UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

DÉBORA REGINA BASSAN

ELEMENTOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM MÁGICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SÃO CARLOS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

DÉBORA REGINA BASSAN

ELEMENTOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM MÁGICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação do Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti.

SÃO CARLOS

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Bassan, Débora Regina
B317e   Elementos de análise combinatória no ensino fundamental : uma abordagem com mágicas e resolução de problemas / Débora Regina Bassan. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
90 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Mágica matemática. 2. Ensino de combinatória. 3. Problemas de contagem. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Débora Regina Bassan, realizada em 23/06/2016:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
UFSCar

Prof. Dr. Sandra Fiorelli de Almeida Penteado Simeão
USC

AGRADECIMENTOS

À Deus pela oportunidade e privilégio que me foi dado em compartilhar tamanha experiência.

Ao orientador Pedro Luiz Aparecido Malagutti, pela dedicação e confiança na elaboração desse trabalho.

À minha família, pelo amor e apoio, sempre me orientando a seguir em frente.

Ao meu namorado Paulinho, pela paciência, incentivo e compreensão.

Aos meus colegas de mestrado pela amizade, companheirismo e trocas de experiências.

Aos professores do curso, pela enorme contribuição na minha formação profissional e pessoal.

Aos meus alunos pela colaboração e disposição para desenvolver as atividades propostas.

RESUMO

Esse trabalho tem por objetivo desenvolver o conteúdo de Análise Combinatória em uma turma do 6º e do 7º ano do Ensino Fundamental II, em uma escola do interior do Estado de São Paulo. Para isso, fez-se o uso de atividades contextualizadas utilizando folhas-atividades e recursos envolvendo mágicas, visando despertar a curiosidade e o interesse em aprender Combinatória por meio de resolução de problemas. O tema foi escolhido devido à dificuldade dos alunos em resolver problemas de contagem e por ser pouco explorado no Ensino Básico, apesar de constar nos documentos oficiais- Parâmetros Curriculares Nacionais e Currículo do Estado de São Paulo. Optou-se pelo recurso das mágicas matemáticas para tornar mais significativa e prazerosa a aprendizagem de Combinatória, buscando-se a motivação dos alunos a participar ativamente das aulas, unindo o prazer ao ato de aprender. Durante a realização das atividades, notou-se que os alunos se sentiram motivados, relacionando o conteúdo de Análise Combinatória com uma prática divertida através da mágica. Eles demonstraram bastante entusiasmo na realização das atividades, principalmente nos dias que tinha a mágica. A proposta didática com o uso das folhas-atividades alcançou a maioria dos alunos, que se empenharam e foram bastante ativos durante as aulas, resultando na aprendizagem de fato do conteúdo de Análise Combinatória. Todas as atividades atingiram os objetivos propostos, validando as propostas do professor. Após a realização das atividades, os alunos se sentiram mais confiantes para expor seu raciocínio, apresentar estratégias de resolução e explorar o problema em busca de uma solução adequada.

Palavras-chave: Ensino de Combinatória. Mágica matemática. Problemas de contagem.

ABSTRACT

This work AIMS to Develop the content of combinatorial analysis in the class of 6th and 7th grade of elementary school II in a school in the state of São Paulo. For this, there was the use of contextualized activities using leaves, activities and resources Involving magic, aiming to arouse curiosity and interest in learning Combinatorial through problem solving. The theme was chosen because of the difficulty of students in solving counting problems and is being explored little in basic education, although it appears in documents oficiais- National Curriculum Parameters and Curriculum of the State of São Paulo. We opted for the mathematical magic feature to make more meaningful and enjoyable learning Combinatorics, seeking the motivation of students to Actively Participate in class, joining the pleasure the act of learning. During the performance of activities, it was Noted que the students felt motivated, Relating the content of combinatorial analysis with a fun practice by magic. They Showed great enthusiasm in carrying out the activities, Especially in the days que had the magic. The didactic proposal with the use of leaf-activities Reached most of the students, who Were Involved and were very active During class, Resulting in collegues learning Combinatorial Analysis content. All activities Reached The proposed objectives, validating the Proposed teacher. After the completion of the activities, students felt more confident to expose Their reasoning, presenting solving strategies and explore the problem in search of a suitable solution.

Keywords: Combinatorial teaching. Math Magic. Counting problems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Justificativa

Meu trabalho como professora se iniciou em 2010, quando eu já havia me formado. Comecei a lecionar nas 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio no período noturno. Era preocupante a dificuldade dos alunos em aprender matemática. No ano seguinte passei também a trabalhar nos período da manhã e tarde com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Para minha surpresa essa dificuldade em aprender matemática já acompanhava os alunos desde o 6º ano.

A preocupação em relação a essa dificuldade dos alunos e ao grande desafio em construir estratégias para melhorar a relação de aprendizagem em sala de aula , me levou a ingressar no início de 2012 no curso de Pedagogia, e mais tarde, em agosto de 2012 no curso de pós-graduação *lato sensu*, em nível de especialização, em Ética, Valores e Cidadania na escola, na USP. Esse curso de pós-graduação foi criado com objetivo de formar profissionais da educação que consigam trabalhar no cotidiano escolar valores éticos e de cidadania, a diversidade humana e os conflitos presentes nas relações diárias.

Como parte integrante do curso elaborei a monografia intitulada: "Matemática no dia-a-dia e a construção da cidadania" , na qual o objetivo era analisar e discutir a contribuição da matemática na formação do cidadão, e a importância da contextualização no ensino da matemática. Foram aplicadas atividades de contextos significativos permitindo aos estudantes a reflexão sobre questões que extrapolam o universo do conhecimento matemático motivando a aprendizagem de conceitos matemáticos e os tornando mais efetivos.

Entendo que o aperfeiçoamento constante dos professores é um caminho importante a ser seguido, pois para que haja um ensino eficiente de Matemática é necessário que o professor domine conteúdos e procedimentos de ensino. Alguns alunos apresentam hesitação na disciplina de matemática pelo fato de acreditarem no mito de sua dificuldade cultivado pela cultura escolar, mas o fato de o aluno ser levado a resolver problemas matemáticos agindo sem reflexão, faz com que ele não compreenda-os e tampouco goste de fazê-lo, havendo a necessidade do professor criar experiências que causem interesse e prazer aos alunos. No ano de 2014 ingressei no mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas na Universidade Federal de São Carlos. Devido a dificuldade dos alunos na aprendizagem no conteúdo referente à Análise Combinatória, escolhi esse tema para desenvolver minha dissertação.

1 Introdução

Starepravo (1997 apud PLACHA e MORO, 2009) pontua que a ação mental da criança é empobrecida quando já recebem as informações prontas e simplesmente as aplica em exercícios escolares; a ação mental realmente ocorre apenas quando a criança relaciona as informações novas com aquilo que já tem conhecimento e vivenciou.

A Análise Combinatória é a área da Matemática que engloba um conjunto de técnicas para se saber quantos objetos há em um conjunto finito, sem necessariamente ter que contá-los, já que os métodos utilizados baseiam-se em abstrações que vão além da listagem e da enumeração. Do ponto de vista da formação do raciocínio matemático, a Análise Combinatória tem um papel importante na educação cidadã e científica do aluno. O raciocínio combinatório surge com as primeiras habilidades ligadas a contagem e, através de ações sistemáticas na resolução de problemas concretos, ajuda a desenvolver as potencialidades ligadas à dedução, investigação, e ao raciocínio matemático formal. Assim, principalmente na faixa etária que antecede a adolescência, um dos principais objetivos da formação científica das crianças deve ser o desenvolvimento de estratégias combinatórias na resolução de problemas.

O aspecto formal dos conceitos básicos da Análise Combinatória é representado pelos Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem, cujos conhecimentos e aplicações formam os pilares necessários para a formação e o desenvolvimento do raciocínio combinatório, que é a base para o entendimento dos procedimentos e estratégias de raciocínio usados na resolução de Problemas de Contagem e em outras áreas da Matemática Discreta. (TEIXEIRA, 2014).

Grande parte da Matemática se assenta no sistema lógico hipotético-dedutivo, que é baseado em formas de pensar generalizadas e em correlações formais entre hipóteses e conclusões. Portanto, um importante condicionante para o desenvolvimento do raciocínio operatório formal no estudante é o trabalho, ao longo dos vários anos escolares, com estratégias e esquemas mentais envolvendo Combinatória.

Apesar das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apenas problemas do tipo *produto cartresiano* são trabalhados nas séries iniciais do Ensino Fundamental. A maioria dos problemas de raciocínio combinatório é introduzida formalmente na 2ª série do Ensino Médio. Apesar da falta de formalização de fórmulas ou conceitos nos anos iniciais , acredita-se que é possível que o raciocínio combinatório se inicie antes do estudo formal por meio de experiências cotidianas escolares ou não. (BORBA, 2009, p.107).

O problema no ensino de Análise Combinatória tem início com a interrupção que se dá da passagem do trabalho com situações concretas de fácil manuseio, para o trabalho com outras situações em que a contagem é inviável. A resolução de situações concretas, em que o aluno pode resolver efetivamente esgotando os possíveis casos, em geral por listagens pequenas, lhe dá bastante segurança. No caso em que a contagem é inviável, muito frequentemente, o único apoio que a escola fornece é a utilização de fórmulas prontas. Esse fato acaba amedrontando e afastando os adolescentes da área de Ciências Exatas. O Caderno do Professor de Matemática da 2ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2014, p.8) apresenta essa abordagem tradicional para o ensino da Análise Combinatória que parte da classificação dos problemas em grupos, seguida de aplicações de fórmulas de cálculo na tentativa de facilitar a resolução de problemas.

> Se, por um lado, tal formalização permite agilizar a resolução de situações-padrão, por outro, dificulta o enfrentamento de situações-problema reais, com contextos e dificuldades inéditas. Dessa forma, um curso de Matemática que priorize a resolução de problemas como principal metodologia de aprendizado não pode se basear unicamente na classificação das situações em grupos determinados, sob pena de limitar demais as estratégias de raciocínio que o estudante pode e deve mobilizar ao se confrontar com uma dificuldade real.

A resolução de problemas de Combinatória deve passar pelo entendimento e compreensão dos enunciados. Lima et al (2006, p.90) apresentam algumas estratégias para resolver problemas de Combinatória:

> 1) *Postura*. Devemos nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema para saber que decisões tomar.
>
> 2) *Divisão*. Devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
>
> 3) *Não adiar dificuldades*. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Geralmente, estas atitudes não fazem parte da rotina escolar dos estudantes que estão acostumados com rotinas passivas. Eles sentem dificuldades em resolver um problema de contagem que envolva uma situação nova, pois não encontram em experiências passadas esquemas prontos para o uso.

Diante disso, surgiu o interesse em desenvolver atividades contextualizadas com a utilização de folhas de atividades e o uso de recursos envolvendo mágicas com uma turma de 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, visando despertar a curiosidade e interesse em aprender Combinatória, verificando se esses recursos auxiliam efetivamente na aprendizagem do tema. Optamos pelo recurso das mágicas matemáticas, buscando-se a motivação dos alunos a participar ativamente das aulas, unindo o prazer ao ato de aprender. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.46) apresentam vantagens em relação ao recurso dos jogos, no qual as mágicas estão incluídas: "Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favoreçam a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções."

Este trabalho está dividido em três capítulos. O segundo analisa os documentos oficiais - PCNs, Currículo do Estado de São Paulo e os Cadernos do Professor e Caderno do Aluno - no que diz respeito ao conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Fundamental. O quadro de conteúdos dos livros do PNLD também receberam atenção nesse capítulo, pela ausência de Problemas de Contagem no 6º ano, apesar do conteúdo estar presente nos documentos oficiais.

Em seguida analisa as diferentes formas de representação gráfica que o aluno deve conhecer e saber construir para resolver um problema que envolva raciocínio combinatório. O raciocínio combinatório leva um longo tempo para se desenvolver, então situações combinatórias simples podem ser propostas no início da escolarização, de modo a qualificar estudantes com noções iniciais sobre como combinar elementos considerando combinações válidas que atendam a determinadas condições.

O capítulo 2.2 apresenta de modo geral o processo de contagem e a teoria da Análise Combinatória. O objetivo é mostrar como obter resultados gerais por meio de fórmulas, a fim de resolver várias classes de problemas, mesmo considerando que muitos deles podem ser solucionados pela enumeração dos casos, representações gráficas ou através da utilização do Princípio Multiplicativo.

O terceiro capítulo apresenta atividades que se utilizam de conceitos básicos da Combinatória para resolver problemas de contagem, onde o quantitativo de objetos não é muito grande, atentando-se em oferecer procedimentos para resolver problemas através de representações gráficas, oferecendo significativas contribuições para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos desde o 6º ano de modo que possam preparar-se para enfrentar situações-problema em que o quantitativo seja muito grande ou que sejam mais complexos. Tais atividades foram desenvolvidas e aplicadas em 2015, em um 6º ano do período da tarde da "Escola Estadual Professor José Nicolau Pirágine", localizada no centro da cidade de Jaú - SP, que utiliza o material distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, sendo a professora efetiva e que atua na turma envolvida. A escola funciona em dois períodos: manhã e tarde. O período da manhã é composto por salas de Ensino Médio e 9º anos do Ensino Fundamental, e o período da tarde é composto pelos 6º, 7º e 8º anos do Ensino Fundamental. A maioria dos alunos matriculados na escola moram em um Bairro periférico da cidade e se deslocam até a escola por meio de um ônibus circular pago pela prefeitura. O trabalho continuou com a mesma turma no ano de 2016, agora 7º ano, também no período da tarde. Todas as folhas de atividades (Apêndices A à G) foram oferecidas aos alunos. Além das atividades, também foram realizadas algumas "mágicas" pelo professor, a fim de tornar as atividades de estudo mais atrativas, unindo atividades matemáticas com elementos lúdicos, motivando o aluno à investigação e descoberta na Matemática, unindo o prazer ao ato de aprender.

As atividades foram elaboradas com o objetivo de atingir as habilidades proposta pelo Currículo do estado de São Paulo para o 6º ano do Ensino Fundamental. São elas :"Saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem; compreender a ideia do princípio multiplicativo de contagem". (SÃO PAULO, 2012, p.58).

Também seguimos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.72,74) que inclui a "Resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas"; e "[...]Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias".

A análise das atividades mostrou que os alunos se sentiram motivados, relacionando o conteúdo de Análise Combinatória com uma prática divertida através da mágica, ou seja, aliaram o prazer ao ato de aprender. Eles demonstraram bastante entusiasmo na realização das atividades, principalmente nos dias que tinha apresentação de mágica. Após a realização das atividades, os alunos se sentiram mais confiantes para expor seu raciocínio, apresentar estratégias de resolução e explorar o problema em busca de uma solução correta

2 Ensino de Análise Combinatória

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais relativos aos terceiros e quarto ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), a sociedade mostra uma necessidade de acrescentar ao estudo dos "números", "operações", "espaço", "formas", "grandezas e medidas", conteúdos que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe no cotidiano, levando-os a aprender a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar a partir de ideias relativas à probabilidade e à combinatória. O objetivo dos problemas de contagem é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos, possibilitando o desenvolvimento do raciocinio combinatório e a compreenssão do princípio multiplicativo.

Noções de estatística, probabilidade e de combinatória também estão integrados nos Parâmetros Curriculares Nacionais referentes às quatro primeiras séries do Ensino Fundamental, no bloco "Tratamento de Informação", onde não se pretende um trabalho que dê ênfase a formalização de fórmulas ou conceitos, mas sim, relativamente ao estudo da Combinatória "[...] o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e especialmente, o princípio multiplicativo da contagem." (BRASIL, 1997, p.40).

Apesar das recomendações dos PCN, apenas problemas do tipo *produto cartresiano* é trabalhado nas séries iniciais do Ensino Fundamental. A maioria dos problemas de raciocínio combinatório é introduzida formalmente na 2ª série do Ensino Médio. Ainda que haja a falta de formalização de fórmulas ou conceitos nos anos iniciais , acredita-se que é possível que o raciocínio combinatório se inicie antes do estudo formal através de experiências cotidianas escolares ou não. (BORBA, 2009, p.107).

Borba, Pessoa e Rocha (2013) realizaram uma pesquisa com o objetivo de investigar como crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental resolvem problemas combinatórios e analisa o que os professores deste nível de ensino pensam sobre a Combinatória e as compreensões dos estudantes. Concluíram que os estudantes diversas vezes são bem sucedidos na resolução desses problemas, mas muitas vezes o conhecimento de seus professores é limitado e necessita ser mais amplo, de maneira a poder auxiliar as crianças no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios. Foram propostas seis questões - duas envolvendo arranjo, duas envolvendo combinação e duas envolvendo produto cartesiano - tanto para os estudantes quanto para os professores. Os professores reconheceram a natureza multiplicativa dos problemas, mas, assim como os estudantes, não conseguiram diferenciar arranjos e combinações. Este resultado é muito preocupante, pois as crianças poderão ser ensinadas por professores que não possuem o conhecimento de conteúdo adequado.

Teixeira (2014) também acredita que os problemas de contagem deveriam ser mais desenvolvidos com os alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, valorizando o raciocínio combinatório. O ensino da Combinatória nesse período constitui-se um importante instrumento, onde o aluno apropria-se de procedimentos e estratégias para a aprendizagem de resolução de situações-problema, uma vez que ele utiliza o raciocínio combinatório durante a fase de construção dos conceitos relacionados a conteúdos de Combinatória. Além disso, o aluno de hoje está inserido em um mundo de novas tecnologias e informações em tempo real, passando a adquirir conhecimentos subjacentes a esses conteúdos, estando apto para enfrentar problemas do cotidiano que estejam ao seu alcance, o que contribui para que ele compreenda outras situações também interessantes.

Problemas com contagem aparecem nos PCN (BRASIL, 1998, p.72,74) em "Conceitos e Procedimentos" relativos a conteúdos propostos para o Ensino de Matemática no terceiro ciclo (6º e 7º ano), no bloco "Números e Operações" como: "[...]Resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas"; e no bloco "Tratamento da Informação" como: "[...]Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias".

Também aparecem no Currículo do Estado de São Paulo de Matemática (SÃO PAULO, 2012), nos conteúdos do 4º bimestre do 6º ano do ensino fundamental, no 1º bimestre do 8º ano e 4º bimestre do 9º ano. As habilidades que diz respeito a esse conteúdo para os 6º anos são: "Saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem e; Compreender a ideia do princípio multiplicativo de contagem". Apesar do Caderno do Professor e Caderno do Aluno, trazer como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, não aparece nenhuma atividade envolvendo problemas de contagem no 4º bimestre do 6º ano, que contemplem tais habilidades.

O Caderno do Professor apresenta orientações didático-pedagógicas que podem ser utilizados como complemento à Matriz Curricular. As atividades propostas podem ser complementadas por outras que os professores julgarem pertinentes ou necessárias, dependendo do seu planejamento, de sua escola e de seus alunos. A proposição do caderno é de apoiar os professores no planejamento de suas aulas para que explorem em seus alunos "[...]competências e habilidades necessárias que comportam a construção do saber e a apropriação dos conteúdos das disciplinas." (SÃO PAULO, 2014).

Uma das alternativas para o professor seria complementar as atividades do Caderno do Aluno com atividades propostas pelo livro didático. O PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) tem por objetivo prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários. O programa é executado em ciclos trienais alternados. Assim a cada ano o FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação) adquire e distribui livros para todos os alunos de determinada etapa de ensino. Um edital especifica todos os critérios para inscrição das obras. Os títulos inscritos pelas editoras são avaliados pelo MEC, que elabora o Guia do Livro Didático, composto das resenhas de cada obra aprovada, que é disponibilizado às escolas participantes pelo FNDE. Cada escola escolhe democraticamente, dentre os livros constantes no referido Guia, aqueles que deseja utilizar, levando em consideração seu planejamento pedagógico.

Analisando os quadros de conteúdos das obras descritas no Guia do Livro Didático (PNLD, 2014) observamos a ausência de Problemas de Contagem no Ensino Fundamental, na maioria dos livros. Apesar de Problemas de Contagem estar presente como conteúdo do 6º ano tanto nos PCN quanto no Currículo do Estado de São Paulo, o conteúdo não aparece especificamente nos livros didáticos, como podemos observar através dos quadros de conteúdos das figuras 1 à 10.

6º ANO – 9 capítulos – 312 pp.		
1	Figuras geométricas espaciais: classificação, vistas – tabelas e gráficos – ângulo – circunferência; ângulos e retas	40 p.
2	Polígonos – perímetro – números naturais; frações, números decimais – medidas de comprimento	40 pp.
3	Números naturais: ordenação, operações, propriedades; números ordinais – possibilidades – potenciação	38 pp.
4	Números decimais e medidas: números decimais e frações: adição e subtração, multiplicação e divisão	38 pp.
5	Múltiplos e divisores: mmc e mdc – figuras geométricas espaciais e planas; simetria de reflexão – fração irredutível	26 pp.
6	Valor monetário, comprimento, tempo, área, volume; perímetro e área de retângulos; volume de sólidos	30 pp.
7	Razões; proporções; escala; proporcionalidade: direta, inversa – semelhança de figuras geométricas planas – porcentagem	22 pp.
8	Capítulo de revisão	20 pp.
9	Capítulo de atividades complementares	48 pp.

Figura 1: Descobrindo e Aplicando a Matemática
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 11 capítulos – 344 pp.		
1	Números: usos; sistemas de numeração: leitura e escrita; números naturais: comparação – tabelas	19 pp.
2	Números naturais: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação – gráfico de barras	46 pp.
3	Corpos redondos e poliedros; prismas e pirâmides; ponto, reta e plano – gráfico de colunas	16 pp.
4	Múltiplos e divisores; critérios de divisibilidade; números primos; mdc e mmc – gráfico de barras	28 pp.
5	Retas; semirreta; segmento de reta; ângulos – medida de ângulo – ângulo: reto, agudo, obtuso; vistas	20 pp.
6	Frações: ideias, equivalência, simplificação, comparação; porcentagem – gráfico de setores	28 pp.
7	Frações: adição e subtração, multiplicação, divisão, potenciação, raiz quadrada – probabilidade	34 pp.
8	Números decimais: notação, comparação, operações aritméticas; porcentagens – média aritmética	40 pp.
9	Polígonos: elementos, classificação; triângulos e quadriláteros; prismas e pirâmides	26 pp.
10	Comprimento; perímetro; área; medidas agrárias; área de retângulos; área de quadrados	30 pp.
11	Medidas: tempo, volume; volume do paralelepípedo; medidas: capacidade, massa	33 pp.

Figura 2: Matemática - Bianchini
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 11 Unidades – 46 Capítulos – 304 pp.	
Unidade 1 – Números	24 p.
Números naturais no cotidiano; Sistemas de numeração: egípcio, romano; sistema de numeração decimal: ordens e classes; Números naturais: sucessor, reta numerada, pares, ímpares; Tabelas; gráficos de barras	
Unidade 2 – Formas geométricas espaciais e planas	18 p.
Figuras geométricas espaciais e planas: poliedros, corpos redondos, regiões planas e seus contornos _ Prismas e pirâmides: elementos; segmento de reta, reta, plano; Cilindros, cones, esferas: elementos, vistas	
Unidade 3 – Operações com números naturais	26 pp.
Adição: ideias, algoritmo, propriedades; subtração: ideias, algoritmo; operações inversas; Multiplicação: ideias, propriedades; divisão: ideias, algoritmo; operações inversas – medidas de tempo; Possibilidades	
Unidade 4 – Potenciação	10 p.
Potências de base de 2 a 10; Propriedades das potências; Raiz quadrada exata	
Unidade 5 – Formas geométricas planas	14 p.
Ponto, reta, plano, semirreta; Ângulos: ideia de giro; Ângulos: mudança de direção, elementos, notação – medidas de ângulos – ângulos: retos, agudos, obtusos; Posições relativas de retas coplanares; localização em malha quadriculada; Retas paralelas e concorrentes	
Unidade 6 – Divisibilidade	28 p.
Sequências numéricas, padrões ; Divisores e múltiplos; divisibilidade por: 2, 3, 9, 5, 10, 4 e 6; Números primos e compostos; fatoração; raiz quadrada; máximo divisor comum; Múltiplos comuns e mmc	
Unidade 7 – Polígonos	24 p.
Linhas: poligonais abertas e fechadas simples; polígonos: convexos, não convexos; Triângulos: elementos, classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos, altura; Quadriláteros: elementos, classificação; Polígonos: ladrilhamento, simetria axial	
Unidade 8 – Números racionais: representação fracionária	38 p.
Frações: ideias, notação, próprias, impróprias, aparentes – medidas de tempo – números racionais; Frações equivalentes: propriedade fundamental, simplificação de frações; Comparação de frações ; Porcentagem – gráficos de: barras, setores; Adição de frações: próprias e mistas; Multiplicação de frações; frações inversas; divisão de frações; operações inversas _ Frações: potenciação, raiz quadrada exata	
Unidade 9 – Números racionais: representação decimal	42 p.
Número decimal: representação, conversão em frações; Sistema monetário brasileiro; medidas de tempo – frações decimais equivalentes; Comparação de números racionais; racionais na reta numerada: ordens crescente e decrescente; Adição e subtração de números decimais: algoritmos; arredondamento de número decimal; Multiplicação e divisão de números decimais: algoritmos, operações inversas; Potência e raiz quadrada de números decimais; Porcentagens – tabelas; gráficos de: colunas, setores, barras	
Unidade 10 – Números e medidas	18 pp.
Medidas de comprimento: múltiplos e submúltiplos do metro; Medidas de massa: o quilograma e seus múltiplos e submúltiplos, mudanças de unidades	
Unidade 11 – Áreas e volumes	32 p.
Medidas de área: o metro quadrado e seus múltiplos; unidades agrárias; Cálculo de áreas de: retângulos, paralelogramos, triângulos, trapézios; Volumes de blocos retangulares; medidas de volume: submúltiplos do metro cúbico; Medidas de capacidade: litro, mililitro; relação entre o metro cúbico e o litro	

Figura 3: Matemática: Ideias e Desafios
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 14 capítulos – 312 p.		
1	Polígonos; bloco retangular – tabelas e gráficos; possibilidades - operações com naturais	25 p.
2	Prismas e pirâmides: vistas; cilindros, cones e esferas	18 p.
3	Operações com números naturais: ideias, algoritmos, operações inversas; números decimais	21 p.
4	Ângulo – medida de ângulo - retas paralelas e perpendiculares; polígonos; quadriláteros	27 p.
5	Múltiplos e divisores; divisibilidade; números primos; mínimo múltiplo comum	19 p.
6	Frações: ideias, notação, comparação - medidas de comprimento - porcentagem	22 p.
7	Ângulos, polígonos, figuras geométricas semelhantes - tabelas; gráficos: colunas, setores	18 p.
8	Medidas de comprimento; perímetro – números decimais: notação, leitura, comparação	18 p.
9	Operações com números decimais: significados e algoritmos - média aritmética	22 p.
10	Expressões numéricas: regras operatórias; potências: notação, significado	17 p.
11	Noção de área; área do retângulo; unidades de medida de área	15 p.
12	Simetria de reflexão - números simétricos	19 p.
13	Padrões numéricos; expressões algébricas	10 pp.
14	Frações: equivalência, comparação, adição, subtração	12 pp.

Figura 4: Matemática - Imenes & Lellis
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 7 capítulos – 272 p.		
1	Números naturais: usos, escrita, ordenação, comparação, adição, operações aritméticas	50 p.
2	Ângulos; polígonos; circunferência e círculo; paralelepípedos; prismas e pirâmides; simetria axial	46 p.
3	Múltiplos e divisores: critérios de divisibilidade, números primos, fatoração, mmc, mdc	30 p.
4	Frações: ideias, equivalência; *Em busca do mel*; números decimais: comparação, dízimas	38 p.
5	Frações: adição, subtração, multiplicação, divisão; números decimais: multiplicação, divisão	32 p.
6	Organização e apresentação de dados: tabelas, gráfico; média aritmética; porcentagem	16 p.
7	Comprimento, área, volume, capacidade, massa, tempo	41 p.

Figura 5: Matemática - Teoria e Contexto
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 14 unidades – 288 p.		
1	Sistemas de numeração: egípcio, romano, indo-arábico	118p.
2	Números naturais: registros, sucessor, antecessor, comparação	10 p.
3	Adição e subtração de naturais: ideias, algoritmos	14 p.
4	Multiplicação e divisão de naturais: ideias, algoritmos, expressões numéricas – medidas de tempo	26 p.
5	Potenciação; raiz quadrada; expressões numéricas	10 p.
6	Múltiplos e divisores; números primos, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum	22 p.
7	Tabelas e gráficos de barras	10 p.
8	Polígonos; poliedros, blocos retangulares	18 p.
9	Ângulos – medidas de ângulos: o grau – retas: perpendiculares, paralelas	16 p.
10	Triângulos, quadriláteros; polígonos regulares – perímetro – circunferências; simetria de reflexão	20 p.
11	Frações: ideias, notação, leitura, equivalência, comparação, operações	28 p.
12	Números decimais: notação, usos, comparação, operações; dízimas periódicas	26 p.
13	Porcentagens: notação, leitura, cálculo	12 p.
14	Unidades de medidas: comprimento, área, volume, massa; área do retângulo; volume do bloco retangular	30 p.

Figura 6: Praticando Matemática - Edição Renovada
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 06 Partes – 344 p.		
	Parte 1 – Números naturais e operações	79 pp.
1	Números naturais: usos, representação; sistemas de numeração – tabela simples	
2	Adição e subtração: ideias, algoritmos, propriedades – gráfico de colunas	
3	Multiplicação e divisão: ideias, algoritmos, propriedades; potenciação – gráfico de barras	
4	Sequências numéricas	
	Parte 2 – Figuras geométricas e simetria	32 pp.
5	Sólidos geométricos: poliedros e corpos redondos; figuras geométricas planas; vistas – gráfico de coluna	
6	Simetria de reflexão	
	Parte 3 – Múltiplos e divisores; Frações e porcentagem	65 pp.
7	Divisibilidade: critérios; múltiplos e divisores de um número natural – possibilidades	
8	Números primos; fatoração; mdc e mmc	
9	Frações: ideias, registros, leitura, números mistos, equivalência	
10	Operações com frações: adição e subtração, multiplicação, divisão; porcentagem – possibilidades	
	Parte 4 – Números decimais e operações	38 pp.
11	Números decimais: representação, comparação – pictograma	
12	Operações com decimais: adição e subtração, multiplicação, divisão, potenciação; porcentagem	
	Parte 5 – Ângulos, polígonos e círculos	48 pp.
13	Ponto, reta, plano; ângulo; posição relativa de retas; localização e deslocamento – gráfico de barras	
14	Polígonos: elementos, classificação; triângulo; quadrilátero	
15	Circunferência e círculo – gráfico de setores	
	Parte 6 – Medidas e geometria	44 pp.
16	Sistema internacional de unidades; comprimento; área; medida agrária; *Corpo humano*; *Área*	
17	Perímetro e área; área de quadrados e de retângulos – média aritmética	
18	Medidas: massa, capacidade, volume; volume de cubos e de paralelepípedos	

Figura 7: Projeto Araribá Matemática
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 04 unidades – 304 p.		
Unidade 1 – Números naturais e geometria		94 p.
1	Sistemas de numeração antigos; números naturais: usos – par ordenado – possibilidades; gráficos de colunas	
2	Adição, subtração, multiplicação e divisão: ideias, propriedades, algoritmos – média aritmética – gráficos de colunas	
3	Sólidos geométricos: classificação, propriedades; ponto, reta, plano, ângulos, polígonos – tabelas e gráficos – plano cartesiano	
Unidade 2 – Potenciação e divisibilidade		46 p.
4	Potenciação; raiz quadrada; expressões numéricas – gráficos de barras	
5	Divisibilidade: critérios, múltiplos, divisores, número primo, mmc, mdc – tabelas e gráficos	
Unidade 3 – Frações e números decimais		72 p.
6	Frações: ideias, notação, equivalência, comparação, operações; porcentagem – gráficos de setores	
7	Números decimais: notação, comparação, operações – medidas: comprimento e massa – porcentagem – gráficos	
Unidade 4 – Grandezas e medidas		54 p.
8	Unidades de medidas de: comprimento, área, volume, capacidade, tempo – pictograma	
9	Perímetro de polígono; área de triângulos e quadriláteros; volume de paralelepípedos; capacidade – gráficos	

Figura 8: Projeto Teláris - Matemática
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 04 unidades – 262 p.		
Unidade 1 – Números e formas no cotidiano		
1	Números naturais: usos, registros, sistema de numeração decimal	25 p.
2	Operações com naturais: adição; subtração, multiplicação, divisão – cálculo de possibilidades	29 p.
3	Figuras geométricas espaciais: bloco retangular, cubo, prismas, pirâmides, corpos redondos	22 p.
Unidade 2 – Regularidades		
4	Múltiplos e divisores: múltiplos e divisibilidade, múltiplos e divisores comuns, mdc, mmc	26 p.
5	Números primos; fatoração; números primos entre si; potências	19 p.
6	Polígonos: definição, elementos; polígonos regulares; quadriláteros: classificação; triângulos	23 p.
Unidade 3 – Números quebrados		
7	Frações: ideias, representações, equivalência, simplificação, comparação; frações decimais	23 p.
8	Números decimais: definição, representação, comparação	15 p.
9	Operações com decimais: adição e subtração, multiplicação e divisão – média aritmética – operações com frações: adição e subtração	22 p.
Unidade 4 – Aplicações		
10	Medidas de comprimentos: unidades decimais e não decimais; perímetro; área: do retângulo, do quadrado e do triângulo	23 p.
11	Porcentagem: fração centesimal, cálculo de porcentagens	15 p.
12	Matemática e os meios de comunicação: números, porcentagem, chance, tabelas e gráficos	18 p.

Figura 9: Projeto Valear - Matemática
Fonte: Guia de livros didáticos

6º ANO – 14 capítulos – 352 p.		
1	Paralelepípedo e cubo; prisma e pirâmide; cone, cilindro e esfera; planificação; vistas	18 p.
2	Usos dos números; sistemas de numeração: egípcio, romano, indo-arábico; números naturais	24 p.
3	Adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais; *Negócios do oriente*	34 p.
4	Potenciação; potências de base 10; radiciação; expressões numéricas	16 p.
5	Múltiplos de números naturais: mmc; divisores de números naturais: mdc; números primos e compostos	24 p.
6	Frações: ideias, equivalência, simplificação, comparação, adição e subtração, multiplicação; porcentagem	36 p.
7	Ângulos: ideias – medida de ângulo – retas e segmentos de reta; retas paralelas e retas concorrentes	18 p.
8	Polígonos: classificação; triângulos e quadriláteros; circunferência e círculo; simetria de reflexão	28 p.
9	Números decimais: décimo, centésimo e milésimo; número decimal e frações; comparação de decimais	16 p.
10	Operações com números decimais: adição, subtração, multiplicação e divisão; porcentagem	28 p.
11	Medidas de comprimento: sistema métrico decimal; medidas de tempo: horas e minutos, anos e meses	18 p.
12	Medidas de área: conceito e unidades; área do quadrado e área do retângulo; conversão de unidades	22 p.
13	Medidas de capacidade: unidades e conversões; medidas de massa: unidades e conversões	18 p.
14	Tabelas; gráficos: barras, linhas, setores, pictograma; coleta e organização de dados *Números do Brasil*	20 p.

Figura 10: Vontade de Saber Matemática
Fonte: Guia de livros didáticos

O conteúdo de Análise Combinatória volta a ser estudado na 2ª série do Ensino Médio, onde são apresentadas formalmente as fórmulas de permutação, combinação e arranjo. Trata-se no Ensino Médio, de partir dos conhecimentos e das habilidades anteriormente construídos (no Ensino Fundamental) e promover os aprofundamentos necessários.

2.1 Análise Combinatória no Ensino Fundamental

A Análise Combinatória tem como base o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo que permitem resolver todos os problemas dessa área da Matemática, apesar de existirem outras ferramentas para esse mesmo fim. O Princípio Multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem) postula que, se há x maneiras de tomar uma decisão e, tomada essa decisão, há y modos de tomar outra decisão, então o número de modos de tomar sucessivamente as duas decisões é multiplicando x por y, ou seja xy. O Princípio Aditivo diz que se A com x elementos e B com y elementos forem conjuntos disjuntos, então o conjunto $A \cup B$ tem $x+y$ elementos, ou seja, se quiser contar um conjunto de objetos, pode-se dividi-lo em duas partes, contá-los separadamente e depois somar os dois resultados.

Borba, Pessoa e Rocha (2013) defendem que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é muito importante, pois auxilia a aprendizagem, de um modo geral, e o entendimento matemático, em particular. Pensam assim porque, no raciocínio combinatório são usados procedimentos sistemáticos de enumeração do total de possibilidades distintas e também envolve a análise de situações . O raciocínio combinatório denota um alto nível de desenvolvimento cognitivo em seu uso pleno, pois é um modo especial de pensamento lógico-dedutivo. Defendem também que o raciocínio combinatório leva um longo tempo para se desenvolver e que situações combinatórias simples podem ser propostas no início da escolarização, de modo a qualificar estudantes com noções iniciais sobre como combinar elementos considerando combinações válidas que atendam a determinadas condições. Desse modo, para que possam auxiliar os estudantes no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios, professores de anos iniciais do Ensino Fundamental precisam entender a natureza de problemas combinatórios e como ocorre a aprendizagem da Combinatória.

Para Teixeira (2014), o raciocínio combinatório é tal que permite o estabelecimento de todas as diferentes possibilidades que podem ser feitas entre objetos presentes na situação-problema de contagem, respeitando os critérios e condições descritos no enunciado. O objetivo inicial referente ao raciocínio combinatório é que o aluno tenha conhecimento e saiba construir representações gráficas, como: árvore de possibilidades, esquemas, tabelas de dupla entrada, produto cartesiano, enumeração de agrupamentos.

Assim que todos os diferentes agrupamentos foram determinados por meio da construção de uma das representações gráficas (desde que o quantitativo de objetos não seja tão grande que torne inviável poder explorá-los e descrevê-los um a um), cabe ao aluno fazer a contagem direta desses agrupamentos, determinando a solução do problema de contagem proposto. Portanto, como resultado do uso do raciocínio combinatório, todos os agrupamentos (conjuntos unitários disjuntos entre si) são obtidos através da construção de uma representação gráfica, permitindo uma enumeração de todos eles, e a seguir aplicar o Princípio Aditivo para estabelecer a contagem direta total dos agrupamentos.

> Embora esse procedimento seja bastante prático e de razoável facilidade, ele é limitado a um quantitativo possivelmente pequeno de objetos envolvidos. Por outro lado, mesmo quando uma grande quantidade de objetos esteja envolvida na situação-problema de contagem, que torna inviável a construção por completo de uma representação gráfica, em se tratando de uma árvore de possibilidades, o conhecimento das características de sua construção pode levar o aluno a intuir (concluir por percepção) sobre todas as possíveis "combinações" que devem ser consideradas e, assim, determinar o quantitativo de todos os agrupamentos sem que a construção tenha que ser finalizada. (TEIXEIRA, 2014, p.8).

Um dos comportamentos heurísticos reconhecidos como um dos mais importantes a serem investigados pelos estudantes quando enfrentam situações que são de fato problemas, é a representação da solução por intermédio de desenhos, diagramas e tabelas. A representação da solução de um problema de Física ou de Química por desenhos é algo tão comum que alunos e professores quase não se dão conta de que o estão fazendo o tempo todo. Em Matemática, salvo em alguns casos de Geometria, são poucos os momentos em que os alunos são intimados a mobilizar tais estratégias de raciocínio, sendo mais comum aplicar em novas situações os modelos análogos anteriormente utilizados e que trazem a lembrança naquele momento. Esse método costuma dar bons resultados em alguns tópicos de conteúdos da matemática, porém é bastante ineficaz para a resolução de problemas de análise combinatória, pois a diversidade de critérios de agrupamentos é tão grande que na maioria das vezes é impossível associar uma situação-problema atual a alguma categoria anteriormente construída.

Diante disso, é fundamental que os alunos analisem cada situação problema em Análise Combinatória, como se estivessem fazendo pela primeira vez, de modo que evidenciem o raciocínio adotado por intermédio de desenhos, diagramas, etc. Sendo assim, a árvore de possibilidades é prioridade em quase 100% dos problemas. A representação das resoluções por meio de árvores ilustra os dois principais tipos de raciocínio envolvidos em todos os problemas de Análise Combinatória: o raciocínio aditivo e o multiplicativo. (SÃO PAULO, 2014)

Segundo Teixeira (2014), a árvore de possibilidades está associada ao "Problema do jogo interrompido". O problema remonta ao século XVII quando, através de correspondências que trocavam entre si , Blaise Pascal e Pierre de Fermat apresentaram-no e o discutiam entre si acerca de qual seria a maneira mais justa de repartir um prêmio *P* entre dois jogadores *X* e *Y* uma vez que o jogo foi interrompido, acusando o placar de *2x0* para o jogador *X*, na qual a regra do jogo dizia que levaria o prêmio o jogador que vencesse 3 partidas. A questão em discussão era: Seria justo que o jogador *X* levasse todo o prêmio *P*? Seria mais justo que o jogador *X* levasse *2/3* do prêmio *P* e o jogador *Y* levasse *1/3* do prêmio *P*? Ou o mais justo seria repartir o prêmio *P* de acordo com as probabilidades que cada jogador tinha de vencer a partida no momento interrupto do jogo?

Esse problema é apresentado no Caderno do Aluno da 2ª série do Ensino Médio em forma de situação problema, na qual a resolução é feita através da árvore de possibilidades como mostra a figura 11:

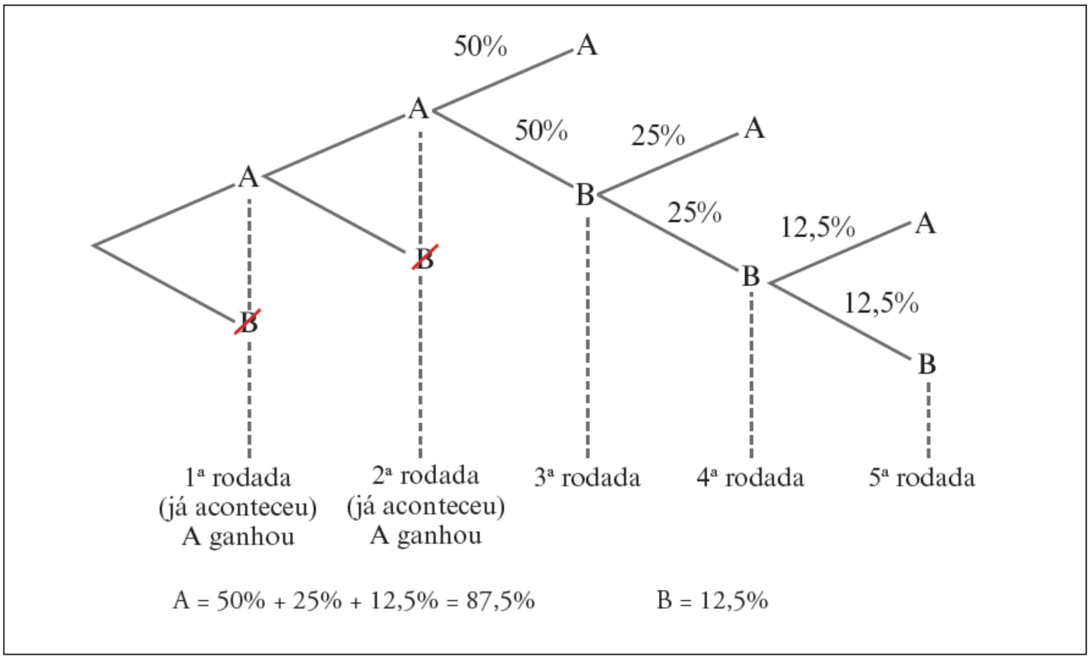


Figura 11: Solução do Problema do Jogo Interrompido
Fonte: Caderno do Professor Matemática - 2ª série Ensino Médio.

Para Teixeira (2014) a representação gráfica mais clara e simples para representar todas as possibilidades de solução de um problema de contagem é a árvore de possibilidades, desde que o quantitativo de objetos do problema não seja muito grande, principalmente para as crianças que estão tomando contato pela primeira vez com esses conceitos, pois através da construção da árvore, as possibilidades de combinações vão aparecendo de maneira natural, o que permite que ao final de sua construção haja a contagem direta da totalidade dessas possibilidades (agrupamentos). Essa contagem direta dos agrupamentos é obtida por meio da aplicação do Princípio aditivo, pois esses agrupamentos, que se configuram como conjuntos unitários, são todos distintos entre si.

> A importância de dar ênfase à utilização da árvore de possibilidades quando da resolução de problemas de contagem - neste início do estudo das noções básicas de combinatória- também repousa no fato de que ela se mostra bastante oportuna para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, raciocínio esse que permite ao aluno fazer as "combinações de objetos", mesmo nas situações em que não convém explicitar todas essas "combinações" (em problemas de contagem mais complexos, com um número grande de possibilidades) para que conheça o total de possibilidades possíveis, para cada umas das ações. (TEIXEIRA, 2014, p.14-16).

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano dos dois conjuntos, indicado por AxB, é o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B. Assim, se o conjunto A possui x elementos e o conjunto B possui y elementos , como um elemento do conjunto A se associa com todos os elemento do conjunto B e um elemento do conjunto B se associa com todos os elementos do conjunto A , há um total de $x.y$ elementos no conjunto $A\text{x}B$.

> Quando são colocadas situações que envolvem a contagem das possibilidades de vestir conjuntos calça-blusa, quando se dispõe de x calças e y blusas, e se tem como resultado apenas a indicação do produto $x.y$,todas as diferentes possibilidades (combinações possíveis), e não são feitas considerações pertinentes à utilização da ideia combinatória para o significado da multiplicação $x.y$ que determinou a totalidade de possibilidades, bem como não se fazem correlações em relação à apropriação de relações do tipo "um-para-muitos", ou seja, correspondências tipo: a cada calça vestida há y possibilidades de se vestir uma blusa e formar um novo e diferente conjunto calça-blusa, estamos diante de uma abordagem combinatória insuficiente para a compreensão adequada do significado da multiplicação. (TEIXEIRA, 2014, p.24-25)

Outra representação gráfica que pode ser utilizada para resolver alguns problemas de Combinatória são as tabelas de dupla entrada.

Exemplo: Uma bandeira é formada por duas listras que devem ser coloridas usando apenas as cores azul, vermelha e amarela. Apresente todas as maneiras diferentes de colorir as listras.

Esse problema pode ser resolvido através de uma tabela de dupla entrada (Figura 12):

A tabela é composta de duas entradas. A Entrada 1 é a escolha da cor que será utilizada para pintar a primeira listra e a Entrada 2 é escolha da cor que será utilizada para a segunda listra. A tabela é completada com a combinação das cores em que as listras das bandeiras poderão ser pintadas de maneiras diferentes.

É importante apresentar diferentes representações gráficas aos alunos que podem ser utilizadas para resolver problemas de contagem, de maneira que eles conheçam as características que permitem a construção de cada uma delas e possa identificar qual será mais conveniente em cada situação-problema.

Cor da 2ª listra / Cor da 1ª listra	Azul	Vermelho	Amarelo
Azul	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)
Vermelho	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)
Amarelo	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)

Figura 12: Tabela de Dupla Entrada
Fonte: Elaborada pela autora

2.2 Teoria da Análise Combinatória

Nesse capítulo pretende-se discorrer de modo geral, sobre o processo de contagem e a teoria da Análise Combinatória. O objetivo é mostrar como obter resultados gerais por meio de fórmulas, a fim de resolver várias classes de problemas, mesmo considerando que muitos problemas podem ser solucionados pela enumeração dos casos, representações gráficas ou através da utilização do Princípio Multiplicativo. Destaca-se que muitos problemas de Combinatória não podem ser resolvidos diretamente através de fórmulas.

É comum estabelecermos padrões na Matemática, padrões que são importante pelo fato de que uma mesma ideia matemática pode ser usada para resolver problemas aparentemente distintos, então o uso de fórmulas ajuda a simplificar a resolução de problemas que envolvam a Análise Combinatória no Ensino Médio. Porém devemos ter alguns cuidados em relação ao uso de fórmulas, pois, por exemplo, quem troca o Princípio Multiplicativo por fórmulas de arranjos, permutações e combinações costuma ter dificuldades em resolver problemas simples como pintar bandeirinhas. Lima (2006, p.118-119) apresenta algumas sugestões bastante pertinentes para o professor em relação ao Ensino de Combinatória:

> 1. Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas.[...]
> 2. Aprenda, e faça com que os alunos aprendam, com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.
> 3. Você quer mostrar que é bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de, em cada problema, buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema, somente.[...] Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos.
> 4. Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que envolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos, seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos.[...]
> 5. Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou combinações?

Existem situações envolvendo contagem em que a ordem dos elementos é importante, e outras, em que a ordem não é importante. Quando a ordem dos elementos é importante, os problemas envolvem os conceitos de *permutação*. Quando a ordem não é importante, pois não altera o resultado da contagem, os problemas se resolvem usando o conceito de *combinação*.

Outro fato importante a ser observado é se há ou não repetições dos elementos. Quando não há repetições, essas permutações e combinações são chamadas simples e quando há repetições são chamadas permutações e combinações com repetições.

As notações mais comuns utilizadas em livros para o Ensino Médio no Brasil para denotar o número de combinações simples de n elementos tomados p a p são C_n^p e $C_{n,p}$. Em textos mais avançados, a notação mais utilizada é $\binom{n}{p}$. Adotaremos $C_{n,p}$ para denotar o número de combinações simples e $A_{n,p}$ para denotar o número de arranjos simples. Esse capítulo foi escrito pautado na Revista Matemática na Prática (MORAES FILHO; MALAGUTTI, 2013)

2.2.1 Permutações e Arranjos Simples

Definimos o fatorial *n!* de um número inteiro positivo *n* como *n! = n. (n-1). (n-2)...2.1*, se $n > 0$ e 0! = 1, por convenção.

Uma permutação simples de *n* objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses *n* objetos. Considerando *n* objetos e *p* um número inteiro positivo tal que $0 < p \leq n$, um arranjo simples de classe *p* dos *n* objetos dados é uma seleção de *p* objetos distintos dentre estes que diferem entre si pela ordem de colocação ou pela natureza de cada um, isto é, o que importa é quem participa ou o lugar que ocupa.

Sendo n ≥1, o número total de permutações simples de *n* objetos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é dado por $\boldsymbol{P_n = n!}$ **;** e o número total de arranjos simples de classe *p* de *n* objetos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é dado por $\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$.

Exemplos: Caso 1: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 4 carros em 4 vagas de garagens? Caso 2: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 4 carros em 2 vagas de garagens?

Respostas: No Caso 1, existem 4 possibilidades de preencher a primeira vaga de garagem, 3 possibilidades de preencher a segunda vaga, 2 possibilidades de preencher a terceira e apenas uma possibilidade de preencher a quarta vaga. Logo, utilizando o Princípio Multiplicativo, as possibilidades são *4.3.2.1= 24* . Temos uma permutação de 4 objetos (carros), ou seja $P_4 = 4!$. Já, no Caso 2, existem 4 possibilidades de preencher a primeira vaga, mas apenas *3* possibilidades para preencher a segunda vaga. Pelo Princípio Multiplicativo, o número total de maneiras é *4.3 = 12* possibilidades. Ou seja, há *12* arranjos de 4 objetos tomados 2 a 2.

Seguindo o procedimento do exemplo pode-se deduzir a fórmula do número de arranjos de *n* objetos tomados *p* a *p* de acordo com o Quadro 1.

Escolha do 1º elemento	Escolha do 2º elemento	Escolha do 3º elemento	...	Escolha do (p-1)-ésimo elemento	Escolha do p-ésimo elemento
n possibilidades	n-1 possibilidades	n-2 possibilidades	...	n-(p-1-1) possibilidades	n-(p-1) possibilidades

Quadro 1: Arranjo Simples
Fonte: (Matemática na Prática)

Assim o primeiro elemento do arranjo de *n* objetos tomados *p* a *p* pode ser escolhido de *n* maneiras diferentes, o segundo elemento pode ser escolhido de *n-1* maneiras, o terceiro elemento pode ser escolhido de *n-2* maneiras. Continuando com essa sequência, o *p-ésimo* (último) elemento do arranjo pode ser escolhido de *n-(p-1) = n-p+1* maneiras diferentes. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-p+1)$$

Usando a notação de fatorial, a fórmula para $A_{n,p}$ pode se expressa por:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-p+1).\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

No caso em que $p = n$, temos:

$$A_{n,n} = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$$

2.2.2 Combinação Simples

Uma combinação simples é um agrupamento de alguns objetos de um dado conjunto - em que os objetos não podem ser escolhidos de forma repetida e a ordem de seus elementos não é importante. Ou seja, agrupamentos com os mesmos elementos são considerados iguais, independente da ordem em que são agrupados.

Consideremos n objetos e p um número inteiro positivo, tal que $0 < p \leq n$. Uma combinação simples de classe *p* dos *n* objetos dados é uma seleção de *p* objetos distintos entre estes que diferem entre si apenas pela natureza de cada um, isto é, o que importa é simplesmente quem participa no grupo selecionado. Seja $n \geq 1$. O número total de combinações simples de classe *p* de *n* objetos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é dado por $\boldsymbol{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Na verdade, uma combinação é um tipo especial de arranjo, em que a ordem dos elementos não é levada em conta. Sabemos que o número de grupos formados com *p* elementos, considerando distintos grupos com ordens distintas é igual ao número de permutações com *p* elementos, que já sabemos que é igual a *p!*. Para se obter a fórmula da combinação simples basta dividir o número de arranjos $\boldsymbol{A_{n,p}}$ pelo número de permutações de *p* elementos, isto é, por *p!*. Ou seja, o número de combinações simples é $\boldsymbol{C_{n,p}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$, identificando grupos de elementos que diferem apenas pela ordem. Assim, o número de combinações será sempre menor ou igual ao número de arranjos.

Exemplo: Quantas saladas de frutas com 4 frutas podemos fazer se dispomos de 10 frutas diferentes?

Resposta: Para se fazer uma salada basta escolher 4 das 10 frutas, não importando a ordem que façamos a escolha pois elas serão todas misturadas. O número total de saladas de fruta é portanto dado pelas combinações de 10 elementos tomados 4 a 4, ou seja:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!\,4!} = 210$$

Na verdade o que fizemos para resolver esse problema foi aplicar o Princípio Multiplicativo para obter todas as possibilidades, considerando que a ordem é importante (arranjo), e encontramos 10.9.8.7 = 5040 possibilidades. Depois dividimos o resultado obtido pelo número de permutações dos elementos do agrupamento que precisamos escolher. Como a intenção é fazer saladas com 4 frutas, dividimos o número de possibilidades encontradas por 4!, obtendo $\frac{10.9.8.7}{4!}$. Como estamos buscando um procedimento geral para resolver problemas, vamos reescrever a resposta usando a notação de fatorial:

$$C_{10,4} = \frac{10.9.8.7.6!}{4!\,6!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!}$$

Seguindo o procedimento do exemplo, vamos deduzir a fórmula do número de combinações simples de *n* objetos tomados *p* a *p*. Então vamos supor que temos *n* objetos distintos e precisamos escolher, não importando a ordem, *p* objetos distintos dentre esses (com $p \leq n$) objetos. De quantas maneiras podemos fazer essa escolha? Para resolver, aplicamos o Princípio Multiplicativo para obter todas as maneiras de escolher um agrupamento de p elementos dentre os n elementos em questão, primeiramente considerando que a ordem desses elementos é importante (arranjo), conforme demonstrado no Quadro 2.

Escolha do 1º elemento	Escolha do 2º elemento	Escolha do 3º elemento	...	Escolha do (p-1)-ésimo elemento	Escolha do p-ésimo elemento
n possibilidades	n-1=n-(2-1) possibilidades	n-2=n-(3-1) possibilidades	...	n-(p-1-1) possibilidades	n-(p-1) possibilidades

Quadro 2: Combinação Simples
Fonte: Matemática na Prática

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, obtemos $n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(p-1))$ maneiras de escolher p elementos dentre n elementos, considerando que a ordem deles é importante.

Sabemos que $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(p-1)).(n-p)!$ Logo, usando a notação fatorial podemos escrever:

$n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(p-1)) = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(p-1)).\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-p)!}}$.

Mas, usando esse procedimento estamos contando alguns conjuntos mais de uma vez. Portanto precisamos retirar esses conjuntos repetidos. Para isso, dividimos o resultado obtido pelo número de permutações dos elementos que escolhemos. Nesse caso, como estamos escolhendo p elementos, dividimos o número $\frac{n!}{(n-p)!}$ por *p!*, resultando em:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

2.2.3 Permutação e arranjos com repetição

Quando certo número de elementos de um conjunto é igual , a permutação dos elementos desse conjunto gera as chamadas permutações com repetição. O número de permutações de um conjunto com n elementos em que um elemento repete n_1 vezes, outro se repete n_2 vezes, ..., e outro repete n_k vezes (para $n_1 + n_2 + \cdots n_k$ menor ou igual a n) é dada por: $\boldsymbol{P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$.

Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra "BANANA"?

Se as letras fossem diferentes, a resposta seria $P_6 = 6!$. Com as três letras A e as duas letras N, quando as trocamos entre si, obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto. Isso faz com que, na nossa contagem de 6!, tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes. Na verdade contamos 3!2! vezes a mais pois há 3! modos de trocar as letras A entre si e 2! modos de trocar as letras N entre si. Então a resposta é $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = 60$.

Também temos o caso dos arranjos com repetição, ou seja quando a ordem não é importante, porém pode haver repetição. O número de arranjos com repetição de *n* elementos, tomados *p* a *p* é: $\boldsymbol{AR_{n,p} = n^p}$.

Exemplo: De quantas maneiras distintas podemos colocar 3 cartas em 5 caixas de coleta de correio?

A situação pode ser vista da seguinte maneira: tenho três cartas em minhas mãos e coloquei-as em uma determinada ordem. Seleciono a primeira delas e decido em qual caixa de correio vou colocá-la (5 possibilidades). Em seguida, seleciono a segunda carta e decido em qual caixa de correio vou colocá-la. Também existem 5 possibilidades, pois uma mesma caixa de coleta pode receber mais de uma carta. Finalmente, repito o procedimento com a última carta, também obtendo 5 possibilidades. É possível que as três cartas ocupem a mesma caixa e as outras quatro fiquem vazias. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, há 5.5.5 = 125 possibilidades, ou seja $AR_{5,3} = 5^3 = 125$.

2.2.4 Combinações Completas ou com repetição

As chamadas *combinações completas ou com repetição* são usadas para calcular o número de escolhas que podemos fazer quando selecionamos *p* objetos de um conjunto de *n* objetos, sem que a ordem dos elementos seja relevante e podendo-se repetir a escolha de elementos. Lima (2006) mostra um exemplo de um problema cuja resposta é representada por uma combinação com repetição:

Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$?

Como já foi dito, a resposta deste problema é representada $CR_{n,p}$, que é o número de combinações completas ou com repetição dos *n* objetos tomados *p* a *p*. Vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais + e |. Por exemplo, para a equação x + y + z = 5, as soluções (2,1,2) e (0,0,5) seriam representadas por ++|+|++ e ||+++++, respectivamente. Nessa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada incógnita. Para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com *n-1* barras (para separar *n* incógnitas, usamos *n-1* barras) e *p* sinais +. Então, para formar uma fila com *n-1* barras e *p* sinais +, basta escolher dos *n+p-1* lugares da fila os *p* lugares onde serão colocados os sinais +, o que pode ser feito de $C_{n+p-1,p}$ modos. Portanto, $\boldsymbol{CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}}$.

Exemplo: Uma menina encontra-se no balcão de uma sorveteria que vende 6 opções diferentes de sabores para picolé. Ela tem dinheiro para comprar 3 picolés e pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos pedidos diferentes ela pode fazer?

A resposta não é $C_{6,3} = 20$ ($C_{6,3}$ seria o número de modos de comprar três sorvetes diferentes). Chamando de x_n o número de sorvetes do *n-ésimo* sabor que a menina vai comprar, devemos determinar valores inteiros e não-negativos para $x_n, n = 1,2,3,4,5,6$, tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$. Isso pode ser feito de $CR_{6,3} = C_{8,3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ modos.

O Quadro 3 apresenta um resumo dos tipos de contagem que foram apresentadas nesse capítulo, levando em consideração dois fatos importantes: a ordem dos elementos e a repetição:

	Respeitando a Ordem			
	Simples	Fórmula	Com repetição	Fórmula
Permutação	Ex.: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 4 carros em 4 garagens? Resp.: 4! = 24	O número de permutações de *n* elementos é: $\boldsymbol{P_n = n!}$	Ex.:Quantos são os anagramas da palavra BANANA? Resp.: 60	O número de permutações de um conjunto com *n* elementos em que um elemento repete n_1 vezes, outro se repete n_2 vezes, ..., e outro repete n_k vezes (para $n_1 + n_2 + \cdots n_k$ menor ou igual a n) é dada por: $\boldsymbol{P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$.
Arranjo	Ex.:De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 4 carros em 2 garagens? Resp.:12	O número de Arranjos Simples de *n* elementos, tomados *p* a *p* é: $\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$	Ex.:De quantas maneiras distintas podemos colocar 3 cartas em 5 caixas de coleta de correio? Resp.:125	O número de arranjos com repetição de *n* elementos, tomados *p* a *p* é: $\boldsymbol{AR_{n,p} = n^p}$
	Quando a ordem não é importante			
Combinação	Ex.: Quantas saladas de frutas com 4 frutas podemos fazer se dispomos de 10 frutas diferentes? Resp.:210	O número de combinações simples de *n* elementos, tomados *p* a *p*, é dado por: $\boldsymbol{C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$	Ex.: Uma menina encontra-se no balcão de uma sorveteria que vende 6 opções diferentes de sabores para picolé. Ela tem dinheiro para comprar 3 picolés e pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos pedidos diferentes ela pode fazer? Resp.: 56	O número de combinações com repetição de *n* elementos, tomados *p* a *p* é: $\boldsymbol{CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}}$.

Quadro 3: Quadro-resumo - Análise Combinatória
Fonte: Elaborada pela autora

3 Atividades de Ensino

O objetivo desse capítulo é apresentar as atividades de Análise Combinatória que foram desenvolvidas com os alunos do período matutino do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Professor José Nicolau Pirágine, escola estadual da cidade de Jaú, interior do estado de São Paulo. A turma do 6º ano era composta por 28 alunos em 2015. No ano de 2016 o trabalho continuou com a mesma turma que sofreu pequenas mudanças em relação aos alunos, agora no 7º ano, totalizando 24. A equipe gestora autorizou a realização da pesquisa, sendo que o conteúdo abordado "Problemas de Contagem" aparece no 4º Bimestre no quadro de conteúdos do Currículo do estado de São Paulo (2012,p.58), e as atividades foram aplicadas em outubro e novembro, não oferecendo prejuízos ao plano de ensino dessa instituição. No 7º ano, as atividades foram aplicadas como atividades complementares. Além das folhas-atividade, foram realizadas "mágicas" pela professora, com o objetivo de tornar as aulas mais interessantes, unindo o prazer ao ato de aprender. Em nenhum momento foram utilizadas fórmulas.

3.1 Apresentação das atividades realizadas em 2015

Foram aplicadas cinco folhas-atividades intercaladas com mágicas envolvendo Combinatória. As mágicas foram realizadas várias vezes em dias diferentes e todas as folhas-atividades foram corrigidas em aula depois da realização das mesmas.

3.1.1 Descrição da Atividade 1: Mágica do Copo e Princípios Combinatórios

Afim de tornar as atividades de estudo mais prazerosas, e chamar a atenção dos alunos foi realizada a primeira mágica.

Mágica do Copo (SAMPAIO e MALAGUTTI, 2008)

Material (Figura 13):
- 3 copos de plástico (não transparente)
- 4 dados

Figura 13: Material: mágica do copo

A mágica iniciou-se com os copos encaixados um no outro. Um dos dados já estava dentro do copo do meio antes de iniciar a mágica. Foram mostrados os copos já encaixados e em seguida colocados um a um sobre a mesa (virado para baixo), tomando cuidado para o dado que estava no copo do meio não ser descoberto. Em seguida os dados foram colocados, um a um, na frente dos copos. A informação passada aos alunos foi que são 4 dados, onde 1 deles é invisível. (Figura 14)

Figura 14: Professora iniciando a mágica

Em seguida, pede-se para que um aluno coloque um dos dados em cima do copo do meio como mostra a Figura 15. Depois, os outros dois copos são encaixados em cima do copo do meio.

Figura 15: Realização da mágica dos copos

Os copos são levantados, e o dado aparece na mesa. Os copos são colocados novamente na mesma posição e são repetidos os mesmos passos sempre colocando o dado sobre o copo do meio. Isso é feito até que terminem os dados (inclusive o “invisível”). No final teremos quatro dados na mesa. O dado “invisível” torna-se visível. (Figura 16)

Figura 16: Desfecho da mágica

Em seguida inicia-se uma discussão sobre contagem e é apresentada a primeira folha-atividade.

A folha-atividade 1 foi dividida em duas partes. A primeira parte tem por objetivo inicializar o aluno com as primeiras ideias relacionadas com o raciocínio combinatório. (Figura 17)

ATIVIDADES 1- PRINCÍPIOS COMBINATÓRIOS

Ex.: Colorir uma bandeira de 3 listras com 3 cores diferentes – verde, amarelo e azul - de modo que duas listras vizinhas não tenham a mesma cor. Pode-se repetir cores, mas não em faixas vizinhas. Quantas bandeiras diferentes poderemos confeccionar? Não responda apressadamente, a resposta não é 9.

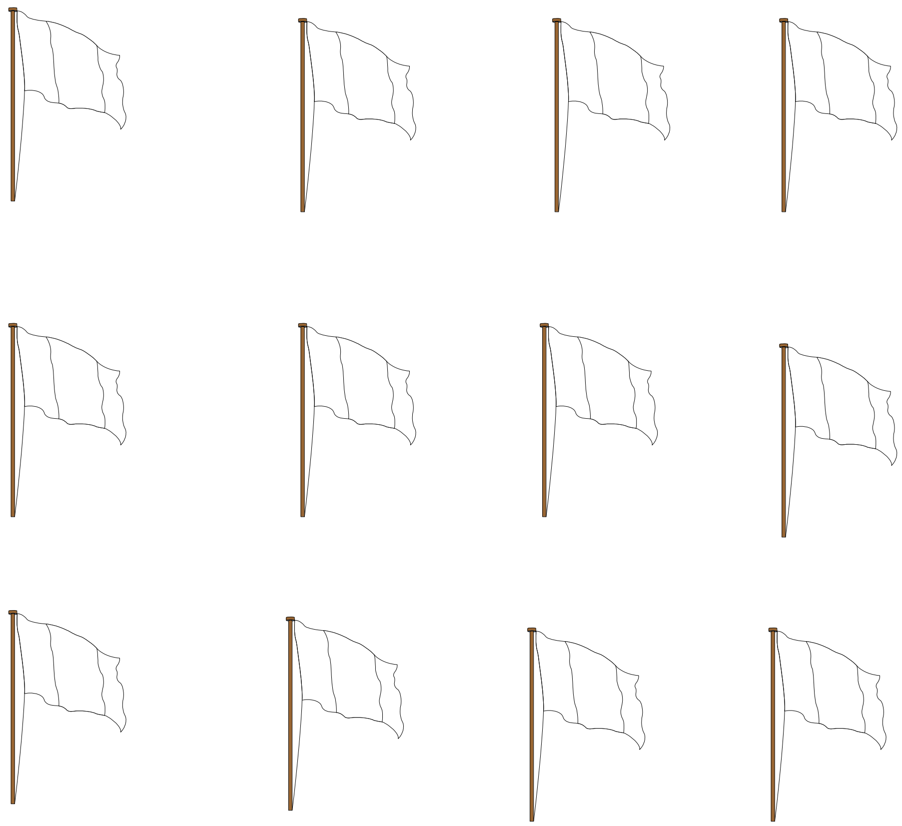


Figura 17: Atividade 1 - Princípios Combinatórios 1ª parte
Fonte: Elaborada pela autora

Desenvolvimento da atividade: Todos os alunos conseguiram realizar a atividade e chegar no resultado correto, porém a maioria pintou as bandeirinhas sem seguir nenhum padrão, ou seja sem nenhum tipo de organização de agrupamentos, o que levou alguns alunos a pintar bandeirinhas repetidas e demorar a perceber o erro cometido. Além da confusão causada pela falta de organização, eles levaram um tempo bastante significativo para realizar a atividade.

Diante disso, foi aplicada a segunda parte da atividade, que tinha por objetivo apresentar uma forma de representação gráfica , no caso a "árvore de possibilidades", para indicar ao aluno alguma padronização de pintura das listras na qual ele poderia ter se baseado enquanto efetuava a pintura das listras das bandeiras. Ao final da "árvore de possibilidades" havia uma sugestão de resolução do problema através do Princípio Multiplicativo. (Figura 18)

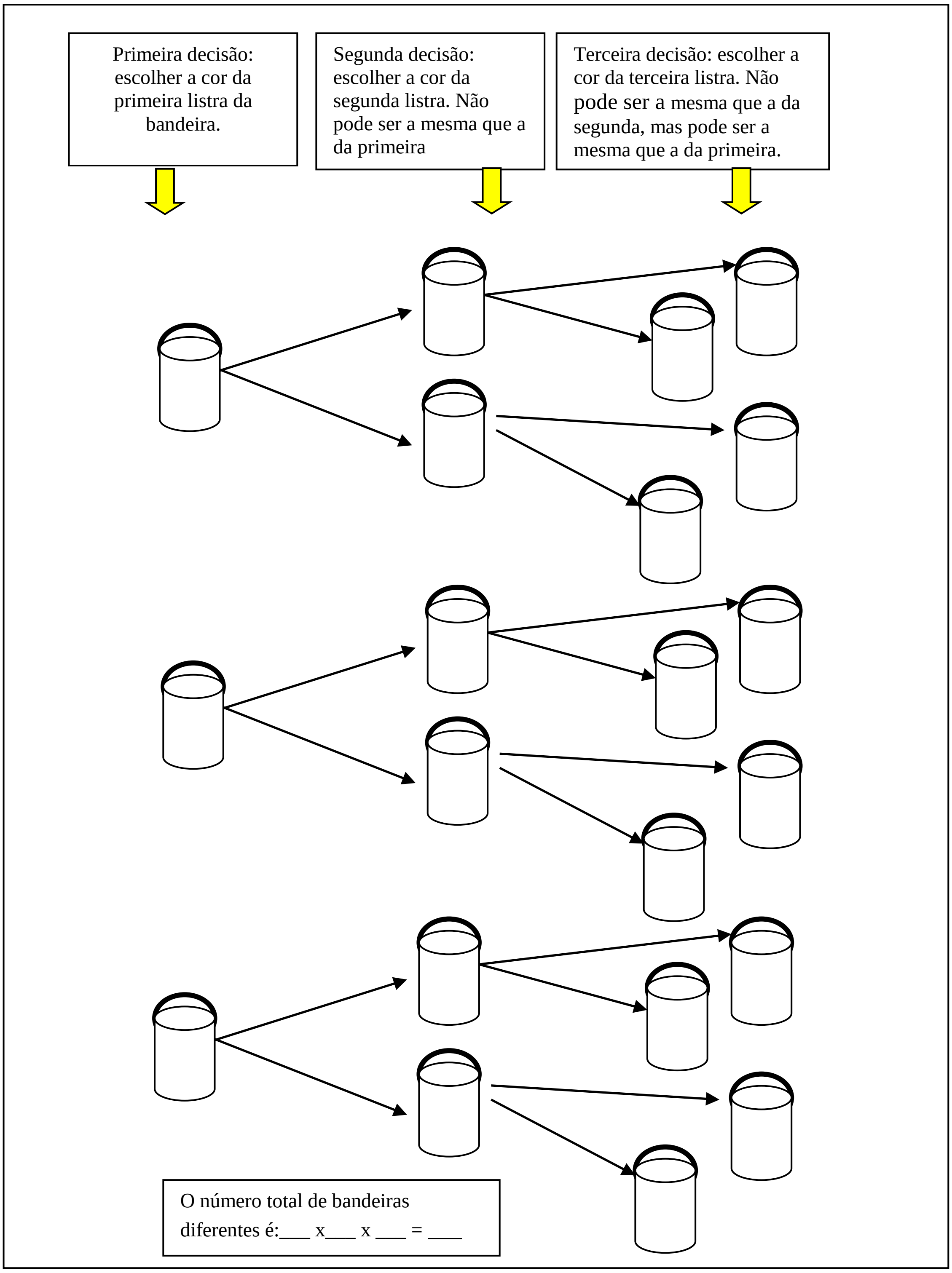


Figura 18: Atividade 1: Princípios Combinatórios 2ª parte

Fonte:Elaborada pela autora

Durante toda a atividade, os alunos foram orientados pela professora. Percebeu-se que todos desconheciam o princípio multiplicativo e a "árvore de possibilidades", e acredita-se que isso ocorreu pelo fato de que não tiveram contato com problemas semelhantes nos anos anteriores.

3.1.2 Descrição da Atividade 2: Mágica das Bolinhas - Semáforo e o Princípio Multiplicativo

A segunda atividade tem como objetivo explorar o semáforo como uma estratégia para ensinar elementos básicos da Análise Combinatória, utilizando o princípio multiplicativo e a "árvore de possibilidades". Antes da aplicação da folha atividade, foi realizada pela professora a "Mágica das Bolinhas", a fim de tornar as atividades de estudo mais atrativas, unindo atividades matemáticas com elementos lúdicos e o prazer ao ato de aprender.

A escolha da sequência de cores de um semáforo (vermelho no topo, amarelo no meio e verde embaixo) é proposital para não confundir o motorista e segue convenções internacionais. O vermelho significa “PARE”, o amarelo “AGUARDE” e o verde “SIGA”. A "mágica" consiste em permutar as cores de um semáforo sem que ninguém perceba.

<u>Mágica das Bolinhas</u> (SAMPAIO e MALAGUTTI, 2008)

Material (Figura 19):

- 4 bolinhas coloridas (2 vermelhas, 1 amarela, 1 verde)
- 1 tubo de plástico transparente feito com garrafa Pet
- 1 tubo de material opaco e um cubo de madeira

Figura 19: Material - Mágica das Bolinhas

Antes de iniciar a mágica, uma das bolinhas vermelhas já é colocada no tubo opaco, enroscada na parte superior do tubo. A bolinha não deve ser vista pelos alunos.(Figura 20)

Figura 20: Bolinha vermelha

A mágica inicia colocando-se o tubo opaco sobre o transparente e, a seguir, colocando-se três bolinhas dentro dos tubos encaixados, na seguinte ordem: primeiro a verde, depois a amarela e finalmente a vermelha.

A professora solicita à um aluno que ele adivinhe qual será a sequência de cores que aparecerá dentro do tubo transparente, depois de retirado o tubo opaco externo. É claro que a resposta foi: a debaixo é verde, a do meio amarela e a de cima vermelha, mas, quando o tubo externo é retirado, surpresa!, a sequência que aparece é vermelho em baixo, verde no meio e amarelo em cima! Isto ocorre porque uma bola empurra a outra para baixo. O que acontece é que a última bola vermelha fica enroscada, mas ninguém percebe isto. A mágica é repetida desde o começo e o mesmo efeito ocorrerá. (Figura 21)

Figura 21: Realização da Mágica das Bolinhas

Por fim, as três bolinhas são retiradas do tubo transparente, os tubos são novamente colocados um dentro do outro, a seguir a bola verde é inserida, depois a amarela. A bola vermelha é colocada dentro do cubo através de um orifício circular que ele possui. (Figura 22)

Figura 22: Bolinha vermelha sendo colocada no cubo

O cubo é aberto pelos lados e, novamente surpresa!, a bola vermelha sumiu! (Figura 23)

Figura 23: A bolinha sumiu!

As abas do cubo são fechadas e o tubo externo é retirado, deixando visualizar o tubo transparente com as bolinhas. Inexplicavelmente a bola vermelha, que sumiu da caixinha, aparece dento do tubo transparente e o que é mais incrível, debaixo das duas outras bolas!

No cubo há um pequeno copo colado internamente a uma das faces, a qual comporta a bolinha vermelha que foi colocada pelo buraco superior. Duas das faces são móveis e, quando abertas, dão a ilusão de que o cubo está vazio, isto é, que a bolinha sumiu!

Os alunos ficaram maravilhados com a mágica.

Logo depois da apresentação da mágica foi proposta a atividade da Figura 24:

Usando as cores vermelho, amarelo e verde, pinte todos os possíveis semáforos. Em cada semáforo você não pode repetir cores. Quantos semáforos diferentes podem ser pintados?

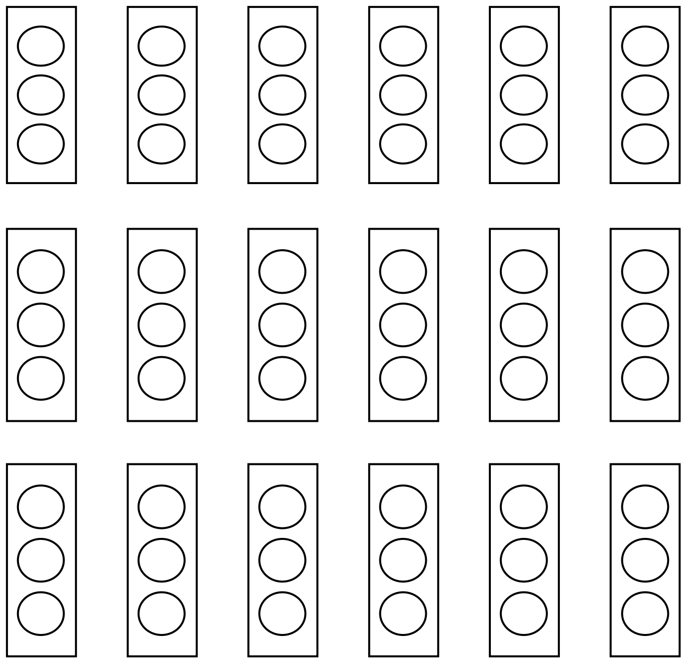


Figura 24: Atividade 2 - Semáforo e o Princípio Multiplicativo 1ª parte
Fonte: elaborada pela autora

Desenvolvimento da atividade: Todos os alunos chegaram no resultado correto através da pintura dos "semáforos", porém, a princípio, nem todos souberam aplicar o princípio multiplicativo corretamente, como mostra algumas discussões dos alunos durante a realização da atividade:

> *Aluno A: São três bolinhas e três cores diferentes, então a resposta é 3 x 3 = 9, mas eu só consegui pintar seis. Será que tá errado?*
> *Aluno B: A resposta é seis, porque 2 x 3 = 6.*

Em seguida foi entregue a segunda parte da atividade 2 (Figura 25) para melhor orientar os alunos a utilizar o princípio multiplicativo e a árvore de possibilidades.

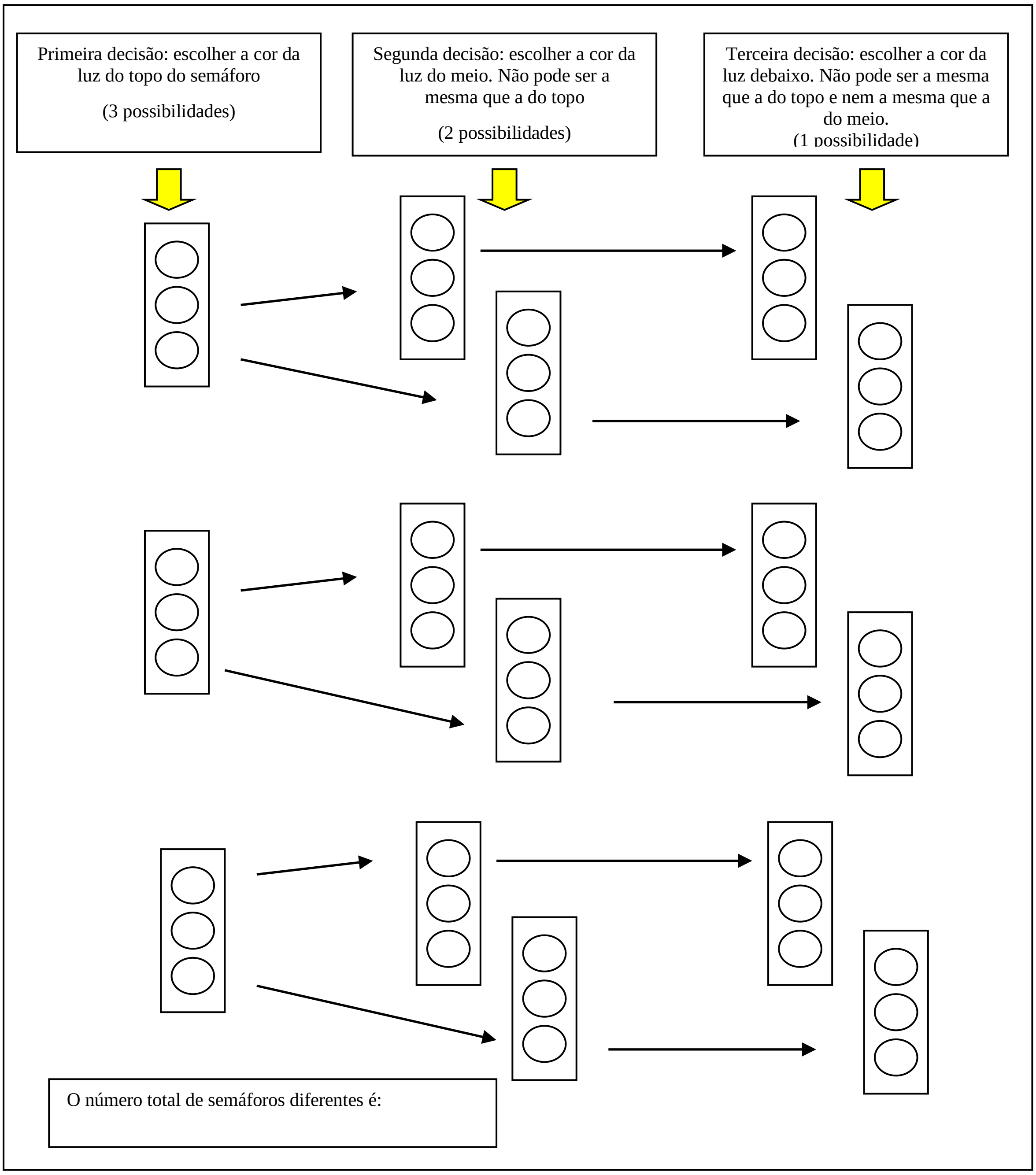


Figura 25: Atividade 2 - Semáforos e o Princípio Multiplicativo 2ª parte

Fonte: Elaborada pela autora

Todos conseguiram utilizar o princípio multiplicativo corretamente, 3 x 2 x 1 = 6 possibilidades.

3.1.3 Descrição da Atividade 3: Árvore de Possibilidades e Tabela de Dupla Entrada

A atividade 3 tem por objetivo apresentar diferentes representações gráficas que podem ser utilizadas para resolver problemas de contagem, de modo que o aluno conheça as características que permitem a construção de cada uma delas, no caso a "tabela de dupla entrada" e a "árvore de possibilidades".

Atividade: Uma indústria de brinquedos fabrica bolas de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande; e 4 cores: amarelo, vermelho, verde e azul. Quantas bolas diferentes a fábrica produz?

Primeiramente use lápis ou canetas coloridas para completar a tabela (Figura 26):

Cores / Tamanhos	amarela	vermelha	verde	azul
○				
○				
○				

Figura 26: Atividade 3 - Tabela de Dupla Entrada
Fonte: Elaborada pela autora

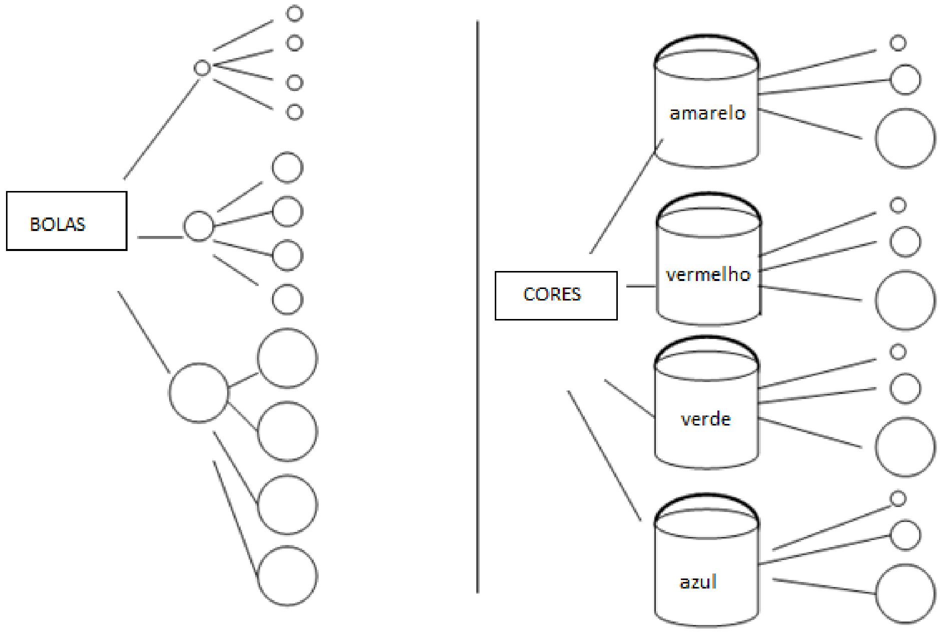
Desenvolvimento da atividade: Os alunos utilizaram lápis de cor para completar a tabela e chegaram facilmente ao resultado. É importante destacar a discussão entre dois alunos:

> *Aluno C: Essa é fácil, nem precisava de tabela, são três bolas e quatro cores, então 3 x 4 = 12 bolas diferentes.*
> *Aluno D: O meu também deu 12, mas acho que não é assim que faz a conta.*

Nesse momento percebe-se que os alunos aprenderam a resolver os problemas de contagem através de representações gráficas, porém nem todos conseguiram resolver através do princípio multiplicativo.

Em seguida foi apresentada a resolução do mesmo problema através da árvore de possibilidades configurada de duas maneiras diferentes.(Figura 27)

Podemos organizar os dados do problema na forma de árvores. Pinte de acordo com a tabela:



O número total de possibilidades é:
___ x___=______

O número total de possibilidades é:
___ x ___ = _____

Figura 27: Atividade 3 - Árvore de possibilidades
Fonte: Elaborado pela autora

A apresentação de duas configurações diferentes de construção da árvore de possibilidades é importante para que o aluno entenda que existe muitas formas de resolver um único problema e que ele pode escolher a mais conveniente. Na primeira, o número de possibilidades é 3 bolas vezes 4 cores e na segunda é 4 cores vezes 3 bolas. Acredita-se que pelo fato de que os alunos já tiveram contato com atividades envolvendo a "árvore de possibilidades " (Atividades 1 e 2), eles não tiveram dificuldade em realizar a atividade 3.

Para finalizar foi apresentada uma atividade elaborada com o objetivo de criar condições que favoreçam o aluno a resolver um problema através do Princípio Multiplicativo. (Figura 28), sendo que todos resolveram corretamente.

Quantas são as rotas de fuga para a pessoa em perigo?

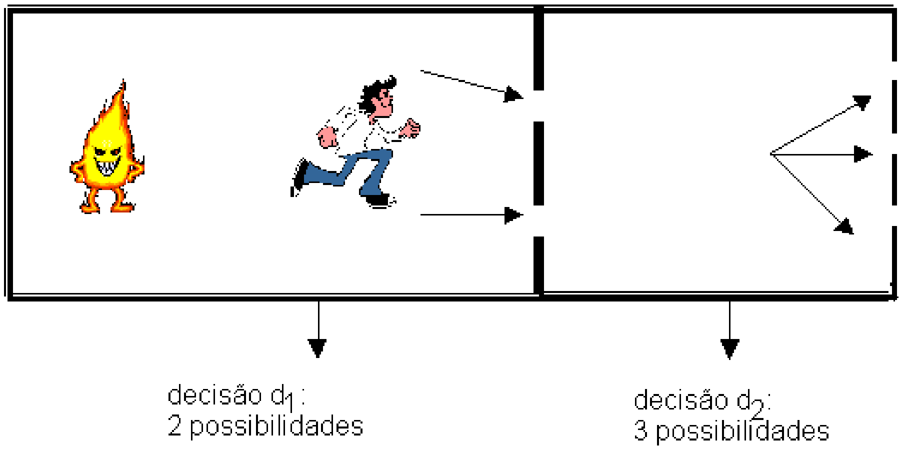


Figura 28: Atividade 3 - Princípios Multiplicativos
Fonte: Elaborada pela autora

3.1.4 Descrição da Atividade 4 - Diversos

Através das atividades anteriores, o aluno pôde compreender os procedimentos necessários para a construção de diversas representações gráficas, as quais mostram todas as possibilidades que atendem à solução para um problema de contagem. A atividade 4 foi dividida em três grupos com três questões cada. Cada aluno deveria resolver da maneira que julgasse mais conveniente. (Figuras 29, 32 e 34)

Grupo 1:

a) De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 3 carros em 3 garagens?

b) De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 3 carros em 2 garagens?

c) De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 2 carros em 3 garagens?

Figura 29: Atividade 4 - Grupo 1
Fonte: Elaborado pela autora

Quase a totalidade dos alunos resolveu os problemas através da listagem dos casos, sem utilizar o princípio multiplicativo obtendo 6 possibilidades em todos os casos, como pode ser verificado na Figura 30.

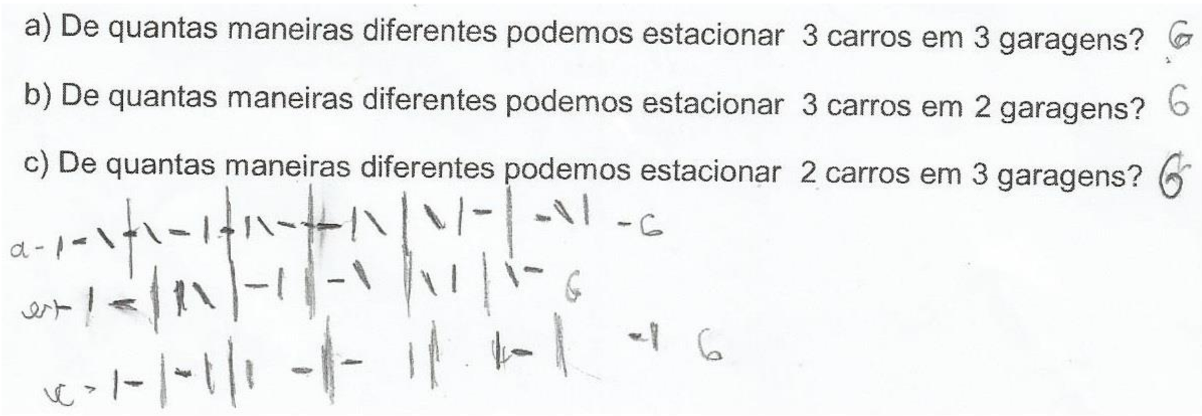


Figura 30: Exemplo de resolução de um grupo de alunos

O grupo de alunos da figura 30 usou "risquinhos" em posições diferentes para representar cada um dos carros e listou todas as possibilidades. Já o aluno da figura 31, assim como a maioria da turma, chamou os carros de *A, B* e *C* e as garagens de *garagem 1, garagem 2 e garagem 3*, e assim foram posicionando os carros nas garagens, listando todas as possibilidades.

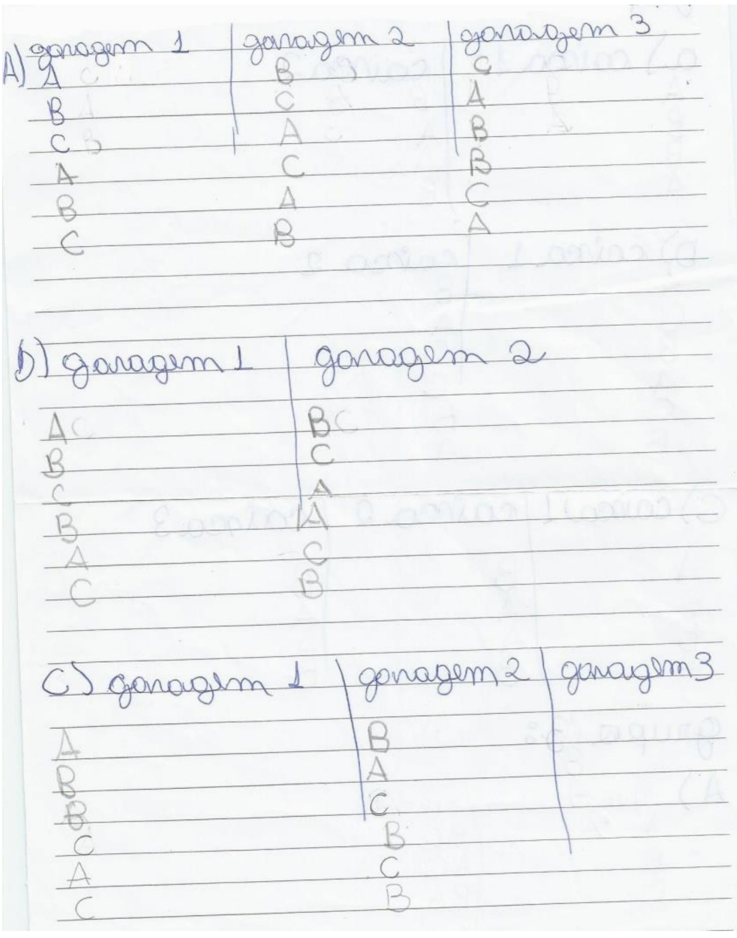


Figura 31: Exemplo de resolução de outro grupo de alunos

A Figura 32 apresenta a descrição da atividade relativa ao grupo 2.

Grupo 2:

a) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 2 cartas em 2 caixas de coleta?

b) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 3 cartas em 2 caixas de coleta?

c) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 2 cartas em 3 caixas de coleta?

Figura 32: Atividade 4 - Grupo 2
Fonte: Elaborado pela autora

Inicialmente os alunos resolveram a atividade considerando que caberia apenas uma carta em cada caixa de correio assim como o grupo 1 que cabe apenas um carro em cada garagem. Apenas depois da orientação da professora eles perceberam que em uma caixa de correio cabe mais do que uma carta. (Figura 33)

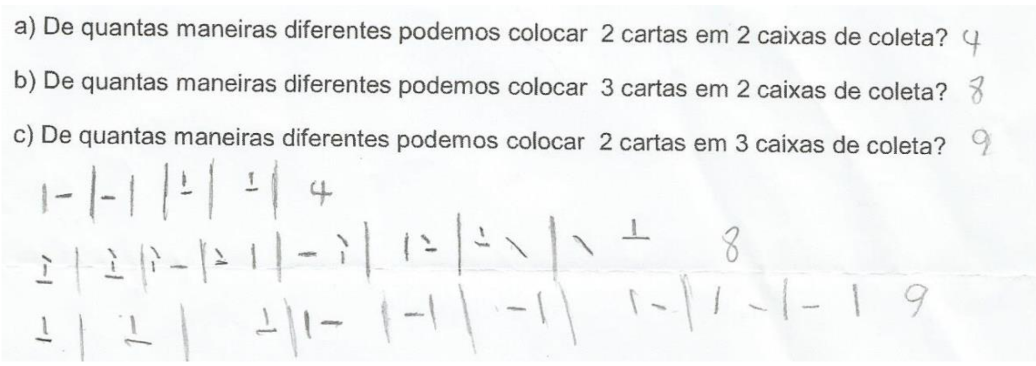

a) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 2 cartas em 2 caixas de coleta? 4
b) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 3 cartas em 2 caixas de coleta? 8
c) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 2 cartas em 3 caixas de coleta? 9

Figura 33: Resolução apresentada por um grupo de alunos

Na Figura 34 podem ser observadas atividades do grupo 3, e na Figura 35 a solução apresentada por um grupo de alunos.

Grupo 3:

a) De quantas maneiras 3 pessoas podem ficar alojadas em 2 quartos, com duas pessoas no primeiro quarto e uma pessoa no segundo?

b) Quantas saladas de frutas podemos fazer utilizando-se 3 frutas diferentes, se dispomos de 4 tipos de frutas?

c) De quantos modos diferentes podemos comprar 3 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerantes?

Figura 34: Atividade 4 - Grupo 3
Fonte: Elaborado pela autora

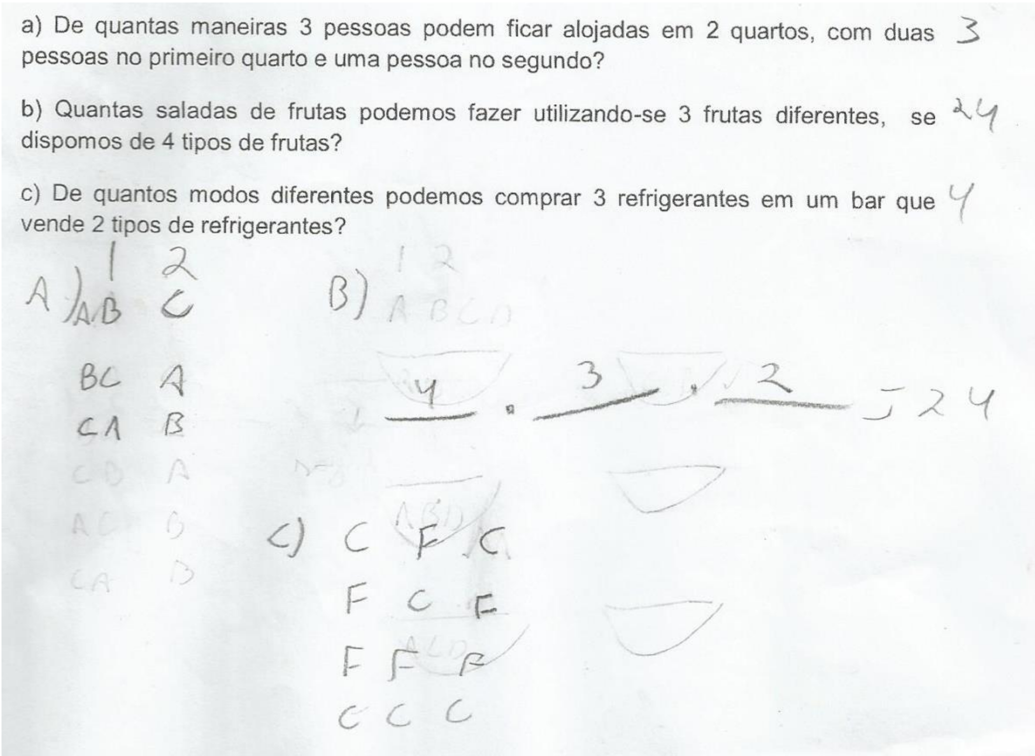


Figura 35: Resolução apresentada por um grupo de alunos

A maioria dos alunos utilizou o Princípio Multiplicativo para resolver o item *b*, enquanto os outros exercícios foram resolvidos através de enumeração de casos. Após serem questionados sobre o motivo de utilizarem o Princípio Multiplicativo apenas no caso do problema da salada de frutas, as respostas foram bastantes semelhantes:

> *Aluno E: Enumerando os casos é mais fácil porque assim nós estamos vendo as respostas. Nós até começamos a enumerar as saladas de frutas, mas quando percebemos que o resultado seria grande, achamos melhor fazer pelo Princípio Multiplicativo.*

3.1.5 Descrição da Atividade 5: Questões OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. (OBMEP, 2015)

A atividade 5 foi elaborada com questões das provas da OBMEP, envolvendo o raciocínio combinatório. A atividade foi feita em dupla e a correção da atividade na lousa foi realizada pelos próprios alunos com a ação da professora. (Figuras 36 à 43)

A Figura 36 traz a questão 13 da OBMEP 2013.

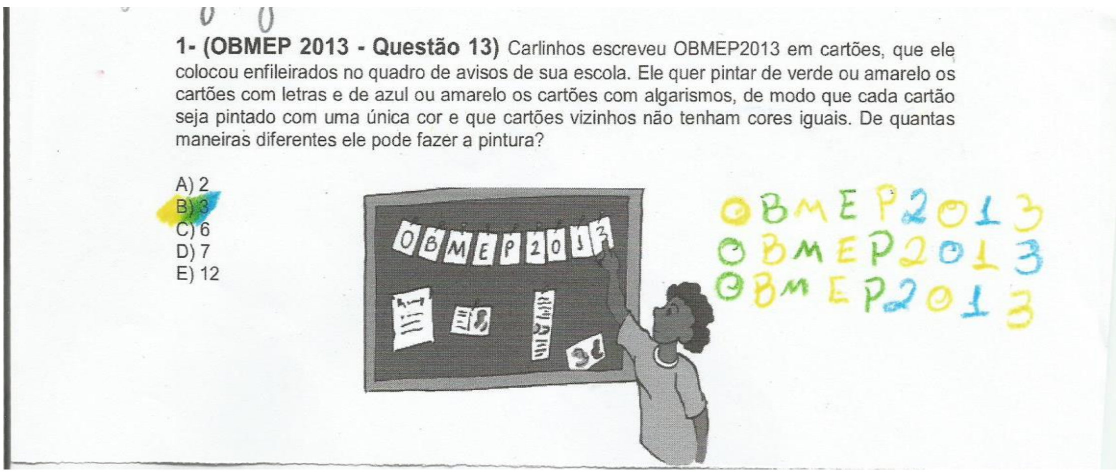
1- (OBMEP 2013 - Questão 13) Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

A) 2
B) 3
C) 6
D) 7
E) 12

Figura 36: Atividade 5 - Questão 1
Fonte: OBMEP

Os alunos não tiveram dificuldades para resolver essa atividade, todos acertaram.

Solução: Carlinhos pode pintar P de verde ou amarelo. Se ele pintar o P de amarelo, ele só poderá pintar o 2 de azul. No total, ele pode pintar o 2 e o P de 2+1=3 maneiras diferentes. Isso feito, as outras letras e os outros algarismos só podem ser pintados de uma única cor, ou seja, Carlinhos pode pintar o letreiro de 3 maneiras diferentes. Indicando amarelo por A, Azul por Z e verde por V, essas maneiras são VAVAVZAZA, VAVAVAZAZ e AVAVAZAZA.


1- (OBMEP 2013 - Questão 13) Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

A) 2
B) 3
C) 6
D) 7
E) 12

Figura 37: Resolução apresentada por uma dupla de alunos

A Figura 38 traz a questão 13 da OBMEP 2012.

2 - (OBMEP 2012 -Questão 13) De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 9

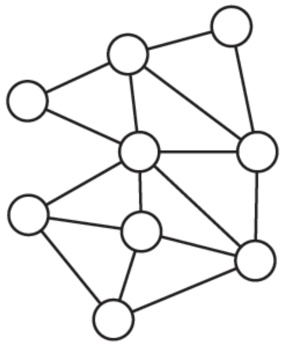


Figura 38: Atividade 5 - Questão 2
Fonte: OBMEP

Na questão 2, os alunos apresentaram certa dificuldade na resolução. Foi preciso uma interferência da professora com algumas dicas para que eles conseguissem concluir a questão. Utilizando o Princípio Multiplicativo chegaram ao resultado correto 3x2x1x1x1x1x1x1x1=6 possibilidades diferentes.

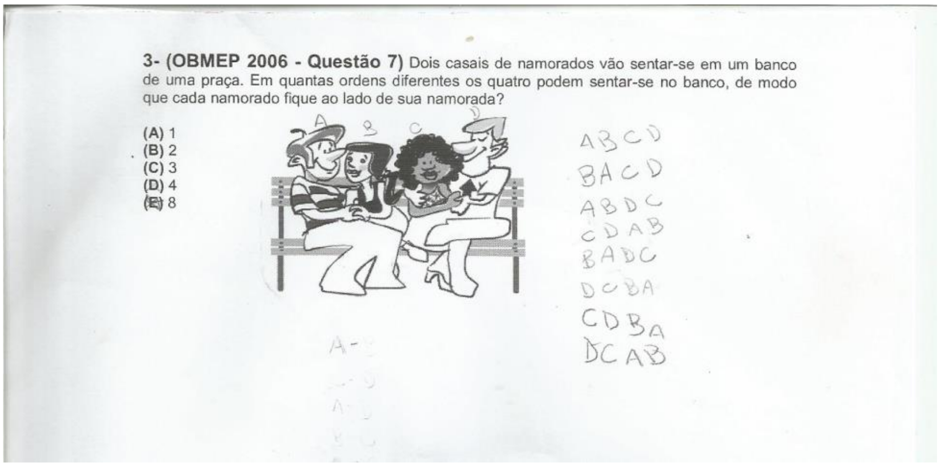
A Figura 39 traz a questão 7 da OBMEP 2006.

3- (OBMEP 2006 - Questão 7) Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 8

Figura 39: Atividade 5 - Questão 4
Fonte: OBMEP

Nessa questão, a maioria dos alunos chamou as pessoas de A,B,C e D e listou os casos.



3- (OBMEP 2006 - Questão 7) Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 8

Figura 40: Exemplo de resolução de uma dupla de alunos

A Figura 41 traz a questão 3 da OBMEP 2011.

4- (OBMEP 2011 - Questão 3) Gabriel comprou uma rosa, um cravo e um lírio e quer dar uma flor para cada uma de suas três amigas. Ele sabe que uma amiga não gosta de cravos, outra não gosta de lírios e a terceira não gosta de rosas. De quantas maneiras ele pode distribuir as flores de modo a agradar às três amigas?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

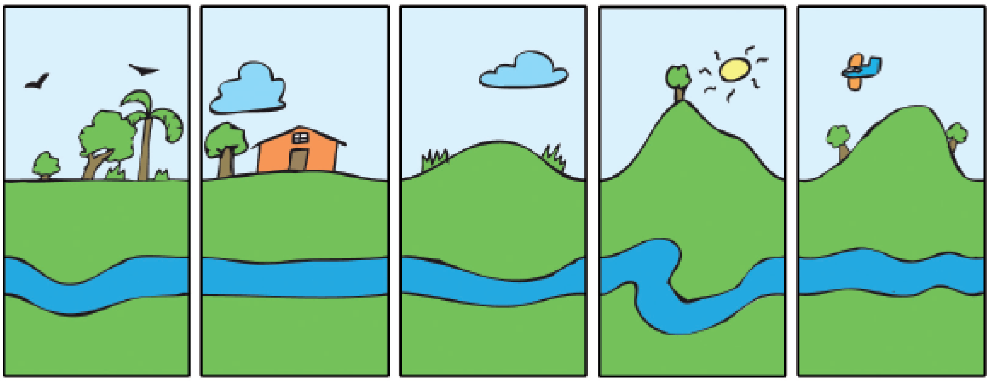
Figura 41: Atividade 5 - Questão 4
Fonte: OBMEP

Para resolver essa questão, os alunos não apresentaram dificuldades. A maioria resolveu através de algum tipo de esquemas e enumeração de casos como mostra um exemplo da Figura 42.

Figura 42: Correção na lousa feita por um aluno

A Figura 43 traz a questão 13 da OBMEP 2011.

5- (OBMEP 2011 - Questão 13) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



A) uma semana
B) um mês
C) dois meses
D) quatro meses
E) seis meses

Figura 43: Atividade 5 - Questão 5

Fonte: OBMEP

Os alunos tiveram um pouco de dificuldades em resolver a questão 5, alguns recortaram as paisagens e foram montando as novas paisagens, mas ao perceber que o resultado seria grande, mudaram a estratégia. Seguindo a orientação da professora resolveram a questão utilizando o Princípio Multiplicativo.

Solução: Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar 5x4x3x2x1=120 paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente 120÷30=4 meses.

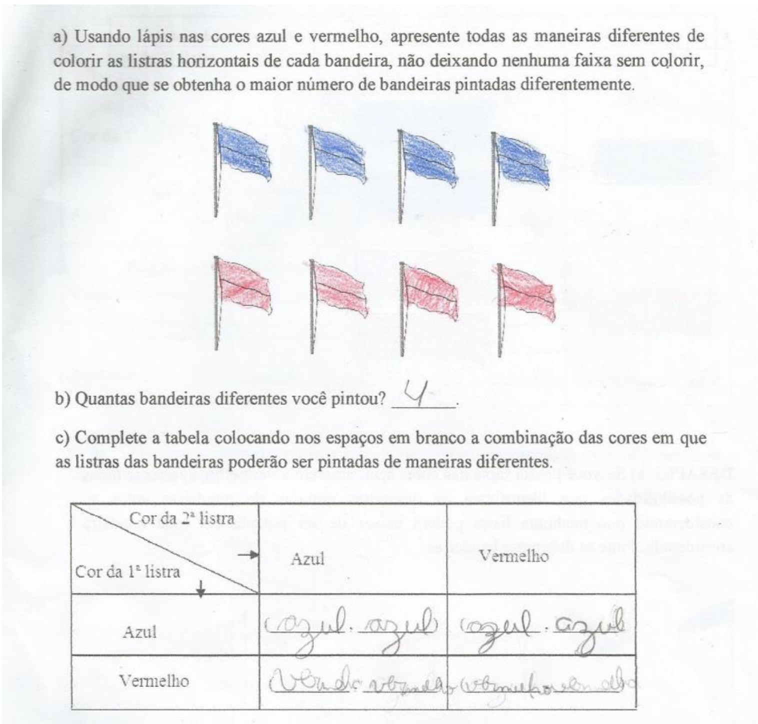
3.2 Apresentação das Atividades realizadas em 2016

Já vimos que existem situações envolvendo contagem em que a ordem dos elementos é importante, e outras, em que a ordem não é importante. Também vimos que existem casos em que há repetição dos elementos e outros que não há repetição. Quando a ordem dos elementos é importante, os problemas envolvem os conceitos de *permutação*. Quando a ordem não é importante, pois não altera o resultado da contagem, os problemas se resolvem usando o conceito de *combinação*. Quando não há repetições, essas permutações e combinações são chamadas simples e quando há repetições são chamadas permutações e combinações com repetições. Pensando nisso, foram elaboradas duas folhas-atividades abordando as quatro situações. As atividades foram aplicadas em dias diferentes, utilizando duas aulas cada. Em nenhum momento foram citadas fórmulas na resolução das situações-problema, nem mesmo foram utilizados os termos "permutação", "arranjo" e combinação". Após a aplicação da primeira folha-atividade foi apresentada a Mágica do Semáforo.

3.2.1 Atividade 1 - Contagem do Número de Bandeiras

Na atividade 1 (Apêndice F) foi apresentada uma atividade de arranjos com repetição. O objetivo era apresentar diferentes representações gráficas que podem ser utilizadas para resolver problemas de contagem e oferecer procedimentos que favoreçam ao aluno identificar os diferentes agrupamentos de objetos envolvidos em cada situação-problema. A atividade foi dividida em duas partes, ambas deveriam ser resolvidas através da pintura e contagem direta das bandeiras, tabela de dupla entrada, esquema e árvore de possibilidades.

Os alunos não apresentaram dificuldades em resolver a primeira parte da atividade. 23 alunos (96%) resolveram corretamente a situação problema. Apenas 1 aluna (4%) errou a questão (Figura 44):


a) Usando lápis nas cores azul e vermelho, apresente todas as maneiras diferentes de colorir as listras horizontais de cada bandeira, não deixando nenhuma faixa sem colorir, de modo que se obtenha o maior número de bandeiras pintadas diferentemente.

b) Quantas bandeiras diferentes você pintou? 4.

c) Complete a tabela colocando nos espaços em branco a combinação das cores em que as listras das bandeiras poderão ser pintadas de maneiras diferentes.

Cor da 2ª listra → / Cor da 1ª listra ↓	Azul	Vermelho
Azul	(azul . azul)	(azul . azul
Vermelho	[illegible]	[illegible]

Figura 44: Atividade realizada incorretamente por uma aluna

Na verdade, a aluna chegou ao resultado correto que são 4 possibilidades, porém de maneira equivocada. Ela não interpretou corretamente o enunciado, a resposta foi quatro, pois havia quatro pares de bandeiras, uma azul e outra vermelha. Ao ser questionada sobre sua resolução ela respondeu: " Acho que não prestei atenção no enunciado, pensei que tinha que pintar todas as bandeiras e que não podia repetir as cores".

A Figura 45 traz a resolução correta dada por um aluno.

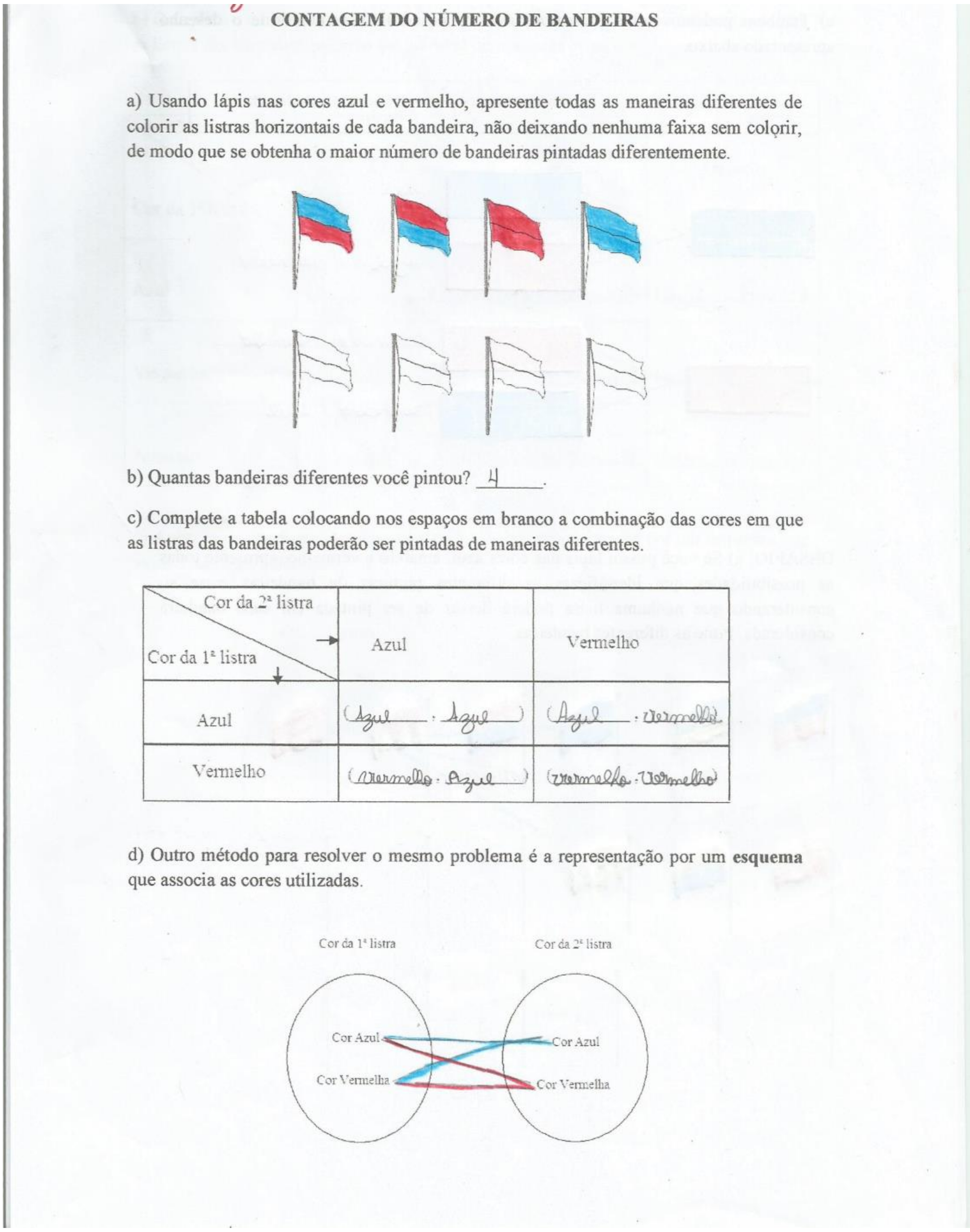


Figura 45: Exemplo resolvido corretamente por um aluno

O item *e* apresenta uma árvore de possibilidades para resolver o mesmo problema. Os alunos preferiram pintar os espaços do que escrever, mas resolveram corretamente (Figura 46). Apenas uma aluna errou (a mesma que errou os outro itens).

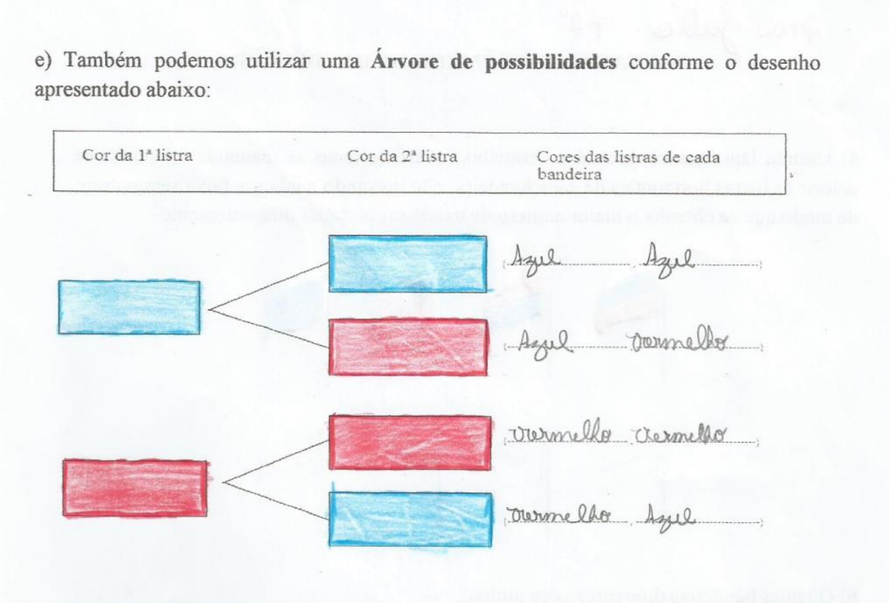


Figura 46: Atividades feitas por um aluno - árvore de possibilidades

A segunda parte da atividade foi aplicada como um desafio. Trata-se da mesma atividade com uma cor a mais disponível para pintar as bandeiras. Todos os alunos resolveram corretamente, inclusive a aluna que havia errado a primeira parte. (Figura 47 à 49).

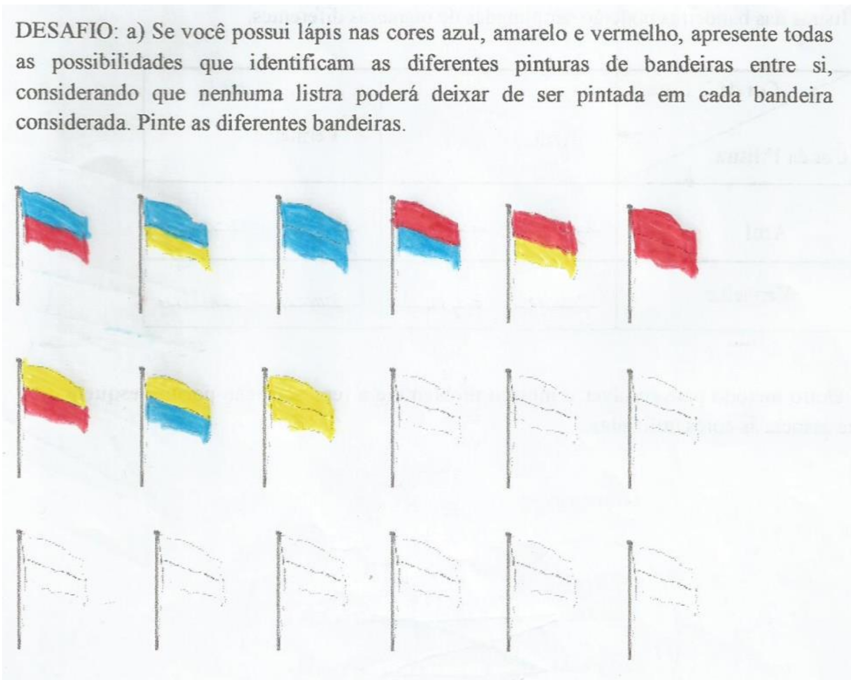


Figura 47: Exemplo de uma atividade resolvida por um aluno

b) Complete a tabela colocando nos espaços em branco a combinação das cores em que as listras das bandeiras poderão ser pintadas de maneiras diferentes.

Cor da 2ª listra / Cor da 1ª listra	Azul	Vermelho	Amarelo
Azul	(Azul, Azul)	(Azul, Vermelho)	(Azul, Amarelo)
Vermelho	(Vermelho, Azul)	(Vermelho, Vermelho)	(Vermelho, Amarelo)
Amarelo	(Amarelo, Azul)	(Amarelo, Vermelho)	(Amarelo, Amarelo)

c) Agora resolva o mesmo problema através de uma representação por um **esquema** que associa as cores utilizadas.

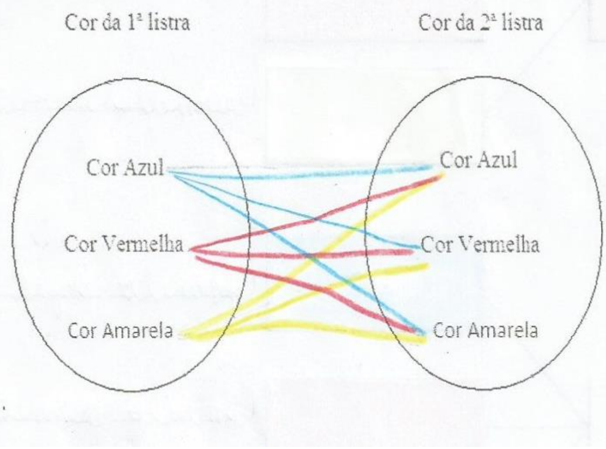
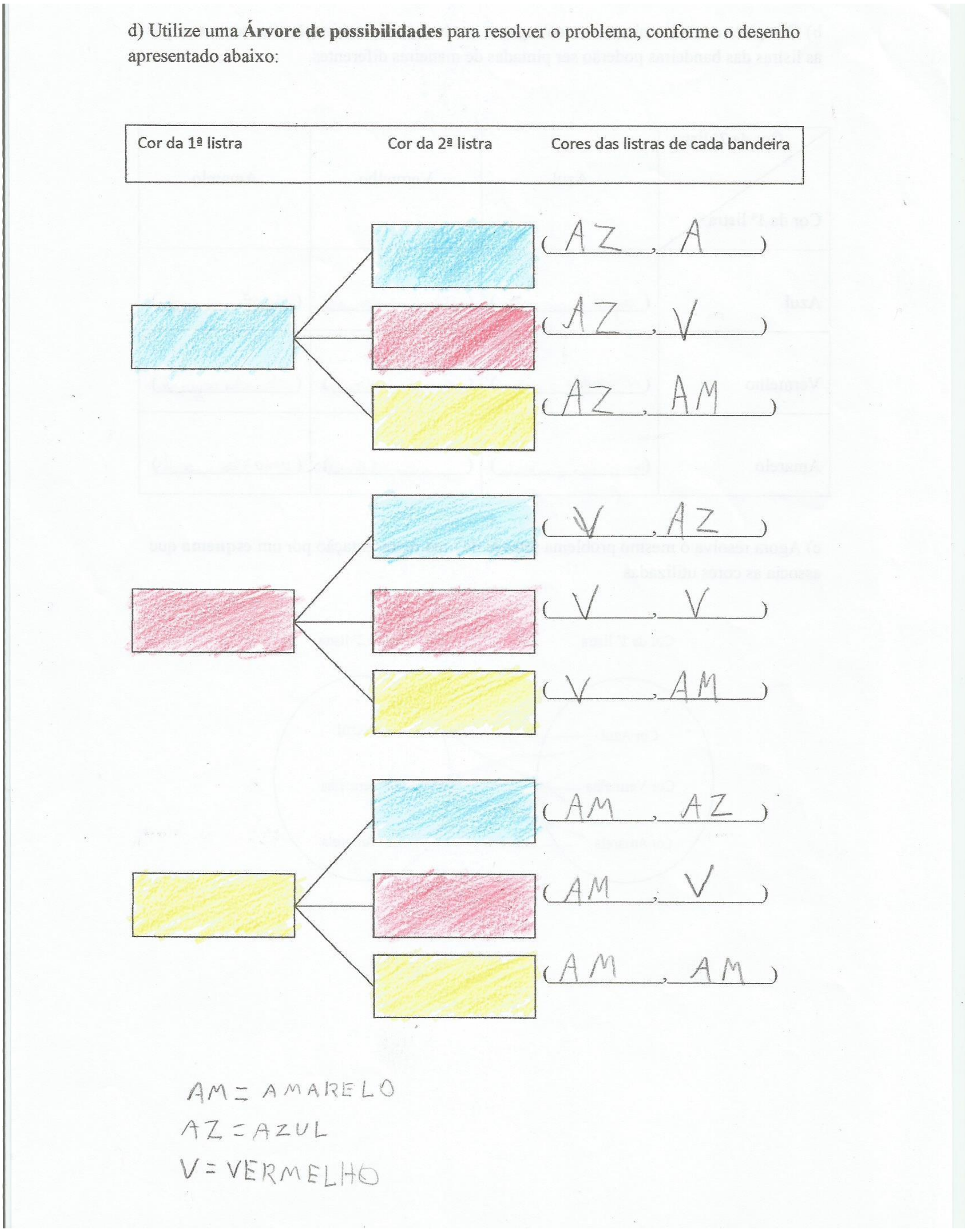


Figura 48: Tabela de dupla entrada e esquema



d) Utilize uma **Árvore de possibilidades** para resolver o problema, conforme o desenho apresentado abaixo:

Cor da 1ª listra	Cor da 2ª listra	Cores das listras de cada bandeira

(AZ, A)
(AZ, V)
(AZ, AM)
(V, AZ)
(V, V)
(V, AM)
(AM, AZ)
(AM, V)
(AM, AM)

AM = AMARELO
AZ = AZUL
V = VERMELHO

Figura 49: Árvore de possibilidades

3.2.2 Atividade 2 - Mágica do Semáforo

Mágica do Semáforo (SAMPAIO e MALAGUTTI, 2008)

Material (Figura 50) :

- 3 cubos pretos de madeira com círculos coloridos (2 vermelhos, 1 amarelo).
- 1 cubo sem duas de suas faces com um círculo na cor verde.
- Um tubo de material opaco
- Um chapéu de mágico
- E.V.A. preto

Figura 50: Material - Mágica dos Semáforos

Antes de iniciar a mágica, um cubo vermelho deve estar encaixado dentro do cubo verde. (Figura 51)

Figura 51: Cubo sendo encaixado

A mágica inicia colocando-se os três cubos dentro do tubo opaco, na seguinte ordem: primeiro a vermelho, depois o amarelo e finalmente a verde, seguindo a ordem de cores do tubo opaco.

A professora solicita à um aluno que ele adivinhe qual a sequência de cores dos cubos que aparecerá, depois de retirado o tubo opaco externo. A resposta, obviamente foi: a debaixo é vermelha, a do meio amarela e a de cima verde, mas, quando o tubo externo é retirado, surpresa!, a sequência que aparece é verde em baixo, amarelo no meio e vermelho em cima! Isto ocorre porque o "cubo" verde desliza para baixo, encaixando no outro cubo vermelho. Portanto, na visão dos alunos, supostamente o dados verde e vermelho trocam de lugar. (Figura 52)

Figura 52: Realização da Mágica do Semáforo

Por fim, os cubos são colocados dentro do chapéu e em seguida são colocados, um a um, dentro do tubo opaco, respeitando a mesma ordem: vermelho, amarelo e verde. Mas dessa vez o "cubo" verde é colocado sem o cubo vermelho dentro (os alunos não devem perceber que o cubo verde é aberto). O cubo vermelho permanece escondido dentro do chapéu. (Figura 53)

Figura 53: Continuação da Mágica do Semáforo

O tubo opaco é retirado e, novamente surpresa!, o cubo vermelho sumiu! Além disso o cubo verde trocou de lugar. Inexplicavelmente o cubo vermelho aparece dentro do chapéu!

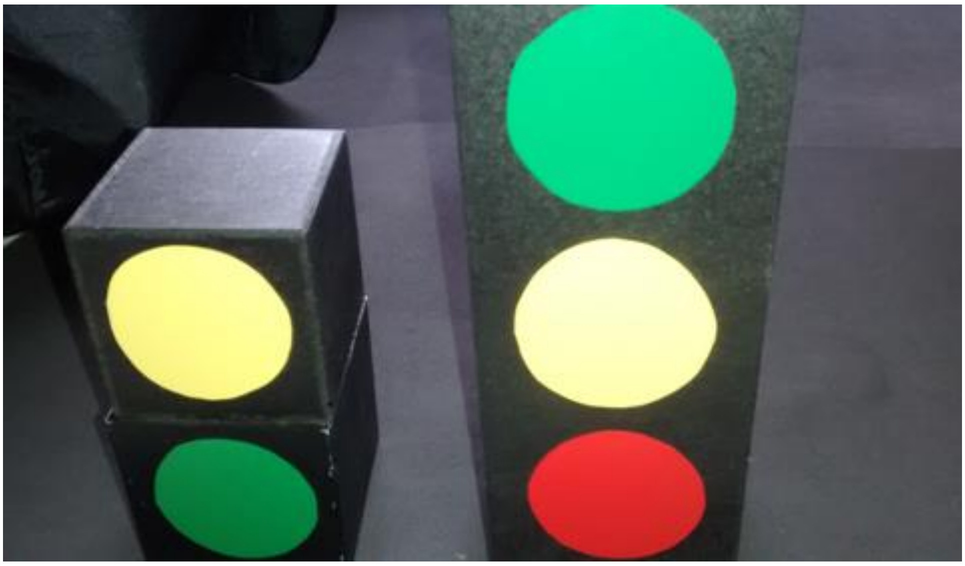
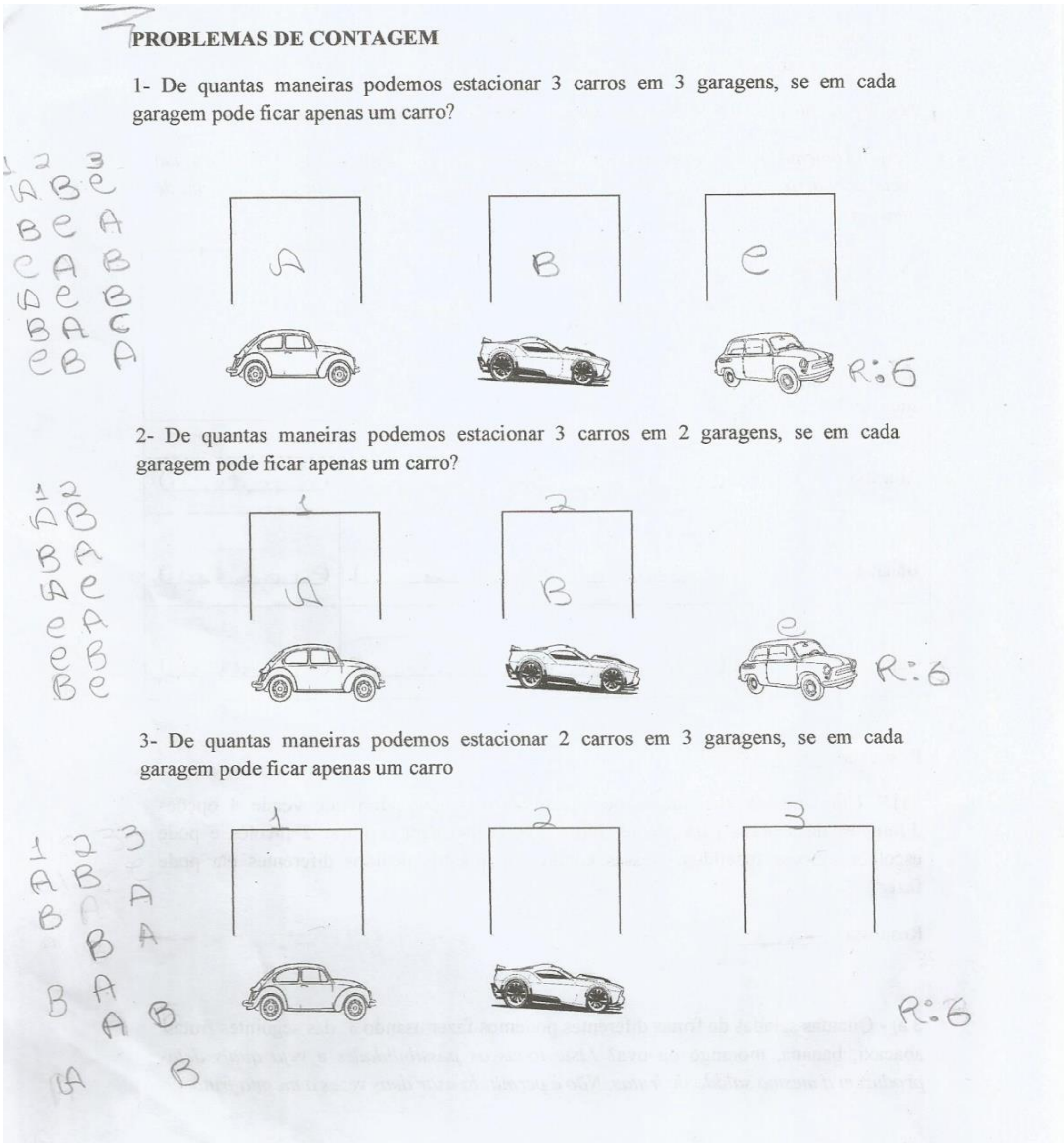


Figura 54: O cubo vermelho sumiu!

3.2.3 Atividade 3 - Problemas de Contagem

A atividade 3 (Apêndice G) inicia com um problema envolvendo Arranjo Simples, onde a ordem é importante e não há repetição. Esse problema também foi resolvido no ano de 2015. Cerca de 67% dos alunos acertaram as três questões e as outras 33% erraram apenas a última questão. Os alunos resolveram através da listagens de casos. (Figura 55)



PROBLEMAS DE CONTAGEM

1- De quantas maneiras podemos estacionar 3 carros em 3 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro?

R: 6

2- De quantas maneiras podemos estacionar 3 carros em 2 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro?

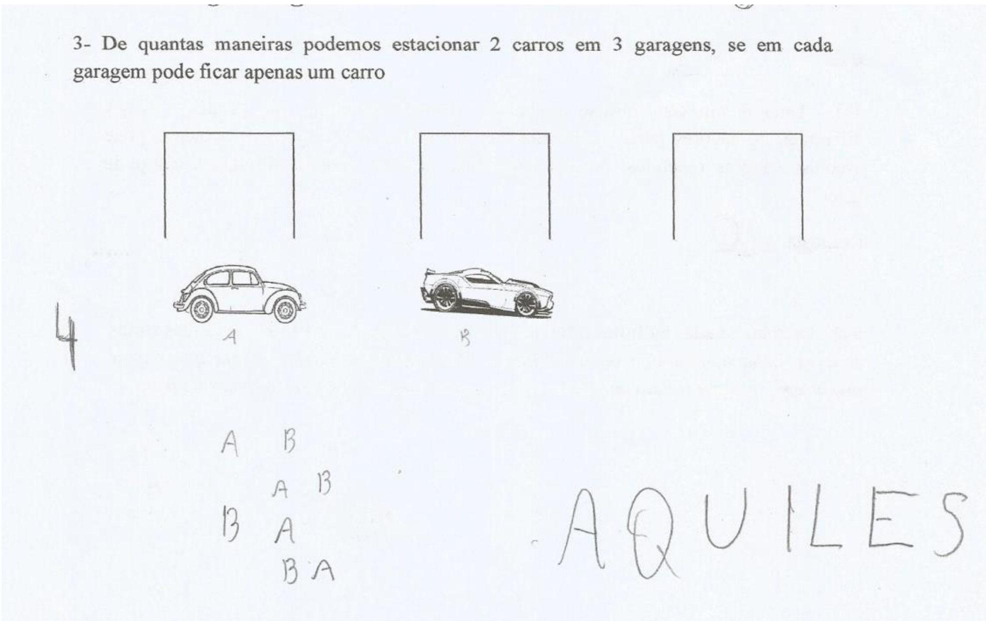
R: 6

3- De quantas maneiras podemos estacionar 2 carros em 3 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro

R: 6

Figura 55: Atividade resolvida corretamente por um aluno

Os erros cometidos na terceira questão foram parecidos. No momento de enumerar, os alunos esqueceram de considerar os casos em que a garagem do meio fica vazia, obtendo como resultado 4 possibilidades. (Figura 56)



3- De quantas maneiras podemos estacionar 2 carros em 3 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro

4

A B

A B

A B

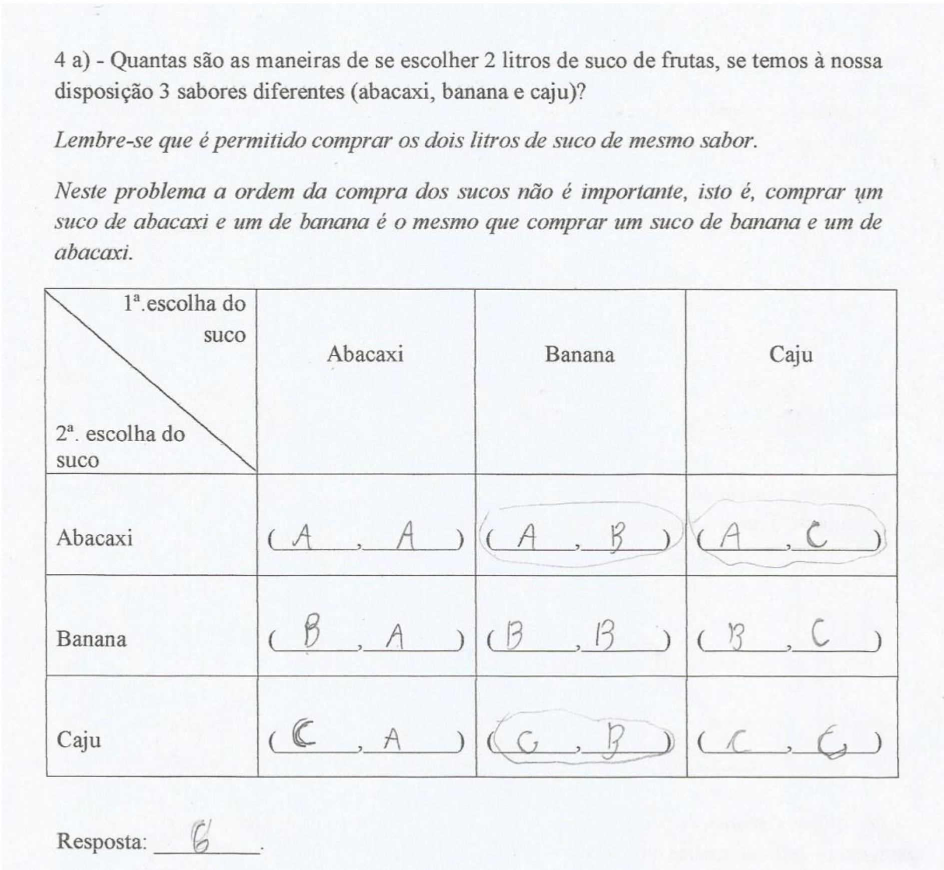
B A

B A

AQUILES

Figura 56: Exemplo da questão 3 resolvida incorretamente

A questão 4 trata de uma situação problema envolvendo combinação com repetição. No item a), mesmo especificando no problema que a ordem não é importante, 10 alunos (42%) erraram a questão. Os outros 14 alunos resolveram corretamente. (Figura 57)



4 a) - Quantas são as maneiras de se escolher 2 litros de suco de frutas, se temos à nossa disposição 3 sabores diferentes (abacaxi, banana e caju)?

Lembre-se que é permitido comprar os dois litros de suco de mesmo sabor.

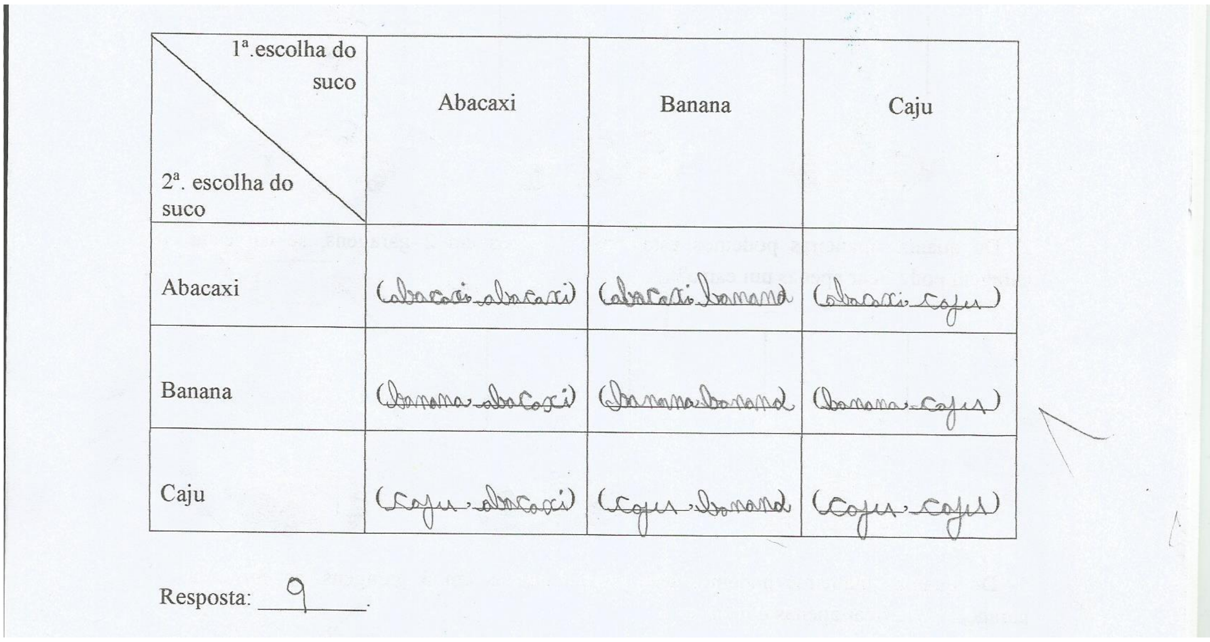
Neste problema a ordem da compra dos sucos não é importante, isto é, comprar um suco de abacaxi e um de banana é o mesmo que comprar um suco de banana e um de abacaxi.

1ª. escolha do suco / 2ª. escolha do suco	Abacaxi	Banana	Caju
Abacaxi	(A , A)	(A , B)	(A , C)
Banana	(B , A)	(B , B)	(B , C)
Caju	(C , A)	(C , B)	(C , C)

Resposta: 6.

Figura 57: Questão 4a) resolvida corretamente por um aluno

O aluno da figura 58 preencheu a tabela com todas as possibilidades e descontou os três casos "repetidos", ou seja, que representam a mesma compra. Os alunos que erraram não descontaram os casos que se repetem obtendo 9 como resultado.

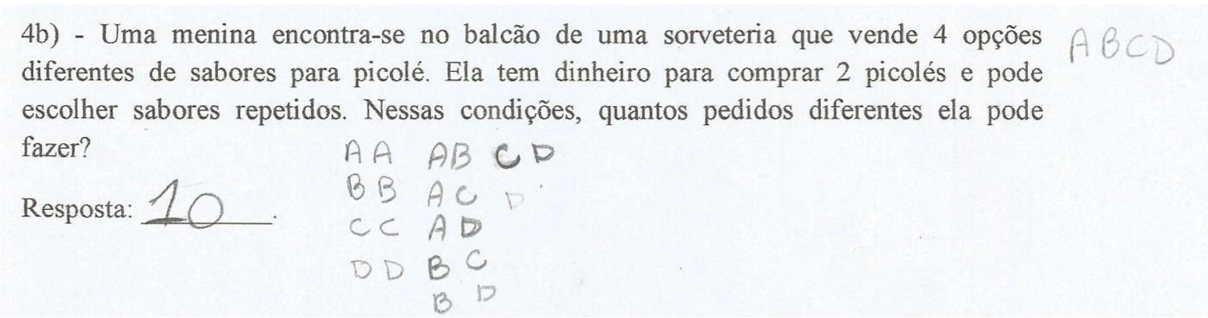


1ª. escolha do suco / 2ª. escolha do suco	Abacaxi	Banana	Caju
Abacaxi	(abacaxi, abacaxi)	(abacaxi, banana)	(abacaxi, caju)
Banana	(banana, abacaxi)	(banana, banana)	(banana, caju)
Caju	(caju, abacaxi)	(caju, banana)	(caju, caju)

Resposta: 9.

Figura 58: Questão 4a) resolvida incorretamente por um aluno

Após o término do item *a* da questão 4, a professora comentou sobre os possíveis erros dos alunos nesse problema e os orientou a ficarem atentos ao fato de a ordem não ser importante. A questão 4b) não ofereceu nenhuma tabela como na questão 4a), apenas o enunciado. Nenhum aluno montou uma tabela para resolver o problema, todos preferiram listar os resultados. A maioria listou os casos já considerando que a ordem dos elementos não importa e que pode haver repetição. Outros listaram todas as possibilidades, depois descontaram os casos repetidos, como foi feito na questão 4a). 18 alunos (75%) resolveram corretamente a questão. (Figura 59)



4b) - Uma menina encontra-se no balcão de uma sorveteria que vende 4 opções diferentes de sabores para picolé. Ela tem dinheiro para comprar 2 picolés e pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos pedidos diferentes ela pode fazer?

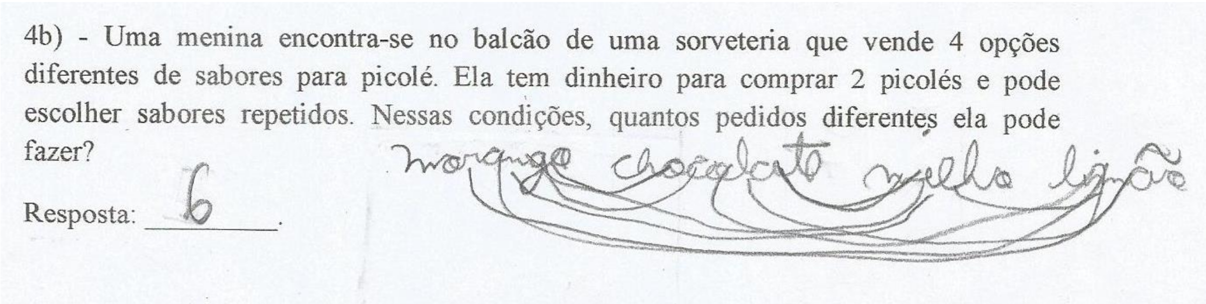
A B C D

AA AB CD
BB AC
CC AD
DD BC
BD

Resposta: 10.

Figura 59: Exemplo de resolução feita por um aluno

Os alunos que erraram esqueceram do fato de que a menina poderia escolher picolés repetidos. O interessante é que todos consideraram que a ordem não era importante. (Figura 60)

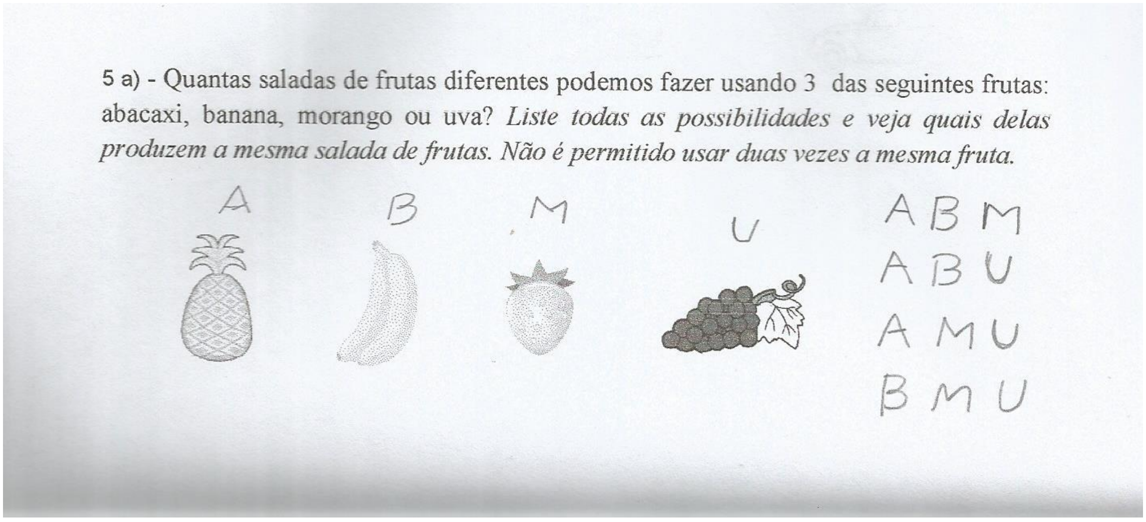

4b) - Uma menina encontra-se no balcão de uma sorveteria que vende 4 opções diferentes de sabores para picolé. Ela tem dinheiro para comprar 2 picolés e pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos pedidos diferentes ela pode fazer?

morango chocolate milho limão

Resposta: 6.

Figura 60: Exemplo de resolução incorreta feita por um aluno

A questão 5 trata-se de uma questão envolvendo combinação simples, ou seja, a ordem dos elementos não importa e não há repetição. Trata-se de uma questão envolvendo saladas de fruta. Junto com o enunciado havia uma árvore de possibilidades para ajudar na resolução.
A maioria achou mais fácil resolver através da listagem dos casos, já considerando os "repetidos". (Figura 61)


5 a) - Quantas saladas de frutas diferentes podemos fazer usando 3 das seguintes frutas: abacaxi, banana, morango ou uva? *Liste todas as possibilidades e veja quais delas produzem a mesma salada de frutas. Não é permitido usar duas vezes a mesma fruta.*

A B M U

ABM
ABU
AMU
BMU

Figura 61: Exemplo de resolução feita por um aluno

Todos preencheram corretamente a árvore de possibilidades, mas alguns erraram no momento de descontar os repetidos. Os que resolveram antes através da listagem de possibilidades, também resolveram corretamente através da árvore de possibilidades, pois já sabiam o resultado. 15 alunos (62,5%) acertaram, enquanto 8 (33,3%) erraram e 1 aluno (4,2%) deixou em branco.

A Figura 62 apresenta o item b da questão 5.

5 b)- Quantos triângulos podemos formar com 5 pontos, sabendo que não existem três pontos alinhados?

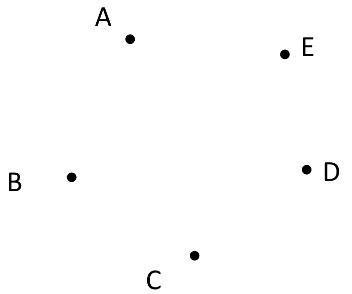


Figura 62: Atividade 2 - Questão 5b)

Todos os alunos resolveram desenhando e contando os triângulos. A maioria, 66,7% dos alunos acertaram a questão, enquanto 25% erraram e 8,3% (2 alunos) deixaram em branco. (Figura 63 e 64)

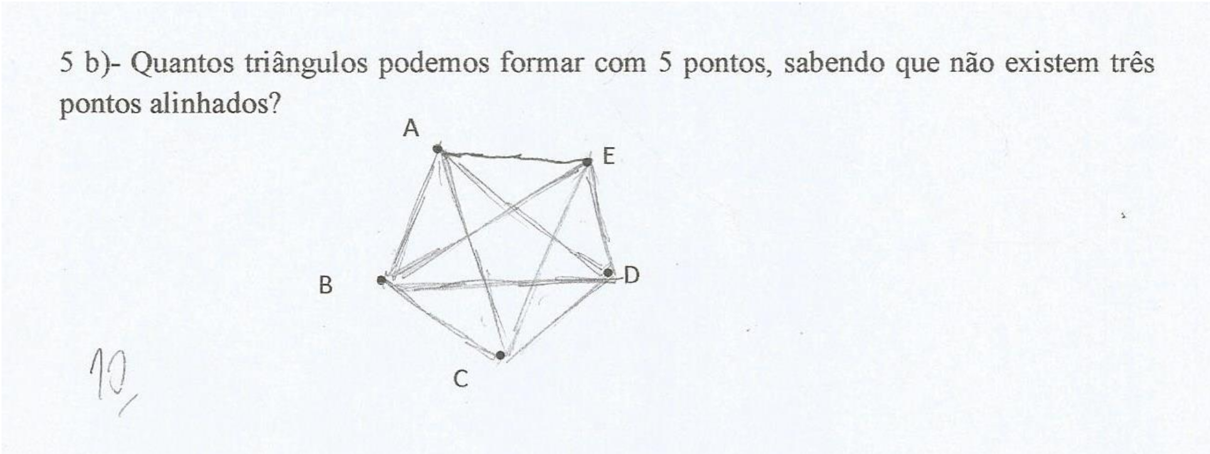


Figura 63: Exemplo de resolução correta realizada por um aluno

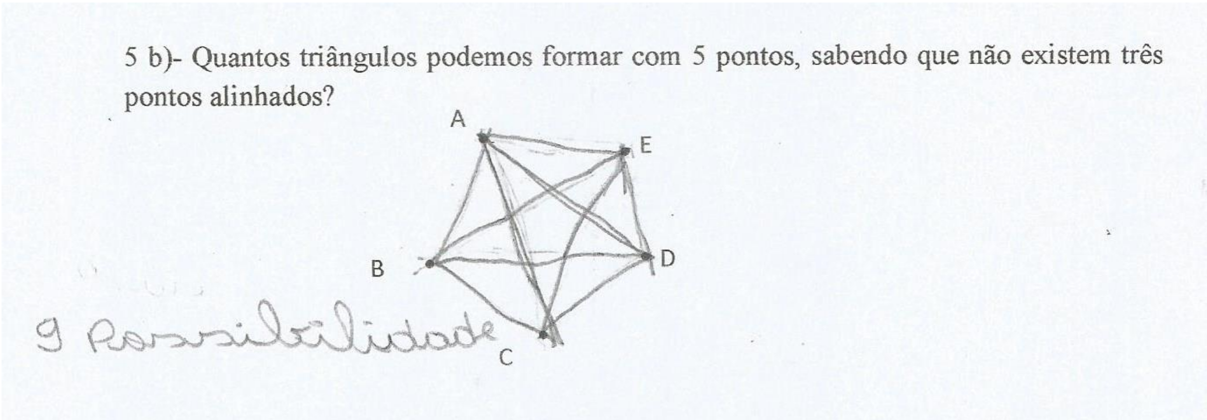


Figura 64: Exemplo de Resolução incorreta realizada por aluno

3.3 Avaliação

A avaliação ocorreu durante toda a aplicação das atividades, mostrando o empenho e dedicação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Após a realização das atividades, foi solicitado aos alunos que se posicionassem em relação às atividades desenvolvidas. (Figuras 65 à 67)

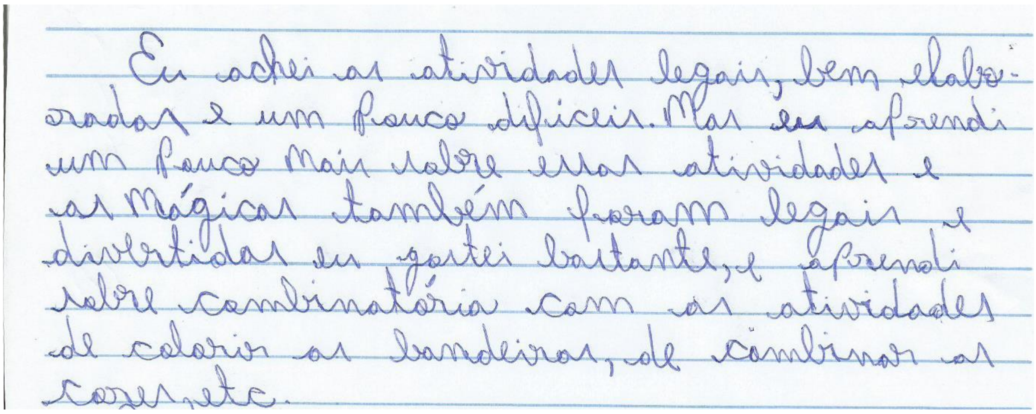
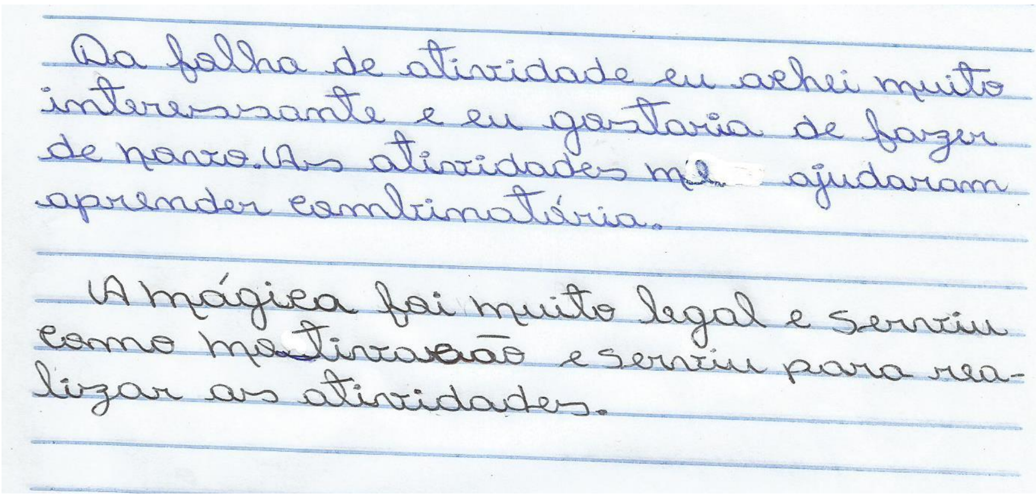
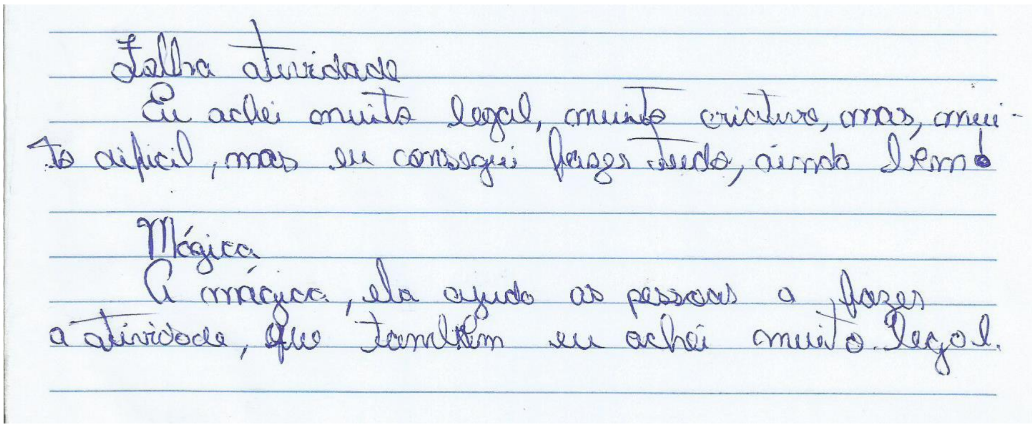

Eu achei as atividades legais, bem elaboradas e um pouco dificeis. Mas eu aprendi um pouco mais sobre essas atividades e as Mágicas também foram legais e divertidas eu gostei bastante, e aprendi sobre combinatória com as atividades de colorir as bandeiras, de combinar as cores, etc.

Figura 65: Comentários de um aluno sobre a realização das atividades


Da folha de atividade eu achei muito interessante e eu gostaria de fazer de novo. As atividades me ajudaram aprender combinatória.

A mágica foi muito legal e serviu como motivação e serviu para realizar as atividades.

Figura 66: Comentários de outro aluno sobre a realização das atividades


Folha atividade

Eu achei muito legal, muito criativo, mas, muito dificil, mas eu consegui fazer tudo, ainda bem

Mágica

A mágica, ela ajudo as pessoas a fazer a atividade, que também eu achei muito legal.

Figura 67: Comentário de outro aluno sobre a realização das atividades

3.4 Resultados

A proposta central desse trabalho foi desenvolver o raciocínio combinatório de uma maneira atrativa com atividades contextualizadas utilizando folhas atividades e recursos envolvendo mágicas, as quais visam despertar a curiosidade e o interesse em aprender Combinatória.

Durante a realização das atividades, notou-se que os alunos se sentiram motivados, relacionando o conteúdo de Análise Combinatória com uma prática divertida através da mágica, ou seja, aliaram o prazer ao ato de aprender. Eles demonstraram bastante entusiasmo na realização das atividades, principalmente nos dias que tinha a mágica. Percebeu-se que todos desconheciam o princípio multiplicativo e a "árvore de possibilidades", e acredita-se que isso ocorreu pelo fato de que não tiveram contato com problemas semelhantes nos anos anteriores.

A proposta didática com o uso das folhas-atividades alcançou a maioria dos alunos, que se empenharam e foram bastante ativos durante as aulas, resultando na aprendizagem de fato do conteúdo de Análise Combinatória. Todas as atividades atingiram os objetivos propostos, validando as propostas do professor. A importância da utilização da mágica como recurso didático se dá por ser uma prática lúdica que motiva os alunos a aprender, favorecendo a criatividade na elaboração de estratégias de resolução. Como foi mostrado no capítulo anterior, os próprios alunos disseram que a mágica serviu como motivação para realizar as atividades e que de fato aprenderam o conteúdo de Combinatória.

6. Considerações Finais

O principal objetivo desse trabalho foi tratar o assunto de Combinatória com a aplicação de atividades contextualizadas através de folhas-atividades e o uso de recursos envolvendo mágicas, na qual despertar a curiosidade e interesse em aprender Combinatória na resolução de problemas. Com isso, apresentamos várias atividades que podem ser utilizadas no Ensino Fundamental com a intenção de despertar uma aprendizagem mais eficiente e prazerosa.

Inicialmente analisamos os documentos oficiais - PCNs, Currículo do Estado de São Paulo, os Cadernos do Professor e Caderno do Aluno, e o quadro de conteúdos dos livros do PNLD - no que diz respeito ao conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Fundamental. Verificamos que o ensino de problemas de Combinatória estão presentes nos PCNs e no Currículo do Estado de São Paulo, mas apesar do Caderno do Professor e Caderno do Aluno, trazer como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, não aparece nenhuma atividade envolvendo problemas de contagem no 4º bimestre do 6º ano, que contemplem as habilidades propostas. Também é notável a ausência de Problemas de Contagem no 6º ano no quadro de conteúdos dos livros do PNLD, apesar do conteúdo estar presente nos documentos oficiais. Diante disso, surgiu a ideia de criar as folhas-atividades com problemas contextualizados que chamassem a atenção dos alunos.

Buscando subsídios teóricos, a fim de obtermos embasamento para a realização das atividades propostas nesse trabalho, no terceiro capítulo analisamos as diferentes formas de representação gráfica que o aluno deve conhecer e saber construir para resolver um problema que envolva raciocínio combinatório, pois tal raciocínio leva um longo tempo para se desenvolver, então situações combinatórias simples podem ser propostas no início da escolarização, de modo a qualificar estudantes com noções iniciais sobre como combinar elementos considerando combinações válidas que atendem a determinadas condições. Com a mesma finalidade, no quarto capítulo analisamos de modo geral o processo de contagem e a teoria da Análise Combinatória mostrando como obter resultados gerais através de fórmulas, a fim de resolver várias classes de problemas, mesmo considerando que muitos problemas podem ser solucionados pela enumeração dos casos, representações gráficas ou através da utilização do Princípio Multiplicativo.

Em seguida, apresentamos a proposta do trabalho e o desenvolvimento das atividades, detalhadamente, caracterizando as aplicações e expondo objetivos e resultados.

Pelas razões apresentadas, concluímos que o uso de atividades contextualizadas utilizando folhas atividades e recursos envolvendo mágicas de fato auxiliaram efetivamente na aprendizagem de Análise Combinatória. Após a realização das atividades, os alunos se sentiram mais confiantes para expor seu raciocínio, apresentar estratégias de resolução e explorar o problema em busca de uma solução adequada.

Referências

BORBA, R.; PESSOA, C.. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ-Cempem-FE-Unicamp**, v.17, n.31, p.105-150, jan/jun. 2009.

BORBA, R.E.S.R.; PESSOA, C.A.S. ; ROCHA, C.A. **Como estudante e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatório**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, Número Especial, p.895-908, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. 6ª edição. Rio de Janeiro. SBM, 2006. 372p.

MORAES FILHO, D.C.; MALAGUTTI, P.L.A. **Matemática na Prática**. Curso de especialização em ensino de matemática para o Ensino Médio. Módulo II - Matemática Discreta. Cuiabá - MT: Central de texto, 2013.

OBMEP. **Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Provas e soluções de todas as edições. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em 10 out. 2015.

PLACHA, K.C.; MORO, M.L.F. **Problemas de Produto Cartesiano, Raciocínio Combinatório e Intervenção do Professor**. Psicologia: Teoria e Pesquisa, jan/mar 2009, vol.25 n.1, pp.007-017. Brasília, 2009.

PNLD 2014: **Guia de livros didáticos: matemática** - Brasília: ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, 2013. 104p. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-apresentacao>. Acesso em 10 mar. 2016.

SAMPAIO, J.C.; MALAGUTTI, P.L.A. **Mágicas com Papel, geometria e outros mistérios**. São Carlos-SP: EdUFSCar, 2014. 164p.

SAMPAIO, J.C.; MALAGUTTI, P.L.A. **Mágicas, Matemática e outros mistérios**. São Carlos-SP: EdUFSCar, 2008. 83p.

SÃO PAULO**. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor**; matemática, ensino fundamental, 6º ano/ Secretaria da Educação - São Paulo: SE, 2014.

SÃO PAULO**. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor**; matemática, ensino médio, 2ª série/ Secretaria da Educação - São Paulo: SE, 2014.

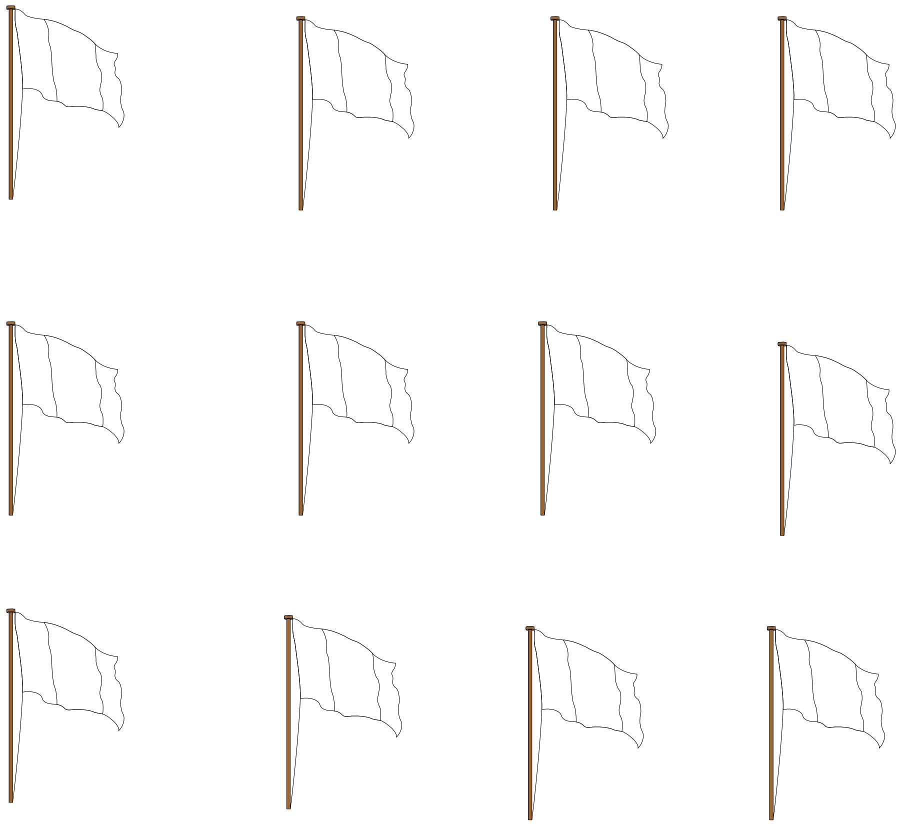
SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. 1. ed. atual. - São Paulo: SE, 2012.72p.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. 173p

APÊNDICE A

ATIVIDADE 1- PRINCÍPIOS COMBINATÓRIOS

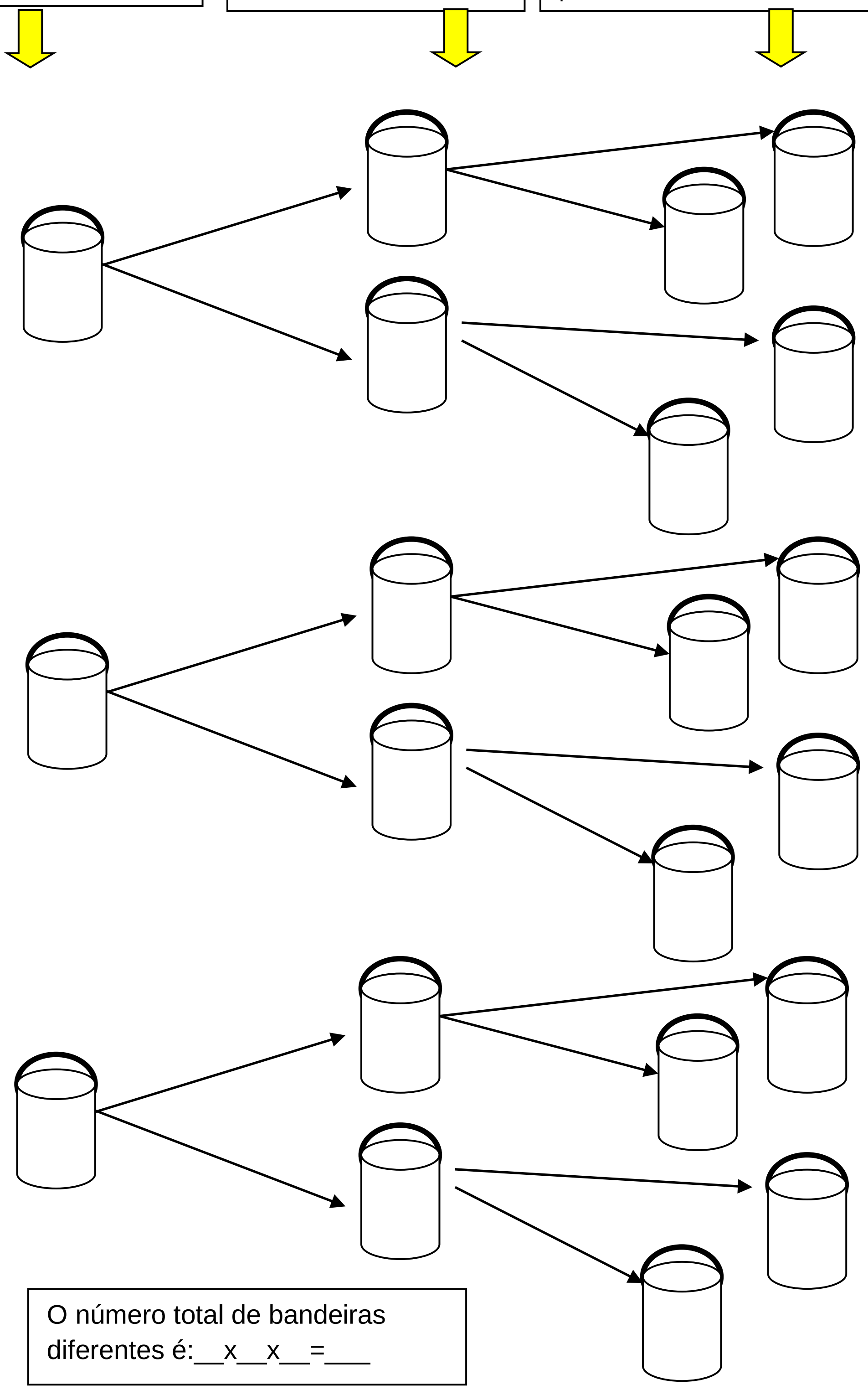
Ex.: Colorir uma bandeira de 3 listras com 3 cores diferentes – verde, amarelo e azul - de modo que duas listras vizinhas não tenham a mesma cor. Pode-se repetir cores, mas não em faixas vizinhas. Quantas bandeiras diferentes poderemos confeccionar? Não responda apressadamente, a resposta não é 9.



Primeira decisão: escolher a cor da primeira listra da bandeira.

Segunda decisão: escolher a cor da segunda listra. Não pode ser a mesma que a da primeira

Terceira decisão: escolher a cor da terceira listra. Não pode ser a mesma que a da segunda, mas pode ser a mesma que a da primeira.

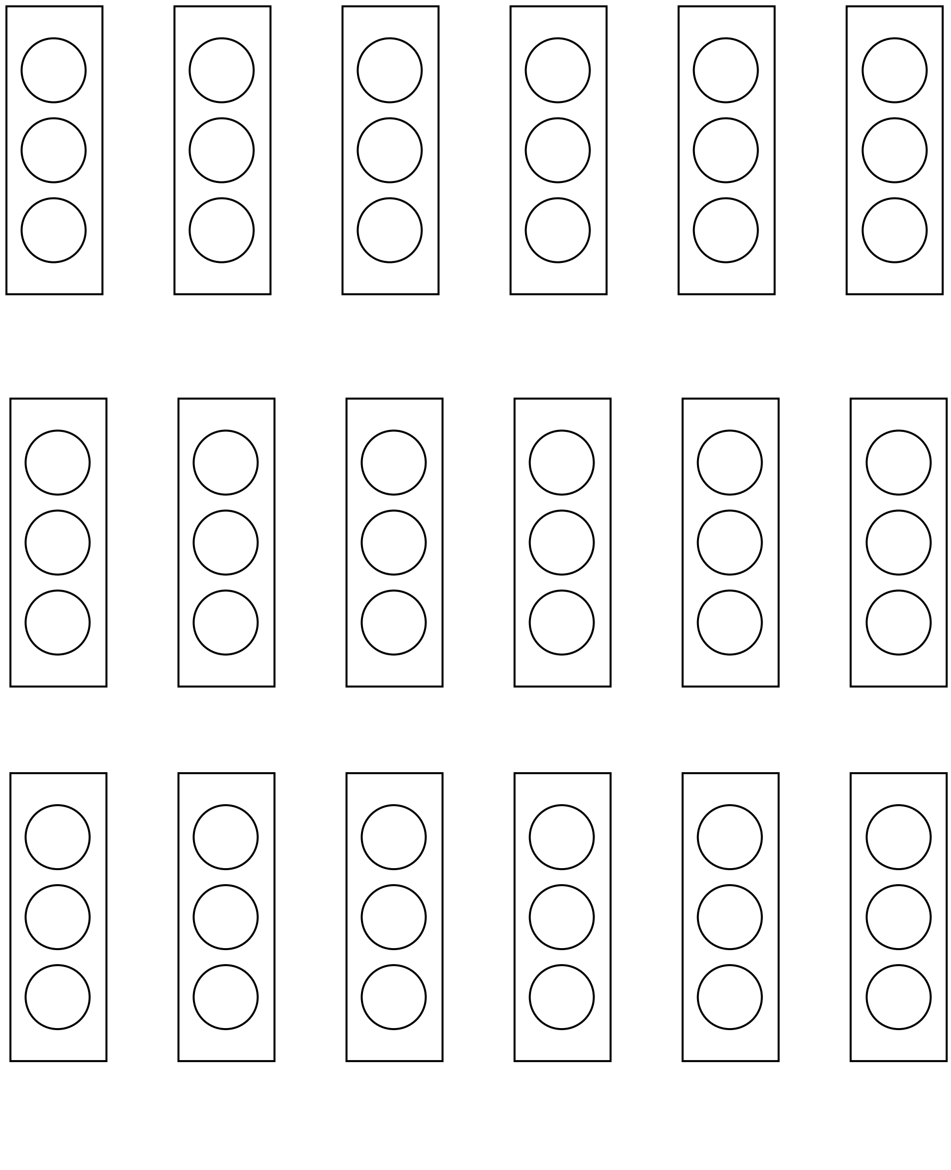


O número total de bandeiras diferentes é:__x__x__=___

APÊNDICE B

ATIVIDADE 2- SEMÁFOROS E O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Usando as cores vermelho, amarelo e verde, pinte todos os possíveis semáforos. Em cada semáforo você não pode repetir cores. Quantos semáforos diferentes podem ser pintados?



Primeira decisão: escolher a cor da luz do topo do semáforo

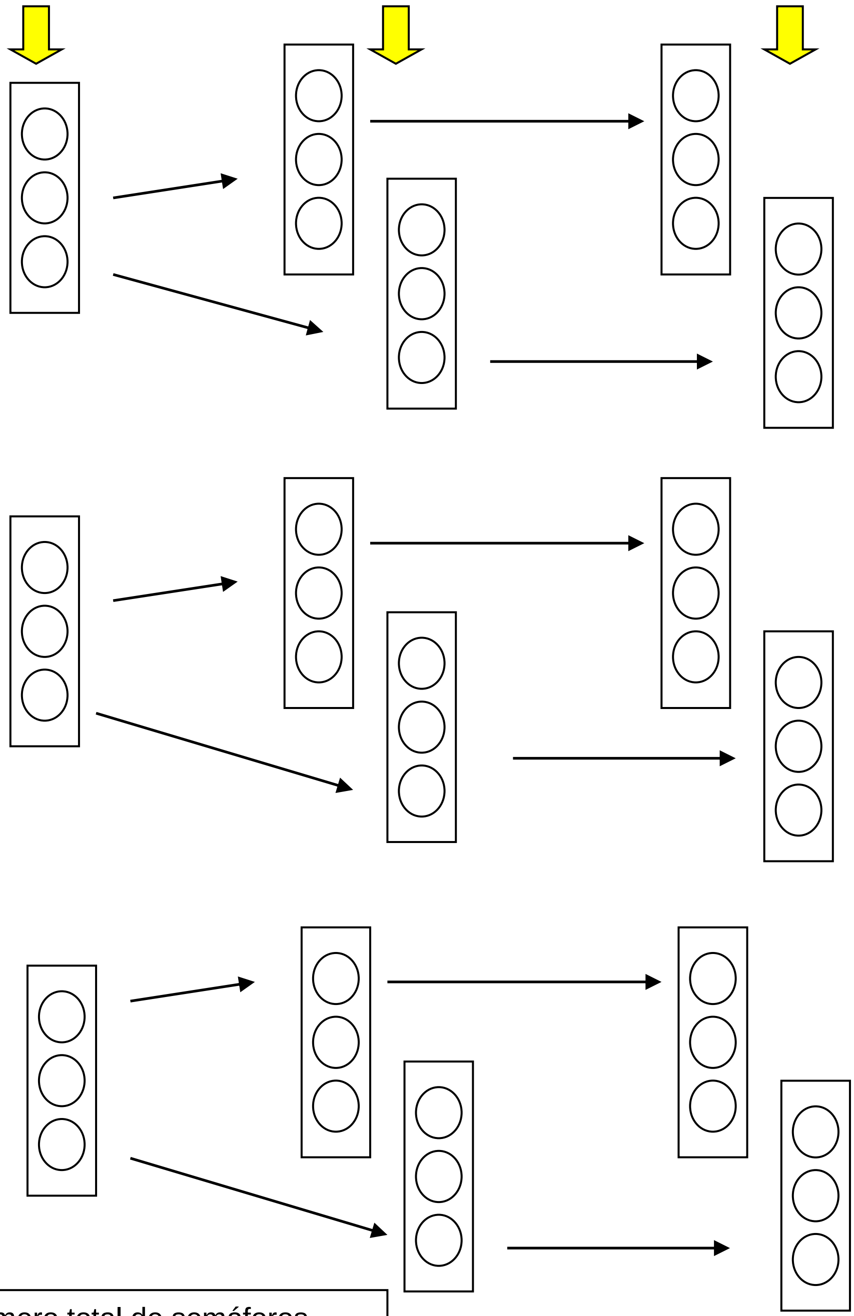
(3 possibilidades)

Segunda decisão: escolher a cor da luz do meio. Não pode ser a mesma que a do topo

(2 possibilidades)

Terceira decisão: escolher a cor da luz debaixo. Não pode ser a mesma que a do topo e nem a mesma que a do meio.

(1 possibilidade)



O número total de semáforos diferentes é: __x__x__=___

APÊNDICE C

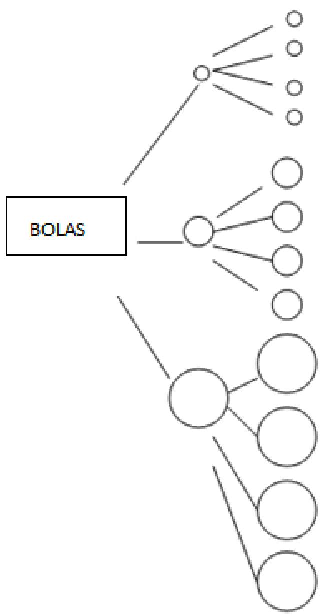
ATIVIDADE 3 - TABELA DE DUPLA ENTRADA E ÁRVORE DE POSSIBILIDADES

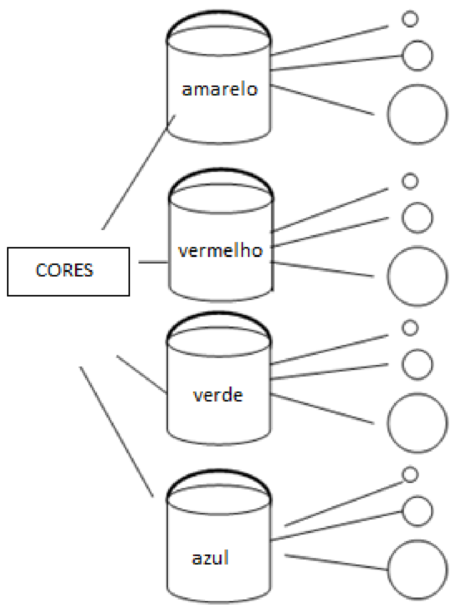
Uma indústria de brinquedos fabrica bolas de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande; e 4 cores: amarelo, vermelho, verde e azul. Quantas bolas diferentes a fábrica produz?

Primeiramente use lápis ou canetas coloridas para completar a tabela:

Cores / Tamanhos	amarela	vermelha	verde	azul

Podemos organizar os dados do problema na forma de árvores. Pinte de acordo com a tabela:



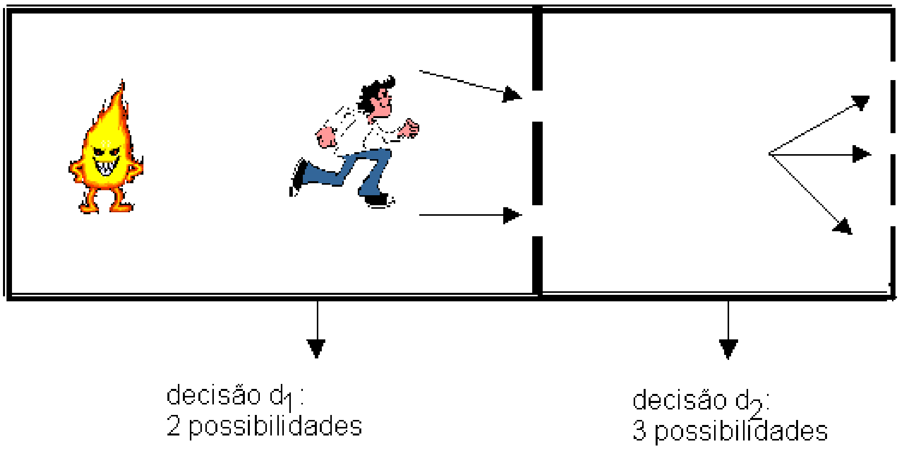


O número total de possibilidades é:

O número total de possibilidades é:

____ x____=______ ____ x ____ = _____

Quantas são as rotas de fuga para a pessoa em perigo?



APÊNDICE D

ATIVIDADE 4 - DIVERSOS

Grupo 1:

a) De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 3 carros em 3 garagens?

b) De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 3 carros em 2 garagens?

c) De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 2 carros em 3 garagens?

Grupo 2:

a) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 2 cartas em 2 caixas de coleta?

b) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 3 cartas em 2 caixas de coleta?

c) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 2 cartas em 3 caixas de coleta?

Grupo 3:

a) De quantas maneiras 3 pessoas podem ficar alojadas em 2 quartos, com duas pessoas no primeiro quarto e uma pessoa no segundo?

b) Quantas saladas de frutas podemos fazer utilizando-se 3 frutas diferentes, se dispomos de 4 tipos de frutas?

c) De quantos modos diferentes podemos comprar 3 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerantes?

APÊNDICE E

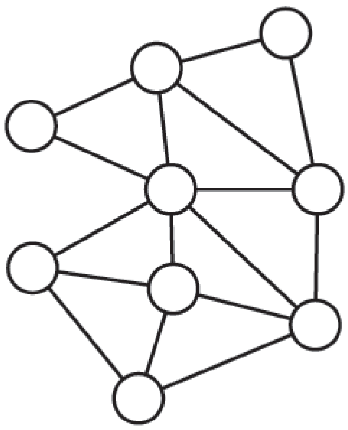
ATIVIDADE 5 - QUESTÕES OBMEP

1- (OBMEP 2013 - Questão 13) Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

A) 2
B) 3
C) 6
D) 7
E) 12

2 - (OBMEP 2012 -Questão 13) De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 9



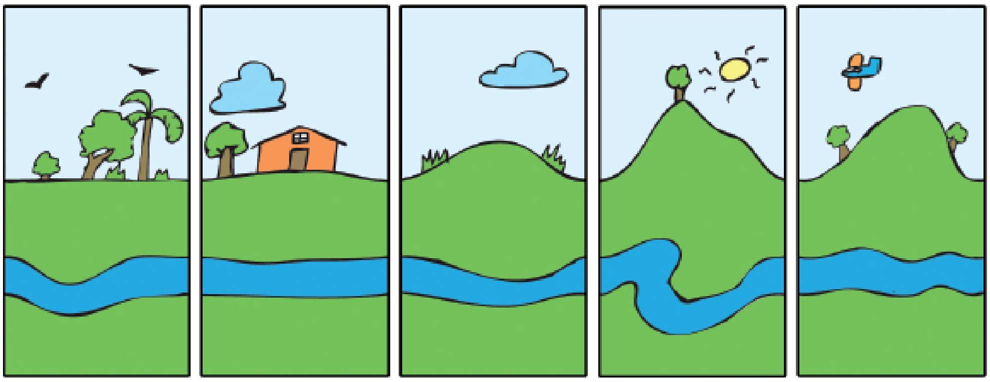
3- (OBMEP 2006 - Questão 7) Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 8

4- (OBMEP 2011 - Questão 3) Gabriel comprou uma rosa, um cravo e um lírio e quer dar uma flor para cada uma de suas três amigas. Ele sabe que uma amiga não gosta de cravos, outra não gosta de lírios e a terceira não gosta de rosas. De quantas maneiras ele pode distribuir as flores de modo a agradar às três amigas?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

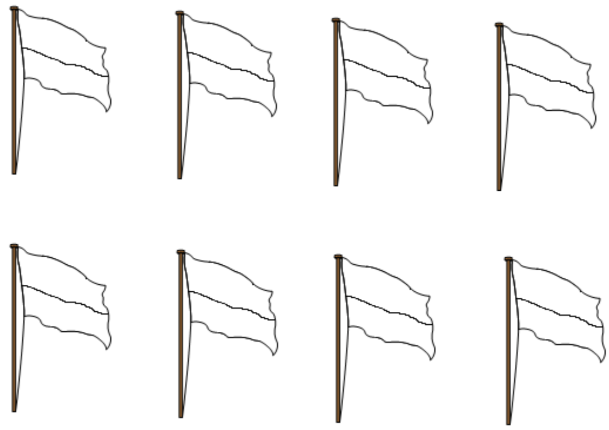
5- (OBMEP 2011 - Questão 13) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



A) uma semana
B) um mês
C) dois meses
D) quatro meses
E) seis meses

APÊNDICE F
CONTAGEM DO NÚMERO DE BANDEIRAS

a) Usando lápis nas cores azul e vermelho, apresente todas as maneiras diferentes de colorir as listras horizontais de cada bandeira, não deixando nenhuma faixa sem colorir, de modo que se obtenha o maior número de bandeiras pintadas diferentemente.



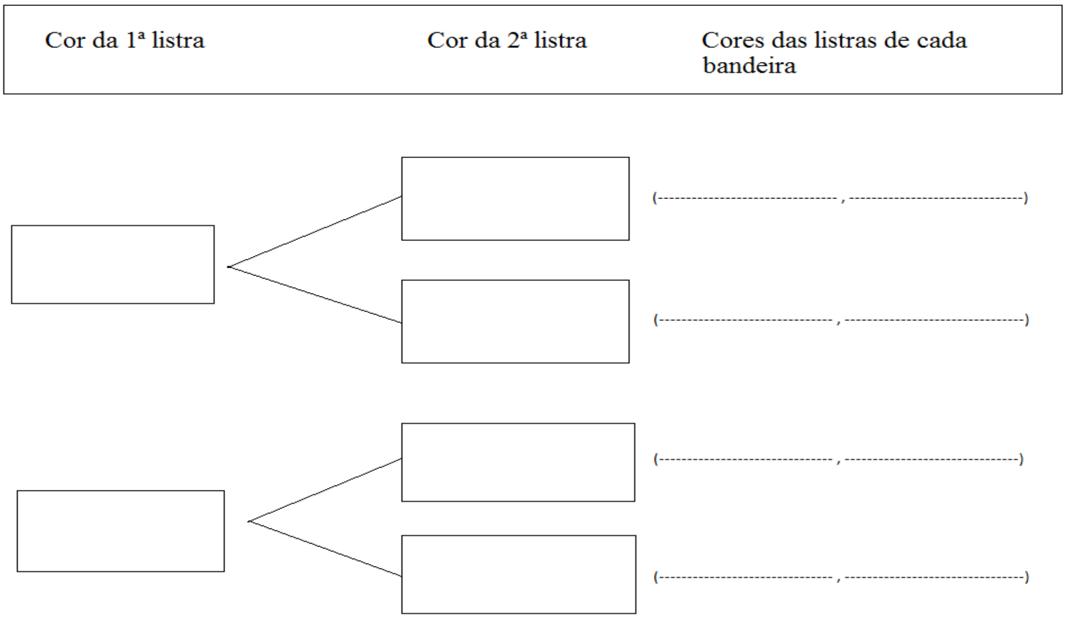
b) Quantas bandeiras diferentes você pintou? _______.

c) Complete a tabela colocando nos espaços em branco a combinação das cores em que as listras das bandeiras poderão ser pintadas de maneiras diferentes.

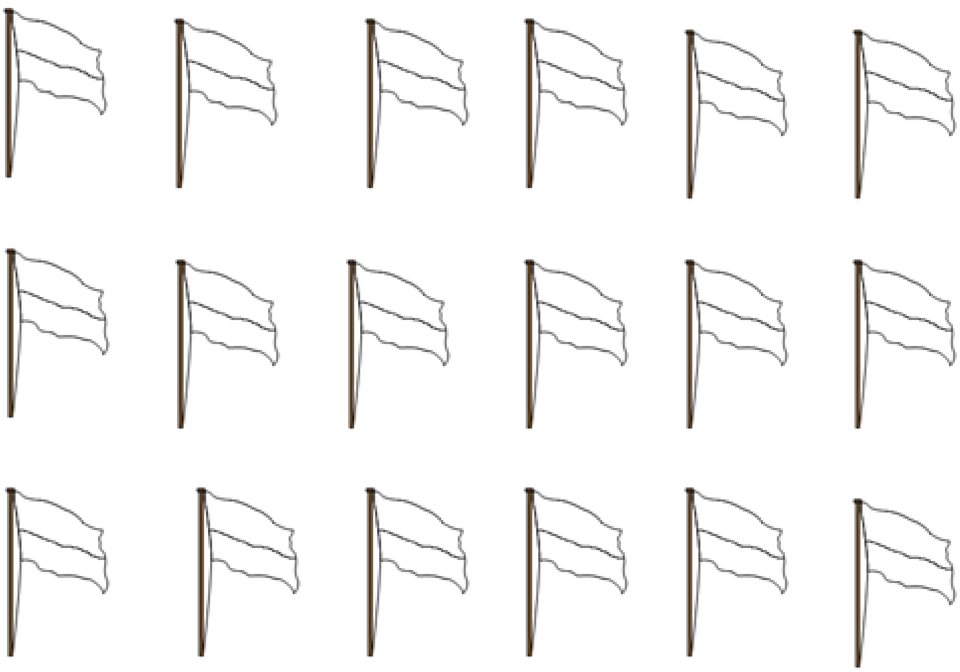
Cor da 2ª listra → / Cor da 1ª listra ↓	Azul	Vermelho
Azul	(________ , ________)	(________ , ________)
Vermelho	(________ , ________)	(________ , ________)

d) Outro método para resolver o mesmo problema é a representação por um **esquema** que associa as cores utilizadas.

e) Também podemos utilizar uma **Árvore de possibilidades** conforme o desenho apresentado abaixo:



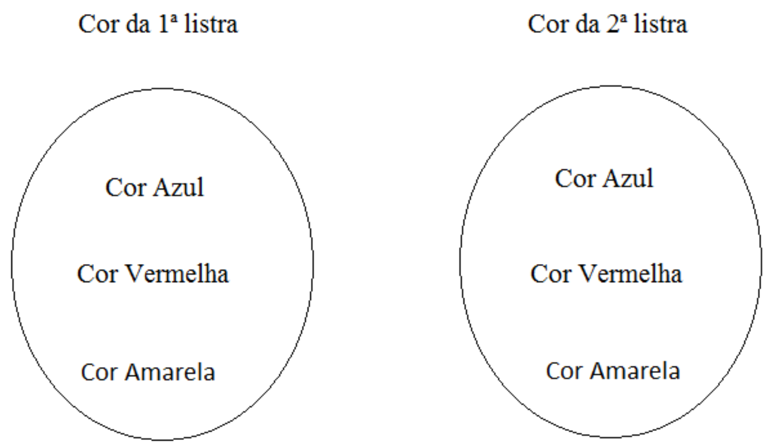
DESAFIO: a) Se você possui lápis nas cores azul, amarelo e vermelho, apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada. Pinte as diferentes bandeiras.



b) Complete a tabela colocando nos espaços em branco a combinação das cores em que as listras das bandeiras poderão ser pintadas de maneiras diferentes.

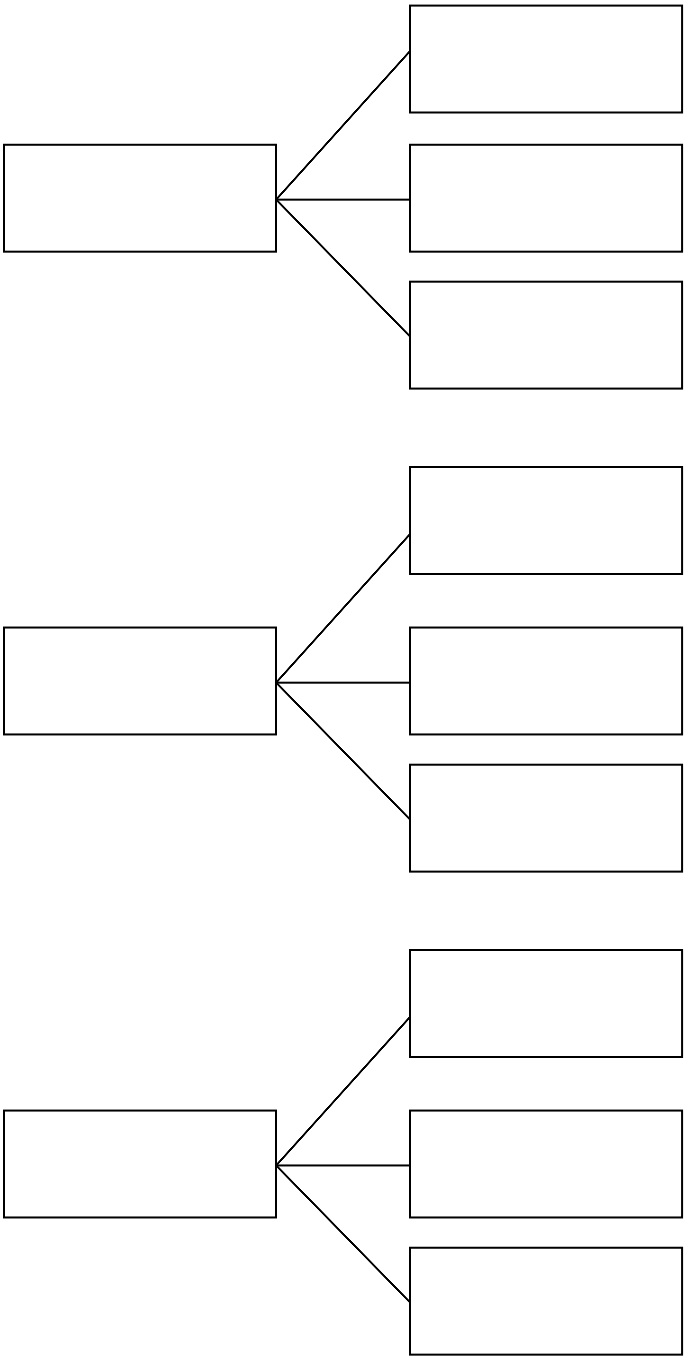
Cor da 2ª listra / Cor da 1ª listra	Azul	Vermelho	Amarelo
Azul	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)
Vermelho	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)
Amarelo	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)

c) Agora resolva o mesmo problema através de uma representação por um **esquema** que associa as cores utilizadas.



d) Utilize uma **Árvore de possibilidades** para resolver o problema, conforme o desenho apresentado abaixo:

Cor da 1ª listra	Cor da 2ª listra	Cores das listras de cada bandeira



(____________,____________)

(____________,____________)

(___________,______________)

(____________,___________)

(____________,___________)

(____________,___________)

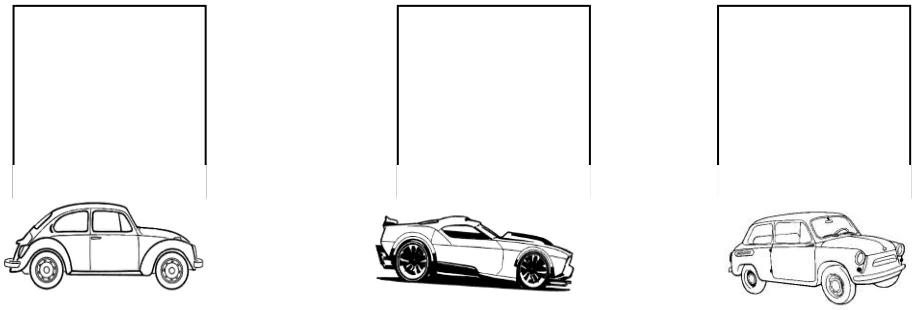
(____________,___________)

(____________,___________)

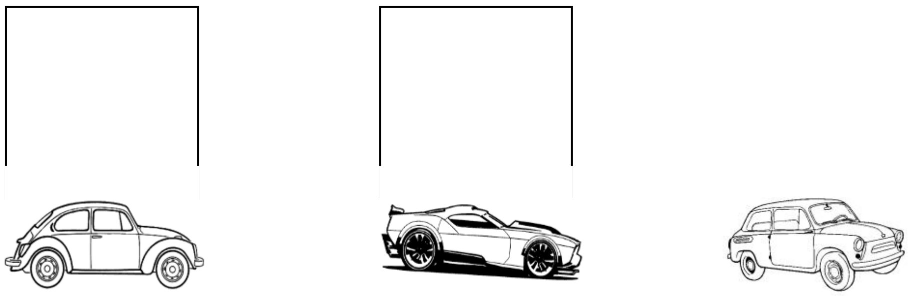
(_____________,___________)

APÊNDICE G
PROBLEMAS DE CONTAGEM

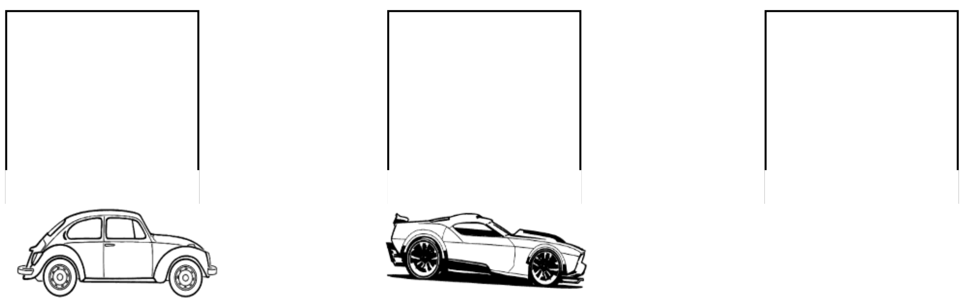
1- De quantas maneiras podemos estacionar 3 carros em 3 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro?



2- De quantas maneiras podemos estacionar 3 carros em 2 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro?



3- De quantas maneiras podemos estacionar 2 carros em 3 garagens, se em cada garagem pode ficar apenas um carro



4 a) - Quantas são as maneiras de se escolher 2 litros de suco de frutas, se temos à nossa disposição 3 sabores diferentes (abacaxi, banana e caju)?

Lembre-se que é permitido comprar os dois litros de suco de mesmo sabor.

Neste problema a ordem da compra dos sucos não é importante, isto é, comprar um suco de abacaxi e um de banana é o mesmo que comprar um suco de banana e um de abacaxi.

1ª.escolha do suco / 2ª. escolha do suco	Abacaxi	Banana	Caju
Abacaxi	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)
Banana	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)
Caju	(_______,________)	(_______,_______)	(_______,_______)

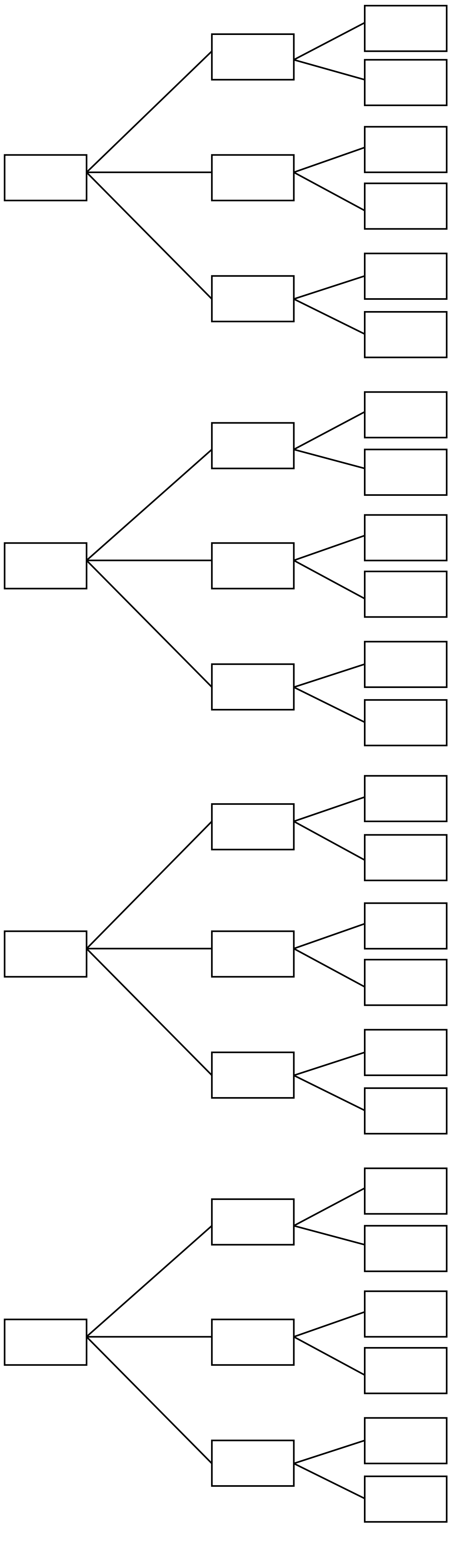
Resposta: _________.

4b) - Uma menina encontra-se no balcão de uma sorveteria que vende 4 opções diferentes de sabores para picolé. Ela tem dinheiro para comprar 2 picolés e pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos pedidos diferentes ela pode fazer?

Resposta: _________.

5 a) - Quantas saladas de frutas diferentes podemos fazer usando 3 das seguintes frutas: abacaxi, banana, morango ou uva? *Liste todas as possibilidades e veja quais delas produzem a mesma salada de frutas. Não é permitido usar duas vezes a mesma fruta.*



5 b)- Quantos triângulos podemos formar com 5 pontos, sabendo que não existem três pontos alinhados?