UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Generalizações do truque de Kotani

Wagner Monteiro

SÃO CARLOS - SP

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Generalizações do truque de Kotani

Wagner Monteiro

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Monteiro, Wagner
M775g Generalizações do truque de Kotani / Wagner Monteiro. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
28 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Truque de Kotani. 2. Perturbações de posto um. 3. Medidas de Hausdorff. 4. Operadores unitários. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Wagner Monteiro, realizada em 17/02/2016:

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira
UFSCar

Silas Luiz de Carvalho

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Rafael Augusto dos Santos Kapp

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
UFSCar

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
Orientador

Agradecimentos

Agradeço a todos meus professores, isto é, todos aqueles que me ensinaram algo de valoroso, dentro ou fora do sistema acadêmico, consciente ou inconscientemente. Em especial agradeço aos meus colegas Evandro Riva, Mateus Salomão, Carlos Henrique, ao professor José Tadeu e ao professor César Rogério. Agradeço também a CNPq pelo auxílio financeiro.

"Quando comerdes dele, se abrirão os vossos olhos, e sereis como deuses, conhecendo o bem e o mal"

Resumo

Apresentaremos um estudo realizados sobre pertubações de posto 1 de operadores auto-adjuntos e unitários, particularmente relacionados ao chamado *truque de Kotani*. O Capítulo 2 consiste na exposição de definições elementares e fatos básicos que serão utilizados nos outros capítulos. O Capítulo 3 consiste na exposição de um estudo feito de um artigo recente de Marx sobre o tema, envolvendo operadores autoadjuntos e medidas de Hausdorff. Uma generalização dos resultados obtidos no artigo já mencionado para o contexto de operadores unitários é discutida no Capítulo 4.

Palavras Chave: *truque de Kotani; perturbações de posto um; medidas de Hausdorff; operadores unitários.*

Abstract

We present a study of rank-one perturbations of self-adjoint and unitary operators, in particular related to the so-called *Kotani's trick*. In Chapter 2 we recall relevant definitions and elementary facts. In Chapter 3 we present recent results by Marx, which involve self-adjoint operators and Hausdorff measures. A generalization of such results to the set of unitary operators is described in Chapter 4.

Keywords: *Kotani's trick; rand-one perturbations; Hausdorff measures; unitary operators.*

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo estabelecerei alguns dos objetivos principais desta dissertação, assim como parte da notação básica usada na sequência.

Seja A um operador auto-adjunto definido num espaço de Hilbert H, fixe um vetor nomalizado $\phi \in H$, que, por simplicidade, será suposto cíclico para A, e defina a perturbação de posto 1 de A, para o parâmetro real λ, por

$$A_\lambda := A + \lambda\langle\phi, .\rangle\phi. \tag{1.1}$$

Adiante, μ denotará a medida espectral de A com relação a ϕ, μ_λ a medida espectral de A_λ com relação a ϕ, e $|\cdot|$ a medida de Lebesgue na reta. A menos que se diga o contrário, as medidas que serão consideradas na sequência serão supostas defininndas sobre os borelianos da reta e σ-finitas. O conteúdo do Capítulo 2 consiste em um conjunto de definições e fatos básicos que serão utilizados nos capítulos seguintes, os conteúdos dos outros capítulos serão descritos abaixo.

Neste contexto, no Capítulo 3 apresentaremos um estudo sobre o artigo de Marx [9], em que os dois principais resultados a serem estabelecidos são os dois teoremas que seguem.

Teorema 1.1 (Truque de Kotani [8]) *Para todo boreliano B da reta vale*

$$|\, B \,| = \int \mu_\lambda(B) d \,|\, \lambda \,|\,. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2 *Fixe uma medida σ-finita υ tal que $\int (|x|^2+1)^{-1} d\upsilon(x) < \infty$, defina sobre os borelianos da reta a medida K por*

$$K(\cdot) := \int \mu_\lambda(\cdot) d\upsilon(\lambda). \tag{1.3}$$

Então se υ for absolutamente contínua com relação a $|\cdot|$, o mesmo ocorre com K. Se υ for αHc (vide definição no Capítulo 2) então K é δHc para todo $0 < \delta < \alpha \leq 1$.

O primeiro teorema, devido a Kotani nos anos 1980, foi um resultado extremamente surpreendente e estabelece que a medida, não trivial, dada pelo segundo membro da equação (1.2) coincide com a medida de Lebesgue nos borelianos da reta. Claramente, o segundo resultado é de Marx e generaliza, em parte, o primeiro, no sentido de estudar que propriedades de α-continuidade da medida υ são herdadas pela medida K.

De forma muito ilustrativa, uma possível aplicação do truque de Kotani poderia ser do seguinte modo: se, por algum argumento, for demonstrado que certa propriedade $\mathcal{P}$ vale q.t.p. em relação à medida obtida pela média no parâmetro λ, ou seja, do lado direito de (1.2) (no caso Lebesgue), então conclui-se que $\mathcal{P}$ valerá para μ_λ num conjunto de λs de medida de Lebesgue total. No Teorema 1 no artigo [14], esta ideia é efetivamente aplicada, em certo contexto, para apresentar uma caracterização da ausência de espectro singular contínuo para A_λ para Lebesgue q.t.p. na intensidade λ. Em [13] pode-se encontrar uma grande quantidade de aplicações de perturbações de posto 1 para operadores auto-adjuntos, por exemplo, localiza em modelos de Anderson e critério de Simon wolf para localização espectral.

No Capítulo 4 damos uma pequena contribuição ao tema, pois consideramos uma situação semelhante à anterior, sendo que a diferença é que consideraremos um tipo de perturbação de posto 1 de um operador unitário U, dada por

$$U_\lambda = U \exp(i\lambda|\phi\rangle\langle\phi|) = U\big[1 + (e^{i\lambda} - 1)|\phi\rangle\langle\phi|\big], \qquad \text{com } \lambda \in [0, 2\pi). \tag{1.4}$$

A notação $|\phi\rangle\langle\phi|$ indica o operador de projeção sobre o subespaço gerado pelo vetor ϕ. Analogamente estamos supondo que ϕ é cíclico para U (vide [2] para saber em que contexto surge este tipo de perturbação). Denotaremos por ω a medida espectral de U segundo ϕ, e por ω_λ a de U_λ. Os principais teoremas considerados no Capítulo 4 são os análogos dos anteriores adaptados a este contexto:

Teorema 1.3 *Para todo boreliano B de $[0, 2\pi]$ vale*

$$| B |= \int_0^{2\pi} \omega_\lambda(B) d \mid \lambda \mid . \tag{1.5}$$

Teorema 1.4 *Fixe uma medida finita ρ definida sobre os borelianos de $[0, 2\pi]$, e defina sobre eles a medida Ω por*

$$\Omega(\cdot) := \int_0^{2\pi} \omega_\lambda(\cdot) d\rho(\lambda). \tag{1.6}$$

Então, se ρ for absolutamente contínua com relação à $|\cdot|$, o mesmo ocorre com Ω. Se ρ for αHc então Ω é δHc para todo $0 < \delta < \alpha \leq 1$.

O primeiro resultado resultado com natureza similar ao truque de Kotani, para este tipo de perturbação, surge em [2]. Em que se prova que a medida definida como a integral com relação ao parametro λ das medidas espectrais ω_λ em termos de uma medida particular, abuslotamente contínua com relação a medida de Lebesgue, é absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue. Nesta referência este fato é utilizado para obter uma versão do critério de Simon-Wolf para este tipo de perturbação. Estes resultados foram aplicados em [6] no estudo de localização de Anderson para operadores unitarios randômicos, em [3] este tipo de resultado foi utilizado no estudo de instabilidade energética para operadores de Floquet com espectro puramente pontual, por fim, em [7] este tipo de resultado foi utilizado para adaptar o método dos momentos fracionários para o estudo de operadores unitários randômicos.

Para finalizar esta seção mencionamos que, a partir de um estudo preliminar, observamos que existe a possilidade de obter resultados duais aos resultados acima de Marx para continuidade em relação às medidas de Hausdorff, quando se considera singularidade em relação às medidas de empacotamento (veja [10, 5] para discussões sobre essas medidas). De fato, esperamos que neste contexto valha um resultado da seguinte forma (bem como uma versão para o caso unitário):

Conjectura: "Se υ for singular em relação à medida de empacotamento α-dimensional, com $\alpha \in (0, 1)$, então K definda pela eq. (1.3) é singular em relação à medida de empacotamento δ-dimensional, para todo $\delta \in (\alpha, 1)$."

Capítulo 2

Definições e fatos básicos

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos a definição de medidas de Hausdorff, juntamente com alguns fatos e resultados fundamentais concernentes, os quais serão utilizados nos capítulos subsequentes. Para maiores detalhes sobre medidas de Hausdorff veja, por exemplo, [11, 10], e para maiores informações sobres transformações de Borel e assuntos relacionados veja [13].

2.2 Medida de Hausdorff α-dimensional na reta

Seja U um boreliano não vazio da reta, e denote por diam (U) o seu diâmetro. Fixe $s \in [0,1]$, tome um $\delta > 0$ e considere a seguinte quantidade,

$$h^s_\delta(U) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s : U \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \operatorname{diam}(U_i) \in [0,\delta], \text{ com } U_i \text{ aberto} \right\}, \tag{2.1}$$

sendo que o ínfimo é tomado sobre todas tais coberturas de U. Então, a medida de Hausdoff s-dimensional $h^\alpha(U)$ de U é definida por

Definição 2.1

$$h^s(U) := \sup_\delta h^s_\delta(U) = \lim_{\delta \downarrow 0} \quad h^s_\delta(U). \tag{2.2}$$

Diretamente da definição segue que para $\beta < \alpha < \gamma$ vale,

$$\delta^{\alpha-\gamma} h^\gamma_\delta(U) \leq h^\alpha_\delta(U) \leq \delta^{\alpha-\beta} h^\beta_\delta(U) \tag{2.3}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} & h^\alpha(U) < \infty \quad \Longrightarrow \quad h^\gamma(U) = 0, \quad \forall \gamma > \alpha, \\ & \text{e} \\ & h^\alpha(U) > 0 \quad \Longrightarrow \quad h^\beta(U) = \infty, \quad \forall \beta < \alpha \end{aligned} \quad . \tag{2.4}$$

O conceito definido abaixo desempenhará papel fundamental na sequência do texto. Através dele é possível descrever a decomposição de uma dada medida, em partes contínua e singular, com relação às medidas de Hausdorff, anteriormente introduzidas.

Definição 2.2 *Dada uma medida η, sua derivada superior α dimensional é definida por*

$$\overline{D}^\alpha_\eta(x) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\eta(x-\epsilon, x+\epsilon)}{\epsilon^\alpha}. \tag{2.5}$$

Com este conceito podemos enunciar o seguinte teorema conhecido, cuja demonstração pode ser encontrada em [11, 10]; mas antes do enunciado intoduziremos uma notação: diremos que uma medida η é αHc se ela for absolutamente contínua em relação a h^α, e que ela é αHs se for singular com relação a h^α.

Teorema 2.1 *Dada uma medida de Borel σ-finita na reta η, considere os borelianos $T^\alpha_{\eta\infty} := \{x \in \mathbb{R} : \overline{D}^\alpha_\eta(x) = \infty\}$ e $T^\alpha_{\eta+} := \mathbb{R} \setminus T^\alpha_{\eta\infty}$, e denote por χ_α a função caracteristica de $T^\alpha_{\eta\infty}$, e defina $d\eta_{aHs} = \chi_\alpha d\eta$ e $d\eta_{aHc} = (1-\chi_\alpha)d\eta$. Então, $\eta = \eta_{aHc} + \eta_{aHs}$, sendo que η_{aHc} é αHc e η_{aHs} é αHs.*

Na sequência introduziremos certos tipos de tranformações associadas às medidas, juntamente com algumas de suas propriedades. As duas primeiras desempenham um papel fundamental no Capítulo 3 e a duas últimas no Capítulo 4.

Dada uma medida positiva η na reta que satisfaça a condição $\int(|x|+1)^{-1}d\eta(x) < \infty$, define-se sua tranformação de Borel como sendo a função

$$F_\eta(z) := \int \frac{1}{y-z} d\eta(y), \quad z \in \mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}. \tag{2.6}$$

A parte imaginária de $F_\eta(z)$ é dada por

$$P_\eta(x+i\epsilon) = \int \frac{\epsilon}{(x-y)^2+\epsilon^2} \, d\eta(y), \tag{2.7}$$

o que mostra que F_η leva $\mathbb{H}^+$ sobre ele mesmo. A função P_η é chamada de transformação de Poisson de η (esta função está definida de forma mais geral, desde que valha a condição $\int(|x|^2+1)^{-1}d\eta(x) < \infty$, que é mais fraca que a condição para que a tranformação de Borel seja definida).

As outras duas transformações são definidas para uma medida ρ finita sobre os borelianos de $[0,2\pi]$, e são dadas por

$$\Phi_\rho(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta'}+z}{e^{i\theta'}-z}\, d\rho(\theta'), \quad |z|<1 \tag{2.8}$$

e

$$\Pi_\rho(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2}\, d\rho(\theta') = \mathrm{Re}\,\Phi_\rho(re^{i\theta}), \quad r<1. \tag{2.9}$$

As duas proposições que seguem relacionam as tranformações definidas acima com o conceito de derivada superior, anteriormente introduzido.

Proposição 2.1 *Seja η uma medida na reta, fixe $\alpha \in [0,1)$ e x real. Então $\overline{D}_\eta^\alpha(x)$, $\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} P_\eta(x+i\epsilon)$ e $\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha}|F_\eta(x+i\epsilon)|$ são simultaneamente nulos, finitos ou infinitos.*

Demonstração:

Para demonstrar isso note que:

i) para $\alpha \in [0,1]$ vale

$$\overline{D}_\eta^\alpha(x) \le 2\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} P_\eta(x+i\epsilon) \le 2\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha}|F_\eta(x+i\epsilon)| \tag{2.10}$$

pois,

$$\begin{aligned} P_\eta(x+i\epsilon) &= \int \frac{\epsilon}{(x-y)^2+\epsilon^2}\, d\eta(y) \ge \epsilon \int_{(x-\epsilon,x+\epsilon)} \frac{1}{(x-y)^2+\epsilon^2}\, d\eta(y) \\ &\ge \frac{\eta(x-\epsilon,x+\epsilon)}{2\epsilon} \\ &\Longrightarrow \quad 2\epsilon^{1-\alpha} P_\eta(x+i\epsilon) \ge \frac{\eta(x-\epsilon,x+\epsilon)}{\epsilon^\alpha} \end{aligned}$$

e disto segue a primeira desigualdade, a segunda é imediata.

ii) Dado $\alpha \in [0,1)$, se $\overline{D}_\eta^\alpha(x) < \infty$ então $\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha}|F_\eta(x+i\epsilon)| < \infty$. Além disso, se $\overline{D}_\eta^\alpha(x) = 0$, então $\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha}|F_\eta(x+i\epsilon)| = 0$.

De fato, o caso $\alpha = 0$, se segue de que, para ϵ suficientemente pequeno, $\frac{\epsilon}{\sqrt{(x-y)^2+\epsilon^2}} \downarrow \chi_{\{x\}}(y)$, pois $\overline{D}^0_\eta(x) = \eta(\{x\})$. Agora tome $\alpha \in (0,1)$. Neste caso, a hipótese implica que existem $\delta_0, C > 0$ tais que, $\eta(x-\delta, x+\delta) = M^\delta_\eta(x) \leq C\delta^\alpha$ para $\delta \in [0, \delta_0]$, logo,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha}|F_\eta(x+i\epsilon)| &\leq \limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta(y)}{[(x-y)^2+\epsilon^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} \int_0^{\delta_0} \frac{dM^\delta_\eta(x)}{[\delta^2+\epsilon^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} \int_0^{\delta_0} \frac{\delta M^\delta_\eta(x) d\delta}{[\delta^2+\epsilon^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq \limsup_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} \int_0^{\delta_0} \frac{C\delta^{\alpha+1}}{[\delta^2+\epsilon^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} C \int_0^{\epsilon^{-1}\delta_0} \frac{\delta^{\alpha+1} d\delta}{[\delta^2+1]^{\frac{3}{2}}} < \infty
\end{aligned}$$

em que, a integral na primeira igualdade é a integral de Stieltjes com relação a $M^\delta_\eta(x)$ e o limite superior de integração é δ_0, e não ∞, pois para $\alpha < 1$ vale

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|y-x|\geq\delta_0} \frac{\epsilon^{1-\alpha} d\eta(y)}{[(x-y)^2+\epsilon^2]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

pelo teorema da convergência monótona. E na segunda realizou-se uma integração por partes, em que o termo de fronteira se anula no limite. Por fim, se $\overline{D}^\alpha_\eta(x) = 0$, C na expressão acima pode ser tomado arbitrariamente pequeno e disto segue o resultado.

Para os dois últimos tipos de transformações vale um resultado análogo, que demonstraremos na sequência. A ideia da demonstação é similar, no entanto, os cálculos são um pouco mais complicados.

Proposição 2.2 *Seja ρ uma medida finita em $[0, 2\pi]$, fixe $\alpha \in [0,1)$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Então $\overline{D}^\alpha_\rho(\theta)$ e $\limsup_{r\to 1^-}(1-r)^{1-\alpha}\Pi_\rho(re^{i\theta})$ são simultaneamente nulos, finitos ou infinitos.*

Demonstração:

A demonstração se segue dos dois fatos que estabeleceremos abaixo.

1) denote $1-r$ por ϵ, então, se ϵ for suficientemente pequeno, existe $K > 0$ tal que

$$(1-r)^{1-\alpha}\Pi_\rho(re^{i\theta}) \geq \frac{K}{2}\frac{\rho(\theta-\epsilon, \theta+\epsilon)}{\epsilon^\alpha}.$$

De fato, como o núcleo da integral abaixo é positivo, temos

$$
\begin{aligned}
\Pi_\rho(re^{i\theta}) &= \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2} d\rho(\theta) \\
&\geq \int_{|\theta-\theta'|<\epsilon} \frac{\epsilon(2-\epsilon)}{1+(1-\epsilon)^2-2(1-\epsilon)\cos(\epsilon)} d\rho(\theta') \\
&= \rho(\theta-\epsilon,\theta+\epsilon)[\frac{\epsilon(2-\epsilon)}{1+(1-\epsilon)^2-2(1-\epsilon)\cos(\epsilon)}] \\
&= \rho(\theta-\epsilon,\theta+\epsilon)[\frac{\epsilon(2-\epsilon)}{2\epsilon^2+O(\epsilon^3)}] \\
&= \frac{\rho(\theta-\epsilon,\theta+\epsilon)}{2\epsilon}[\frac{(2-\epsilon)}{2}][1-O(\epsilon)] \\
&\geq \frac{K}{2}\frac{\rho(\theta-\epsilon,\theta+\epsilon)}{\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Usou-se que, $\cos\epsilon = 1-\epsilon^2+O(\epsilon^4)$ e que $[\frac{(2-\epsilon)}{2}][1-O(\epsilon)] \geq K$, para um certo $K>0$ e para todo ϵ suficientemente pequeno. Disto segue o fato afirmado.

2) Se $\overline{D}_\rho^\alpha(\theta) < \infty$, então $\limsup_{r\to 1^-}(1-r)^{1-\alpha}\Pi_\rho(re^{i\theta}) < \infty$. Além disso, se $\overline{D}_\rho^\alpha(\theta) = 0$, então $\limsup_{r\to 1^-}(1-r)^{1-\alpha}\Pi_\rho(re^{i\theta}) = 0$.

Para demonstrar este fato, notemos inicialmente que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 1^-}\left[\frac{\delta^{\alpha+1}}{((1-r)^2+r\delta^2)^2} - \frac{\sin(\delta)\delta^\alpha}{(1-2r\cos\delta+r^2)^2}\right] &= \delta^\alpha\left[\frac{\delta}{\delta^4} - \frac{\sin\delta}{2^4\sin(\frac{\delta}{2})^4}\right] \\
&= \delta^\alpha\left[\frac{\delta}{\delta^4} - \frac{\delta+O(\delta^3)}{\delta^4+O(\delta^6)}\right] \\
&= \delta^\alpha\left[\frac{\delta}{\delta^4} - \frac{\delta}{\delta^4}\frac{1+O(\delta^2)}{1+O(\delta^2)}\right] \\
&= O(\delta^{\alpha-1}).
\end{aligned}
$$

Se $\alpha = 0$ a demonstração é trivial e análoga à demonstração feita no teorema anterior. Adimita então que $\alpha \in (0,1)$, neste caso temos,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{r\to 1^-}(1-r)^{1-\alpha}\Pi_\rho(re^{i\theta}) &= \limsup_{r\to 1^-}(1-r)^{1-\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2}d\rho(\theta') \\
= \limsup_{r\to 1^-}\int_{-\theta}^{2\pi-\theta}(1-r)^{1-\alpha}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2}df_\theta(\delta)
\end{aligned}
$$

(em que a integral acima é a de Stieltjes com relação a $f_\theta(\delta)$, sendo $f_\theta(\delta) = \rho[\theta,\theta+\delta)$ se

$\delta \geq 0$ e $f_\theta(\delta) = -\rho[\theta+\delta,\theta)$ se $\delta \leq 0$)

$$= \limsup_{r\to 1^-} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} (1-r)^{1-\alpha} \frac{2r(1-r^2)\sin\delta f_\theta(\delta)}{(1-2r\cos(\delta)+r^2)^2} d\delta$$

(pelo teorema da convergência dominada, uma vez que fora de $(-\delta_0,\delta_0)$, o integrando é limitado e tende a zero e em seguida uma integração por partes em que o termo de fronteira se anula no limite)

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{r\to 1^-} \Big[\int_0^{\delta_0} \frac{(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)(\sin\delta)\rho[\theta,\theta+\delta)}{(1-2r\cos(\delta)+r^2)^2} d\delta \\
&+ \int_{-\delta_0}^{0} \frac{(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)(\sin\delta)(-\rho[\theta+\delta,\theta))}{(1-2r\cos(\delta)+r^2)^2} d\delta \Big] \\
&= \limsup_{r\to 1^-} \Big[\int_0^{\delta_0} \frac{(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)(\sin\delta)\rho[\theta,\theta+\delta)}{(1-2r\cos(\delta)+r^2)^2} d\delta \\
&+ \int_0^{\delta_0} \frac{(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)(\sin\delta)\rho[\theta-\delta,\theta)}{(1-2r\cos(\delta)+r^2)^2} d\delta \Big] \\
&\leq \limsup_{r\to 1^-} 2C \left[(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)\right] \int_0^{\delta_0} \frac{(\delta^\alpha \sin\delta)}{(1-2r\cos(\delta)+r^2)^2} d\delta
\end{aligned}$$

(sendo $\rho(\theta-\delta,\theta+\delta) \leq C\delta^\alpha$ se $\delta \leq \delta_0$ para um ceto $C>0$ pois $\overline{D}_\rho^\alpha(\theta) < \infty$)

$$= \limsup_{r\to 1^-} 2C[(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)] \int_0^{\delta_0} \frac{\delta^{\alpha+1}}{((1-r)^2+r\delta^2)^2} d\delta,$$

pela observação do início e o fato de que $O(\delta^{\alpha-1})$ é integrável numa vizinhança da origem para $\alpha > 0$, e que o fator dependente de r que multiplica a equação acima tende a zero no limite. Por fim, após uma mudança de variável na integral acima, esta se torna

$$\leq \limsup_{r\to 1^-} 2C \left[(1-r)^{1-\alpha} 2r(1-r^2)\right] \left[\frac{(1-r)^{\alpha-2}}{r^{\frac{\alpha+2}{2}}}\right] \int_0^{\frac{r^{\frac{1}{2}}}{1-r}\delta_0} \frac{u^{\alpha+1}}{(u^2+1)^2} d\delta$$

$$\leq 8C \int_0^\infty \frac{u^{\alpha+1}}{(u^2+1)^2} d\delta < \infty,$$

o que mostra que o limite é finito, e que se $\overline{D}_\rho^\alpha(\theta) = 0$, C pode ser tomado arbitrariamente pequeno de modo que o termo acima é nulo, e isto encerra a demonstração do resultado.

Abaixo enunciaremos os dois últimos teoremas deste capítulo; a demonstração do primeiro pode ser encontrada em [13], enquanto que a demonstração do segundo é similar, contudo demonstraremos os itens i), iii) e v) deste.

Teorema 2.2 *Seja η uma medida de Borel σ-finita em $\mathbb{R}$ tal que $\int (|x|+1)^{-1} d\eta(x) < \infty$. Então, valem as seguintes afirmações:*

i) $\eta(\{x_0\}) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon P_\eta(x_0 + i\epsilon)$.

ii) Existe $\lim_{\epsilon\to 0^+} P_\eta(x+i\epsilon)$, $|\cdot|$*q.t.p.*

iii) Para toda função contínua, f, de suporte compacto vale, para $\epsilon \to 0$,

$$\int f(x)\frac{P_\eta(x+i\epsilon)}{\pi}dx \longrightarrow \int f(x)d\eta(x).$$

iv) η_{sing} é suportada em $\{x : \lim_{\epsilon\to 0^+} |F_\eta(x+i\epsilon)| = \infty\}$.

v) $d\eta_{ac} = \frac{1}{\pi} P_\eta(x + i0^+)\, dx$.

Teorema 2.3 *Seja ρ uma medida de Borel finita em $[0, 2\pi]$. Então, valem as seguintes afirmações:*

i) $\rho(\{\theta_0\}) = \lim_{r\to 1^-} \frac{(1-r)}{2} \Pi_\rho(re^{i\theta_0})$.

ii) Existe $\lim_{r\to 1^-} \Pi_\rho(re^{i\theta})$, $|\cdot|$*q.t.p.*

iii) $\Pi_\rho(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \to d\rho$ *fracamente. Isto é, para toda função f em $\mathbb{R}$ contínua e periódica de periodo 2π vale*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\Pi_\rho(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \to \int_0^{2\pi} f(\theta)d\rho(\theta).$$

iv) ρ_{sing} está suportada em $\{\theta : \lim_{r\to 1^-} |\Phi_\rho(re^{i\theta})| = \infty\}$.

v) $d\rho_{ac} = \Pi_\rho(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$.

Demonstrações de i), iii) e v):

i) é consequência imediata do teorema da convergência dominada e de

$$\frac{(1-r)(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2} \to 2\chi_{\{\theta\}}(\theta').$$

Para demonstrar iii), tome f contínua 2π-periódica, então,

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} f(\theta)\Pi_\rho(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2}\frac{d\theta}{2\pi} \right) d\rho(\theta') = \int_0^{2\pi} f(\theta')d\rho(\theta');$$

a segunda igualdade é consequência do Teorema de Fubini, e a última é consequência de uma propriedade bem conhecida dos núcleos de Poisson (vide[12] pag 239), e isso demonstra o afirmado.

Para demonstrar v), note que se $d\rho_{ac} = h(\theta)d\theta$, então, para quase todo θ vale $h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\Pi_{\rho_{ac}}(e^{i\theta})$. De fato, por um cálculo análogo ao acima, obtemos para, toda f contínua de suporte compacto e de período 2π,

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\Pi_{\rho_{ac}}(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(\theta')h(\theta')d\theta',$$

o que, juntamete com um argumento de densidade, implica o afirmado. Tome agora f contínua e positiva então pelo lema de Fatou, temos,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta)\Pi_\rho(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} &\leq \liminf_r \int_0^{2\pi} f(\theta)\Pi_\rho(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta)d\rho(\theta);\end{aligned}$$

portanto, $\Pi_\rho(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \leq d\rho$, e então, para quase todo θ vale,

$$\frac{\Pi_\rho(e^{i\theta})}{2\pi} \leq h(\theta) = \frac{\Pi_{\rho_{ac}}(e^{i\theta})}{2\pi} \leq \frac{\Pi_\rho(e^{i\theta})}{2\pi}$$

pois evidentemente $d\rho_{ac} \leq d\rho \Rightarrow \Pi_{\rho_{ac}}(e^{i\theta}) \leq \Pi_\rho(e^{i\theta})$, e então, q.t.p.,

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\Pi_\rho(e^{i\theta}),$$

e isto demonstra o resultado.

Capítulo 3

Perturbação de posto 1 de operadores autoadjuntos

3.1 Resultados preliminares

Neste capítulo demonstraremos os dois primeiro teoremas da Introdução; repetimos que os argumentos são de Marx [9]. Para isto, é necessario ainda obter alguns resultados e introduzir alguns conceitos, o que agora passaremos a fazer.

Lema 3.1 (Formula de Aronszajn-Krein) *Sejam μ_λ e μ como na Introdução; então, vale,*

$$F_{\mu_\lambda}(z) = \frac{F_\mu(z)}{1 + \lambda F_\mu(z)}. \tag{3.1}$$

Demonstração:

Denote por $R_D(z)$ o resolvente do operador D calculado no número complexo z. Então, pela segunda identidade do resolvente, temos,

$$
\begin{array}{rcl}
R_{A_\lambda}(z) - R_A(z) & = & R_{A_\lambda}(z) \circ (A - A_\lambda) \circ R_A(z) \\
& = & R_{A_\lambda}(z) \circ (-\lambda\langle \phi, R_A(z)\rangle \phi) \\
& \Rightarrow & \\
& R_{A_\lambda}(z) & \circ(id + \lambda\langle \phi, R_A(z)\rangle\phi) = R_A(z) \\
& \Rightarrow & \\
& R_{A_\lambda}(z)(\phi) & (1 + \lambda F_\mu(z)) = R_A(z)(\phi) \\
& \Rightarrow & \\
& F_{\mu_\lambda}(z) & (1 + \lambda F_\mu(z)) = F_\mu(z) \\
& \Rightarrow & \\
& F_{\mu_\lambda}(z) & = \dfrac{F_\mu(z)}{1 + \lambda F_\mu(z)},
\end{array}
$$

e isto encerra a demonstração.

Proposição 3.1 *Sejam* υ *como no Teorema 1.2 e* $K(\cdot)$ *definida por* (1.3). *Então,*

$$P_K(z) = P_\upsilon\left(\frac{-1}{F_\mu(z)}\right), \quad \forall z \in \mathbb{H}^+ \tag{3.2}$$

Demonstração:

Segue-se, diretamente da definição de K, que dada uma função caracteristica χ_E, vale,

$$\int \chi_E dK(x) = \int \left(\int \chi_E d\mu_\lambda(x)\right) d\upsilon(\lambda),$$

e assim, a equação acima vale com χ_E substituída por qualquer função simples, e como toda função integrável é o limite de funções simples, por passagem ao limite, ou pela própria defição integral, esta igualdade vale com qualquer função integrável no lugar de χ_E, em particular, temos

$$P_K(z) = \int P_{\mu_\lambda}(z) d\upsilon(\lambda).$$

Usando-se a fórmula de Aronszajn-Krein, e denotando $x + i\epsilon = \frac{-1}{F_\mu(z)}$ temos,

$$
\begin{array}{rcl}
P_K(z) & = & \displaystyle\int \operatorname{Im} F_{\mu_\lambda}(z) d\upsilon(\lambda) = \int \frac{P_\mu(z)}{|1 + \lambda F_\mu(z)|^2} d\upsilon(\lambda) \\
& = & \displaystyle\int \frac{\epsilon}{(x-\lambda)^2 + \epsilon^2} d\upsilon(\lambda) = P_\upsilon\left(\frac{-1}{F_\mu(z)}\right)
\end{array}
$$

e isto encerra a demonstração.

O interessante teorema abaixo é consequência direta da fórmula de Aronszajn-Krein e do Teorema 2.2.

Teorema 3.1 *A parte singular de μ_λ, $\mu_{\lambda s}$, é suportada em $\{x|F_\mu(x+i0^+) = -\lambda^{-1}\}$, em particular, a família $\{\mu_{\lambda s}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ é mutuamente singular.*

Uma consequência deste resultado é

Teorema 3.2 *Se υ for uma medida contínua, então K é contínua.*

Demonstração: Note que

$$K(\{x\}) = \int \mu_\lambda(\{x\})d\upsilon(\lambda) = \int \mu_{\lambda s}(\{x\})d\upsilon(\lambda),$$

mas, pelo teorema acima, x pertence ao suporte de no máximo uma das medidas $\mu_{\lambda s}$, digamos, $\mu_{\lambda_0 s}$, e como $\upsilon(\{\lambda_0\}) = 0$, segue-se que

$$K(\{x\}) = \int_{\{\lambda_0\}} \mu_{\lambda s}(\{x\})d\upsilon(\lambda) = 0.$$

Isto encerra a demonstração.

Para prosseguirmos, introduziremos um conceito da literatura, a saber, o de medida α-Hölder uniformemente contínua $U\alpha H$. Este conceito é importante pois como veremos abaixo as medidas αc podem ser arbitrariamente aproximadas por medidas $U\alpha H$, além disso as medidas $U\alpha H$ são, de certo modo, mais regulares, sendo possível fazer estimativas analíticas de certas quantidades para esta classe de medidas.

Definição 3.1 *Seja η uma medida sobre os borelianos da reta e $\alpha \geq 0$. Então, η é dita uniformemente α Hölder contínua se existe $C > 0$ de forma que $\eta(I) \leq C|I|^\alpha$, para todo intervalo I com $|I| < 1$.*

Observação: se para $\alpha \in [0, 1]$, a definição anterior é equivalente a dizer que que existe $C > 0$ tal que para todo inetervalo limitado I vale,$\eta(I) \leq C|I|^\alpha$. De fato, podemos escrever I como a reunião disjunta de um quantidade finita, n digamos, de intervalos I_i, onde todos estes intervalos tem comprimento menor que 1, assim

$$\eta(I) \leq \sum_{i=1}^{n} \eta(I_i) \leq C \sum_{i=1}^{n} |I_i|^\alpha \leq C|I|^\alpha$$

pois, para $\alpha \in [0,1]$ vale, $\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha$ com $x_i > 0$ para $i = 1, ..., n$

O tipo de medida introduzido acima pode ser relacionado com as medidas Hausdorff contínuas através do teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [11, 10].

Teorema 3.3 *Seja η uma medida σ-finita sobre os borelianos da reta. Se η for αHc, então, dado $\epsilon > 0$, existem medidas η_1 e η_2 mutuamente singulares tais que:*
i) η_1 é $U\alpha H$.
ii) $\eta_2(\mathbb{R}) < \epsilon$.
iii) $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

Usando a Proposição 3.1 para medidas $U\alpha H$ obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.2 *Seja v uma medida $U\alpha H$, $\alpha \in [0,1]$, e K definida em (1.3). Então existe $C_\alpha \geq 0$ tal que,*

$$P_K(z) \leq C_\alpha \left(\frac{|F_\mu(z)|^2}{P_\mu(z)} \right)^{1-\alpha}, \qquad \forall z \in \mathbb{H}^+; \tag{3.3}$$

em particular $\int \frac{1}{1+y^2} dK(y) \leq \infty$.

Demonstração: Denote ${M_v}^\delta[x] = v(x-\delta, x+\delta)$; então, pela hipótese e pela observação que segue apos a definição de medidas $U\alpha H$, existe $C > 0$ tal que ${M_v}^\delta[x] \leq C\delta^\alpha$. Tome $z \in \mathbb{H}^+$, então,

$$\begin{aligned}
P_v(z) &= \mathrm{Im}\,(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(y)}{(y - \mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2} \\
&= \mathrm{Im}\,(z) \int_0^{\infty} \frac{d{M_v}^\delta[x](\delta)}{\delta^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2} \\
&= \mathrm{Im}\,(z) \int_0^{\infty} \frac{2\delta {M_v}^\delta[x](\delta) d\delta}{(\delta^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2)^2} \\
&\leq 2C\mathrm{Im}\,(z) \int_0^{\infty} \frac{\delta^{\alpha+1} d\delta}{(\delta^2 + \mathrm{Im}\, z^2)^2} \\
&= [2C \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha+1} du}{(u^2+1)^2}](\mathrm{Im}\,(z))^{\alpha-1} \\
&= C_\alpha (\mathrm{Im}\,(z))^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Logo, pela equação (3.2) temos,

$$\begin{aligned} P_K(z) &= P_v\left(\frac{-1}{F_\mu(z)}\right) \\ &\leq C_\alpha[\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{F_\mu(z)}\right)]^{\alpha-1} \\ &= C_\alpha\left(\frac{|F_\mu(z)|^2}{P_\mu(z)}\right)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

e isto encerra a demonstração.

Como uma aplicação deste teorema, para o caso $\alpha = 1$, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4 *Se v for $U1H$, então o mesmo vale para K.*

Demonstração:

Tome $f \geq 0$ contínua e de suporte compacto, então,

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &\geq \limsup_{\epsilon\downarrow 0^+} C_1{}^{-1}\int f(x)P_K(x+i\epsilon)dx \\ &= \limsup_{\epsilon\downarrow 0^+} C_1{}^{-1}\int\left(\int f(x)\frac{\epsilon}{(x-y)^2+\epsilon^2}dx\right)dK(y) \\ &\geq C_1{}^{-1}\int\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int f(x)\frac{\epsilon}{(x-y)^2+\epsilon^2}dx\right)dK(y) \\ &= \frac{\pi}{C_1}\int f(y)dK(y). \end{aligned}$$

Na desigualdade utilizou-se o Lema de Fatou, e na última igualdade utilizou-se uma propriedade bem conhecida do núcleo da integral. Tomando uma sequência crescente de tais funções convergindo à função característica, χ_I, de um intervalo I obtemos, no limite,

$$K(I) \leq \frac{C_1}{\pi}\ell(I),$$

e isto encerra a demonstração.

Estes eram os últimos fatos necessários para as demonstrações apresentadas na próxima seção.

3.2 Demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2

Com os resultados já obtidos, a demonstração do Teorema 1.1 torna-se bastante simples.

Demonstração do Teorema 1.1. Denote por L a medida definida pelo lado direito de (1.2). Pelo teorema anterior, L é $U1H$, em particular é contínua, logo, pelo Teorema 2.2, temos que

$$dL(x) = \frac{1}{\pi} P_{L(\cdot)}(x + i0^+)\, dx.$$

Mas a tranformada de Poisson de L é, pela Proposição 3.1, igual à da medida de Lebesgue, $P_{|\cdot|}$, que é constante e igual a π. Portanto, $dL(x) = dx$, e isto encerra a demonstração.

Passaremos agora para a demonstração do Teorema 1.2.

Demonstração do Teorema 1.2. Esta demonstração se divide em duas etapas.

Etapa 1. Assuma que υ seja $U\alpha H$.
Se $\alpha = 1$ o resultado segue diretamente do Teorema 3.4. Assim, suponha que $\alpha < 1$. Examinemos, inicialmente, o que ocorre fora do suporte de μ.

Proposição 3.3 *Tome $\alpha \in (0, 1)$. Se υ é $U\alpha H$, então, K é αHc fora de* $\operatorname{supp}\mu$.

Demonstração.

Fixe x fora de $\operatorname{supp}\mu$. Então, existem contantes positivas K_1, K_2 tais que, para ϵ suficientemente pequeno, vale,

$$|F_\mu(x + i\epsilon)|^2 \le K_1, \quad P_\mu(x + i\epsilon) \ge K_2\epsilon$$

(De fato,

$$\begin{aligned}
|F_\mu(x + i\epsilon)|^2 &\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(y)}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \\
&\le \int_{|x-y|\ge\epsilon_0} \frac{d\mu(y)}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \\
&\le \frac{1}{\epsilon^2},
\end{aligned}$$

sendo $\mu(x - \epsilon_0, x + \epsilon_0) = 0$, e $\epsilon \le \epsilon_0$. E, por um cálculo análogo, $P_\mu(x + i\epsilon) \ge \frac{1}{2\epsilon_0{}^2}$). Assim, pela Proposição 3.2, para ϵ suficientemente pequeno, vale

$$\epsilon^{1-\alpha} P_K(x + i\epsilon) \le C_\alpha \left(\frac{|F_\mu(x + i\epsilon)|^2}{P_\mu(x + i\epsilon)} \right)^{1-\alpha} \le C_\alpha \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^{1-\alpha} < \infty,$$

e isto, pela Proposição 2.1, demonstra o afirmado.

O lema que segue é o último resultado necessário para finalizar a demonstração.

Lema 3.2 *Tome* $\alpha \in (0,1)$ *e* v *uma medida* $U\alpha H$. *Fixe* $\beta \in (0,1)$. *Então* K *é* γHc *em* $T^{\beta}_{\mu+}$, *em que,*

$$\gamma(\alpha,\beta) = \alpha - 2(1-\beta)(1-\alpha),$$

desde que $\beta > \max\{0, \frac{2-3\alpha}{2(1-\alpha)}\}$.

Demonstração: Pela proposição acima, o enunciado vale fora do suporte de μ, resta, então, verificar o resultado para os pontos do suporte de μ. Fixe então $x \in T^{\beta}_{\mu+} \cap \operatorname{supp} \mu$. Observe que para tal x, $\overline{D}^{\beta}_{\mu}(x) < \infty$, portanto a Proposição 2.1 nos fornece

$$|F_\mu(x+i\epsilon)| \leq B_{x\beta}\epsilon^{\beta-1},$$

para ϵ suficientemente pequeno, em que $B_{x\beta} > 0$. Escolha γ como no enunciado; então, pela proposição e a observação anterior temos

$$\epsilon^{1-\gamma} P_K(x+i\epsilon) \leq B_{x\beta}^{2(1-\alpha)} \left(\frac{\epsilon^{2(\beta-1)+\frac{1-\gamma}{1-\alpha}}}{P_\mu(x+i\epsilon)} \right)^{1-\alpha} = B_{x\beta}^{2(1-\alpha)} \left(\frac{\epsilon}{P_\mu(x+i\epsilon)} \right)^{1-\alpha},$$

em que a última igualdade se deve ao fato de que a expressão de γ do enunciado foi tomada exatamente para que $2(\beta-1) + \frac{1-\gamma}{1-\alpha} = 1$ (a condição sobre β é imposta para assegurar que $\gamma > 0$).

Como $\frac{P_\mu(x+i\epsilon)}{\epsilon} \to \int \frac{d\mu(y)}{(x-y)^2} > 0$, a desigualdade acima nos fornece,

$$\limsup_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{1-\gamma} P_K(x+i\epsilon) < \infty,$$

e o resultado segue da Proposição 2.1 e do Teorema 2.1, e isto encerra a demonstração.

Com este resultado podemos finalizar a demonstração do caso $U\alpha H$. Denote $\delta = \alpha(1-\epsilon)$, $\epsilon \in (0,1)$, é suficiente demonstrar que o resultado vale se ϵ for suficientemente pequeno, uma vez que, se uma medida for γHc então ela é $\gamma' Hc$ para $\gamma' \leq \gamma$. Tome β de modo que $\gamma(\alpha,\beta) = \delta$, isto é, $\beta = 1 - \frac{\alpha\epsilon}{2(1-\alpha)}$, então para ϵ suficientemente pequeno $\beta > \max\{0, \frac{2-3\alpha}{2(1-\alpha)}\}$ de tal modo que podemos aplicar o lema acima. Seja B um boreliano com $h_\delta(B) = 0$, mostraremos que $K(B) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} K(B) &= K(B \cap T^\beta_{\mu+}) + K(B \cap T^\beta_{\mu\infty}) = K(B \cap T^\beta_{\mu\infty}) \\ &= \int \mu_{\lambda s}(B \cap T^\beta_{\mu\infty}) d\upsilon(\lambda) \\ &\leq \int \mu_{\lambda s}(T^1_{\mu\infty}) d\upsilon(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade se deve ao lema acima, a desigualdade ao fato de que $T^\beta_{\mu\infty} \subset T^1_{\mu\infty}$ e a última igualdade, ao fato de que $T^1_{\mu\infty} = \operatorname{supp} \mu_s$, υ é contínua e que as medidas $\mu_{\lambda s}$ são mutuamente singures. Isto encerra a demonstração neste caso.

Etapa 2. Caso geral, isto é, υ é αHc.

Tome $\delta < \alpha$ e $\epsilon > 0$, sejam υ_1, υ_2 satisfazendo as propiedades do enunciado do Teorema 3.3. Tome um boreliano B satisfazendo $h_\delta(B) = 0$. Pela Etapa 1, vale

$$\int \mu_\lambda(B) d\upsilon_1(\lambda) = 0,$$

portanto

$$K(B) = \int \mu_\lambda(B) d\upsilon_2(\lambda) < \epsilon,$$

e como ϵ é arbitrário, $K(B) = 0$. Isto encerra a demonstração do teorema.

Capítulo 4

Perturbação de posto 1 de operadores unitários

4.1 Resultados preliminares

Neste capítulo demonstraremos os Teoremas 1.3 e 1.4. Para tanto, é necessario estabelecer alguns fatos preliminares, o que será feito na sequência. Embora originais, os resultados aqui obtidos, bem como suas demonstrações, possuem uma grande analogia com os resultados do capítulo anterior.

O resultado que segue é o análogo, neste contexto, da fórmula de Aronszajn-Krein e é uma consequência da segunda identidade do resolvente; para uma demonstração, veja [3].

Proposição 4.1 *Sejam* ω *e* ω_λ *medidas como estabelecido na Introdução, tome* $z \in \mathbb{C}, |z| \neq 1$. *Então, tem-se*

$$\Phi_{\omega_\lambda}(z) = \frac{(e^{i\lambda}-1)+(e^{i\lambda}+1)\Phi_\omega(z)}{(e^{i\lambda}+1)+(e^{i\lambda}-1)\Phi_\omega(z)} \tag{4.1}$$

$$= \frac{e^{i\lambda}+\frac{\Phi_\omega(z)-1}{\Phi_\omega(z)+1}}{e^{i\lambda}-\frac{\Phi_\omega(z)-1}{\Phi_\omega(z)+1}}. \tag{4.2}$$

A partir desta proposição, podemos estabelecer o seguinte resultado, que é o análogo da Proposição 3.1 no contexto de operadores unitários.

Proposição 4.2 *Sejam ρ uma medida finita sobre os borelianos de $[0,2\pi]$ e Ω definida pela equação* (1.6) *da Introdução. Então,*

$$\Phi_\Omega(z) = \Phi_\rho\left(\frac{1-\Phi_\omega(z)}{1+\Phi_\omega(z)}\right). \tag{4.3}$$

Demonstração:

Defina, $w = \frac{\Phi_\omega(z)-1}{\Phi_\omega(z)+1}$, então, pelo mesmo argumento da Proposição 3.1, temos

$$\Phi_\Omega(z) = \int_0^{2\pi} \Phi_{\omega_\lambda}(z)\, d\rho(\lambda),$$

logo, pela equação (4.2) acima, temos,

$$\Phi_\Omega(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+w}{e^{i\lambda}-w}\, d\rho(\lambda) = \Phi_\rho(w),$$

que é exatamente o que queriamos demonstrar.

O resultado abaixo é o análogo do Teorema 3.1.

Teorema 4.1 *Denote por $\omega_{\lambda s}$ a parte singular de ω_λ. Então, para $\lambda \in (0,2\pi)$, $\omega_{\lambda s}$ é suportada em*

$$\left\{\theta : \lim_{r\to 1^-} \Phi_\omega(re^{i\theta}) = -\frac{e^{i\lambda}+1}{e^{i\lambda}-1} = i\cot\frac{\lambda}{2}\right\},$$

em particular a família $\{\omega_{\lambda s}\}_{\lambda\in[0,2\pi)}$ é mutuamente singular.

Demonstração:

Consequência imediata do item iv do Teorema 2.3 e da Proposição 4.1.

Como consequência deste teorema, e com demonstração idêntica à do Teorema 3.2, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Se ρ for uma medida contínua, então Ω é contínua.*

A definição de medida uniformemente contínua sobre os borelianos de $[0,2\pi]$ é exatamente a mesma que Definição 3.1, bastando apenas substiuir $\mathbb{R}$ por $[0,2\pi]$. Com este conceito em mente, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.3 *Seja ρ uma medida finita nos borelianos de $[0, 2\pi]$ e $U\alpha H$, $\alpha \in [0, 1]$. Então existe $C_\alpha \geq 0$ de forma que*

$$\Pi_\Omega(z) \leq C_\alpha \left(\frac{|W(z)|^2}{\Pi_\omega(z)} \right)^{1-\alpha}, \tag{4.4}$$

sendo $W(z) = \frac{1}{2}(1 + \Phi_\omega(z))$.

Demonstração:

Com uma observação cuidadosa dos argumentos usados no Fato 2 da demonstração da Proposição 2.2, constata-se que com a hipótese de que $\rho[\theta, \theta+\delta) \leq C\delta^\alpha$ se demonstra que

$$\limsup_{r \to 1^-} \left((1-r)^{1-\alpha} \Pi_\rho(re^{i\theta}) \right) \ \leq \ 8C \int_0^\infty \frac{u^{\alpha+1}}{(u^2+1)^2} du,$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$. Mas com a hipótese da proposição, a hipótese acima sobre ρ é verdadeira com C independente de θ. Portanto, podemos concluir a existência de uma constante positiva C' de modo que

$$\Pi_\rho(re^{i\theta}) \leq C_1'(1-r)^{\alpha-1},$$

para $r \in [r_0, 1)$ e $\theta \in (0, 2\pi)$, para um dado $r_0 > 0$. Mas como a função $F(r, \theta) \equiv (1-r)^{1-\alpha}\Pi_\rho(re^{i\theta})$ é contínua no compacto $[0, r_0] \times [0, 2\pi]$, é então limitada, digamos, por C_2'. Assim tomando $C' = \max\{C_1', C_2'\}$, vale

$$\Pi_\rho(re^{i\theta}) \leq C'(1-r)^{\alpha-1},$$

para $r \in [0, 1)$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Mas como a função do lado esquerdo da equação acima é contínua com relação a θ, a desigualdade acima se estende também ao caso $\theta \in \{0, 2\pi\}$.

Logo, pela Proposição 4.2,

$$\begin{aligned}
\Pi_\Omega(z) &= \Pi_\rho(\frac{\Phi_\omega(z)-1}{\Phi_\omega(z)+1}) \\
&\leq C'\left(\frac{1}{1-|\frac{\Phi_\omega(z)-1}{\Phi_\omega(z)+1}|}\right)^{1-\alpha} \\
&= C'\left(\frac{1}{1-|1-\frac{1}{W(z)}|}\right)^{1-\alpha} \\
&\leq 2^{1-\alpha}C'\left(\frac{1}{1-|1-\frac{1}{W(z)}|^2}\right)^{1-\alpha} \\
&= 2^{1-\alpha}C'\left(\frac{1}{\frac{2\mathrm{Re}\,W(z)-1}{|W(z)|^2}}\right)^{1-\alpha} \\
&= 2^{1-\alpha}C'\left(\frac{|W(z)|^2}{\Phi_\omega(z)}\right)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

sendo que na segunda desigualdade multiplicou-se o denominador e numerador da fração por

$$1+\left|1-\frac{1}{W(z)}\right| = 1+\left|\frac{\Phi_\omega(z)-1}{\Phi_\omega(z)+1}\right| \leq 2.$$

Portanto, basta tomar $C_\alpha = 2^{1-\alpha}C'$, e isto encerra a demonstração.

Desta proposição se segue o resultado abaixo, cuja demonstração é, praticamente, a do Teorema 3.4, em que, no presente caso, na última igualdade do teorema citado deve-se usar o seguinte fato bem conhecido [12]: Para toda função f contínua definida em $[0,2\pi]$ de periodo 2π vale,

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2}\frac{d\theta}{2\pi} = f(\theta'),$$

sendo que o limite pode ser tomano no sentido uniforme.

Teorema 4.3 *Se ρ for $U1H$, então o mesmo acorre com Ω.*

Com estes resultados podemos agora demonstrar os Teoremas 1.3. e 1.4.

4.2 Demonstração dos Teoremas 1.3 e 1.4

Demonstração do Teorema 1.3. Denote por Γ a medida definida pelo lado direito da equação (1.5). Pelo resultado da seção anterior, Γ é $U1H$, em particular é contínua, logo, pelo item v do Teorema 2.3, temos

$$d\Gamma(\theta) = \frac{\Pi_\Gamma(e^{i\theta})}{2\pi} d\theta.$$

Mas, pela Proposição 4.2 e pelo fato de que $\Pi_{|\cdot|}(re^{i\theta})$ é constante e igual a 2π, segue, então, que $d\Gamma(\theta) = d\theta$, e isto encerra a demonstração.

Demonstração do Teorema 1.4. Esta demonstração se divide em duas etapas.
Etapa 1. Suponha que ρ seja $U\alpha H$

Se $\alpha = 1$ o resultado é consequência direta do Teorema 4.3. Assim, suponha que $\alpha < 1$. Examinemos, inicialmente, o que ocorre fora do suporte de ρ.

Proposição 4.4 *Tome* $\alpha \in (0,1)$. *Se* ρ *for* $U\alpha H$, *então* Ω *é* αHc *fora de* $\operatorname{supp}\omega \cup \{0, 2\pi\}$.

Demonstração:

Fixe θ fora de $\operatorname{supp}\omega \cup \{0, 2\pi\}$. Então existem contantes positivas Δ_1, Δ_2 de forma que, para r suficientemente próximo de 1, vale,

$$|W(re^{i\theta})|^2 \leq \Delta_1$$

e

$$\Pi_\omega(re^{i\theta}) \geq \Delta_2(1-r).$$

De fato, para um dado $\epsilon_0 > 0$ vale $\omega(\theta - \epsilon_0, \theta + \epsilon_0) = 0$, assim,

$$\begin{aligned} |W(re^{i\theta})| &\leq \int_{[0,2\pi]\cap|\theta-\theta'|\geq\epsilon_0} \frac{d\omega(\theta')}{[(1 - 2r\cos(\theta-\theta') + r^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{[2(1-\epsilon_0)(1-\cos\epsilon_0)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

para $r \geq 1 - \epsilon_0$. E ainda,

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\Pi_\omega(re^{i\theta})}{1-r} = \int_{[0,2\pi]\cap|\theta-\theta'|\geq\epsilon_0} \frac{d\omega(\theta')}{1-\cos(\theta-\theta')} > 0$$

é finito pois $0 < 1 - \cos(\theta - \theta') \leq 2$ se $|\theta - \theta'| \geq \epsilon_0 > 0$, e $\theta \neq 0, 2\pi$.

Usando estes fatos em conjunção com a Proposição 4.3 temos, para θ na hipótese da proposição,

$$\limsup_{r\to 1^-} (1-r)^{1-\alpha}\Pi_\Omega(re^{i\theta}) \leq C_\alpha \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{1-\alpha} \leq \infty,$$

e o resultado se segue deste fato combinado com o Teorema 2.1 e a Proposição 2.2, e isto encerra a demonstração.

Com o lema que se segue poderemos finalizar esta etapa da demonstração.

Lema 4.1 *Tome $\alpha \in (0,1)$ e suponha que ρ seja $U\alpha H$. Fixe $\beta \in (0,1)$. Então, Ω é γHc em $T^{\beta}_{\omega 0^+} \setminus \{0, 2\pi\}$, sendo*

$$\gamma = \gamma(\alpha, \beta) = \alpha - 2(1-\beta)(1-\alpha),$$

desde que $\beta > \max\left\{0, \frac{2-3\alpha}{2(1-\alpha)}\right\}$.

Demonstração:

Para os pontos de $T^{\beta}_{\omega 0^+} \setminus \{0, 2\pi\}$ que não pertencem ao suporte de ρ o resultado segue da proposição anterior. Tome então $\theta \in (T^{\beta}_{\omega 0^+} \setminus \{0, 2\pi\}) \cap \operatorname{supp} \rho$, pela Proposição 4.3, temos

$$(1-r)^{\gamma} \Pi_{\Omega}(re^{i\theta}) \leq C_{\alpha} \left[\frac{(1-r)^{\frac{1-\gamma}{1-\alpha}} |W(re^{i\theta})|^2}{\Pi_{\omega}(re^{i\theta})} \right]^{1-\alpha}.$$

Como $\theta \neq 0, 2\pi$ e $D^{\beta}_{\omega}(\theta) < \infty$, por um cálculo similar ao do Fato 2 da Proposição 2.2, segue-se que

$$\limsup_{r \to 1^-} (1-r)^{1-\beta} |W(re^{i\theta})| < \infty \Rightarrow |W(re^{i\theta})| \leq C_{\theta}(1-r)^{\beta - 1},$$

para $r \in [r_0, 1)$, para um dado $r_0 > 0$. Assim, para uma certa constante $C_{\theta\alpha}$, vale,

$$(1-r)^{\gamma} \Pi_{\Omega}(re^{i\theta}) \leq C_{\theta\alpha} \left[\frac{(1-r)^{\frac{1-\gamma}{1-\alpha} + 2(\beta - 1)}}{\Pi_{\omega}(re^{i\theta})} \right]^{1-\alpha}.$$

Se γ for como no enunciado, então $\frac{1-\gamma}{1-\alpha} + 2(\beta - 1) = 1$ e o último membro da equação acima torna-se igual a

$$C_{\theta\alpha} \left[\frac{(1-r)}{\Pi_{\omega}(re^{i\theta})} \right]^{1-\alpha},$$

e como $\theta \in \operatorname{supp} \omega - \{0, 2\pi\}$ vale,

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\Pi_{\omega}(re^{i\theta})}{1-r} = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega(\theta')}{1 - \cos(\theta - \theta')} > 0,$$

logo,

$$\limsup_{r \to 1^-} (1-r)^{\gamma} \Pi_{\Omega}(re^{i\theta}) \leq \lim_{r \to 1^-} C_{\theta\alpha} \left[\frac{(1-r)}{\Pi_{\omega}(re^{i\theta})} \right]^{1-\alpha} < \infty.$$

Finalmente, $\gamma > 0$ desde que $\beta > \max\{0, \frac{2-3\alpha}{2(1-\alpha)}\}$, e o resultado se segue deste fato combinado com o Teorema 2.1 e a Proposição 2.2, e isto encerra a demonstração.

Com estes resultados finalizaremos a demonstração para o caso $U\alpha H$. Denote $\delta = \alpha(1-\epsilon)$, $\epsilon \in (0,1)$; é suficiente demonstrar que o resultado vale se ϵ for suficientemente pequeno, uma vez que, se uma medida for γHc então ela é $\gamma' Hc$ para $\gamma' \leq \gamma$. Tome β de modo que $\gamma(\alpha, \beta) = \delta$, isto é, $\beta = 1 - \frac{\alpha\epsilon}{2(1-\alpha)}$, então para ϵ suficientemente pequeno $\beta > \max\{0, \frac{2-3\alpha}{2(1-\alpha)}\}$ de tal modo que podemos aplicar o lema acima.

Seja B um boreliano com $h_\delta(B) = 0$, mostraremos que $\Omega(B) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\Omega(B) &= \Omega(B \cap (T^\beta_{\omega 0^+} \setminus \{0, 2\pi\})) + \Omega(B \cap T^\beta_{\omega\infty} \cup \{0, 2\pi\}) = \Omega(B \cap T^\beta_{\omega\infty}) \\ &= \int_0^{2\pi} \omega_{\lambda s}(B \cap T^\beta_{\omega\infty}) d\rho(\lambda) \\ &\leq \int_0^{2\pi} \omega_{\lambda s}(T^1_{\omega\infty}) d\rho(\lambda) = 0;\end{aligned}$$

a segunda igualdade se deve ao lema acima e ao fato de sendo ρ contínua, Ω é contínua, e assim $\Omega(\{0, 2\pi\}) = 0$; a desigualdade segue do fato de que $T^\beta_{\omega\infty} \subset T^1_{\omega\infty}$, e a última igualdade do fato de que $T^1_{\omega\infty} = \operatorname{supp} \omega_s$, ρ é contínua e que as medidas $\omega_{\lambda s}$ são mutuamente singulares. Isto encerra a demonstração neste caso.

Etapa 2. Caso geral, isto é, ρ é αHc.

Tome $\delta < \alpha$ e $\epsilon > 0$, sejam ρ_1, ρ_2 como no enunciado do Teorema 3.3, isto é, ρ_1 é $U\alpha H$, $\rho_2(\mathbb{R}) < \epsilon$ e $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Tome um boreliano B tal que $h_\delta(B) = 0$. Pela etapa 1, vale

$$\int_0^{2\pi} \omega_\lambda(B) d\rho_1(\lambda) = 0,$$

portanto,

$$\Omega(B) = \int_0^{2\pi} \omega_\lambda(B) d\rho_2(\lambda) < \epsilon,$$

e como ϵ é arbitrário, $\Omega(B) = 0$. E isto encerra a demonstração do teorema.

Referências Bibliográficas

[1] Bourget, O. (2005) **Singular continuous Floquet operator for periodic quantum sytems** J.math.anal. appl. 65-83.

[2] Combescure, M. (1990) **Spectral properties of a periodically kicked quantum Hamiltonian**. Journal of Statistical Physics, vol. 59, 679–690.

[3] de Oliveira, C.R., Simsen, M.S. (2007) **A Floquet operator with purely point spectrum and energy instability**. Annales Henri Poincaré, 1225–1277.

[4] del Rio, R., Jitomirskaya, S., Last, Y., Simon, B. (1996) **Operators with singular continuous spectrum. IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization**. J. Anal. Math. 69 ,153–200.

[5] Falconer, K.J (1990) **Fractal Geometry**. Wiley, Chichester

[6] Hamza,E., Joye, E., Stolz, G., **Localization for random unitary operators**, Lett. Math. Phys. (2006) 75:255–272.

[7] Joye, A., **Fractional Moment Estimates for Random Unitary Operators**, Lett. Math. Phys. (2005) 72:51–64.

[8] Kotani, S. (1984) **Lyapunov expoents and spectra for one dimensional random Schrödinger operators**. Comtemporary Math., vol 50, amer. math. soc. 277-286

[9] Marx, C.A. (2011) **Continuity of spectral averaging**. Proc. Amer. Math. Soc. 139, no 1, 283–291.

[10] Mattila, P. (1995) **Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Fractals and rectifiability**. Cambridge studies in advanced mathematics.

[11] Rogers, C.A. (1970) **Hausdorff Measures**. Cambridge Mathematical Library.

[12] Rudin, W. (1987) **Real and Complex Analysis 3rd ed.** McGraw-Hill Book Company, p 239.

[13] Simon, B. (2005) **Trace Ideals and Their Applications 2nd ed.**. American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs vol 120.

[14] Simon, B. e Wolff, T. (1986) **Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians**. Comm. Pure Appl. Math. 39, 75–90.