU (tarefa 1).



Fonte: arquivo do pesquisador

A dupla TU, concluíram todo o tratamento algébrico para encontrar a relação matemática da função, porém não finalizaram a conversão para a lei de formação da função.

Figura 10: Protocolo da dupla ZW (tarefa 1).



Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla ZW, não escreveu corretamente a fórmula, fizeram todo o tratamento algébrico para determinar a lei da função, porém não concluíram a conversão, ou seja, não utilizaram os cálculos dos coeficientes ‘a’ e ‘b’ para escrever a lei da função correspondente.

A princípio percebemos que estas quatro duplas tiveram a intenção de justificar da forma que esperávamos, porém não conseguiram terminar a conversão da língua natural para a forma algébrica da lei de formação da função, por não entender a relação de dependência, deixando incompleta, não conseguindo determinar a função matemática esperada.

O item ‘d’ (Para cada fórmula do item c, faça um esboço gráfico) envolveu a construção de gráficos, os quais poderiam ser obtidos a partir das expressões algébricas das funções afins determinadas no item ‘c’. A orientação que os alunos receberam de acordo com as tarefas propostas na apostila do sistema COC consistiu em partir da forma algébrica para determinar, pelo menos, dois pontos pertencentes à função. Posteriormente, registrar os pares ordenados em uma tabela de modo a facilitar a construção do gráfico.

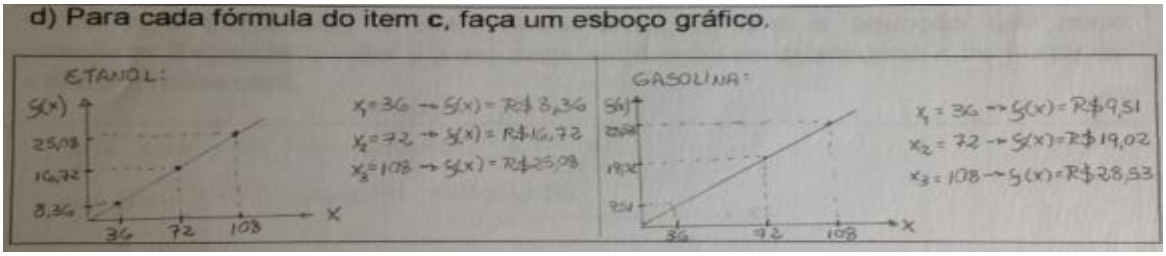
Esperava-se que as duplas realizassem duas formas de transformação de representação semiótica: tratamento e conversão.

Nesta tarefa os alunos a partir da forma algébrica, determinariam, pelo menos, dois pontos pertencentes à função. Esta sugestão teve como referência a resolução dos exemplos apresentada na apostila e na aula no período da manhã. Sendo a conversão (algébrica-tabular) facultativa, não obrigatória, mas facilitaria a maneira de construção do gráfico, sendo realizado por algumas duplas.

Das 13 duplas, 3 duplas fizeram o esboço dos dois gráficos, o restante deixaram em branco ou construíram apenas uma tabela. Apenas uma dupla seguiu a orientação que acabamos de descrever; as outras duas duplas utilizaram as respostas obtidas no item ‘a’ ou ‘b’ para o esboço gráfico.

As duplas que construíram os gráficos, não disponibilizaram os mesmos em um único plano cartesiano. Este procedimento contribuiria na análise gráfica, pois estaria garantido um registro de representação semiótica sob o uso de uma mesma escala para o desenho dos gráficos.

Figura 11: Protocolo da dupla PQ (tarefa 1).



Fonte: arquivo do pesquisador**.**

A dupla PQ realizou perfeitamente as conversões para a construção, da língua natural para a forma algébrica, logo após realizando a conversão da forma algébrica para a forma tabular, e em seguida para a forma gráfica, mostrando o domínio dos tratamentos e conversões, além de uma boa organização e estruturação do pensamento.

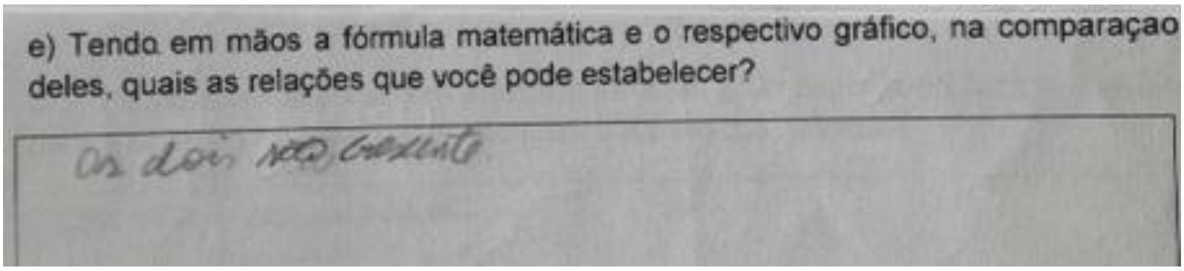
As duplas MN e TU construíram o gráfico, fizeram a conversão da forma algébrica determinada no item ‘c’, nesse caso entendendo a relação dos itens ‘c’ e ‘d’, elaboraram com precisão a construção da tabela, e a conversão em forma gráfica, mesmo formulando as leis das funções para o Etanol e para a Gasolina de maneira equivocada, a construção do gráfico, pelas duplas, foi correta.

Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como um dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema (DUVAL, 2009, p. 56-57). Todavia, Duval (2009, p. 63) assegura que “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. Assim, o autor considera que a atividade de conversão é tão fundamental quanto às atividades de formação e tratamento.

No item ‘e’ (Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?), três duplas não apresentarão nenhuma argumentação e uma dupla escreveu que os valores relativos às distâncias estão dispostos no eixo ‘x’ e os respectivos consumos estão descritos no eixo ‘y’, a mudança do enunciado foi para analisar se as dificuldades de interpretação do gráfico e expressões na qual interferiam ou não na resolução da tarefa, partindo do pressuposto de que nenhuma dupla construiu os gráficos no mesmo plano, ou seja, construíram dois gráficos em dois planos com escalas diferentes, justificando dessa maneira, a dificuldade de observação da inclinação das retas. A partir de uma situação-problema simples, com enunciado direto e sucinto.

Esperava-se que as duplas verificassem a relação entre o coeficiente angular, a reta sendo crescente e os diferentes gastos dos combustíveis. Três duplas tiveram diferentes formas corretas de interpretação e outras três apenas informaram apenas que o gráfico era crescente, e três outras duplas não responderam, deixando em branco, segue protocolos das duplas que resolveram a tarefa, as demais duplas apresentaram argumentações, a seguir:

Figura 12: Protocolo da dupla AB (tarefa 1).

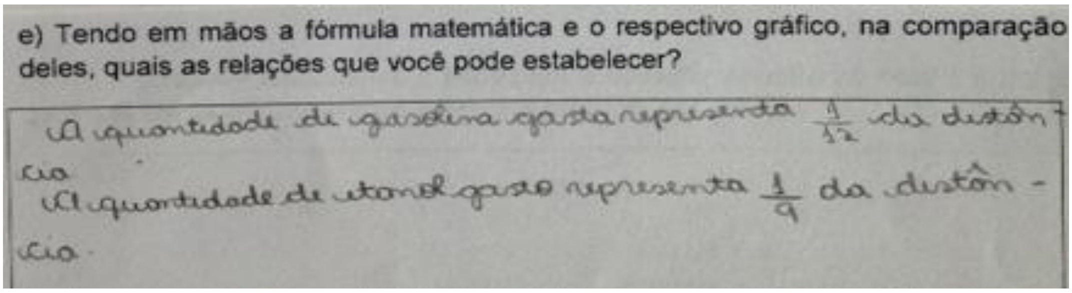

e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparaçao deles, quais as relações que você pode estabelecer?

Os dois são crescente

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla AB, apenas identificou que os gráficos são crescentes, mesmo sem a construção do item ‘d’, deixando clara a relação de maneira genérica entre o coeficiente angular como sendo positivo e a reta é crescente, mostrando o entendimento do conteúdo passado na sala de aula.

Figura 13: Protocolo da dupla EF (tarefa 1).


e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

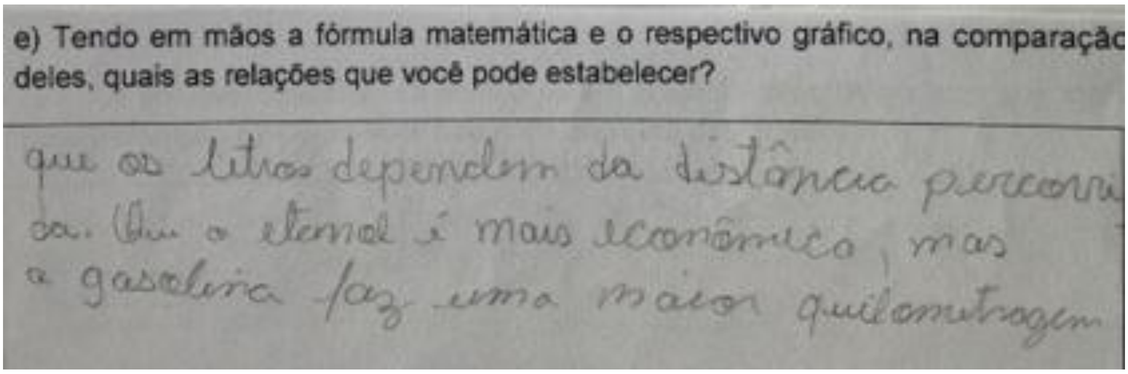
A quantidade de gasolina gasta representa $\frac{1}{12}$ da distân-cia

A quantidade de etanol gasto representa $\frac{1}{9}$ da distân-cia.

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla EF apenas identificou os coeficientes angulares de cada caso, porém sem nenhuma explicação de seu significado, deixando claro apenas a cópia dos valores encontrados nos itens ‘a’ e ‘b’ da mesma tarefa, não elaborando nenhum tratamento da maneira esperada.

Figura 14: Protocolo da dupla GH (tarefa 1).



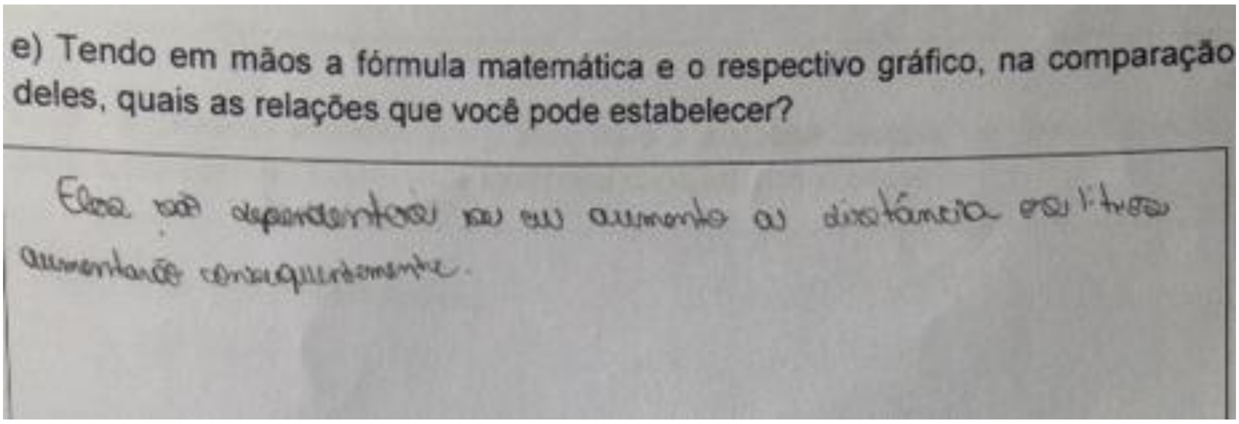
e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

que os litros dependem da distância percorri
da. Que o etanol é mais econômico, mas
a gasolina faz uma maior quilometragem

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla GH relacionou o gráfico com o volume de litros gastos em relação à distância percorrida, fazendo uma leitura única dos dois gráficos, interpretando-os de maneira correta, e conseguindo de maneira implícita, a leitura dos diferentes coeficientes angulares nos dois gráficos.

Figura 15: Protocolo da dupla IJ (tarefa 1).



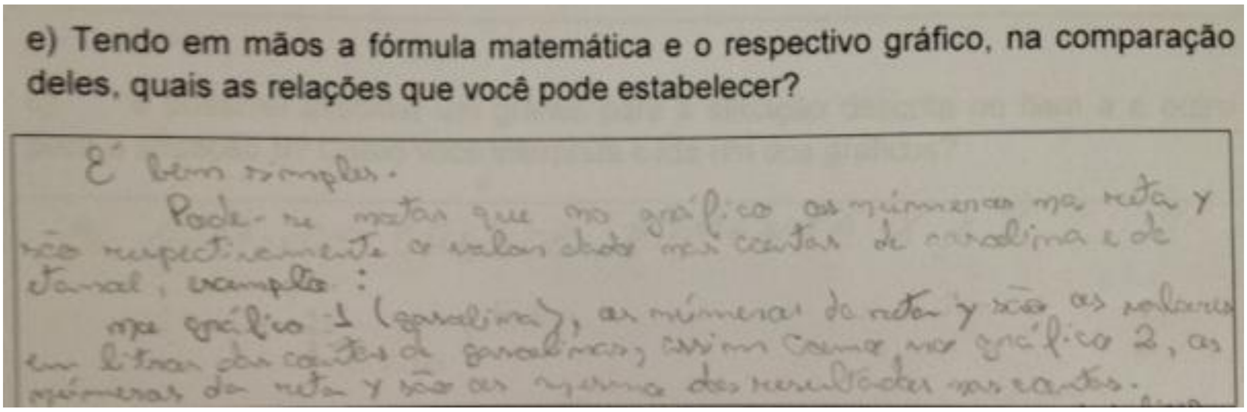
e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

Eles são dependentes se eu aumento a distância os litros
aumentarão consequentemente.

Fonte: arquivo do pesquisador.

Segue a transcrição da dupla IJ, “eles são dependentes se eu aumento a distancia os litros aumentarão consequentemente”. Tratou-se de uma interpretação simples, a qual poderia ser melhorada, se este registro em língua natural tivesse agregado a relação com o coeficiente angular.

Figura 16: Protocolo da dupla MN (tarefa 1).



e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

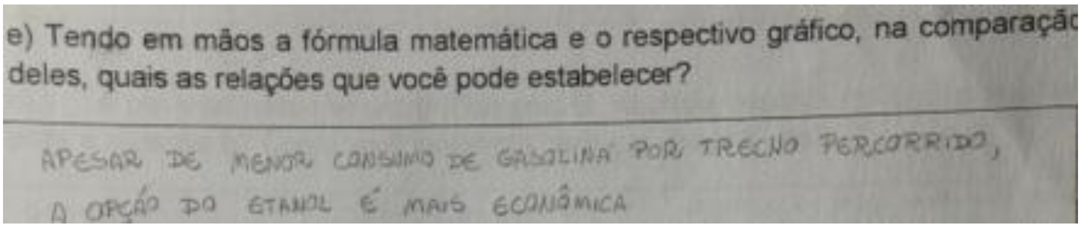
É bem simples.
Pode-se notar que no gráfico os números na reta y são respectivamente o valor dado nas contas de gasolina e de etanol, exemplo:
no gráfico 1 (gasolina), os números da reta y são os valores em litros das contas de gasolina, assim como no gráfico 2, os números da reta y são os mesmos dos resultados nas contas.

Fonte: arquivo do pesquisador.

A transcrição da resposta da dupla MN, “é bem simples, pode-se notar que no gráfico na reta y são respectivamente o valor dado nas contas de gasolina de etanol, exemplo, no gráfico 1 (gasolina), os números da reta y são os valores em litros das contas em gasolina, assim como no gráfico 2, os números na reta y são os mesmos resultados das contas”.

Nessa resposta, a dupla focou apenas no eixo y (gasto de combustível), não relacionando o consumo com a distancia percorrida, ou seja, não realizando o tratamento esperado, usando a linguagem natural para descrever e justificar os seus raciocínios. No entanto, quando solicitados a generalizar as suas hipóteses, recorrem à linguagem algébrica, pois a representação algébrica corretamente revelou a facilidade na conversão entre diferentes registros (linguagem natural, linguagem algébrica e representação gráfica), e mostrou facilidade tanto na realização de tratamentos, como na conversão da linguagem natural para a algébrica.

Figura 17: Protocolo da dupla PQ (tarefa 1).

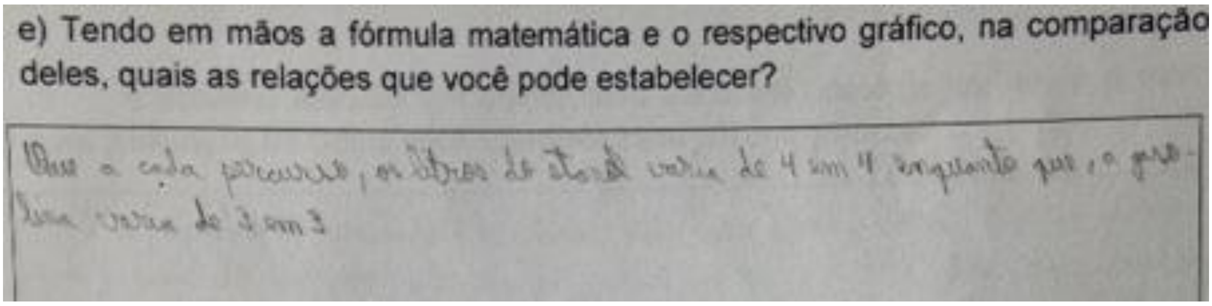


e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

APESAR DE MENOR CONSUMO DE GASOLINA POR TRECHO PERCORRIDO, A OPÇÃO DO ETANOL É MAIS ECONÔMICA

Fonte: arquivo do pesquisador.

Figura 18: Protocolo da dupla RS (tarefa 1).



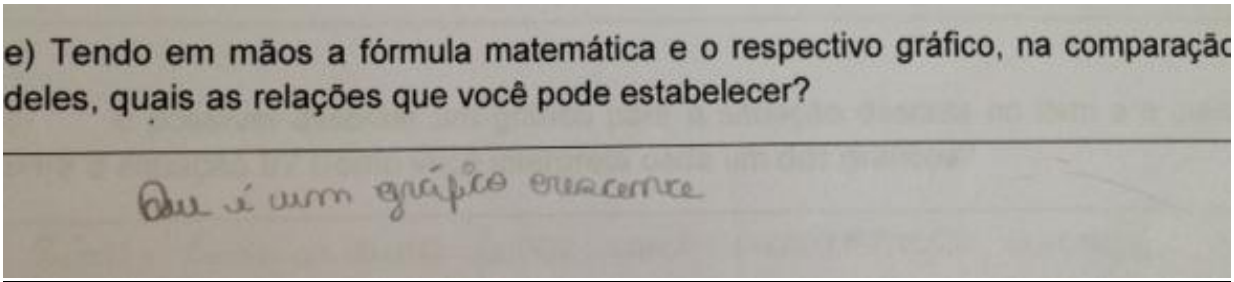
e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

Que a cada percurso, os litros de etanol varia de 4 em 4 enquanto que, a gasolina varia de 3 em 3

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla PQ, apenas identificou a relação de gasto de combustível com distância percorrida, não realizando o tratamento correto, verificando a relação entre os coeficientes angulares em cada gráfico construído. A dupla RS esboçou a variabilidade em cada um dos eixos coordenados, nada mais, mostrando a falta de compreensão com o tratamento das funções pedido nessa tarefa.

Figura 19: Protocolo da dupla VX (tarefa 1)

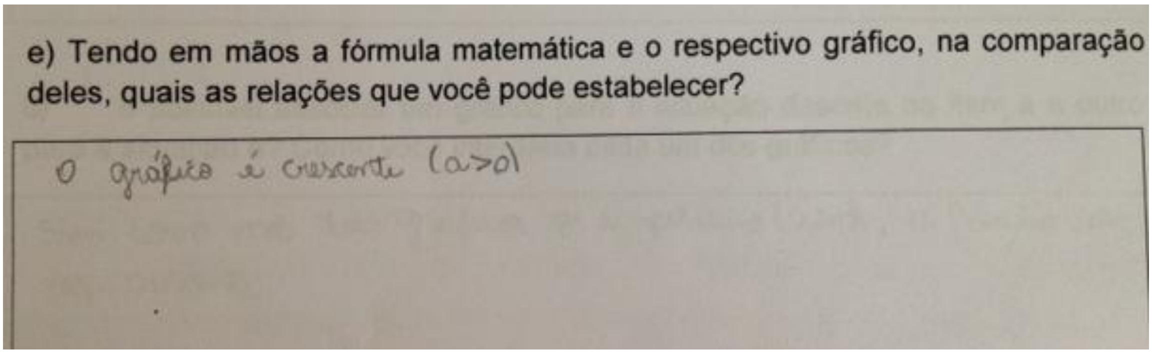


e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

Que é um gráfico crescente

Fonte: arquivo do pesquisador

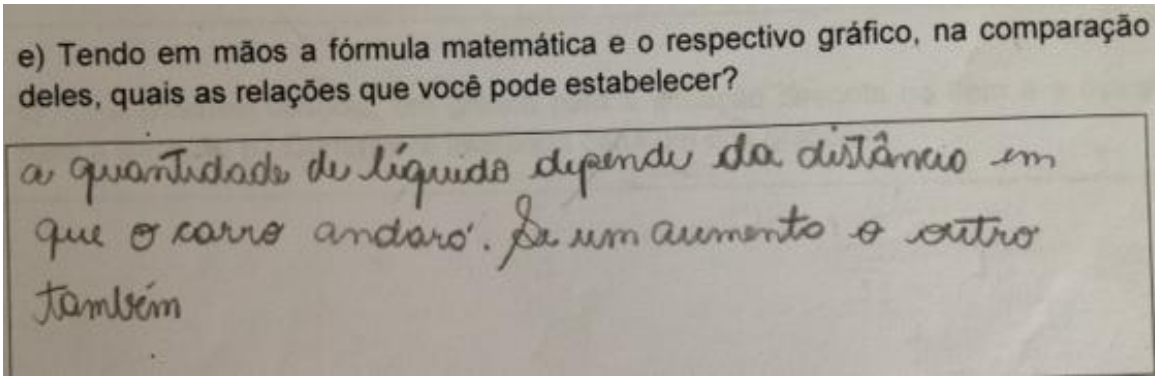
Figura 20: Protocolo da dupla ZW (tarefa 1)


e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

o gráfico é crescente (a>0)

Fonte: arquivo do pesquisador

Figura 21: Protocolo da dupla ZW (tarefa 1)


e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

a quantidade de líquido depende da distância em que o carro andaró. Se um aumento o outro também

Fonte: arquivo do pesquisador

Tomando por base as competências e habilidades que descrevemos quanto à aprendizagem do conceito de função de afim, as duplas GH, IJ, KL e PQ identificaram a interdependência entre grandezas. As duplas EF e RS compararam os gráficos, construídos separadamente, destacando quantitativamente a variabilidade dos valores associados aos eixos do plano cartesiano.

Já as duplas VX, ZW e AB interpretaram os gráficos destacando o que Duval (2003, 2009) designa de variáveis visuais; no caso, o sentido crescente do gráfico. Estes alunos também associaram a unidade simbólica correspondente ao sentido da inclinação da reta, ou seja, a>0. Ambos os casos, revelou-se um instrumento muito útil para estudar os processos de raciocínio dos alunos, articulando o raciocínio com as representações e a significação das diferentes formas de análise e representação da função afim.

5.3.Analise a priori da tarefa 2

Um prestador de serviços A cobra uma taxa fixa de R$ 40,00 pela locomoção até a residência do cliente e mais um valor de R$ 20,00 por hora de trabalho.

A tabela a seguir contempla uma relação do valor a ser pago em função do tempo te trabalho

Tempo (h)	1	2	2,5	
Preço Final (R$)	60	80	90	

a) Expresse o valor y a ser pago em função da quantidade x de horas de trabalho. O que acontece quando o prestador de serviços se locomove até a casa do cliente, porém não necessita ficar trabalhando?

Como resposta, esperamos obter $y = 20x + 40$.

b) Um prestador de serviços B cobra R$ 30,00 para cada hora de trabalho (não há cobrança de taxa fixa) e ao final do serviço concede um desconto de R$ 10,00 para pagamento a vista. Nesta situação, qual a equação que pode relacionar Expresse o valor y a ser pago em função da quantidade x de horas de trabalho, neste caso.

Como resposta, esperamos obter $y = 30x - 10$.

c) É possível associar um gráfico para a situação descrita no item **a** e outro para a situação **b**? Como você interpreta cada um dos gráficos?

Para cada um dos referidos itens é possível representar graficamente cada lei da função afim por meio de reta crescente. Em termos de interpretação era desejável que os alunos verificassem que com 5 horas de trabalho, o custo dos dois prestadores de serviço era igual. Acima de cinco horas, a prestação de serviços do homem A é mais barata. No entanto, abaixo de cinco horas, quem cobra mais barato é o prestador de serviços B.

d) Fixando o valor de **a**, o que acontece com o gráfico quando varia-se o valor de **b**?

Dado $f(x) = ax + b$, variando o valor de b, ele representa a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.

e) O que acontece se não fixar o valor de **a**, porém o valor de **b** é constante?

Não fixar o valor de **a**, ou seja, variar seu valor implica em alterar os valores dos coeficientes angulares das funções. No entanto, o valor inicial da função será o mesmo mantendo **b** constante.

f) O que acontece se **a= 0**?

No caso de a = 0, caso particular da função afim, é chamada função constante f(x) = b, sendo o gráfico uma reta paralela ao eixo Ox.

Esta tarefa foi criada com o objetivo de se trabalhar as representações semióticas expressas em língua natural, forma algébrica, tabular e gráfica.

5.4. Analise a posteriori da tarefa 2

Na tabela 4 apresentamos uma análise quantitativa do desempenho dos alunos. Na sequencia discutimos as possíveis dificuldades apresentadas.

Tabela 4: Análise quantitativa de desempenho na tarefa 2

Item	Números de acertos	Dificuldade encontrada
A	13	Nenhuma
B	13	Nenhuma
C	5	Interpretação gráfica
D	1	Interpretação algébrica
E	0	Interpretação algébrica e gráfica
F	1	Interpretação algébrica

Fonte: arquivo do pesquisador.

Observando o desempenho quantitativo dos alunos percebemos que esta questão demandou um custo cognitivo maior em relação à questão anterior, por envolver uma base conceitual necessária para responder os itens **c** a **f**.

Nos itens ‘a’ e ‘b’, houve a mudança de registro de representação semiótica da língua natural para a numérica, garantindo um entendimento e rendimento esperado dos alunos, houve a mudança de registro de representação semiótica, da língua natural para a algébrica, garantindo um entendimento e rendimento esperado dos alunos nesses itens.

No item ‘c’ (é possível associar um gráfico para a situação descrita no item **a** e outro para a situação **b**? Como você interpreta cada um dos gráficos?), apenas 5 duplas concluíram corretamente, utilizando a mudança de registro de representação semiótica, da língua algébrica para o registro gráfico.

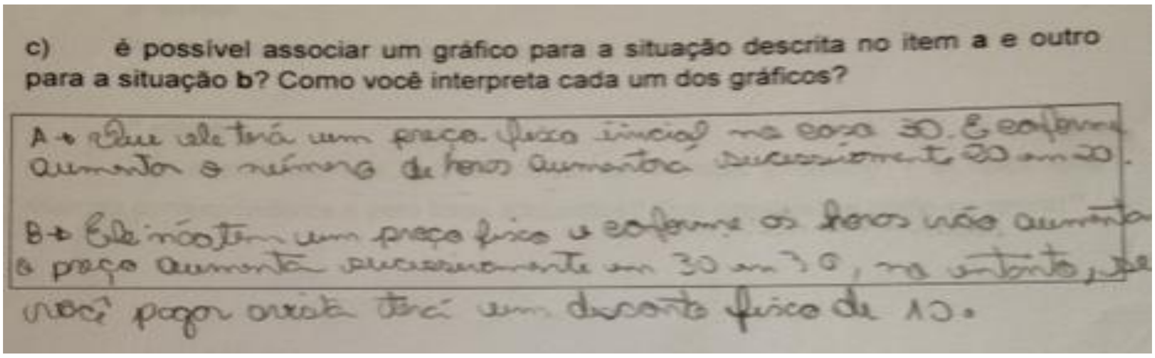
A dupla AB respondeu apenas “os dois aumentam”, construindo dois gráficos com retas crescentes, porém, com pares ordenados errados. No caso do item **b,** por exemplo, para cada hora trabalhada (variável **x**), o valor de **y** correspondente foi subtraído de R$10,00. No entanto, o desconto de R$10,00 é dado ao final do número de horas de trabalhado realizado. Já a dupla OY não respondeu a questão e construiu os gráficos de forma errada, ignorando a escala.

As duplas IJ e EF responderam que não era possível associar um gráfico a cada situação, enquanto a dupla KL não respondeu a questão. Já a dupla MN representou dois gráficos com duas retas crescentes, porém, sem a identificação de nenhum par ordenado. Como registro na língua natural, escreveu: “os gráficos crescem, aumenta **x** e **y**”.

Finalmente, as duplas GH e RS não construíram o gráfico e responderam erroneamente a questão.

A seguir apresentamos os protocolos das duplas que acertaram esta parte da tarefa:

Figura 22: Protocolo da dupla CD (tarefa 2).


c) é possível associar um gráfico para a situação descrita no item **a** e outro para a situação **b**? Como você interpreta cada um dos gráficos?

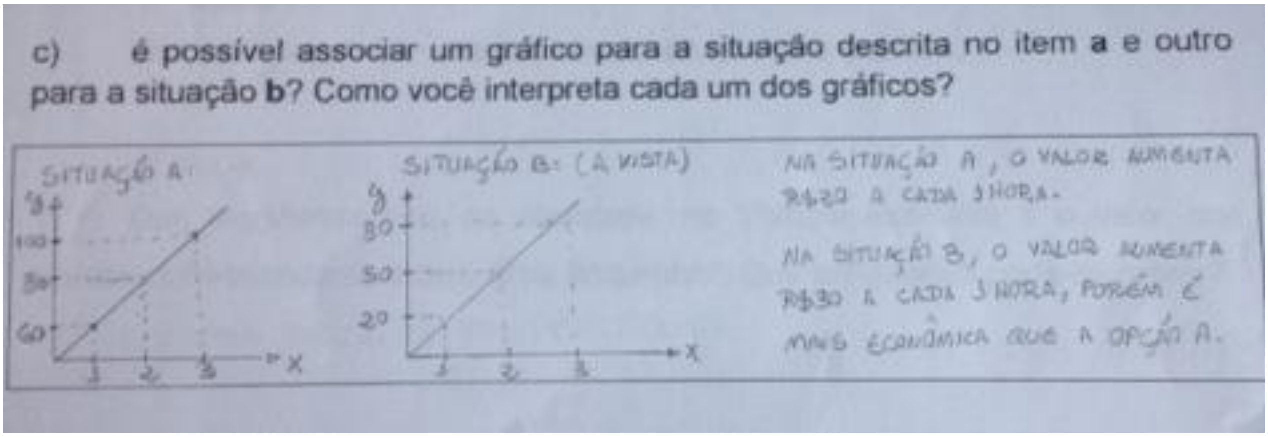
A → Que ele terá um preço fixo inicial na casa 30. E conforme aumentar o número de horas aumentará sucessivamente 20 em 20.

B → Ele não tem um preço fixo e conforme as horas vão aumentando o preço aumenta sucessivamente em 30 em 30, no entanto, se você pagar a vista terá um desconto fixo de 10.

Fonte: arquivo do pesquisador

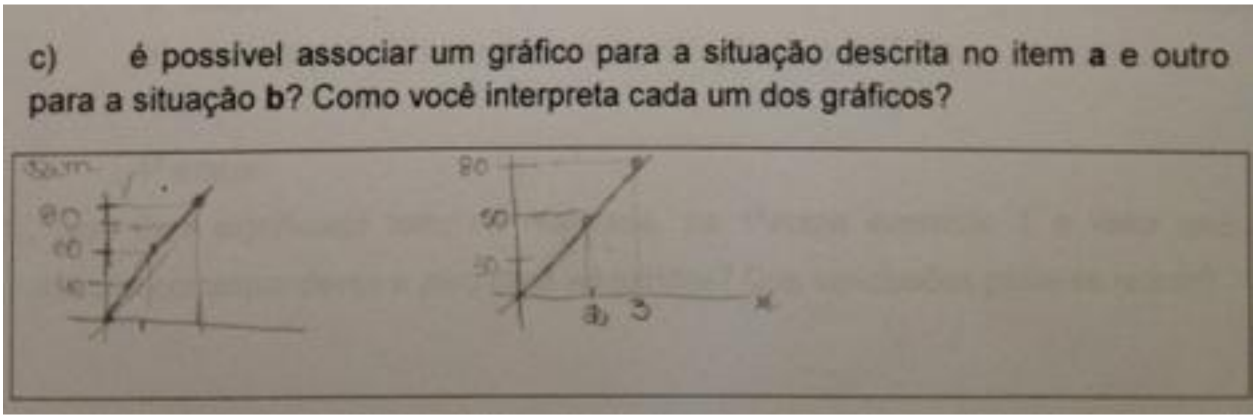
A dupla CD teve uma interpretação de maneira correta, porém tiveram equivoco na primeira parte, onde mencionaram preço fixo inicial de 30, onde na realidade o valor fixado para o prestador de serviços A é de R$40,00, não realizando o tratamento correto.

Figura 23: Protocolo da dupla PQ (tarefa 2**).**



Fonte: arquivo do pesquisador.

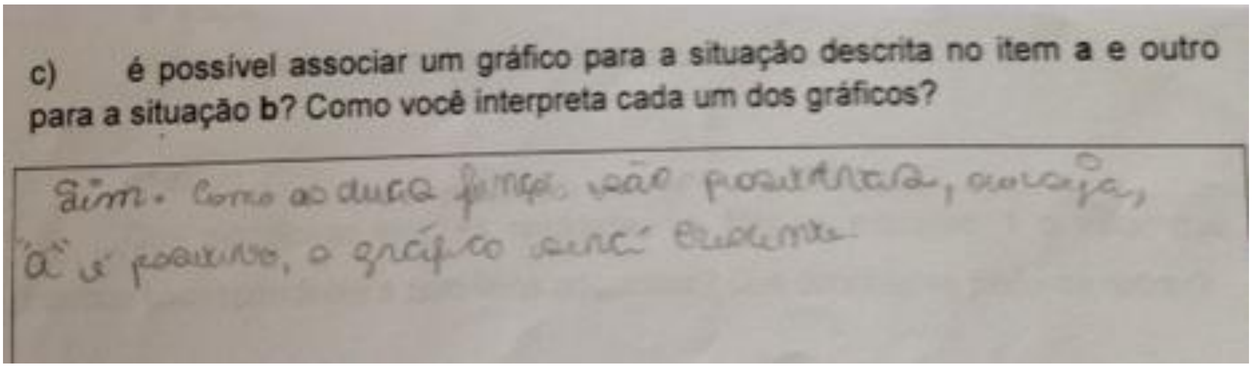
Figura 24: Protocolo da dupla TU (tarefa 2).



Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla PQ explicou e construiu o gráfico corretamente, realizando os tratamentos e as conversões requeridas: língua natural, algébrica, tabular e gráfica. A dupla TU mostrou o entendimento em associar uma função afim na forma f(x)=a.x + b, a um gráfico e realizando a conversão correta da forma algébrica obtida nos itens “a” e “b” para a forma gráfica, porém, sem dar a explicação necessária.

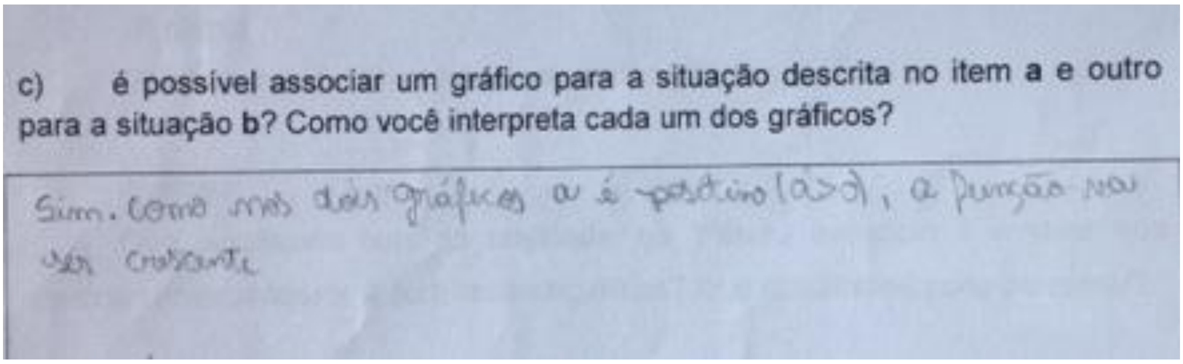
Figura 25: Protocolo da dupla VX (tarefa 2).


c) é possível associar um gráfico para a situação descrita no item **a** e outro para a situação **b**? Como você interpreta cada um dos gráficos?

Sim. Como as duas funções são positivas, ou seja, "a" é positivo, o gráfico será crescente

Fonte: arquivo do pesquisador.

Figura 26: Protocolo da dupla ZW (tarefa 2).


c) é possível associar um gráfico para a situação descrita no item **a** e outro para a situação **b**? Como você interpreta cada um dos gráficos?

Sim. Como nos dois gráficos a é positivo (a>0), a função vai ser crescente

Fonte: arquivo do pesquisador.

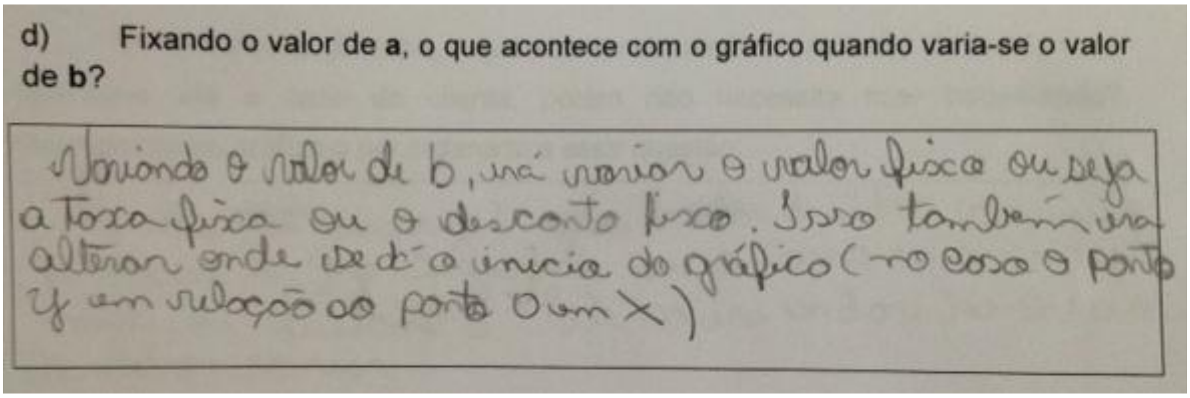
A dupla VX e ZW, ao responderem "sim" relacionaram a forma algébrica das funções aos gráficos entendendo as suas conversões, porém sem o contexto da tarefa proposta, ou seja, não atingiu o objetivo da tarefa, na qual era para fazer uma interpretação da função com o contexto existente.

No item d (Fixando o valor de **a**, o que acontece com o gráfico quando varia-se o valor de **b**?) apenas uma dupla obtive a resposta esperada. Onze duplas não conseguiram entender o que foi pedido devido às respostas fornecidas, e aos comentários expostos no dia da aplicação das tarefas, justificando dessa forma o motivo do não entendimento, e uma dupla não respondeu, deixando em branco.

A falta de concentração durante o segundo dia de aplicação das tarefas, influenciou o desempenho obtido. Os alunos estavam cansados, participaram de uma atividade pela manhã onde foi exigido muito esforço físico de todos.

Apresentamos a seguir o conteúdo da resposta correta da dupla CD:

Figura 27: Protocolo da dupla CD (tarefa 2).



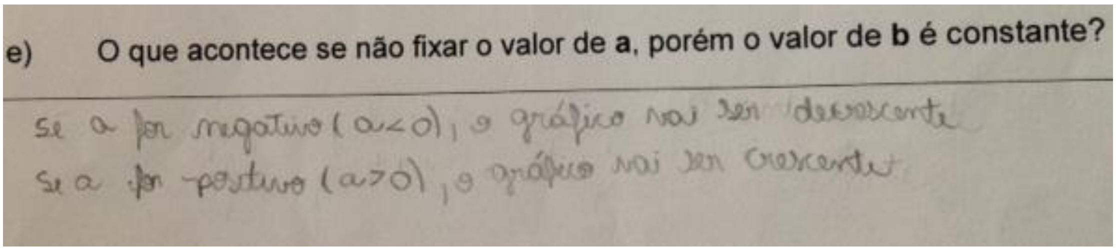
d) Fixando o valor de **a**, o que acontece com o gráfico quando varia-se o valor de **b**?

Variando o valor de b, irá variar o valor fixo ou seja a taxa fixa ou o desconto fixo. Isso também irá alterar onde se dá o início do gráfico (no caso o ponto y em relação ao ponto 0 em x)

Fonte: arquivo do pesquisador.

No item ‘e’ (O que acontece se não fixar o valor de **a**, porém o valor de **b** é constante?) nenhuma dupla atingiu a resposta esperada. Uma dupla deixou em branco. Outra dupla respondeu matematicamente os possíveis valores de ‘a’ na função, não fazendo a relação entre os valores fixos ou descontos a ser pagos, conforme protocolo da dupla ZW abaixo.

Figura 28: Protocolo da dupla ZW (tarefa 2).



e) O que acontece se não fixar o valor de **a**, porém o valor de **b** é constante?

se a for negativo ($a<0$), o gráfico vai ser decrescente

se a for positivo ($a>0$), o gráfico vai ser crescente

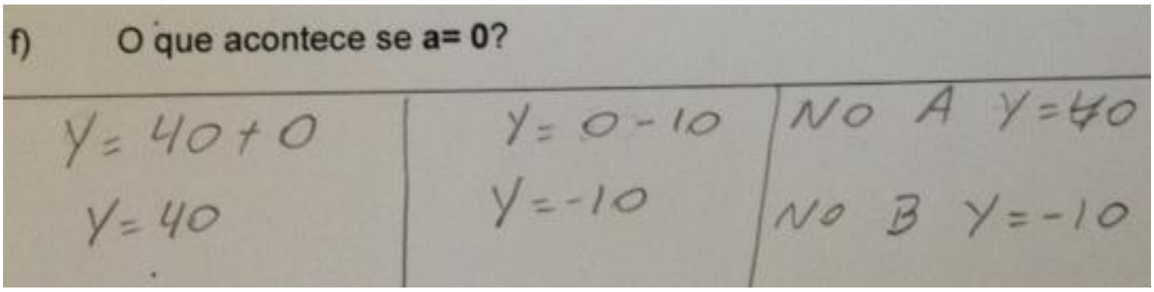
Fonte: arquivo do pesquisador.

No item ‘f’ (O que acontece se **a= 0**?) esperava-se que as duplas relacionassem esse item, com um caso especial da função afim, ou seja, a função constante, quando existe uma constante b real para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = b$.

Cabe observar que houve mudança na ordem da apresentação das perguntas, por isso optou-se por analisar cada um dos itens separadamente, para facilitar a compreensão do leitor, a opção dessa mudança, teve por objetivo verificar se os alunos conseguiriam construir a função com maior facilidade.

Segue quatro protocolos, nos quais as duplas explicaram apenas por meio de cálculos matemáticos.

Figura 29: Protocolo da dupla MN (tarefa 2).

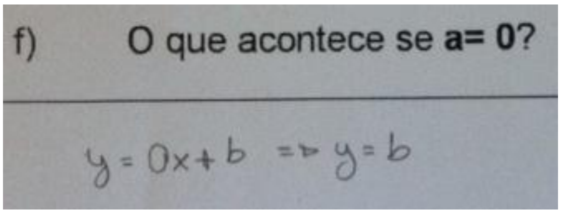


f) O que acontece se **a= 0**?

$y = 40 + 0$ $y = 40$	$y = 0 - 10$ $y = -10$	NO A $y = 40$ NO B $y = -10$

Fonte: arquivo do pesquisador.

Figura 30: Protocolo da dupla PQ (tarefa 2).



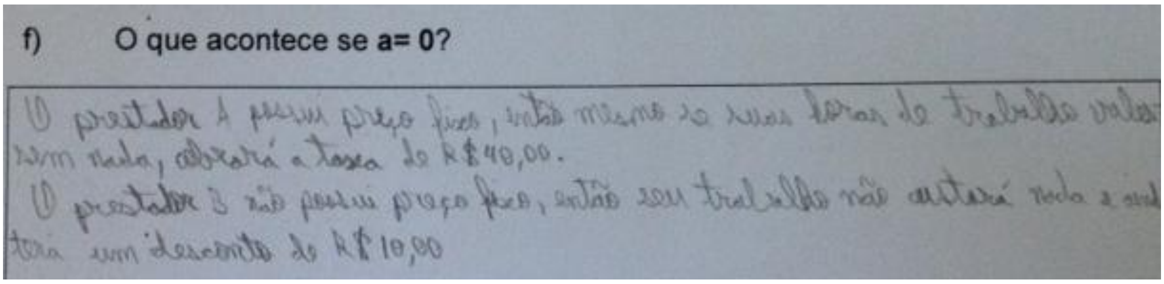
f) O que acontece se **a= 0**?

$y = 0x + b \Rightarrow y = b$

Fonte: arquivo do pesquisador.

As duplas MN e PQ, explicaram apenas a relação matemática e os cálculos, nada mais, sendo a dupla PQ relacionou de uma maneira genérica esse caso, mostrando o entendimento do conteúdo e da forma algébrica de representar, poderiam relacionar com os valores dos prestadores de serviços e com os coeficientes lineares encontrados.

Figura 31: Protocolo da dupla RS (tarefa 2).



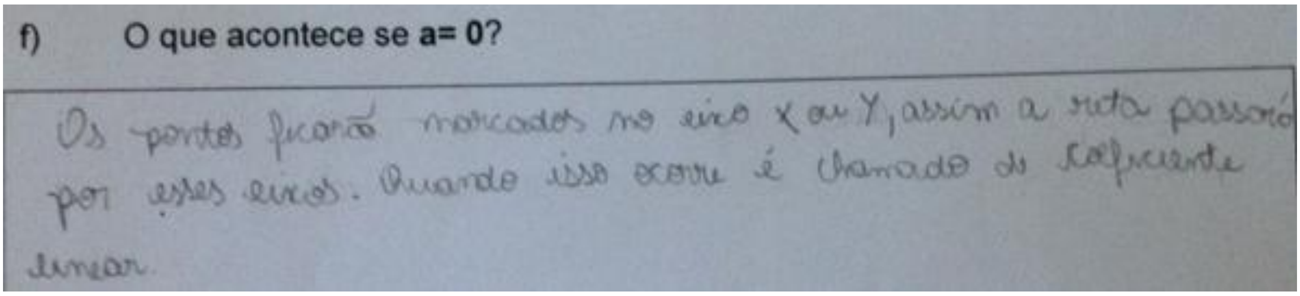
f) O que acontece se **a= 0**?

O prestador A possui preço fixo, então mesmo se suas horas de trabalho valerem nada, cobrará a taxa de R$40,00.
O prestador B não possui preço fixo, então seu trabalho não alterará nada e ainda terá um desconto de R$10,00

Fonte: arquivo do pesquisador.

Segue transcrição da resposta da dupla RS, “o prestador A possui preço fixo, então mesmo se suas horas de trabalho valessem nada, cobrará a taxa de R$40,00. O prestador B não possui preço fixo, então seu trabalho não custará nada e terá um desconto de R$10,00”. A leitura da função dos prestadores de serviços está correta, porém faltou relacionar a função afim, com a = 0, como função constante.

Figura 32: Protocolo da dupla ZW (tarefa 2).


f) O que acontece se a= 0?

Os pontos ficarão marcados no eixo X ou Y, assim a reta passará por esses eixos. Quando isso ocorre é chamado de coeficiente linear.

Fonte: arquivo do pesquisador.

Segue transcrição da resposta da dupla ZW, “os pontos marcados no eixo X ou Y, assim a reta passará por esses pontos. Quando isso ocorre é chamado de coeficiente linear”. A dupla ZW relacionou o coeficiente linear com o ponto no eixo Y. No entanto, a relação com o ponto no eixo X, quando b=0, trata-se de um caso particular, função linear.

5.5. Analise a priori e a posteriori da tarefa 3

Em outro momento, quando disponibilizamos o papel milimetrado para a construção dos gráficos, o desempenho foi o seguinte: cinco duplas acertaram corretamente a construção dos dois gráficos. Quatro duplas acertaram pelo menos um gráfico passando pela origem do sistema. Três duplas não conseguiram converter o registro tabular para o registro gráfico ou cometeram erros nos cálculos dos pares ordenados. Uma dupla não fez a construção, deixando em branco.

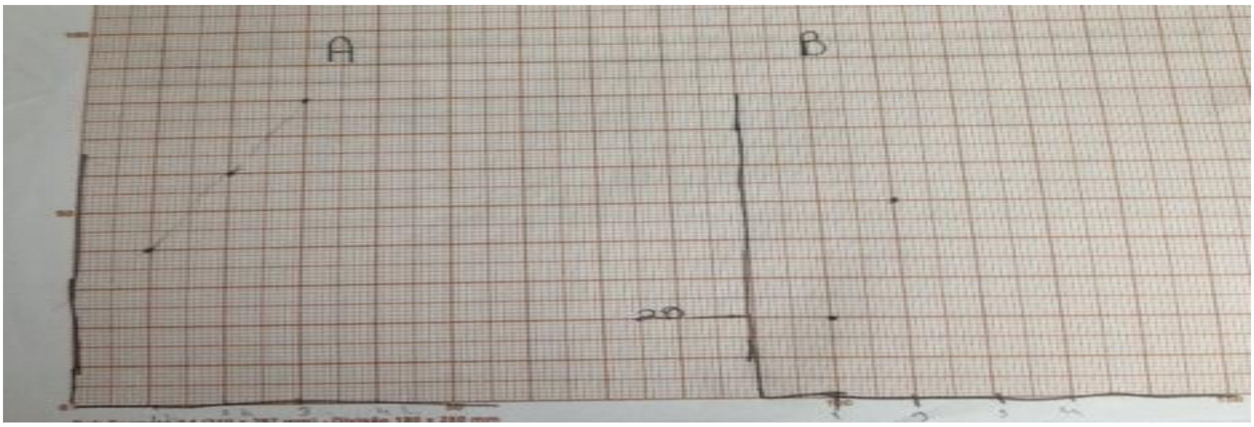
A tarefa foi criada com o objetivo de se trabalhar as formas de representação: forma algébrica, tabular e gráfica. Cinco duplas acertaram corretamente a construção dos dois gráficos. Quatro duplas acertaram pelo menos um gráfico passando pela origem do sistema. Três duplas não conseguiram entender a conversão da tabela para o gráfico e o tratamento da montagem dos pares ordenados. Uma dupla não fez a construção, deixando em branco.

As nove duplas que tiveram um bom desempenho na construção do gráfico, nenhuma delas seguiu o roteiro de orientação dado na resolução das tarefas da apostila, ou seja, não partiram do registro algébrico para o gráfico. A construção dos gráficos envolveu a mobilização e coordenação do registro numérico (resposta do item ‘a’) para o registro gráfico.

Os alunos começaram por utilizar a linguagem natural para descrever os seus raciocínios e justificar o modo de formação das funções. Mostraram facilidade na conversão da linguagem natural para a algébrica, quando foram solicitados a generalizar as regras, e também no uso de tratamentos dentro do sistema de representação algébrico. No entanto, a utilização de métodos algébricos de representação nem sempre é adequada para observar dificuldades e erros obtidos. A relação das representações algébricas e gráficas das funções nem sempre é simples de identificar e tirar partido dessa relação para facilitar a identificação de propriedades das funções que são fundamentais para obter e confirmar resultados.

Apresentamos os protocolos das duplas que não conseguiram construir os gráficos.

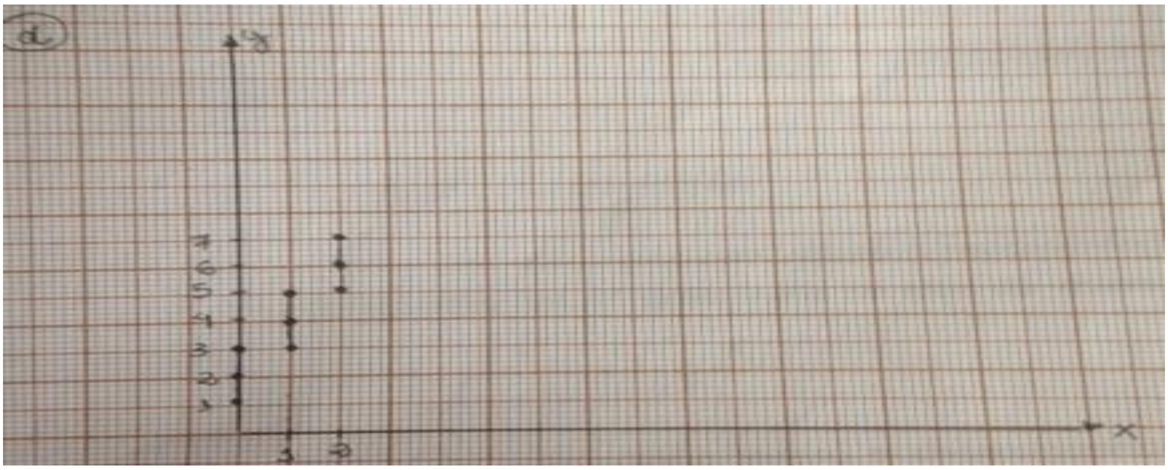
Figura 33: Protocolo da dupla KL (tarefa 3).



Fonte: arquivo do pesquisador.

O gráfico da dupla KL, verificamos a dificuldade para determinar a origem do sistema, o tratamento com escalas e no segundo gráfico, apenas identificou dois pares ordenados, não realizando o tratamento e a conversão necessária para a construção gráfica, pois não compreenderam a relação da variável de dependência (x), isso nos mostra a necessidade de concretizar a expressão algébrica.

Figura 34: Protocolo da dupla P e Q (tarefa 3).



Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla PQ acertou todos os gráficos anteriores, no qual pedíamos apenas para associar a função a um gráfico. Porém, pelo comentário da aluna P da dupla no dia da aplicação da tarefa ("nunca vi um papel milimetrado, não sei como usar"), associamos esse problema à construção fornecida, pois o gráfico entregue pela dupla não esta conforme o esperado.

Figura 35: Protocolo da dupla RS (tarefa 3).

Fonte: arquivo do pesquisador.

A dupla RS construiu dois gráficos usando a mesma escala, porém não encontraram o par ordenado referente à origem dos sistemas.

5.6. Analise a priori e a posteriori da tarefa 4

Que significado tem, na realidade, na 1ª etapa exercício 1 o valor que marcou correspondente a zero litros adquiridos? Que conclusões pode-se retirar? Na tarefa 2, o que acontece quando o prestador de serviços se locomove até a casa do cliente, porém não necessita ficar trabalhando? Represente no gráfico o par ordenado a essa questão.

Como resposta, esperávamos que os alunos analisassem as tabelas das etapas anteriores relacionando o tratamento e as conversões desses dados em forma gráfica, tabular e algébrica, e que testassem e verificassem seus resultados.

Essa tarefa tem características semelhantes às anteriores e pretendia validar o objeto matemático estudado função afim. Para resolvê-la era necessário recorrer a conhecimentos de funções e suas propriedades. A representação gráfica, se usada, pode facilitar a sua resolução.

Nenhuma dupla representou o par ordenado referente à problemática da tarefa, não conseguindo interpretar os dados fornecidos nos gráficos com os do enunciado das tarefas. Cinco duplas responderam parcialmente corretas, pois não identificaram o par ordenado pedido na proposta. Seis duplas não responderam corretamente e duas duplas deixaram em branco.

Segue transcrições das duplas que responderam parcialmente a tarefa:

a) Dupla AB, “zero litros o carro fica parado, não anda, o cliente paga a locomoção”;
b) Dupla CD, ‘‘na 2ª etapa do exercício 1, caso o valor de litros adquiridos for igual a zero significa que o carro não andou nenhum quilometro. Ele só irá andar se o valor de litros variarem. Na 2ª etapa exercício 2, no caso A o cliente precisará pagar uma taxa de 40 reais pelo prestador de serviço, no caso B o cliente não precisará pagar nada”;
c) Dupla MN, “zero litros = carro parado, no 2º o cliente paga 40 para o A e não para nada para o B”;
d) Dupla TU, “1º Adquirindo zero litro representa que ele não andou nada, 2º mesmo indo até a casa do cliente, sem fazer o serviço, ele cobrará uma taxa de R$40,00”;
e) Dupla WZ, “no A ele ganha só pela locomoção, já o B não ganha nada”.

Nesses casos, houve um entendimento da língua natural pelas duplas, respondendo a respeito das duas tarefas. A dupla WZ respondeu apenas a respeito da 2ª etapa, mas a coordenação entre a língua natural, algébrico, tabular ou gráfico não foi feita.

A exploração das tarefas propostas permitiu aos alunos desenvolver a compreensão do conceito de função afim fazendo conexões com outros tópicos matemáticos, em particular com o conhecimento que já tinham sobre propriedades das funções. Além disso, o uso da representação gráfica e de propriedades de funções parece ter ajudado os alunos a construir significado, com vista à formulação (e posterior validação) das hipóteses. Para ambos os alunos, é a confirmação de suas ideias ou intuições iniciais e perceber que as hipóteses levantadas são verdadeiras.

Duval (2009, p. 63) assegura que “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. Assim, o autor considera que a atividade de conversão é tão fundamental quanto às atividades de formação e tratamento, e que, no entanto, as tarefas escolares não dão a devida valorização, por acreditar que ela se dá de forma espontânea.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, trabalhou-se com quatro formas de registros de representações da função afim (língua natural, forma algébrica, forma tabular e forma gráfica). Buscou-se descobrir em quais conversões e tratamentos os alunos apresentavam maiores dificuldades e as que possuíam maiores facilidades, e o planejamento e aplicação de tarefas exploratórias-investigativas nesta pesquisa cumpriu o papel de problematizar e produzir significados ao conceito de função afim. Por se tratar de tarefas abertas, os alunos criaram em diversos momentos suas próprias relações na forma de mobilizar e coordenar os registros de representação semiótica já destacados.

A cada ano, tem-se observado que os alunos têm chegado ao Ensino Médio com crescente deficiência de leitura, escrita e interpretação, além das operações básicas em matemática. Estas deficiências afetam o processo de aprendizagem, pois reduz a capacidade de raciocínio, de abstração e de expressão desses alunos, o que ocasiona um enorme déficit em todo esse processo.

Por esses motivos, optou-se, nesta pesquisa, em se trabalhar com alunos da primeira série do Ensino Médio, de uma escola particular na cidade de Sorocaba-SP, turma que finalizou as tarefas era composta de 26 alunos, 16 são alunos novos, recém-matriculados, provenientes de escolas públicas e 10 alunos que concluíram o nono ano do Ensino Fundamental na mesma escola.

Nas tarefas trabalhou-se com a conversão da língua natural para a forma algébrica, tabular e gráfica. Na tarefa 1, nos itens ‘a’ e ‘b’ todas as duplas responderam conforme o esperado. No item ‘c’ apenas nove duplas responderam corretamente, pois consistia na conversão da lei da função na língua natural para a algébrica, resultado esse que refletiu nas próximas duas tarefas. No item ‘d’ que envolveu converter para a forma gráfica, apenas três duplas resolveram conforme o esperado e no item ‘e’, no qual queríamos a interpretação do gráfico, cinco duplas chegaram ao resultado esperado.

Na tarefa 2, da mesma maneira que na tarefa 1, todas as duplas responderam os itens ‘a’ e ‘b’ da maneira esperada. O item ‘c’ apenas cinco duplas conseguiram interpretar a associação de uma lei relacionada a função afim a um gráfico. No item ‘d’, ‘e’ e ‘f’ obtivemos o menor número de acertos, pois esperávamos que os alunos conseguissem fazer um alinhamento dos conceitos matemáticos envolvidos na teoria de função afim, com o enunciado proposto nas tarefas, e apenas uma dupla nos itens ‘d’ e ‘f’ fez essa relação. No item ‘e’ nenhuma dupla atingiu o esperado.

Na tarefa 3, entregamos aos alunos, uma folha A4 de papel milimetrado, para a construção dos gráficos, nesse momento, sete alunos indagaram o fato de nunca ter visto tal material, e desse fato, apenas cinco duplas acertaram corretamente a construção gráficos. A maior dificuldade encontrada foi em entender a conversão da tabela para o gráfico e o tratamento da montagem dos pares ordenados.

Em relação a essa tarefa, ficaram nítidas algumas situações:

a) Alguns alunos ao interpretar corretamente o enunciado, construíram a forma tabular utilizando um raciocínio algébrico coerente;
b) Realizaram a conversão da forma tabular para a gráfica com alguma facilidade;
c) Não reconheceram a pluralidade de representação e a articulação entre os diferentes registros.

Na tarefa 4, as duplas teriam que sintetizar toda a relação das resoluções das tarefas, com o tema função afim, porém nenhuma das treze duplas responderam corretamente a tarefa, cinco duplas responderam parcialmente a proposta, e a dificuldade foi em entender o significado do par ordenado (0,0), visto que nenhuma dupla conseguiu interpretar o enunciado.

Podemos afirmar que as deficiências em operações aritméticas básicas contribuíram para o resultado esperado nas tarefas. Foi observado pelo professor-pesquisador, que estas deficiências trouxeram um desgaste físico e mental muito grande durante a realização das tarefas. Muitos alunos usaram expressões do tipo “vamos desistir”, “não aguento mais” “realizando sem muita certeza nas contas”, “muito difícil”, “nunca havia visto esse papel milimetrado”.

Outra dificuldade apresentada está nas conversões para a forma gráfica. Muitos alunos conseguem fazer as conversões da forma algébrica ou tabular para a gráfica com alguma facilidade, mas o caminho inverso apresenta uma dificuldade muito maior. Os alunos não conseguiram analisar um gráfico de forma satisfatória, é apenas um monte de pontos ligados por uma reta. Em questões que envolveram interpretação de gráfico, a maioria dos erros ocorreu pela não associação das variáveis, da situação-problema, com os valores representados por cada ponto, pertencente no Plano Cartesiano.

As conversões que envolveram a forma tabular foi as que retornaram melhores resultados. Aquelas que envolveram a língua natural e passagem da forma tabular para a forma gráfica geraram um bom retorno, o mesmo não se pode dizer a respeito da passagem da forma algébrica para a forma tabular. No tratamento da forma algébrica apareceram erros graves de aritmética que impossibilitaram a construção das tabelas de valores com correção.

Desta maneira é possível responder nossa questão de investigação: como alunos da primeira série do Ensino Médio mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas envolvendo o conceito de função afim?

Os resultados apresentados pelos alunos demonstram que o emprego dos registros, de forma ordenada, mobilizou com facilidade o entendimento do conceito de função afim e ajudou na detecção das dificuldades nos tratamentos e principalmente na coordenação de forma correta e ordenada das conversões, no qual apresentaram maior dificuldade e, apontando em quais tiveram maiores facilidades. Procedimentos que possibilitam evitar um ensino que apenas privilegie abordagens envolvendo cálculo algébrico valorizam outras que utilizam aplicações do tema função afim em situações diversificadas ajudam a facilitar a compreensão e aprendizagem do conteúdo, com muitos exemplos e diferentes tarefas propostas pelo professor.

Os diversos itens da primeira tarefa instigaram a produção de múltiplos de registros e, neste sentido, nossos alunos em diversos momentos, optaram por construir gráficos ponto a ponto, deixando de lado, a conversão do registro algébrico para o gráfico. É exatamente esta conversão a geradora das dificuldades mais comuns no estudo de função, conforme mostramos no desempenho dos nossos alunos no item ‘d’ da tarefa descrita. Enquanto, três duplas fizeram o esboço dos dois gráficos solicitados, cinco duplas construíram corretamente os mesmos gráficos quando disponibilizado o papel milimetrado.

Não houve a discussão do coeficiente angular na comparação dos gráficos, pelo fato dos mesmos terem sido construídos separadamente e, com escalas distintas.

A utilização de procedimentos metodológicos adequados e atuais propicia uma melhor avaliação do aproveitamento e entendimento dos alunos em relação ao conteúdo trabalhado, prática na qual ajudará muito nas futuras aulas sobre o tema. Muitas das dificuldades que apareceram no decorrer das resoluções das tarefas podem perfeitamente passar despercebidas, caso se siga apenas a sequência didática adotada pelos livros. Apesar de não conclusiva, pode se afirmar que a vivência com diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, função afim, contribui para tornar os alunos capazes em relação ao processo de reconstrução do conhecimento, neste caso para a maioria doa alunos avaliados, principalmente quando as atividades são realizadas em grupo, conforme foi trabalhado nesta pesquisa.

Esta autonomia na produção de significados rompeu com as orientações didático-pedagógicas dadas aos alunos, segundo a linearidade de conversão de registros semióticos, ou seja, do algébrico para o registro tabular e, finalmente, para o registro gráfico.

Diante do exposto, espera-se contribuir para reflexões e estudos futuros, especialmente quanto à aprendizagem do tema abordado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Lorena Luquini de Barros. **Estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática:** o caso da função afim. 244f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BICA, Luis Manuel Peliz Marques. **Funções afins em livros didáticos:** relações entre aspectos visuais e textuais. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BRAGA, Elisabete Rambo. **A compreensão dos conceitos de função afim e quadrática no ensino fundamental com o recurso da planilha**. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.109p.

COUTINHO, Clara Pereira. A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. **Educação Unisinos**, v.12, n.1, p.5-15, jan./abr. 2008.

CRUZ, Paulo Henrique Correia Araújo da. **Funções no 1º ano do ensino médio.** 85f. Dissertação (Mestrado de Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

DAMN, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (org). **Educação Matemática:** Uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p.135-153.

DELGADO, Carlos José Borges. **O ensino da função afim a partir dos registros de representação semiótica**. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica). Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2010.

DORNELAS, Julienne Jane Barbosa. **Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim**. 181f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2007.

DUARTE, Daiana Matias. **O ensino do conceito de função afim: uma proposição com base na teoria de Galperin**. 92f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2011.

DUVAL, Raymond. Basic Isues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 24, 2000, Japan. **Proceedings...** Japan, 2000. v1, p.55-69.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Silvia D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. As pesquisas denominadas “Estado da Arte”. **Educação & Sociedade**, Campinas, ano XXIII, n.29, p.257-272, 2002.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** Campinas, ano 3, n.4, p.1-38, 1995.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-Brasileiro:** Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores. Lisboa, 2005.

FONSECA, Vilmar Gomes da. **O uso de Tecnologias no Ensino Médio:** a integração de Mathlets no Ensino da Função Afim. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

GONÇALVES FILHO, Luiz. **Modelagem matemática e o ensino de função de 1ºGrau**. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. São Paulo: SBM, 1996 (Coleção do Professor de Matemática, v.1).

LOPES JUNIOR, Dejahyr. **Função do 1º grau:** um estudo sobre seus registros de representação semiótica por alunos da 1ª série do Ensino Médio. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2006.

LOPES, Janice Pereira. **Fragmentações e aproximações entre Matemática e Física no contexto escolar:** problematizando o conceito de função afim. 205p. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

LOPES, Wagner Sanches. **A importância de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função:** uma proposta de ensino. 106p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

LUZ, Silas Venâncio da. **Aprendizagem significativa de Função de 1º Grau:** uma investigação por meio da modelagem matemática e dos mapas conceituais. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

MACEDO, José Clovis Adão. **Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido**. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

MELO, Gercilio da Rocha. **A inserção do software KMPLOT na aprendizagem da função afim e quadrática**. 153f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2013.

NACARATO, Adair Mendes et al. Modalidades de pesquisas em educação matemática: um mapeamento de estudos qualitativos do GT-19 da Anped. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28., 2005, Caxambu. **Anais...** 19p. Caxambu, 2005. CD-ROM.

NASCIMENTO, Maria José Almeida do. **Os contextos explorados no ensino da função afim nos livros de matemática do Ensino Médio**. 124f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PINTO, Fernando Rocha. **O ensino do conceito matemático de função por meio de softwares gráfico-visuais:** criação de desenhos digitais por alunos iniciantes do curso de administração. 200p. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

PONTE, João Pedro. Gestão curricular em Matemática. In: Grupo de Trabalho da Investigação - GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

REIS, Adinilson Marques. **Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio**. 167f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).

SALES, Cássia Osório Reis. **Explorando função através de representações dinâmicas:** narrativas de estudantes do ensino médio. 144p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirantes, São Paulo, 2009.

SALIN, Eliana Bevilacqua. **Matemática dinâmica**: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas. 206f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SANTOS, Antônio dos. **Revisando as funções do 1º e 2º grau com a interatividade de um hiperdocumento**. 117p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, Edivaldo Pinto dos. **Função afim**: a articulação entre registros gráficos e algébricos com auxilio de um software educativo. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SANTOS, Ronald Ferreira dos. **Representações mediadas por computador no processo da construção do conhecimento da função afim.** 223p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Niterói, 2000.

SANTOS, Vívia Dayana Gomes dos. **Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e geogebra:** funções afins e funções quadráticas. 124f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

SCANO, Fábio Correa. **Função afim:** uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra. 149f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SCHOENFELD, Alan H. Heurísticas na sala de aula. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 13-33

SCHROER, Rodrigo Ernesto. **A retomada de relações entre grandezas no Ensino Médio e sua tradução para a linguagem de funções**. 282f. Dissertação (Mestra do em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SELINGARDI, Ainá Montessanti. **O estudo da função afim no ensino médio com apoio de uma atividade experimental**. 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

SOARES, Carlos Alberto. **Modelagem por Meio de Funções Elementares**. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2014.

STIVAM, Elen Priscila. **Possibilidades de integração entre as TIC no ensino de função do 1º grau.** 127f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

SUPLEMENTO DIDÁTICO/PEDAGÓGICO: Sistema COC. Disponível em: <<http://interna.coceducacao.com.br/PortaldeRelacionamento/ManualProfessor.asp?idAcao=6&IdSerie=26&IdSegmento=2&IdAmbiente=251>>. Acesso em: 13 set 2015.

TOZO, Fábio Luiz Dias. **Estudo da Função Afim: Registros de Representação Semiótica.** Monografia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.