UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Existência de Atrator para Problemas com Operadores Monótonos e Dominados pelo p-Laplaciano com Difusão

Thays Regina Santana Couto

São Carlos - SP

Março de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Existência de Atrator para Problemas com Operadores Monótonos e Dominados pelo p-Laplaciano com Difusão

Thays Regina Santana Couto

Orientadora: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Vera Lúcia Carbone

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Março de 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C871e

Couto, Thays Regina Santana
Existência de atrator para problemas com operadores monótonos e dominados pelo p-Laplaciano com difusão / Thays Regina Santana Couto. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
119 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Atrator. 2. Grande difusão. 3. Semicontinuidade superior. 4. p-Laplaciano. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Thays Regina Santana Couto, realizada em 31/03/2016:

VLcarbone

Profa. Dra. Vera Lucia Carbone
UFSCar

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP

Karina Schiabel

Profa. Dra. Karina Schiabel
UFSCar

Agradecimentos

Quero agradecer a todas aquelas pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para esse trabalho, em especial:

À professora Vera por sua inestimável dedicação, orientação e paciência. Apesar da ocupação do cargo de Chefe do Departamento de Matemática sempre esteve presente e prestativa. Sou lhe grata as inúmeras horas dedicadas a este trabalho, para que se tornasse o melhor possível.

Aos meus pais Couto e Sueli. Por desde pequena incentivarem em mim, e em minhas irmãs, a curiosidade pelo saber. Agradeço ainda pela compreensão e paciência quanto ao meu retorno para casa, nesses dois anos de mestrado houveram momentos que tive de cancelar a ida e segurar a saudade.

Às minhas irmãs Irys e Elys. Obrigada por todo apoio que sempre me deram, todas as conversas, torcidas e orações.

Ao Bruno Marchi, meu namorado, obrigada pela parceria e toda ajuda prestada durante meu mestrado. Esses dois últimos anos com a sua companhia tornou tudo mais divertido.

Aos meus amigos Aline, André, Janaina, Jéssica, Maria Luana, Neuterlândio, Patrick, Paulo Henrique, Philippe, Sibele e Silmara. Obrigada pelas conversas, torcida e principalmente por permanecerem com a amizade apesar da distância.

Aos colegas Claudia Escobar, Cristiano Augusto e Fernando Gomes. Obrigada pela ajuda prestada com o tex.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática com os quais convivi, cursando disciplinas e vivenciando a prática acadêmica.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho é sobre a semicontinuidade superior de uma família de atratores globais associados a equações de reação-difusão, não-lineares, cujo termo principal é determinado por um operador maximal monótono governado pelo p-Laplaciano degenerado em que a difusão d_λ explode em regiões localizadas dentro do domínio.

Palavras-Chave: atrator; grande difusão; semicontinuidade superior; p-Laplaciano.

Abstract

This work is about the upper semicontinuity of the family of global attractors associated to nonlinear reaction diffusion equations whose principal part is determined by maximal operator monotonous governed by degenerate p-Laplacian in which the diffusion d_λ blows up in localized regions inside the domain.

Keywords: attractors; large diffusion; upper semicontinuity; p-Laplacian.

Conteúdo

Introdução

Consideremos a seguinte família de equações:

$$(P_\lambda)\begin{cases} u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda = B(u^\lambda) & \text{em } \Omega \\ u^\lambda = 0 & \text{em } \Gamma \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

onde $\lambda \in (0,1]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto, conexo, limitado e suave com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Denotaremos por Ω_0 um subconjunto aberto de Ω, conexo e suave tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{0,i}$ onde m é um inteiro positivo e $\Omega_{0,i}$ são subconjuntos, abertos, suaves e conexos de Ω satisfazendo $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Sejam $\Omega_1 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_0$, $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$ e $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0, respectivamente.

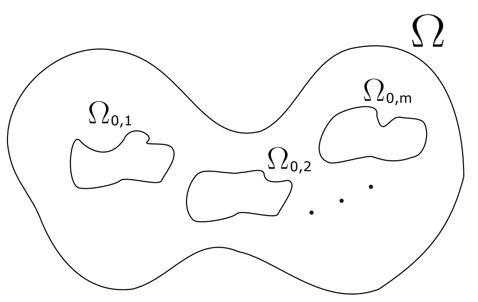

Figura 1: Esboço do Domínio Ω.

Assumimos $p > 2$ e B aplicação não-linear, globalmente Lipschitz e uniformemente integrável. Além disso, os coeficientes de difusão $d_\lambda : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ são funções suaves em Ω, satisfazendo

$$0 < m_0 \leq d_\lambda(x) \leq M_\lambda,$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \lambda \leq 1$. Seja $d_0 : \overline{\Omega}_1 \to (0,\infty)$ uma função suave com $0 < m_0 \leq d_0(x) \leq M_0$, para todo $x \in \overline{\Omega}_1$, tal que

$$d_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \to 0} \begin{cases} d_0(x), & \text{uniformemente em } \overline{\Omega}_1; \\ \infty, & \text{uniformemente sob subconjuntos compactos de } \Omega_0. \end{cases}$$

Assim como apresentado em [4, 16], estamos assumindo que a difusão d_λ é grande em regiões localizadas dentro do domínio Ω. Logo, conforme $\lambda \to 0$, esperamos ter uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais, com isso é natural esperar que para pequenos valores de λ a solução, u^λ, se torne espacialmente constante nas regiões de grande difusão. Sendo justificado assumir o problema limite (P_0):

$$(P_0)\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = B(u) & \text{em } \Omega_1 \\ u_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}} & \text{em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p-2}u_{\Omega_{0,i}}\,\mathrm{d}x\right] = B(u_{\Omega_{0,i}}) & \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \\ u(0) = u_0. & \end{cases}$$

Em termos práticos os problemas (P_λ) descrevem modelos de calor onde o material de condução é composto, consequentemente a condução do calor é variada podendo ocorrer rapidamente em certas regiões e lentamente em outras. Assim a análise assintótica da família dos (P_λ), que consiste em estudar o comportamento dos atratores, têm por objetivo prever o comportamento desses modelos físicos ao longo do tempo. Mais precisamente, iremos garantir a semicontinuidade superior em $\lambda = 0$ da família de atratores globais associados à $(P_\lambda) - (P_0)$.

Uma etapa importante é garantirmos a existência da família de atratores para $(P_\lambda) - (P_0)$, neste sentido para cada λ os problemas $(P_\lambda) - (P_0)$ podem ser escritos abstratamente na forma:

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + B(u(t)) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é operador não-linear maximal monótono e B é uma aplicação globalmente Lipschitz. Pela teoria abstrata em [2], que garante a existência de atrator global para problemas dessa forma, temos a existência de uma família de atratores para $(P_\lambda) - (P_0)$.

O trabalho foi organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentaremos o conceito de operador maximal monótono, dando ênfase ao caso em que A é maximal monótono em um espaço de Hilbert H. Garantimos a existência de solução para a inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au - \omega u \ni f$, onde A é operador em H maximal monótono, $\omega > 0$ e $f \in L^1(0, T; H)$, com a finalidade de provarmos a existência de solução para $(P_\lambda) - (P_0)$. Finalizamos o Capítulo com uma breve introdução do conceito de semigrupo. No Capítulo 2 trataremos a teoria de atratores globais, dentre os conceitos introduzidos nesse capítulo estão os conceitos de órbitas, conjuntos limites, atrator global para o semigrupo e semicontinuidade superior e inferior da família de atratores.

No Capítulo 3 garantimos a existência de atrator global para (P) e aplicamos a teoria abstrata para o problema:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - |u|^{\rho-1}u + f(u), & t > 0 \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, conexo, limitado e suave, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalmente Lipschitz, $p > 2$ e $\rho > 1$.

Por fim no Capítulo 4 são apresentados os problemas $(P_\lambda) - (P_0)$ formalmente e demonstrado o principal resultado deste trabalho:

Teorema: *A família de atratores* $\{A_\lambda : \lambda \in [0,1]\}$ *é semicontínua superiormente em* $\lambda = 0$.

Capítulo 1

Operador Monótono e o Conceito de Semigrupo

Neste capítulo trataremos a teoria de operadores monótonos, abordando o conceito de operador maximal monótono, e garantimos a existência de solução de algumas equações de evolução com condição inicial, uma delas é a equação de evolução $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ com $u(0) = u_0$, onde A é operador maximal monótono e f integrável. Por fim será introduzido o conceito de Semigrupo. Para este capítulo podemos citar como principais referências [8] e [15].

1.1 Operador monótono

Consideremos X e Y espaços vetoriais reais. Denotaremos por $X \times Y$ o conjunto $\{(x, y); x \in X \text{ e } y \in Y\}$, por $\mathscr{P}(Y)$ o conjunto de todos os subconjuntos de Y.
Dizemos que $A : X \to \mathscr{P}(Y)$ é um operador de X em Y se a cada $x \in X$ associar $Ax \in \mathscr{P}(Y)$, ou seja, um operador de X em Y é uma aplicação de X em $\mathscr{P}(Y)$. Definimos:

1. o domínio do operador A por $D(A) = \{x \in X; Ax \neq \emptyset\}$;

2. a imagem do operador A por $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$;

3. o gráfico do operador A por $Gr(A) = \{(x, y) \in X \times Y; y \in Ax\}$.

Se para cada $x \in D(A)$ o conjunto Ax for unitário então diremos que A é unívoco, caso contrário diremos que A é multívoco. Se o operador A é unívoco, denotaremos $A : D(A) \subset X \to Y$.
Sejam A e B operadores de X em Y e λ um número real não-nulo, definimos o operador:

(i) λA como sendo aquele cujo gráfico é o conjunto $\{(x, y); (x, \lambda^{-1}y) \in Gr(A)\}$, ou seja, $y \in \lambda Ax \Leftrightarrow \lambda y \in Ax$;

(ii) $A + B$ como sendo o operador cujo gráfico é o conjunto $\{(x, y + z); (x, y) \in A \text{ e } (x, z) \in B\}$;

(iii) AB como sendo o operador cujo gráfico é $\{(x, z); (x, y) \in B \text{ e } (y, z) \in A \text{ para algum } y \in Y\}$;

(iv) A^{-1} como sendo o operador cujo gráfico é simétrico ao gráfico de A, isto é $(x, y) \in Gr(A^{-1}) \Leftrightarrow (y, x) \in Gr(A)$, ou ainda, $y \in A^{-1}x \Leftrightarrow x \in Ay$.

Notamos que, $D(A^{-1}) = R(A)$, de fato:

$$y \in D(A^{-1}) \Leftrightarrow A^{-1}y \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in A^{-1}y \Leftrightarrow y \in Ax \Leftrightarrow y \in \bigcup_{x \in X} Ax = R(A).$$

Assumiremos que X é espaço de Banach real e denotaremos por $\| \cdot \|$ a norma em X. Definimos o espaço dual de X por:

$$X' := \{f : X \to \mathbb{R}; f \text{ é linear e contínua}\}.$$

Em X' consideramos a norma dual,

$$\|f\|_{X'} := \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Se $f \in X'$ denotaremos $f(x)$ por $\langle f, x \rangle_{X',X}$ e dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ é o produto de dualidade entre X' e X.

Definição 1.1 (operador monótono)**.** *Dizemos que o operador $A : D(A) \subset X \to \mathscr{P}(X')$ (ou $A : D(A) \subset X' \to \mathscr{P}(X)$) é operador monótono se*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X',X} \geq 0, \quad \text{para todo } (x_1, y_1) \text{ e } (x_2, y_2) \text{ em } Gr(A). \tag{1.1}$$

Sendo A unívoco então (1.1) pode ser reescrita como

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle_{X',X} \geq 0, \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in D(A).$$

No caso em que A é unívoco e linear, basta verificarmos que

$$\langle Ax, x \rangle_{X',X} \geq 0, \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Na situação em que X é um espaço de Hilbert, denotaremos X por H, por consequência da identificação de H com seu dual, $H \cong H'$, dizemos que o operador $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ é monótono se (1.1) ocorre trocando $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. A seguir temos alguns exemplos de operador monótono:

Exemplo 1.1. *Seja* $A : C_c^\infty(]a,b[) \subset L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ *o operador linear dado por* $\varphi \mapsto A\varphi = -\varphi''$. *Afirmamos que* A *é operador monótono.*

De fato, em $L^2(]a,b[)$ *temos o produto interno* $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt$, *assim, segue que:*

$$\begin{aligned}\langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle -\varphi''(t), \varphi(t) \rangle = \int_a^b (-\varphi''(t))\varphi(t)dt = -\varphi(t)\varphi'(t)\Big|_a^b - \int_a^b -\varphi'(t)\varphi'(t)dt \\ = -\varphi(b)\varphi'(b) + \varphi(a)\varphi'(a) + \int_a^b [\varphi'(t)]^2 dt = \int_a^b [\varphi'(t)]^2 dt \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto, A *é operador monótono.*

Exemplo 1.2. *Consideremos a aplicação* $J : X \to \mathscr{P}(X')$ *definida por*

$$Jx = \{f \in X'; \langle f, x \rangle_{X',X} = \|x\|^2 \text{ e } \|f\|_{X'} = \|x\|\}, \quad \forall x \in X.$$

Tal aplicação, conhecida como aplicação dualidade de X, *é monótona. Realmente, sejam* $(x_i, y_i) \in Gr(J)$ *quaisquer, com* $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X',X} =& \langle y_1 - y_2, x_1 \rangle_{X',X} - \langle y_1 - y_2, x_2 \rangle_{X',X} \\ =& \langle y_1, x_1 \rangle_{X',X} - \langle y_2, x_1 \rangle_{X',X} - \big(\langle y_1, x_2 \rangle_{X',X} - \langle y_2, x_2 \rangle_{X',X}\big) \\ =& \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \langle y_2, x_1 \rangle_{X',X} - \langle y_1, x_2 \rangle_{X',X} \\ \geq& \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2\| = (\|x_1\| - \|x_2\|)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.2) *ocorre pois:*

$$\begin{aligned}\langle y_2, x_1 \rangle_{X',X} + \langle y_1, x_2 \rangle_{X',X} \leq |\langle y_2, x_1 \rangle_{X',X}| + |\langle y_1, x_2 \rangle_{X',X}| \leq \|y_2\|_{X'}\|x_1\| + \|y_1\|_{X'}\|x_2\| \\ = \|x_2\|\|x_1\| + \|x_1\|\|x_2\| = 2\|x_1\|\|x_2\|.\end{aligned}$$

Exemplo 1.3. *Seja* φ *uma função convexa e própria sobre* H, *ou seja,* φ *é uma aplicação de* H *em* $]-\infty, +\infty]$ *tal que* φ *não é constante* $+\infty$ *e*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \quad \forall x, y \in H \text{ e } \forall t \in (0,1).$$

Consideremos o operador multívoco $\partial\varphi$, chamado subdiferencial de φ, definido por:

$$\begin{aligned} \partial\varphi: \ H &\to \ \mathscr{P}(H) \\ x &\mapsto \ \partial\varphi(x) = \{y \in H; \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x\rangle_H, \quad \forall z \in H\}. \end{aligned}$$

Sejam $x_1, x_2 \in H$, $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ e $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$. Em particular $\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1\rangle_H$ e $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle_H$. Assim,

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle_H + \langle y_1, x_2 - x_1\rangle_H$$

implicando que

$$\begin{aligned} \langle y_1, x_2 - x_1\rangle_H + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle_H \leq 0 &\Leftrightarrow -\langle y_1, x_1 - x_2\rangle_H + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle_H \leq 0 \\ (-1)\big(\langle y_1, x_1 - x_2\rangle_H - \langle y_2, x_1 - x_2\rangle_H\big) \leq 0 &\Leftrightarrow \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle_H \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto $\partial\varphi$ é operador monótono.

1.2 Operador maximal monótono

Consideremos a seguinte relação no conjunto de todos os operadores de X em Y:

$$A \leq B \Leftrightarrow Gr(A) \subset Gr(B)$$

tal relação é de ordem parcial no espaço vetorial real de todos os operadores de X em Y, afinal satisfaz:

(a) Reflexiva: $Gr(A) \subset Gr(A)$;

(b) Anti-simétrica: $Gr(A) \subset Gr(B)$ e $Gr(B) \subset Gr(B)$ então $Gr(A) = Gr(B)$;

(c) Transitiva: $Gr(A) \subset Gr(B)$ e $Gr(B) \subset Gr(C)$ então $Gr(A) \subset Gr(C)$.

A verificação de que o espaço de todos os operadores de X em Y é espaço vetorial real, é análoga a verificação de que o espaço das funções de X em Y é espaço vetorial real.

Definição 1.2 (operador maximal monótono)**.** *Um operador $A : D(A) \subset X \to \mathscr{P}(X')$ é dito maximal monótono se for elemento maximal no espaço de todos os operadores monótonos de X em X'. Mais precisamente, $A : D(A) \subset X \to \mathscr{P}(X')$ é dito maximal monótono se A é operador* *monótono e dado qualquer operador monótono $B : D(B) \subset X \to \mathscr{P}(X')$ tal que $A \leq B$ então $A = B$.*

Apresentamos a seguir uma equivalência facilmente verificável para definição de operador maximal monótono.

Proposição 1.1. *O operador $A : D(A) \subset X \to \mathscr{P}(X')$ é maximal monótono, se e somente se, A é monótono e para todo $(x_0, y_0) \in X \times X'$ tal que*

$$\langle y_0 - y, x_0 - x\rangle_{X',X} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in Gr(A)$$

tem-se $(x_0, y_0) \in Gr(A)$.

DEMONSTRAÇÃO:
($\Leftarrow$) Seja $B : D(B) \subset X \to \mathscr{P}(X')$ operador monótono tal que $A \leq B$. Seja $(x_0, y_0) \in Gr(B)$, como B é monótono, temos que

$$\langle y_0 - y, x_0 - x\rangle_{X',X} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in Gr(B).$$

Em particular, para todo $(x, y) \in Gr(A)$, logo por hipótese $(x_0, y_0) \in Gr(A)$. Com isso concluímos que $Gr(B) \subset Gr(A)$, isto é, $B \leq A$. Pela anti-simétrica segue que $A = B$.
($\Rightarrow$) Suponhamos que A é maximal monótono e que existe $(x_0, y_0) \in X \times X'$ tal que

$$\langle y_0 - y, x_0 - x\rangle_{X',X} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in Gr(A) \text{ e } (x_0, y_0) \notin Gr(A).$$

Seja $\tilde{A}$ tal que $Gr(\tilde{A}) = Gr(A) \cup \{(x_0, y_0)\}$, claro que $A \leq \tilde{A}$ e $\tilde{A}$ é monótono, contradizendo a maximalidade do operador A. ■

Exemplo 1.4. *Se A é maximal monótono e λ é positivo qualquer então os operadores λA e A^{-1} são maximais monótonos.*

Os resultados a seguir são para o caso particular $X = H$, onde H denota um espaço de Hilbert sobre o corpo real. Resultados mais gerais podem ser encontrados em [15].

Lema 1.1. *Sejam $C \neq \emptyset$ convexo e fechado em H e $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ tal que $D(A) \subset C$. Então, para todo $y \in H$ existe $x \in C$ tal que*

$$\langle \eta + x, \xi - x\rangle \geq \langle y, \xi - x\rangle, \quad \forall (\xi, \eta) \in Gr(A).$$

A demonstração desse Lema foi omitida e pode ser encontrada na página 24 em [8].

Observação 1.1. *Sendo $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ maximal monótono, então $R(I+A) = H$. Afinal, aplicando o Lema acima para $C = H$ temos que para todo $y \in H$ existe $x \in H$ tal que*

$$\langle \eta - (y - x), \xi - x \rangle \geq 0, \quad \forall (\xi, \eta) \in Gr(A),$$

como estamos supondo A maximal monótono, segue da Proposição 1.1 que $(x, y - x) \in Gr(A)$, ou seja, $y - x \in Ax$, ou ainda, $y \in (I + A)x$. Com isso, $H \subset R(I + A)$, e portanto $R(I + A) = H$.

A seguir apresentamos caracterizações para a definição de operador maximal monótono em H.

Proposição 1.2. *Considere o operador $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$. São equivalentes:*

(i) *A é maximal monótono;*

(ii) *A é monótono e $R(I + A) = H$;*

(iii) *Para todo $\lambda > 0$, o operador $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo H.*

DEMONSTRAÇÃO: $(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $(u, v) \in H \times H$ arbitrário tal que

$$\langle v - y, u - x \rangle_{X',X} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in Gr(A).$$

Pela Proposição 1.1 basta mostrarmos que $(u, v) \in Gr(A)$ para concluir (i). Usando a hipótese de A ser monótono temos

$$\begin{aligned} \|u - x + v - y\|^2 =& \langle u - x + v - y, u - x + v - y \rangle \\ =& \|u - x\|^2 + 2\langle u - x, v - y \rangle + \|v - y\|^2 \\ \geq& \|u - x\|^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|u - v\| \leq \|u - x + v - y\|, \text{ para todo } (x, y) \in Gr(A). \tag{1.3}$$

Por hipótese $R(I + A) = H$ então existe $(\xi, \eta) \in Gr(A)$ tal que $u + v = \xi + \eta$, assim

$$\|u + v - x - y\|_H = \|\xi + \eta - x - y\|_H, \text{ para todo } (x, y) \in Gr(A). \tag{1.4}$$

Em particular para $(x, y) = (\xi, \eta) \in Gr(A)$, segue que de (1.3) e (1.4) que

$$0 \leq \|u - \xi\| \leq \|\xi + \eta - \xi + \eta\| = 0$$

logo $u = \xi$, como $u + v = \xi + \eta$ temos $v = \eta$. Portanto $(u, v) \in Gr(A)$.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Para todo $\lambda > 0$, λA é operador maximal monótono, já que A é operador maximal monótono. Pela Observação 1.1, segue que $R(I + \lambda A) = H$. Sejam $y_1, y_2 \in R(I + \lambda A)$ então existem $x_1, x_2 \in D(A)$ e $z_1 \in Ax_1$ e $z_2 \in Ax_2$ tais que

$$y_1 = x_1 + \lambda z_1 \in (I + \lambda A)x_1 \Rightarrow x_1 \in (I + \lambda A)^{-1} y_1$$
$$y_2 = x_2 + \lambda z_2 \in (I + \lambda A)x_2 \Rightarrow x_2 \in (I + \lambda A)^{-1} y_2.$$

Por contas análogas as feitas na implicação anterior, já que o operador λA é monótono, podemos concluir (1.3), em particular vale

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\| = \|y_1 - y_2\|,$$

para todo $y_1, y_2 \in H = R(I + \lambda A) = D((I + \lambda A)^{-1})$. Portanto, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração fraca definida em todo H.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Verificaremos primeiramente que A é operador monótono. Tome $\lambda > 0$ qualquer, sejam $x_1, x_2 \in D(A)$, $z_1 \in Ax_1$ e $z_2 \in Ax_2$ arbitrários. Escreva

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \lambda z_1 \\ y_2 &= x_2 + \lambda z_2. \end{aligned}$$

Como o operador $(I + \lambda A)^{-1}$ é contração, $x_1 \in (I + \lambda A)^{-1} y_1$ e $x_2 \in (I + \lambda A)^{-1} y_2$ temos:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\| = \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\|.$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 \leq& \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\|^2 \\ =& \langle x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2), x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\rangle_H \\ =& \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda \langle x_1 - x_2, z_1 - z_2\rangle_H + \lambda^2 \|z_1 - z_2\|^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
&2\lambda\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2\rangle_H + \lambda^2\|z_1 - z_2\|^2 \geq 0 \\
\Rightarrow\quad &2\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2\rangle_H + \lambda\|z_1 - z_2\|^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Por λ ser arbitrário fazendo λ tender a 0 temos que:

$$\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2\rangle_H \geq 0.$$

Logo A é monótono. Segue da hipótese, para $\lambda = 1$, que o operador $(I + A)^{-1}$ está definido em todo H, ou seja, $D((I + A)^{-1}) = H$. Com isso $R(I + A) = H$, finalizando a demonstração. ■

Lema 1.2. *Sejam $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e $\alpha \geq 0$, tal que $\varphi \not\equiv +\infty$. A aplicação convexa*

$$x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|_H^2$$

atinge seu mínimo em x_0 se, e somente se, $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.

DEMONSTRAÇÃO: Claro que $x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|_H^2$ é convexa, já que $x \mapsto \|x\|_H^2$ e φ são convexas. ($\Leftarrow$) Se $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$, para algum $x_0 \in H$, então para todo $z \in H$

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) - \varphi(x_0) \geq &\langle\alpha(y - x_0), z - x_0\rangle_H = \alpha\langle y - x_0, z - x_0\rangle_H \\
= &\alpha\langle y - x_0, z - y + y - x_0\rangle_H = \alpha\langle y - x_0, y - x_0\rangle_H + \alpha\langle y - x_0, z - y\rangle_H \\
\geq &\alpha\|y - x_0\|_H^2 + \alpha\left(-\frac{1}{2}\|y - x_0\|_H^2 - \frac{1}{2}\|z - y\|_H^2\right) \qquad (1.5) \\
= &\frac{\alpha}{2}(\|y - x_0\|_H^2 - \|z - y\|_H^2).
\end{aligned}
$$

(1.5) ocorre, pois:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle y - x_0 + (z - y), y - x_0 + (z - y)\rangle_H \\
&= \langle y - x_0, y - x_0\rangle_H + 2\langle y - x_0, z - y\rangle_H + \langle z - y, z - y\rangle_H \\
&= \|y - x_0\|_H^2 + 2\langle y - x_0, z - y\rangle_H + \|z - y\|_H^2 \\
\Rightarrow -&\langle y - x_0, z - y\rangle_H \leq \frac{1}{2}\|y - x_0\|_H^2 + \frac{1}{2}\|z - y\|_H^2.
\end{aligned}
$$

Com isso para todo $z \in H$ temos:

$$\varphi(z) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}\|y - x_0\|_H^2 - \frac{\alpha}{2}\|z - y\|_H^2$$

implicando que

$$\varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|y - x_0\|_H^2 \leq \varphi(z) + \frac{\alpha}{2}\|y - z\|_H^2.$$

Logo a aplicação $x \mapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|_H^2$ atinge seu mínimo em x_0.
($\Rightarrow$) Suponhamos que a aplicação $x \mapsto \varphi(x) + \dfrac{\alpha}{2}\|x - y\|_H^2$ atinge seu mínimo em x_0. Seja $w \in H$ e $z_t := (1-t)x_0 + tw$, onde $0 < t < 1$. Como o mínimo da aplicação é atingido em x_0, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(z_t) - \varphi(x_0) \geq &\frac{\alpha}{2}\|y - x_0\|_H^2 - \frac{\alpha}{2}\|z_t - y\|_H^2 \\
= &\frac{\alpha}{2}(\langle y - x_0, y - x_0\rangle_H + \langle y - x_0, z_t - y\rangle_H - \langle y - x_0, z_t - y\rangle_H - \langle z_t - y, z_t - y\rangle_H) \\
= &\frac{\alpha}{2}(\langle x_0 - y, x_0 + z_t - 2y\rangle_H + \langle x_0 + z_t - 2y, y - z_t\rangle_H) \\
= &\frac{\alpha}{2}\langle x_0 + z_t - 2y, x_0 - z_t\rangle_H.
\end{aligned}$$

Por sua vez, da convexidade de φ, temos que $\varphi(z_t) \leq (1-t)\varphi(x_0) + t\varphi(w) = \varphi(x_0) - t\varphi(x_0) + t\varphi(w)$, logo

$$\begin{aligned}
t(\varphi(w) - \varphi(x_0)) \geq &\varphi(z_t) - \varphi(x_0) \\
\geq &\frac{\alpha}{2}\langle x_0 + z_t - 2y, x_0 - z_t\rangle_H \\
= &\frac{\alpha}{2}\langle 2x_0 - tx_0 + tw - 2y, tx_0 - tw\rangle_H,
\end{aligned}$$

dividindo a desigualdade por t e fazendo $t \to 0$, obtemos

$$\varphi(w) - \varphi(x_0) \geq \alpha\langle y - x_0, w - x_0\rangle_H.$$

Portanto $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. ■

Exemplo 1.5. *Seja $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ função convexa, $\varphi \not\equiv +\infty$ e semicontínua inferiormente. Então o operador subdiferencial $\partial\varphi$, definido no Exemplo 1.3, é operador maximal monótono. De fato, seja $y \in H$, claro que a aplicação $x \mapsto \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2$ é contínua, portanto é semicontínua inferiormente. Com isso*

$$x \mapsto \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2,$$

é semicontínua inferiormente, além disso é convexa. Notemos que, quando $\|x\|_H \to \infty$ *temos* $\varphi(x) + \frac{1}{2}\|x-y\|_H^2 \to \infty$, *assim pelo Teorema A.2 a aplicação* $x \mapsto \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x-y\|_H^2$ *atinge seu mínimo em algum* $x_0 \in H$. *Pelo Lema 1.2* $(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. *Ou seja, existe* $x_0 \in H$ *tal que* $y \in (I + \partial\varphi)x_0$. *Portanto* $H = R(I + \partial\phi)$ *e, pelo Exemplo 1.3,* $\partial\phi$ *é operador monótono. Segue da Proposição 1.2, que* $\partial\varphi$ *é um operador maximal monótono.*

No caso em que o operador A é unívoco e linear, temos a caracterização a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [8], página 26.

Proposição 1.3. *Seja* $A : D(A) \subset H \to H$ *um operador unívoco e linear. Temos que:*
A é maximal monótono, se e somente se, $D(A)$ *é denso em* H *e operador* A *é maximal no espaço dos operados monótonos, unívocos e lineares.*

Apresentamos dois conceitos que serão de grande importância no desenvolvimento desse trabalho.

Definição 1.3 (operador hemicontínuo/ operador coercivo)**.** *Seja* $A : X \to X'$, *com* $D(A) = X$. *O operador* A *é dito ser hemicontínuo se, para todo* $x, y \in X$

$$A(x + ty) \rightharpoonup A(x), \text{ quando } t \to 0.$$

O operador A *é dito coercivo se, para algum* $x_0 \in X$

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle A(x), x - x_0\rangle_{X',X}}{\|x\|} = \infty.$$

O resultado a seguir que conclui acerca da maximalidade monótona do operador.

Proposição 1.4. *Seja* $A : H \to H$ *um operador monótono. Se* A *é hemicontínuo então* A *é maximal monótono.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(x_0, y_0) \in H \times H$ tal que $\langle Ax - y_0, x - x_0\rangle_H \geq 0$, para todo $x \in D(A) = H$. Consideremos

$$x_t = x_0 + t(y_0 - Ax_0),$$

para $0 < t < 1$. Então

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Ax_t - y_0, x_t - x_0\rangle_H &= \langle A(x_0 + t(y_0 - Ax_0)) - y_0, t(y_0 - Ax_0)\rangle_H \\ &= t\langle A(x_0 + t(y_0 - Ax_0)) - y_0, y_0 - Ax_0\rangle_H, \end{aligned}$$

com isso $\langle A(x_0+t(y_0-Ax_0))-y_0, y_0-Ax_0\rangle_H \geq 0$. Por hipótese A é hemicontínua, assim $Ax_t \rightharpoonup Ax_0$, quando $t \to 0$. Logo,

$$0 \leq \langle Ax_0 - y_0, y_0 - Ax_0\rangle_H = -\|Ax_0 - y_0\|_H^2 \Rightarrow \|Ax_0 - y_0\|_H^2 \leq 0.$$

Portanto $y_0 = Ax_0$, isto é, $(x_0, y_0) \in Gr(A)$ concluindo pela Proposição 1.1 que A é maximal monótono. ■

Seja $A : V \to V'$, onde V é um espaço de Banach reflexivo, tal que $V \subset H \hookrightarrow V'$ com imersões contínuas e $\overline{V}^H = H$. Sob essas considerações definimos a realização de A em H:

Definição 1.4. *Dizemos que o operador A_H dado por*

$$\begin{aligned} &D(A_H) = \{v \in V : Av \in H\} \ e \\ &A_H v = Av, \quad \forall v \in D(A_H), \end{aligned}$$

é a realização de A em H.

Temos a imersão $H \overset{I}{\hookrightarrow} V'$ contínua, ou seja, para $\varphi_v : H \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi_v(w) = \langle v, w\rangle_H$ tem-se a aplicação injetora

$$\begin{array}{rccl} I: & H & \to & V' \\ & u & \mapsto & \varphi_u\big|_V : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle u, v\rangle_H. \end{array} \end{array}$$

Dado $F \in V'$ diremos que $F \in H$, se $F \in I(H)$. Por sua vez

$$\begin{aligned} F \in I(H) &\Leftrightarrow \exists u \in H \text{ tal que } F = \varphi_u\big|_V \\ &\Leftrightarrow \exists u \in H \text{ tal que } \langle F, w\rangle_{V',V} = \langle u, w\rangle_H, \forall w \in V. \end{aligned}$$

Desta forma o operador A_H é, mais precisamente,

$$\begin{aligned} &D(A_H) = \{v \in V : \exists \alpha_v \in H \text{ tal que } \langle Av, w\rangle_{V',V} = \langle \alpha_v, w\rangle_H, \forall w \in V\}, \\ &A_H v = \alpha_v, \quad \forall v \in D(A_H). \end{aligned}$$

Proposição 1.5. *Considere V um espaço de Banach reflexivo, tal que V está imerso continuamente em H que por sua vez está imerso continuamente em V'. Além disso V é denso em H. Seja $A : V \to V'$ um operador monótono, hemicontínuo e coercivo. Então $A_H : D(A_H) \subset H \to H$ é operador maximal monótono.*

DEMONSTRAÇÃO: Sendo A monótono e dados $u, v \in D(A_H)$

$$\begin{aligned}\langle A_H u - A_H v, u - v\rangle_H =& \langle \alpha_u - \alpha_v, u - v\rangle_H \\ =& \langle \alpha_u, u\rangle_H - \langle \alpha_u, v\rangle_H - \langle \alpha_v, u\rangle_H + \langle \alpha_v, v\rangle_H \\ =& \langle Au, u\rangle_{V',V} - \langle Au, v\rangle_{V',V} - \langle Av, u\rangle_{V',V} - \langle Av, v\rangle_{V',V} \\ =& \langle Au, u - v\rangle_{V',V} - \langle Av, u - v\rangle_{V',V} \\ =& \langle Au - Av, u - v\rangle_{V',V} \geq 0.\end{aligned}$$

Logo A_H é operador monótono. Segundo o Teorema 2 de [6], a equação $x + Ax = y$ tem solução $x \in V$, para todo $y \in V'$. Em particular admite solução em H. Logo $H \subset R(I + A)$ e pelo item (ii) da Proposição 1.2, concluímos que A_H é maximal monótono. ■

Corolário 1.1. *Sejam A e B operadores maximais monótonos. Se $int(D(A)) \cap D(B) \neq \emptyset$, então $A + B$ é operador maximal monótono e $\overline{D(A) \cap D(B)} = \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}$.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [8], página 36.

1.3 Existência de solução para problemas de evolução

Sejam $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ um operador maximal monótono, $T > 0$, $f \in L^1(0, T; H)$, $\omega > 0$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$, vamos garantir a existência de solução para o problema de evolução:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) - \omega u(t) \ni f(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Para compreensão do conceito de solução definimos:

Definição 1.5. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que $f : \mathbb{R} \to M$ é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda família finita de intervalos abertos disjuntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, tem-se*

$$\sum_{i=1}^N |x_i - y_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N d(f(x_i), f(y_i)) < \varepsilon.$$

Observação 1.2. *Toda função $f : \mathbb{R} \to M$ globalmente Lipschitz é absolutamente contínua. De fato, seja L a constante de Lipschitz da f, e $\varepsilon > 0$ qualquer consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Se $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ é* *uma família arbitrária de intervalos disjuntos tal que* $\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| < \delta$ *então*

$$\sum_{i=1}^{N} d(f(x_i), f(y_i)) \leq \sum_{i=1}^{N} L|x_i - y_i| \leq L \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| < L\delta = \varepsilon.$$

Além disso toda toda função absolutamente contínua em $[a, b]$ *é diferenciável em quase toda parte de* $[a, b]$*, esse fato pode ser consultado na página 10 de [15].*

Definição 1.6. *Sejam* $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$*,* $T > 0$ *e* $f \in L^1(0, T; H)$*. Uma aplicação* $u \in C([0, T]; H)$ *é dita solução forte da inclusão* $\dfrac{du}{dt} + Au - \omega u \ni f$*, se:*

1. *u é absolutamente contínua em todo subconjunto compacto de* $(0, T)$*;*

2. $u(t) \in D(A)$ *quase sempre em* $(0, T)$*;*

3. $\dfrac{du}{dt} + Au - \omega u \ni f$ *é satisfeita quase sempre em* $(0, T)$*.*

Dizemos que $u \in C([0, T]; H)$ *é solução fraca da inclusão* $\dfrac{du}{dt} + Au - \omega u \ni f$*, se existem sequências* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(0, T; H)$ *e* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0, T]; H)$ *de soluções fortes da inclusão* $\dfrac{du_n}{dt} + Au_n - \omega u_n \ni f_n$ *tais que* $f_n \to f$ *em* $L^1(0, T; H)$ *e* $u_n \to u$ *em* $C([0, T]; H)$*.*

Assumiremos a existência de solução fraca para o caso particular em que $\omega = 0$ e f é constante nula, isto é: se $u_0 \in \overline{D(A)}$ então existe uma única u solução fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

No caso em que $u_0 \in D(A)$ então existe única u solução forte, e além disso u é lipschitziana. A demonstração desse resultado pode ser encontrada na página 55 de [8].

Lema 1.3. *Sejam* $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ *operador monótono,* $f, g \in L^1(0, T; H)$*. Se u e v são soluções fracas das inclusões* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *e* $\dfrac{dv}{dt} + Av \ni g$*, respectivamente. Então*

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(0) - v(0)\|_H + \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_H \mathrm{d}s, \tag{1.7}$$

para todo $t \in [0, T]$*.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam u e v soluções fracas das inclusões $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ e $\dfrac{dv}{dt} + Av \ni g$, respectivamente. Assim, existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^1(0, T; H)$ tais que $f_n \to$

f e $g_n \to g$ em $L^1(0,T;H)$, e também sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções fortes das inclusões $\dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ e $\dfrac{dv_n}{dt} + Av_n \ni g_n$, respectivamente, tais que $u_n \to u$ e $v_n \to v$ uniformemente em $[0,T]$.

Como A é operador monótono, $f_n - \dfrac{du_n}{dt} \in Au_n$ e $g_n - \dfrac{dv_n}{dt} \in Av_n$ então

$$\begin{aligned}
0 \leq & \left\langle f_n - \frac{du_n}{dt} - \left(g_n - \frac{dv_n}{dt}\right), u_n - v_n \right\rangle_H \\
= & \langle f_n - g_n, u_n - v_n\rangle_H - \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dv_n}{dt}, u_n - v_n \right\rangle_H \\
= & \langle f_n - g_n, u_n - v_n\rangle_H - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n - v_n\|_H^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n - v_n\|_H^2 \leq \langle f_n - g_n, u_n - v_n\rangle_H \leq \|f_n - g_n\|_H \|u_n - v_n\|_H.$$

Seja $t \in (0,T]$, integrando de 0 a t essa última desigualdade, temos:

$$\frac{1}{2}\|u_n(t) - v_n(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u_n(0) - v_n(0)\|_H^2 + \int_0^t \|f_n(s) - g_n(s)\|_H \|u_n(s) - v_n(s)\|_H \mathrm{d}s.$$

Pelo Lema A.1 (Gronwall), segue que

$$\|u_n(t) - v_n(t)\|_H \leq \|u_n(0) - v_n(0)\|_H + \int_0^t \|f_n(s) - g_n(s)\|_H \mathrm{d}s,$$

fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(0) - v(0)\|_H + \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_H \mathrm{d}s.$$

■

Teorema 1.1. *Seja A um operador maximal monótono, $\omega > 0$, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$. Então existe uma única solução fraca $u \in C([0,T],H)$ para o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni f \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

DEMONSTRAÇÃO: Unicidade: Sendo u e v soluções fracas de (1.8) então pelo Lema 1.3 temos que

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(0) - v(0)\|_H + \int_0^t \|f(s) - f(s)\|_H \mathrm{d}s = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

Portanto $u = v$.

Existência: Suponhamos primeiramente que $u_0 \in D(A)$ e que f é uma função escada definida da seguinte forma: considere $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = T$ e $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset H$, definimos $f(t) = y_i$ para $t \in [a_{i-1}, a_i)$, isto é

$$f(t) = \begin{cases} y_1, & \text{se } t \in [0, a_0) \\ y_2, & \text{se } t \in [a_1, a_2) \\ \vdots & \vdots \\ y_n, & \text{se } t \in [a_{n-1}, T). \end{cases}$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos o operador

$$\begin{array}{rccl} A - y_i : & D(A - y_i) & \to & \mathscr{P}(H) \\ & x & \mapsto & (A - y_i)x := Ax - y_i. \end{array}$$

Notemos que $D(A - y_i) = D(A)$ e $A - y_i$ é operador maximal monótono. De fato, sejam $x, y \in D(A)$

$$\langle (A - y_i)x - (A - y_i)y, x - y\rangle_H = \langle Ax - y_i - Ay + y_i, x - y\rangle_H = \langle Ax - Ay, x - y\rangle_H \geq 0,$$

ou seja, $A - y_i$ é operador monótono. Além disso, $R(I + (A - y_i)) = H$, pois dado $y \in H$ por A ser maximal monótono temos $R(I + A) = H$, ou seja, existe $x \in D(A) = D(A - y_i)$ tal que $(I + A)x = y + y_i$, isto é, $(I + (A - y_i))x = y$.

Consideremos a equação:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + (A - y_1)u(t) \ni 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Então existe uma única $u_1 \in C([0, T]; H)$ lipschitziana e solução forte do problema acima. Agora considerando

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + (A - y_2)u(t) \ni 0 \\ u(0) = u_1(a_1), \end{cases}$$

temos que existe uma única $u_2 \in C([0, T], H)$ lipschitziana e solução forte do problema acima. De modo geral, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$ existe $u_i \in C([0, T], D(A))$ lipschitziana, única solução forte para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + (A - y_i)u(t) \ni 0 \\ u(0) = u_{i-1}(a_{i-1} - a_{i-2}). \end{cases}$$

Definimos $u : [0,T] \to H$ por $u(t) = u_i(t - a_{i-1})$ se $t \in [a_{i-1}, a_i]$. Primeiramente, u está bem definida, pois para todo $i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} u(a_i) =& u_i(a_i - a_{i-1}) = u_{i+1}(0), \text{ pois } a_i \in [a_{i-1}, a_i] \text{ e} \\ u(a_i) =& u_{i+1}(a_i - a_i) = u_{i+1}(0), \text{ pois } a_i \in [a_i, a_{i+1}]. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que u é absolutamente contínua em $[0,T]$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ a solução u_i é lipschitziana em $[0,T]$, denotaremos por C_i sua constante de Lipschitz. Sejam $x, y \in [0,T]$ arbitrários com $x < y$ então $x \in [a_{k-1}, a_k)$ e $y \in [a_{m-1}, a_m)$, para algum $k, m \in \{1, \ldots, n\}$, tomando $C := \max\{C_i : i = 1, \ldots, n\}$ segue que

$$\begin{aligned} \|u(x) - u(y)\|_H =& \|u(x) - u(a_k) + u(a_k) - u(a_{k+1}) + u(a_{k+1}) + \ldots - u(a_{m-1}) + u(a_{m-1}) - u(y)\|_H \\ \leq& \|u(x) - u(a_k)\|_H + \|u(a_k) - u(a_{k+1})\|_H + \ldots + \|u(a_{m-1}) - u(y)\|_H \\ \leq& C_k|x - a_k| + C_{k+1}|a_k - a_{k+1}| + \ldots + C_{m-1}|a_{m-1} - y| \\ \leq& C(|x - a_k| + |a_k - a_{k+1}| + \ldots + |a_{m-1} - y|) \\ =& C((a_k - x) + (a_{k+1} - a_k) + \ldots + (y - a_{m-1})) = C|x - y|. \end{aligned}$$

Implicando assim que u é lipschitziana, e pela Observação 1.2, concluímos que u é absolutamente contínua. Agora seja $t \in [0,T]$ qualquer então $t \in [a_{i-1}, a_i)$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ assim, $u(t) = u_i(t - a_{i-1}) \in u_i([0, a_i - a_{i-1}]) \subset D(A)$ quase sempre, ou seja, $u(t) \in D(A)$ quase sempre. Além disso,

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{du_i}{dt}(t - a_{i-1}) = -(A - y_i)u_i(t - a_{i-1}) = -(A - y_i)u(t) = -Au(t) + y_i.$$

Assim $\dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = y_i = f(t)$, claro que $u(0) = u_0$. Logo u verifica (1.8) quase sempre em $[0,T]$. Portanto u é solução forte de (1.8). No caso em que $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1(0,T;H)$ então existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções escadas em $[0,T]$ e $(u_{0,n})_n \in \mathbb{N}$ em $D(A)$ tais que

$$f_n \to f_0 \text{ em } L^1(0,T;H) \quad \text{e} \quad u_{0,n} \to u_0 \text{ em } H.$$

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe u_n solução forte de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni f_n \\ u(0) = u_{0,n}. \end{cases}$$

Dado $n, m \in \mathbb{N}$, como A é operador monótono e $f_i - \frac{du_i}{dt} \in Au_i$, para $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq & \left\langle f_n - \frac{du_n}{dt} - \left(f_m - \frac{du_m}{dt} \right), u_n - u_m \right\rangle_H \\ = & \langle f_n - f_m, u_n - u_m \rangle_H - \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt}, u_n - u_m \right\rangle_H \\ = & \langle f_n - f_m, u_n - u_m \rangle_H - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n - u_m\|_H^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n - u_m\|_H^2 \leq \langle f_n - f_m, u_n - u_m \rangle_H \leq \|f_n - f_m\|_H \|u_n - u_m\|_H.$$

Seja $t \in (0, T]$, integrando de 0 a t essa última desigualdade, temos:

$$\frac{1}{2} \|u_n(t) - u_m(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u_n(0) - u_m(0)\|_H^2 + \int_0^t \|f_n(s) - f_m(s)\|_H \|u_n(s) - u_m(s)\|_H \mathrm{d}s.$$

Pelo Lema A.1 (Gronwall), segue que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_m(t)\|_H \leq & \|u_{0,n} - u_{0,m}\|_H + \int_0^t \|f_n(s) - f_m(s)\|_H \mathrm{d}s \\ \leq & \|u_{0,n} - u_{0,m}\|_H + \|f_n - f_m\|_{L^1(0,T;H)}. \end{aligned}$$

Como $(u_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são convergentes, então são sequências de Cauchy implicando assim que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $C([0, T], H)$. Por H ser espaço de Hilbert temos que $C([0, T], H)$ é espaço métrico completo, com isso, existe $u \in C([0, T], H)$ tal que $u_n \to u$ em $C([0, T], H)$. Portanto u é solução fraca de (1.8). ∎

Proposição 1.6. *Sejam $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ operador maximal monótono, $f \in L^1(0; T; H)$ e $u \in C([0; T]; H)$. Então, são equivalentes:*

(i) *u é solução forte da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$;*

(ii) *u é absolutamente contínua em todo compacto de $(0, T)$ e u é solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$.*

Proposição 1.7. *Sejam $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ operador maximal monótono, $u \in C([0,T], H)$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Então u é solução fraca da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ se, e somente se, u verifica*

$$\frac{1}{2}\|u(t) - x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u(s) - x\|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x\rangle \, ds$$

para todo $(x, y) \in Gr(A)$ e $0 \leq s \leq t \leq T$.

Ambas as proposições podem ser consultadas em [8] nas páginas 67 e 70, respectivamente.

Teorema 1.2. *Seja $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$ um operador maximal monótono, $\omega > 0$, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$. Então existe uma única solução fraca $u \in C([0,T], H)$ para o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au - \omega u \ni f \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

DEMONSTRAÇÃO: Unicidade: Sejam u e v soluções fracas de (1.9). Definindo $f_1 = f + \omega u$ e $f_2 = f + \omega v$, pelo Lema 1.3 concluímos:

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(0) - v(0)\|_H + \int_0^t |f_1(s) - f_2(s)| \, \mathrm{d}s = \|u(0) - v(0)\|_H + \int_0^t \omega|u(s) - v(s)| \, \mathrm{d}s.$$

Utilizando o Lema A.2 (Gronwall-Bellman), segue que

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq e^{\omega t}\|u(0) - v(0)\|_H = 0,$$

com isso temos $u = v$.

Existência: Consideremos $u_0(t) \equiv u_0$. Pelo Teorema 1.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe única u_{n+1} solução fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_{n+1} + Au_{n+1} \ni f + \omega u_n \\ u_{n+1}(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Pelo Lema 1.3, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \|u_2(t) - u_1(t)\|_H &\leq \|u_2(0) - u_1(0)\|_H + \omega \int_0^t \|u_1(s) - u_0(s)\|_H \mathrm{d}s \\ &\leq t\omega\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,T;H)}, \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\|u_3(t)-u_2(t)\|_H \leq & \|u_3(0)-u_2(0)\|_H + \omega\int_0^t \|u_2(s)-u_1(s)\|_H \mathrm{d}s \leq \omega^2\int_0^t s\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,T;H)}\mathrm{d}s \\ = & \frac{\omega^2 t^2}{2}\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,T;H)}, \forall t\in[0,T].\end{aligned}$$

Procedendo desta maneira obtemos

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}(t)-u_n(t)\|_H \leq & \frac{(\omega t)^n}{n!}\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,T;H)} \\ \leq & \frac{(\omega T)^n}{n!}\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,T;H)}, \forall t\in[0,T].\end{aligned}$$

Logo, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $C([0,T],H)$ que é espaço completo, já que H é Hilbert, assim existe $u\in C([0,T],H)$ tal que $u_n\to u$ uniformemente em $[0,T]$.
Para cada $n\in\mathbb{N}$ como u_n é solução fraca de (1.10) existem $(u_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(f_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que $u_m^n \xrightarrow{m\to\infty} u_n$ em $C([0,T],H)$ e $f_m^n \xrightarrow{m\to\infty} (f+\omega u_n)$ em $L^1(0,T;H)$, além disso, para cada $m\in\mathbb{N}$ temos u_m^n solução forte da inclusão:

$$\frac{du_m^n}{dt}+Au_m^n \ni f_m^n.$$

Utilizando o argumento diagonal, existem sequências $(u_{m_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_{m_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $u_{m_n}^n \xrightarrow{n\to\infty} u$ em $C([0,T],H)$ e $f_{m_n}^n \xrightarrow{n\to\infty} f+\omega u$ em $L^1(0,T;H)$. Portanto u é solução fraca de (1.9). ■

Definição 1.7. *Seja $t_0\in[0,T[$. Dizemos que t_0 é um ponto de Lebesgue à direita de f, se existe o limite à direita*

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Teorema 1.3. *Sejam A um operador maximal monótono, $f\in L^1(0,T;H)$ e $u\in C([0,T],H)$ uma solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt}+Au\ni f$. Seja $t_0\in[0,T[$ um ponto de Lebesgue à direita de f. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *$u(t_0)\in D(A)$;*

(ii) *u é derivável à direita em t_0.*

A demonstração do Teorema acima se encontra na página 66 de [8].

1.4 Semigrupo

Definição 1.8. *Seja X espaço métrico. Dizemos que a família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo em X se:*

(i) *$T(t) : X \to X$ contínua, para todo $t \geq 0$;*

(ii) *$T(0) = Id_X$;*

(iii) *$T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.*

Além disso, se para todo $x, y \in X$ e $t \geq 0$ tem-se

$$\|T(t)x - T(t)y\|_H \leq \|x - y\|_H,$$

então dizemos que o semigrupo é não-expansivo.

Denotando por $u(t; 0, u_0)$ a solução do problema de valor inicial (1.6), calculada no instante t. Para cada $t \geq 0$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} T(t) : \ \overline{D(A)}^H &\to \ \overline{D(A)}^H \\ u_0 &\mapsto \ T(t)u_0 = u(t; 0, u_0). \end{aligned}$$

É possível mostrar que tal aplicação é um semigrupo em $\overline{D(A)}$ não-expansivo. Concluindo assim que associado a um operador maximal monótono $A : D(A) \subset H \to \mathscr{P}(H)$, existe um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ não-expansivo em $\overline{D(A)}$. Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é gerado por A.

Definição 1.9. *Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X é:*

(i) *contínuo, se a aplicação*

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times X &\to X \\ (t, x) &\mapsto T(t)x, \end{aligned}$$

for contínua.

(ii) *compacto, se para cada $t > 0$ a aplicação $T(t) : X \to X$ é compacta, isto é, associa limitado à pré-compacto.*

Capítulo 2

Atratores para Semigrupos

Neste capítulo apresentaremos vários conceitos e resultados que nos permitem obter condições necessárias e suficientes para a existência de atrator global. No final do capítulo são apresentados os conceitos de semicontinuidade superior e inferior de uma família de conjuntos. Destacamos as referências [3, 10, 12, 13].

2.1 Órbitas e conjuntos limites

Consideraremos X um espaço métrico, $d : X \times X \to [0, \infty)$ sua métrica e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo em X.

Definição 2.1 (órbita positiva/ negativa/ completa)**.** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo. Para cada $x \in X$ definimos:*

(i) *a órbita positiva através de x, denotada por $\gamma^+(x)$, como sendo o conjunto $\{T(t)x : t \geq 0\}$;*

(ii) *uma órbita negativa através de x como sendo uma função $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \leq 0$, temos $T(t)\phi(s) = \phi(t + s)$, para todo $0 \leq t \leq -s$;*

(iii) *uma órbita completa através de x como sendo uma função $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \in \mathbb{R}$, temos $T(t)\phi(s) = \phi(t + s)$, para todo $t \geq 0$.*

Observamos que $T(t)$ não é injetivo em geral, logo uma órbita negativa pode não ser única caso exista. Desta forma definimos:

(iv) *a órbita negativa através de x, denotada por $\gamma^-(x)$, como sendo a união de todas as órbitas* *negativas de x, isto é, o conjunto:*

$$\bigcup_{t\geq 0}\{y \in X; \exists \phi : (-\infty, 0] \to X \text{ uma órbita negativa por } x \text{ tal que } \phi(-t) = y\} := \bigcup_{t\geq 0} H(t,x);$$

(v) *a órbita completa de x, denotada por $\gamma(x)$, como sendo a reunião $\gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.*

Observação 2.1. *Se existe $\phi : (-\infty, 0] \to X$ uma órbita negativa através de $x \in X$, então*

$$x = \phi(0) = \phi(t-t) = T(t)\phi(-t),$$

para todo $t \geq 0$. Portanto $x \in \bigcap_{t\geq 0} T(t)X$. Assim dizer que existe ou não uma órbita negativa através de x pode impor restrições sobre x.

Observação 2.2. *A órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \to X$ é contínua. Seja $x \in (-\infty, 0]$ arbitrário e $0 < h < 1$, então*

$$d(\phi(x), \phi(x-h)) = d(\phi(x), \phi(x-h+1-1)) = d(\phi(x), T(1-h)\phi(x-1)) \xrightarrow{h\to 0} d(\phi(x), T(1)\phi(x-1)) = 0.$$

Além disso, $d(\phi(x+h), \phi(x)) = d(T(h)\phi(x), \phi(x)) \xrightarrow{h\to 0} d(T(0)\phi(x), \phi(x)) = 0$. Portanto ϕ é contínua em X.
Como a órbita completa é a concatenação de uma órbita negativa com a aplicação contínua $t \mapsto T(t)x$ então a órbita completa também é contínua.

Em geral dado $B \subset X$ definimos as órbitas positiva, negativa e completa de B respectivamente por:

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{x\in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) = \bigcup_{x\in B} \gamma^-(x) \text{ e } \gamma(B) = \bigcup_{x\in B} \gamma(x).$$

Notamos que sendo $T(t)B = \{T(t)x\,; x \in B\}$ e $H(t,B) = \{H(t,x)\,; x \in B\}$ para cada $t \geq 0$, podemos escrever:

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t\geq 0} T(t)B, \quad \gamma^-(B) = \bigcup_{t\geq 0} H(t,B) \text{ e } \gamma(B) = \gamma^+(B) \cup \gamma^-(B) = \bigcup_{t\geq 0}(T(t)B \cup H(t,B)).$$

Definimos a órbita positiva de B a partir do instante $s \in \mathbb{R}^+$ por $\gamma_s^+(B) := \bigcup_{t\geq s} T(t)B$. Observemos que dado $s_0 \geq 0$,

$$\bigcup_{t\geq s_0} T(t)B = \bigcup_{t\geq 0} T(t+s_0)B = \bigcup_{t\geq 0} T(t)T(s_0)B,$$

logo a órbita positiva de B a partir de s_0, é a órbita positiva de $T(s_0)B$.

Definição 2.2. *Sejam $B \subset X$. Definimos o conjunto ω-limite de B por*

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0}\left(\overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}\right) = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\gamma_s^+(B)}.$$

Definimos o conjunto α- limite de B por

$$\alpha(B) = \bigcap_{s\geq 0}\left(\overline{\bigcup_{t\geq s} H(t,s)B}\right).$$

Temos que se $t_2 \geq t_1$ então $\gamma_{t_2}^+(B) \subset \gamma_{t_1}^+(B)$. Com isso, dado $T \in \mathbb{R}^+$ qualquer

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\gamma_s^+(B)} = \bigcap_{s\geq T}\overline{\gamma_s^+(B)}.$$

De fato, se $x \in \bigcap_{s\geq T}\overline{\gamma_s^+(B)}$, então $x \in \overline{\gamma_s^+(B)}$, para todo $s \geq T$. Seja $0 \leq s \leq T$ qualquer então

$$\gamma_T^+(B) \subset \gamma_s^+(B) \subset \gamma_0^+(B)$$

como $x \in \overline{\gamma_T^+(B)}$ segue que $x \in \overline{\gamma_s^+(B)}$, para todo $0 \leq s \leq T$, isto é, $x \in \bigcap\limits_{s\geq 0}\overline{\gamma_s^+(B)}$. A outra inclusão é imediata.

Os próximos resultados caracterizam os conjuntos ω e α limites.

Lema 2.1. *Seja B subconjunto de X. Então $v \in \omega(B)$ se, e somente se, existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)v_n \to v$, quando $n \to \infty$.*

DEMONSTRAÇÃO: ($\Rightarrow$) Se $v \in \omega(B)$ então $v \in \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}$, para todo $s \geq 0$, em particular para $s = n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$B_X\left(v, \frac{1}{n}\right) \cap \bigcup_{t\geq n} T(t)B \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $t_n \geq n$ e $v_n \in B$ tais que $T(t_n)v_n \in B_X\left(v, \frac{1}{n}\right)$. Fazendo $n \to \infty$ temos que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)v_n \to v$.

($\Leftarrow$) Sejam $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B as sequências tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)v_n \to v$ quando $n \to \infty$. Então dado $s \geq 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N$ tem-se

$$t_n \geq s \quad \text{e} \quad |T(t_n)v_n - v| < \frac{1}{s}.$$

Logo, para todo $s \geq 0$
$$B_X\left(v, \frac{1}{s}\right) \cap \bigcup_{t \geq s} T(t)B \neq \emptyset.$$

Assim, dado $s_0 \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, tomando $s = \max\{s_0, \frac{1}{\varepsilon}\} > 0$ temos

$$\emptyset \neq B_X\left(v, \frac{1}{s}\right) \cap \bigcup_{t \geq s} T(t)B \subset B_X(v, \varepsilon) \cap \bigcup_{t \geq s_0} T(t)B.$$

Ou seja, dados $s_0 \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ temos que $B_X(v, \varepsilon) \cap \bigcup\limits_{t \geq s_0} T(t)B \neq \emptyset$. Portanto $v \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$ para todo $s \geq 0$, ou seja, $v \in \omega(B)$. ■

Lema 2.2. *Seja B subconjunto de X. Então $v \in \alpha(B)$ se, e somente se, existem sequências $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em B tais que $t_n \to \infty$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ existe ϕ_n, uma órbita negativa através de v_n, de modo que $\phi_n(-t_n) \to v$, quando $n \to \infty$.*

DEMONSTRAÇÃO: ($\Rightarrow$) Se $v \in \alpha(B)$ então $v \in \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t, B)}$ para todo $s \geq 0$, em particular para $s = n \in \mathbb{N}$. Logo,
$$B_X\left(v, \frac{1}{n}\right) \cap \bigcup_{t \geq n} H(t, B) \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $t_n \geq n$ e $v_n \in B$ tais que $B_X\left(v, \frac{1}{n}\right) \cap H(t_n, v_n) \neq \emptyset$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $t_n \geq n$, $v_n \in B$ e órbitas ϕ_n através de v_n tais que $\phi_n(-t_n) \in B_X(v, \frac{1}{n})$. Fazendo $n \to \infty$ temos que $t_n \to \infty$ e $\phi_n(-t_n) \to v$.
($\Leftarrow$) Sejam $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em B tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe ϕ_n uma órbita negativa através de v_n em que $t_n \to \infty$ e $\phi_n(-t_n) \to v$, quando $n \to \infty$. Fixemos $s \geq 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N$ tem-se

$$t_n \geq s \quad \text{e} \quad |\phi_n(-t_n) - v| < \varepsilon.$$

Assim para todo $\varepsilon > 0$ temos $B_X(v, \varepsilon) \cap H(t_n, v_n) \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$

$$B_X(v, \varepsilon) \cap \bigcup_{t \geq s} H(t, B) \neq \emptyset.$$

Portanto $v \in \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t, B)}$, para todo $s \geq 0$, ou seja, $v \in \alpha(B)$. ■

Definição 2.3. *Dizemos que $S \subset X$ é invariante sob $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, para cada $x \in S$ existe ϕ uma órbita completa através de x tal que $\phi(\mathbb{R}) \subset S$.*

Apresentamos uma caracterização dos conjuntos invariantes por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposição 2.1. *Seja S um subconjunto de X. Então S é invariante sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se, e somente se, $T(t)S = S$, para todo $t \geq 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: $(\Rightarrow)$ Seja $y \in T(t)S$, onde $t \geq 0$ é arbitrário. Seja $x \in S$ tal que $y = T(t)x$, por hipótese existe $\phi : \mathbb{R} \to X$ uma órbita completa através de x tal que $\phi(\mathbb{R}) \subset S$. Por sua vez $y = T(t)x = T(t)\phi(0) = \phi(t)$, logo $y \in \phi(\mathbb{R}) \subset S$. Desta forma $T(t)S \subset S$, para todo $t \geq 0$. Por outro lado, tomando $y \in S$ temos que existe $\phi : \mathbb{R} \to X$ uma órbita completa através de y tal que $\phi(\mathbb{R}) \subset S$. Consideremos $t \geq 0$ qualquer. Notamos que

$$y = \phi(0) = \phi(t - t) = T(t)\phi(-t),$$

ou seja, $y \in T(t)\phi(\mathbb{R}) \subset T(t)S$ para todo $t \geq 0$. Garantindo com isso a igualdade.
$(\Leftarrow)$ Seja $x \in S$ qualquer. Com o objetivo de obter uma órbita completa através de x, segue a seguinte afirmação:
Afirmação: Dado $x_0 \in S$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tal que $T(k)x_n = x_{n-k}$, para todo $k \leq n$.
Realmente, seja $x_0 \in S$ qualquer, por hipótese $S \subset T(1)S$, assim existe $x_1 \in S$ tal que $x_0 = T(1)x_1$. Por sua vez $x_1 \in S$ logo existe $x_2 \in S$ tal que $x_1 = T(1)x_2$. Prosseguindo indutivamente, obtemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tal que $T(1)x_n = x_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Mostremos usando indução sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$T(k)x_n = x_{n-k}, \quad \forall k \leq n. \tag{2.1}$$

Obviamente que (2.1) é válida para $n = 1$. Suponhamos que (2.1) é válida para $n \in \mathbb{N}$, então seja $k \leq n + 1$

$$T(k)x_{n+1} = T((k-1)+1)x_{n+1} = T(k-1)T(1)x_{n+1} = T(k-1)x_n,$$

por sua vez $k - 1 \leq n$, assim pela hipótese de indução temos que

$$T(k)x_{n+1} = T(k-1)x_n = x_{n-(k-1)} = x_{(n+1)-k}.$$

Portanto (2.1) ocorre para todo natural, finalizando a Afirmação.
Tomando $x_0 = x$ segue da Afirmação que existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $T(k)x_n = x_{n-k}$, para todo $k \leq n$. Definamos $\phi : \mathbb{R} \to X$ por

$$\phi(t) = \begin{cases} T(t)x, & \text{se } t \geq 0 \\ T(t+n)x_n, & \text{se } t \in (-n, -n+1]. \end{cases}$$

Então,

(i) $\phi(0) = T(0)x = x$.

(ii) $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. De fato, se t e s em $\mathbb{R}^+$ então

$$T(t)\phi(s) = T(t)T(s)x = T(t+s)x = \phi(t+s).$$

Agora suponhamos que $s < 0$ e $t \geq -s$, então $s \in (-n, -n+1]$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e temos

$$\begin{aligned}\phi(t+s) =& T(t+s)x = T(t+s)x_0 \\ =& T(t+s)T(n)x_n = T(t+s+n)x_n = T(t)T(s+n)x_n = T(t)\phi(s)\end{aligned}$$

Resta o caso em que $s < 0$ e $0 \leq t \leq -s$. Como $s \leq t+s \leq 0$ então existe $m \leq n$, natural, tal que $t+s \in (-m, -m+1]$. Assim $\phi(t+s) = T(t+s+m)x_m$, por sua vez

$$\begin{aligned}T(t)\phi(s) =& T(t)T(s+n)x_n = T(t+s+n)x_n \\ =& T(t+s+n+m-m)x_n = T(t+s+m)T(n-m)x_n \\ =& T(t+s+m)x_{n-(n-m)} = T(t+s+m)x_m = \phi(t+s).\end{aligned}$$

Portanto $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

(iii) $\phi(\mathbb{R}) \subset S$. Afinal,

$$\phi(\mathbb{R}) = \left(\bigcup_{t \geq 0} T(t)x\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{t<0 \\ t \in (-n,-n+1]}} T(t+n)x_n\right) \subset S,$$

já que $T(t)S = S$, para todo $t \geq 0$.

Portanto existe $\phi : \mathbb{R} \to X$ uma órbita completa através de x tal que $\phi(\mathbb{R}) \subset S$, finalizando a demonstração. ■

Com objetivo de definir a noção de atração, consideramos a definição de semi-distância de Hausdorff, $dist(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de X:

$$dist(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

A distância usual entre os conjuntos A e B será denotada por $d(A, B) := \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$.

Notemos que sendo $dist(A, B) = 0$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$. Pois, como $dist(A, B) = 0$ então para todo $a \in \overline{A}$ temos $d(a, B) = 0$, logo $a \in \overline{B}$. Se além disso, B é fechado então $A \subset B$.

Definição 2.4. *Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico X. Dizemos que A atrai B sob o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, ou B é atraído por A sob o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, se*

$$\lim_{t\to\infty} dist(T(t)B, A) = 0.$$

Dizemos que A atrai o ponto $x \in X$ se A atrai o conjunto unitário $\{x\}$.

Observamos que A atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, pode ser visto da seguinte forma: para cada $\varepsilon > 0$ existe $t_0(\varepsilon, B) > 0$ tal que

$$T(t)B \subset V_\varepsilon(A), \quad \forall t \geq t_0(\varepsilon, B).$$

onde $V_\varepsilon(A)$ denota a ε-vizinhança de A, isto é, é a reunião de todas as bolas de raio ε e centro em A. Claro que se existir $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$, então A atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Proposição 2.2. *Seja K um conjunto compacto de X.*

(i) *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X tal que*

$$d(x_n, K) \to 0, \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente em K.

(ii) *Seja $K_1 \subset X$ compacto. Se K atrai K_1 sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\omega(K_1) \subset K$ é não-vazio.*

DEMONSTRAÇÃO: **(i)** Partindo da hipótese concluímos que dado $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ e $y_j \in K$ tais que

$$d(x_{n_j}, y_j) < \frac{1}{j},$$

podemos supor que $n_j < n_{j+1}$ para todo j natural. Determinamos assim, a sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em K, que é compacto, admite subsequência convergente, a qual continuamos denotando por $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, isto é, existe $y_0 \in K$ tal que $y_j \xrightarrow{j\to\infty} y_0$. Assim,

$$d(x_{n_j}, y_0) \leq d(x_{n_j}, y_j) + d(y_j, y_0) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente.

(ii) Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma cobertura aberta arbitrária de $\gamma^+(K_1) \cup K$, onde I denota um conjunto arbitrário de indices. Por K ser compacto e

$$K \subset \gamma^+(K_1) \cup K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda,$$

existe $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset I$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}.$$

Como K é compacto, tomando $0 < \varepsilon < d(K, X - (\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_{\lambda_i}))$ e usando a hipótese que K atrai K_1 sob $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} T(t)K_1 \subset V_\varepsilon(K).$$

Pela forma como ε foi escolhido temos que

$$V_\varepsilon(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i},$$

com isso,

$$\bigcup_{t \geq t_0} T(t)K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}.$$

Observamos ainda que $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma cobertura aberta de $\underset{0 \leq t \leq t_0}{\cup} T(t)K_1$ que por ser compacto, afinal é imagem do compacto $[0, t_0] \times K_1$ pela aplicação contínua $(t, x) \mapsto T(t)x$, existe $\{\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+m}\} \subset I$ tal que

$$\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} T(t)K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_{\lambda_{n+i}}.$$

Portanto

$$\gamma^+(K_1) \cup K \subset \bigcup_{i=1}^{n+m} A_{\lambda_i},$$

sendo $\gamma^+(K_1) \cup K$ subconjunto compacto. Como $\overline{\gamma^+(K_1)} \subset \overline{\gamma^+(K_1) \cup K} = \gamma^+(K_1) \cup K$, concluímos que $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto, ou seja, $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Observamos ainda que $\overline{\gamma_s^+(K_1)} \subset \gamma^+(K_1) \cup K$, para todo $s \geq 0$, logo $\overline{\gamma_s^+(K_1)}$ é compacto para todo $s \geq 0$. Consideremos a família de compactos $\{\overline{\gamma_s^+(K_1)}\}_{s \geq 0}$, notemos que dado $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\gamma_{s_i}^+(K_1)} = \overline{\gamma_{s_0}^+(K_1)} \neq \emptyset,$$

onde $s_0 = \min\{s_i\,; i \in \{1, \ldots, n\}\}$, já que $\gamma_{t_1}^+(K_1) \subset \gamma_{t_2}^+(K_1)$ se $t_2 \geq t_1$. Ou seja, $\{\overline{\gamma_s^+(K_1)}\}_{s \geq 0}$ tem a propriedade da intersecção finita, concluindo que

$$\omega(K_1) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma_s^+(K_1)} \neq \emptyset.$$

Resta mostrarmos que $\omega(K_1) \subset K$. De fato, seja $y \in \omega(K_1)$ então pelo Lema 2.1 existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K_1 tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)v_n \to y$, quando $n \to \infty$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(T(t_n)v_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como K atrai K_1 sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ então existe $t_0 > 0$ tal que

$$\gamma_{t_0}^+(K_1) \subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(K).$$

Podemos assumir que $t_n \geq t_0$, para todo n natural, já que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Assim, para $n \geq n_0$ segue que

$$d(y, K) \leq d(y, T(t_n)v_n) + d(T(t_n)v_n, K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como ε é arbitrário temos que $d(y, K) = 0$, logo $y \in K$, estando assim demonstrada a Proposição. ■

Lema 2.3. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo em X. Se $B \subset X$, então $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \geq 0$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante.*

DEMONSTRAÇÃO: O caso em que $\omega(B) = \emptyset$ não há o que demonstrar. Supomos $\omega(B) \neq \emptyset$ e $t \geq 0$ fixado, seja $x \in \omega(B)$ então pelo Lema 2.1 existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

Considere a sequência $\tilde{t}_n := t_n + t$, temos então que $\tilde{t}_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e

$$T(\tilde{t}_n)v_n = T(t + t_n)v_n = T(t)T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} T(t)x,$$

pela continuidade do semigrupo, novamente pelo Lema 2.1 segue que $T(t)x \in \omega(B)$. Portanto $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Agora supondo $\omega(B)$ compacto e que atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, mostraremos que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Seja $x \in \omega(B)$ então pelo Lema 2.1 existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

Como $\omega(B)$ atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$d(T(s)x, \omega(B)) < \varepsilon, \quad \forall s \geq t_0 \text{ e } \forall x \in B.$$

Consideremos $t \geq 0$ fixado, como $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t + t_0$ para todo $n \geq n_0$. Logo $d(T(t_n - t)v_n, \omega(B)) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, isto é,

$$d(T(t_n - t)v_n, \omega(B)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por $\omega(B)$ ser compacto, segue da Proposição 2.2, item (i), que $(T(t_n - t)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente, ou seja, existe $y \in X$ tal que

$$T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y,$$

além disso $t_{n_k} - t \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, logo pelo Lema 2.1 temos $y \in \omega(B)$. Pela continuidade do semigrupo,

$$T(t_{n_k})v_{n_k} = T(t)T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} T(t)y.$$

Finalmente da unicidade do limite concluímos que $T(t)y = x$, ou seja, $x \in T(t)\omega(B)$. Assim $T(t)\omega(B) = \omega(B)$, segue da Proposição 2.1 que $\omega(B)$ é invariante. ■

Lema 2.4. *Suponhamos que $x \in X$ é tal que existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \to X$ através de x, com $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ compacto. Seja*

$$\alpha_\phi(x) = \{y \in X;\ \textit{existe } t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \textit{ tal que } \phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} v\}.$$

Então $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio, conexo, compacto e invariante.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ é compacto, considerando $t_n \geq n$ para cada n natural e a sequência $(\phi(-t_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\phi((-\infty, 0])}$, segue que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e que $(\phi(-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente, que ainda denotaremos por $(\phi(-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, isto é

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ e existe } x \in X \text{ tal que } \phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

Com isso, $x \in \alpha_\phi(x)$. Portanto $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio.
Afirmação 1: $\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\phi((-\infty, -t])}$.

Realmente: dado $u \in \alpha_\phi(x)$, por definição existe sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad \phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} u.$$

Seja $t \geq 0$ fixado, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq N$; logo dado $n \geq N$ temos que $-t_n \in (-\infty, -t]$ implicando que $\phi(-t_n) \in \phi((-\infty, -t])$. Assim para cada $t \geq 0$ segue que $u \in \overline{\phi((-\infty,-t])}$, ou seja, $u \in \bigcap_{t\geq 0}\overline{\phi((-\infty,-t])}$. Por outro lado se $u \in \bigcap_{t\geq 0}\overline{\phi((-\infty,-t])}$ então $u \in \overline{\phi((-\infty,-t])}$ para todo $t \geq 0$. Em particular para $t = n \in \mathbb{N}$ temos $u \in \overline{\phi((-\infty,-n])}$, ou seja,

$$u = \lim_{n\to\infty} \phi(-t_n), \text{ onde } -t_n \in (-\infty, -n].$$

Ora, $-t_n \in (-\infty, -n] \Leftrightarrow t_n \geq n$. Logo, existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad \phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} u,$$

ou seja, $u \in \alpha_\phi(x)$. Mostramos assim a Afirmação 1.

Notamos que da Afirmação 1 temos que $\alpha_\phi(x)$ é fechado, por sua vez

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t\geq 0}\overline{\phi((-\infty,-t])} \subset \overline{\phi((-\infty,0])},$$

logo $\alpha_\phi(x)$ é compacto. O próximo passo é mostrarmos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Realmente, seja $v \in \alpha_\phi(x)$ então existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad \phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} v.$$

Seja $t \geq 0$ fixado, podemos supor que $t_n \geq t$ para todo n natural. Da continuidade do semigrupo e por ϕ ser órbita temos

$$\phi(-(t_n - t)) = \phi(t - t_n) = T(t)\phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} T(t)v.$$

Notamos que $t_n - t \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, concluindo que $T(t)v \in \alpha_\phi(x)$. Portanto $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$. Agora seja $v \in \alpha_\phi(x)$ então existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad \phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} v.$$

Seja $t \geq 0$ fixado, podemos supor que $t_n \geq t$ para todo n natural. Consideremos a sequência $(\phi(-t-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, por $t_n \geq t \geq 0$ temos $-t-t_n \leq 0$, ou seja, $\phi(-t-t_n) \in \overline{\phi((-\infty,0])}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(\phi(-t-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $\overline{\phi((-\infty,0])}$ que é compacto, então admite subsequência convergente, que ainda denotaremos por $(\phi(-t-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, assim existe $u \in X$ tal que

$$\phi(-(t+t_n)) = \phi(-t-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} u,$$

onde $t+t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, logo $u \in \alpha_\phi(x)$. Além disso, usando a continuidade do semigrupo e a definição de uma órbita negativa temos:

$$\phi(-t_n) = T(t)\phi(-t-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} T(t)u.$$

Por outro lado $\phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} v$, assim pela unicidade do limite concluímos que $v = T(t)u \in T(t)\alpha_\phi(x)$. Portanto $\alpha_\phi(x) \subset T(t)\alpha_\phi(x)$, e pela Proposição 2.1 $\alpha_\phi(x)$ é invariante sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Afirmação 2: Dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que $d(y, \alpha_\phi(x)) < \varepsilon$, para todo $y \in \overline{\phi((-\infty,t_0])}$.

De fato, suponhamos que isso não ocorra, então existe $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $t_0 > 0$ existe $y \in \overline{\phi((-\infty,t_0])}$ tal que $d(y,\alpha_\phi(x)) \geq \varepsilon$. Em particular para $t_0 = n \in \mathbb{N}$ existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$d(\phi(-t_n), \alpha_\phi(x)) \geq \varepsilon \quad \text{e} \quad t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Por sua vez $\phi(-t_n) \in \phi((-\infty,0])$ para todo n natural, assim $(\phi(-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $\overline{\phi((-\infty,0])}$ que é compacto, logo admite subsequência convergente, que ainda denotaremos por $(\phi(-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Isto é, existe $v \in X$ tal que

$$\phi(-t_n) \xrightarrow{n\to\infty} v$$

logo $v \in \alpha_\phi(x)$. Com isso,

$$d(\phi(-t_n), \alpha_\phi(x)) \leq d(\phi(-t_n), v) + d(v, \alpha_\phi(x)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

o que é uma contradição. Logo a Afirmação 2 ocorre.

Agora consideremos A_1 e A_2 abertos, disjuntos não-vazios de X tais que $\alpha_\phi(x) \subset A_1 \cup A_2$. Como $\alpha_\phi(x)$ é compacto, tomando $0 < \varepsilon < d(\alpha_\phi(x), X - (A_1 \cup A_2))$ segue da Afirmação 2, que existe $t_0 > 0$ tal que $d(y, \alpha_\phi(x)) < \varepsilon$, para todo $y \in \overline{\phi((-\infty,t_0])}$. Observamos que $\overline{\phi((-\infty,-t_0])}$ é conexo, pois é imagem de conexo por função contínua, e devido a escolha de ε

$$\overline{\phi((-\infty,-t_0])} \subset A_1 \cup A_2,$$

logo $\overline{\phi((-\infty,-t_0])} \subset A_1$ ou $\overline{\phi((-\infty,-t_0])} \subset A_2$. Pela Afirmação 1

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\phi((-\infty,-t])} \subset \overline{\phi((-\infty,-t_0])}$$

assim $\alpha_\phi(x) \subset A_1$ ou $\alpha_\phi(x) \subset A_2$. Portanto $\alpha_\phi(x)$ é conexo finalizando a demonstração. ∎

Lema 2.5. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Se B é conexo então $\omega(B)$ é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $\omega(B)$ atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$\bigcup_{t\geq t_0} T(t)B \subset V_\varepsilon(\omega(B)).$$

Sendo B conexo, pela continuidade do semigrupo, temos que $\bigcup_{t\geq t_0} T(t)B$ é conexo, logo $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} T(t)B}$ é conexo. Consideremos A_1 e A_2 abertos, não-vazios e disjuntos em X tais que $\omega(B) \subset A_1 \cup A_2$. Como $\omega(B)$ é compacto e $X - (A_1 \cup A_2)$ é fechado, tomando $0 < \varepsilon < d(\omega(B), X - (A_1 \cup A_2))$, temos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \overset{\text{def}}{=} \overline{\bigcup_{t\geq t_0} T(t)B} \subset A_1 \cup A_2. \tag{2.2}$$

De fato, seja $x \in \overline{\bigcup_{t\geq t_0} T(t)B}$ então $x \in \overline{V_\varepsilon(\omega(B))}$ implicando que $d(\omega(B), x) \leq \varepsilon$. Suponhamos que $x \in X - (A_1 \cup A_2)$ então

$$d(\omega(B), x) \geq d(\omega(B), X - (A_1 \cup A_2)) > \varepsilon,$$

o que é uma contradição, logo $x \in A_1 \cup A_2$.
Como $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é conexo e (2.2) ocorre então $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset A_1$ ou $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset A_2$. Como $\omega(B) \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ temos que $\omega(B) \subset A_1$ ou $\omega(B) \subset A_2$. Portanto $\omega(B)$ é conexo. ∎

De modo análogo, segue o resultado a seguir presente em [10].

Lema 2.6. *Se $\alpha(B)$ é compacto e $dist(H(t,B), \alpha(B)) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ então $\alpha(B)$ é conexo se $H(t,B)$ é conexo para todo $t \geq 0$.*

Lema 2.7. *Seja B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto para algum $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Claro que $\omega(B)$ é fechado e

$$\omega(B) \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)},$$

logo $\omega(B)$ é compacto. Sejam $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $t_n \geq t_0 + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(T(t_n)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$. Como $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto, $(T(t_n)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente, que ainda denotaremos por $(T(t_n)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, existe $x \in X$ tal que

$$T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} x, \text{ além disso, } t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Portanto pelo Lema 2.1, $x \in \omega(B)$, ou seja $\omega(B) \neq \emptyset$. O próximo passo é mostrarmos que $\omega(B)$ atrai B, para isso suponhamos o contrário: então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $t_1 > 0$ existe $t \geq t_1$ para o qual

$$T(t)B \not\subset V_\varepsilon(\omega(B)).$$

Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $t_n > n + t_1 > t_1$ e $v_n \in B$ tais que

$$T(t_n)v_n \notin V_\varepsilon(\omega(B)), \text{ isto é, } d(T(t_n)v_n, y) \geq \varepsilon, \text{ para todo } y \in \omega(B).$$

Por sua vez, $(T(t_n)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$, logo admite subsequência, que ainda denotaremos por $(T(t_n)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente. Ou seja,

$$T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

Como $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, onde $t_n \to \infty$, segue do Lema 2.1 que $x \in \omega(B)$, o que é uma contradição. Portanto, $\omega(B)$ atrai B.
Finalmente pelo Lema 2.3 concluímos que $\omega(B)$ é invariante. ■

Lema 2.8. *Para todo conjunto limitado $B \subset X$ para o qual $\overline{\gamma^-(B)}$ é não vazio e compacto, temos que o conjunto $\alpha(B)$ é não vazio, compacto e invariante sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $u_0 \in B$ é tal que existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \to X$ através de u_0 então $\overline{\{\phi(t) : t \in (-\infty, 0]\}} \subset \overline{\gamma^-(B)}$ é compacto, consequentemente existem uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e um ponto $v \in X$ tais que $t_n \to \infty$ e $\phi(-t_n) \to v$, quando $n \to \infty$. Segue do

Lema 2.2 que $v \in \alpha(B)$ e $\alpha(B) \neq \emptyset$. Também segue que $\alpha(B)$ é compacto, pois $\alpha(B)$ é fechado e $\alpha(B) \subset \overline{\gamma^-(B)}$.

Resta provarmos que $\alpha(B)$ é invariante. Se $v \in \alpha(B)$ então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em B, tais que $t_n \to \infty$ e existe $\phi_n : (-\infty, 0] \to X$ uma órbita negativa através de v_n, de modo que $\phi_n(-t_n) \to v$, quando $n \to \infty$.

Da continuidade de $T(t)$ para $t \geq 0$, segue que

$$\phi_n(-(t_n - t)) = \phi_n(t - t_n) = T(t)\phi_n(-t_n) \to T(t)v, \text{ e } (t_n - t) \to \infty, \text{ quando } n \to \infty.$$

Como isso $T(t)v \in \alpha(B)$, isto é, $T(t)\alpha(B) \subset \alpha(B)$.

Por outro lado, se $v \in \alpha(B)$ então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, e correspondentes órbitas negativas $\phi_n : (-\infty, 0] \to X$ por v_n tais que $\phi_n(-t_n) \to v$.

Como $\overline{\{\phi_n(-t - t_n) : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\gamma^-(B)}$ é compacto, existem $z \in X$ e uma subsequência, que denotaremos por $(\phi_n(-t - t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, tais que $\phi_n(-t - t_n) \xrightarrow{n\to\infty} z$. Assim $z \in \alpha(B)$, para qualquer $t \geq 0$.

Da continuidade de $T(t)$, obtemos

$$T(t)\phi_n(-t - t_n) \to T(t)z, \text{ quando } n \to \infty.$$

Todavia,

$$T(t)\phi_n(-t - t_n) = \phi_n(t - t - t_n) = \phi_n(-t_n) \to v, \text{ quando } n \to \infty.$$

Segue da unicidade do limite, que $T(t)z = v$. Portanto, $\alpha(B) \subset T(t)\alpha(B)$, concluindo a demonstração. ■

Definição 2.5 (assintoticamente compacto). *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é dito assintoticamente compacto se para qualquer subconjunto B fechado, limitado e não-vazio de X tal que $T(t)B \subset B$, para todo $t \geq 0$ existir um conjunto $J \subset B$ compacto que atrai B.*

Lema 2.9. *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma^+_{t_0}(B)$ é limitado para algum $t_0 \in \mathbb{N}$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

DEMONSTRAÇÃO: Claro que $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é fechado e limitado, além disso fixado $t \geq 0$ e usando a continuidade do semigrupo segue que

$$\begin{aligned}T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} =&T(t)\overline{\{T(s)B; s\geq t_0\}}\subset\overline{\{T(t)T(s)B; s\geq t_0\}}\\ =&\overline{\{T(t+s)B; t+s\geq t+t_0\}}=\overline{\{T(s)B; s\geq t+t_0\}}\\ \subset&\overline{\{T(s)B; s\geq t_0\}}=\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}.\end{aligned}$$

Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo assintoticamente compacto, existe $J\subset\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ compacto que atrai $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$. Mostremos que se J atrai $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ então J atrai B. De fato, dado $\varepsilon>0$ existe $t_1>0$ tal que $T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}\subset V_\varepsilon(J)$ para todo $t\geq t_1$, ou ainda,

$$T(t)y\in V_\varepsilon(J),\quad\text{ para todo } t\geq t_1 \text{ e para todo } y\in\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}.$$

Em particular $T(t)y\in V_\varepsilon(J)$ para todo $t\geq t_1$ e $y\in\gamma^+_{t_0}(B)$. Ou seja,

$$T(t+s)x=T(t)T(s)x\in V_\varepsilon(J),$$

para todo $t\geq t_1$, todo $s\geq t_0$ e todo $x\in B$. Logo, tomando $t_2:=t_1+t_0$, segue para todo $t\geq t_2$ que $T(t)x\in V_\varepsilon(J)$, para todo $x\in B$. Portanto J atrai B. Desta forma concluímos que $\omega(B)\neq\emptyset$ e $\omega(B)\subset J$. De fato, consideremos sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ tal que $t_n\to\infty$. Como J atrai B então dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existem $t_1>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tais que

$$d(T(t_n)x_n,J)\leq d(T(t)x,J)<\varepsilon,\quad \forall t\geq t_0,\ \forall n\geq n_0 \text{ e } \forall x\in B.$$

Logo,

$$d(T(t_n)x_n,J)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Pela Proposição 2.2, item (i), $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente, isto é, existe $y\in X$ tal que $T(t_{n_k})x_{n_k}\to y$, quando $k\to\infty$, pelo Lema 2.1 segue que $y\in\omega(B)$. Assim $\omega(B)$ é não-vazio. Agora seja $y\in\omega(B)$ então novamente pelo Lema 2.1 existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $t_n\to\infty$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $T(t_n)x_n\xrightarrow{n\to\infty}y$. Com isso

$$d(T(t_n)x_n,J)\xrightarrow{n\to\infty}d(y,J).$$

Por sua vez $d(T(t_n)x_n,J)\xrightarrow{n\to\infty}0$, logo pela unicidade do limite temos $d(y,J)=0$ implicando que $y\in J$. Portanto $\omega(B)\subset J$.

Como $\omega(B)$ é fechado e $\omega(B) \subset J$, com J compacto, então $\omega(B)$ é compacto. Resta mostrar que $\omega(B)$ atrai B. Suponhamos o contrário, então existem $\varepsilon > 0$, sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \varepsilon$. Como J é compacto e atrai B segue da Proposição 2.2, item (i), que existem $x_0 \in J$, subsequências $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset B$ e $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $t_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} \infty$ e $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} x_0$. Por sua vez pelo Lema 2.1, $x_0 \in \omega(B)$ o que é uma contradição. Logo $\omega(B)$ é atrai B. Por fim aplicando o Lema 2.3 concluímos que $\omega(B)$ é invariante. ■

Proposição 2.3. *Se o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ verifica a propriedade: $\overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto sempre que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ são limitados em X e $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.*
Então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \subset X$ fechado, limitado e não-vazio tal que para todo $t \geq 0$ temos $T(t)B \subset B$. Consideremos o conjunto limite $\omega(B)$, notamos que dado $n \in \mathbb{N}$ tomando $t_n > n$ e $x_n \in B$ arbitrários, temos $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ limitado e

$$\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{t\geq 0} T(t)B \subset B,$$

ou seja, $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, assim por hipótese segue que a sequência $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ admite subsequência convergente, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $T(t_{n_k})x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0$. Pelo Lema 2.1, $x_0 \in \omega(B)$. Logo $\omega(B)$ é não-vazio, observamos ainda que $\omega(B) \subset B$, afinal se $y \in \omega(B)$ então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{e} \quad T(t_n)x_n \xrightarrow{n\to\infty} y,$$

logo $y \in \overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{B} = B$. Além disso, $\omega(B)$ é compacto, pois dada qualquer $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \omega(B)$ temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $t_n \in \mathbb{R}^+$ e $x_n \in B$ tais que $d(T(t_n)x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Determinamos assim a sequência $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ que é compacto, por hipótese, logo existe $y_0 \in B$ tal que $T(t_{n_k})x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y_0$. Com isso,

$$d(y_0, y_{n_k}) \leq d(y_0, T(t_{n_k})x_{n_k}) + d(T(t_{n_k})x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Portanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em $\omega(B)$, logo $\omega(B)$ é sequencialmente compacto e portanto compacto, já que X é espaço métrico. Finalmente verifiquemos que $\omega(B)$ atrai B sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Suponhamos o contrário, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $t_0 > 0$ existe $t > t_0$ em que $d(T(t)B, \omega(B)) \geq \varepsilon$. Em particular para $t_0 = n \in \mathbb{N}$ existem $t_n > n + t_0$ e $x_n \in B$

tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \varepsilon$. Como $\overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto então $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente, que denotaremos ainda por $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, assim existe $x_0 \in X$ tal que $T(t_n)x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Segue do Lema 2.1 que $x_0 \in \omega(B)$, o que é uma contradição. Portanto $\omega(B)$ é subconjunto de B compacto, não-vazio que atrai B, concluindo assim que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto. ■

Observamos ainda que pelo Lema 2.3 podemos concluir que o conjunto $\omega(B)$, na demonstração da Proposição 2.3, é invariante.

Definição 2.6 (condicionalmente eventualmente compacto/ eventualmente compacto)**.** *Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é condicionalmente eventualmente compacto se dado B limitado tal que $T(t)B \subset B$, para todo $t \geq 0$, existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Além disso, dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente compacto se dado B limitado existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.*

Teorema 2.1. *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é condicionalmente eventualmente compacto, então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \subset X$ não-vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$ para todo $t \geq 0$. Por hipótese existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Logo para $t_0 \geq t_B$, temos que $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto, pois $\gamma^+_{t_0}(B) \subset T(t_B)B$. De fato, se $y \in \gamma^+_{t_0}(B)$ então $y \in T(t_1)B$ para $t_1 \geq t_0 \geq t_B$, seja $x \in B$ tal que $y = T(t_1)x$, notamos que podemos escrever $t_1 = t_B + t_2$, onde $t_2 \geq 0$. Assim $y = T(t_B)T(t_2)x$, como $T(t_2)x \in B$, temos $y \in T(t_B)B$.

Pelo Lema 2.7, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Observamos que $\omega(B) \subset B$, já que se $y \in \omega(B)$ então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $T(t_n)x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$, logo

$$y \in \overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)B} \subset \overline{B} = B.$$

Portanto $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto. ■

Definição 2.7 (ponto dissipativo / limitado dissipativo / compacto dissipativo)**.** *Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é:*

(a) *ponto dissipativo se existir um subconjunto B de X limitado que atrai pontos de X;*

(b) *limitado dissipativo se existir um subconjunto B de X limitado que atrai subconjuntos limitados de X;*

(c) *compacto dissipativo se existir um subconjunto B de X limitado que atrai subconjuntos compactos de X.*

Lema 2.10. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ é limitado sempre que K é compacto então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é compacto dissipativo.*

DEMONSTRAÇÃO: Por $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ser ponto dissipativo existe $B \subset X$ não-vazio e limitado que atrai pontos de X. Isto é, dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)x \in V_\varepsilon(B)$, para todo $t \geq t_0$. Em particular para $\varepsilon = 1$ existe $t_1 \geq 0$ tal que, para todo $t \geq t_1$ temos $T(t)x \in V_1(B) := B_1$. Claro que B_1 é limitado. Consideremos $A = \{x \in X : \gamma^+(x) \subset B_1\}$, então:

(i) $A \subset B_1$ não-vazio. De fato, dado $x \in X$ então como B_1 atrai pontos de X existe $t_1 \geq 0$ tal que $T(t)x \in B_1$, para todo $t \geq t_1$. Todavia,

$$\gamma^+(T(t_1)x) = \bigcup_{t\geq 0} T(t)T(t_1)x = \bigcup_{t\geq t_1} T(t)x \subset B_1.$$

Logo, $T(t_1)x \in A$. Claro que $A \subset B_1$, pois dado $x \in A$, $x \in \gamma^+(x) \in B_1$, logo $x \in B_1$.

(ii) $T(t)\overline{A} \subset \overline{A}$, para cada $t \geq 0$. De fato, se $x \in A$ então para cada $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\gamma^+(T(t)x) =& \bigcup_{s\geq 0} T(s)T(t)x = \bigcup_{s\geq 0} T(s+t)x \\ =& \bigcup_{w\geq t} T(w)x \subset \gamma^+(x) \subset B_1.\end{aligned}$$

Com isso, $T(t)x \in A$. Ou seja, para todo $t \geq 0$ temos $T(t)A \subset A$, pela continuidade de $T(t) : X \to X$ segue que $T(t)\overline{A} \subset \overline{T(t)A} \subset \overline{A}$.

(iii) A atrai pontos de X. De fato, dado $x \in X$ arbitrário como B_1 atrai pontos de X existe $t_1 \geq 0$ tal que $T(t)x \in B_1$, para todo $t \geq t_1$. Assim, fixado $t \geq t_1$ e $s \geq 0$ temos que $T(s)T(t)x = T(s+t)x \in B_1$. Logo $\gamma^+(T(t)x) \subset B_1$ implicando que $T(t)x \in A$, para todo $t \geq t_1$. Logo A atrai x.

Por (i) e (ii), $\overline{A}$ é subconjunto de X não-vazio, fechado e limitado tal que $T(t)\overline{A} \subset \overline{A}$ para cada $t \geq 0$. Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto existe um conjunto compacto $K \subset \overline{A}$, tal que K atrai $\overline{A}$. Em particular K atrai A. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon \geq 0$ tal que $T(t)A \subset V_\varepsilon(K)$, para todo $t \geq t_\varepsilon$. Seja $x \in X$ arbitrário, pelo item (iii), existe $t_1 \geq 0$ tal que $T(t)x \in A$, para todo $t \geq t_1$. Seja $t_2 := t_\varepsilon + t_1$ segue que para todo $t \geq t_2$, temos:

$$T(t)x = T(t - t_1 + t_1)x = T(t - t_1)T(t_1)x \in T(t - t_1)A \subset V_\varepsilon(K).$$

Portanto K atrai pontos de X.

Mostremos agora que existe uma vizinhança U de K tal que $\gamma_t^+(U)$ é limitado para algum $t \geq 0$. Suponhamos o contrário, então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $x_n \to y \in K$ e $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, e $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado. Consideremos $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo $\overline{D}$ é compacto e além disso, para cada $t \geq 0$ temos $\gamma_t^+(D)$ não limitada, já que $\bigcup\limits_{t_n \geq t} T(t_n)D \subset \gamma_t^+(D)$. Como $\gamma_t^+(D) \subset \gamma^+(\overline{D})$ então $\gamma^+(\overline{D})$ é não limitado, contradizendo a hipótese.

Seja U uma vizinhança de K e $t_U \geq 0$ tal que $\gamma_{t_U}^+(U)$ é limitado. Como K atrai pontos de X e o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é contínuo, então $\gamma_{t_U}^+(U)$ atrai uma vizinhança de pontos de X. De fato, sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ tomado de modo que $V_\varepsilon(K) \subset U$, então existe $\tilde{t}_1 \geq 0$ tal que $T(t)x \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(K)$, para todo $t \geq \tilde{t}_1$, pois K atrai pontos. Como $T(\tilde{t}_1) : X \to X$ é contínua em x, então existe V_x, vizinhança de x, tal que $T(\tilde{t}_1)V_x \subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}(T(\tilde{t}_1)x)$. Assim, dado $y \in V_x$

$$d(T(\tilde{t}_1)y, K) \leq d(T(\tilde{t}_1)y, T(\tilde{t}_1)x) + d(T(\tilde{t}_1)x, K) < \varepsilon,$$

ou seja, $T(\tilde{t}_1)V_x \subset V_\varepsilon(K) \subset U$. Definimos $t_x := t_U + \tilde{t}_1$. Assim, para $t \geq t_x$ temos

$$T(t)V_x = T(t - t_U - \tilde{t}_1)T(t_U)T(\tilde{t}_1)V_x \subset T(t - t_U - \tilde{t}_1)T(t_U)U \subset T(t - t_U - \tilde{t}_1)\gamma_{t_U}^+(U) \subset \gamma_{t_U}^+(U).$$

Portanto, existem V_x vizinhança de x e $t_x > 0$ tais que $T(t)V_x \subset \gamma_{t_U}^+(U)$. Isto é, $\gamma_{t_U}^+(U)$ atrai uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Disso segue que $\gamma_{t_U}^+(U)$ atrai subconjuntos compactos de X. Realmente, seja $K_0 \subset X$ compacto temos que para cada $x \in K_0$ existe V_x vizinhança de x e $t_x \geq 0$ tais que $T(t)V_x \subset \gamma_{t_U}^+(U)$, para todo $t \geq t_x$. Por K_0 ser compacto existem $\{V_{x_i}\}_{i=1}^N$ tais que $K_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^N V_{x_i}$. Agora, sendo $t_{K_0} = \max\{t_{x_1}, \ldots, t_{x_N}\}$ segue que

$$T(t)K_0 \subset T(t)\left(\bigcup_{i=1}^N V_{x_i}\right) \subset \gamma_{t_U}^+(U),$$

para todo $t \geq t_{K_0}$. Logo $\gamma_{t_U}^+(U)$ atrai K_0. Portanto $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é compacto dissipativo. ■

Proposição 2.4. *Se K é compacto e atrai a si mesmo sob o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então $\omega(K) = \bigcap\limits_{t\geq 0} T(t)K$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $s \geq 0$ qualquer, como

$$T(s)K \subset \bigcup_{t\geq s} T(t)K \subset \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)K}.$$

Então, $\bigcap\limits_{t\geq 0} T(t)K \subset \omega(K)$. Para a inclusão contrária, podemos aplicar a Proposição 2.2 pois K atrai a si próprio que é compacto, com isso concluímos que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Pelo Lema 2.7, $\omega(K)$ é compacto, invariante e atrai K. Portanto, para todo $t \geq 0$

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K,$$

ou seja, $\omega(K) \subset \bigcap\limits_{t\geq 0} T(t)K$ sendo válida a igualdade. ■

2.2 Atrator global para semigrupo

Definição 2.8 (atrator global). *Dizemos que $\mathscr{A} \subset X$ é atrator global associado ao semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, ou simplesmente, que $\mathscr{A}$ é atrator global para $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, se $\mathscr{A}$ é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

Observamos que o atrator global para o semigrupo é único. De fato, suponhamos que $\mathscr{A}$ e $\widetilde{\mathscr{A}}$ sejam atratores globais para $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Usando que $\mathscr{A}$ é invariante e atrai $\widetilde{\mathscr{A}}$, temos

$$dist(\mathscr{A}, \widetilde{\mathscr{A}}) = dist(T(t)\mathscr{A}, \widetilde{\mathscr{A}}) \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

isto é, $dist(\mathscr{A}, \widetilde{\mathscr{A}}) = 0$, como $\widetilde{\mathscr{A}}$ é fechado temos $\mathscr{A} \subset \widetilde{\mathscr{A}}$. De modo análogo concluímos que $\widetilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}$.

Proposição 2.5. *Seja $\mathscr{A}$ atrator global para $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Temos que*

$$\mathscr{A} = \{x \in X : \textit{ existe uma órbita completa limitada através de } x\}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in \mathscr{A}$, por definição de invariância existe $\phi : \mathbb{R} \to X$, uma órbita completa através de x tal que $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$, assim $\phi(\mathbb{R})$ é limitada, logo

$$x \in \{y \in X : \text{ existe uma órbita completa limitada através de } y\}.$$

Por outro lado, dada $\phi : \mathbb{R} \to X$ uma órbita completa através de x, limitada então $\mathscr{A}$ atrai $\phi(\mathbb{R})$ e por definição, $\phi(\mathbb{R})$ é invariante sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Usando a Proposição 2.1, segue que

$$dist(\phi(\mathbb{R}), \mathscr{A}) = dist(T(t)\phi(\mathbb{R}), \mathscr{A}) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Portanto $x \in \phi(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$, obtendo a igualdade. ■

Definição 2.9 (eventualmente limitado / semigrupo limitado)**.** *Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado se para cada $B \subset X$ limitado existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Além disso, dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado, sempre que B é limitado.*

O próximo teorema caracteriza os semigrupos que têm atrator global.

Teorema 2.2. *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ admite $\mathscr{A}$ atrator global.*

DEMONSTRAÇÃO: ($\Rightarrow$) Por hipótese $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto e ponto dissipativo. Seja $K \subset X$ compacto, então K é limitado e como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado existe $t_K \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t_K}(K)$ é limitado. Do fato de que o semigrupo é contínuo, temos que $\bigcup\limits_{t\in[0,t_K]} T(t)K$ é compacto. Assim,

$$\gamma^+(K) = \gamma^+_{t_K}(K) \cup \left(\bigcup_{t\in[0,t_K]} T(t)K \right)$$

é limitada. Pelo Lema 2.10, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é compacto dissipativo. Logo, existe $C \subset X$ limitado tal que C atrai conjuntos compactos de X.

Consideremos $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C_1\}$, onde $C_1 = V_1(C)$. Como C_1 atrai pontos segue da demonstração do Lema 2.10 que $B \subset C_1$, é não-vazio e $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$, para todo $t \geq 0$. Verifiquemos que B atrai subconjuntos compactos de X. Seja $K_0 \subset X$ compacto arbitrário então C_1 atrai K_0, mais precisamente, existe $t_1 \geq 0$ tal que $T(t)K_0 \subset C_1$ para todo $t \geq t_1$. Fixando $t \geq t_1$ e $s \geq 0$ temos que

$$T(s)T(t)K_0 = T(s+t)K_0 \subset C_1,$$

implicando com isso que $\gamma^+(T(t)K_0) \subset C_1$. Logo,

$$T(t)K_0 \subset B, \quad \forall t \geq t_1. \tag{2.3}$$

Em particular B atrai K_0.

Por $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ser assintoticamente compacto, e $\overline{B}$ ser subconjunto de X não-vazio, limitado, fechado tal que $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ para todo $t \geq 0$ então existe um compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai $\overline{B}$. Logo K atrai subconjuntos compactos de X. Realmente, seja $K_0 \subset X$ compacto arbitrário e $\varepsilon > 0$ como K atrai B existe $t_B \geq 0$ tal que $T(t)B \subset V_\varepsilon(K)$, para todo $t \geq t_B$. Além disso, existe $t_1 \geq 0$ tal que (2.3) ocorre. Definimos $t_2 := t_1 + t_B$, assim para $t \geq t_2$ temos

$$T(t)K_0 = T(t - t_1 + t_1)K_0 = T(t - t_1)T(t_1)K_0 \subset T(t - t_1)B \subset V_\varepsilon(K).$$

Ou seja, K atrai K_0.

Com isso vimos que K atrai subconjuntos compactos de X, em particular K atrai a si mesmo. Pela Proposição 2.2, item (ii), concluímos que $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K) \subset K$. Podemos agora aplicar o Lema 2.7, logo $\omega(K)$ é compacto, invariante e atrai K sob ação de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Afirmação: Seja $J \subset X$ tal que $\omega(J)$ é não-vazio, compacto, invariante com $\omega(J) \subset K$ tal que $\omega(J)$ atrai J então $\omega(K)$ atrai J.

Realmente, como $\omega(J) \subset K$ e é invariante temos $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$, para cada $s \geq 0$. Segue da Proposição 2.4 que $\omega(J) \subset \bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} T(s)K = \omega(K)$, logo

$$dist(T(t)J, \omega(K)) \leq dist(T(t)J, \omega(J)) + dist(\omega(J), \omega(K)) = dist(T(t)J, \omega(J)) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Concluindo que a afirmação.

Verifiquemos que $\omega(K)$ atrai limitados de X. Seja $B \subset X$ limitado, como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado, existe $t_B \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Além disso, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto, segue do Lema 2.9 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Mostremos que $\omega(K)$ atrai B. De fato, sabemos que K atrai compactos, logo K atrai $\omega(B)$ além disso $\omega(B)$ é invariante então

$$dist(\omega(B), K) = dist(T(t)\omega(B), K) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Isto é, $dist(\omega(B), K) = 0$, ou seja, $\omega(B) \subset K$. Pela Afirmação concluímos que $\omega(K)$ atrai B. Portanto $\mathscr{A} = \omega(K)$ é atrator global para $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que existe $\mathscr{A}$ atrator global para $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é ponto dissipativo, pois em particular $\mathscr{A}$ é limitado e atrai pontos de X. Seja $B \subset X$ limitado, logo $\mathscr{A}$ atrai B, isto é, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B \subset V_1(\mathscr{A})$, para todo $t \geq t_0$. Assim, $\gamma^+_{t_0}(B) \subset V_1(\mathscr{A})$ é limitado. Concluímos com isso que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado. Com objetivo de obtermos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto verifiquemos a propriedade:

Propriedade: Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ são limitados e $t_n \to \infty$ então $\overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto.

Sendo $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ limitado e $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $t_1 \geq 0$ tal que $\bigcup_{t\geq t_1} T(t)x_n \subset V_\varepsilon(\mathscr{A})$, para todo

n natural. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_1$, para todo $n \geq n_0$. Então

$$T(t_n)x_n \in \bigcup_{t \geq t_1} T(t)x_n \subset V_\varepsilon(\mathscr{A}),$$

para todo $n \geq n_0$. Logo $d(T(t_n)x_n, \mathscr{A}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pela Proposição 2.2, item (i), existe $x \in \mathscr{A}$ e subsequência, $(T(t_{n_k})x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, de $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$T(t_{n_k})x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x.$$

Logo $\overline{\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto, sendo assim verificada a propriedade.
Pela Proposição 2.3, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto. Finalizando assim a demonstração. ■

Lema 2.11. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então existe um compacto $K \subset X$ tal que para cada $x \in X$ existem uma vizinhança V_x de x e $t_x \geq 0$ de modo que $T(t)V_x \subset K$, para todo $t \geq t_x$. Em particular, dado um compacto K_0, existe $r_0 \geq 0$, tal que $T(t)K_0 \subset K$ para todo $t \geq r_0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo ponto dissipativo, existe $C \subset X$ limitado que atrai os pontos de X. Usando o fato de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ser eventualmente compacto, seja $t_0 \geq 0$ tal que $\overline{T(t_0)V_1(C)}$ é compacto, considere $K_1 := \overline{T(t_0)V_1(C)}$. Para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $T(r_x)x \in V_1(C)$, segue da continuidade do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ que existe uma vizinhança V_x tal que $T(r_x)V_x \subset V_1(C)$. Como K_1 é compacto a cobertura aberta $\{V_x\}_{x\in K_1}$ possui uma subcobertura finita $\{V_{x_i}\}_{i=1}^N$. Seja $t_1 := \max\{t_0 + r_{x_i} : i = 1, 2, \ldots, N\}$, mostraremos que

$$T(t)K_1 \subset \bigcup_{s\in[0,t_1]} T(s)K_1, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$

De fato, fixados $t \geq 0$ e $x \in K_1$ seja

$$r := \sup\{t' \in [0,t] : T(t')x \in K_1\} = \max\{t' \in [0,t] : T(t')x \in K_1\}.$$

Observemos que como $T(r)x \in K_1$ segue que $T(r)x \in V_{x_j}$, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, então

$$T(t_0 + r_{x_j} + r)x = T(t_0)T(r_{x_j})T(r)x \subset T(t_0)T(r_{x_j})V_{x_j} \subset T(t_0)V_1(C) \subset K_1.$$

Como $t_0 + r_{x_j} + r > r$ então $t_0 + r_{x_j} + r > t$, caso contrário iríamos contrariar a maximalidade de

r. Assim

$$T(t)x = T(t-r)T(r)x \in T(t-r)K_1 \in \bigcup_{s\in[0,t_1]} T(s)K_1.$$

pois $t - r < t_0 + r_{x_j} \leq t_1$. Portanto (2.4) ocorre, para todo $t \geq 0$. Seja

$$K := \bigcup_{s\in[0,t_1]} T(s)K_1.$$

Pela continuidade do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ segue que K é compacto, além disso, dados $x \in X$ e $t \geq t_x := r_x + t_0$ temos que

$$T(t)V_x = T(t-r_x-t_0)T(t_0)T(r_x)V_x \subset T(t-r_x-t_0)T(t_0)V_1(C) \subset T(t-r_x-t_0)K_1 \subset K.$$

Portanto o resultado está demonstrado. Em particular, dado um compacto $K_0 \subset X$, como a cobertura aberta $\{V_x\}_{x\in K_0}$ possui uma subcobertura finita $\{V_{x_i}\}_{i=1}^m$, tomando $r_0 = \max\{t_{x_i} : i = 1, 2, \ldots, m\}$, dado $t \geq r_0$ segue que

$$T(t)K_0 \subset \bigcup_{i=1}^m T(t)V_{x_i} \subset K.$$

■

O próximo teorema apresenta uma condição suficiente sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ para existência de atrator global.

Teorema 2.3. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tem uma atrator global $\mathscr{A}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Primeiramente mostraremos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto. Seja $B \subset X$ fechado, limitado, não-vazio tal que $T(t)B \subset B$, para todo $t \geq 0$. Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente compacto, existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Notemos que como $T(t)B \subset B$, para todo $t \geq 0$ então $\overline{T(t_B)B} \subset \overline{B} = B$. Além disso, para $t \geq t_B$

$$T(t)B = T(t_B)T(t-t_B)B \subset T(t_B)B \subset \overline{T(t_B)B}.$$

Em particular $\overline{T(t_B)B}$ atrai B. Portanto $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto.

O próximo passo é verificarmos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado. Dado um conjunto limitado B, novamente por $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ser eventualmente compacto, existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(t_B)B$ é relativamente compacto. Como

$$T(t)T(t_B)B \subset T(t)\overline{T(t_B)B},$$

para todo $t \geq 0$, então $\gamma^+_{t_B}(B) \subset \gamma^+(\overline{T(t_B)B})$. Logo, se $\gamma^+(\overline{T(t_B)B})$ é limitada então $\gamma^+_{t_B}(B)$ também o é. Assim basta provarmos que a órbita positiva de compactos é limitada. Consideremos $K_0 \subset X$ compacto, pelo Lema 2.11 existem K compacto e $r_0 \geq 0$ tais que $T(t)K_0 \subset K$, para todo $t \geq r_0$. Logo,

$$\gamma^+(K_0) = \left(\bigcup_{t\in[0,r_0]} T(t)K_0 \right) \cup \left(\bigcup_{t\geq r_0} T(t)K_0 \right) \subset \left(\bigcup_{t\in[0,r_0]} T(t)K_0 \right) \cup K$$

que por sua vez é compacto. Portanto $\gamma^+(K_0)$ é limitada e o semigrupo é eventualmente limitado. Segue do Teorema 2.2 que o semigrupo admite atrator global. ■

2.3 Continuidade de atratores

Nessa seção abordaremos a continuidade de uma família de qualquer, em especial a semicontinuidade superior. Denotaremos por Λ um espaço métrico.

Definição 2.10. *Seja $J_\lambda \subset X$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Dizemos que a família $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é*

(a) *semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$ se*

$$dist(J_\lambda, J_{\lambda_0}) = \sup_{u_\lambda \in J_\lambda} d(u_\lambda, J_{\lambda_0}) \xrightarrow{\lambda\to\lambda_0} 0.$$

(b) *semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$ se*

$$dist(J_{\lambda_0}, J_\lambda) = \sup_{u \in J_{\lambda_0}} d(u, J_\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\lambda_0} 0.$$

Lema 2.12. *Consideremos $J_\lambda \subset X$ para cada $\lambda \in \Lambda$.*
(i) *A família $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$, se toda sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $\lambda_n \to \lambda_0$ admite subsequência que converge para um elemento de J_{λ_0}.*
(ii) *Seja J_{λ_0} é compacto. A família $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$ se para todo $u \in J_{\lambda_0}$ e toda $\lambda_n \to \lambda_0$ existe sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $u_{\lambda_n} \to u$.*

DEMONSTRAÇÃO: (i) Suponhamos que a família $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n \in B_\Lambda(\lambda_0, \frac{1}{n})$ com $\sup\limits_{u_{\lambda_n}\in J_{\lambda_n}} d(u_{\lambda_n}, J_{\lambda_0}) \geq \varepsilon$, ou ainda, existem $\lambda_n \in B_\Lambda(\lambda_0, \frac{1}{n})$ e $\widetilde{u}_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$ com $d(\widetilde{u}_{\lambda_n}, J_{\lambda_0}) \geq \varepsilon$. Agora, por hipótese a sequência $(\widetilde{u}_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente para um elemento de J_{λ_0}, digamos $u_0 \in J_{\lambda_0}$, denotando tal subsequência por $(\widetilde{u}_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, temos $\widetilde{u}_{\lambda_n} \xrightarrow{n\to\infty} u_0$. Entretanto para cada $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$d(\widetilde{u}_{\lambda_n}, u_0) \geq d(\widetilde{u}_{\lambda_n}, J_{\lambda_0}) \geq \varepsilon,$$

que é uma contradição. Portanto sob tais hipóteses a família $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$.

De forma análoga para provarmos o item (ii): suponhamos que $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não seja semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$. Então existe $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $\lambda_n \in B(\lambda_0, \frac{1}{n})$ e $u_m \in J_{\lambda_0}$, tais que $d(u_m, J_{\lambda_n}) \geq \varepsilon$. Como $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset J_{\lambda_0}$, que é compacto, então $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ admite subsequência, que ainda denotamos por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, convergindo para $u \in J_{\lambda_0}$, isto é $u_m \xrightarrow{n\to\infty} u$. Além disso,

$$\varepsilon \leq d(u_m, J_{\lambda_n}) \leq d(u_m, u) + d(u, J_{\lambda_n}) \xrightarrow{m\to\infty} d(u, J_{\lambda_n}).$$

Como $u \in J_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \to \lambda_0$, por hipótese, existe sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $u_{\lambda_n} \xrightarrow{n\to\infty} u$. Por sua vez,

$$\varepsilon \leq d(u, J_{\lambda_n}) \leq d(u, u_{\lambda_n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

o que é uma contradição. Portanto $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$. ∎

Definição 2.11. *Dizemos que a família de semigrupos $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0,\, \lambda\in\Lambda}$ é contínua em $\lambda = \lambda_0$, se $T_\lambda(t)x \xrightarrow{\lambda\to\lambda_0} T_{\lambda_0}(t)x$ uniformemente para (t, x) em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^+ \times X$.*

Teorema 2.4. *Consideremos $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0,\, \lambda\in\Lambda}$ uma família de semigrupos contínua em $\lambda = \lambda_0$, tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ o semigrupo $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ admite atrator global $\mathscr{A}_\lambda$. Se $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ é relativamente compacto em X, então a família de atratores $\{\mathscr{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$.*

A demonstração desse resultado pode ser consultada em [3] na página 24.

Capítulo 3

Existência de Atrator Global para Problemas com Operadores Monótonos

Iremos garantir, sob certas condições, a existência de atrator global para problemas da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + B(u(t)) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é operador maximal monótono e B é uma aplicação globalmente Lipschitz em um espaço de Hilbert. No final do capítulo apresentaremos uma aplicação da teoria abstrata. Citamos [2] como a principal referência.

3.1 Apresentação do problema

Considere as seguintes hipóteses:

H1 : Sejam V espaço de Banach reflexivo e H espaço de Hilbert, tais que $V \subset H \hookrightarrow V'$ com imersões contínuas, denotaremos respectivamente por η_1 e η_2, as constantes de imersão. Além disso V é denso em H. Aqui V' denota o dual topológico de V.

H2 : Seja $A : V \to V'$ operador não-linear, monótono, coercivo e hemicontínuo.

Assumindo H1 e H2 temos, de acordo com a Definição 1.4, o operador realização de A em H, denotado por A_H. Segue da Proposição 1.5 que $A_H : D(A_H) \subset H \to H$ é operador não-linear maximal monótono. Consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A_H(u(t)) + B(u(t)) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $B : H \to H$ é uma aplicação globalmente Lipschitz, sendo L sua constante de Lipschitz.

Definição 3.1. *Seja $T > 0$. Dizemos que $u \in C([0,T];H)$ é solução forte de* (3.1)*, se:*

(i) *u é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de $(0,T)$;*

(ii) *$u(t) \in D(A_H)$ quase sempre em $(0,T)$, com $u(0) = u_0$;*

(iii) *$\dfrac{du}{dt}(t) + A_H(u(t)) + B(u(t)) = 0$, ocorre quase sempre em $(0,T)$.*

Dizemos que $u \in C([0,T];H)$ é solução fraca de (3.1)*, se existe uma sequência de soluções fortes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergem para u em $C([0,T];H)$.*

Quando nos referirmos ao problema (3.1), sem fazer menção as hipóteses H1 e H2, teremos sempre assumido que $A_H : D(A_H) \subset H \to H$ é operador maximal monótono e $B : H \to H$ uma aplicação globalmente Lipschitz, sendo L sua constante de Lipschitz.

3.2 Existência e unicidade de soluções

Nesta seção garantiremos a existência e unicidade de solução para o problema (3.1).

Teorema 3.1. *Para todo $u_0 \in \overline{D(A_H)}^H$ existe uma única solução fraca u para* (3.1)*, tal que $u(0) = u_0$. No caso em que $u_0 \in D(A_H)$ então a função u é lipschitziana e portanto solução forte do problema.*

DEMONSTRAÇÃO: Primeiramente verificaremos que o operador unívoco $A_H + B + \omega I$, é operador maximal monótono para $\omega \geq L$. Observamos que $B + \omega I$ é monótono, pois:

$$\begin{aligned} \langle (B+\omega I)u - (B+\omega I)v, u - v\rangle_H =& \langle Bu - Bv, u - v\rangle_H + \langle \omega u - \omega v, u - v\rangle_H \\ =& \langle Bu - Bv, u - v\rangle_H + \omega\|u - v\|_H^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} -\langle Bu - Bv, u - v\rangle_H \leq& |\langle Bu - Bv, u - v\rangle_H| \leq \|Bu - Bv\|_H \|u - v\|_H \\ \leq& L\|u - v\|_H^2 \leq \omega\|u - v\|_H^2. \end{aligned}$$

Por outro lado $B+\omega I$ é operador contínuo, com $D(B+\omega I) = D(B)\cap D(\omega I) = H$. Assim $B+\omega I$ é monótono, hemicontínuo e está definido em todo H nos permitindo concluir pela Proposição 1.4 que $B+\omega I$ é operador maximal monótono.
Além disso, $int(D(B+\omega I))\cap D(A_H) = H\cap D(A_H) = D(A_H)$. Fazendo uso do Corolário 1.1, concluímos que $\tilde{A} := A_H + B + \omega I$ é operador maximal monótono.
Aplicando o Teorema 1.2 para o operador $\tilde{A}$ e função $f\equiv 0$, concluímos que se $u_0 \in \overline{D(\tilde{A})} = \overline{D(A_H)}$, então o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + (A_H + B + \omega I)u - \omega u = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

admite única solução fraca. Ou seja, para $u_0 \in \overline{D(A_H)}$ segue que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_H u + Bu = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

admite uma única solução fraca $u \in C([0,T],H)$. Por definição de solução fraca, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de soluções fortes que convergem para u uniformemente em $[0,T]$. Tome $h>0$ de modo que t e $t+h$ pertençam a $[0,T]$. Sendo o operador A monótono, para cada $n\in\mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H^2 =& \left\langle \frac{d}{dt}u_n(t+h) - \frac{d}{dt}u_n(t), u_n(t+h)-u_n(t)\right\rangle_H \\ =& -\langle Au_n(t+h) - Au_n(t), u_n(t+h)-u_n(t)\rangle_H \\ &+ \langle -Bu_n(t+h) + Bu_n(t), u_n(t+h)-u_n(t)\rangle_H \\ \leq& \langle -Bu_n(t+h) + Bu_n(t), u_n(t+h)-u_n(t)\rangle_H \\ \leq& \|Bu_n(t+h) - Bu_n(t)\|_H \|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H \\ \leq& L\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H^2. \end{aligned}$$

Tome $s\in[0,T]$, então

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^s L\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(s+h)-u_n(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(h)-u_n(0)\|_H^2 \leq \int_0^s L\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(s+h)-u_n(s)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(h)-u_n(0)\|_H^2 + L\int_0^s \|u_n(t+h)-u_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema A.1 (Gronwall) nessa última desigualdade, obtemos:

$$\|u_n(s+h) - u_n(s)\|_H \leq \|u_n(h) - u_n(0)\|_H + \int_0^s L\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_H \mathrm{d}t,$$

fazendo $n \to +\infty$ segue que

$$\|u(s+h) - u(s)\|_H \leq \|u(h) - u(0)\|_H + \int_0^s L\|u(t+h) - u(t)\|_H \mathrm{d}t.$$

Pelo Lema A.2 (Gronwall-Bellman) concluímos que

$$\|u(s+h) - u(s)\|_H \leq e^{LT}\|u(h) - u(0)\|_H. \tag{3.2}$$

No caso particular em que $u_0 \in D(A)$ temos pelo Teorema 1.3 que u é diferenciável à direita em $t = 0$. Logo, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|u(h) - u(0) - D^+u(0)h\|_H \leq \|h\|_H,$$

sempre que $\|h\|_H < \delta$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\|u(h) - u(0)\|_H \leq& \|u(h) - u(0) - D^+u(0)h\|_H + \|D^+u(0)h\|_H \\ \leq& \|h\|_H + \|D^+u(0)\|_H\|h\|_H = (1 + \|D^+u(0)\|_H)\|h\|_H.\end{aligned}$$

Voltando em (3.2) segue que

$$\|u(s+h) - u(s)\|_H \leq e^{LT}(1 + \|D^+u(0)\|_H)\|h\|_H,$$

sempre que $\|h\|_H < \delta$. Isso implica que $u : [0,T] \to H$ é lipschitziana com constante de lipschitz $C := e^{LT}(1 + \|D^+u(0)\|_H)$. De fato, dados $x, y \in [0,T]$ quaisquer tais que $x < y$. Tome $N > \frac{T}{\delta}$ e considere a partição de $[x, y]$:

$$x = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = y, \quad \text{onde } t_i := x + i\frac{(y-x)}{N}.$$

Como $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, para todo $i = 1, \ldots, N$ então

$$\begin{aligned}\|u(x) - u(y)\|_H =& \|u(t_0) - u(t_1) + u(t_1) - \ldots - u(t_{N-1}) + u(t_N)\|_H \leq \sum_{i=1}^{N} \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_H \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} C|t_i - t_{i-1}| = C\sum_{i=1}^{N} \frac{|y-x|}{N} = \frac{cN|y-x|}{N} = C|y-x|.\end{aligned}$$

Portanto u é lipschitziana, logo da Observação 1.2 temos que u é absolutamente contínua em $[0,T]$, em particular é absolutamente contínua em cada subintervalo compacto de $(0,T)$. Pelo Teorema 1.6 segue que u é solução forte. ■

Observamos que u é globalmente definida pois $T > 0$ é arbitrário, isto é, $u : [0,+\infty) \to H$. Denotamos por $u(t; 0, u_0)$ a solução da equação $\dfrac{du}{dt} + A_H u + Bu = 0$, com condição inicial $u(0) = u_0$, calculada no instante t.

Proposição 3.1. *Para cada $t \geq 0$ considere*

$$\begin{aligned} T(t): \ \overline{D(A_H)}^H &\to \ \overline{D(A_H)}^H \\ u_0 &\mapsto \ T(t)u_0 = u(t;0,u_0). \end{aligned}$$

Então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo não linear e

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)}^H &\to \ \overline{D(A_H)}^H \\ (t,u_0) &\mapsto \ T(t)u_0 \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua.

DEMONSTRAÇÃO: A família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é tal que:

(i) Para $u_0 \in \overline{D(A_H)}^H$, qualquer temos $T(0)u_0 = u(0) = u_0$, ou seja, $T(0) = Id_{\overline{D(A_H)}^H}$.

(ii) Considere $u_0 \in \overline{D(A_H)}^H$ arbitrário, então para $t, s \geq 0$

$$T(t+s)u_0 = u(t+s;0,u_0) \quad \text{e} \quad T(t)T(s)u_0 = u(t;0,T(s)u_0) = u(t;0,u(s;0,u_0)).$$

Para cada $s \geq 0$ fixado, ambas as aplicações $t \mapsto T(t)T(s)u_0$ e $t \mapsto T(t+s)u_0$, são soluções fracas do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av + Bv = 0 \\ v(0) = u(s;0,u_0), \end{cases}$$

segue da unicidade de solução, garantida pelo Teorema 3.1, que $T(t+s)u_0 = T(t)T(s)u_0$. Portanto $T(t+s) = T(t)T(s)$.

Concluímos por (i) e (ii) que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo. Resta mostrarmos a continuidade da aplicação:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)}^H &\to \overline{D(A_H)}^H \\ (t, u_0) &\mapsto T(t)u_0. \end{aligned}$$

Seja $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)}^H$ arbitrário. Considere $\varepsilon > 0$ qualquer, queremos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que para todo $(t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)}^H$ em que $|(t,v) - (t_0, u_0)|_{\mathbb{R}^+ \times H} < \delta$ temos

$$\|T(t)v - T(t_0)u_0\|_H < \varepsilon.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|T(t)v - T(t_0)u_0\|_H &\leq \|T(t)v - T(t)u_0\|_H + \|T(t)u_0 - T(t_0)u_0\|_H \\ &= \|u(t;0,v) - u(t;0,u_0)\|_H + \|u(t;0,u_0) - u(t_0;0,u_0)\|_H. \end{aligned}$$

Pela continuidade da solução $t \mapsto u(t;0,u_0)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|u(t;0,u_0) - u(t_0;0,u_0)\|_H < \frac{\varepsilon}{2},$$

sempre que $|t - t_0| < \delta_1$. Seja $T > 0$, como as funções $t \overset{\varphi}{\mapsto} u(t;0,v)$ e $t \overset{\phi}{\mapsto} u(t;0,u_0)$ são soluções fracas de (3.1), então existem sequências $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções fortes que convergem uniformemente em $[0,T]$ para φ e ϕ, respectivamente. Consideremos $t \in [0,T]$, sendo A operador monótono, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_n(t) - \phi_n(t)\|_H^2 &= \left\langle \frac{d}{dt}\varphi_n(t) - \frac{d}{dt}\phi_n(t), \varphi_n(t) - \phi_n(t) \right\rangle_H \\ &= -\langle A\varphi_n(t) - A\phi_n(t), \varphi_n(t) - \phi_n(t)\rangle_H \\ &\qquad + \langle -B\varphi_n(t) + B\phi_n(t), \varphi_n(t) - \phi_n(t)\rangle_H \\ &\leq \langle -B\varphi_n(t) + B\phi_n(t), \varphi_n(t) - \phi_n(t)\rangle_H \\ &\leq \|B\varphi_n(t) - B\phi_n(t)\|_H \|\varphi_n(t) - \phi_n(t)\|_H \\ &\leq L\|\varphi_n(t) - \phi_n(t)\|_H^2. \end{aligned}$$

Tome $s \in [0,T]$, integrando a desigualdade acima de 0 à s, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\varphi_n(t)-\phi_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^s L\|\varphi_n(t)-\phi_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t\\
\Rightarrow&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_n(s)-\phi_n(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_n(0)-\phi_n(0)\|_H^2 \leq \int_0^s L\|\varphi_n(t)-\phi_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t\\
\Rightarrow&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_n(s)-\phi_n(s)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v-u_0\|_H^2 + L\int_0^s \|\varphi_n(t)-\phi_n(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema A.1 (Gronwall) nessa última desigualdade, obtemos

$$\|\varphi_n(s)-\phi_n(s)\|_H \leq \|v-u_0\|_H + \int_0^s L\|\varphi_n(t)-\phi_n(t)\|_H\mathrm{d}t,$$

fazendo $n \to +\infty$ segue que

$$\|\varphi(s)-\phi(s)\|_H \leq \|v-u_0\|_H + \int_0^s L\|\varphi(t)-\phi(t)\|_H\mathrm{d}t, \quad \forall s \in [0,T].$$

Pelo Lema A.2 (Gronwall-Bellman) concluímos que

$$\|\varphi(s)-\phi(s)\|_H \leq e^{LT}\|v-u_0\|_H, \quad \forall s \in [0,T].$$

Portanto, observemos que sendo $C(T) := e^{LT}$ temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|T(t)v - T(t)u_0\|_H \leq C(T)\|v-u_0\|_H. \tag{3.3}$$

Tome $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2e^{L(t_0+\delta_1)}}\right\}$, então sendo $\|v-u_0\|_H < \delta$

$$\|\varphi(s)-\phi(s)\|_H \leq e^{L(t_0+\delta_1)}\|v-u_0\|_H \leq e^{L(t_0+\delta_1)}\frac{\varepsilon}{2e^{L(t_0+\delta_1)}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $s \in [0, t_0+\delta]$. Logo, para todo $(t,v) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)}^H$ tal que $|(t,v)-(t_0,u_0)|_{\mathbb{R}^+\times H} < \delta$, tem-se

$$\begin{cases}
|t-t_0| < \delta \leq \delta_1 & \Rightarrow \|T(t)u_0 - T(t_0)u_0\|_H < \frac{\varepsilon}{2}\\
\|v-u_0\|_H < \delta & \Rightarrow \|T(t)v - T(t)u_0\|_H < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{uniformemente em } [0,t_0+\delta].
\end{cases}$$

Com isso $\|T(t)v - T(t_0)u_0\|_H < \varepsilon$, finalizando a demonstração. ■

3.3 Resultados abstratos

Nesta seção demonstraremos o teorema que garante a existência de atrator global para (3.1). Iniciamos demonstrando resultados que nos auxiliarão neste objetivo. Consideremos a seguinte hipótese:

H3 : Existem constantes $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$, tais que para todo $v \in V$ as seguintes condições ocorrem:

$$\langle Av, v\rangle_{V',V} \geq \omega_1\|v\|_V^p + c_1, \tag{3.4}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq \omega_2(1 + \|v\|_V^{p-1}). \tag{3.5}$$

As hipóteses H1, H2 e H3 nos possibilitarão concluir a densidade de $D(A_H)$, a compacidade e dissipatividade do semigrupo associado ao problema (3.1).

Lema 3.1. *Consideremos H1, H2 e H3 então o domínio $D(A_H)$ é denso em H.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $u \in H$ um elemento arbitrário e $\varepsilon \in (0, 1)$. Como A_H é operador maximal monótono, temos que εA_H também é maximal monótono, logo segue da Proposição 1.2 que $R(I + \varepsilon A_H) = H$. Assim existe $u_\varepsilon \in D(I + \varepsilon A_H) = D(A_H)$ tal que $(I + \varepsilon A_H)u_\varepsilon = u$, ou seja,

$$u_\varepsilon + \varepsilon A_H u_\varepsilon = u. \tag{3.6}$$

Aplicando $\langle\cdot, u_\varepsilon\rangle_H$ em ambos de (3.6), obtemos

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\langle A_H u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle_H = \langle u, u_\varepsilon\rangle_H.$$

Usando a definição de A_H e a condição (3.4), já que H3 ocorre por hipótese, tem-se

$$\begin{aligned}\langle u, u_\varepsilon\rangle_H &= \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle_{V',V} \geq \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon(\omega_1\|u_\varepsilon\|_V^p + c_1)\\ \Rightarrow &\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\omega_1\|u_\varepsilon\|_V^p + \varepsilon c_1 \leq \langle u, u_\varepsilon\rangle_H \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\omega_1\|u_\varepsilon\|_V^p \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H - \varepsilon c_1. \tag{3.7}$$

A partir de (3.7) podemos concluir que $\|u_\varepsilon\|_H$ e $\varepsilon\|u_\varepsilon\|_V^p$ são limitadas. De fato, como $\|u_\varepsilon\|_H^2 \leq \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\omega_1\|u_\varepsilon\|_V^p$, segue que

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H - \varepsilon c_1. \tag{3.8}$$

Aplicando a Desigualdade de Young em $\|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H$ temos:

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 \le \frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \varepsilon c_1 \Rightarrow \|u_\varepsilon\|_H^2 \le \|u\|_H^2 - 2\varepsilon c_1.$$

Como $0 < \varepsilon < 1$ então $-\varepsilon c_1 \le \max\{0, -c_1\} := k_1 \ge 0$, assim:

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 \le \|u\|_H^2 + 2k_1 \Rightarrow \|u_\varepsilon\|_H \le \sqrt{\|u\|_H^2 + 2k_1} := k,$$

portanto $\|u_\varepsilon\|_H$ é limitada. Segue da equação (3.7) que:

$$\begin{aligned}\varepsilon\omega_1\|u_\varepsilon\|_V^p &\le \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\omega_1\|u_\varepsilon\|_V^p \\ &\le \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H - \varepsilon c_1 \le k\|u\|_H + k_1.\end{aligned}$$

Assim

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|_V^p \le \frac{k\|u\|_H + k_1}{\omega_1} := \widetilde{k},$$

ou seja, $\varepsilon\|u_\varepsilon\|_V^p$ também é limitada, onde a constante de limitação é independente de ε.
Utilizando (3.5) e (3.6) segue que

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u\|_{V'} &= \|u_\varepsilon - (u_\varepsilon + \varepsilon A_H u_\varepsilon)\|_{V'} = \|\varepsilon A_H u_\varepsilon\|_{V'} \\ &\le \varepsilon\omega_2(1 + \|u_\varepsilon\|_V^{p-1}) = \varepsilon\omega_2\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_V^p\right)^{\frac{(p-1)}{p}}\right) \\ &\le \varepsilon\omega_2\left(1 + \left(\frac{\widetilde{k}}{\varepsilon}\right)^{\frac{(p-1)}{p}}\right) = \varepsilon\omega_2\left(1 + \varepsilon^{-(\frac{p-1}{p})}\widetilde{k}^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ &= \omega_2(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{p}}\widetilde{k}^{\frac{p-1}{p}}).\end{aligned}$$

Logo, quando $\varepsilon \to 0$ temos $\|u_\varepsilon - u\|_{V'} \to 0$, isto é, $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u$ em V'.
Como H é espaço de Hilbert e o conjunto $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ é limitado em H, temos que para toda sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, por $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em H, segue do Teorema A.4 que qualquer subsequência de $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência que converge fracamente em H, já que H é reflexivo. Consequentemente u_ε converge para u fracamente em H, quando $\varepsilon \to 0$.

Escrevemos agora $y_\varepsilon := \|u_\varepsilon\|_H$, então segue de (3.8) que

$$\begin{aligned}
&y_\varepsilon^2 - \|u\|_H y_\varepsilon + \varepsilon c_1 \leq 0 \\
&\Rightarrow \limsup_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon^2 - \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u\|_H y_\varepsilon + \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon c_1 \leq 0 \\
&\Rightarrow \left(\limsup_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon\right)^2 - \|u\|_H \limsup_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon + \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon c_1 \leq 0 \\
&\Rightarrow \limsup_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon \left(\limsup_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon - \|u\|_H\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Como $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon \geq 0$, devemos ter que $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon - \|u\|_H \leq 0$, portanto

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_H \leq \|u\|_H.$$

Assim para toda sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_n \to \infty$, temos $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para u fracamente em H e $\limsup\limits_{n\to\infty} \|u_{\varepsilon_n}\|_H \leq \|u\|_H$. Pela Proposição A.5 temos que u_ε converge para u fortemente em H. Logo $u \in \overline{D(A_H)}^H$, ou seja, $H \subset \overline{D(A_H)}^H$ implicando que $D(A_H)$ é denso em H. ■

Lema 3.2. *Sejam $r > 0$, ϕ uma aplicação contínua em um espaço métrico X e $W \subset X$ denso. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *para cada bola aberta $B_X(r)$ a imagem $\phi(B_X(r) \cap W)$ é pré-compacto em X.*

(ii) *para cada subconjunto limitado $\mathscr{B}$ de X, a imagem $\phi(\mathscr{B})$ é pré-compacta em X.*

DEMONSTRAÇÃO: $(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $B_X(r)$ uma bola aberta qualquer, em particular $B_X(r) \cap W \subset B_X(r) \subset X$ é limitado, logo por hipótese $\phi(B_X(r) \cap W)$ é pré-compacto em X.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\mathscr{B} \subset X$ limitado, denotaremos por $d(\mathscr{B})$ o diâmetro de $\mathscr{B}$. Tome $v_0 \in \mathscr{B}$ então é claro que

$$\mathscr{B} \subset \{v \in X; d_X(v_0, v) < d(\mathscr{B}) + 1\} := \widetilde{\mathscr{B}}.$$

Além disso, como $W \subset X$ é denso então

$$\mathscr{B} = \mathscr{B} \cap X \subset \widetilde{\mathscr{B}} \cap X \subset \overline{\widetilde{\mathscr{B}}}^X \cap \overline{W}^X = \overline{\widetilde{\mathscr{B}} \cap W}^X,$$

isto é, $\mathscr{B} \subset \overline{\widetilde{\mathscr{B}} \cap W}^X$. Por ser ϕ contínua segue que

$$\phi(\mathscr{B}) \subset \phi(\overline{\widetilde{\mathscr{B}} \cap W}^X) \subset \overline{\phi(\widetilde{\mathscr{B}} \cap W)}^X.$$

Notamos que $\widetilde{\mathscr{B}}$ é por definição a bola $B_X(v_0, d(\mathscr{B})+1)$, logo segue de (i) que $\overline{\phi(\widetilde{\mathscr{B}} \cap W)}^X$ é compacto em X. Como

$$\overline{\phi(\mathscr{B})}^X \subset \overline{\phi(\widetilde{\mathscr{B}} \cap W)}^X$$

segue que $\overline{\phi(\mathscr{B})}^X$ é compacto, isto é, (ii) ocorre. ■

Em vista do Lema 3.2 para verificarmos a compacidade do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ associado ao problema (3.1), basta considerarmos apenas os conjuntos da forma $B_H(r) \cap D(A_H)$ ao invés de todos os limitados de $\overline{D(A_H)}^H$.

Observação 3.1. *Sejam a, b e α em $[0, +\infty)$, então*

$$(a+b)^\alpha \leq (2\max\{a,b\})^\alpha \leq 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha).$$

Lema 3.3. *Consideremos o problema (3.1), assuma ainda que H1, H2 e H3 são verdadeiras para $p > 2$ então para qualquer $u_0 \in D(A_H)$ e $T > 0$ temos*

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^p \, ds \leq \mathscr{C}_1(\|u_0\|_H, T) \tag{3.9}$$

e

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{V'}^{p'} ds \leq \mathscr{C}_2(\|u_0\|_H, T), \tag{3.10}$$

onde $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são funções localmente limitadas e p' denota o expoente conjudado de p.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $u_0 \in D(A_H)$ e $T > 0$. Estamos nas hipóteses do Teorema 3.1, assim existe u solução forte para o problema (3.1), claro que $u \in C([0,T], H)$. Além disso, definindo $f : [0,T] \to H$ por $f(t) := B(u(t))$ temos que

$$f \in C([0,T], H) \subset L^{p'}(0,T; V').$$

Aplicando o Teorema 1.9, página 225, de [15] podemos concluir que

$$u \in C([0,T], H) \cap L^p(0,T;V) \quad \text{ e } \quad \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V').$$

Estamos prontos agora para provarmos (3.9) e (3.10). Como u é solução forte de (3.1) temos:

$$\frac{du}{dt} = -A_H u - Bu, \quad \text{quase sempre em } [0,T].$$

Usando (3.4) tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = \left\langle \frac{du}{dt}, u\right\rangle_H &= \langle -A_H u - Bu, u\rangle_H = -\langle Au, u\rangle_{V',V} - \langle Bu, u\rangle_H \\ &\leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + |\langle Bu, u\rangle_H| \\ &\leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + \|Bu\|_H\|u\|_H.\end{aligned}$$

Por sua vez, $\|Bu\|_H = \|Bu - B0 + B0\|_H \leq \|Bu - B0\|_H + \|B0\|_H \leq L\|u\|_H + \|B0\|_H$, logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &\leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + (L\|u\|_H + \|B0\|_H)\|u\|_H \\ &= -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + L\|u\|_H^2 + \|B0\|_H\|u\|_H \\ &\leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + \left(L + \frac{1}{2}\right)\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B0\|^2, \qquad (3.11)\end{aligned}$$

sendo (3.11) obtida aplicando a Desigualdade de Young no termo $\|B0\|_H\|u\|_H$. Agora, tome $0 < \lambda < \left(\frac{p\omega_1}{4\eta_1^p}\right)^{\frac{2}{p}}$, novamente aplicando a Desigualdade de Young para $\frac{1}{\lambda}\left(L + \frac{1}{2}\right)\lambda\|u\|^2$, obtemos

$$\frac{1}{\lambda}\left(L + \frac{1}{2}\right)\lambda\|u\|_H^2 \leq \frac{2}{p}\lambda^{\frac{p}{2}}(\|u\|_H^2)^{\frac{p}{2}} + \frac{p-2}{p}\left(\frac{1}{\lambda}\left(L + \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Como V está imerso continuamente em H, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &\leq -\omega_1\|u\|_V^p + \frac{2}{p}\lambda^{\frac{p}{2}}\|u\|_H^p + \frac{p-2}{p}\left(\frac{1}{\lambda}\left(L + \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{p}{p-2}} - c_1 + \frac{1}{2}\|B0\|_H^2 \\ &\leq -\omega_1\|u\|_V^p + \frac{2}{p}\lambda^{\frac{p}{2}}\eta_1^p\|u\|_V^p + k_1 \\ &= \left(-\omega_1 + \frac{2}{p}\lambda^{\frac{p}{2}}\eta_1^p\right)\|u\|_V^p + k_1,\end{aligned}$$

onde $k_1 := \frac{p-2}{p}\left(\frac{1}{\lambda}\left(L + \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{p}{p-2}} - c_1 + \frac{1}{2}\|B0\|_H^2$. Por sua vez,

$$0 < \lambda < \left(\frac{p\omega_1}{4\eta^p}\right)^{\frac{2}{p}} \Leftrightarrow \lambda^{\frac{p}{2}} < \frac{p\omega_1}{4\eta^p} \Leftrightarrow \frac{2}{p}\lambda^{\frac{p}{2}}\eta^p < \omega_1 - \frac{\omega_1}{2} \Leftrightarrow -\omega_1 + \frac{2}{p}\lambda^{\frac{p}{2}}\eta^p < -\frac{\omega_1}{2},$$

portanto,

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq -\omega_1\|u\|_V^p + 2k_1.$$

Integrando em $(0,T)$ essa última desigualdade, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2 \le -\omega_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s + \int_0^T 2k_1 \,\mathrm{d}s \\
\Rightarrow &\|u(T)\|_H^2 + \omega_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p \, ds \le \|u_0\|_H^2 + 2Tk_1. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Ora,

$$
\begin{aligned}
\omega_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s \le &\|u(T)\|_H^2 + \omega_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s \\
&\underbrace{\le}_{(3.12)} \|u_0\|_H^2 + 2Tk_1
\end{aligned}
$$

com isso (3.9) ocorre, isto é

$$
\int_0^T \|u(s)\|_V^p \, ds \le \mathscr{C}_1(\|u_0\|_H, T), \qquad (3.13)
$$

onde $\mathscr{C}_1(\|u_0\|_H, T) := (\|u_0\|^2 + 2Tk_1)\omega_1^{-1}$. Segue de (3.12) que para cada $t \in (0,T)$

$$
\|u(t)\|_H^2 \le \|u(t)\|_H^2 + \omega_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p \, ds \le \|u_0\|_H^2 + 2tk_1 \le \|u_0\|_H^2 + 2Tk_1.
$$

Para λ suficientemente pequeno e todo $t \in (0,T)$ temos que

$$
\|u(t)\|_H \le \sqrt{\|u_0\|^2 + 2Tk_1} := k_2(\|u_0\|, T),
$$

ou seja,

$$
\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \le k_2(\|u_0\|, T). \qquad (3.14)
$$

Por fim, pela Observação 3.1, por (3.5) e por $H \hookrightarrow V'$ segue que

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{V'}^{p'} = &\|-Au_H - Bu\|_{V'}^{p'} \le (\|Au\|_{V'} + \|Bu\|_{V'})^{p'} \\
\le &2^{p'}(\|Au\|_{V'}^{p'} + \|Bu\|_{V'}^{p'}) \\
\le &2^{p'} \left((\omega_2(1 + \|u\|_V^{p-1}))^{p'} + \eta_2^{p'} \|Bu\|_H^{p'} \right) \\
\le &2^{p'} \omega_2^{p'} (1 + \|u\|_V^{p-1})^{p'} + 2^{p'} \eta_2^{p'} (L\|u\|_H + \|B0\|_H)^{p'} \\
\le &2^{p'} 2^{p'} \omega_2^{p'} (1^{p'} + \|u\|_V^{(p-1)p'}) + 2^{p'} \eta_2^{p'} 2^{p'} (L^{p'} \|u\|_H^{p'} + \|B0\|_H^{p'}) \\
= &2^{2p'} \omega_2^{p'} \|u\|_V^p + 2^{2p'} \eta_2^{p'} L^{p'} \|u\|_H^{p'} + 2^{2p'} \eta_2^{p'} \|B0\|_H^{p'} + 2^{2p'} \omega_2^{p'},
\end{aligned}
$$

tomando $k := \max\{2^{2p'}\omega_2^{p'}, 2^{2p'}\eta_2^{p'}L^{p'}, 2^{2p'}\omega_2^{p'} + 2^{2p'}\eta_2^{p'}\|B0\|^{p'}\}$, concluímos que

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'}^{p'} \leq k(1 + \|u\|_V^p + \|u\|_H^{p'}).$$

Integrando sobre $(0,T)$ essa última desigualdade e usando (3.13) e (3.14) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}(s)\right\|_{V'}^{p'} \mathrm{d}s \leq & k\left(\int_0^T 1\,\mathrm{d}s + \int_0^T \|u(s)\|_V^p\,\mathrm{d}s \int_0^T \|u(s)\|_H^{p'}\,\mathrm{d}s\right)\\ \leq & k\left(T + \mathscr{C}_1(\|u_0\|_H, T) + \int_0^T \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^{p'}\,\mathrm{d}s\right)\\ \leq & kT + k\mathscr{C}_1(\|u_0\|_H, T) + k(k_2(\|u_0\|_H, T))^{p'} := \mathscr{C}_2(\|u_0\|_H, T).\end{aligned}$$

Portanto (3.10) se verifica, finalizando a demonstração. ■

Lema 3.4. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo associado à (3.1) em $\overline{D(A_H)}^H$. Assuma $H1$ e que (3.9) e (3.10) ocorrem para $T > 0$ e $p > 1$. Se V está imerso compactamente em H então $T(t) : \overline{D(A_H)}^H \to \overline{D(A_H)}^H$ é uma aplicação compacta, para cada $t > 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: De acordo com o Lema 3.2 para provarmos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é compacto basta considerarmos os subconjuntos limitados de $\overline{D(A_H)}^H$ da forma $B = B_H(0,r) \cap D(A_H)$, onde $r > 0$. Defina o conjunto

$$\widetilde{B} = \{T(\cdot)u_0; u_0 \in B\},$$

onde a aplicação $u(\cdot) = T(\cdot)u_0 \in C([0,\infty[; H)$ é a solução fraca de (3.1). Consideremos o conjunto

$$W = \{v \in L^p(0,T;V); \frac{dv}{dt} \in L^{p'}(0,T;V')\}$$

para $p > 1$ tomado de modo que (3.9) e (3.10) ocorram. Além disso, em W adotemos a norma $\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;V)} + \|\frac{dv}{dt}\|_{L^{p'}(0,T;V')}$. Notemos que $\widetilde{B} \subset W$ é limitado, já que se $v \in \widetilde{B}$ então v é solução fraca de (3.1) com condição inicial $u_0 \in D(A_H)$, logo por hipótese

$$\begin{aligned}&\int_0^T \|v(s)\|_V^p\,\mathrm{d}s \leq \mathscr{C}_1(\|u_0\|_H, T) \text{ e}\\ &\int_0^T \left\|\frac{dv}{dt}(s)\right\|_V^{p'} \mathrm{d}s \leq \mathscr{C}_2(\|u_0\|_H, T),\end{aligned}$$

onde $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são funções localmente limitadas, implicando que $v \in W$ e além disso

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;V)} + \|\frac{dv}{dt}\|_{L^{p'}(0,T;V')} \leq \mathscr{C}_1^{\frac{1}{p}} + \mathscr{C}_2^{\frac{1}{p'}} \leq \text{constante}.$$

Aplicando o Teorema A.7 concluímos que W está imerso compactamente em $L^p(0,T;H)$, e por $\widetilde{B} \subset W$ ser limitado então $\widetilde{B}$ é pré-compacto em $L^p(0,T;V')$.

Considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária em B, tal sequência dá origem a sequência $(T(\cdot)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\widetilde{B}$. Ora, $(T(\cdot)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência em $\overline{\widetilde{B}}^H$ que por sua vez é compacto em $L^p(0,T;H)$, logo existem subsequência $(T(\cdot)u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(T(\cdot)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e função $v_0 \in L^p(0,T;H)$ tais que

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^T \|T(s)u_{n_k} - v_0(s)\|_H^p \,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} = \|T(s)u_{n_k} - v_0(s)\|_{L^p(0,T;H)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \\ \Rightarrow &\int_0^T \|T(s)u_{n_k} - v_0(s)\|_H^p \,\mathrm{d}s \xrightarrow{k\to\infty} 0, \end{aligned}$$

ou seja, $(\|T(\cdot)u_{n_k} - v_0(\cdot)\|_H)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções reais positivas que convergem a zero em $L^p(0,T;\mathbb{R})$. Pelo Teorema A.3 concluímos que $(\|T(\cdot)u_{n_k} - v_0(\cdot)\|_H)_{k\in\mathbb{N}}$ admite subsequência, que ainda denotaremos por $(\|T(\cdot)u_{n_k} - v_0(\cdot)\|_H)_{k\in\mathbb{N}}$, que converge quase sempre em $(0,T)$. Seja $t > 0$ qualquer, então

$$\|T(\cdot)u_{n_k} - v_0(\cdot)\|_H \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

quase sempre em $(0,t)$. Assim, existe $\tau \in (0,t)$ tal que

$$T(\tau)u_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} v_0(\tau), \text{ em } H.$$

Portanto, $T(t)u_{n_k} = T(t-\tau)T(\tau)u_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} T(t-\tau)v_0(\tau)$ em H. Isto é, a sequência $(T(t)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Logo $\overline{T(t)B}^H$ é sequencialmente compacto em H, como em particular H é métrico, então $\overline{T(t)B}^H$ é compacto. Portanto, para cada $t > 0$, $T(t) : \overline{D(A_H)}^H \to \overline{D(A_H)}^H$ é aplicação compacta. ∎

Lema 3.5. *Sejam $H1$, $H2$ e (3.4) satisfeitas. Se $p > 2$ então o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ associado à (3.1) é limitado dissipativo em $\overline{D(A_H)}^H$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $u_0 \in D(A_H)$. Utilizando a demonstração do Lema 3.3 é possível concluir (3.11), ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq &-\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + \left(L + \frac{1}{2}\right)\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B0\|_H^2 \\ \leq &-\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + \max\left\{L + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\|B0\|_H^2\right\}(\|u\|_H^2 + 1) \\ = &-\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + k(\|u\|_H^2 + 1), \end{aligned}$$

onde $k := \max\left\{L + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\|B0\|_H^2\right\}$ e u é solução forte de (3.1). Como $V \subset H$ continuamente então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + k\eta_1^2\|u\|_V^2 + k.$$

Aplicando a Desigualdade de Young em $\dfrac{k\eta_1^2}{\lambda}\|u\|_V^2\lambda$, onde $\lambda < \left(\dfrac{p\omega_1}{4}\right)^{2/p}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{k\eta_1^2}{\lambda}\|u\|_V^2\lambda &\leq \left(\frac{k\eta_1^2}{\lambda}\right)^{p/p-2}\frac{(p-2)}{p} + (\|u\|_V^2\lambda)^{p/2}\frac{2}{p}\\ &= \left(\frac{k\eta_1^2}{\lambda}\right)^{p/p-2}\frac{(p-2)}{p} + \frac{2}{p}\|u\|_V^p\lambda^{p/2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &\leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + k\eta_1^2\|u\|_V^2 + k\\ &\leq -\omega_1\|u\|_V^p - c_1 + \left(\frac{k\eta_1^2}{\lambda}\right)^{\frac{p}{p-2}}\left(\frac{p-2}{p}\right) + \frac{2\lambda^{p/2}}{p}\|u\|_V^p + k\\ &= \|u\|_V^p\left(-\omega_1 + \frac{2\lambda^{p/2}}{p}\right) + k - c_1 + \left(\frac{k\eta_1^2}{\lambda}\right)^{\frac{p}{p-2}}\left(\frac{p-2}{p}\right)\end{aligned}$$

Como $\lambda < \left(\frac{p\omega_1}{4}\right)^{2/p}$ então $\lambda^{2/p} < \frac{p\omega_1}{4}$ e

$$\frac{2\lambda^{2/p}}{p} < \frac{\omega_1}{2} \Rightarrow -\omega_1 + \frac{2\lambda^{2/p}}{p} < -\omega_1 + \frac{\omega_1}{2} = -\frac{\omega_1}{2}.$$

Assim colocando $\widetilde{k} := k - c_1 + \left(\frac{k\eta_1^2}{\lambda}\right)^{\frac{p}{p-2}}\left(\frac{p-2}{p}\right)$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq \frac{-\omega_1}{2}\|u\|_V^p + \tilde{k}.$$

Como V está imerso continuamente em H, temos:

$$\|u\|_H \leq \eta_1\|u\|_V \Rightarrow \frac{1}{\eta_1}\|u\|_H \leq \|u\|_V \Rightarrow -\frac{\omega_1}{2\eta_1^p}\|u\|_H^p \geq -\frac{\omega_1}{2}\|u\|_V^p.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq -\omega_1\eta_1^{-p}\|u\|_H^p + 2\tilde{k}.$$

Desta forma a função $y(t) := \|u(t)\|_H^2$ satisfaz a desigualdade diferencial:

$$y'(t) + \omega_1\eta_1^{-p}(y(t))^{p/2} \leq 2\tilde{k}.$$

Aplicando o Lema A.5 para $\gamma = \omega_1\eta_1^{-p}$; $q = \frac{p}{2}$ e $\delta = 2\tilde{k}$, para λ suficientemente pequeno, temos

$$y(t) \leq \left(\frac{2\tilde{k}}{\omega_1\eta_1^{-p}}\right)^{2/p} + \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-1/\left(\frac{p}{2}-1\right)} = \left(\frac{2\tilde{k}}{\omega_1\eta_1^{-p}}\right)^{2/p} + \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-2/(p-2)}.$$

Ou seja,

$$\|u(t)\|_H \leq \left(\frac{2\tilde{k}}{\omega_1\eta_1^{-p}}\right)^{1/p} + \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-1/(p-2)}.$$

Se $u_0 \in \overline{D(A_H)}$, então existe $\tilde{u}$ solução fraca de (3.1), ou seja, $\tilde{u}$ é limite uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde u_n é solução forte de (3.1). Assim:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(t)\|_H &= \|\lim_{n\to\infty} u_n(t)\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n(t)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2\tilde{k}}{\omega_1\eta_1^{-p}}\right)^{1/p} + \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-1/(p-2)}\right) \\
&= \left(\frac{2\tilde{k}}{w_1\eta_1^{-p}}\right)^{1/p} + \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-1/(p-2)}.
\end{aligned}$$

Logo para todo $u_0 \in \overline{D(A_H)}^H$ a aplicação $t \mapsto T(t)u_0$ definida na Proposição 3.1 verifica

$$\|T(t)u_0\|_H \leq \left(\frac{2\tilde{k}}{\omega_1\eta_1^{-p}}\right)^{1/p} + \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-1/(p-2)}. \tag{3.15}$$

Consideremos $B = \{u_0 \in \overline{D(A_H)}^H : \|u_0\|_H \leq r\}$, tomando $r \geq \left(\frac{2\tilde{k}}{\omega_1\eta_1^{-p}}\right)^{1/p}$, então B atrai subconjuntos limitados de $\overline{D(A_H)}^H$ sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.
De fato, seja $C \subset \overline{D(A_H)}^H$ limitado. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $T \geq \left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)\varepsilon^{(p-2)}\right)^{-1}$ então

$$\left(\omega_1\eta_1^{-p}\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{\frac{-1}{(p-2)}} < \varepsilon, \text{ para todo } t > T.$$

Seja $x \in C$ qualquer, tome $y = \frac{rT(t)x}{r+\varepsilon}$. Note que $y \in B$, pois de (3.15) temos:

$$\left\|\frac{rT(t)x}{r+\varepsilon}\right\| = \frac{r\|T(t)x\|}{r+\varepsilon} < \frac{r(r+\varepsilon)}{r+\varepsilon} = r.$$

Agora

$$
\begin{aligned}
\|T(t)x - y\| &= \left\| T(t)x - \frac{rT(t)x}{r+\varepsilon} \right\| = \left\| \frac{(r+\varepsilon)T(t)x - rT(t)x}{r+\varepsilon} \right\| \\
&= \left\| \frac{\varepsilon T(t)x}{r+\varepsilon} \right\| = \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}\|T(t)x\| < \frac{\varepsilon(r+\varepsilon)}{r+\varepsilon} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que, para todo $t > T$ temos $dist(T(t)C, B) < \varepsilon$. Portanto B atrai C sob $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Concluímos assim que o semigrupo é limitado dissipativo. ■

Finalmente, enunciamos o teorema:

Teorema 3.2. *Suponha que H1,H2,* (3.4) *e* (3.10) *são satisfeitas para* $p > 2$*. Se* V *está imerso compactamente em* H*, então o semigrupo* $\{T(t)\}$ *associado à* (3.1) *tem um atrator global em* $\overline{D(A_H)}^H$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Lema 3.5 que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ associado à (3.1) é limitado dissipativo, o que implica em ponto dissipativo. Assumindo H1, H2 e (3.4) segue da demonstração do Lema 3.3 que (3.9) ocorre, nos permitindo concluir pelo Lema 3.4 que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é compacto em $\overline{D(A_H)}^H$. Assim, dado $B \subset \overline{D(A_H)}^H$ limitado, temos que $\overline{T(t)B}^H$ é compacto para cada $t > 0$. Logo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente compacto em $\overline{D(A_H)}^H$ e pelo Teorema 2.3 existe $\mathscr{A}$ atrator global para $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em $\overline{D(A_H)}^H$. ■

3.4 Aplicação

Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, aberto, conexo e limitado cuja fronteira, $\partial\Omega$, é suave. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função globalmente Lipschitz, com constante de Lipschitz L. Estudaremos a existência de atrator global para o semigrupo associado a equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem com condição de fronteira de Dirichlet homogênea

$$
\begin{cases}
u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - |u|^{\rho-1}u + f(u), & t > 0 \\
u = 0, & \text{em } \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

sendo $p > 2$ e $\rho > 1$. Com objetivo de escrever (3.16) de forma abstrata, definimos os operadores $\tilde{A}$ e B como a seguir. Consideremos o espaço de Hilbert $H := L^2(\Omega)$ e o operador de Nemytskiĭ da f, dado por :

$$
\begin{aligned}
F_f :\ & H \to H \\
& v \mapsto F_f(v)(x) = f(v(x)).
\end{aligned}
$$

Usando que $|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq L|v(x)| + |f(0)|$ e a Observação 3.1, notamos que o operador F_f está bem definido, pois:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F_f(v)(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(v(x))|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega (L|v(x)| + |f(0)|)^2 \,\mathrm{d}x \\ \leq \int_\Omega 2^2(L^2|v(x)|^2 + |f(0)|^2) \,\mathrm{d}x = 4L^2 \int_\Omega |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x + 4\int_\Omega |f(0)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty.\end{aligned}$$

Definimos o operador B como sendo $B = -F_f$. Notemos que

$$\begin{aligned}\|B(u(t,\cdot)) - B(v(t,\cdot))\|_H =& \| - F_f(u(t,\cdot)) + F_f(v(t,\cdot))\|_H \\ =& \left(\int_\Omega | - F_f(u(t,x)) + F_f(v(t,x))|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ =& \left(\int_\Omega |f(v(t,x)) - f(u(t,x))|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq& \left(\int_\Omega |L(v(t,x) - u(t,x))|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ =& L\|v(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_H.\end{aligned}$$

Logo, B é globalmente Lipschitz, com a mesma constante de Lipschitz da função f. Consideremos os operadores não-lineares A_1 e A_2:

$$\begin{aligned}D(A_1) &= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in L^2(\Omega)\}; \\ A_1(u) &= -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u); \\ D(A_2) &= \{u \in L^{\rho+1}(\Omega); |u|^{\rho-1}u \in L^2(\Omega)\}; \\ A_2(u) &= |u|^{\rho-1}u.\end{aligned}$$

Definimos o operador $\tilde{A}$ em $D(A_1) \cap D(A_2)$ como sendo

$$\begin{aligned}\tilde{A}(u) &= A_1(u) + A_2(u) \\ &= -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{\rho-1}u.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Desta forma o problema (3.16) se reescreve como

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} + \tilde{A}u + Bu = 0, & t > 0 \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega.\end{cases}$$

Consideremos os espaços $V := W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\rho+1}(\Omega)$ e $H := L^2(\Omega)$. Em V definimos a norma $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}$[1]

Lema 3.6. *Sob tais considerações:*

(i) *V é espaço de Banach reflexivo;*

(ii) *V está imerso compactamente em H;*

(iii) *H está imerso continuamente em V';*

(iv) *V é denso em H.*

DEMONSTRAÇÃO: Naturalmente $(V, \|\cdot\|_V)$ é um espaço normado. Consideremos $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ sequência de Cauchy em V, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ qualquer existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > n_0$ tem-se $\|v_n - v_m\|_V = \|v_n - v_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n - v_m\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} < \varepsilon$. Note que, para $m, n > n_0$ quaisquer

$$\|v_n - v_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|v_n - v_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n - v_m\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} < \varepsilon,$$

analogamente

$$\|v_n - v_m\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} \leq \|v_n - v_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n - v_m\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Assim, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e em $L^{\rho+1}(\Omega)$. Como tais espaços são de Banach existem $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\overline{v} \in L^{\rho+1}(\Omega)$ tais que

$$v_n \to v \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \to \overline{v} \text{ em } L^{\rho+1}(\Omega). \tag{3.18}$$

Pelo Teorema A.1, concluímos que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para qualquer p, ora para $p > 2$ temos que $L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ implicando com isso que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$, além disso, $L^{\rho+1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente, logo $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Considerando $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$, temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, já que $L^2(\Omega)$ é espaço de Hilbert e pela unicidade do limite, analisando (3.18) em $L^2(\Omega)$, concluímos que $v = \overline{v}$. Além disso $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\rho+1}(\Omega)$. Portanto $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em V. Logo V é espaço de Banach, pelo Teorema A.5, concluímos que V é reflexivo. Portanto (i) ocorre.
Seja $v \in V$ arbitrário, como

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|v\|_V,$$

[1] Em $W_0^{1,p}(\Omega)$ estamos considerando a norma equivalente $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$

então V está imerso continuamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema A.1 concluímos que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$ para qualquer p, ora para $p > 2$ temos que $L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ implicando com isso que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$. Sejam $\widetilde{i} : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ e $i : V \to W_0^{1,p}(\Omega)$ imersões compacta e contínua, respectivamente. Afirmamos que $\widetilde{i} \circ i$ é uma imersão compacta de V em $L^2(\Omega)$. De fato, seja $A \subset V$ limitado qualquer, então $i(A) = A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitado, por $\widetilde{i}$ ser aplicação compacta, temos que $\widetilde{i}(i(A)) = \widetilde{i}(A)$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$. Portanto (ii) está provada.

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$ estão imersos continuamente em $L^2(\Omega)$ então pela Proposição A.3

$$(L^2(\Omega))' \hookrightarrow (L^{\rho+1}(\Omega))' \quad \text{e} \quad (L^2(\Omega))' \hookrightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$$

são imersões contínuas. Por $(L^2(\Omega))$ ser reflexivo, temos:

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow (L^{\rho+1}(\Omega))' \quad \text{e} \quad L^2(\Omega) \hookrightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$$

continuamente, implicado em (iii).

Por fim, pelo Corolário A.1, temos que $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^H = H$, como $C_c^\infty(\Omega)$ está contido em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\rho+1}$, então

$$H = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^H \subset \overline{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\rho+1}}^H = \overline{V}^H,$$

ou seja, (iv) ocorre concluindo a demonstração. ■

Pelo Lema 3.6 concluímos que H1 ocorre, além disso V está imerso compactamente em H. Com objetivo de concluir a condição H2, consideremos o operador $A : V \to V'$ dado por

$$\langle A(u), v\rangle_{V',V} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{\rho-1} uv \, \mathrm{d}x, \quad \forall v \in V. \tag{3.19}$$

Primeiramente tal operador $A : V \to V'$ está bem definido: seja $u \in V$ qualquer. Para todo $v \in V$ o funcional

$$\begin{aligned} Au : \ V &\to \ \mathbb{R} \\ v &\mapsto \ \langle Au, v\rangle_{V',V} \end{aligned}$$

é linear e contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x \right| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u \cdot \nabla v| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como $v \in V$ temos que $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$ e denotando por q o expoente conjugado de p, tem-se

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x = \|u\|^p_{W_0^{1,p}} < \infty$$

pois $u \in V$, ou seja, $|\nabla u|^{p-1} \in L^q(\Omega)$. Aplicando a Desigualdade de Hölder em (3.20) segue que:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x \right| \leq & \| |\nabla u|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} \| |\nabla v| \|_{L^p(\Omega)} \\ = & C_1 \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_1 \|v\|_V, \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde C_1 denota a constante $\||\nabla u|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}$. Analogamente, como $v \in V$ segue que $v \in L^{\rho+1}(\Omega)$ e denotando por r o expoente conjugado de $\rho+1$ temos que

$$\int_\Omega ||u|^{\rho-1}u|^r \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{[(\rho+1)-1]r} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{\rho+1} \,\mathrm{d}x = \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} < \infty.$$

Logo, usando a Desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |u|^{\rho-1}uv \,\mathrm{d}x \right| \leq & \int_\Omega |u|^{\rho-1}|u||v| \,\mathrm{d}x \\ \leq & \||u|^{\rho-1}u\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} \\ = & C_2 \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} \leq C_2 \|v\|_V. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por (3.21) e (3.22) concluímos que

$$\begin{aligned} |\langle A(u), v\rangle_{V',V}| \leq & \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_\Omega |u|^{\rho-1}uv \,\mathrm{d}x \right| \\ \leq & C_1\|v\|_V + C_2\|v\|_V = (C_1 + C_2)\|v\|_V. \end{aligned}$$

Portanto Au é linear e contínuo. Com isso $A : V \to V'$ está bem definido e pelo Lema 3.6 podemos definir o operador, A_H, realização de A em H. Observamos que o operador $\tilde{A}$ definido em (3.17) coincide com o operador A_H, já que

$$D(A_H) = \{v \in V; -\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + |v|^{\rho-1}v \in H\} = D(\tilde{A}) \quad \text{e}$$

$$A_H(v) = \tilde{A}(v) = -\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + |v|^{\rho-1}v, \quad \text{para } v \in D(A_H).$$

Teorema 3.3. *O operador não-linear $A : V \to V'$ dado por*

$$\langle A(u), v\rangle_{V',V} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega |u|^{\rho-1}uv \, dx, \quad \forall v \in V,$$

é monótono, coercivo e hemicontínuo.

DEMONSTRAÇÃO: **(a)** monótono: Sejam $u, v \in V$ quaisquer, usando o Lema A.3 obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle_{V',V} =& \langle Au, u - v\rangle_{V',V} - \langle Av, u - v\rangle_{V',V} \\
=& \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u - v)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{\rho-1}u(u - v)\, \mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla (u - v)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega |v|^{\rho-1}v(u - v)\, \mathrm{d}x \\
=& \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \nabla (u - v)\, \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \left(|u|^{\rho-1}u - |v|^{\rho-1}v\right) (u - v)\, \mathrm{d}x \\
\underbrace{\geq}_{\exists \gamma_0, \gamma_1 \geq 0}& \int_\Omega \gamma_0(p, n)|\nabla u - \nabla v|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \gamma_1(\rho + 1, n)|u - v|^{\rho+1}\, \mathrm{d}x \\
=& \gamma_0(p, n)\|u - v\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} + \gamma_1(\rho + 1, n)\|u - v\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle Au - Av, u - v\rangle_{V',V} \geq 0$.

(b) hemicontínuo: Sejam $u, v \in V$ não-nulos, $t > 0$ e $w \in V$ arbitrário. Como V é reflexivo, basta mostrarmos que

$$\langle A(u + tv), w\rangle_{V',V} - \langle A(u), w\rangle_{V',V} \xrightarrow{t \to 0} 0. \tag{3.23}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle A(u + tv) - A(u), w\rangle_{V',V} =& \int_\Omega |\nabla (u + tv)|^{p-2}\nabla (u + tv)\nabla w \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |u + tv|^{\rho-1}(u + tv)w \, \mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \, \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{\rho-1}uw \, \mathrm{d}x \\
=& \int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\nabla w - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega |u + tv|^{\rho-1}(u + tv)w - |u|^{\rho-1}uw \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&\big||\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\nabla w - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\big| \\
&\leq |\nabla u + t\nabla v|^{p-1}|\nabla w| + |\nabla u|^{p-1}|\nabla w| \\
&\leq 2^{p-1}(|\nabla u|^{p-1} + t^{p-1}|\nabla v|^{p-1})|\nabla w| + |\nabla u|^{p-1}|\nabla w| \\
&\leq 2^{p-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla w| + 2^{p-1}|\nabla v|^{p-1}|\nabla w| + |\nabla u|^{p-1}|\nabla w|,
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

para todo $t \in (0,1)$. Como

$$\left(|\nabla u|^{p-1}\right)^{p'} = |\nabla u|^{p'(p-1)} = |\nabla u|^{p},$$

onde p' é o expoente conjugado de p, segue que $|\nabla u|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$, logo pela Desigualdade de Hölder $|\nabla u|^{p-1}|\nabla w| \in L^1(\Omega)$. Utilizando os mesmos argumentos para as outras parcelas da soma em (3.24), segue que

$$2^{p-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla w| + 2^{p-1}|\nabla v|^{p-1}|\nabla w| + |\nabla u|^{p-1}|\nabla w| \in L^1(\Omega).$$

Como a função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = |x|^{p-2}x$ é contínua e $\nabla u + t\nabla v \to \nabla u$ quando $t \to 0$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\nabla w - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w \,\mathrm{d}x \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Analogamente mostramos que

$$\int_\Omega |u + tv|^{\rho-1}(u + tv)w - |u|^{\rho-1}uw \,\mathrm{d}x \xrightarrow{t\to 0} 0,$$

de onde segue (3.23). Portanto A é hemicontínuo.

(c) coercivo: Primeiramente vamos verificar que (3.4) é satisfeita para $p > 2$. Seja $\eta < \min\{p, \rho+1\}$, pela Observação 3.1 temos que:

$$\|u\|_V^\eta = (\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)})^\eta \leq 2^\eta(\|u\|^\eta_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^\eta_{L^{\rho+1}(\Omega)}).$$

Aplicando a Desigualdade de Young para $1.\|u\|^{\eta}_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ e para $1.\|u\|^{\eta}_{L^{\rho+1}(\Omega)}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_V^\eta \leq & 2^\eta(\|u\|^{\eta}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\eta}_{L^{\rho+1}(\Omega)}) \\
= & 2^\eta \left(\frac{\eta}{p}\|u\|^{p}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{p-\eta}{p} + \frac{\eta}{\rho+1}\|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \frac{\rho+1-\eta}{\rho+1} \right) \\
= & 2^\eta\frac{\eta}{p}\|u\|^{p}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + 2^\eta\frac{\eta}{\rho+1}\|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + 2^\eta\left(\frac{p-\eta}{p} + \frac{\rho+1-\eta}{\rho+1}\right) \\
\leq & \max\left\{2^\eta\frac{\eta}{p}, 2^\eta\frac{\eta}{\rho+1}\right\}(\|u\|^{p}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}) + k_1 \\
= & k_2\langle Au, u\rangle_{V',V} + k_1.
\end{aligned}$$

onde $k_2 = \max\left\{2^\eta\frac{\eta}{p}, 2^\eta\frac{\eta}{\rho+1}\right\}$ e $k_1 = \frac{p-\eta}{p} + \frac{\rho+1-\eta}{\rho+1}$. Logo, tomando $\omega_1 = \frac{1}{k_2}$ e $c_1 = -\frac{k_1}{k_2}$, temos que (3.4) é verificada. Sendo assim,

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{V',V}}{\|u\|_V} \geq \frac{\omega_1\|u\|_V^\eta + c_1}{\|u\|_V} = \omega_1\|u\|_V^{\eta-1} + \frac{c_1}{\|u\|_V},$$

como η é o mínimo entre $p > 2$ e $\rho + 1 > 2$ então $\eta - 1 = \min\{p-1, \rho\} > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|_V\to+\infty} \frac{\langle Au, u\rangle_{V',V}}{\|u\|_V} & \geq \lim_{\|u\|_V\to+\infty} \omega_1\|u\|_V^{\eta-1} + \frac{c_1}{\|u\|_V} \\
& = \lim_{\|u\|_V\to+\infty} \omega_1\|u\|_V^{\eta-1} = +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto A é coercivo e (3.4) ocorre. ■

Para aplicar o Teorema 3.2 resta verificarmos a desigualdade (3.10). Seja $u_0 \in D(A_H)$ qualquer e $T > 0$, pelo Teorema 3.1 existe u solução forte de (3.16), logo

$$\frac{du}{dt} = -A_H(u) - B(u), \text{ quase sempre em } (0, T).$$

Denotando $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = & \left\langle \frac{du}{dt}, u \right\rangle = \langle -A_H(u), u\rangle + \langle -B(u), u\rangle \\
= & -\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{\rho+1}\,\mathrm{d}x - \langle B(u), u\rangle \\
\leq & -\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \|B(u)\|_H\|u\|_H \\
\leq & -\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + L\|u\|_H^2 + \|B(0)\|_H\|u\|_H.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, aplicada em $\|B(0)\|_H\|u\|_H$ e por $L^{\rho+1}(\Omega)$ estar imerso continuamente em H, denotemos a constante de imersão por c_1, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq & -\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + L\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_H^2 \\ \leq & -\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + c_1^2\left(L+\frac{1}{2}\right)\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_H^2.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Escrevendo $c_1^2 = c_2$, e usando a Desigualdade de Young, notamos que

$$\begin{aligned}-\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + c_2\left(L+\frac{1}{2}\right)\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 \leq & -\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + \frac{2}{\rho+1}(\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2)^{\frac{\rho+1}{2}} \\ & + \frac{\rho-1}{\rho+1}\left(\left(L+\frac{1}{2}\right)c_2\right)^{\frac{\rho+1}{\rho-1}} \\ = & \left(\frac{2}{\rho+1}-1\right)\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + \frac{\rho-1}{\rho+1}\left(\left(L+\frac{1}{2}\right)c_2\right)^{\frac{\rho+1}{\rho-1}}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade acima temos que (3.25) fica da forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 \leq & -\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \left(\frac{2}{\rho+1}-1\right)\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + \frac{\rho-1}{\rho+1}\left(\left(L+\frac{1}{2}\right)c_2\right)^{\frac{\rho+1}{\rho-1}} + \frac{1}{2}\|B(0)\|_H^2 \\ = & -\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \left(1-\frac{2}{\rho+1}\right)\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + c_3 \\ \leq & -\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \left(1-\frac{2}{\rho+1}\right)\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + c_3 + \frac{2}{\rho+1}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \\ = & -\left(1-\frac{2}{\rho+1}\right)(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1}) + c_3,\end{aligned}$$

onde $c_3 := \frac{\rho-1}{\rho+1}\left((L+\frac{1}{2})c_2\right)^{\frac{\rho+1}{\rho-1}} + \frac{1}{2}\|B(0)\|_H^2$. Denotando $\omega := 1-\frac{2}{\rho+1} > 0$ e integrando a desigualdade obtida acima em $(0,T)$, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2\,\mathrm{d}t \leq & \int_0^T \left(-\omega(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1}) + c_3\right)\mathrm{d}t \\ = & -\omega\int_0^T \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1}\right)\mathrm{d}t + Tc_3.\end{aligned}$$

Implicando que

$$\omega\int_0^T \left(\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1}\right)\mathrm{d}t \leq Tc_3 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2. \tag{3.26}$$

Por outro lado, dados $u, v \in V$ com $v \neq 0$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\langle Au, v\rangle_{V',V}| \leq& \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\Omega |u|^{\rho-1}uv\,\mathrm{d}x\right| \\
\underbrace{\leq}_{\text{Hölder}}& \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int_\Omega |v|^{\rho+1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\rho+1}} \left(\int_\Omega (|u|^{\rho})^{\frac{\rho+1}{\rho}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \\
=& \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}\|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} \\
\leq& (\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)})\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + (\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)})\|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} \\
=& (\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)})\|v\|_V.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|A(u)\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} |\langle Au, v\rangle_{V',V}| \leq \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)}. \tag{3.27}
$$

Por u ser solução forte, (3.27) ocorrer e $L^{\rho+1}(\Omega) \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ continuamente, segue que:

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'} =& \|A_H(u) + B(u)\|_{V'} \leq \|A_H(u)\|_{V'} + \|B(u)\|_{V'} = \|A(u)\|_{V'} + \|B(u)\|_{V'} \\
\leq& \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \eta_2 L\|u\|_H + \eta_2\|B(0)\|_H \\
\leq& \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + a_1\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \eta_2\|B(0)\|_H \\
\underbrace{\leq}_{\text{Young}}& \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \frac{1}{\rho}\|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right) a_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \eta_2\|B(0)\|_H \\
=& \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right) a_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \eta_2\|B(0)\|_H,
\end{aligned}
$$

onde $a_1 := c_1\eta_2 L$. Definindo $\widetilde{c} := \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right) a_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \eta 2\|B(0)\|_H$ e tomando $k = \max\left\{1, 1+\frac{1}{\rho}, \widetilde{c}\right\}$ temos:

$$
\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'} \leq k(\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + 1).
$$

Seja $\theta = \min\left\{\frac{p}{p-1}, \frac{\rho+1}{\rho}\right\} > 1$, fazendo uso da Observação 3.1 temos que:

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{du}{dt}\right\|^{\theta}_{V'} \leq& k^\theta(\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + 1)^\theta \\
\leq& k^\theta 2^\theta[(\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{L^{\rho+1}(\Omega)})^\theta + 1] \\
\leq& a_2(\|u\|^{(p-1)\theta}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho\theta}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + 1),
\end{aligned}
$$

onde $a_2 = \max\{k^\theta 2^\theta, k^\theta 2^\theta 2^\theta\} = k^\theta 2^{2\theta}$. Integrando em $(0,T)$ a desigualdade acima e usando (3.26) segue que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'}^\theta \mathrm{d}t \leq & a_2 \int_0^T (\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{(p-1)\theta} + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho\theta} + 1)\,\mathrm{d}t \\ \leq & a_2 \int_0^T (\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p} + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho+1} + 1)\,\mathrm{d}t \\ \leq & a_2 \left(\frac{1}{\omega}\left(Tc_3 + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2\right) + T\right) := \mathscr{C}_2(\|u_0\|_H, T).\end{aligned}$$

Sendo verificada a desigualdade (3.10). Portanto, podemos concluir:

Teorema 3.4. *O problema* (3.16) *admite um atrator global em* $L^2(\Omega)$.

Observamos que o Teorema 3.2 garante a existência de atrator global em $\overline{D(A_H)}^H$ todavia, por (3.27) ocorrer, utilizando a Desigualdade de Young obtemos que

$$\begin{aligned}\|A(v)\|_{V'} \leq & \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho} \\ \leq & (\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)})^{p-1} + (\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)})^{\rho} \\ = & \|v\|_V^{p-1} + \|v\|_V^{\rho} \leq \frac{\eta-p}{\eta-1} + \frac{p-1}{\eta-1}\|v\|_V^{(p-1)\frac{(\eta-1)}{p-1}} + \frac{\eta-1-\rho}{\eta-1} + \frac{\rho}{\eta-1}\|v\|_V^{\rho\frac{(\eta-1)}{\rho}} \\ = & \frac{2\eta-p-1-\rho}{\eta-1} + \frac{p-1+\rho}{\eta-1}\|v\|_V^{\eta-1} \leq r(1+\|v\|_V^{\eta-1}),\end{aligned}$$

onde $\eta > \max\{p, \rho+1\}$ e $r := \max\{\frac{2\eta-p-1-\rho}{\eta-1}, \frac{p-1+\rho}{\eta-1}\}$. Com isso (3.5) é verificada, sendo então o Lema 3.1 aplicável, ou seja, $\overline{D(A_H)}^H = L^2(\Omega)$.

Capítulo 4

Propriedades Assintóticas de Problemas Dominados pelo p-Laplaciano com Difusão

Neste Capítulo estudaremos o comportamento assintótico da família de soluções das equações:

$$\begin{cases} u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda = B(u^\lambda) & \text{em } \Omega \\ u^\lambda = 0 & \text{em } \Gamma \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.1}$$

quando $\lambda \to 0$. Mais precisamente, garantiremos a semicontinuidade superior em $\lambda = 0$ da família de atratores associados a (4.1) que a grosso modo consistem de equações de reação-difusão, não lineares, com termo principal governado pelo p-Laplaciano degenerado em que a difusão d_λ explode em regiões localizadas no interior do domínio Ω. A principal referência para este capítulo é [16].

4.1 Apresentação do problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto, conexo, limitado e suave com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Denotaremos por Ω_0 um subconjunto aberto de Ω, conexo e suave tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{0,i}$ onde m é um inteiro positivo e $\Omega_{0,i}$ são subconjuntos, abertos, suaves e conexos de Ω satisfazendo $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$ (Figura 4.1). Sejam $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$ e $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0, respectivamente. Note que $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup \Gamma_0$.

Em (4.1) consideramos $\lambda \in (0, 1]$ um parâmetro, $p > 2$ e B globalmente Lipschitz e uniformemente integrável. Além disso, os coeficientes de difusão $d_\lambda : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ são funções suaves em Ω,

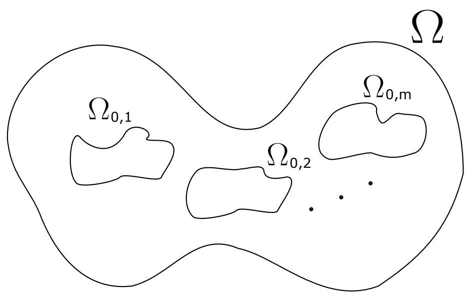

Figura 4.1: Esboço do Domínio Ω.

satisfazendo

$$0 < m_0 \leq d_\lambda(x) \leq M_\lambda, \tag{4.2}$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \lambda \leq 1$. Consideremos $d_0 : \overline{\Omega}_1 \to (0, \infty)$ uma função suave com $0 < m_0 \leq d_0(x) \leq M_0$, para todo $x \in \overline{\Omega}_1$, tal que:

$$d_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \to 0} \begin{cases} d_0(x), & \text{uniformemente em } \overline{\Omega}_1; \\ \infty, & \text{uniformemente sob subconjuntos compactos de } \Omega_0. \end{cases}$$

É importante notar que $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, ou seja, que a difusão é grande no interior de Ω.

Se em um processo de reação-difusão os coeficientes de difusão se comportam como expresso acima, intuitivamente espera-se que as soluções tendem a tornar-se homogêneas nas regiões onde a difusão torna-se grande, isto é, para pequenos valores de λ, espera-se que a solução do problema (4.1) seja aproximadamente constante em Ω_0. Por essa razão, suponha que u^λ converge para u quando $\lambda \to 0$, em algum sentido, e que u assume sobre Ω_0 um valor espacialmente constante, que iremos denotar por $u_{\Omega_0}(t)$.

Neste contexto pretendemos obter a equação que descreve o problema limite. Notemos que, como a função limite u está em $W^{1,p}(\Omega)$, é constante em Ω_0, $u_{\Omega_0}(t)$, então u não pode ser arbitrária. Além disso, em $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$, devemos ter $u_{|\Gamma_0} = u_{\Omega_0}(t)$. Em Ω_1, temos

$$u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda = B(u^\lambda). \tag{4.3}$$

Das propriedades de convergência da função $d_\lambda(x)$ em Ω_1, fazendo $\lambda \to 0$,

$$u_t - \operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = B(u), \text{ para } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Integrando (4.3) em Ω_0, tem-se

$$\int_{\Omega_0} u_t^\lambda \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} B(u^\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Pelo Teorema da Divergência segue que

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div}(d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda)\,\mathrm{d}x = -\int_{\Gamma_0} d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\frac{\partial u^\lambda}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x,$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário na fronteira de Ω_0 voltado para o interior de Ω_0, deixaremos implícita a notação da medida de superfície no integral, sendo ainda denotada por $\mathrm{d}x$. Então

$$\int_{\Omega_0} u_t^\lambda \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\frac{\partial u^\lambda}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} B(u^\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$, obtemos que

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t)|\Omega_0| + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |u_{\Omega_0}(t)|^{p-2}u_{\Omega_0}(t)\,\mathrm{d}x = |\Omega_0|B(u_{\Omega_0}(t)).$$

Dividindo ambos os lados por $|\Omega_0|$, chega-se a seguinte equação ordinária:

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t) + \frac{1}{|\Omega_0|}\left(\int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |u_{\Omega_0}(t)|^{p-2}u_{\Omega_0}(t)\,\mathrm{d}x\right) = B(u_{\Omega_0}(t)).$$

Com essas considerações e assumindo que no limite usaremos o espaço das funções constantes sobre Ω_0, o problema limite, que é singular devido a variação do parâmetro λ, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = B(u) & \text{em } \Omega_1 \\ u_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}} & \text{em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p-2}u_{\Omega_{0,i}}\,\mathrm{d}x\right] = B(u_{\Omega_{0,i}}) & \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \\ u(0) = u_0. & \end{cases} \tag{4.4}$$

4.2 Formulação abstrata e existência de atrator

Com intuito de escrever os problemas (4.4) e (4.1) de modo abstrato. Consideramos as notações:

$$
\begin{aligned}
V &:= W_0^{1,p}(\Omega), \quad V_0 := W_{\Omega_0,0}^{1,p}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\}, \\
H &:= L^2(\Omega), \qquad H_0 := L_{\Omega_0}^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\}.
\end{aligned}
$$

Iremos munir o espaço V_0 com a norma de V

$$\|v\|_V := (\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Lema 4.1. **(i)** *V e V_0 são espaços reflexivos;*

(ii) *V é denso em H e V_0 é denso em H_0;*

(iii) *$V \subset H \hookrightarrow V'$ com imersões contínuas, além disso V está imerso em H compactamente;*

(iv) *$V_0 \subset H_0 \hookrightarrow V_0'$ com imersões contínuas, além disso V_0 está imerso em H_0 compactamente.*

DEMONSTRAÇÃO: (i) Segue da Proposição A.1 que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, como V é subconjunto fechado de $W^{1,p}(\Omega)$ então da Proposição A.4 temos que V é reflexivo. Pelo Teorema A.3, segue que V_0 é um subespaço fechado de V, logo como V é reflexivo segue que V_0 é reflexivo.
(ii) Pelo Corolário A.1, temos que $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^H = H$, como $C_c^\infty(\Omega)$ está contido em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$H = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^H \subset \overline{W_0^{1,p}(\Omega)}^H = \overline{V}^H,$$

ou seja, V é denso em H. Além disso, $H_0 = \overline{C_{c,0}^\infty(\Omega)}^{H_0}$, onde

$$C_{c,0}^\infty(\Omega) = \{f \in C_c^\infty(\Omega) : f \text{ é constante em } \Omega_0\}.$$

Notemos que,

$$C_{c,0}^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\Omega) \subset \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)} = V.$$

Assim $C_{c,0}^\infty(\Omega) \subset V_0$ pois, se $f \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$ então $f \in V$ e é constante em Ω_0. Portanto, $H_0 = \overline{C_{c,0}^\infty(\Omega)}^{H_0} \subset \overline{V_0}^{H_0}$, concluindo o item (ii).
(iii) Pelo Teorema A.1 a inclusão $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ é compacta e a inclusão $L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é contínua, já que $p > 2$ e Ω é limitado, segue que a inclusão $V \subset H$ é compacta, em particular é uma imersão contínua. Considerando a aplicação linear $I : H \to V'$ definida por $Iu = \varphi_u$, onde

$\varphi_u : V \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi_u(v) = \langle u, v\rangle_H$. Temos que

$$|Iu(v)| = |\varphi_u(v)| = |\langle u, v\rangle_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H \leq \|u\|_H \|v\|_V,$$

logo, $\|Iu\|_{V'} \leq \|u\|_H$, de onde segue que I é contínua. Além disso I é injetora: suponhamos $Iu = 0$, então temos que $\langle u, v\rangle_H = Iu(v) = 0$, para todo $v \in V$. Como V é denso em H, segue da continuidade do produto interno que $\langle u, u\rangle_H = 0$, assim $u = 0$, obtendo a injetividade. Portanto $H \hookrightarrow V'$.

(iv) De (iii) segue que a inclusão $V_0 \subset H_0$ é compacta, pois se $B \subset V_0$ limitado então $B \subset V$ implicando, pelo item (iii), que $\overline{B}^H$ é compacto, como $H_0 \subset H$ fechado temos $\overline{B}^{H_0}$ compacto. E de modo análogo à demonstração de (iii) temos que a aplicação $I : H_0 \to V_0'$ definida por $Iu(v) = \langle u, v\rangle_H$, para quaisquer $u \in H_0$ e $v \in V_0$, é uma imersão contínua. ∎

Para $\lambda \in (0, 1]$, seja

$$D(A_\lambda) = \left\{u \in V : -\mathrm{div}(d_\lambda(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\},$$

e para $u \in D(A_\lambda)$, definimos

$$A_\lambda u = -\mathrm{div}(d_\lambda(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u.$$

No caso em que $\lambda = 0$, consideramos

$$D(A_0) = \{u \in V_0 : -\mathrm{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in \mathrm{L}^2_{\Omega_0}(\Omega)\},$$

e para $u \in D(A_0)$, definimos

$$\begin{aligned} A_0 u = {} & (-\mathrm{div}(d_0(.)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u)\chi_{\Omega_1} \\ & + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \left(\int\limits_{\Gamma_{0,i}} d_0(.)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p-2}u_{\Omega_{0,i}}\,\mathrm{d}x \right)\chi_{\Omega_{0,i}}, \end{aligned}$$

onde χ_E denota a função característica do conjunto E.

Suponhamos $B : H \to H$ globalmente Lipschitz, onde L_B denota sua constante de Lipschitz, e uniformemente integrável em $L^1([0,T],H)$, ou seja, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$\int_E \|Bu^\lambda(t)\|_H \,\mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{sempre que } \mu(E)<\delta. \tag{4.5}$$

O problema (4.1) pode ser escrito abstratamente como

$$\begin{cases} u_t^\lambda + A_\lambda u^\lambda = B(u^\lambda) \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda, \qquad\qquad \text{para todo } \lambda\in(0,1], \end{cases} \tag{4.6}$$

já (4.4) pode ser escrito abstratamente como

$$\begin{cases} u_t + A_0 u = B(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $B: H_0 \to H_0$.

Consideremos agora os operadores $A_\lambda : V\to V'$, para $\lambda\in(0,1]$ definidos por:

$$\langle A_\lambda u, v\rangle_{V',V} := \int_\Omega -\operatorname{div}(d_\lambda(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)v\ \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\ \mathrm{d}x, \quad \forall v\in V,$$

e $A_0 : V_0 \to V_0'$ definido por

$$\langle A_0 u, v\rangle_{V_0',V_0} := \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)v\ \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}v\ \mathrm{d}x, \quad \forall v\in V_0.$$

Teorema 4.1. *Dado $\lambda\in[0,1]$ qualquer, temos que o operador A_λ é monótono, hemicontínuo e coercivo.*

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos o caso $\lambda=0$, já que sendo $\lambda\in(0,1]$ o resultado é provado de forma análoga. Sejam $u,v\in V_0$ quaisquer, então

$$\begin{aligned}\langle A_0u - A_0v, u-v\rangle_{V_0',V_0} &= \langle A_0u, u-v\rangle_{V_0',V_0} - \langle A_0v, u-v\rangle_{V_0',V_0} \\ &= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(u-v)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{p-2}u(u-v)\ \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_1}\operatorname{div}(d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(u-v)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$-\int_{\Omega} |v|^{p-2}v(u-v)\ \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(u-v)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_0\cup\Gamma} -d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u-\nabla v)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\Gamma_0} -d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u-\nabla v)\,\mathrm{d}x.$$

Por contas análogas obtemos

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(u-v)\ \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x - \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v(\nabla u-\nabla v)\ \mathrm{d}x.$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned}
\langle A_0u - A_0v, u-v\rangle_{V_0',V_0} &= \int_{\Gamma_0} -d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u-\nabla v)\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v(\nabla u-\nabla v)\ \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Omega} (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u-v)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u-\nabla v)\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega} (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u-v)\ \mathrm{d}x \\
&\geq m_0\gamma_0\int_{\Omega_1} |\nabla u-\nabla v|^p\ \mathrm{d}x + \widetilde{\gamma_0}\int_{\Omega} |u-v|^p\ \mathrm{d}x \geq C_1\left[\int_{\Omega_1} |\nabla(u-v)|^p\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u-v|^p\ \mathrm{d}x\right] \\
&= C_1\left[\int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^p\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u-v|^p\ \mathrm{d}x\right] = C_1\|u-v\|_{V_0}^p \geq 0,
\end{aligned}$$

sendo γ_0 e $\widetilde{\gamma_0}$ obtidas pelo Lema A.3 (Desigualdade de Tartar) e $C_1 := \min\{m_0\gamma_0, \widetilde{\gamma_0}\} > 0$. Portanto A_0 é monótona. Para obter a hemicontinuidade de A_0, consideremos $u, v, w \in V_0$ arbitrários e

$0 < t < 1$, então

$$
\begin{aligned}
|\langle A_0(u+tv)-A_0(u), w\rangle_{V_0',V_0}| = &\Bigg| \int\limits_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)|\nabla(u+tv)|^{p-2}\nabla(u+tv))w \ \mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{\Omega} |u+tv|^{p-2}(u+tv)w \ \mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla(u+tv)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial \vec{n}}(u+tv)w \ \mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)w \ \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2}uw \ \mathrm{d}x - \int\limits_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} w \ \mathrm{d}x \Bigg| \\
= &\Bigg| \int\limits_{\Gamma_0} - d_0(x)|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}\frac{\partial}{\partial \vec{n}}(u+tv)w \ \mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\nabla w \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} |u+tv|^{p-2}(u+tv)w \ \mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla(u+tv)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial \vec{n}}(u+tv)w \ \mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} w \ \mathrm{d}x \\
&- \int\limits_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2}uw \ \mathrm{d}x - \int\limits_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} w \ \mathrm{d}x \Bigg| \\
\leq &\Bigg| \int\limits_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla w \, \mathrm{d}x \Bigg| \\
&+ \Bigg| \int\limits_{\Omega} |u+tv|^{p-2}(u+tv)w - |u|^{p-2}uw \, \mathrm{d}x \Bigg|.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
|d_0(x)(|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla w| &\leq M_0(|\nabla u + t\nabla v|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1})|\nabla w| \\
&\leq M_0(2^{p-1}(|\nabla u|^{p-1} + t^{p-1}|\nabla v|^{p-1}) + |\nabla u|^{p-1})|\nabla w| \\
&\leq M_0(2^{p-1}(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}) + |\nabla u|^{p-1})|\nabla w|,
\end{aligned}
$$

de modo análogo

$$
||u+tv|^{p-2}(u+tv)w - |u|^{p-2}uw| \leq (|u+tv|^{p-1} + |u|^{p-1})|w| \leq (2^{p-1}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) + |u|^{p-1})|w|.
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$
|\langle A_0(u+tv), w\rangle_{V_0',V_0} - \langle A_0(u), w\rangle_{V_0',V_0}| \xrightarrow{t\to 0} 0.
$$

Logo, A_0 é hemicontínuo. Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle A_0u,u\rangle_{V_0',V_0} &= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)u\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega}|u|^{p-2}uu\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u\ \mathrm{d}x\\
&= \int_{\Gamma_0} - d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega}|u|^{p-2}uu\ \mathrm{d}x\\
&\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u\ \mathrm{d}x\\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p}\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_1}|u|^{p}\ \mathrm{d}x\\
&\geq C_2\left[\int_{\Omega_1}|\nabla u|^{p}\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega}|u|^{p}\ \mathrm{d}x\right] = C_2\|u\|_{V_0}^{p},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde $C_2 := \min\{m_0, 1\} > 0$. Portanto

$$\frac{\langle A_0u,u\rangle_{V_0',V_0}}{\|u\|_{V_0}} \geq C_2\|u\|_{V_0}^{p-1} \to +\infty, \text{ quando } \|u\|_{V_0} \to +\infty,$$

já que $p > 2$. Assim A_0 é coercivo. ∎

Pelo Lema 4.1 podemos definir as realizações de A_λ em H, isto é

$$\begin{aligned}
&D(A_\lambda^H) := \{v \in V : A_\lambda v \in H\}, \quad \text{para} \quad \lambda \in (0,1],\\
&D(A_0^H) := \{v \in V_0 : A_0 v \in H_0\},
\end{aligned}$$

e os operadores $A_\lambda^H : D(A_\lambda^H) \subset H \to H$ dados por

$$\begin{aligned}
&A_\lambda^H(u) = A_\lambda u, \quad \forall u \in D(A_\lambda^H), \quad \text{para} \quad \lambda \in (0,1] \text{ e}\\
&A_0^{H_0}(u) = A_0 u, \quad \forall u \in D(A_0^{H_0}).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1 e pela Proposição 1.5, concluímos que A_λ^H e $A_0^{H_0}$ são maximais monótonos. Além disso, tais operadores podem ser vistos como do tipo subdiferencial, isto é, $A_\lambda^H = \partial\varphi^\lambda$, onde $\varphi^\lambda : H \to (-\infty,\infty]$ são funções convexas, semicontínuas inferiormente, definidas por:

$$\varphi^\lambda(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x, & \text{se } u \in V\\ \infty, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

para $\lambda \in (0,1]$.

Para $\lambda = 0$, $A_0^{H_0} = \partial\varphi^0$ onde $\varphi^0 : H_0 \to (-\infty, \infty]$ é função convexa, semicontínua inferiormente definida por:

$$\varphi^0(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{\Omega} |u|^p \,\mathrm{d}x, & \text{se } u \in V_0 \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, verificaremos o caso $\lambda = 0$, note que

$$\begin{aligned}
\langle A_0 u, v-u\rangle_{V_0', V_0} &= \int_{\Omega_1} (-\mathrm{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u))(v-u)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Omega} |u|^{p-2}u(v-u)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(v-u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla v - \nabla u)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(v-u)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Omega} |u|^{p-2}u(v-u)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(v-u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla v - \nabla u)\,dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2}u(v-u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-2}uv\,dx - \left(\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^p\,dx + \int_{\Omega} |u|^p\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young, onde q é o expoente conjugado de p, isto é, $q(p-1) = p$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\langle A_0 u, v-u\rangle_{V_0', V_0} &+ \left(\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^p\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x \\
&\le \left|\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\Omega} |u|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-1}|v|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)^{\frac{1}{q}}|\nabla u|^{p-1}d_0(x)^{\frac{1}{p}}|\nabla v|\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-1}|v|\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{q}d_0(x)|\nabla u|^{q(p-1)} + \frac{1}{p}d_0(x)|\nabla v|^p\right)\mathrm{d}x + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q}|u|^{q(p-1)} + \frac{1}{p}|v|^p\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q}\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^p \,\mathrm{dx} + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |u|^p \,\mathrm{dx} + \frac{1}{p}\int_{\Omega} |v|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{q}\left(\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^p \,\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{p}\left(\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |v|^p \,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}
$$

assim

$$
\langle A_0 u, v-u\rangle_{V_0',V_0} + \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^p \,dx + \int_{\Omega} |u|^p \,dx\right) \le \frac{1}{p}\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^p \,dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega} |v|^p \,dx.
$$

Com isso para todo $u, v \in V_0$ segue que

$$
\langle A_0^{H_0} u, v-u\rangle_{H_0} \le \varphi^0(v) - \varphi^0(u),
$$

ou seja, $A_0^{H_0}(u) \subset \partial\varphi^0(u)$ como ambos são maximais monótonos devemos ter $A_0^{H_0} = \partial\varphi^0$. Portanto $A_0^{H_0}$ é dito do tipo subdiferencial. Para $\lambda \in (0,1]$ as contas são análogas.

Como H1 e H2 ocorrem, então podemos aplicar o Teorema 3.1, ou seja, as equações (4.6) e (4.7) admitem solução global $u^\lambda(\cdot, u_0^\lambda)$ onde $u_0^\lambda \in \overline{D(A_\lambda^H)}$ e $u_0^0 \in \overline{D(A_0^{H_0})}$, respectivamente. Assim, para $\lambda \in (0,1]$, podemos definir em $D(A_\lambda^H)$ o semigrupo $\{\mathrm{T}_\lambda(t)\}_{t\ge 0}$ de operadores não-lineares, associados à (4.6) por $\mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda = u^\lambda(t, u_0^\lambda)$, para cada $t \ge 0$. Além disso, se $u_0^\lambda \in D(A_\lambda^H)$, então $u^\lambda(\cdot, u_0^\lambda) = \mathrm{T}_\lambda(\cdot)u_0^\lambda$ é uma solução forte Lipschitz contínua de (4.6). Para simplificar denotaremos a solução $u^0(t, u_0^0)$ somente por $u(t, u_0)$. Assim, se $\lambda = 0$, podemos definir em $D(A_0^{H_0})$ o semigrupo $\{\mathrm{T}_0(t)\}_{t\ge 0}$ de operadores não-lineares, associados à (4.7) por $\mathrm{T}_0(t)u_0 = u(t, u_0)$, para cada $t \ge 0$. Além disso, se $u_0 \in D(A_0^{H_0})$, então $u(\cdot, u_0) = \mathrm{T}_0(\cdot)u_0$ é uma solução forte Lipschitz contínua de (4.7).

Com a finalidade de aplicar o Teorema 3.2 vamos verificar que H3 ocorre.

$$
\begin{aligned}
\langle A_0 u, v\rangle_{V_0',V_0} &= \int_{\Omega_1} -\mathrm{div}(d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)v \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-2}uv \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Omega} |u|^{p-2}uv \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-2}uv \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|\langle A_0 u, v\rangle_{V_0',V_0}| &\leq \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p-2}|\nabla u||\nabla v|\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} |u|^{p-2}|u||v|\,\mathrm{d}x \\
&\leq (\limsup_{\lambda\to 0} M_\lambda)\int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega}|u|^{p-1}|v|\,\mathrm{d}x \\
&\leq c_3\||\nabla u|^{p-1}\|_{L^q(\Omega_1)}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_1)} + \||u|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= c_3\left(\int_{\Omega_1}(|\nabla u|^{p-1})^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_1)} + \left(\int_{\Omega}(|u|^{p-1})^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= c_3\left[\left(\int_{\Omega_1}|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right]^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_1)} + \left[\left(\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right]^{p-1}\|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= c_3\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_1)}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_1)} + \|u\|_{L^p}^{p-1}\|v\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \min\{c_3,1\}\Bigg[\left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_1)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_1)} \\
&\qquad\qquad + \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_1)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-1}\|v\|_{L^p(\Omega)}\Bigg] \\
&= w_2\,\|u\|_{V_0}^{p-1}(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_1)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})] \\
&= w_2\,\|u\|_{V_0}^{p-1}(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})] \\
&= w_2\|u\|_{V_0}^{p-1}\|v\|_{V_0}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\|A_0 u\|_{V_0'} = \sup_{\|v\|_{V_0}\leq 1}|\langle Au, v\rangle_{V_0',V_0}| \leq w_2\|u\|_{V_0}^{p-1} \leq w_2(1+\|u\|_{V_0}^{p-1}). \tag{4.9}
$$

Juntamente com (4.8) temos H3. Quando $\lambda \in (0,1]$, é possível obter condições análogas a (4.8) e (4.9) para os operadores A_λ. Assim, podemos aplicar o Teorema 3.2 para garantir a existência de atrator global $\mathscr{A}_\lambda$ para o semigrupo $\{\mathrm{T}_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$, onde $\lambda \in [0,1]$. Ou seja:

Teorema 4.2. *O semigrupo* $\{\mathrm{T}_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao problema* (4.6) *admite atrator global* $\mathscr{A}_\lambda$ *em* $\overline{D(A_\lambda^H)}^H$*, para cada* $\lambda \in (0,1]$*. Além disso, o semigrupo* $\{\mathrm{T}_0(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao problema* (4.7) *admite atrator global* $\mathscr{A}_0$ *em* $\overline{D(A_0^{H_0})}^{H_0}$*.*

Observamos que como H1, H2 e H3 ocorrem, pelo Lema 3.1, os atratores $\mathscr{A}_\lambda$ e $\mathscr{A}_0$ existem em H e H_0, respectivamente.

4.3 Principais resultados

Nesta seção apresentaremos resultados com objetivo de garantir a semicontinuidade superior da família de atratores $\{\mathscr{A}_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$. Inicialmente garantiremos que $\overline{\bigcup_{\lambda\in(0,1]} \mathscr{A}_\lambda}^H$ é compacto.

4.3.1 Estimativas uniformes de soluções

O próximo resultado nos permite estimar uniformemente as soluções de (4.6) em H e V.

Lema 4.2. *Seja u^λ solução de* (4.6). *Então*

(i) *Existem constantes positivas r_0 e t_0 tais que $\|u^\lambda\|_H \leq r_0$, para todo $t \geq t_0$, uniformemente em* $(0,1]$.

(ii) *Existem constantes positivas r_1 e $t_1 > t_0$ tais que $\|u^\lambda\|_V \leq r_1$, para todo $t \geq t_1$, uniformemente em* $(0,1]$.

DEMONSTRAÇÃO: **(i)** Consideremos o produto escalar por u^λ sobre H na equação (4.6), isto é:

$$\langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H + \langle A_\lambda^H u^\lambda, u^\lambda\rangle_H = \langle B(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H. \tag{4.10}$$

Usando que

$$\begin{aligned}\langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H =& \frac{1}{2}2\langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H = \frac{1}{2}(\langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H + \langle u^\lambda, u_t^\lambda\rangle_H)\\ =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^\lambda, u^\lambda\rangle_H = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2,\end{aligned}$$

então (4.10) fica na forma:

$$\begin{aligned}\langle B(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 + \langle A_\lambda u^\lambda, u^\lambda\rangle_{V',V}\\ =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 - \int_\Omega \mathrm{div}(d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda)u^\lambda \mathrm{d}x + \int_\Omega |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda u^\lambda \mathrm{dx}\\ =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 + \int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\nabla u^\lambda \nabla u^\lambda \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^{p-2}\frac{\partial u^\lambda}{\partial \vec{n}}u^\lambda \mathrm{d}x\\ &+ \int_\Omega |u^\lambda|^{p-2}u^\lambda u^\lambda \mathrm{d}x\\ =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 + \int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega |u^\lambda|^p \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 + \int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega |u^\lambda|^p \mathrm{d}x =& \langle B(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H = \langle B(u^\lambda) - B(0) + B(0), u^\lambda\rangle_H \\ =& \langle B(u^\lambda) - B(0), u^\lambda\rangle_H + \langle B(0), u^\lambda\rangle_H \\ \leq& \|B(u^\lambda) - B(0)\|_H \|u^\lambda\|_H + \|B(0)\|_H \|u^\lambda\|_H.\end{aligned}$$

Sejam $C_0 := \|B(0)\|_H$ e η a constante da imersão contínua de V em H, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|^2 &\leq L_B\|u^\lambda\|_H^2 + C_0\|u^\lambda\|_H - \int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |u^\lambda|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq L_B\|u^\lambda\|_H^2 + C_0\|u^\lambda\|_H - \min\{m_0, 1\}\|u^\lambda\|_V^p \\ &\leq L_B\|u^\lambda\|_H^2 + C_0\|u^\lambda\|_H - \min\{m_0, 1\}\eta^{-p}\|u^\lambda\|_H^p \\ &\leq L_B\|u^\lambda\|_H^2 + C_0\|u^\lambda\|_H - C_1\|u^\lambda\|_H^p,\end{aligned}$$

onde $C_1 := \min\{m_0, 1\}\eta^{-p}$. Aplicando a Desigualdade de Young [1] para $L_B\|u^\lambda\|_H^2$ e $C_0\|u^\lambda\|_H$ com $\varepsilon = \frac{C_1}{4}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|^2 \leq& \frac{C_1}{4}\|u^\lambda\|_H^p + \frac{C_1}{4}^{\frac{-2}{p-2}} L_B^{\frac{p}{p-2}} + \frac{C_1}{4}\|u^\lambda\|_H^p + \frac{C_1}{4}^{\frac{-1}{p-1}} C_0^{\frac{p}{p-1}} - C_1\|u^\lambda\|_H^p \\ =& -\frac{C_1}{2}\|u^\lambda\|_H^p + C_2,\end{aligned}$$

onde $C_2 := \frac{C_1}{4}^{\frac{-2}{p-2}} L_B^{\frac{p}{p-2}} + \frac{C_1}{4}^{\frac{-1}{p-1}} C_0^{\frac{p}{p-1}}$. Com isso,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 + C_1\|u^\lambda\|_H^p \leq 2C_2.$$

Aplicando o Lema A.5 para $y(t) := \|u^\lambda(t)\|_H^2$, obtemos

$$\|u^\lambda(t)\|_H \leq \left[\left(\frac{2C_2}{C_1}\right)^{\frac{2}{p}} + \frac{1}{(C_1(\frac{p}{2}-1)t)^{\frac{2}{p-2}}}\right]^{\frac{1}{2}} := r(t).$$

Assim fixado $t_0 > 0$, como $r(t)$ é uma função não-crescente, segue que

$$\|u^\lambda(t)\|_H \leq r(t_0) := r_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

[1] $ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}} b^q$ para $a, b \geq 0$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(ii) Seja u^λ solução de (4.6). Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^\lambda(u^\lambda) &= \langle \partial\varphi^\lambda(u^\lambda), u_t^\lambda\rangle_H = \langle A_\lambda^H(u^\lambda), u_t^\lambda\rangle_H = \langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, u_t^\lambda\rangle_H \\
&= \langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, u_t^\lambda - B(u^\lambda) + B(u^\lambda)\rangle_H \\
&= \langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, u_t^\lambda - B(u^\lambda)\rangle_H + \langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, B(u^\lambda)\rangle_H \\
&= -\|B(u^\lambda) - u_t^\lambda\|_H^2 + \langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, B(u^\lambda)\rangle_H.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|B(u^\lambda) - u_t^\lambda\|_H^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^\lambda(u^\lambda) \;&\leq \langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, B(u^\lambda)\rangle_H \leq |\langle B(u^\lambda) - u_t^\lambda, B(u^\lambda)\rangle_H| \\
&\leq \|B(u^\lambda) - u_t^\lambda\|_H \|B(u^\lambda)\|_H \\
&\underbrace{\leq}_{\text{Young}} \frac{1}{2}\|B(u^\lambda) - u_t^\lambda\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(u^\lambda)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\|B(u^\lambda)\|_H \leq& \|B(u^\lambda) + B(0)\|_H + \|B(0)\|_H \\
\leq& L_B\|u^\lambda\|_H + \|B(0)\|_H \\
\leq& L_B r_0 + \|B(0)\|_H := k_1,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^\lambda(u^\lambda) \leq& -\frac{1}{2}\|B(u^\lambda) - u_t^\lambda\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(u^\lambda)\|_H^2 \\
\leq& \frac{1}{2}\|B(u^\lambda)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}k_1^2, \quad \forall t \geq t_0,
\end{aligned}$$

uniformemente em $(0, 1]$. Segue da definição de subdiferencial, que:

$$\varphi^\lambda(u^\lambda) \leq \langle \partial\varphi^\lambda(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H.$$

Assim, como $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 = \langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\lambda\|_H^2 + \varphi^\lambda(u^\lambda) =& \langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H + \varphi^\lambda(u^\lambda)\\ \leq& \langle u_t^\lambda, u^\lambda\rangle_H + \langle \partial\varphi^\lambda(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H\\ =& \langle u_t^\lambda + \partial\varphi^\lambda(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H = \langle B(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H \leq |\langle B(u^\lambda), u^\lambda\rangle_H|\\ \leq& \|B(u^\lambda)\|_H\|u^\lambda\|_H \leq k_1 r_0, \quad \forall t \geq t_0.\end{aligned}$$

Fixando $r > 0$ e integrando a desigualdade acima de t à $t+r$ sendo $t \geq t_0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_t^{t+r} k_1 r_0 \,\mathrm{d}s \geq& \int_t^{t+r} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u^\lambda\|_H^2 \,\mathrm{d}s + \int_t^{t+r} \varphi^\lambda(u^\lambda)\,\mathrm{d}s\\ =& \frac{1}{2}\|u^\lambda(t+r)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u^\lambda(t)\|_H^2 + \int_t^{t+r} \varphi^\lambda(u^\lambda)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

implicado que

$$\int_t^{t+r} \varphi^\lambda(u^\lambda)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|u^\lambda(t+r)\|_H^2 \leq k_1 r_0 r + \frac{1}{2}\|u^\lambda(t)\|_H^2.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+r} \varphi^\lambda(u^\lambda)\,\mathrm{d}s \leq& \frac{1}{2}\|u^\lambda(t+r)\|_H^2 + \int_t^{t+r} \varphi^\lambda(u^\lambda)\,\mathrm{d}s\\ \leq& \frac{1}{2}\|u^\lambda(t)\|_H^2 + k_1 r_0 r \leq \frac{1}{2}r_0^2 + k_1 r_0 r := a_3.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema A.4, para $y^\lambda = \varphi^\lambda(u^\lambda)$, $g = 0$ e $h = \frac{1}{2}k_1^2$, obtemos

$$\varphi^\lambda(u^\lambda(t+r)) \leq \left(\frac{a_3}{r} + \frac{1}{2}k_1^2 r\right) := \tilde{r}_1, \qquad \text{para todo } t \geq t_0. \tag{4.11}$$

Por fim, denotemos $\tau = t + r$, então

$$\begin{aligned}\min\{m_0, 1\}\frac{1}{p}\|u^\lambda(\tau)\|_V^p = \min\{m_0,1\}\frac{1}{p}(\|\nabla u^\lambda\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u^\lambda\|_{L^p(\Omega)}^p) \leq \frac{1}{p}\int_\Omega m_0|\nabla u^\lambda|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega |u^\lambda|^p\,\mathrm{d}x\\ \leq \frac{1}{p}\int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla u^\lambda|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega |u^\lambda|^p\,\mathrm{d}x = \varphi^\lambda(u^\lambda) \leq \tilde{r}_1,\end{aligned} \tag{4.12}$$

para todo $\tau \geq t_0 + r := t_1$, uniformemente em $(0,1]$. Isto é, para todo $t \geq t_1$

$$\|u^\lambda\|_V \leq (p\tilde{r}_1)^{\frac{1}{p}} \min\{m_0, 1\}^{-\frac{1}{p}} := r_1,$$

uniformemente em $(0,1]$. ∎

Observação 4.1. *Pelo Lema 4.2 e pela Proposição 2.5 podemos concluir que*

$$\sup_{\lambda\in(0,1]} \|u^\lambda(t_1)\|_V < \infty \Rightarrow \sup_{\lambda\in(0,1]} \sup_{u\in\mathscr{A}_\lambda} \|u\|_V < \infty.$$

Assim, $\bigcup_{\lambda\in(0,1]} \mathscr{A}_\lambda$ *é limitado em* V*. Como* $V \subset H$ *compactamente então* $\overline{\bigcup_{\lambda\in(0,1]} \mathscr{A}_\lambda}^H$ *é compacto.*

4.3.2 Propriedades de continuidade

A próxima etapa é garantir que para cada $t > 0$, $\mathrm{T}_\lambda(t)u^\lambda$ comporta-se de maneira contínua em $C([0,T],H)$, quando λ tende a zero. Para isso mostraremos primeiramente que o conjunto de todas as soluções, u^λ, é relativamente compacto em $C([0,T],H)$.

Lema 4.3. *Sejam* $\{\mathrm{S}_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ *o semigrupo gerado por* $\partial\varphi^\lambda$*,* $\lambda \in [0,1]$ *e* u^λ *solução do problema* (4.6)$-$(4.7)*. Então*

$$\|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H \to 0$$

quando $h \to 0$*, uniformemente em* $[0,1]$*, para cada* $t > 0$*. Além disso, se* $T > 0$*, então*

$$\|u^\lambda(T-h) - \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(T-h)\|_H \to 0,$$

quando $h \to 0$*, uniformemente em* $[0,1]$*.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\lambda \in [0,1]$, $u \in H$ e $h > 0$. Denotemos $J_t^\lambda = (I + t\partial\varphi^\lambda)^{-1}$, segue do Teorema 1, item (iii), em [5] que

$$\|\mathrm{S}_\lambda(t)u - u\|_H \leq 3\|J_h^\lambda u - u\|_H.$$

Aplicando a Proposição 2.11 em [8], para $\varphi_h^\lambda(v) = \min_{w\in H}\left\{\frac{1}{2h}\|w-v\|_H^2 + \varphi^\lambda(w)\right\}$ para todo $v \in H$, temos que

$$\frac{1}{2h}\|J_h^\lambda v - v\|_H^2 + \varphi^\lambda(J_h^\lambda v) = \min_{w\in H}\left[\frac{1}{2h}\|w-v\|_H^2 + \varphi^\lambda(w)\right] \underbrace{\leq}_{v\in H} \frac{1}{2h}\|v-v\|_H^2 + \varphi^\lambda(v) = \varphi^\lambda(v).$$

Seja $t > 0$ qualquer, então $u^\lambda(t) \in V \subset H$ e usando (4.11), segue que

$$\frac{1}{2h}\|J_h^\lambda u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H^2 + \varphi^\lambda(J_h^\lambda u^\lambda(t)) \leq \varphi^\lambda(u^\lambda(t)) \leq K_1,$$

com K_1 uniforme em $\lambda \in [0,1]$. Logo,

$$\frac{1}{2h}\|J_h^\lambda u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H^2 \leq K_1 - \varphi^\lambda(J_h^\lambda u^\lambda(t)) \leq K_1,$$

assim

$$\|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda - u^\lambda\|_H \leq 3\|J_h^\lambda u^\lambda - u^\lambda\|_H \leq 3\sqrt{2hK_1}.$$

Portanto $\|S_\lambda(h)u^\lambda - u^\lambda\|_H \to 0$, quando $h \to 0$.

Usando argumentos similares, obtemos

$$\|u^\lambda(T-h) - \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(T-h)\|_H \leq \sqrt{2hK_2},$$

com K_2 uniforme com respeito a $\lambda \in [0,1]$. Portanto $\|u^\lambda(T-h) - \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(T-h)\|_H \to 0$, quando $h \to 0$. ■

Segue da Proposição 2.2.2, página 42 de [9] que $\{S_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ é compacto, pois pelo Exemplo 2.2.4, de [9], φ^λ é do tipo compacto. Observamos que o semigrupo $\{S_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ é não-expansivo.

Teorema 4.3. *O conjunto* $S := \{u^\lambda : \lambda \in [0,1], u^\lambda$ *é solução de* $(4.6) - (4.7)\}$ *é relativamente compacto em* $C([0,T],H)$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Lema 2.3.1 em [9] que se $t \in [0,T)$ e $h > 0$ são tais que $T-h, t+h \in [0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u^\lambda(t+h) - u^\lambda(t)\|_H &\leq \|u^\lambda(t+h) - \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t)\|_H + \|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H \\ &\leq \int_t^{t+h} \|Bu^\lambda(s)\|_H \,\mathrm{d}s + \|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H \end{aligned} \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned} \|u^\lambda(T-h) - u^\lambda(T)\|_H &\leq \|u^\lambda(T-h) - \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(T-h)\| + \|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(T-h) - u^\lambda(T)\| \\ &\leq \int_{T-h}^{T} \|Bu^\lambda(s)\|_H \,\mathrm{d}s + \|u^\lambda(T-h) - \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(T-h)\|_H. \end{aligned} \tag{4.14}$$

O Lema 4.3 garante que para todo $\lambda \in [0,1]$, dado $\eta > 0$, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$\|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H < \frac{\eta}{2},$$

para todo $0 < |h| < \bar{\delta}$. Como B é uniformemente integrável em $\mathrm{L}^1([0,T],H)$, então existe $\gamma(\bar{\delta}) > 0$

tal que

$$\int_t^{t+h} \|Bu^\lambda(s)\|_H \,\mathrm{d}s < \frac{\eta}{2},$$

para todo $|h| < \gamma(\bar{\delta})$. Consideremos $\delta = \min\{\gamma(\bar{\delta}), \bar{\delta}\}$ segue de (4.13) que

$$\|u^\lambda(t+h) - u^\lambda(t)\|_H \leq \int_t^{t+h} \|Bu^\lambda(s)\|_H \,\mathrm{d}s + \|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t) - u^\lambda(t)\|_H < \eta,$$

para $0 < |h| < \delta$. Repetindo este raciocínio e usando (4.14) temos

$$\|u^\lambda(T-h) - u^\lambda(T)\|_H < \eta,$$

para $0 < |h| < \delta$. Portanto S é equicontínuo em $C([0,T];H)$.

Agora, mostraremos que para cada $t \in (0,T]$,

$$S(t) := \{u^\lambda(t) : \lambda \in [0,1], u^\lambda \text{ é uma solução de } (4.6) - (4.7)\}$$

é relativamente compacto em H.

Para $t \in (0,T]$ fixado, considere $h > 0$ tal que $t - h \in [0,T]$. Novamente, usando o Lema 2.3.1 em [9]:

$$\|\mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t-h) - u^\lambda(t)\|_H \leq \int_{t-h}^{t} \|Bu^\lambda(s)\|_H \,\mathrm{d}s,$$

para $\lambda \in [0,1]$. Seja $F_h : S(t) \subset H \to H$ um operador definido por $F_h u^\lambda(t) = \mathrm{S}_\lambda(h)u^\lambda(t-h)$. Como $\{\mathrm{T}_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto, segue do Lema 4.2 que $S(t-h)$ é limitado em H e com isso F_h leva subconjuntos limitados em subconjuntos relativamente compactos de H. Além disso, $\lim F_h = I$, quando $h \to 0$, uniformemente em $S(t)$. Portanto $I : S(t) \to H$ é um operador compacto e $S(t)$ é relativamente compacto em H, para todo $t \in (0,T]$.

Finalmente, notando que $S(0) = \{u_0\}$ é relativamente compacto, segue do Teorema A.8 que S é relativamente compacto em $C([0,T],H)$. ∎

Teorema 4.4. *Seja $\{u^\lambda : \lambda \in (0,1]\} \subset V$ tal que $u^\lambda \to u \in V_0$ em V quando $\lambda \to 0$. Então*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathrm{T}_\lambda(t)u^\lambda - \mathrm{T}_0(t)u\| \to 0, \quad \textit{quando} \quad \lambda \to 0.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $u^\lambda(t, u_0^\lambda) = \mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda$ uma solução de (4.6). Segue da Proposição 1.7 que, para todo $v \in D(A_\lambda) = V$ e todo $0 \leq s \leq t \leq T$, a seguinte estimativa é satisfeita

$$\frac{1}{2}\|\mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda - v\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\mathrm{T}_\lambda(s)u_0^\lambda - v\|^2 + \int_s^t \langle B(\mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda) - A_\lambda v, \mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda - v\rangle \mathrm{d}\tau. \tag{4.15}$$

Como $\{\mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda : \lambda \in [0,1]\} \subset S \subset \bar{S}$ então para cada $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\lambda_n \to 0$ temos que $(\mathrm{T}_{\lambda_n}(t)u_0^{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente, isto é, $\mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda \to \xi(t,u_0)$, quando $\lambda \to 0$. Segue da continuidade de B que $B(\mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda) \to B(\xi(t,u_0))$, quando $\lambda \to 0$.

Mostraremos que $A_\lambda v \rightharpoonup A_0 v$ quando $\lambda \to 0$ para todo $v \in V_0$. Sejam $v, w \in V_0$ então

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda v, w\rangle_{V',V} &= \int_\Omega -\mathrm{div}(d_\lambda(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\partial\Omega} d_\lambda(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega d_\lambda(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} d_\lambda(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

já que, $w = 0$ em $\partial\Omega$ e $\nabla v = \nabla w = 0$ em Ω_0. Por sua vez

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}w\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\Omega_1} \mathrm{div}(d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial\Omega_0} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}w\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\Omega_1} \mathrm{div}(d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\mathrm{def}}{=} \langle A_0 v, w\rangle_{V_0',V_0}, \qquad \forall w \in V_0.
\end{aligned}$$

Então fazendo $\lambda \to 0$ e lembrando que $d_\lambda \xrightarrow{\lambda\to 0} d_0$ uniformemente em Ω_1, temos que

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda v, w\rangle_{V',V} &= \int_{\Omega_1} d_\lambda(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x \\
&\xrightarrow{\lambda\to 0} \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x = \langle A_0 v, w\rangle_{V_0',V_0},
\end{aligned}$$

para todo $w \in V_0$. Logo $A_\lambda v \rightharpoonup A_0 v$, quando $\lambda \to 0$, com isso $B(T_\lambda(\tau)u_0^\lambda) - A_\lambda v \rightharpoonup B(\xi(\tau,u_0)) - A_0 v$, quando $\lambda \to 0$. Consequentemente pela Proposição A.2 item (iii), segue que

$$\langle B(\mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda) - A_\lambda v, \mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda - v\rangle \to \langle B(\xi(\tau,u_0)) - A_0 v, \xi(\tau,u_0) - v\rangle. \tag{4.16}$$

Tomando o limite em (4.15), temos

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\|\mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda - v\|^2 \leq \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\|\mathrm{T}_\lambda(s)u_0^\lambda - v\|^2 + \lim_{\lambda\to 0}\int_s^t \langle B(\mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda) - A_\lambda v, \mathrm{T}_\lambda(\tau)u_0^\lambda - v\rangle\, \mathrm{d}\tau.$$

Portanto, usando (4.16) concluímos que

$$\frac{1}{2}\|\xi(t,\cdot) - v\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\xi(s,\cdot) - v\|^2 + \int_s^t \langle B(\xi(t,\cdot)) - A_0 v, \xi(\tau,\cdot) - v\rangle\, \mathrm{d}\tau.$$

Logo, novamente pela Proposição 1.7, obtemos que $\xi(t,\cdot)$ é solução de

$$\begin{cases} u_t + A_0 u = B(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Da unicidade de soluções concluímos que $\xi(t,x) = T_0(t)u_0$. Assim,

$$\mathrm{T}_\lambda(t)u_0^\lambda \to \mathrm{T}_0(t)u_0, \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0.$$

uniformemente em $[0,T]$. ∎

O próximo resultado atinge o objetivo proposto no trabalho.

Teorema 4.5. *A família de atratores* $\{\mathscr{A}_\lambda : \lambda \in [0,1]\}$ *é semicontínua superiormente em* $\lambda = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Iremos utilizar o Lema 2.12. Consideremos a sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_{\lambda_n} \in \mathscr{A}_{\lambda_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \to 0$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ como $u_{\lambda_n} \in \mathscr{A}_{\lambda_n}$ pela Proposição 2.5 , existe $u_{\lambda_n}(t)$ solução de (4.6) tal que $u_{\lambda_n}(0) = u_{\lambda_n}$. Como, do Lema 4.2 item (ii), $\sup\limits_{\lambda\in(0,1]}\|u^\lambda\|_V \leq \tilde{r}_1$, então $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência limitada em V. Por V ser reflexivo, segue do Teorema A.4, que existe uma subsequência, que também denotaremos por (u_{λ_n}), e $u \in V$ tal que $u_{\lambda_n} \to u$ fracamente em V e fortemente em H. É possível verificar que $u_{\lambda_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ fracamente em $W^{1,p}(K)$ para cada conjunto aberto K com $K \subset\subset \Omega$, isto é, $\overline{K} \subset \Omega$ compacto.
Por outro lado, segue de (4.12) que

$$\int_\Omega d_{\lambda_n}(x)|\nabla u^{\lambda_n}|^p\, dx + \int_\Omega |u^{\lambda_n}|^p\, dx \leq p\tilde{r}_1$$

$$\Rightarrow \int_K d_{\lambda_n}(x)|\nabla u^{\lambda_n}|^p\, dx \leq \int_\Omega d_{\lambda_n}(x)|\nabla u^{\lambda_n}|^p\, dx \leq \int_\Omega d_{\lambda_n}(x)|\nabla u^{\lambda_n}|^p\, dx + \int_\Omega |u^{\lambda_n}|^p\, dx \leq p\tilde{r}_1 := C_1,$$

uniformemente em $(0,1]$. Observe ainda que para todo $x \in K$ por (4.2) ocorrer, $\inf\limits_{x\in\overline{K}}\{d_{\lambda_n}(x)\}$ existe, assim

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\overline{K}}\{d_{\lambda_n}(x)\}\int_K |\nabla u^{\lambda_n}|^p \mathrm{d}x &= \int_K \inf_{x\in\overline{K}}\{d_{\lambda_n}(x)\}|\nabla u^{\lambda_n}|^p\, dx\\ &\leq \int_K d_{\lambda_n}(x)|\nabla u^{\lambda_n}|^p\, dx \leq C_1.\end{aligned}$$

Da Proposição A.2, item (ii), e do fato de que $d_{\lambda_n}(x) \to \infty$ quando $\lambda_n \to 0$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω_0, temos que

$$\int_K |\nabla u|^p \mathrm{d}x \leq \liminf_{\lambda_n\to 0}\int_K |\nabla u_{\lambda_n}|^p \mathrm{d}x = 0,$$

para todo $K \subset\subset \Omega_0$. Conseqüentemente, u é constante em K para todo $K \subset\subset \Omega_0$. Disso e do fato de que $\Omega_0 = \bigcup_{\substack{i=1\\ K_i\subset\subset\Omega_0}}^{\infty} K_i$, obtemos que $u \in V_0$.

O próximo passo é construir uma órbita completa e limitada através de u, que implica que $u \in \mathscr{A}_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\gamma_n(\cdot, u_{\lambda_n}) : \mathbb{R} \to V$ a órbita limitada completa através de u_{λ_n}. O Teorema 4.4 garante que $\gamma_n(t, u_{\lambda_n}) = \mathrm{T}_{\lambda_n}(t, u_{\lambda_n}) \to \mathrm{T}_0(t, u)$ para $t \geq 0$. Agora se $t < 0$ então $t \in (-j, -j+1]$ para algum $j \in \mathbb{Z}^+$, consideraremos a sequência $(\gamma_n(-j, u_{\lambda_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bigcup_{\lambda\in(0,1]} \mathscr{A}_\lambda \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in(0,1]} \mathscr{A}_\lambda}$, que é compacto, assim $(\gamma_n(-j, u_{\lambda_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência, que denotaremos da mesma forma, convergindo para um valor que definiremos por $\gamma_0(-j, u)$. Portanto para $t + j > 0$,

$$\begin{aligned}\gamma_n(t, u_{\lambda_n}) =& \gamma_n(t + j - j, u_{\lambda_n}) = \gamma_n(t + j, \gamma_n(-j, u_{\lambda_n}))\\ =& T_{\lambda_n}(t + j, \gamma_n(-j, u_{\lambda_n})) \to \mathrm{T}_0(t + j, \gamma_0(-j, u)) := \tilde{\gamma}_0(t, u).\end{aligned}$$

Assim $\gamma_0(t, u) = \begin{cases} \mathrm{T}_0(t, u), & \text{para } t \geq 0;\\ \tilde{\gamma}_0(t, u), & \text{para } t < 0\end{cases}$ é uma órbita limitada e completa através de u. Portanto pela Proposição 2.5 temos que $u \in \mathscr{A}_0$ e pelo Lema 2.12, item (i), concluímos que a família $\{\mathscr{A}_\lambda : \lambda \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = 0$. ■

Apêndice A

Neste apêndice apresentamos uma coletânea de resultados utilizados ao longo do trabalho.

A.1 Espaços de Sobolev

Definição A.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ por*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall i \in \{1,2,...,n\}\, \exists g_i \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi,\, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Dados $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $i \in \{1,2,...,n\}$, denotamos a função $g_i \in L^p(\Omega)$ por $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.
Definimos a norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ em $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definimos também $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

Observação A.1. *É possível demonstrar - fazendo uso de sequências regularizantes - que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dizendo de outra forma, podemos utilizar indistintamente $C_c^\infty(\Omega)$ e $C_c^1(\Omega)$ na definição de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema A.1 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e de classe C^1. Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\, \forall q \in [1,p^*),\ \text{onde } \tfrac{1}{p*} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{N} && \text{se } p > n\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q,\, \forall q \in [p,+\infty), && \text{se } p = n\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), && \text{se } p > n.
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *com imersão compacta para todo* p *(e todo* n*).*

Consultar Teorema 9.16, página 285 de [7].

Proposição A.1. $W^{1,p}(\Omega)$ *é espaço de Banach* $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ *é espaço de reflexivo* $1 < p < \infty$ *e separável para* $1 \leq p < \infty$. $W^{1,2}(\Omega)$ *é espaço de Hilbert separável.*

Consultar Proposição 9.1, página 264 de [7].

A.2 Resultados Auxiliares

Definição A.2. *Dizemos que* $K \subset L^1([a,b],X)$ *é uniformemente integrável se, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\int_E \|f(t)\|_X \, dt < \varepsilon,$$

para todo E *mensurável em* $[a,b]$ *tal que* $m(E) < \delta$ *e* $f \in K$.

Lema A.1 (Grönwall)**.** *Consideremos* a *e* b *reais tais que* $a < b$. *Seja* $m \in L^1(a,b;\mathbb{R})$ *tal que* $m \geq 0$ *quase sempre em* (a,b), *e seja ainda* $\alpha \geq 0$ *constante. Se* $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \int_a^t m(s)\phi(s)\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in [a,b]$. *Então,*

$$|\phi(t)| \leq \alpha + \int_a^t m(s)\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in [a,b]$.

Lema A.2 (Grönwall- Bellman)**.** *Consideremos* a *e* b *reais tais que* $a < b$. *Seja* $m \in L^1(a,b;\mathbb{R})$ *tal que* $m \geq 0$ *quase sempre em* (a,b), *e seja ainda* $\alpha \geq 0$ *constante. Se* $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua verificando*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t m(s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

para todo $t \in [a,b]$. *Então,*

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t m(s)\mathrm{d}s},$$

para todo $t \in [a,b]$.

Lema A.3 (Desigualdade de Tartar)**.** *Seja* $p > 2$. *Então, para todo* $a, b \in \mathbb{R}^m$ *com* $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b \rangle \geq \gamma_0 \|a - b\|^p$$

onde γ_0 é positivo e depende apenas de p e de m. Se $1 < p < 2$ então para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$ com $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a-b\rangle \leq \gamma_1 \|a-b\|^p$$

onde γ_1 é positiva e depende apenas de p e de m.

Lema A.4 (Lema Uniforme de Gronwall). *Sejam g, h, y funções localmente integráveis, positivas em $[t_0, +\infty)$ tais que y' é localmente integrável em $[t_0, +\infty)$, e que satisfazem*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leq gy + h, \qquad \textit{para } t \geq t_0,$$

$$\int_t^{t+r} g(s)\,ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)\,ds \leq a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s)\,ds \leq a_3, \qquad \textit{para } t \geq t_0$$

onde r, a_1, a_2 e a_3 são constates positivas. Então

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) e^{a_1}, \qquad \textit{para todo } t \geq t_0.$$

Definição A.3. *Sejam X espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em X. Dizemos que x_n converge fracamente para um $x \in X$, e denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, se*

$$\langle f, x_n\rangle_{X',X} \to \langle f, x\rangle_{X',X}, \textit{ quando } n \to \infty, \forall f \in X'.$$

Proposição A.2. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Temos que:*

(i) *se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$.*

(ii) *se $x_n \rightharpoonup x$ então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

(iii) *se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|f_n - f\|_{X'} \to 0$ então $\langle f_n, x_n\rangle_{X',X} \to \langle f, x\rangle_{X',X}$.*

Consultar [7], página 58, Proposição 3.5.

Teorema A.2. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, $A \subset X$ um convexo fechado, não-vazio e $\varphi : A \to (-\infty, +\infty]$ uma aplicação convexa, semicontínua inferiormente, $\varphi \not\equiv +\infty$ tal que*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Então φ atinge seu mínimo em A, isto é, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \min\{\varphi(x) : x \in A\}$.

O Teorema acima está em [7], página 71, Corolário 3.23. O próximo resultado é o Corolário 4.23, página 109 de [7].

Corolário A.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Teorema A.3. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^p e $f \in L^p$ tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tais que:

(i) *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω,*

(ii) *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo k e quase sempre em Ω.*

Consultar [7], página 94, Teorema 4.9.

Proposição A.3. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E está imerso continuamente em F. Então F' está imerso continuamente em E'.*

Teorema A.4. *Assuma que E é espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em E.*

Consultar o Teorema 3.18 de [7], página 69.

Teorema A.5 (Eberlein-Šmulian)**.** *Assuma que E é espaço de Banach tal que toda sequência, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em E, admite uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em E. Então E é reflexivo.*

Proposição A.4. *Assuma que E é espaço de Banach reflexivo e seja $M \subset E$ um subespaço linear fechado de E. Então M é reflexivo*

Ambos os resultados acima são de [7], página 70.

Definição A.4. *Um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é uniformemente convexo se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$ forem tais que $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$, então*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Teorema A.6. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Todo espaço de Hilbert é reflexivo, pois todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo.

Proposição A.5. *Assuma que E é um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ em E e*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então, $x_n \to x$ forte.

Consultar a Proposição 3.32 de [7], página 78.

Lema A.5. *Seja y uma função absolutamente contínua positiva em $(0, +\infty)$ que satisfaz*

$$y' + \gamma y^q \leq \delta$$

com $q > 1$, $\gamma > 0$ e $\delta \geq 0$. Então, para todo $t \geq 0$

$$y(t) \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} + (\gamma(q-1)t)^{-\frac{1}{q-1}}$$

O Lema acima pode ser encontrado em [14], na página 163. O próximo teorema pode ser encontrado em [11], página 58.

Teorema A.7. *Sejam A_0, A e A_1 espaços de Banach, com A_0 e A_1 reflexivos tal que A_0 imerso compactamente em A e*

$$A_0 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_1.$$

Considere ainda $W = \{v \in L^{p_0}(0,T;A_0); \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;A_1)\}$, com p_0 e p_1 em $]1,\infty[$. Então W está imerso compactamente em $L^{p_0}(0,T;A)$.

Teorema A.8 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja X um espaço métrico. Um $K \subset C([a,b];X)$ é relativamente compacto se, e somente se, K é equicontínuo em $[a,b]$ e existe $D \subset [a,b]$ denso tal que para cada $t \in D$ temos $K(t) := \{f(t) : f \in K\}$ relativamente compacto em X.*

Esse Teorema está em [9], página 7, e pode ser demonstrado de modo análogo ao Teorema 2.3.1, de [9], página 45.

Bibliografia

[1] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson, *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, New York, Springer (2010).

[2] A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, T. Dlotko, *Global attractors for problems with monotone operators*, Boll. Un. Mat. Ital. B (8) 2 (2000) 693-706.

[3] A. N. Carvalho, *Sistemas dinâmicos não-lineares,* Notas de aula, ICMC, São Carlos(2012).

[4] A. Rodríguez-Bernal, *Localized spatial homogenization and large diffusion*, SIAM Journal of Mathematical Analysis 29 (1998) 1361-1380.

[5] A.T. Plant, *Four Inequalities for monotone gradient vector fields*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (4) (1983) 377-389.

[6] F. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc, (1963) 862-874.

[7] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differencial Equations*, Springer, New York, 2011.

[8] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1973).

[9] I.I. Vrabie, *Compacteness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, London, 1987.

[10] J. K. Hale, *Asymptotic Behavoir of Dissipative Systems* , AMS, Providence, R.I., 1988.

[11] J. L. Lions, *Quelques Méthods de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris(1969).

[12] J.W. Cholewa, T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[13] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge University Press (1991).

[14] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York (1988).

[15] V. Barbu, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*, Mathematics in science and engineering, v.189 (1993).

[16] V.L. Carbone, C.B. Gentile, K. Schiabel-Silva, *Asymptotic properties in parabolic problems dominated by p-Laplacian operator with localized large diffusion*, Nonlinear Analysis 74 (2011) 4002-4011.