UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LEONARDO TARTAGLIA FILHO

Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula

SÃO CARLOS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

LEONARDO TARTAGLIA FILHO

Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS
2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T193t

Tartaglia Filho, Leonardo
Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula / Leonardo Tartaglia Filho. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
138 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Engenharia didática. 3. Oficinas. 4. Folhas de atividades. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Leonardo Tartaglia Filho, realizada em 26/10/2016:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

Érica Filletti

Prof. Dr. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Prof. Dr. Renato Jose de Moura
UFSCar

A minha família por acreditar nos meus projetos, dando todo o apoio necessário para que tenham êxito.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me garantir saúde para desenvolver meu trabalho com tranquilidade.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio, pela paciência e competência, oportunizando materiais valiosos para meu estudo.

Aos meus pais Leonardo Tartaglia e Octília Januário por serem exemplo de vida.

Aos meus companheiros Rafael Thomé e Matheus Belluca Escobedo, por me ajudar nas horas de maior dificuldade.

Aos professores do curso, por me passarem conhecimentos necessários para minha conclusão.

Ao meu amigo Ricardo Martins por me indicar este curso, e me fazer companhia nas viagens até a universidade.

A minha irmã Lucélia Tartaglia por disponibilizar o seu precioso tempo para realizar a correção do texto desta dissertação.

Em especial à minha mulher Mariana Fernandes da Costa pela paciência e total apoio nessa caminhada, e meu filho Raul José Fernandes Tartaglia, que na maioria dos dias ficou sem minha companhia para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

RESUMO

O currículo oficial do estado de São Paulo em seu caráter espiral, aborda o Teorema de Pitágoras como uma de suas situações de aprendizagem para o 9° ano do ensino fundamental, e em cima desse conteúdo, contextualiza o tema em diversas outras oportunidades no ensino médio, sendo uma das teorias mais frequentes na parte da geometria euclidiana. O trabalho contribui na criação de habilidades e competências necessárias para a interpretação da geometria, que tem aparente ou não a figura do triângulo retângulo, com o objetivo de dar ferramentas para que o aluno construa conhecimentos necessários, a fim de encontrar soluções aos problemas propostos pelo caderno do aluno, que é a base curricular para todos os estudantes da rede estadual de ensino paulista. As atividades, em forma de oficinas e folhas de atividades, propostas pelo desenvolvedor dessa dissertação, foram aplicadas para 35 alunos do 9° ano do ensino fundamental da Escola Estadual Pedro Bento Alves, situada na região central da cidade de Arandu, estado de São Paulo, a qual tem em seu quadro discente 800 alunos, divididos de maneira disforme em 22 salas de aula. Nas folhas de atividades o autor fez a proposta de demonstrações para o Teorema de Pitágoras através do trabalho manual, que acredita ter efeito mais significativo para os alunos. Os resultados foram analisados e comparados com as hipóteses levantadas previamente durante a fase de preparação e criação da dissertação, tendo a Engenharia Didática como metodologia principal de investigação e análise dos dados. As aulas propostas tiveram um bom desenvolvimento, pois os alunos se portaram como protagonistas das ações, mostrando-se motivados e participativos durante a execução das atividades. Os alunos atingiram os objetivos propostos, entendendo que o material desenvolvido proporcionava uma rotina diferenciada, na forma com que foi aplicado, e com isso concluo que as folhas de atividades poderão ser úteis a todos os professores que queiram desenvolvê-las em suas aulas, adaptando-as conforme realidade, rendimento e aproveitamento de seus alunos.

O trabalho contribuiu muito para o desenvolvimento profissional do autor, uma vez que repensar estratégias e buscar novas atividades através de pesquisas, elevou o nível de conhecimento sobre o tema, que propiciou novas práticas em sala de aula.

Palavras chave: Teorema de Pitágoras. Engenharia Didática. Oficinas. Folhas de atividades.

ABSTRACT

The official curriculum of the state of São Paulo in their spiral character, discusses the Pythagorean Theorem as one of their learning situations for the 9th year of elementary school, and on top of that content, contextualizes the topic in several other opportunities in high school, one of the most common theories in the Euclidean geometry. The work contributes in the creation of skills and competencies necessary for the understanding of geometry, which is apparent or not the figure of the right triangle, with the aim of providing tools for students to build knowledge necessary in order to find solutions to the problems posed by notebook student, which is the basic curriculum for all students of the state of São Paulo school. The activities, as workshops and activity sheets, proposed by the developer of this dissertation were applied to 35 students of the 9th grade of elementary school of the State School Pedro Bento Alves, located in central city of Arandu, state of São Paulo, which has in its framework students 800 students, divided shapeless way in 22 classrooms. Through the activity sheets, the author made the draft statements for the Pythagorean Theorem through manual labor, which believes it has a more significant effect to the students. The results were analyzed and compared with the assumptions previously raised during the preparation and creation of the dissertation, and the Didactic Engineering as the main research methodology and data analysis. Proposals classes had a good development because students behaved as protagonists of actions, being motivated and participative during the execution of activities. Students reached the proposed objectives, understanding that the material developed provided a different routine, as it has been applied, and thus conclude that the leaves of activities will be useful to all teachers who want to develop them in their classes, adapting -the as reality, performance and utilization of their students.

The work contributed greatly to the professional development of the author, since rethink strategies and pursue new activities through research, raised the level of knowledge on the subject, which provided new practices in the classroom.

Keywords: Pythagorean Theorem. Didactic Engineering. Workshops. Activity sheets.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Teorema de Pitágoras começa a ser abordado nos anos finais do ensino fundamental, mais precisamente no 9° ano, que aparece como uma situação de aprendizagem do caderno do aluno, material disponibilizado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE).

A Matriz de Avaliação processual, em seu encarte voltado ao professor, determina que a habilidade exigida para esse conteúdo é a de aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações-problema. Entendendo que os materiais fornecidos pela SEE não suprem todas as necessidades do professor, o autor foi motivado a elaborar um conjunto de atividades com finalidade de criar ferramentas que possam auxiliar o docente na melhor execução do tema.

No ensino médio o teorema volta a aparecer, pois o Currículo Oficial do Estado de São Paulo foi montado no formato espiral, modelo de ensino em que o mesmo tema é visto em diversos anos/séries, com diferentes níveis de aprendizagem, permitindo que o professor não esgote todo o conteúdo de uma só vez.

Sobre o currículo, a Matriz de Referência para a Avaliação em processo descreve que:

> O currículo constitui orientação essencial para o trabalho do professor em sala de aula. Por esse motivo, a Secretaria de Estado de Educação de São Paulo (SEE), no intuito de propiciar mais e melhor aprendizagem às crianças e jovens de sua rede de ensino, elaborou, a partir de 2008, o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, que contém as referências curriculares para os anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. (Matriz de Avaliação processual, 2016, p.8)

Além do caderno do aluno fornecido pelo estado, o governo federal, através da Fundação para o Desenvolvimento da Educação (FDE), disponibiliza o livro didático, baseado na Matriz de Referência Nacional.

Apesar de terem características oficiais, os materiais distribuídos não seguem a mesma metodologia de ensino, uma vez que utilizam abordagens distintas e alguns conteúdos divergem em relação ao ano a serem empregados.

Observando esse fato, o governo federal está criando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tem como objetivo orientar os sistemas na elaboração de suas propostas curriculares, garantindo o direito à aprendizagem e ao desenvolvimento dos estudantes da educação básica.

O objetivo desta dissertação é propor uma sequência de aulas diferenciadas sobre o Teorema de Pitágoras, que serão aplicadas através de oficinas, sendo constituídas por folhas de atividades preparadas de acordo com a engenharia didática, método que exige a produção através de um sólido conhecimento científico, e enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia. (Carneiro, 2005, p. 2).

É importante salientar que as atividades propostas tendem a evitar aulas expositivas, pois segundo os PCNs:

> Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante. (BRASIL, 1998, p. 53)

O conteúdo a ser aplicado nas aulas foi meticulosamente testado previamente, para que o professor tivesse a noção do caminhar das atividades propostas, dos problemas de execução e se o objetivo estava sendo claramente atingido.

Inicialmente, o autor tinha a ideia de formular um material mais sólido, embasado em demonstrações formais, que obedeceriam ao rigor matemático, porém após análise da sala de aplicação, resolveu criar um material em que o aluno pudesse manusear, construindo seu próprio conhecimento em relação ao tema.

As atividades foram separadas em cinco oficinas, sendo necessárias duas semanas para a aplicação, transcorrendo com naturalidade, pois os alunos se portaram de maneira adequada.

A seguir faremos uma descrição sobre os capítulos desse trabalho.

O Capítulo 1 traz um breve relato sobre o surgimento da matemática grega, ressaltando ícones como Tales, Euclides e Pitágoras, sendo que o último, por estar intimamente ligado ao tema principal da dissertação, teve uma descrição mais detalhada a seu respeito. Em seguida apresentaremos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras encontradas em textos que tentam descrever a história da matemática da maneira mais realista possível, dando ênfase à criada por Euclides, que em virtude da grandiosidade de sua publicação, feita em *Os elementos*, mereceu ser colocada na íntegra e ser comentada. Para finalizar, é proposto uma contextualização da matemática, levando em conta o ensino fundamental atual.

O Capítulo 2 se refere à Metodologia de Pesquisa. Neste trabalho é a Engenharia Didática que norteia sua construção, sendo que seu método experimental criado na década de 80 pela educadora francesa Michèle Artigue, especifica como deve ser feita uma dissertação baseada nas experiências de sala de aula, em conjunto com prática de investigação. Para a descrição de suas etapas foi utilizado o texto Matemática na Prática (Dias, 2013), cujo a finalidade principal é auxiliar alunos na busca da melhor descrição dos resultados encontrados em trabalhos acadêmicos.

O capítulo 3 é composto pela descrição das cinco oficinas a serem desenvolvidas em sala de aula, cujo produto de ensino foi elaborado através de folhas de atividades, retratando seus propósitos e expectativas do autor em relação aos resultados a serem obtidos.

O capítulo 4 retrata os acontecimentos ocorridos durante as aplicações das atividades no 9° ano C do Ensino Fundamental da Escola Estadual Pedro Bento Alves da cidade de Arandu-SP. Este capítulo pode ser considerado um teste para as oficinas, indicando através de descrições e porcentagens, os dados levantados pelo autor, formulando um material de pesquisa valioso para os profissionais que queiram desenvolver alguma atividade relacionada ao tema.

O capítulo 5 é proposto sobre o formato de uma conclusão ao trabalho. Na visão do autor, essa conclusão foi de grande valia, uma vez que os objetivos propostos, inicialmente, foram alcançados, pois os alunos desenvolveram o caráter investigativo e formaram conhecimentos significativos em relação ao tema abordado. É possível afirmar que o produto de ensino, produzido pelo autor, supriu uma lacuna deixada pelos materiais disponibilizados aos professores, apresentando o Teorema de Pitágoras de maneira clara e objetiva para os alunos.

A introdução é finalizada contendo o relato de que o trabalho foi desenvolvido, pelo professor, a partir da construção de um material inédito, o qual apresenta o Teorema de Pitágoras de maneira diferenciada, onde o aluno no centro das ações, manuseia e cria alternativas para a resolução das situações propostas.

1. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Ao procurarmos sobre o surgimento da geometria, podemos ouvir uma velha história que retrata a ideia de que tenha vindo das margens do rio Nilo, pois em muitas de suas enchentes, os Egípcios encontravam a necessidade de redistribuição das terras, para que os donos não fossem prejudicados pelas inundações.

Esse conhecimento pode ter migrado para os gregos, que viviam ao longo da costa do Mediterrâneo, uma vez que com a abertura do caminho até o mar, na busca por mercadorias, tiveram o desejo de aprender o conhecimento local, e logo trataram de melhorá-lo.

Tales de Mileto, um dos mais importantes matemáticos dessa nova escola grega, foi influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios, obtendo informações privilegiadas de como trabalhar com a astronomia e matemática, chegando a calcular a altura de uma das pirâmides do Egito, utilizando apenas a aplicação de semelhança de triângulos, comparando sua altura e sombra, com a altura e sombra da pirâmide.

A diferença entre a matemática mesopotâmica e egípcia, com a que foi migrada para os gregos e modificada com o tempo, é que a primeira se utilizava de cálculos de área e volume e os gregos foram aperfeiçoando para um modelo conceitual, solidificado por argumentações consistentes e demonstrações. Assim, a tão conhecida matemática grega foi começando a ser remodelada, com o surgimento das polis, cidade-estado, que deu direito ao cidadão de comandar sua cidade, e por esse motivo necessitava do poder de persuasão, para que o mesmo conseguisse impor suas teses.

Nesse momento, houve confusão na busca do que era verdadeiro. Coube a Aristóteles e Platão propor modelos e maneiras de expor afirmações, as quais seriam consideradas corretas, sendo que necessitavam passar pela oposição e a contradição dos argumentos, uma ideia que se fazia presente nos discursos de Sócrates, conhecida como dialética.

Com a criação lógica, Aristóteles criteriosamente interligou a verdade com o rigor das demonstrações, sendo que as conclusões deveriam ser provenientes do que fosse dita previamente, sem incorrer a contradição. (Tópicos de História da Matemática, Roque/Pitombeira, Rio de Janeiro, p.94.).

A escola pitagórica surgiu como uma transição entre a matemática de Tales e Euclides, sendo obscurecida pela publicação de Os Elementos de Euclides, tendo seu material descartado, logo perdido em virtude do esquecimento, vindo a ser escrita através de manuscritos e relatados tempo depois. (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p.96.).

Tendo o Teorema de Pitágoras como tema principal dessa dissertação, cujo mesmo leva o nome de seu criador, não seria justo se aqui não incluíssemos uma abordagem especial em torno de sua vida e obra, a qual segue na seção 1.1.

1.1. Vida e obra de Pitágoras

Pitágoras foi um matemático grego, tendo sido também líder religioso, místico, sábio e filósofo. Viveu em torno de 570 a.C. e morreu no início do século V a.C. Nasceu na Ilha de Samos, localizada nas costas da Ásia Menor. Nessa época Samos era uma cidade considerada cidade-estado mercantil, talvez por este motivo, a vida intelectual de Pitágoras ficou delimitada e o fez deixar a sua cidade natal.

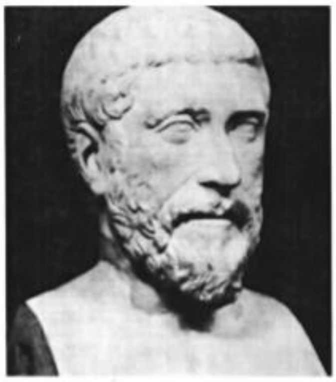
Assim, ainda bem jovem ele mudou para a ilha de Lesbos, onde estudou filosofia por cerca de dois anos. Depois foi enviado para Mileto, uma cidade antiga do mundo grego, e lá estudou com Tales, o maior sábio da época, que impressionado com o conhecimento do aluno, passou a estudar suas descobertas de Geometria e Matemática.

A fim de buscar novos conhecimentos, Pitágoras viajou pela Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito. E foi no Egito, onde morou por mais de vinte anos, que observando as pirâmides, desenvolveu o importante “Teorema de Pitágoras”. De acordo com este teorema é possível calcular um lado do triângulo retângulo, conhecendo os outros dois. Desta forma, ele conseguiu provar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Ao Teorema de Pitágoras, além de ser uma fórmula para calcular a medida do lado de um triângulo retângulo, pode-se atribuir a ele, base para outros conhecimentos que vieram a ser desenvolvidos futuramente. Inclusive, a definição dos números irracionais só foi possível por este teorema.

Depois disso, Pitágoras voltou a Samos, com a finalidade de se dedicar ao ensino. Devido ao desinteresse pelo saber dos sâmios e somado a situação da política local, levou-o a emigrar mais uma vez. Desta vez seguiu para o sul da Itália, em Crotona. Nesta cidade fundou a Ordem (Escola) pitagórica. Segundo historiadores, a Escola Pitagórica tinha um caráter peculiarmente duplo. De um lado, dedicava-se a questões espirituais, como por exemplo, a imortalidade da alma. Por outro lado, como parte desta espiritualização, incluía estudos de Matemática, Astronomia e Música. Uma escola que, apesar de seu misticismo, iria ter uma influência muito grande nos rumos da ciência e da filosofia, e em especial da matemática, uma vez que os Pitagóricos chegaram à razoável conclusão, em seus estudos, de que "tudo são números". Essa afirmação parece ter sido fortemente influenciada por uma descoberta importante da Escola Pitagórica, a explicação da harmonia musical através de frações de inteiros.

Por volta de 500 a.C., quando a escola atingiu o auge do seu esplendor, Pitágoras foi obrigado a fechá-la, sob a acusação de apoiar a aristocracia, contrária ao governo. Então teve que se refugiar em Metaponto, cidade em que permaneceria até a sua morte.

Suas influências nos estudos futuros da matemática foram enormes, pois foi um dos grandes construtores da base dos conhecimentos matemáticos, geométricos e filosóficos que temos atualmente, tornando-o uma personalidade ímpar, principalmente pelos teoremas que sua escola presenteou nossa humanidade.



Pitágoras (Coleção David Smith)

Figura 1: Pitágoras (Coleção David Smith).

1.2. O Teorema de Pitágoras

Tradicionalmente, quando descrevemos a proposição do teorema de que em todo triângulo retângulo, o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos, fazemos referência de sua criação a Pitágoras, devido à crença de ter disponibilizado a primeira demonstração geral. Sobre qual foi essa demonstração e se realmente foi criada por Pitágoras, não podemos afirmar, pois não existem documentos que comprovam se existiu. Muito provavelmente, pode ter sido uma demonstração por decomposição, como mostra a figura 2 (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p.103.).

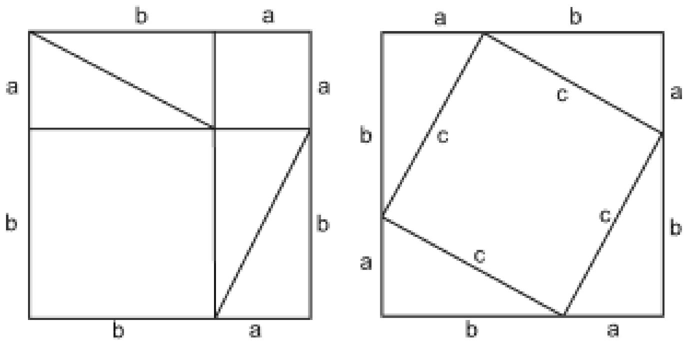


Figura 2: Ilustração da demonstração por decomposição, (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p.103).

Podemos realizar através das figuras uma demonstração sem palavras, onde propomos dois quadrados de mesmo lado $a + b$ (Figura 2), e após a obtenção das áreas das figuras, subtraímos $2ab$ (ou as áreas dos quatro triângulos retângulos) dos dois lados da igualdade, obtendo assim a expressão $a^2 + b^2 = c^2$.

Ou podemos demonstrar de modo algébrico, como está feito abaixo:

$$a^2 + b^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = c^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 + \frac{4ab}{2} = c^2 + \frac{4ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

O certo é que ao longo do tempo muitas demonstrações foram criadas, e que o tema foi ganhando repercussão, podendo ser encontrada em toda a história da matemática, inclusive existem relatos que indicam que os Babilônicos conheciam o teorema muito antes da criação da escola pitagórica.

Grandes nomes da matemática utilizaram de sua genialidade para produzir demonstrações sobre o Teorema de Pitágoras, que foi considerado por Kepler, como um dos dois tesouros da geometria. (História da matemática, Boyer, 2010, p.35).

Com isso, vamos mostrar algumas figuras das mais conhecidas, encontradas no livro Introdução à História da Matemática (EVES), e fazer pequenas observações sobre elas:

1.2.1. Tabua de Plimpton (1900 a 1600 a.C.)

Podemos iniciar com uma das tábuas matemáticas babilônias, denominada Plimpton 322, que faz parte da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia.

Plimpton 322 (Universidade de Colúmbia)

Figura 3: Plimpton 322 (Universidade de Colúmbia) (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p.65).

A tábua conta com três colunas inteiras de números, sendo que a da extrema direita se refere a numeração das linhas, as outras duas com exceções, indicam valores para a hipotenusa e um dos catetos do triângulo retângulo. Existe uma quarta coluna incompleta ao longo do lado quebrado, que o livro faz uma reconstrução (Figura 4), formando alguns ternos pitagóricos. (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p. 64.).

a	*b*	*c*	*u*	*v*
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13 500	12 709	18 541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Figura 4: Ternos pitagóricos, adaptação de Plimpton 322 (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p.65).

Este fato, sugere que os mesopotâmicos talvez conhecessem o teorema antes de Pitágoras, pois é um material de, pelo menos, mil anos antes de sua existência.

1.2.2. Chóu-peï (anterior a dinastia Huan 202 a.C.)

O Chóu-peï é um livro da literatura chinesa, que retrata um diálogo entre um príncipe e seu ministro sobre o calendário, mais especificamente se refere a cálculos astronômicos, e uma pequena parte de sua constituição é matemática, fazendo uma introdução sobre o estudo dos triângulos retângulos e frações. A figura 5 apresenta um caso do Teorema de Pitágoras (para um triângulo de catetos 3 e 4), que os chineses tratavam algebricamente. (Boyer, História da Matemática, 3ª edição, p.133).

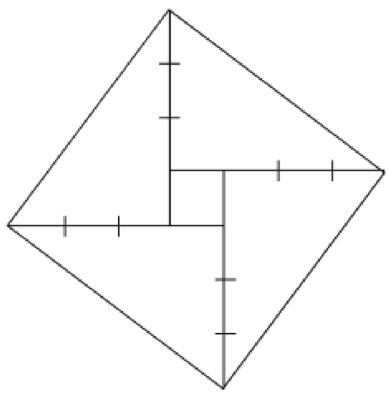


Figura 5: Triângulo 3,4,5. (Introdução à História da Matemática, EVES, Campinas, p.87).

1.2.3. "Veja! " A demonstração por Bhaskara.

Uma demonstração sem palavras? Sim, foi a maneira que Bhaskara (séc. XII) utilizou para propor o Teorema de Pitágoras. Por achar algo óbvio, o matemático ofereceu a ilustração da Figura 6, e não deu nenhuma explicação a respeito, apenas proferiu a palavra "veja!".

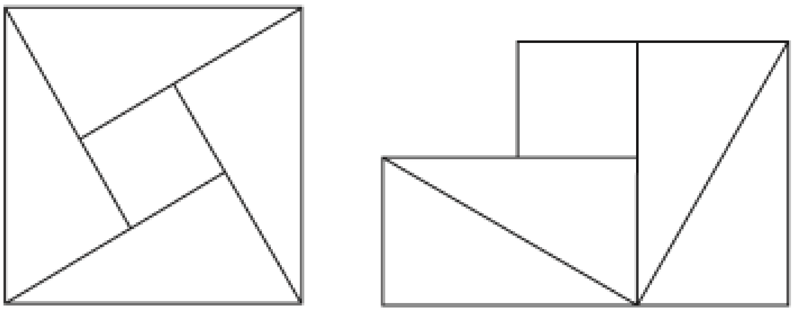


Figura 6: Imagem utilizada para a demonstração sem palavras de Bhaskara. (Introdução à história da matemática, EVES, Campinas, p.258).

Se fizermos uma pequena análise e aplicarmos um pouco de álgebra, conseguiremos concluir a demonstração de maneira tranquila. Como é indicada no livro de Howard Eves.

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = a^2 + b^2.$$

Bhaskara também recebeu os louros por uma outra demonstração, onde é feita traçando a altura relativa a hipotenusa, e a partir dos três triângulos semelhantes (figura 7), podemos fazer a conclusão.

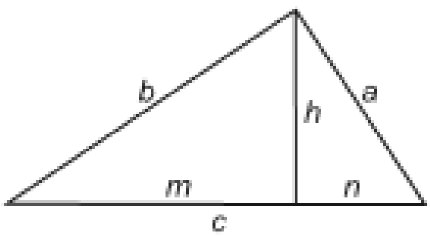


Figura 7: Imagem da segunda demonstração feita por Bhaskara. (Introdução à história da matemática, EVES, Campinas, p.259).

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{m}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{a}{n}$$

$$cm = b^2, cn = a^2$$

Após a soma dos membros obtemos:

$$a^2 + b^2 = c \cdot (m + n) = c^2$$

O número de demonstrações do Teorema de Pitágoras já passa de 370, como mostra a segunda edição do livro The Pythagorean Proposition, do autor E.S. Loomis. O próximo tópico traz uma demonstração do teorema feita no livro *Os Elementos,* de Euclides.

1.2.4. Demonstração do teorema de Pitágoras por Euclides.

Talvez, uma das demonstrações mais conhecidas do Teorema de Pitágoras, seja a feita por Euclides, em *Os Elementos*, que é uma série de treze livros constituindo um tratado matemático e geométrico. Nesses livros o autor traz inúmeras definições, axiomas, proposições e provas para suas proposições. O teorema é encontrado na proposição quarenta e sete do primeiro livro, e utiliza as seguintes ferramentas propostas e demonstradas anteriormente por ele:

O material a seguir foi retirado do livro (Euclides, Elementos de Geometria, Frederico Commandino São Paulo: Edições Cultura, 1944).

> Definição. XXX. Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é juntamente equilátero e retângulo.
> Axioma II. Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
> Axioma VI. As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais.
> Proposição IV. Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.
> Proposição XIV. Se em um ponto de uma linha reta qualquer concorrerem de partes opostas duas retas, fazendo com a primeira reta os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas, que concorrem para o dito ponto, estarão em direitura uma da outra.
> Proposição XXXI. De um ponto dado conduzir uma linha reta paralela a outra linha reta dada.
> Proposição XLI. Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo.
> Proposição XLVI. Sobre uma linha reta dada descrever um quadrado. (Euclides, Elementos de Geometria, Frederico Commandino, São Paulo, 1944).

A proposição a seguir retrata como Euclides descreveu o Teorema de Pitágoras:

> Proposição XLVII. Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto (Fig. 1.8.). (Euclides, Elementos de Geometria, Frederico Commandino, São Paulo, 1944).

Demonstração feita por Euclides em *Os Elementos* livro I:

> Seja o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo reto seja BAC. Digo que o quadrado feito sobre o lado BC é igual aos quadrados descritos sobre os lados BA, AC, que formam o ângulo reto BAC.
> Descreva-se sobre BC o quadrado BDEC (Pr. LXVI), e sobre BA, AC os quadrados GB, HC. Pelo ponto A tirasse AL, paralela (Pr. XXXI) a BD, ou CE, tirem-se também as retas AD, FC. Porque os ângulos BAC, BAG são retos (Def. XXX), as duas retas CA, AG estão em direitura uma com outra (Pr. XIV). O mesmo será a respeito das duas AB, AH.
> Os ângulos DBC, FBA, por serem retos, são iguais. Ajuntasse-lhes o mesmo ângulo ABC. Logo, o total DBA será igual ao total FBC (Ax. II). E sendo as duas AB, BD iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma, e o ângulo DBA = FBC, será o triângulo ABD = FBC outro triângulo (Pr. IV). Mas o paralelogramo BL é o dobro (Pr. LXI) do triângulo ABD, porque está sobre a mesma base BD, e entre as mesmas paralelas BD, AL; e o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC, porque tem a base comum FB, e estão entre as mesmas paralelas FB, GC. Logo, sendo iguais os dobros de quantidades iguais (Ax. VI), deve ser o paralelogramo BL igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, tiradas as retas AE, BK, se demonstra, que o paralelogramo CL é igual ao quadrado HC.
> Logo, o quadrado inteiro BDEC, feito sobre o lado BC oposto ao ângulo reto BAC, é igual aos dois quadrados GB, HC formados sobre os lados BA, AC, que fazem o mesmo ângulo reto BAC.

Podemos observar, que a demonstração feita por Euclides não usa proporcionalidade. Todos os passos utilizados são realizados através da equivalência de áreas. Diferentemente das demonstrações para o teorema que encontramos hoje, nos livros didáticos, que se utilizam de artifícios algébricos, fazendo o uso das propriedades métricas do triângulo retângulo e semelhança, deixando de lado o caráter geométrico do teorema (Tópicos de História da Matemática, Roque/Pitombeira, Rio de Janeiro, p.94.).

A ideia utilizada por Euclides é bastante simples, pois usa o artifício de que se mantermos a base AB, de um triângulo construído sobre duas retas paralelas AJ paralelo a HB (Figura 8), a área desse triângulo não se altera, e sendo assim se pegarmos o ponto J, do triângulo AJH, e conduzi-lo para o ponto B, temos que o triângulo AJB=AJH, que tem a metade da área do quadrilátero AJHC.

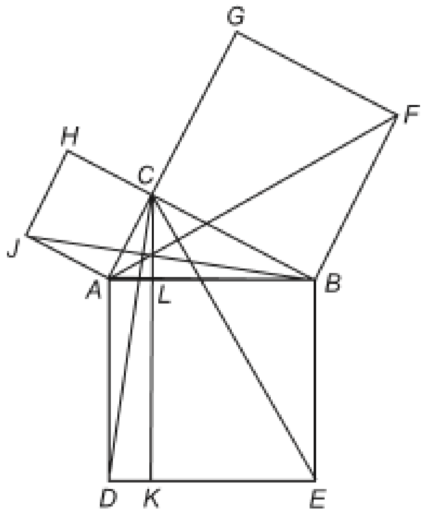


Figura 8: Capelo franciscano. Introdução à história da matemática, EVES, Campinas, p.182.

Agora, girando o triângulo JAB em torno do ponto A, até que JA coincida com AC, obtemos então o triângulo ACD, igual a JAB. Em seguida, deslocando o ponto C sobre a reta CK, até chegar ao ponto de interseção de CK com AB, mais precisamente o ponto L, obtemos um triângulo que é a metade do retângulo ALKD.

Com isso, temos que o quadrado ACHJ, é igual ao retângulo ALKD.

Se procedermos de maneira semelhante com o triângulo ABF, chegamos à conclusão desejada. (Tópicos de História da Matemática, Roque/Pitombeira, Rio de Janeiro, p.94.)

1.3. A matemática e sua contextualização.

Contextualizar a matemática é um grande desafio para a educação, principalmente em uma disciplina considerada abstrata por natureza. Por esse motivo, profissionais ligados às ciências exatas buscam, incessantemente, atividades voltadas para a transição do conceitual para o concreto.

Devemos estar atentos para essa transição, pois não podemos perder a essência do raciocínio e o pensamento lógico, tão importantes para o desenvolvimento da disciplina.

O professor não pode marginalizar situações e ter a falsa impressão de que o aluno assimilou o conteúdo. Qual criança que esteja frequentando o ensino fundamental não consegue dividir três tabletes de chocolate para duas pessoas? Mais esta habilidade inata, nos deixa longe de afirmarmos que ele está preparado para trabalhar com números racionais, por exemplo.

Ensinar conceitos básicos, como ponto e reta, pode se transformar em uma experiência nada gratificante, se depararmos com alunos que não estejam preparados para assimilar centenas de anos de estudos, onde as ideias podem não estar dispostas em uma ordem lógica para a sua assimilação.

No livro Tópicos de História da Matemática (Roque/Pitombeira), os autores sugerem uma ordem lógica que deveria ser apresentado o Teorema de Pitágoras:

> Definição 1: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.
> Definição 2: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado "hipotenusa" e os outros dois chamados de "catetos".
> Teorema: Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
> Problema: Desenho um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e pergunto o comprimento da hipotenusa.

Os autores têm a sensibilidade de iniciar com as definições, alicerçando a construção, para depois descrever o teorema, pois as demonstrações poderão fazer uso das definições, e logo em seguida utilizam a aplicação através de situações problemas.

Se procurarmos em diversos materiais didáticos, disponibilizados para professores da rede estadual de ensino do estado de São Paulo, podemos comprovar que os artifícios utilizados não seguem essa mesma proposta. No livro Projeto Arariba, da editora Moderna, a responsável Mara Regina Garcia Gay retrata o tema através de observações entre a figura de um triângulo retângulo e a nomenclatura de seus lados, seguindo da descrição do teorema e um exemplo, que é retratado através de uma aplicação. Mais adiante faz uma demonstração do teorema que envolve a comparação entre áreas dos quadrados.

Já no caderno do aluno, disponibilizado pela secretaria da educação do estado de São Paulo, as definições sequer estão disponíveis para o acesso do aluno, ficando a cargo do professor responsável fazer as colocações. O material é um caderno de exercícios, sendo que alguns têm como objetivo comprovar resultados históricos, como a demonstração através de proporção que aparece nos exercícios 3 e 5, da situação de aprendizagem 2, do caderno do aluno volume 2.

O certo é que o profissional que está à frente de uma sala de aula, recebe materiais com métodos variados de aplicação e deve colocar sentido para aquele conteúdo, encontrando a melhor maneira para a sua aplicação. O problema é que o professor não é um pesquisador e detém todo o seu tempo em meio a salas superlotadas, sendo refém do material que lhes é entregue.

Assim, esta dissertação tem como objetivo auxiliar o profissional da sala de aula, disponibilizando atividades que visem contribuir para a construção de habilidades e competências, propiciando métodos diferenciados de enfrentamento do tema, fazendo com que os professores tenham mais opções, na busca de um melhor ensino.

2. METODOLOGIA DE PESQUISA

2.1. Engenharia Didática.

A Engenharia Didática é a metodologia de pesquisa utilizada nesta dissertação. Comparada ao trabalho de um engenheiro, teve seu início na França nos anos 80, criada pela educadora francesa Michèle Artigue. Sua ideia consiste em um esquema experimental em sala de aula, através da concepção, observação e análise do ensino.

A metodologia aplicada deve ser um sistema de operações sucessivas e interdependentes, fazendo a coleta de informações sobre um fenômeno, a fim de explica-los. (CHIZZOTTI, 1991).

O trabalho deve ser bem organizado, contemplando várias competências, como a escrita, análise dos dados, documentação material, etc. (IBID, P.35).

Através da experimentação, podemos confirmar ou refutar uma hipótese, disponibilizando dados para que outros pesquisadores não incorram no mesmo erro, sistematizando uma ação na busca de encontrarmos a melhor maneira para a aplicação.

A pesquisa deve ser um conjunto coordenado de questões que norteiam os objetivos do estudo, embasado em realizações didáticas, concebendo: hipóteses, realização, observação e análise de ensino, com o objetivo de comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori.

A Engenharia Didática é composta por quatro fases, descritas nas seções seguintes.

2.1.1. Análise preliminar.

Por ser considerada a fase de fundamentação da Engenharia Didática, após a escolha do tema, estudamos a origem do conteúdo visado pelo ensino, levantando o método de apresentação e seus efeitos, as dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos e as condições a que são submetidos, com o objetivo da inserção do trabalho nas lacunas deixadas pelo currículo oficial.

2.1.2. Análise a priori de experiências didático-pedagógico.

Segundo Artigue (1988), o pesquisador deverá manipular dois tipos de variáveis potenciais, as macrodidáticas, que se referem a organização global da engenharia, e a microdidática, que é a organização local.

Na análise a priori, deveremos descrever as variáveis locais, entre elas as características da situação didática desenvolvida e sua importância para o aluno. O professor, como mediador do processo, é um fator relevante, pois organizará as situações de aprendizagens para que o aluno construa suas competências.

Outro item desta fase é a previsão do comportamento, pois através dela asseguramos o desenvolvimento do conhecimento, visando a aprendizagem.

2.1.3. Experimentação.

A experimentação é o momento de colocar em prática as atividades desenvolvidas, quando necessário corrigi-las, retornando a análise a priori, para fazer uma complementação. Os dados devem ser levantados, e quando necessário devemos utilizar metodologias externas, como: questionários, entrevistas individuais ou em grupos.

2.1.4. Análise a posteriori.

É a análise feita após o pesquisador ter em mãos os dados recolhidos, sendo que o principal objetivo dessa etapa é a melhoria dos conhecimentos didáticos, comparando os resultados obtidos com a análise feita a priori, indicando se a hipótese foi suficiente para a formulação do conhecimento pelos alunos, ou se a estratégia abordada deverá passar por uma reformulação, com o intuito de preparar o material para uma futura reprodutibilidade.

Outro material utilizado para a dissertação é o texto Matemática na Prática (DIAS), que tem como objetivo principal nortear professores na elaboração de trabalhos sobre práticas de ensino em nível acadêmico.

Esse material tem seu foco na sala de aula e, através da contextualização matemática, quer realizar a aproximação entre o interesse do professor e sua formação científica, unindo o conhecimento do conteúdo com uma ação pedagógica inovadora.

Tendo como parâmetro o Índice de Desenvolvimento do Ensino Básico (IDEB), notamos, em levantamentos recentes, uma taxa de crescimento pouco acelerada na disciplina de matemática. Com a finalidade de mudarmos essa situação a matemática na prática propõe a ideia de uma "aula inédita", onde o profissional da educação matemática utilizará estratégias pedagógicas diferenciadas, na busca de um produto final único, diferente do que esteja acostumado a fazer.

Na dissertação, o guia Matemática na Prática será utilizado como complemento da Engenharia Didática, principalmente fornecendo métodos para a descrição das aulas, estruturando sistematicamente o corpo do trabalho.

O trabalho seguirá cada passo da Engenharia Didática, desde a sua formulação, a busca por resultados e análise dos dados, finalizando com um material consistente. Dando assim, possibilidades ao professor de adaptá-lo a realidade de sua escola, a fim de obter resultados favoráveis na construção do conhecimento.

3. PLANEJAMENTO DAS AULAS INÉDITAS

Esse capítulo tem como meta descrever os procedimentos gerais adotados no planejamento e criação das aulas inéditas. Cada aula terá registros minuciosos sobre seus objetivos e estratégias abordadas, justificando a escolha do assunto e as intenções a serem atingidas.

As folhas de atividades desenvolvidas e utilizadas nas aulas teste das oficinas poderão ser encontradas no **Apêndice A**, as que sofreram alterações decorrentes das aplicações do teste estarão disponíveis no **Apêndice B**, as folhas contendo as respostas esperadas vão estar no **Apêndice C,** e o **Apêndice D** terá em sua composição as folhas que sofreram modificações decorrentes de possíveis falhas encontradas na aplicação.

3.1. Descrevendo as atividades

As oficinas foram feitas em uma sala de 9° ano do Ensino Fundamental, nas duas últimas semanas do mês de junho do ano de 2016. Antes o professor trabalhou, como preparação para a aplicação, casos de congruência de triângulos, manipulações algébricas, conhecimentos básicos do software Geogebra, razão e proporção.

O conjunto de aulas foi dividido em cinco oficinas, onde cada uma estava composta por aplicação de folhas de atividades, traduzindo todas as habilidades e competências necessárias para um bom entendimento do tema.

Os alunos necessitavam, para o início das oficinas, habilidade em construções geométricas, conhecimento sobre cálculo de áreas, noções básicas de equações e informática, assuntos trabalhados previamente.

As folhas de atividades das oficinas 1, 2, 4 e 5, foram preparadas para que o aluno realizasse de maneira individual, mas nada o impedia de que sentasse em grupos, pois o objetivo principal era a construção do conhecimento por parte dos alunos, não importando a maneira com que fosse adquirido.

A oficina 3 foi planejada para ser realizada em trios, pois não havia computadores em número suficiente para a execução de maneira individual. Assim o autor previa que algumas unidades poderiam apresentar falhas no momento da aplicação, em decorrência desse fato.

O tempo de duração das oficinas foi previamente estipulado, sendo que todas deveriam ser finalizadas em 50 minutos, o que corresponde a uma hora aula. Em virtude da dificuldade encontrada pelo aplicador em relação ao tempo estipulado, a oficina 3 teve sua duração alterada para 100 minutos.

Os alunos receberam todas as folhas de atividades impressas e tiveram os materiais extras disponibilizados pelo aplicador. Os computadores utilizados foram os da sala de informática, que contam atualmente com dezoito unidades em pleno funcionamento.

As folhas de atividades, para uma boa diferenciação das outras aplicadas em sala de aula, contêm no cabeçalho os logotipos da UFSCar, universidade em que esta dissertação está sendo defendida, do PROFMAT, programa de mestrado em que o autor está inscrito, da Sociedade Brasileira de Matemática, desenvolvedora do material que o programa de mestrado profissional segue como livro texto e os demais complementos seguem de acordo com a oficina a ser desenvolvida.

Figura 9: Logos comuns a todas as oficinas.

Em seguida, faremos as descrições das oficinas propostas e suas folhas de atividades, que foram criadas seguindo o direcionamento dos textos da Engenharia Didática e Matemática na Prática. O autor optou por descrever várias ações do seu planejamento didático no futuro do presente, por se tratar da descrição de um planejamento didático futuro que, quando redigido, estava sendo proposto.

3.2. Oficina 1 -Instigando o aluno na obtenção do resultado do Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

A primeira aula, oficina 1 – *Instigando o aluno na obtenção do resultado do Teorema de Pitágoras e suas aplicações,* tem em princípio dois objetivos: o primeiro é obter o resultado do Teorema de Pitágoras, através da construção geométrica e cálculo de área e o segundo é a aplicação do resultado encontrado na primeira etapa, procurando dar sentido ao teorema no cálculo da distância de um segmento.

A estratégia segue em aplicar exercícios fazendo que o aluno construa quadrados sobre os catetos, e hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer, calcule as áreas e posteriormente relate o que foi observado com a sequência didática.

As folhas de atividades trazem alguns exercícios produzidos sobre uma malha de pontos, na qual, antecipadamente, é indicada que a distância entre dois pontos consecutivos no sentido horizontal, ou vertical tem uma unidade.

A aula terá duração de 50 minutos e estará dividida em 3 etapas, abaixo relacionadas:

- cálculo de áreas, construções geométricas e relato sobre suas observações;
- construção geométricas, cálculo de áreas, transposição das áreas para uma tabela e relato sobre suas observações;
- cálculo de comprimentos de segmentos através do Teorema de Pitágoras.

O material necessário para a aplicação da aula será:

- lápis de cor;
- lápis de escrever;
- régua;
- calculadora.

A aula foi testada previamente no 8° ano D da Escola Estadual Pedro Bento Alves, que contava com 24 alunos presentes. As folhas de atividades aplicadas na aula teste eram um protótipo, pois o autor queria ter a noção da praticidade dos exercícios e tempo de aplicação.

A aula teste foi concluída perfeitamente e foram encontrados alguns problemas a serem corrigidos pelo autor. O primeiro deles é em relação à pintura dos quadrados, que ocuparam muito tempo da aula, e por esse motivo ficou configurada como atividade extra para os alunos que conseguissem desenvolver as atividades de maneira mais rápida. Outro problema encontrado foi a disposição dos exercícios, que proporcionaram grandes dificuldade na construção do quadrado sobre a hipotenusa.

Tendo isso em vista, o autor achou interessante iniciar com uma construção geométrica pronta, servindo de base para as demais.

As folhas de aplicação da aula teste estão disponíveis no **Apêndice A**, juntamente com as demais folhas aplicadas em outras oficinas.

Nas novas folhas de atividades, os alunos deverão encontrar dificuldades em dissertar sobre suas observações no exercício 2, principalmente por ainda não ter construído um conhecimento sólido sobre o tema. Outro caso poderá ser encontrado na construção proposta no exercício 3, considerada pelo autor como momento crítico da oficina, logo o aplicador deve ter uma atenção especial nestes pontos, interferindo caso haja necessidade, no mais a atividade ocorrerá tranquilamente.

O material produzido deverá compor o caderno do aluno, servindo como material de pesquisa para futuras intervenções.

A avaliação será feita através dos resultados fornecidos pelos alunos nas folhas de atividades, sendo que as mesmas serão recolhidas ao final da oficina e corrigidas pelo professor, o qual fará o levantamento dos dados e a análise a posteriori.

As opiniões a princípio serão coletadas com o andamento da oficina. Ao término da mesma acontecerá uma entrevista com o grupo de alunos, tendo como objetivo analisar se as hipóteses levantadas a priori se confirmam.

O registro da aula será feito através de um caderninho de anotações, sendo acrescentado com fotos tiradas da aplicação e atividades feitas por alguns alunos.

A partir de agora iniciaremos um relato sobre as folhas de atividades que compõem essa oficina.

3.2.1. Folha de atividades 1

A folha de atividades 1 (Apêndice B) traz em sua constituição dois exercícios, com os quais pretendemos habituar o aluno a calcular áreas e proporcionar a visualização do Teorema de Pitágoras de maneira indireta.

O exercício 1 é composto por duas figuras (figura 10), e tem como objetivo a contagem, ou cálculo da área de cada um dos quadrados. O método de contagem utilizado ficará a cargo dos alunos, dando liberdade para desenvolverem a técnica que acharem conveniente.

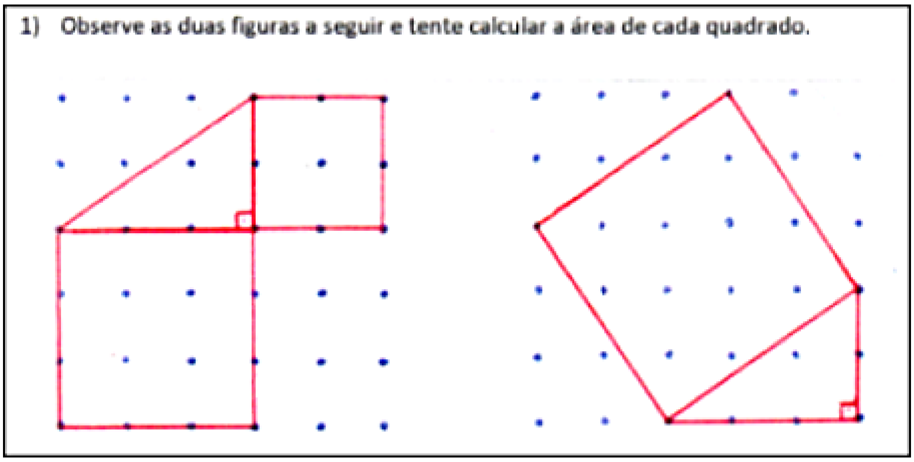


Figura 10: Cálculo da área dos quadrados sobre os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo – Folha de Atividades 1.

Os cálculos das áreas dos quadrados sobre os catetos podem ser considerados simples, pois as figuras estão dispostas de maneira a facilitar sua contagem, podendo ser formado em seu interior quadrados de uma unidade de área como é mostrado na figura 11.

No quadrado sobre a hipotenusa o aluno deverá encontrar dificuldades, principalmente em sua divisão, pois a figura está inclinada, o que atrapalha sua visualização. O interessante é que o aplicador tente induzir o aluno a fazer a divisão do quadrado conforme a demonstração proposta por Bhaskara, onde existe um quadrado no centro, e sua volta é composta por quatro triângulos, cada um com área idêntica ao triângulo da hipótese.

Na aplicação, o professor primeiramente fará a demonstração na lousa de como contar a área de um quadrado na malha de pontos, e em seguida, deixará com que os alunos tentem desenvolver sozinhos a atividade, circulando na sala de aula, a fim de obter dados para seu registro.

Após feita a análise dos acontecimentos, o professor irá se dirigir à lousa novamente, e proporá uma divisão diferenciada para o quadrado sobre a hipotenusa, fechando um retângulo juntamente com o triângulo retângulo inicial da atividade, questionando o aluno sobre o resultado da área desse retângulo, que no caso são seis unidades quadradas, e como ele está sendo dividido em duas partes, temos que a parte que compete ao quadrado terá como medida três unidades quadradas. Em seguida pedirá aos alunos que tentem desenvolver a divisão do mesmo triângulo no restante da figura, terminando assim sua influência sobre o exercício.

A figura 11 retrata a imagem de como poderá ser uma solução para o exercício proposto.

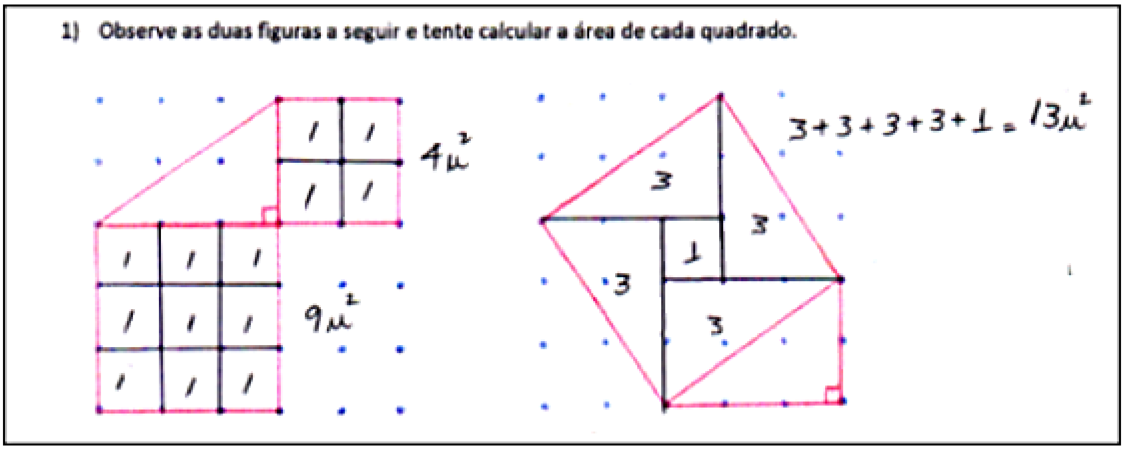


Figura 11: Resolução proposta pelo autor para o exercício 1 – Folha de atividades 1.

No exercício 2, o aluno deverá construir quadrados sobre os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo. É importante ressaltar que as figuras do exercício 1 e 2 são idênticas, logo a primeira etapa do exercício está pronta, em seguida o aluno deverá fazer um pequeno relato sobre as coincidências encontradas em relação às áreas dos quadrados.

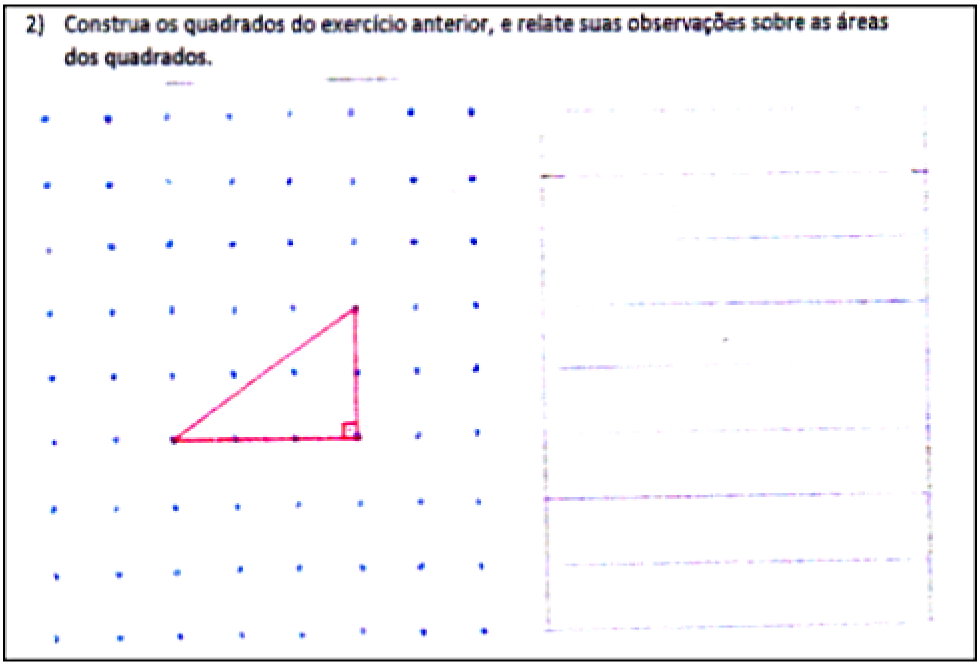


Figura 12: Construindo quadrados e observações sobre as áreas dos quadrados sobre os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo – Folha de atividades 1.

Neste momento o professor não deverá ficar muito preocupado com o relato do aluno, pois é a primeira oportunidade desse evento. A previsão é de que poucos alunos consigam descrever o teorema de maneira precisa, uma vez que a grande maioria ainda não terá construído conhecimento suficiente para dissertar, com propriedade, sobre o resultado do Teorema de Pitágoras.

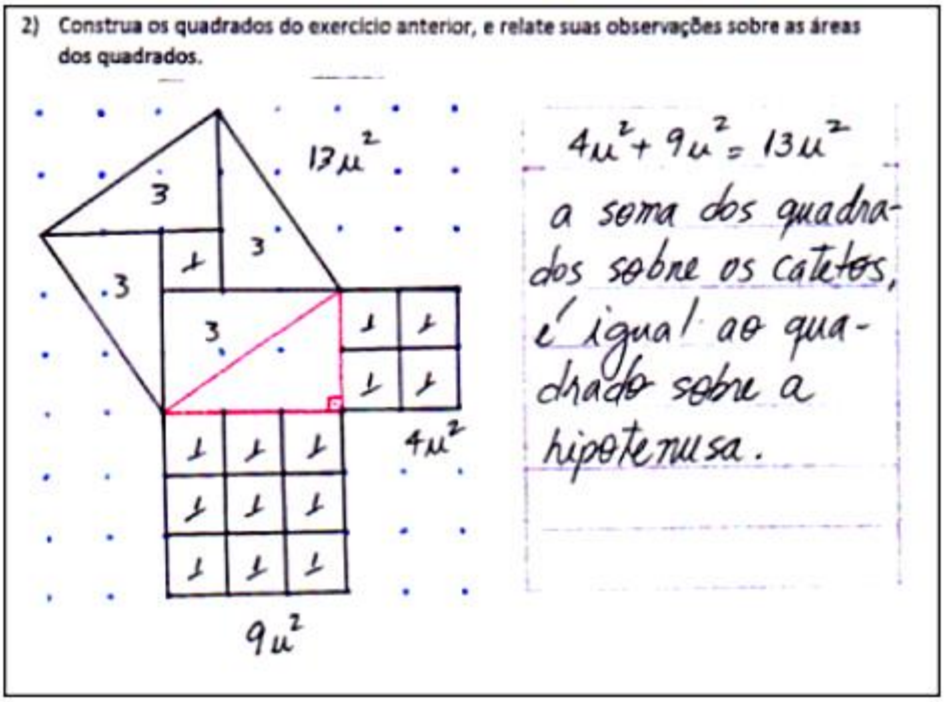


Figura 13: Resolução proposta pelo autor para o item 2 – Folha de Atividades.

O professor deve estar constantemente mediando o conhecimento, fazendo indagações que norteiem o aluno na obtenção dos resultados esperados. Por esse motivo, quando surgirem oportunidades, é interessante que o aplicador faça questionamentos sobre as áreas dos quadrados e observe se o aluno consegue fazer alguma relação entre elas.

Após ser finalizada, essa folha de atividade será recolhida para análise e será entregue uma nova folha, contendo outros exercícios para a continuação da sequência didática.

3.2.2. Folha de atividades 2

A folha de atividades 2 conta com três exercícios, sendo que o objetivo continua sendo a construção da hipótese do Teorema de Pitágoras através do princípio investigativo.

O exercício 3 traz cinco triângulos, para que sejam construídos quadrados sobre seus catetos e hipotenusa. A ideia é a mesma do exercício anterior, a diferença é que agora o aluno deverá utilizar a criatividade em seu desenvolvimento. Seria importante que neste exercício, o aplicador deixe os alunos à vontade em respeito à formação de grupos, dando a possibilidade da troca de experiências, pois em uma análise prévia o item em questão foi considerado momento crítico da oficina.

O exercício 3 aparece na figura 14 abaixo, assim poderemos visualizar e analisar mais detalhadamente sua composição.

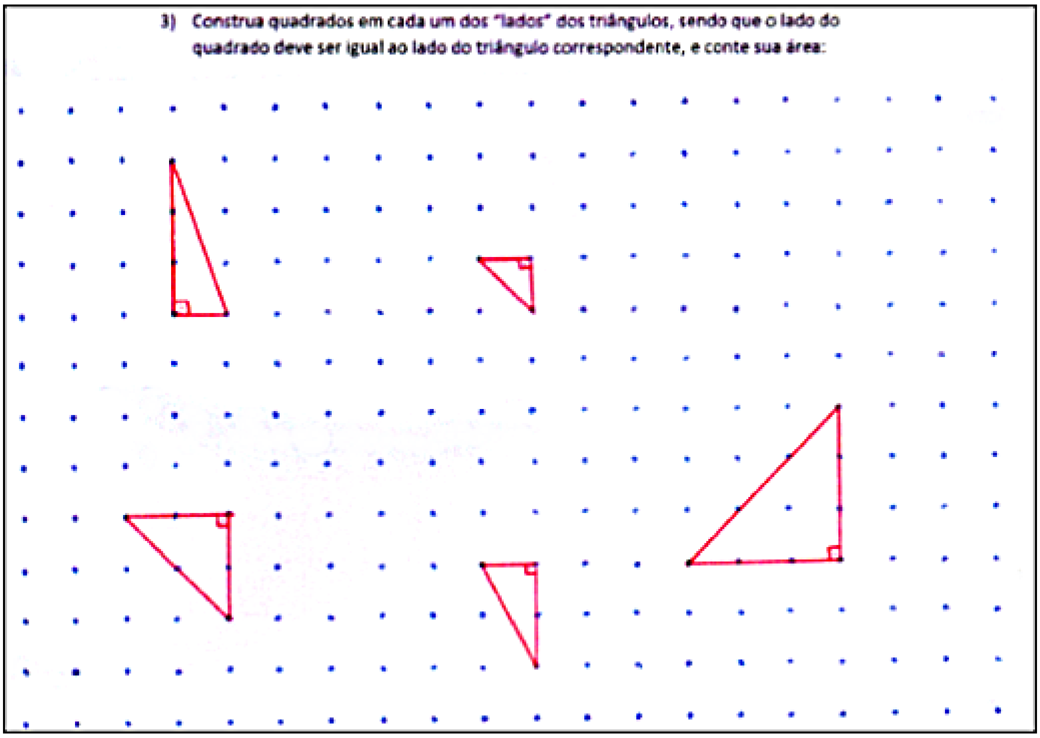


Figura 14: Construção e cálculo dos quadrados sobre os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo – Folha de atividades 2.

Após a construção dos quadrados, os alunos deverão fazer o cálculo das áreas da maneira que acharem pertinente. Como são cinco triângulos, terão uma sequência de eventos para observações, e o professor terá a função de mediar esse conhecimento, instigando para que cheguem a uma resposta próxima da esperada, dando prioridade aos que não fizerem o relato do exercício 2, pois até o momento serão os que demonstraram maiores dificuldades. A intervenção deverá ser feita através de uma entrevista informal, com questionamentos que visem a construção do conhecimento, não interferindo nos resultados da análise a posteriori.

A figura 15 faz a proposta de uma possível solução para o exercício 3.

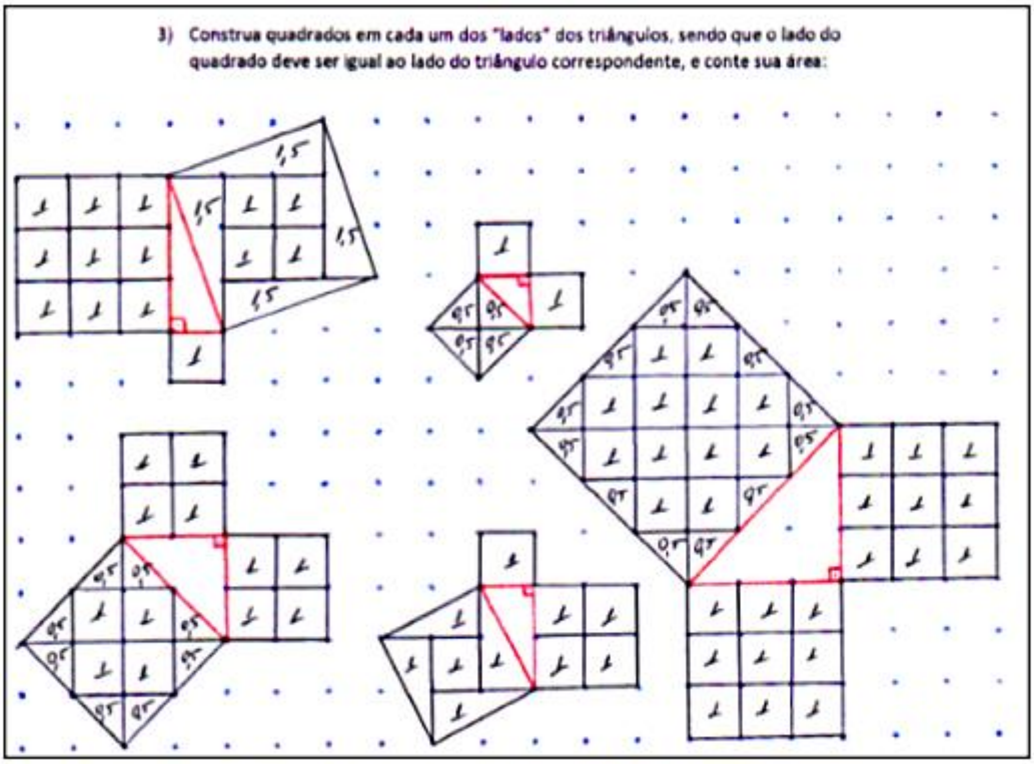


Figura 15: Resolução proposta pelo autor para o item 3 – Folha de atividades 2.

Após a construção e o cálculo das áreas de cada quadrado, com os valores, completaremos a tabela que compõe o exercício 4. Nesta tabela, propositalmente, o autor criou uma coluna contendo a soma das áreas dos catetos ao lado do valor para a hipotenusa, com o intuito de deixar visível para o aluno o resultado do Teorema de Pitágoras.

A ordem dos triângulos não terá influência nos resultados, ficando a critério dos alunos a forma que preencherá a tabela.

Ao completar a tabela é esperado que o aluno consiga desenvolver seu próprio resultado para o Teorema de Pitágoras. Assim, aparecerá a segunda oportunidade para que faça seu relato. Essa descrição poderá ser feita no exercício 5, ficando evidente para o professor se a atividade teve ou não o efeito esperado.

A figura 16 mostra o formato da tabela que o aluno terá que responder, juntamente com a área onde escreverá o resultado encontrado para as construções.

4) Complete a tabela a seguir com os valores para a área dos catetos e da hipotenusa de cada triângulo do exercício anterior.

Figuras	Cateto 1	Cateto 2	Soma dos catetos	Hipotenusa
1				
2				
3				
4				
5				

5) O que você pode concluir com a construção feita no exercício 3, e a tabela do exercício 4?

Figura 16: Tabela das áreas encontradas no item 3, e relato sobre suas observações – Folha de atividades 2.

Uma solução esperada pode ser encontrada na figura 17. Nela percebemos que as duas últimas colunas se repetem de maneira proposital, para que o aluno faça a visualização do resultado do teorema, e por esse motivo a expectativa é que ele consiga redigir algo ligado ao tema.

4) Complete a tabela a seguir com os valores para a área dos catetos e da hipotenusa de cada triângulo do exercício anterior.

Figuras	Cateto 1	Cateto 2	Soma dos catetos	Hipotenusa
1	9	1	10	10
2	1	1	2	2
3	4	4	8	8
4	1	4	5	5
5	9	9	18	18

5) O que você pode concluir com a construção feita no exercício 3, e a tabela do exercício 4?

a soma dos quadrados sobre os catetos é igual ao quadrado sobre a hipotenusa.

Figura 17: Resolução proposta pelo autor para os itens 4 e 5 – Folha de atividades 2.

No final da oficina,o aplicador deverá abrir um momento para discussões sobre a sequência didática. Após isso recolherá informações sobre sua constituição, levantando fatores positivos e negativos a respeito do material, e se o mesmo surtiu o efeito esperado.

A folha completa com as atividade pode ser observada no **Apêndice B**, e com isso finalizamos a primeira etapa da oficina.

3.2.3. Folha de atividades 3

A folha de atividade 3 é uma aplicação do resultado do Teorema de Pitágoras, na qual é apresentado um exercício resolvido através da ideia que foi mostrada nas folhas anteriores, e em seguida são propostos cinco segmentos para que o aluno determine seus tamanhos.

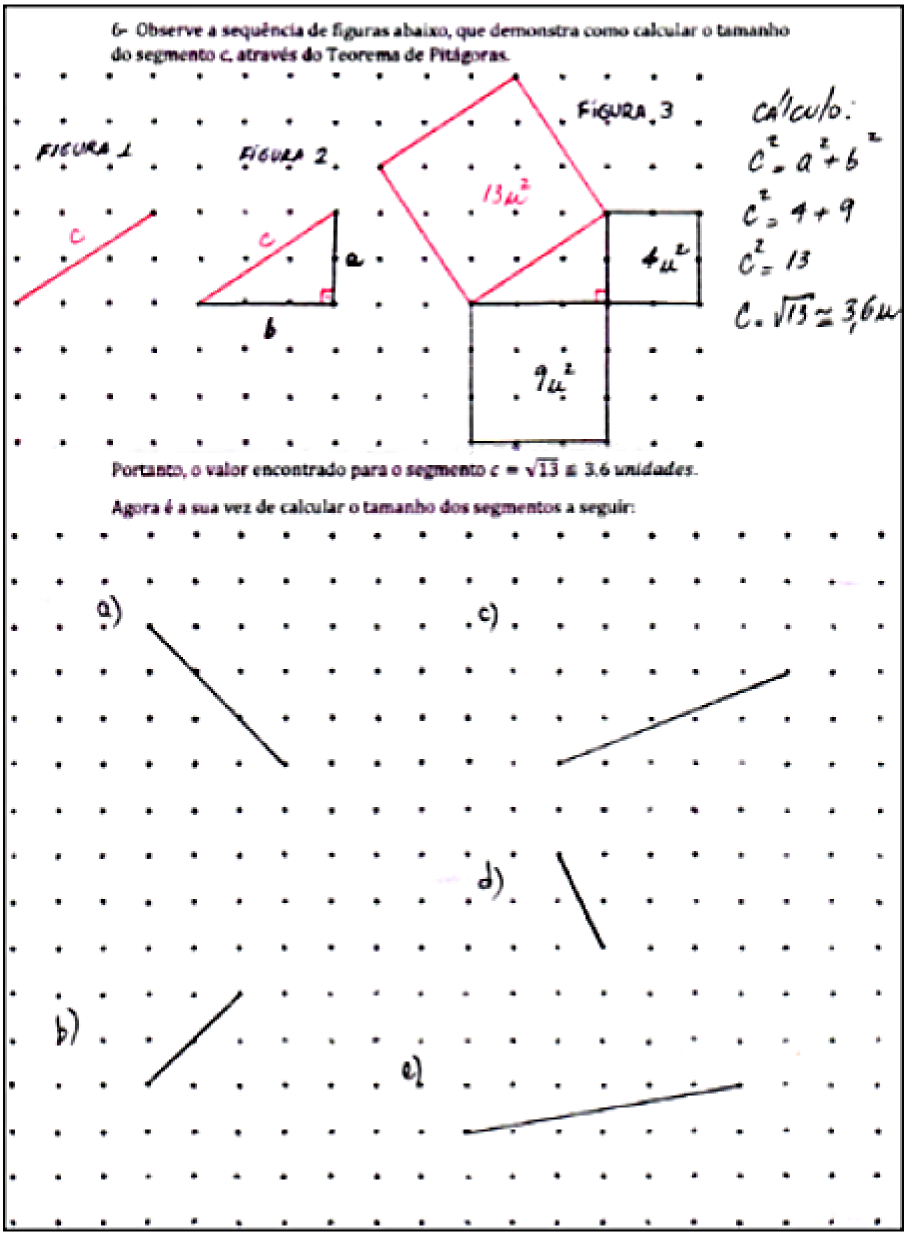


Figura 18: Exercício de aplicação para o Teorema de Pitágoras – Folha de atividades 3.

A ideia é de que o professor explique o exemplo, indicando para os alunos que o resultado a ser utilizado já foi trabalhado nas atividades anteriores, e que o cálculo a se desenvolver é uma sistematização, tendo como aplicação obter a medida dos segmentos formados por triângulos retângulos, quando possível.

Nesse momento, o aluno estará adaptado ao resultado do Teorema de Pitágoras, e já deve ter desenvolvido alguma estratégia particular para seu cálculo, observando que a construção não é mais necessária, pois existem caminhos mais rápidos que facilitarão a obtenção dos resultados.

Nos exercícios, os resultados encontrados serão números irracionais, e os alunos, provavelmente, entenderão seus significados, pois o conteúdo foi trabalhado no primeiro bimestre deste ano letivo. A utilização de uma calculadora é necessária caso queira obter um valor aproximado para a raiz quadrada.

No mais, esse exercício tem como objetivo avaliar se o aluno construiu o conhecimento sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras, servindo para o levantamento de dados relevantes para a análise a posteriori.

Abaixo podemos ver um possível resultado para os exercícios.

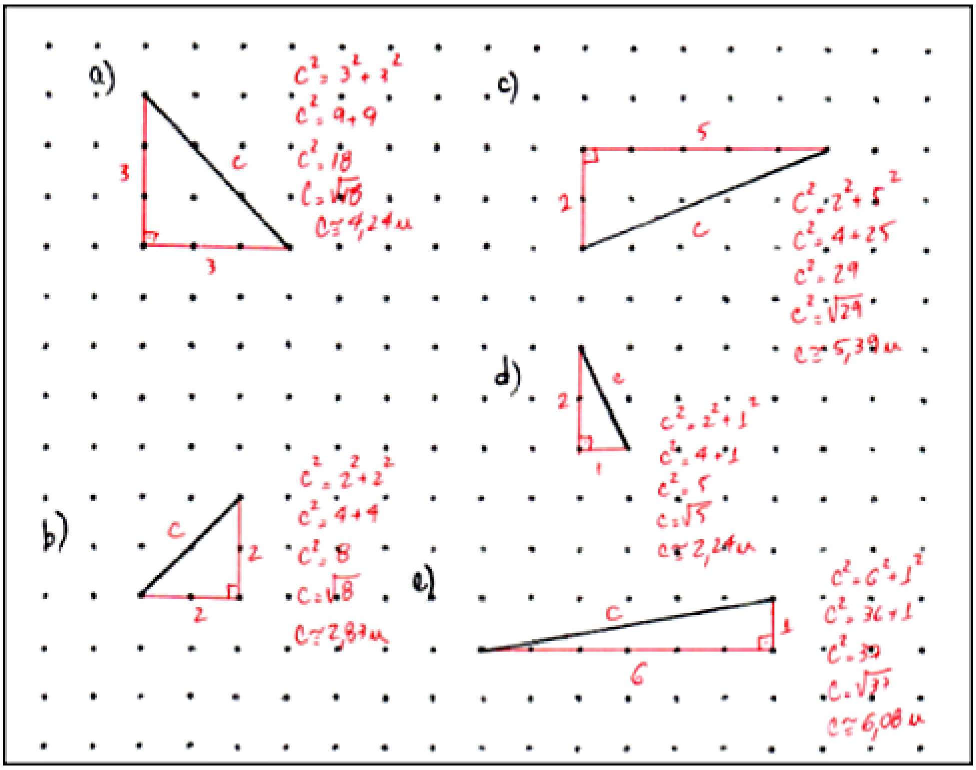


Figura 19: Resolução proposta pelo autor para o exercício de aplicação – Folha de atividades 3.

Com isso finalizamos a primeira oficina, que tem como objetivo a construção do resultado do teorema de Pitágoras pelos alunos. O processo investigativo será a principal ferramenta na obtenção do conhecimento.

3.3. Oficina 2 - A provável demonstração feita por Pitágoras.

A segunda aula, oficina 2 – *A provável demonstração feita por Pitágoras,* teve como objetivo apresentar a demonstração que o livro Introdução a História da Matemática (EVES) relata como sendo a possível demonstração feita pelo matemático.

A estratégia consistiu em proporcionar ao aluno através de recortes e colagens a construção da demonstração geométrica e algébrica do Teorema de Pitágoras.

O desenvolvimento da aula será de 50 minutos, divididos nas seguintes etapas:

- pintura dos quadrados;
- decomposição dos quadrados por recortes;
- colagem, seguindo uma sequência ordenada;
- análise dos resultados obtidos com as colagens;
- descrição algébrica do Teorema de Pitágoras.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da oficina serão:

- lápis de cor;
- lápis de escrever;
- tesoura
- cola

A aula foi testada previamente no 8° ano C da Escola Estadual Pedro Bento Alves, que contava com 20 alunos presentes. As folhas de atividades aplicadas na aula teste eram um protótipo, uma vez que o autor queria ter a noção da praticidade dos exercícios e tempo de aplicação.

No teste feito, da oficina em questão, o autor notou que após se encerrarem as atividades propostas, os materiais desenvolvidos pelos alunos ficaram sem um local definitivo para serem guardados, por esse fato houve uma remodelagem do material, facilitando a anexação no caderno do aluno.

A dificuldade a ser combatida é a transição entre a representação geométrica para a algébrica, pois alguns alunos não estão acostumados a fazer esse tipo de descrição. Logo, fica a critério do professor se deve ou não interferir, pelo fato de perceber o nível de conhecimento em que seus alunos se encontram. O interessante seria o docente participar como mediador do processo, instigando para que o discente construa seu próprio resultado.

Com a remodelagem das folhas de atividades, o aluno vai anexar o material produzido em seu caderno de atividades, podendo fazer uso futuro, formando uma espécie de material de pesquisa.

As coletas de opiniões serão feitas através de uma entrevista posterior à aplicação e o professor escolherá dois alunos para relatar suas experiências com a oficina.

O registro da aula será feito através do recolhimento das folhas de atividades dos alunos entrevistados. Para que assim, o professor possa comparar os resultados com suas opiniões, além de fotos tiradas da aplicação.

Faremos a partir de agora um relato sobre as folhas de atividades que compõem essa oficina.

3.3.1. Folha de atividades 1

A folha de atividades 1 traz quatro quadrados, figuras estas que servirão como base para todo o desenvolvimento da oficina. Tendo em vista que, por definição, todos os lados de um quadrado devem ter as mesmas medidas, vamos considerar que cada lado terá o tamanho $a + b$ (figura 20), tendo a única diferença entre eles a decomposição, onde o primeiro e o terceiro serão divididos em cinco partes cada (um quadrado de área c^2, e quatro triângulos retângulos, cada um com área igual a $\frac{ab}{2}$), já o segundo e quarto quadrados serão divididos em seis partes (dois quadrados, um com área igual a a^2, e o outro com área b^2,e quatro triângulos retângulos, cada um com área igual a $\frac{ab}{2}$).

• A atividade a seguir é uma demonstração que pode ter sido feita por Pitágoras. Faremos a denotação de *a*, *b* e *c* para os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideremos os quadrados em anexo, cada um de lados iguais a $(a + b)$.

Pinte todos os triângulos da mesma cor e os quadrados de outra, depois recorte.

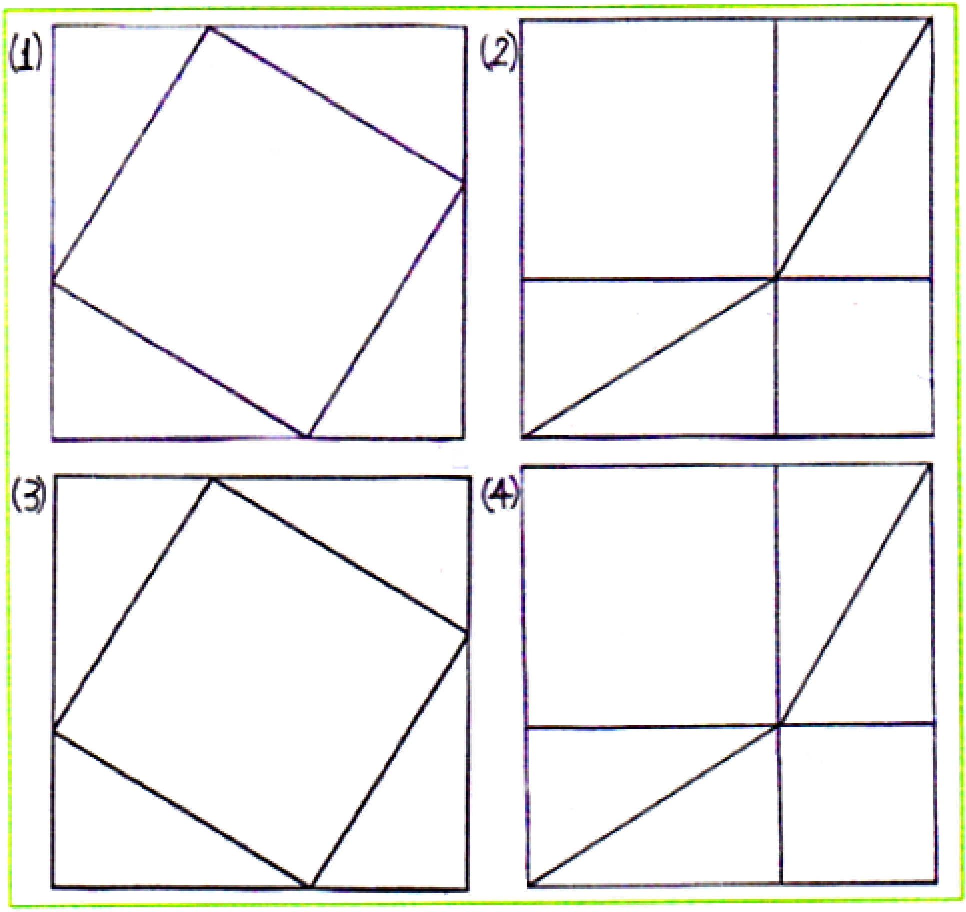


Figura 20: Os quatro quadrados propostos para a demonstração feita por Pitágoras.

Neste primeiro momento o professor deve fazer uma pequena introdução, deixando bem claro, que os quadrados têm áreas iguais, utilizando a definição para o quadrado como base, e que irá fazer uso dos mesmos dois a dois para uma colagem nas folhas seguintes.

Uma definição que pode ser usada para a figura geométrica do quadrado é: *Quadrado é o paralelogramo em que os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes.*

Após a introdução, iniciaremos a atividade com a pintura das figuras geométricas, sendo interessante a intervenção do professor, com o propósito de induzir o aluno a pintar figuras iguais de cores iguais, para facilitar a visualização das próximas atividades.

A figura 21 a seguir pode ser considerada uma resolução para a atividade, onde os triângulos foram pintados de laranja, e os quadrados rosa.

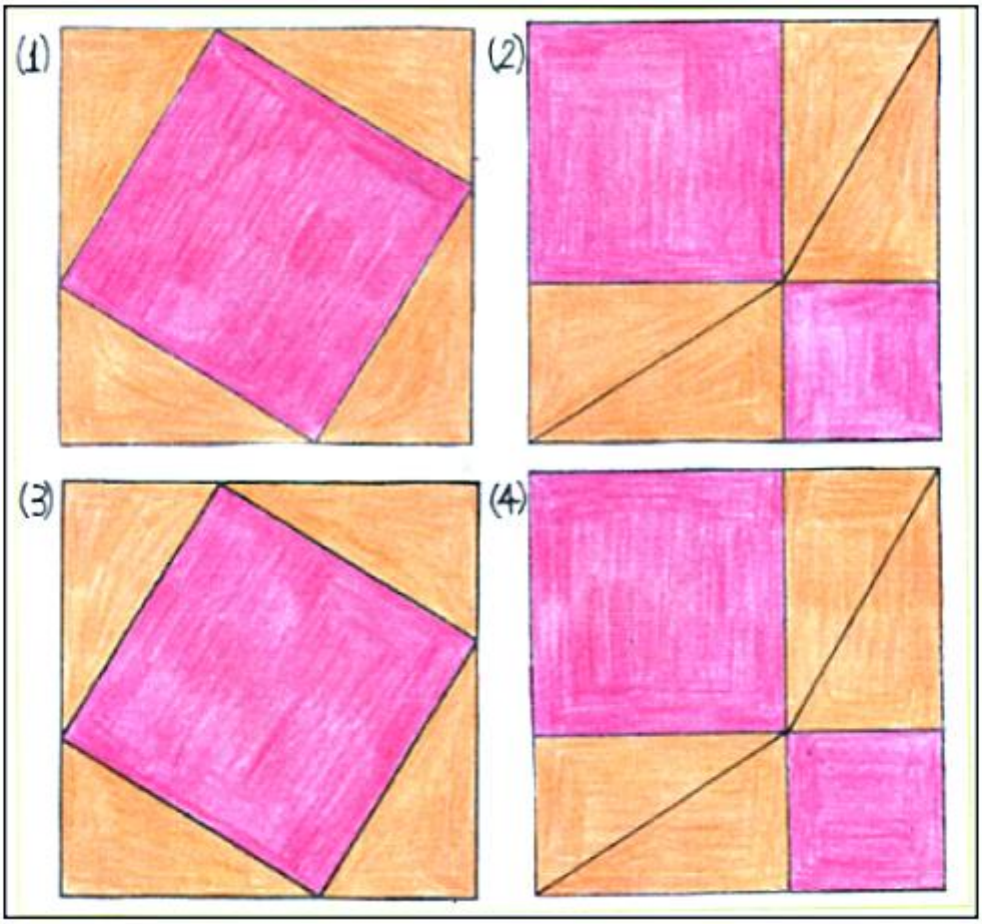


Figura 21: Possível solução encontrada pelo autor para a Folha de Atividades 1.

A primeira folha de atividades é finalizada após a pintura dos quadrados e a decomposição dos mesmos por recorte, propiciando um material que permitirá a sequência da oficina.

3.3.2. Folha de atividades 2

A folha de atividades 2 é composta por três itens, produzindo o início de demonstração geométrica para o Teorema de Pitágoras, a partir dos quadrados decompostos anteriormente.

Nos dois primeiros itens (II e III), os alunos deverão fazer uma simples colagem dos quadrados indicados (figura 22). Essa atividade permitirá que o professor os instigue a encontrar figuras geométricas com as mesmas áreas.

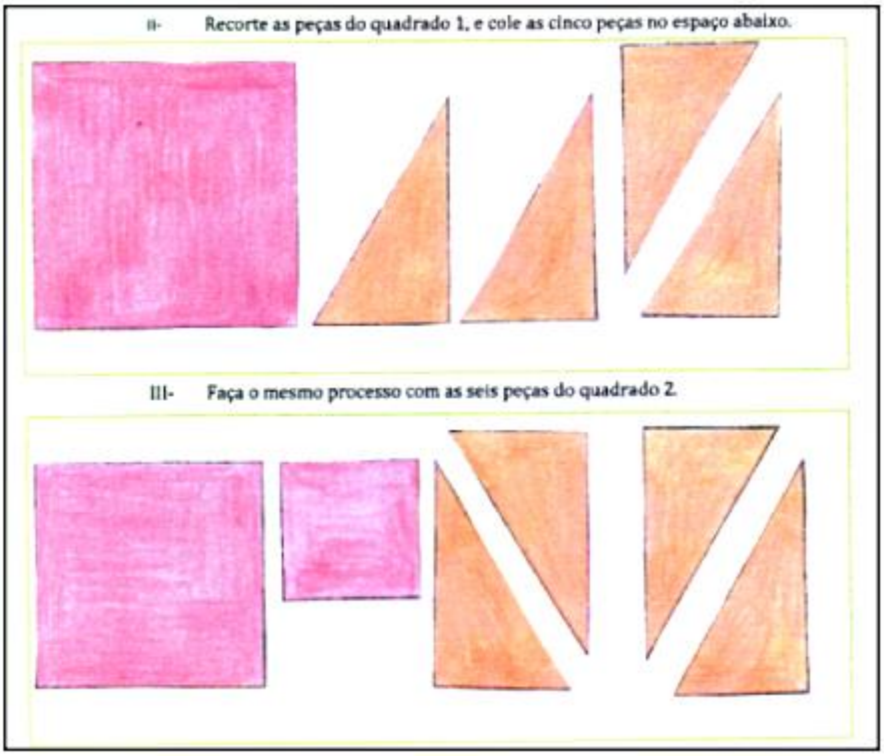


Figura 22: Colagem feita pelo autor, proporcionando uma das possíveis soluções para as atividades.

No item IV, o aluno realizará uma colagem com as figuras geométricas que acreditar ter mesma área. Seria interessante neste item, o professor mediar um embate de ideias, com objetivo de encontrar uma conclusão forte, contemplando todos os participantes da discussão. Para a atividade será necessária a utilização dos quadrados 3 e 4, que já se encontram decompostos da folha de atividades 1. A atividade em si se trata apenas de uma constatação, sendo de fácil execução por parte dos alunos. O professor deve se atentar na formação do seguinte conceito “de que em uma igualdade é permitida o cancelamento de termos iguais nos dois membros”.

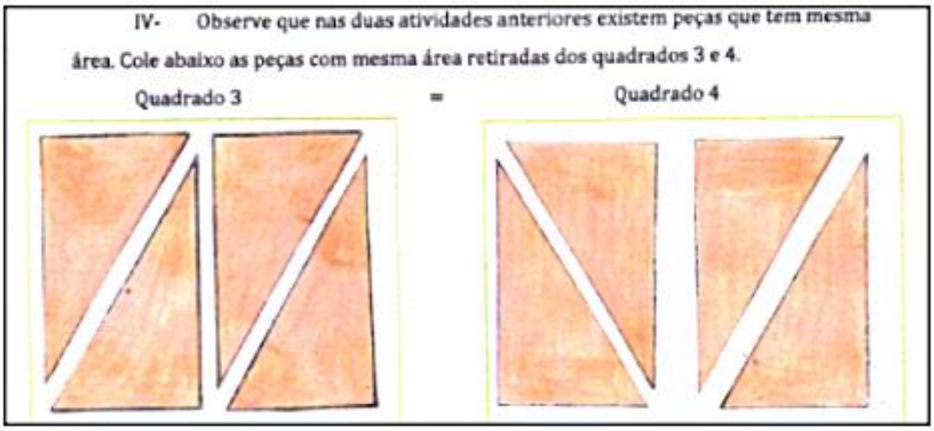


Figura 23: Colagem feita através da possível igualdade entre áreas dos quadrados comparados.

3.3.3. Folha de atividades 3

O primeiro item da folha de atividades 3, é uma análise da igualdade que aparece através das figuras geométricas restantes dos itens anteriores. A ideia é fazer com que o aluno obtenha o resultado do Teorema de Pitágoras e faça uma breve conclusão a respeito. Como essa atividade já foi abordada na oficina anterior, o professor deve trabalhar esse item, como sendo um exercício de fixação do resultado do teorema.

O segundo item se trata de uma colagem. Os alunos farão a comparação entre o que escreveram anteriormente, com a disposição das figuras. Abaixo, poderemos encontrar uma solução da atividade proposta pelo autor.

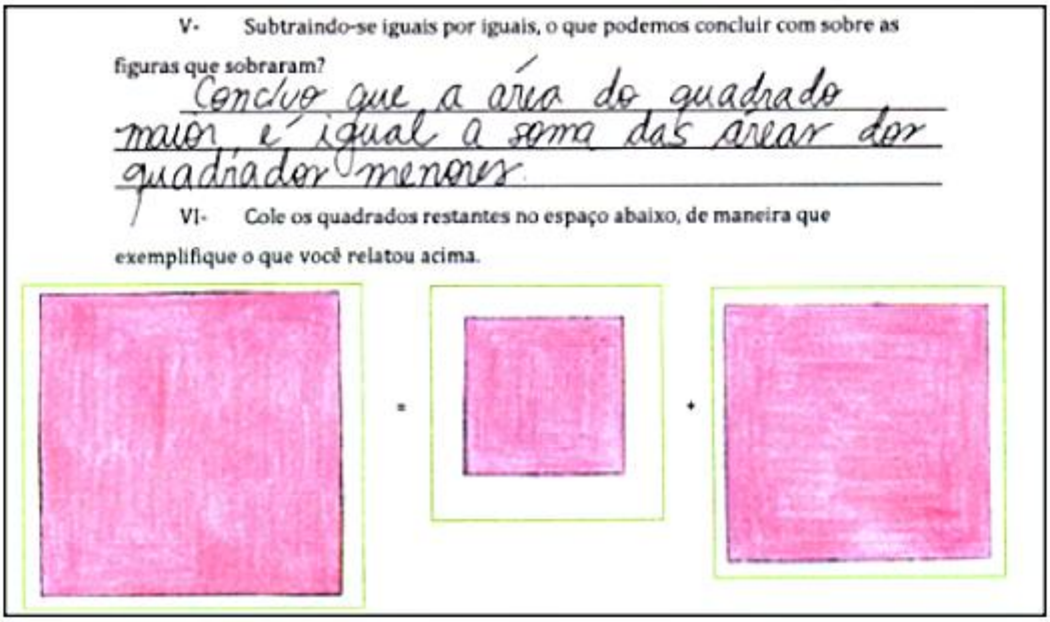
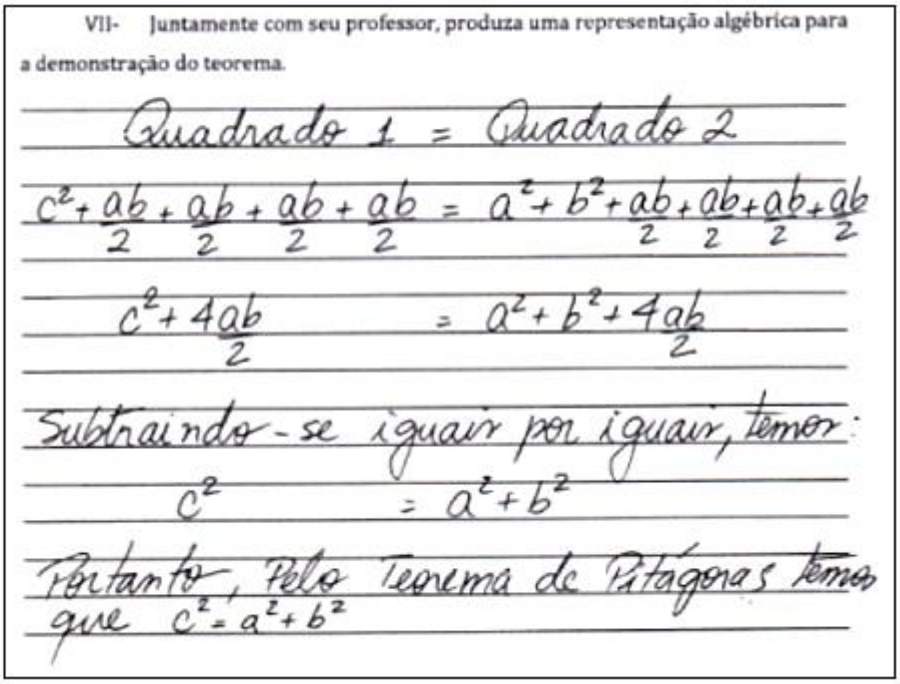


Figura 24: Conclusão do Teorema de Pitágoras proposta pelo autor.

O último item da oficina trata da transição do Teorema de Pitágoras da linguagem geométrica para a algébrica. Nesta oficina o professor deve retomar a sequência de colagens feitas anteriormente, e com os alunos ir traduzindo para a linguagem da álgebra.

Nesta fase, o aplicador deve encontrar a maior dificuldade dessa oficina, pois os alunos não terão habilidade necessária para desenvolver todos os passos da demonstração por si sós, principalmente pela falta de costume em realizar exercícios como esse. Sendo assim, é recomendável que a tradução seja feita de maneira conjunta, na forma de um painel, o qual permanecerá a disposição dos alunos durante tempo indeterminado, facilitando a fixação do conteúdo.



VII- Juntamente com seu professor, produza uma representação algébrica para a demonstração do teorema.

Quadrado 1 = Quadrado 2

$c^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}$

$c^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 4\frac{ab}{2}$

Subtraindo-se iguais por iguais, temos:

$c^2 = a^2 + b^2$

Portanto, Pelo Teorema de Pitágoras temos que $c^2 = a^2 + b^2$

Figura 25: Passagem do Teorema de Pitágoras para a linguagem algébrica.

A transição da linguagem geométrica para a algébrica é considerada a fase mais importante da oficina, pois é um momento em que o aluno troca a manipulação das figuras, onde as visualizações dos resultados acontecem de maneira fácil e prática, e se envolve em um universo cheio de técnicas e regras, importantíssimo para a sequência de seus estudos.

3.4. Oficina 3 - Utilizando a ferramenta Geogebra para encontrar o resultado do Teorema de Pitágoras

A oficina 3 – *Utilizando a ferramenta Geogebra para encontrar o resultado do Teorema de Pitágoras,* tem como objetivo comprovar o resultado do Teorema de Pitágoras através de uma construção feita em uma ferramenta computacional, entendendo que a matemática deve ser inserida em diversos contextos, em busca de métodos que introduzam o aluno no estudo dos conteúdos.

A estratégia consiste em proporcionar um método diferenciado de construção, tendo como base o software Geogebra, e investigar através das folhas de atividades, se o aluno domina alguns conceitos matemáticos.

O desenvolvimento da oficina será realizado em duas aulas, contabilizando 100 minutos, sendo divididos nas seguintes etapas:

● construção do capelo franciscano, sob orientação do professor;

● comparação entre as áreas;

● discussão sobre as observações feitas durante as construções;

● lista de exercícios propostos em forma de folha de atividades.

Os materiais necessários para a execução da oficina são:

● 12 Computadores;

● software Geogebra instalado em todas as máquinas;

● lápis de escrever;

● régua;

● retroprojetor;

● borracha.

A aula foi testada previamente no 8° ano C da Escola Estadual Pedro Bento Alves, que contava com 22 alunos presentes. As folhas de atividades aplicadas na aula teste sofreram significativas mudanças, em virtude de possíveis falhas que apresentaram na execução, e estarão disponíveis no **Apêndice D**.

A dificuldade encontrada está no manuseio do computador pelos alunos, pois os mesmos não estão acostumados a manipular softwares matemáticos. Por esse motivo o aplicador da oficina deverá previamente fazer a apresentação da ferramenta, proporcionando um momento para a construção da habilidade necessária em relação ao Geogebra.

A coleta dos resultados será feita através da percepção do professor, em relação ao andamento das atividades, e das folhas resolvidas pelos alunos.

O registro da aula será feito através da análise das folhas de atividades recolhidas pelo professor e das anotações feitas no momento da aplicação, em um caderno de notas.

A seguir, faremos um relato sobre a parte expositiva das aulas e as folhas de atividades.

3.4.1. A aula expositiva

A oficina 3 – *Utilizando a ferramenta Geogebra para encontrar o resultado do Teorema de Pitágoras*, começará com a apresentação de uma construção do Capelo Franciscano, onde o professor deverá expor argumentações convincentes sobre o manuseio do software, transmitindo ao aluno conhecimento necessário para que tenha autonomia na execução das folhas de atividades.

A sala de informática deve estar previamente preparada para a aplicação das aulas, estando com os computadores ligados e com os softwares instalados. O retroprojetor também é uma ferramenta indispensável, pois através dele o professor vai demonstrar as construções para os alunos.

Nesta fase, o aluno deverá apresentar familiarização com o manuseio do software, pelo fato de ter passado por uma aula preparatória. Por isso, o professor irá direto para a construção, aplicando os seguintes comandos:

● clicar com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização, onde aparecerá uma nova janela, e nela deverá desabilitar os eixos, e habilitar a malha quadriculada.

● clicar com o botão esquerdo do mouse sobre o item polígono, e em seguida clicar em três pontos sobre a malha quadriculada, com distâncias entre os pontos $\overline{AB} = 3u$, $\overline{BC} = 4u$, formando um triângulo retângulo em B, como mostra a figura 3.26 abaixo.

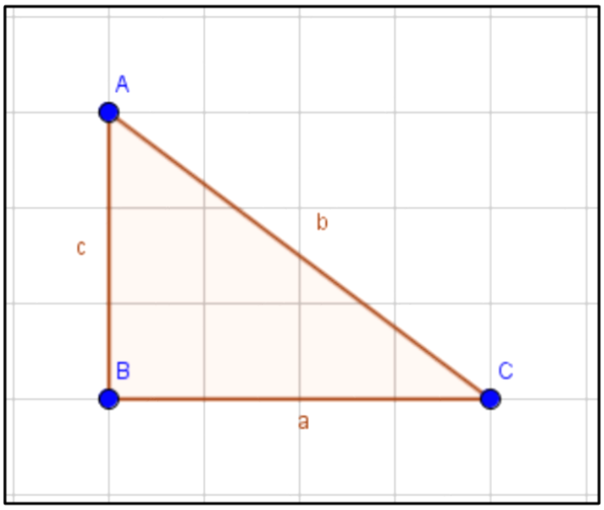


Figura 26: Representação no Geogebra da construção seguindo os dois primeiros passos da sequência didática.

Seria interessante, que o professor fizesse algumas observações sobre a janela de álgebra, indicando que a figura é um triângulo retângulo, e sua construção é reconhecida como polígono 1. Em relação à área, podemos visualizar que a mesma tem 6 unidades quadradas, e também as medidas dos segmentos como as posições dos pontos.

O professor poderá ser questionado em relação à posição dos pontos, pois os mesmos podem ter variações. Essa situação é de fácil solução, basta demonstrar, que se trata do mesmo triângulo posicionado em locais diferentes do plano.

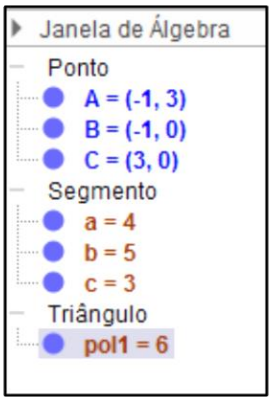


Figura 27: Janela de álgebra.

Em seguida, devemos propor a construção dos três quadrados relativos aos catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo construído anteriormente.

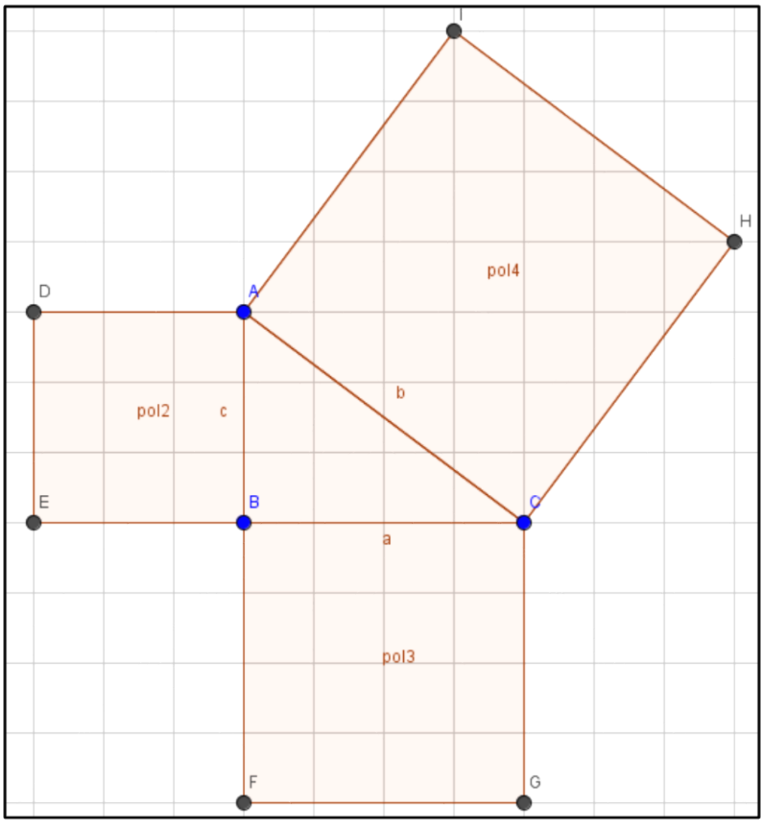


Figura 28: Imagem da construção feita pelo autor na parte expositiva da aula.

● O primeiro passo será clicar com o botão esquerdo do mouse sobre a janela polígono, e escolher o item polígono regular, em seguida clicar sobre os pontos B e A respectivamente, com isso aparecerá uma nova janela que perguntará quantos vértices deseja, escolha a opção 4 e pressione ENTER, formando assim o quadrado sobre o cateto AB. Repetindo o mesmo procedimento nos segmentos BC e AC concluiremos a atividade.

O professor deve se atentar ao fato de que os pontos terão que ser clicados sempre seguindo a ordem inversa da construção do triângulo retângulo, ou seja, no segmento BC, deve-se clicar primeiro C, e depois B. Já no segmento AC, clicar A e depois C.

A partir deste momento, cabe ao professor fazer algumas considerações a respeito da construção. Uma delas é em relação às áreas dos polígonos construídos, principalmente sobre a diferença entre o triângulo e os quadrados, pois aparecerão como atividades a serem respondidas nas folhas de atividades. Outro item a ser abordado, e mais importante, é o resultado do Teorema de Pitágoras, que poderá ser observado através das áreas indicadas na janela de álgebra, fato esse que não é novidade para o aluno, pois foi trabalhado nas oficinas anteriores.

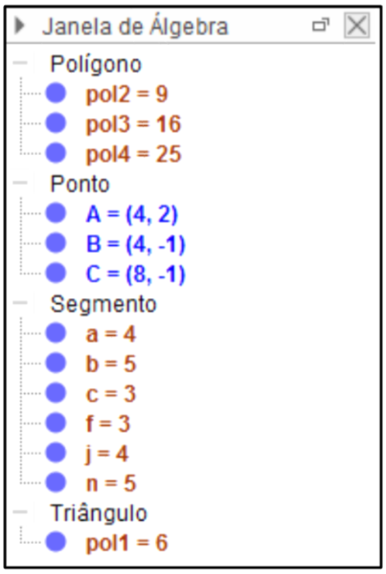


Figura 29: Janela de álgebra após a construção da parte expositiva finalizada.

Após o término da exposição, serão entregues aos alunos as folhas de atividades para que possam produzir sua construção, seguindo os passos que lhes são determinados, e responder questionamentos sobre geometria.

3.4.2. Folha de Atividades 1

A folha de atividades 1 contém no cabeçalho logotipos da UFSCar, do PROFMAT e o da Sociedade Brasileira de Matemática, nome da escola e sala em que a atividade foi aplicada, o tema da oficina, e o nome do professor responsável, o local para os nomes e números dos alunos, conforme a Figura30.

PROFMAT

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 3 - Utilizando a ferramenta geogebra para encontrar o resultado do Teorema de Pitágoras* - PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ____, Nº________

NOME: ____, Nº________

NOME: ____, Nº________

Figura 30: Cabeçalho da Oficina 3.

As atividades se iniciam com a construção de um triângulo retângulo qualquer, onde os alunos devem indicar as medidas dos segmentos AB e BC, e a área do polígono, a qual estará disponibilizada na janela da álgebra (Figura 31).

- **Construa no software Geogebra os polígonos determinados pelos passos a seguir, e responda as questões.**
- **Posicione três pontos A, B e C, de maneira que crie um triângulo retângulo em B qualquer, e em seguida determine a medida dos seguimentos abaixo, e a área de triângulo**. *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono para a construção, não se esqueça de clicar em todos os pontos na ordem alfabética, e para finalizar clicar novamente no ponto de origem).*

• $\overline{AB}$ = _______

• $\overline{BC}$ = _______

• A área do ΔABC é ________. *(A área estará indicada como polígono 1 na janela de álgebra do lado esquerdo da tela).*

Figura 31: Início da construção feita no software geogebra.

O autor considera a atividade simples e espera que todos os alunos consigam concluir de maneira satisfatória.

Depois que os alunos efetuarem o cálculo de sua construção, é questionado aos mesmos como fariam para calcular a referida área, sem ajuda do software. Essa etapa serve para investigar se o aluno detém a competência de calcular áreas, e também será analisada sua capacidade de dissertar sobre proposições matemáticas.

- **Como você calcularia a área desse triângulo sem a ajuda do software?**

____

____

____

- **Calcule a área do triângulo ΔABC como descreveu acima.**

____

____

____

Figura 32: Descrição e cálculo da área do triângulo retângulo sem a ajuda do software.

O último item se refere à construção dos quadrados sobre os catetos do triângulo retângulo. Essa etapa requer um pouco mais de atenção por parte do aplicador, pois é um momento onde os grupos podem necessitar de algum auxílio para desenvolver o que lhes é pedido, principalmente em relação à escolha do ícone polígono regular. Logo é interessante que o professor realize uma espécie de entrevista, quando for requisitado, entendendo quais são as dúvidas encontradas pelos alunos, respostas que auxiliarão na análise a posteriori.

- **Construa os quadrados referente aos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, posicionando os pontos D e E para o quadrado ABDE, e F e G para o quadrado BCFG, e com a ferramenta polígono ligue os pontos desses dois quadrados.** *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono regular para facilitar a construção)*

Figura 33: Construção dos quadrados sobre os catetos.

3.4.3. Folha de atividades 2

A folha de atividades 2 é uma continuação da primeira. No item inicial os alunos devem propor uma definição para o quadrado e indicar como calculariam sua área. Abaixo deverão fazer o cálculo dos dois quadrados construídos anteriormente. Essa é uma nova oportunidade para que o professor entenda se os alunos conhecem noções básicas de geometria euclidiana.

• Com suas palavras escreva uma definição para quadrado, e como você calcularia sua área.

____

____

____

____

• Determine a área dos quadrados que você acabou de construir no GEOGEBRA, não esqueça de deixar o cálculo exposto na área indicada abaixo.

(Espaço para o desenvolvido do cálculo pelo aluno)

____

____

____

____

____

◦ A área do quadrado ABDE é __________. ◦A área do quadrado BCFG é __________.

Figura 34: Construção dos quadrados sobre os catetos.

Em seguida, o aluno fará a construção do quadrado sobre a hipotenusa e indicará o valor para a sua área, sendo perguntado se encontrou alguma relação entre as áreas dos quadrados sobre os catetos e a hipotenusa. A ideia é fazer com que o aluno relate novamente o resultado para o Teorema de Pitágoras, e que faça a comprovação através da análise das áreas expostas na janela de álgebra.

• Com o posicionamento dos pontos H e I construa o quadrado referente a Hipotenusa, e determine a sua área com a ferramenta polígono.

◦ A área do quadrado ACHI é __________.

• Você encontrou alguma relação entre as áreas dos quadrados construídos nas atividades que acabou de desenvolver?

____

____

____

____

Figura 35: Finalização da construção no software e análise dos resultados encontrados.

Após finalizar a construção no software Geogebra, o aluno será orientado a colocar em uma malha de pontos o que acabou de desenvolver no computador. Esse item servirá como meio de análise para o professor, pois a sua representação estará exposta no final das folhas de atividades, facilitando o levantamento dos dados.

● **Faça a construção da atividade anterior na malha de pontos da terceira folha de atividades.** *(Não se esqueça de colocar as letras A, B e C para representar os vértices da construção, sendo que B deverá ter ângulo reto)*

Figura 36: Atividade de construção na malha de pontos.

A partir do desenho, o autor faz a proposta de dois questionamentos que expõem se o aluno desenvolveu habilidade para fazer uso da aplicação do teorema ou não. No primeiro deve encontrar a medida do segmento AC de sua construção, no segundo o valor para a hipotenusa de uma atividade, onde a construção não é aparente.

◦ Qual é o valor do segmento $\overline{AC}$ encontrado na construção?

____

◦ Como você encontrou a solução para o problema anterior?

____

____

____

◦ Agora faça o cálculo do seguimento $\overline{AC}$ no espaço abaixo.

____

____

____

● **Em um triângulo retângulo de Catetos medindo 6 e 8 centímetros respectivamente, qual é o valor para a Hipotenusa?**

____

____

____

● **Como você encontrou esse resultado?**

____

____

Figura 37: Atividades que questionam a poder de aplicação desenvolvido pelos alunos.

Entender o raciocínio do aluno é de extrema importância para o docente, e por esse motivo foram propostos itens que requerem sua descrição. Baseado nessas respostas o autor poderá fazer levantamentos significativos, pois os dados lhe mostrarão se as hipóteses iniciais foram contempladas. Em caso negativo, o autor deverá remodelar suas atividades, a fim de sanar as possíveis falhas encontradas em sua sequência didática. O cálculo é outro item a ser analisado, uma vez que o seu resultado permitirá com que o aluno faça comparações entre o que descreveu anteriormente e em muitos casos aparecerá a contradição.

3.5. Oficina 4 - A "demonstração sem palavras" atribuída a Thabit Ibn-Qurra

A *Oficina 4, A "demonstração sem palavras" atribuída a Thabit Ibn-Qurra,* tem como objetivo apresentar um método histórico e criativo para a obtenção do resultado do Teorema de Pitágoras, onde o autor faz uma releitura da demonstração apresentada pelo livro A Matemática Através dos Tempos (BERLINGHOFF/GOUVÊA).

A estratégia é desenvolver uma demonstração do Teorema de Pitágoras através de recorte de uma figura pré-disposta. Nela o aluno exercerá diversas passagens coordenadas em busca do resultado esperado.

O desenvolvimento da aula será de 50 minutos, divididos nas seguintes etapas:

- pintura das figuras geométricas;
- recorte das figuras geométricas;
- sobreposição de dois triângulos retângulos no quadrado de lados iguais a c;
- decomposição do quadrado de lados iguais a c em três partes;
- montagem do quebra cabeça, e colagem dos quadrados de lados a e b, através das peças decompostas do quadrado de lado c.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da oficina são:

- lápis de cor;
- lápis de escrever;
- tesoura;
- cola.

A aula foi testada previamente no 8° ano D, da Escola Estadual Pedro Bento Alves, que contava com 18 alunos presentes. A mesma teve uma boa aceitação por parte dos alunos, que conseguiram desenvolver com tranquilidade as atividades propostas. A única alteração a ser feita é a diminuição do quadrado inicial, com o intuito do melhorar a sequência das atividades.

A dificuldade encontrada pelos alunos na aula teste foi na montagem do quebra cabeça, pois não tinham a ideia de qual seria o resultado final. Para sanar essa deficiência, o professor montou uma espécie de tabuleiro onde as peças encaixariam de maneira precisa, norteando o aluno em sua resolução.

A coleta dos resultados será feita através da percepção do professor em relação ao andamento das atividades, e do recolhimento da folha de atividades 2 resolvidas pelos alunos.

O registro da aula será feito através da análise da folha de atividades 2, e anotações feitas no momento da aplicação.

A seguir faremos um relato sobre a exposição da aula e as folhas de atividades.

3.5.1. Folha de atividade 1

A folha de atividades 1 inicia com um cabeçalho, onde foi colocado os logotipos da UFSCar, do PROFMAT e o da Sociedade Brasileira de Matemática, o nome da escola e sala onde houve a aplicação, o tema da oficina, e o nome do professor responsável e local para o nome e número do aluno.


PROFMAT

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL - OFICINA 4 - A "demonstração sem palavras" atribuída a Thabit Ibn – Qurra*
PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO
NOME: ______________________________. Nº__________

Figura 38: Cabeçalho da Oficina 4.

A folha é composta por uma atividade, onde é apresentado um quadrado de lados $(a + b)$, decomposto em quatro triângulos retângulos, e um quadrado cujos lados denominaremos de c. As peças deverão ser pintadas e depois recortadas para a sequência das atividades.

O professor deverá, no momento da entrega, fazer algumas considerações históricas sobre o tipo de demonstração que está sendo proposta (sem palavras) e seu autor, indicando que foi concebida no século IX, na região que hoje é conhecida como Iraque.

É importante ressaltar que o fator histórico é pouco valorizado no material fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo aos alunos, e que os conteúdos abordados muitas vezes aparecem sem nenhuma introdução, jogadas como simples atividades.

A figura 39 exibe a atividade proposta nesta folha:

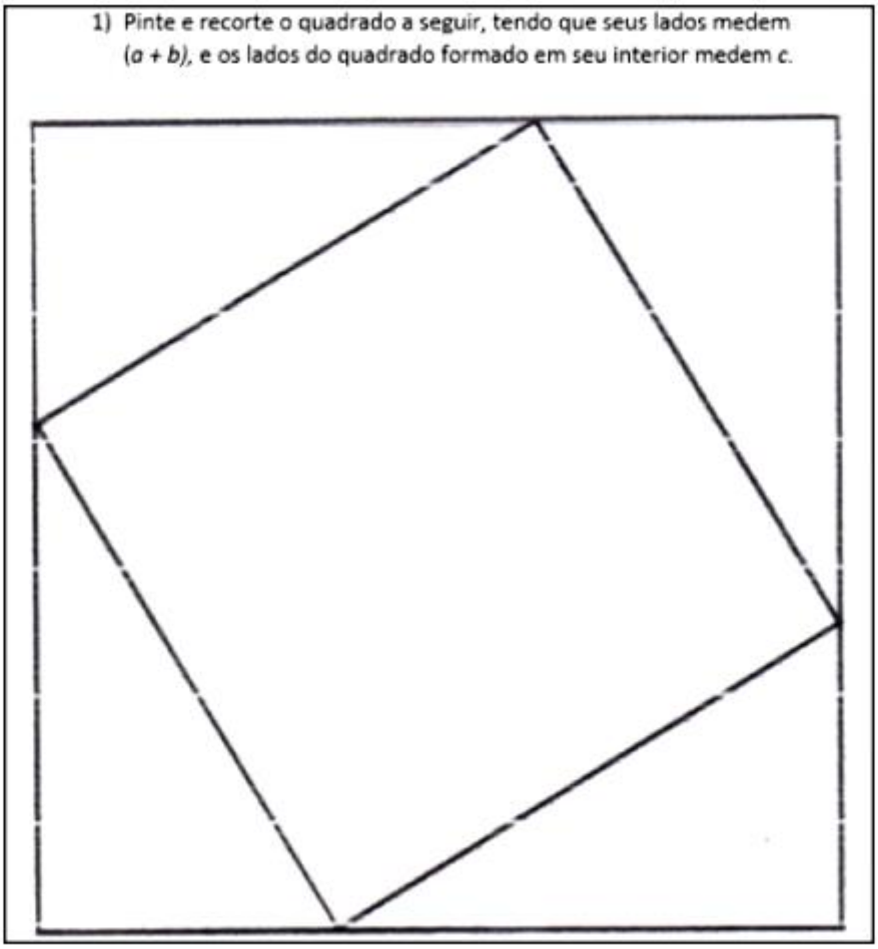


Figura 39: Quadrado de lados $a+b$.

Após o aluno fazer a pintura e o recorte das figuras geométricas, que compõem o quadrado de lados (a + b), será entregue a folha de atividade 2, dando continuidade à oficina.

3.5.2. Folha de atividades 2

A folha de atividades 2 é composta por uma sequência de figuras. Nesta atividade o autor faz a proposta do passo a passo que o aluno deverá seguir até a conclusão da demonstração. A única etapa em que o aluno deve desenvolver sozinho é a montagem do quebra cabeça, que tem como conclusão o resultado do Teorema de Pitágoras.

O aluno deve ter em mente que está trabalhando com um quadrado de área igual a c^2, e saber aonde quer chegar. Para isso acontecer, o professor tem que fazer uma interferência indicando que os triângulos foram subtraídos da área inicial, e servirão apenas com objetos auxiliares do processo.

O primeiro passo é a colagem de dois dos quatro triângulos retângulos existentes dentro do quadrado de lados iguais a c. Essa etapa está demonstrada na folha por duas figuras (figura 40), a da esquerda mostra como deve ser colado os triângulos, e a da direita é o resultado da colagem.

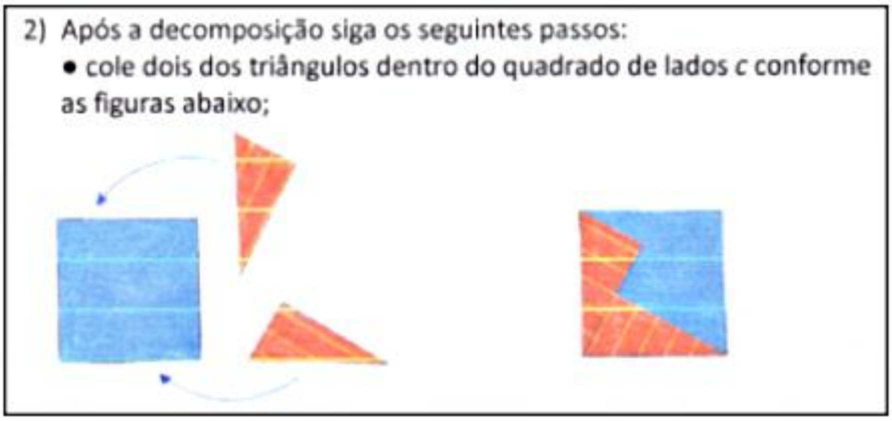


Figura 40: Demonstração da colagem de dois triângulos sobre o quadrado de lados c.

O segundo passo é uma nova decomposição, onde o quadrado de lados c, será repartido em duas partes, a primeira com área de ab, a segunda no valor de $c^2 - ab$, resultado da subtração da área do quadrado de lados c, pelas áreas dos dois triângulos utilizados na passagem anterior.

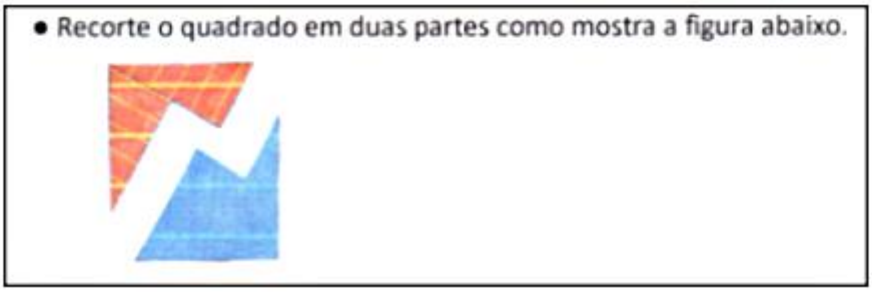


Figura 41: Decomposição do quadrado por cores.

Para a conclusão da oficina é aconselhável que o aplicador peça aos alunos que utilizem os triângulos que não foram colados, com a finalidade de facilitar a execução, juntamente com a parte que tem como área $c^2 - ab$.

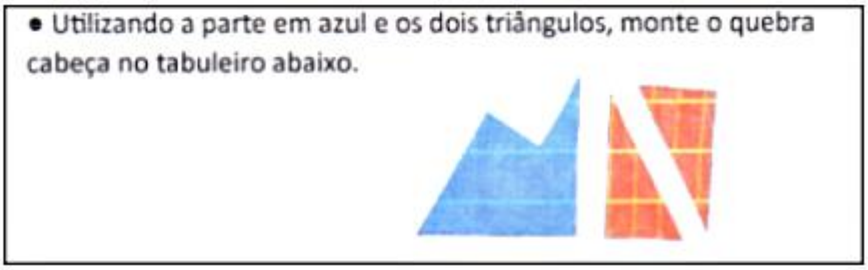


Figura 42: As três peças do quebra cabeça.

A conclusão será feita através da colagem das peças do item anterior sobre um tabuleiro existente no final da folha. Nessa etapa, é o aluno deverá ter o máximo de concentração, e o professor deverá interferir após a colagem, dividindo as áreas a^2 e b^2.

Essa etapa pode ser considerada o momento crítico da oficina, pois os alunos terão que desenvolver de maneira individual. Por esse motivo, o autor inseriu uma espécie de tabuleiro em que os alunos deverão fazer suas colagens. Essa ideia apareceu na aula teste, pois foi notada a dificuldade que o aluno tinha de visualizar o resultado final.

A figura a seguir mostra o tabuleiro completo após a colagem e a separação das áreas.

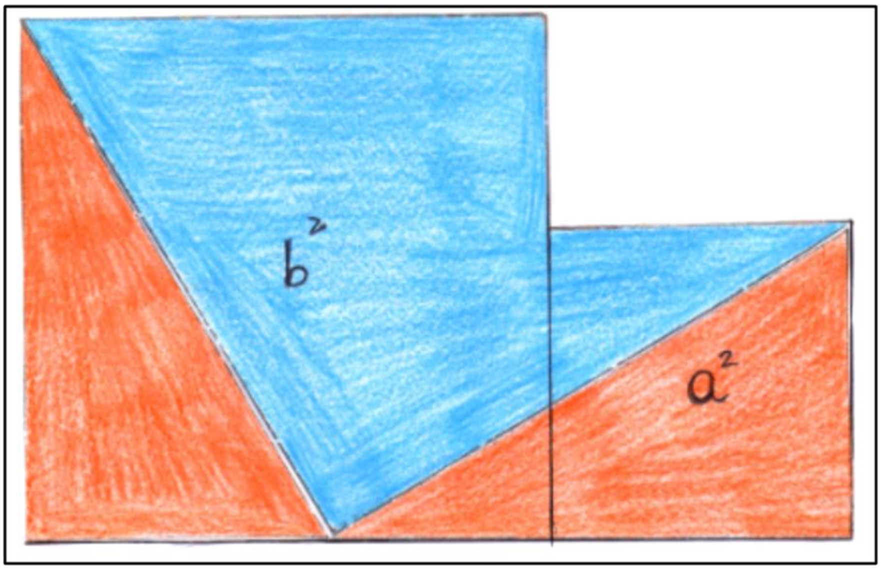


Figura 43: Quebra cabeça montado sobre o tabuleiro.

Para finalizar a oficina o professor poderá fazer uma pequena constatação, mostrando para o aluno que as áreas realmente têm os valores indicados na figura 43. Uma maneira de demonstrar é sobrepondo qualquer triângulo da construção nos lados dos novos quadrados.

3.6. Oficina 5 - Uma demonstração particular do Teorema de Pitágoras através do Tangram

A oficina 5*, uma demonstração particular do Teorema de Pitágoras através do Tangram,* tem como objetivo propor uma demonstração sem palavras, tendo como material para a execução o Tangram, que é um quebra cabeça chinês formado por sete peças, sendo 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo, muito utilizado na educação básica para formar mais de 1700 figuras.

A demonstração proposta é um caso particular do Teorema de Pitágoras, pois o resultado será obtido através da colagem feita sobre os catetos de um triângulo retângulo isósceles.

A estratégia é desenvolver a demonstração do Teorema de Pitágoras, através de recorte e colagem, em um tabuleiro pré-estabelecido, sendo dispostos dois quadrados iguais, decompostos pelas figuras geométricas do Tangram.

O desenvolvimento da aula será de 50 minutos, divididos nas seguintes etapas:

- pintura das figuras geométricas;
- decomposição de um dos quadrados;
- colagem do quadrado que não foi decomposto em um local pré-estabelecido;
- montagem e colagem do quebra cabeça;
- análise final dos resultados.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da oficina são:

- lápis de cor;
- lápis de escrever;
- tesoura;
- cola.

A aula foi testada previamente no 8° ano C da Escola Estadual Pedro Bento Alves, que contava com 21 alunos presentes, e foi considerada de fácil execução, pois o seu desenvolvimento transcorreu como o esperado pelo aplicador. O material da aula teste sofreu mudanças significativas em seu tamanho, pois as dimensões não proporcionaram uma perfeita execução, comprometendo seu arquivamento.

A dificuldade encontrada pela aula teste foi no momento da montagem do quebra cabeça, uma vez que os alunos necessitaram uma atenção especial para finalizar esta atividade.

A coleta dos resultados será feita através da percepção do professor em relação ao andamento das atividades, e do recolhimento da folha de atividade 2 resolvida pelos alunos.

O registro da aula será feito através da análise das folhas de atividades e anotações feitas no momento da aplicação.

A seguir, faremos um relato sobre a exposição da aula e as folhas de atividades.

3.6.1. Folha de atividades 1

A folha de atividades 1 se inicia com o cabeçalho, onde foi colocado os logotipos da UFSCar, do PROFMAT e o da Sociedade Brasileira de Matemática, o nome da escola e sala onde houve a aplicação, o tema da oficina, e o nome do professor responsável e local para o nome e número do aluno.

Figura 44: Cabeçalho Oficina 5.

O primeiro passo da oficina é feito através da pintura dos quadrados que tem em sua composição as peças do Tangram. Para essa etapa, o autor fez a proposta de pintarem figuras de mesma área com cores iguais, para sentir a percepção do aluno em relação a esse tema. É interessante que neste momento, o professor deixe bem claro que mesma área pode ser diferente de mesmo formato, e desenhos diferentes podem ter áreas iguais, sem dar dicas mais precisas sobre uma possível divisão das figuras maiores em triângulos menores.

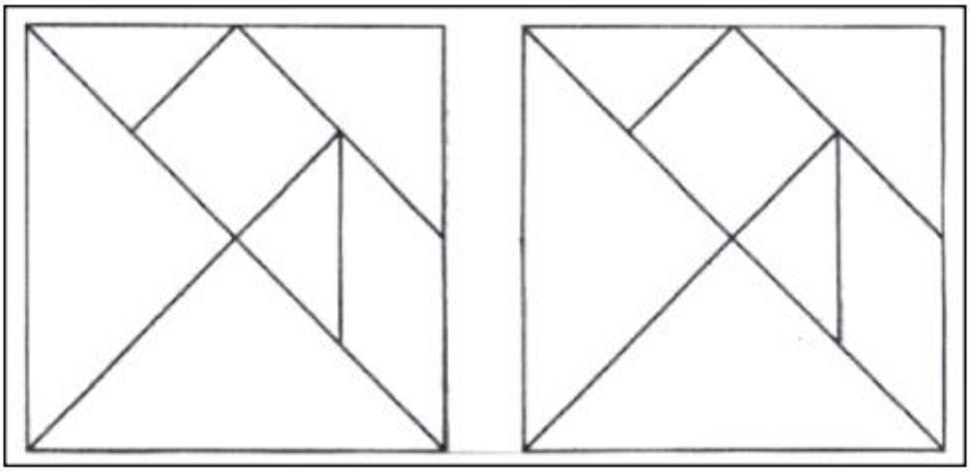


Figura 45: Os dois quadrados decompostos com as peças do Tangram.

Em seguida, faremos uma suposição de uma possível área para o triângulo menor, propondo que este tenha uma unidade quadrada, e depois questionaremos se conseguiria indicar o valor da área do quadrado maior, e quantos triângulos menores caberiam em sua composição. Nessa etapa, o autor começa a instigar o aluno a ter um raciocínio que envolva a decomposição da área total do quadrado em pequenos triângulos, utilizando apenas o poder de visualização, pois até este momento não será utilizada a tesoura para que o aluno possa recortar os quadrados. Na sequência da atividade o aluno deverá descrever os nomes e áreas para cada figura que compõem o Tangram

A habilidade de usar o raciocínio dedutivo para resolver problemas de natureza geométrica, é uma situação muito utilizada nas avaliações proposta pelo Estado de São Paulo, e por oportunidade, o autor tentou retratar esse fato em sua atividade.

• A demonstração a seguir utiliza as figuras geométricas que compõem o Tangram na obtenção do Teorema de Pitágoras. Acompanhe os passos fornecidos por essas Folhas de Atividades até alcançar o resultado esperado:

◦ Pinte os dois quadrados, de maneira que figuras de mesma área tenham cores iguais;

◦ Suponhamos que o menor triângulo tenha área de uma unidade quadrada, você conseguiria calcular a área total de um dos quadrados fornecidos abaixo?

◦ Quantos quadrados menores caberiam dentro de cada quadrado igual aos que aparecem abaixo?

◦ O Tangram é composto por sete figuras geométricas. Denomine cada uma delas e indique sua área. (Para o cálculo suponha que cada triângulo menor tenha área de uma unidade quadrada).

Figura 46: Pintura e decomposição do Tangram em triângulos menores.

É importante salientar, que a demonstração do Teorema de Pitágoras não terá um texto próprio, pois nesta oficina o autor fará uso de um método sem palavras, e deverá propor uma conclusão de maneira oral no final da aula. Os questionamentos abordados aparecem por virtude da oportunidade de espaço nas folhas de atividades, onde o autor achou pertinente enriquecer com textos condizentes às situações de aprendizagem, abordadas pelo caderno do aluno.

É esperado que nesta primeira folha de atividades os alunos encontrem dificuldades, uma vez que os temas apresentados são de anos anteriores. No entanto o autor fez essa proposta visando sua devolutiva, pois exercerá um diálogo com o intuito de revisão do conteúdo.

3.6.2. Folha de atividades 2

A folha de atividades 2 é iniciada com a decomposição de um dos quadrados, sendo que o outro permanecerá inteiro. É importante que o professor estabeleça a igualdade entre as figuras antes da decomposição, para que o aluno compreenda a demonstração.

O quadrado decomposto juntamente com o inteiro, serão colados sobre um tabuleiro pré-estabelecido no final da folha, resultando em um produto final para o Teorema de Pitágoras, que deverá ser explorado pelo professor, fazendo considerações que permitam ao aluno entender o processo decorrido.

A fixação das peças do quadrado decomposto acontecerá na forma de um quebra cabeça, onde o aluno vai encaixar as sete peças do Tangram, dentro de dois quadrados feitos sobre os catetos de um triângulo retângulo isósceles e o quadrado sobre a hipotenusa será completado pela figura inteira.

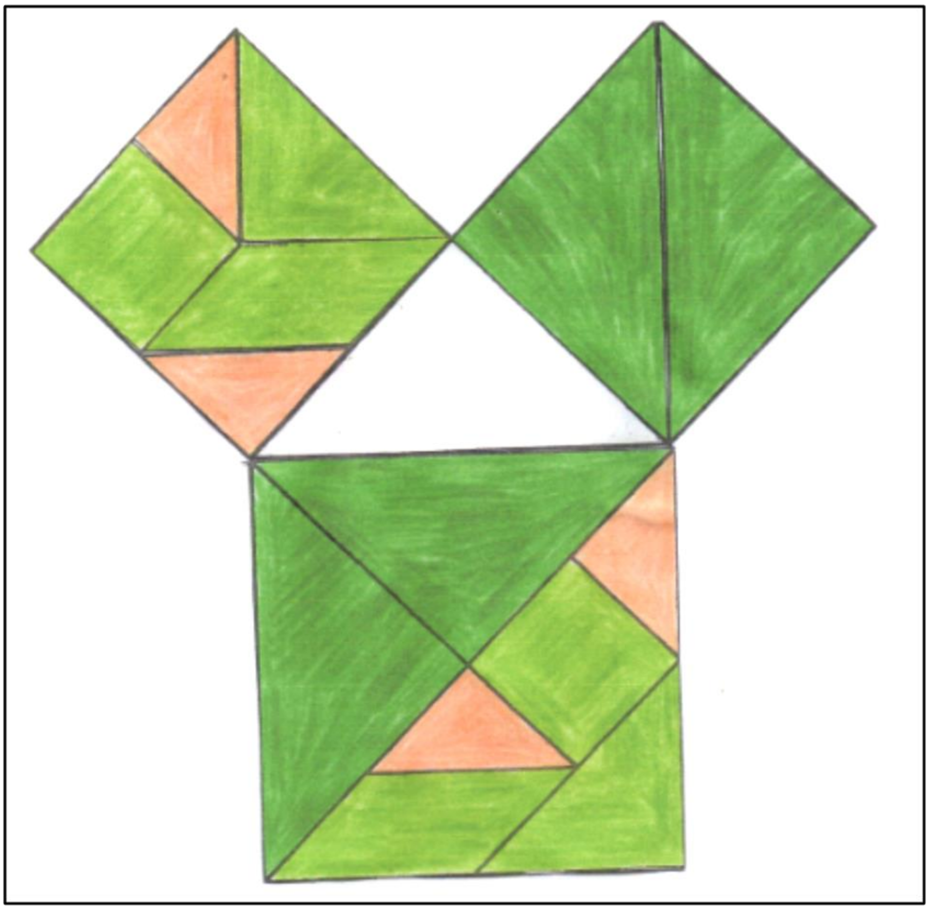


Figura 47: Tabuleiro completo com as peças do quebra cabeça.

Após a colagem o aluno deverá indicar a área de cada quadrado, entendendo que as áreas dos que estão sobre os catetos são idênticas. Com isso, o aluno descobrirá o tipo de triângulo que serve como base para a construção, e qual é a medida de seus catetos, sendo que a hipotenusa tem seu valor estipulado em quatro unidades.

◦ **Após a colagem determine a área de cada quadrado.**

____

◦ **Assinale o espaço que corresponde ao nome do triângulo que compõe o tabuleiro abaixo.**

( ) EQUILÁTERO ( ) ISOSCELES ( ) ESCALENO

◦ **Se a hipotenusa desse triângulo mede 4 unidades, quanto deve medir cada cateto? Desenvolva o cálculo no espaço ao lado.**

Figura 48: Dedução sobre o triângulo e suas medidas.

Entender se o aluno desenvolveu habilidade, na aplicação do Teorema de Pitágoras, é de suma importância para o professor. Por esse motivo, deve analisar muito bem o cálculo desenvolvido no último item dessa oficina, pois o aluno passou por várias demonstrações e deve ter adquirido a capacidade de resolver exercícios sobre o tema.

A proposta desse trabalho é fazer uma análise do produto de ensino que foi descrito nesse capítulo. As oficinas bem como as folhas de atividades que as compõem não representam um produto final, permitindo ajustes e melhorias. O próximo capítulo analisa as aplicações dessas folhas, dando uma visão prática das atividades criadas pelo autor.

4. APLICAÇÃO DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

Este capítulo tem como objetivo apresentar os resultados oferecidos pelos alunos em relação as oficinas, com descrições dos aspectos gerais da escola onde foram aplicadas as sequências didáticas e do professor responsável pelo projeto.

O capítulo começa fazendo um breve relato da Escola Estadual Pedro Bento Alves da cidade de Arandu-SP, com os dados da sua localização, características físicas, estrutura do ensino e sua comunidade. Em seguida, descreve as turmas em que foram realizadas as oficinas, bem como, a duração de cada uma delas. Há também um espaço para a descrição da carreira no magistério do professor responsável pelo trabalho. O referido capítulo é finalizado através de uma análise detalhada da aplicação das oficinas e das respostas dadas pelos alunos.

4.1. A Escola Estadual Pedro Bento Alves

A Escola Estadual Pedro Bento Alves está localizada na Rua João Batista Pereira, 603, no centro da cidade de Arandu, região noroeste do estado de São Paulo. Apesar de sua localização ser central está rodeada por um misto de residências, comércios e repartições públicas. Atualmente está sob a jurisdição da Diretoria de Ensino – Região de Avaré, tendo cursos e ciclos como modalidade de ensino. A escola oferece cursos de Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio, nos períodos matutino, vespertino e noturno. Em 2016 eram 22 turmas, sendo: 10 turmas do Ensino Fundamental II, 8 do Ensino Médio e 2 do Escola de Jovens e Adultos (EJA).

O autor do trabalho ministra aulas no ensino fundamental (ciclo II), mais precisamente nos 8° e 9° anos, e no Ensino Médio, tendo um total de oito salas, das quais duas foram utilizadas para os testes e uma para a aplicação do material.

Os alunos que compõem a sala da aplicação residem em bairros periféricos, e por se tratar de uma cidade de pequeno porte, não necessitam de transporte escolar.

A escola é a única da cidade que disponibiliza vagas para esses níveis de ensino, portanto é composta por alunos de diversas classes sociais, mas a predominância é a baixa renda, que utiliza o trabalho rural para prover o seu sustento.

A comunidade é pouco participativa, deixando para a escola toda a responsabilidade educacional e comportamental dos alunos.

A estrutura escolar é bastante precária. Isso deve-se ao fato do crescimento populacional, uma vez que antes funcionava no referido prédio cinco salas de aula e para atender o aumento da demanda, teve que, às pressas, levantar novas salas de aula, as quais foram feitas desconectadas com o antigo prédio, surgindo grandes problemas estruturais. Os banheiros tornaram-se insuficientes e a disposição das novas salas apresenta problemas de acessibilidade.

Apesar de todos esses fatores, a escola conta com uma quadra poliesportiva coberta, sala de informática, biblioteca adaptada em um ambiente provisório e as ferramentas multimídias, que são itinerárias.

4.2. A turma de aplicação

As oficinas foram desenvolvidas nas duas últimas semanas, antes do recesso escolar do mês de junho, após as avaliações bimestrais, em uma turma do período vespertino denominada como 9° ano C.

A sala em questão conta com 35 alunos matriculados, mas houve um número diferenciado de alunos presentes em cada aplicação.

As aplicações começaram a ser feitas no dia 21 de junho, data em que ocorreu a primeira oficina, com duração de duas aulas de 50 minutos cada. No dia 22 de junho foi aplicada a segunda oficina, em uma aula de 50 minutos e a terceira aconteceu dia 23 de junho em 70 minutos, ultrapassando o tempo estipulado na análise a priori.Com esse fato, o professor aproveitou para aplicar, nos 30 minutos restantes da aula, dois exercícios levantados pelos alunos na oficina 2. A quarta e a quinta ocorreram, respectivamente, nos dias 28 e 29 de junho, com duração de 50 minutos cada.

A turma participante tem característica heterogênea, pois os alunos estão em diversos níveis de proficiência, com sua maioria estando abaixo do básico.

O professor de maneira antecipada já havia trabalhado noções básicas de geometria, tais como: semelhança de triângulos, definições de triângulos retângulos, cálculo de áreas de triângulos, retângulos e quadrados, manipulações do Geogebra e algébricas, conteúdos essenciais para o trabalho.

Os alunos tiveram total comprometimento com as ações desenvolvidas, mostrando-se participativos, facilitando de sobremaneira as ações do aplicador.

4.3. O professor

O professor Leonardo Tartaglia Filho nasceu e foi criado na cidade de Arandu-SP. Concluiu todo o Ensino Fundamental na mesma escola onde foram aplicadas as oficinas. Ao invés de frequentar o Ensino Médio regular na cidade onde residia, preferiu se matricular no Centro de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM), na cidade de Avaré-SP, em período integral, com o objetivo de se formar como professor da Educação Infantil e Fundamental I. Após isso, fez um vestibular e foi aceito para cursar a disciplina de Matemática, na Fundação Regional Educacional de Avaré (FREA), formando-se professor no final do ano de 2000. Em 2001, foi aprovado no concurso da prefeitura municipal de Arandu para dar aulas no Ensino fundamental I, permanecendo por dez anos no cargo. Pelo Sistema Estadual, através da Secretaria do Estado de São Paulo, o professor leciona Matemática há quinze anos, passando por diversas cidades da região, até que no ano de 2008 foi transferido para a escola "Pedro Bento Alves", na qual permanece até hoje. Em busca de aperfeiçoamento cursou pós-graduação na Universidade Nove de Julho (UNINOVE), licenciando em Pedagogia e Gestão Escolar. Mais tarde, frequentou o curso de Engenharia civil na Faculdade Sudoeste Paulista (FSP), sonho de infância e área que o autor pretende atuar futuramente. Ingressou no Mestrado profissional (PROFMAT) na turma de 2014, onde escolheu a Universidade Federal de São Carlos como polo, pois se encontrava, na ocasião, mais próximo de sua cidade, cerca de 220 quilômetros.

O professor em questão tem disposição e vontade de estudar, portanto, pretende continuar se aperfeiçoando, com o objetivo de melhorar sua capacidade de ensinar.

4.4. Aspectos gerais das aplicações

As aplicações das oficinas aconteceram seguindo uma ordem crescente de dificuldade, ambientando os alunos ao tema, com o intuito de produzir suas observações através de seu caráter investigativo. As folhas de atividades tiveram a finalidade de apresentação do teorema e construção do conhecimento. A avaliação do material ocorreu através das entrevistas durante as aulas.

O professor aplicador constantemente fez intervenções durante o andamento das aulas, com o propósito de direcionar os alunos à criação de conceitos. A mediação do conteúdo foi feita através de discussões sobre o tema, questionamentos em relação a eventos que poderiam estar acontecendo durante as oficinas.

Os alunos ficaram à vontade em relação a disposição da sala, podendo sentar de maneira individual ou em grupos, sendo que cada um realizou sua própria atividade, a única exceção foi a oficina de número 3, que era uma atividade para ser feita em trio.

O importante é salientar que as oficinas seguiram os mesmos parâmetros disciplinares exigidos pela instituição de ensino em relação as aulas, garantindo assim a qualidade exigida pela direção da escola.

4.5. Análise das aplicações

As aplicações ocorreram normalmente, sendo que os alunos proporcionaram um ambiente tranquilo para a construção do conhecimento.

A análise das aplicações acontecerá na mesma ordem que ocorreram a descrição das oficinas, seguindo meticulosamente sua sequência didática.

As aplicações tiveram diferenças no número de participantes, pois algumas ocorreram em dias diferentes, e a ausência de alguns alunos nas aulas é um fator esperado pelo aplicador.

A sala de aula do 9° ano C do Ensino Fundamental da Escola Estadual Pedro Bento Alves, se encontra na parte antiga, situado no segundo andar, sala 1, e conta com 35 alunos matriculados, sendo 20 homens e 15 mulheres, destes estavam presentes nas aplicações: 30 alunos na oficina 1, 32 na segunda e terceira, que ocorreram na mesma data, 30 na quarta e quinta, onde houve também o fechamento das atividades.

4.6. Analises das respostas

As análises das respostas trazem o índice de acerto e erro dos alunos, menos nas oficinas em que o objetivo era a construção. Nesses casos serão registrados, através dos relatos dos alunos e do professor. As porcentagens que aparecerão estão no modelo aproximado, sendo utilizado apenas os números naturais para sua descrição, sendo assim o autor preferiu suprimir a palavra aproximadamente, evitando a repetição da mesma no texto.

4.6.1. Oficina 1 -Instigando o aluno na obtenção do resultado do Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

A oficina 1 foi realizada por 30 alunos, e suas folhas de atividades foram distribuídas de maneira individual, onde a disposição da sala ficou a critério dos mesmos. O professor notou que nessa aula 20 alunos sentaram de maneira individual, e os outros 10 formaram duplas. Por esse motivo, cada dupla contará como se fosse um aluno, totalizando 25 folhas de atividades para a análise dos resultados. Para essa diferenciação, o professor pediu para que as duplas unissem as folhas com um grampeador, formando apenas um corpo.

A oficina 1 foi composta por três folhas de atividades, sendo que a primeira comportava os exercícios 1 e 2, a segunda exercícios 3, 4 e 5, e a terceira exercício 6. O autor fará algumas correções nas numerações dos itens de cada exercício, fator que foi observado durante a aplicação, anexando a nova folha de atividades na seção **Apêndice D**, que estará disponível no final da dissertação

O exercício 1 é composto por dois itens, onde serão analisados separadamente, sendo denominada como item 1 a figura da esquerda, e item 2 a da direita.

No item 1, somente três alunos (12%) não conseguiram fazer a contagem dos quadrados. Os outros vinte e dois alunos (88%) desenvolveram a atividade corretamente.

No item 2, apenas cinco alunos (20%) conseguiram desenvolver sozinhos a atividade, os vinte restantes (80%) desenvolveram de maneira parcial, ou não desenvolveram a atividade. Após a percepção desse fato pelo aplicador, o mesmo interferiu na atividade, propondo um novo método para a divisão, sendo igual a figura do triângulo inicial da atividade, com isso, o índice de acerto passou de três alunos (20%), para quinze alunos (60%), o que foi constatado com o recolhimento das folhas de atividades.

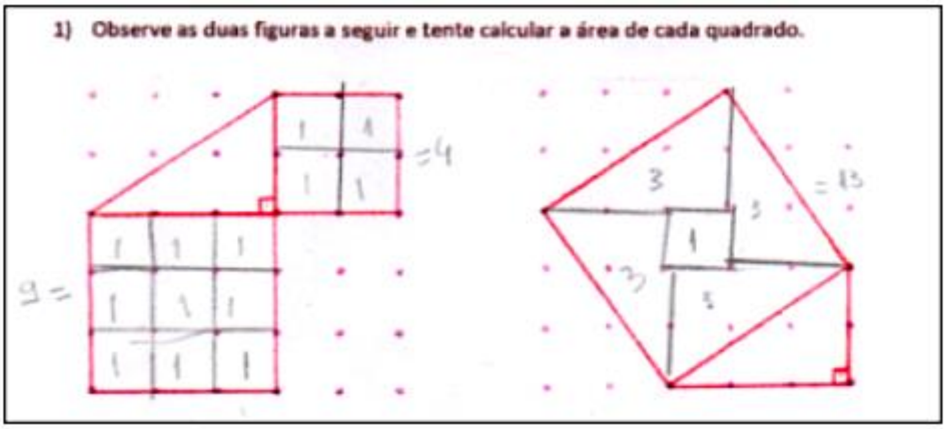


Figura 49: Cálculo de área feita por aluno.

O exercício 2, é uma espécie de continuação do primeiro, sendo que sua análise será feita em duas etapas: o item 1 se refere a construção e a contagem das áreas, o item 2 aos relatos dos alunos.

No item 1, vinte e dois alunos (88%) realizaram a construção corretamente, os outros três (12%) apontaram falhas nos posicionamentos dos pontos do quadrado da hipotenusa, e quando questionados sobre se a figura que acabara de desenhar formava realmente um quadrado, responderam que sim. No caso da contagem das áreas quinze alunos (60%) realizaram o cálculo de maneira correta, tendo que dez alunos (40%) não completaram a atividade.

No item 2, somente cinco alunos (20%) conseguiram relatar de maneira correta o resultado do Teorema de Pitágoras, ficando com vinte alunos (80%) não escrevendo, ou escrevendo observações que ficaram distantes da resposta esperada.

O exercício 3, que será remodelado pelo autor, conta com cinco itens, onde por falta de indicação, será diferenciado pelo tamanho de seus catetos.

No item 1, triângulo de catetos 3 e 1 unidades, dezesseis alunos (64%) conseguiram realizar a atividade, e nove alunos (36%) não desenvolveram corretamente.

No item 2, triângulo de catetos 1 e 1 unidades, dezoito alunos (72%) acertaram a construção, sendo que sete alunos (28%) não concluíram corretamente.

No item 3, triângulo de catetos 2 e 2 unidades, dezoito alunos (72%) realizaram a atividade corretamente, e sete alunos (28%) não concluíram.

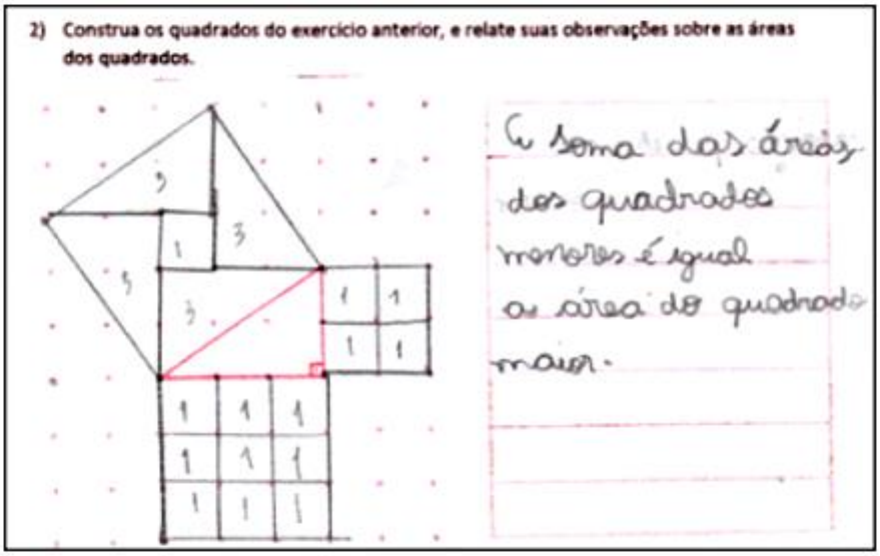


Figura 50: Descrição das observações feitas por aluno referente ao teorema de Pitágoras.

No item 4, triângulo de catetos 1 e 2 unidades, quinze alunos (60%) acertaram a atividade, sendo que dez alunos (40%) não conseguiram alcançar o objetivo.

No item 5, triângulo de catetos 3 e 3 unidades, dezenove alunos (76%) conseguiram realizar a atividade, e seis alunos (24%) não desenvolveram corretamente.

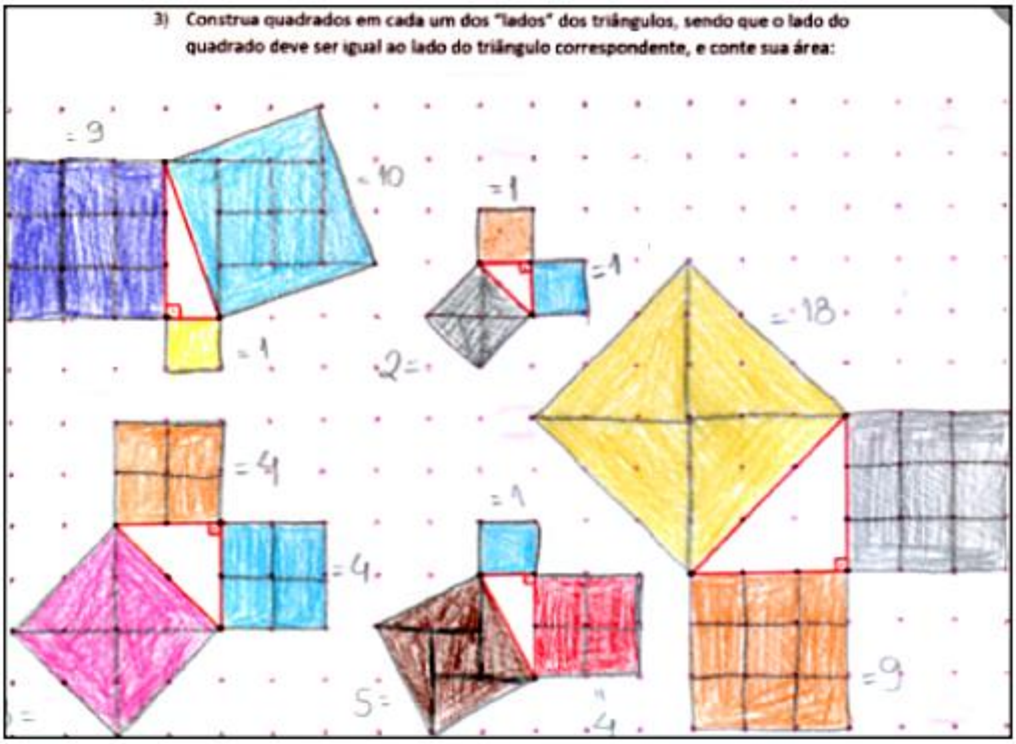


Figura 51: Construção e cálculo de áreas feita por aluno.

O interessante foi notar que três dos cinco alunos que conseguiram fazer o relato corretamente no exercício 2, não realizaram a divisão do quadrado da hipotenusa, indicando a quantidade de maneira espontânea, o que indica que construíram de maneira indireta o conhecimento sobre o resultado do Teorema de Pitágoras.

O exercício 4, que corresponde à descrição da contagem anterior em uma tabela, será analisada através de suas colunas, onde os itens a serem analisados são: catetos, soma dos catetos e hipotenusa.

No item 1, catetos, o índice de acerto foi de (92%) o que corresponde a vinte e três alunos, sendo que dois alunos (8%) desenvolveram a atividade de maneira errada.

No item 2, soma dos catetos, o percentual se manteve, com vinte e três alunos (92%) completando corretamente, e dois alunos (8%) não concluindo a atividade.

No item 3, hipotenusa, o índice de acerto passou para quinze alunos (60%), quatro (16%) acertaram de maneira parcial, e seis (24%) não desenvolveram a atividade.

4) Complete a tabela a seguir com os valores para a área dos catetos e da hipotenusa de cada triângulo do exercício anterior.

Figuras	Cateto 1	Cateto 2	Soma dos catetos	Hipotenusa
1	9	1	10	10
2	1	1	2	2
3	4	4	8	8
4	1	4	5	5
5	9	9	18	18

Figura 52: Tabela de medidas de de áreas completada por aluno.

O exercício 5, em seu item único, trouxe uma melhora significativa na sua porcentagem em relação a seu semelhante visto anteriormente (exercício 2, item 2), pois doze alunos (48%) conseguiram desenvolver uma escrita perto da esperada, e treze alunos (52%) ainda não alcançaram o objetivo esperado.

5) O que você pode concluir com a construção feita no exercício 3, e a tabela do exercício 4?

A soma dos quadrados menores
é igual ao quadrado maior

Figura 53: descrição do teorema de Pitágoras feita por aluno.

O exercício 6 era composto por cinco itens onde cada um será abordado abaixo de maneira individual.

No item (a), dezessete alunos (68%) desenvolveram o cálculo, alguns com pequenas falhas na execução, mas chegando ao resultado esperado. Oito alunos (32%) não conseguiram executar de maneira correta. A principal falha neste item é que os alunos indicaram que a potência três elevado ao quadrado resulta em seis e não nove como é o correto. A incidência desse fato foi encontrada em quatro alunos (50%) das respostas erradas.

No item (b), vinte alunos (80%) acertaram o cálculo, e os outros cinco alunos (20%) encontraram dificuldades no desenvolvimento.

No item (c), quinze alunos (60%) resolveram de maneira correta a atividade, quatro alunos (16%) deram como resposta raiz quadrada de quatorze, entendendo de maneira errada, que cinco elevado ao quadrado é dez, e os outros seis alunos (24%) não concluíram a atividade de maneira correta.

No item (d), o número de acerto foi de vinte alunos (80%), com cinco alunos (20%) indicando uma resposta errada.

No item (e), dezoito alunos (72%) acertaram a atividade, restando sete alunos (28%) respondendo de maneira errada.

É importante salientar que um aluno (4%) entregou as folhas de atividades em branco, não executando nenhuma das atividades.

Esses dados me levaram a acreditar, que a construção do quadrado sobre a hipotenusa, juntamente com a sua divisão e contagem, foram fatores preponderantes, que impediram que o aluno construísse a competência sobre Teorema de Pitágoras.

Ao final da oficina, ocorreu uma espécie de entrevista coletiva, na qual o professor fez considerações sobre todos as atividades propostas. Em relação às falas proporcionadas pelos alunos, ficou claro que, houve sim, uma grande dificuldade no momento da construção, principalmente, na produção dos quadrados sobre as hipotenusas e contagem dos mesmos. Outro aspecto levantado é que muitos só conseguiram entender o resultado do Teorema de Pitágoras, a partir do exercício de número três, quando o professor insistentemente questionava, se eles não estariam encontrando alguma relação entre os quadrados. Na aplicação, os alunos apontaram que o teorema pode ser bem útil na sua vida escola, pois lembraram de alguns exercícios que foram propostos na Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP), relativo ao primeiro bimestre. Essa avaliação analisa o rendimento curricular dos alunos do estado de São Paulo.

A figura a seguir mostra uma resolução feita por um aluno, sendo que a folha de atividades está anexada na seção **Apêndice C**.

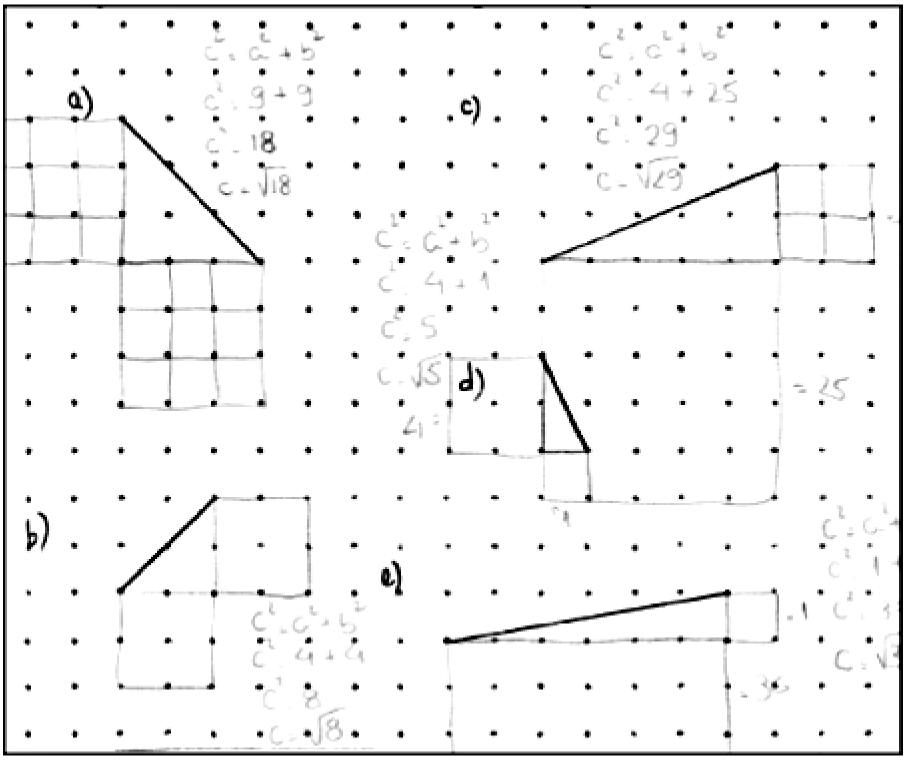


Figura 54: Aplicação do teorema de Pitágoras feita por aluno.

Sem mais a mencionar, declaro finalizada a oficina 1- Instigando o aluno na obtenção do resultado do Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

4.6.2. Oficina 2 - A provável demonstração feita por Pitágoras.

A Oficina 2 foi realizada por 32 alunos, e suas folhas de atividades foram distribuídas de maneira individual.

Na folha de atividades 1, o professor iniciou com uma introdução histórica, situando o aluno a época que viveu Pitágoras, sobre sua escola, e relatos que deram a fama a ele, como o pai da matemática. Um dos questionamentos feitos pelos alunos, foi se o nome Pitágoras referia mesmo a uma pessoa, pois em seus pensamentos achavam que poderia ser a nomenclatura de um objeto em outro idioma. A introdução teve que ser curta para que não comprometesse o tempo da oficina.

Em seguida, os alunos começaram a colorir e recortar as figuras geométricas, sendo que entre introdução, pintura e recorte se passaram vinte minutos.

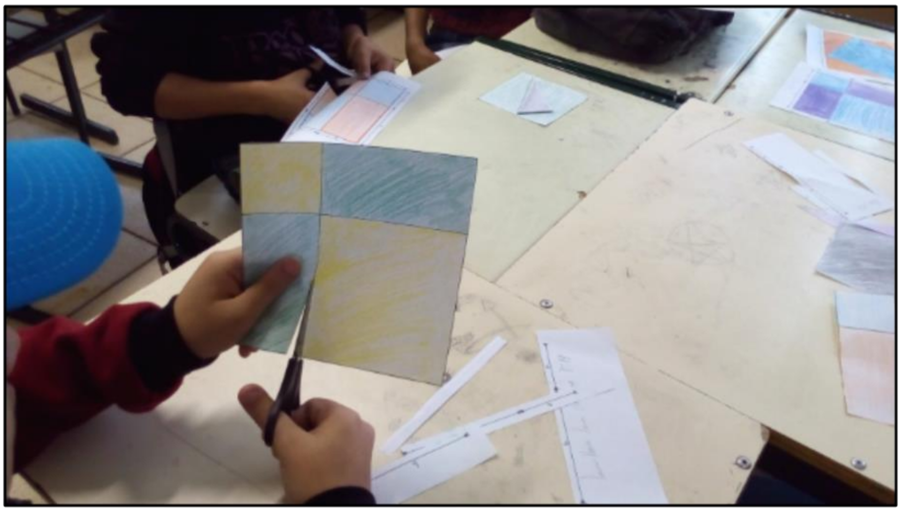


Figura 55: Fotografia feita durante a oficina 2.

Após a etapa preparatória concluída, foi entregue a segunda folha de atividades, onde os itens de número II e III propunham que fosse desenvolvida uma colagem, logo os alunos não encontraram dificuldades na conclusão, obtendo um aproveitamento de 100%.

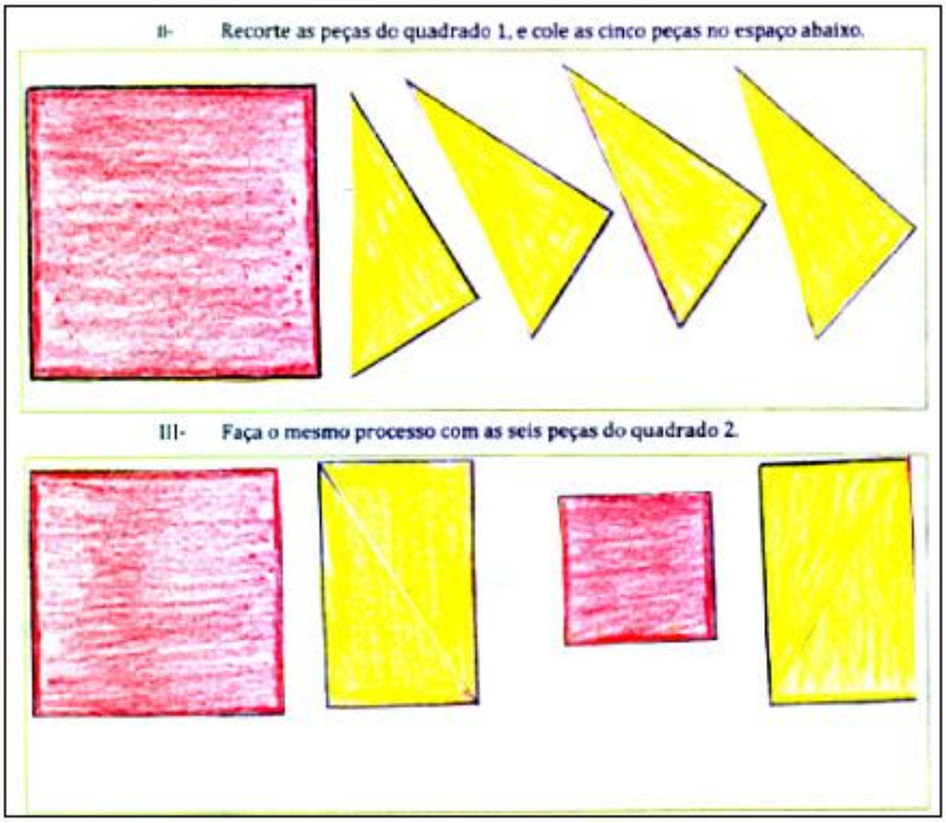


Figura 56: Colagem feita por aluno.

O item IV, último da folha de atividades 2, foi abordado de forma coletiva, tendo o professor como mediador o conhecimento, sendo que os alunos foram indagados de maneira a construir um conhecimento sobre o tema. O assunto foi facilmente absorvido, pois a atividade trazia figuras geométricas pintadas e recortadas de maneira semelhante, fruto da aplicação da aula teste, onde o autor percebeu em alguns alunos a dificuldade na percepção que um retângulo possa ser dividido em dois triângulos de mesma área.

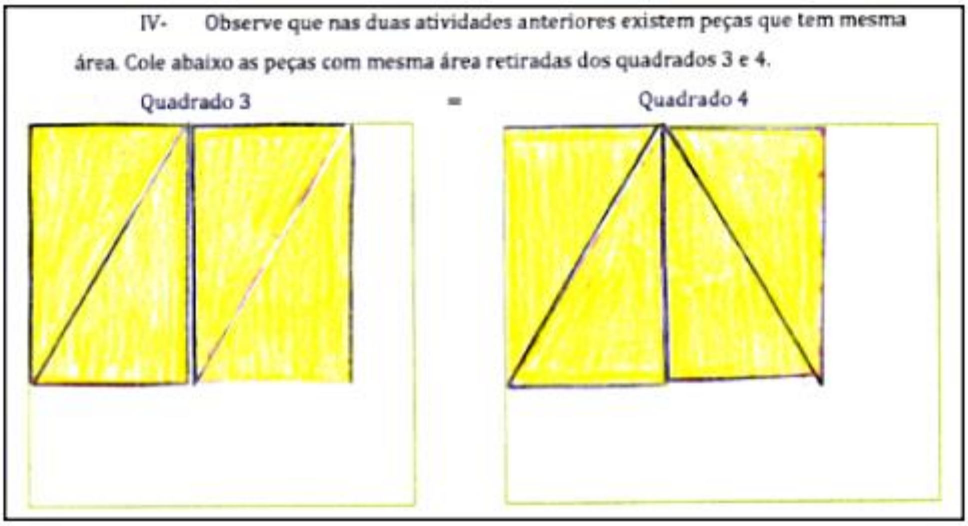
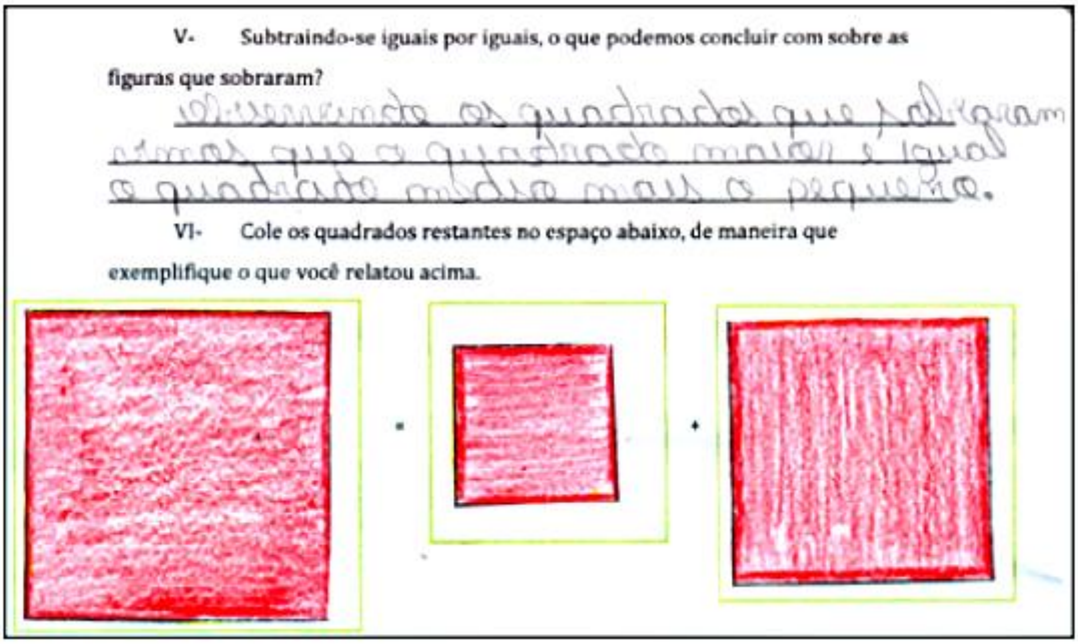


Figura 57: Comparação entre áreas feita por aluno.

Os itens V e VI foram aplicados de maneira conjunta, pois o autor dispôs a atividade em ordem invertida, atividade para a qual o autor propõe correção, e a nova folha de atividades ficará disponível no **Apêndice D**.

O aluno tinha em mãos os quadrados que compõem o resultado do Teorema de Pitágoras, e no item VI exerceu uma simples colagem, sendo que professor encaminhou a sequência didática sempre com a preocupação de que o aluno mantivesse a igualdade, fator essencial para a conclusão.

Para finalizar, foi proposto que o aluno relatasse no item V sua conclusão sobre a colagem que acabara de desenvolver. Apareceram respostas variadas, e foi notada a grande dificuldade dos alunos em expor no papel suas ideias, sendo que vinte e quatro alunos (75%) escreveram um texto com fundamentação, os outros oito alunos (25%) não se aproximaram da resposta esperada.


V- Subtraindo-se iguais por iguais, o que podemos concluir com sobre as figuras que sobraram?

Observando os quadrados que sobraram vimos que o quadrado maior é igual o quadrado médio mais o pequeno.

VI- Cole os quadrados restantes no espaço abaixo, de maneira que exemplifique o que você relatou acima.

Figura 58: Descrição do teorema de Pitágoras feita através da igualdade entre figuras.

Para a transcrição do teorema da forma geométrica para a algébrica, o professor utilizou a produção de um painel e com os alunos fez todas as passagens necessárias à conclusão. É importante salientar que a função do professor foi a de mediador do conhecimento, pois os alunos foram induzidos a conduzir a etapa através de questionamentos feitos pelo docente.

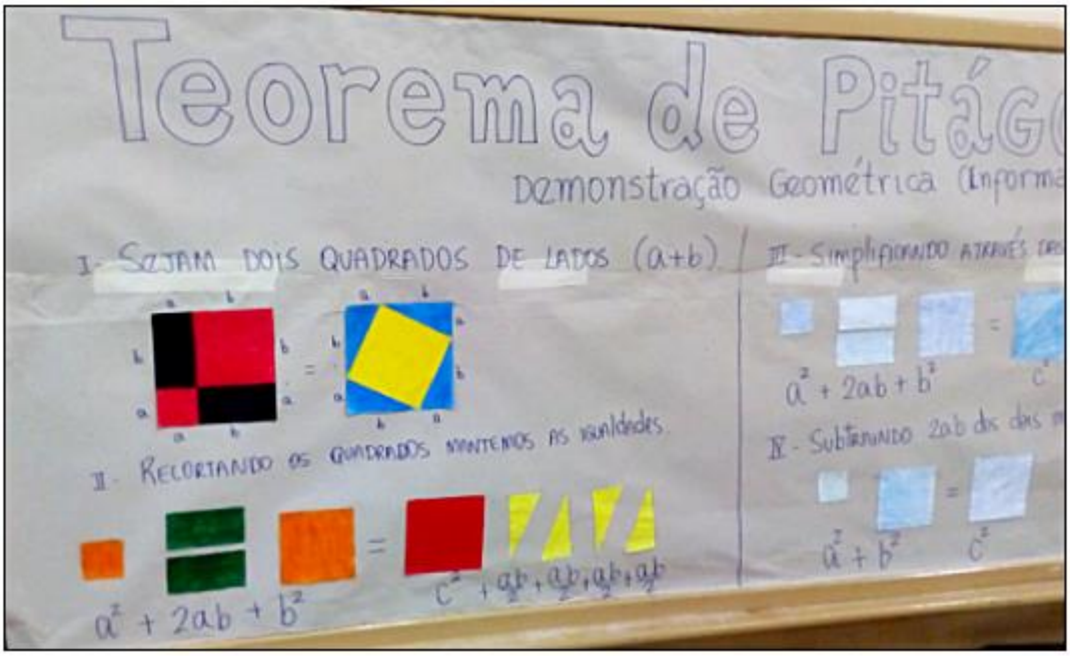


Figura 59: Painel do passo a passo da demonstração proposta na oficina 2.

O entendimento da atividade aproximou-se dos 60%, número apontado pela participação ativa dos alunos nas passagens da demonstração, os outros 40% da sala não se posicionaram, logo o professor não conseguiu concluir se a atividade estava alcançando essa fatia dos discentes.

A oficina 2 – *A provável demonstração feita por Pitágoras,* teve sua aplicação considerada gratificante, pois diferentemente das aulas “normais” (adjetivo utilizado pelos alunos), a participação foi maciça, notando a mudança no semblante dos alunos, proporcionando um ambiente harmonioso, algo que deveria ser comum nas escolas.

4.6.3. Oficina 3 - Utilizando a ferramenta *Geogebra* para encontrar o resultado do *Teorema de Pitágoras*.

A oficina 3 teve sua realização feita por 28 alunos, onde foram formados propositalmente oito trios e duas duplas, totalizando dez grupos, número que facilitou a descrição das análises. Os valores aplicados às respostas de cada grupo são de 10% do total.

Na etapa expositiva da oficina, conforme os comandos eram dados, o professor responsável circulava ao redor da sala de informática, com o objetivo de fazer anotações das compreensões dos alunos, base para o relatório que se segue.

A ferramenta utilizada pelo professor foi o datashow, um projetor ligado a um computador, por onde a imagem da tela do computador foi projetada em um quadro-branco, facilitando a visualização dos alunos. O sistema funcionou perfeitamente, podendo ser indicado aos professores que queiram desenvolver a Oficina.

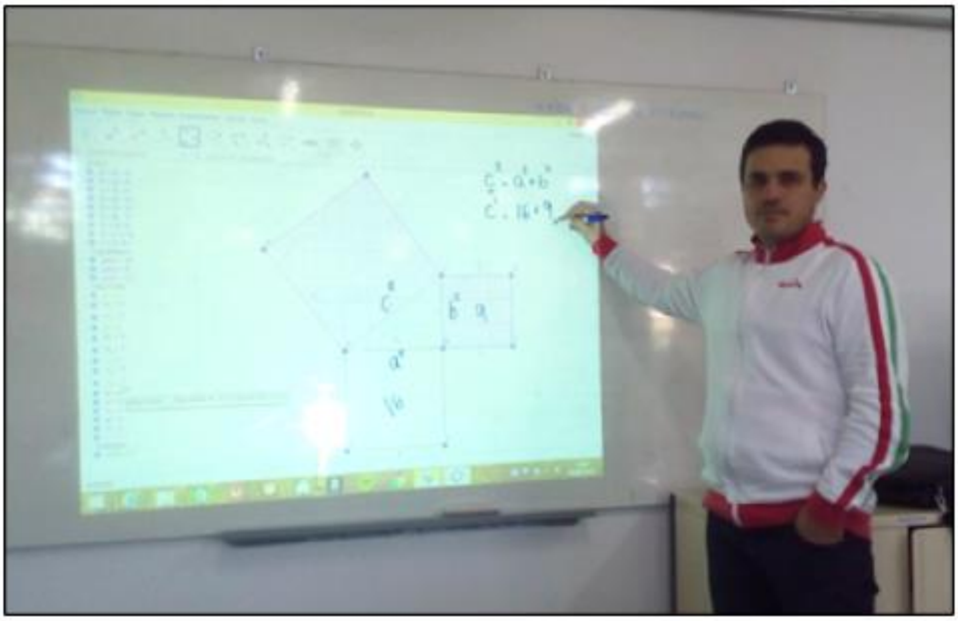


Figura 60: Fotografia tirada durante a exposição feita pelo professor na oficina 3.

Iniciando a oficina, no primeiro comando (*clicar com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização, onde aparecerá uma nova janela, e nela deverá desabilitar os eixos, e habilitar a malha quadriculada)*, a janela se fechou antes que o aluno conseguisse habilitar a malha quadriculada, logo o professor notou a necessidade de refazê-lo parcialmente. O novo comando é: *clicar com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização, onde aparecerá uma nova janela, e nela deverá desabilitar os eixos, repetindo o processo anterior deve-se habilitar a malha quadriculada*.

Na formação do triângulo retângulo os alunos não encontraram dificuldades, concluindo a figura geométrica com exatidão, a visualização das medidas dos segmentos e valores para seus pontos na janela de álgebra também ocorreram com naturalidade.

Para a construção dos quadrados sobre os catetos e hipotenusa, o professor teve que realizar a tarefa passo a passo, tendo que além de demonstrar na projeção, se deslocar até os computadores, sanando pequenas dúvidas dos alunos, pois a ordem com que são selecionados os pontos influenciam no lado em que os quadrados são construídos, em relação ao segmento AB, isso pode ser verificado nas construções da figura 61.

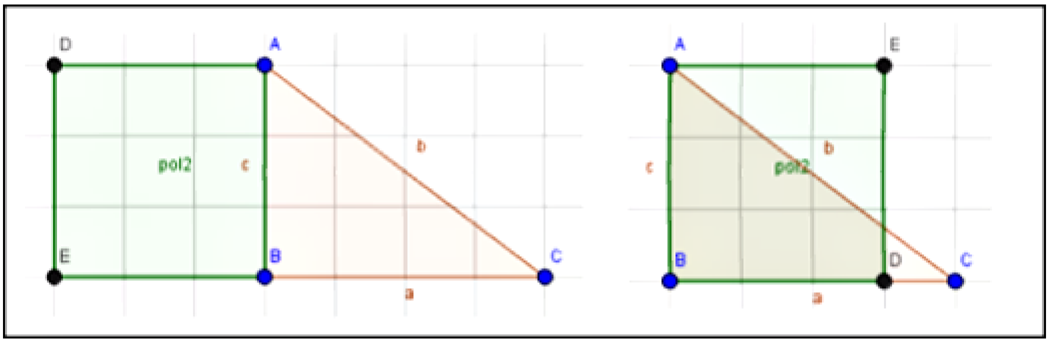


Figura 61: Imagem retratando eventual erro na construção dos quadrados.

O professor fez considerações como previsto em relação às áreas dos quadrados, demonstrando na janela de álgebra seus valores, ficando visível para o aluno que a soma das áreas dos polígonos 2 e 3, que se referem aos catetos, é igual à área sobre a hipotenusa, polígono 4, resultado do Teorema de Pitágoras. O professor também mostrou a medida do segmento AC, item que não estava previsto na análise a priori.

Após o encerramento da exposição, foram entregues a cada grupo as folhas de atividades para serem respondidas.

A primeira atividade foi uma construção, e os grupos tinham liberdade em propor o tamanho dos triângulos. Os números indicam que cinco grupos (50%) escolheram os números dois e três como medidas para seus catetos, dois grupos (20%) preferiram dois e um, dois grupos (20%) três e três como opção e um grupo (10%) quatro e dois.

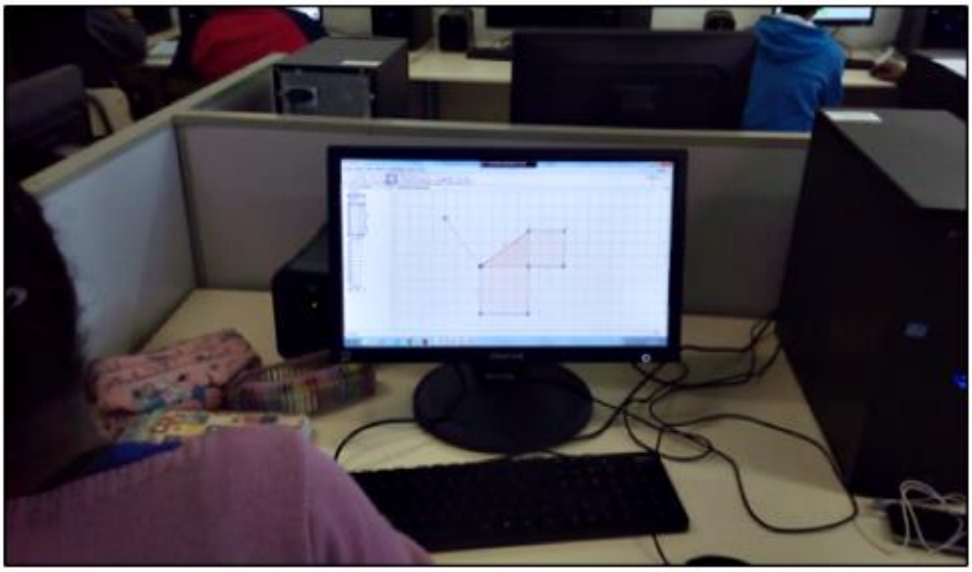
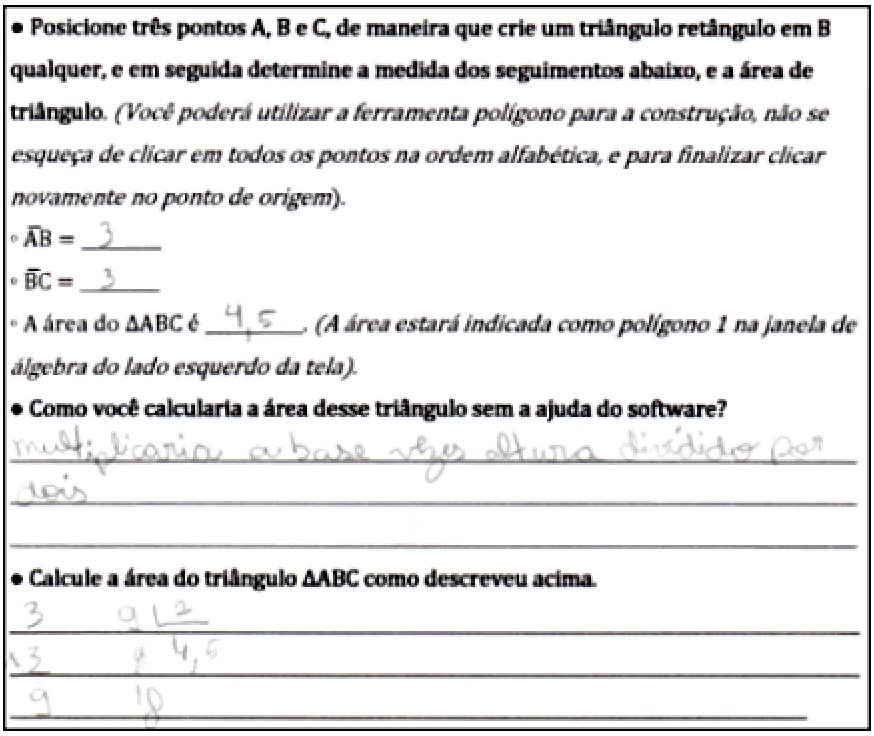


Figura 62: Fotografia tirada na oficina 3.

A respeito da área, todos os grupos (100%) acertaram o resultado, dando a entender que conseguem fazer uma leitura correta do software.

Em relação a como os alunos calculariam a área do triângulo retângulo sem a ajuda do software, o resultado foi que sete grupos (70%) apontaram a multiplicação da base pela altura dividido por dois, o que o autor considerou como resposta correta, dois grupos (20%) esqueceram de indicar que deveriam dividir por dois a multiplicação da base pela altura, e um grupo (10%) não opinou.

Foi então pedido para que demonstrassem o cálculo que acabaram de descrever, um fato no mínimo curioso foi notado, pois o índice de acertos aumentou para 80%, sendo que 70% redigiram de maneira correta o cálculo para a área, deixando apenas 20% como atividades incorretas. Portanto, após a correção das atividades o autor procurou o grupo que fez a descrição errada e o cálculo certo, questionando sobre o ocorrido, a resposta encontrada foi que ao comparar o cálculo com o valor indicado pelo software, o grupo percebeu que sua solução era o dobro do correta, então resolveram dividir o resultado por dois, o problema é que esqueceram de modificar sua descrição.



• Posicione três pontos A, B e C, de maneira que crie um triângulo retângulo em B qualquer, e em seguida determine a medida dos seguimentos abaixo, e a área de triângulo. *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono para a construção, não se esqueça de clicar em todos os pontos na ordem alfabética, e para finalizar clicar novamente no ponto de origem).*

◦ $\overline{AB}$ = 3

◦ $\overline{BC}$ = 3

◦ A área do ΔABC é 4,5. *(A área estará indicada como polígono 1 na janela de álgebra do lado esquerdo da tela).*

• Como você calcularia a área desse triângulo sem a ajuda do software?

multiplicaria a base vezes altura dividido por dois

• Calcule a área do triângulo ΔABC como descreveu acima.

3 9 | 2

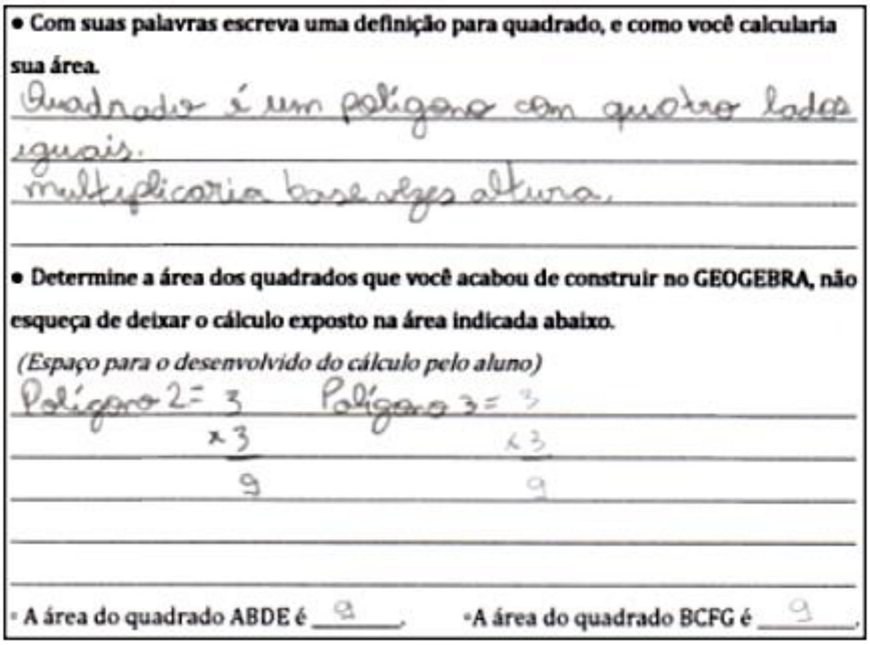
x3 4,5

9 18

Figura 63: Resolução proposta por aluno sobre medidas de segmentos e área do triângulo.

Na definição para o quadrado, a correção do autor indicou que sete grupos (70%) a descreveram de maneira satisfatória, número este que ficou abaixo do esperado, pois o professor expos o conteúdo no início da oficina, e quando questionados se haviam entendido a definição responderam que sim, os outros três grupos (30%) não relataram de maneira correta.

Os cálculos das áreas dos quadrados sobre os catetos foram feitos de maneira correta por todos os grupos (100%), mesmo que em três grupos (30%) o professor notou que o método utilizado foi a contagem dos quadrados, maneira idêntica a proposta na oficina 1.



• Com suas palavras escreva uma definição para quadrado, e como você calcularia sua área.

Quadrado é um polígono com quatro lados iguais.
multiplicaria base vezes altura.

• Determine a área dos quadrados que você acabou de construir no GEOGEBRA, não esqueça de deixar o cálculo exposto na área indicada abaixo.

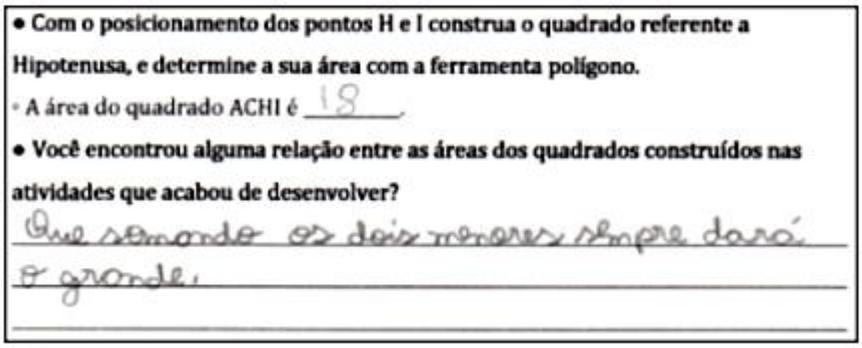
(Espaço para o desenvolvido do cálculo pelo aluno)

Polígono 2 = 3 x 3 = 9   Polígono 3 = 3 x 3 = 9

• A área do quadrado ABDE é 9.   • A área do quadrado BCFG é 9.

Figura 64: Definição para o quadrado e cálculo de área feita por um grupo de alunos.

Na indicação da área do quadrado sobre a hipotenusa ocorreu o total de acerto (100%), o que é considerado normal, pois o valor estava disposto na janela de álgebra para sua visualização, e seu cálculo não era necessário.



• Com o posicionamento dos pontos H e I construa o quadrado referente a Hipotenusa, e determine a sua área com a ferramenta polígono.

• A área do quadrado ACHI é 18.

• Você encontrou alguma relação entre as áreas dos quadrados construídos nas atividades que acabou de desenvolver?

Que somando os dois menores sempre dará o grande.

Figura 65: Observação sobre o teorema de Pitágoras
feita por um grupo de alunos.

Em relação à descrição do Teorema de Pitágoras nove grupos (90%) conseguiram fazer um relato tido como aceitável pelo autor, um grupo (10%) estava com um texto confuso e não foi considerado.

A construção feita na malha de pontos obteve um índice de (100%), pelo motivo de estar disposta na tela do computador, necessitando apenas ser copiada.

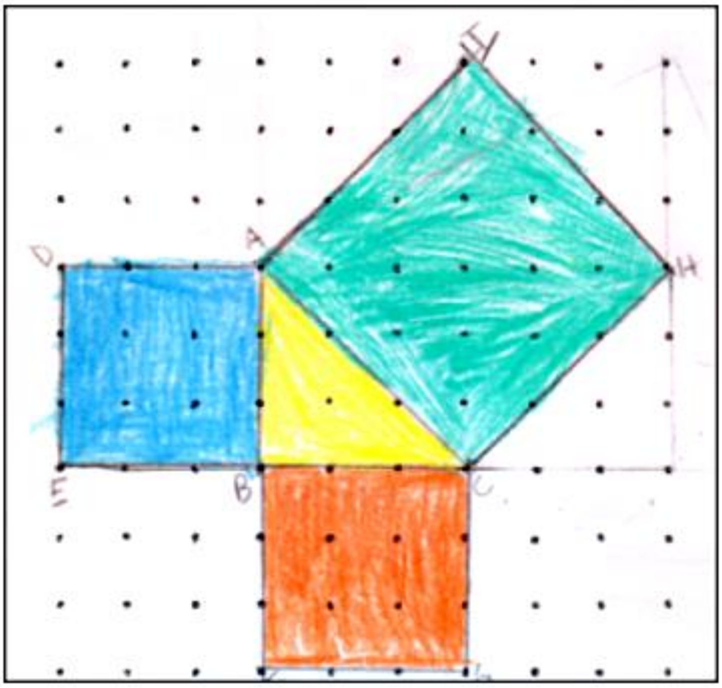
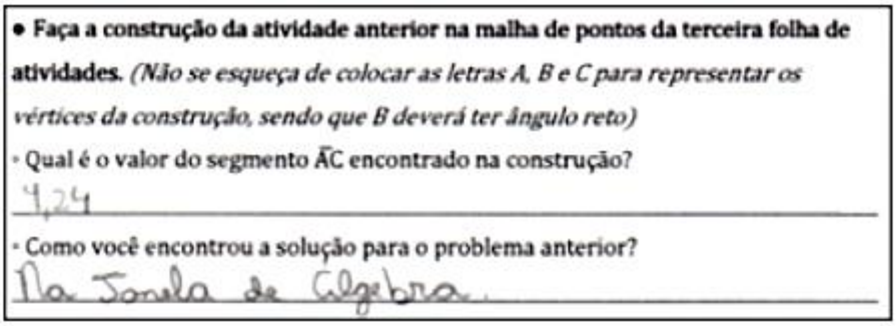


Figura 66: Capelo Franciscano construido por aluno.

Em relação ao tamanho da hipotenusa, todos os grupos conseguiram indicar seu valor de maneira correta (100%), e quando questionados sobre como chegaram a essa resposta, de maneira unânime (100%) descreveram que retiraram o valor da janela de álgebra. Sobre o cálculo dessa hipotenusa, o índice caiu para (70%), pois o autor encontrou falha de execução em três grupos (30%).



• **Faça a construção da atividade anterior na malha de pontos da terceira folha de atividades.** *(Não se esqueça de colocar as letras A, B e C para representar os vértices da construção, sendo que B deverá ter ângulo reto)*

• Qual é o valor do segmento $\bar{AC}$ encontrado na construção?

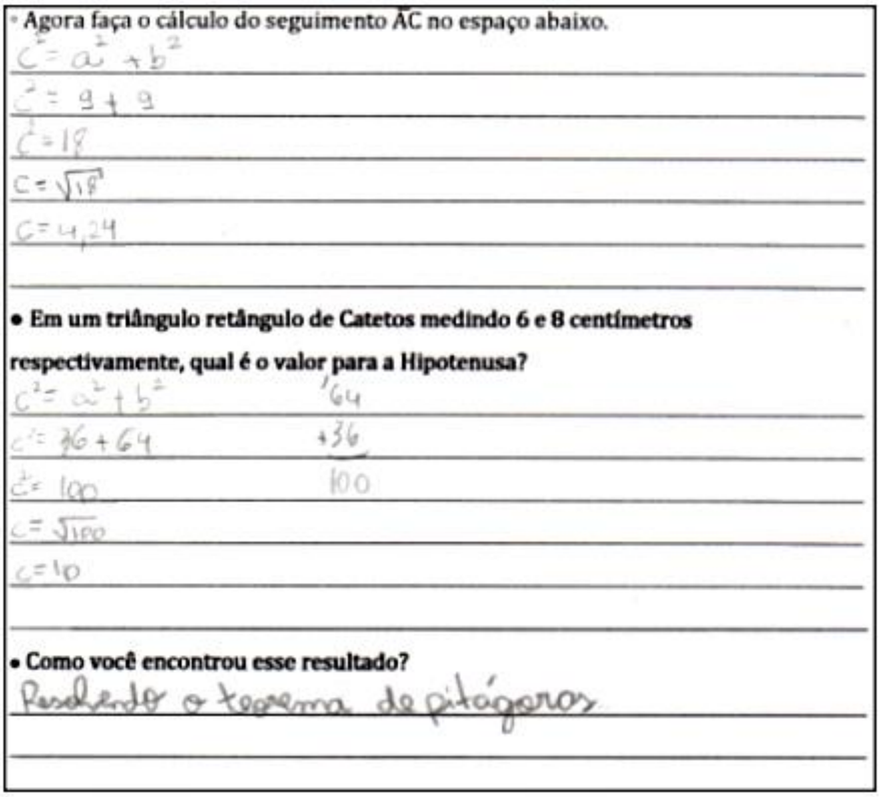
4,24

• Como você encontrou a solução para o problema anterior?

Na Janela de Álgebra.

Figura 67: Encontrando o resultado para a hipotenusa.

Quando questionados sobre a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujas medidas são 6 e 8 centímetros, o índice de atividades consideradas certas pelo autor foi de 60%, os demais 40% tiveram erro na execução. Em relação a como chegou ao resultado, 40% dos grupos indicaram que o encontraram fazendo a soma dos quadrados dos catetos, valor esse referente ao quadrado sobre a hipotenusa, para finalizar extraíram a raiz quadrada, 40% realizaram o cálculo deixando-o indicado na folha de atividades, porém a metade desse valor 20% cometeu erro de execução, os outros 20% não opinaram.


- Agora faça o cálculo do seguimento AC no espaço abaixo.

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9 + 9$

$c^2 = 18$

$c = \sqrt{18}$

$c = 4,24$

- Em um triângulo retângulo de Catetos medindo 6 e 8 centímetros respectivamente, qual é o valor para a Hipotenusa?

$c^2 = a^2 + b^2$ $\quad$ 64

$c^2 = 36 + 64$ $\quad$ +36

$c^2 = 100$ $\quad$ 100

$c = \sqrt{100}$

$c = 10$

- Como você encontrou esse resultado?

Resolvendo o teorema de pitágoras

Figura 68: Aplicação do resultado do teorema de Pitágoras feita por um grupo de alunos.

A oficina obteve a melhor avaliação em relação às opiniões dadas pelos alunos, sendo considerada inovadora, pois utilizou uma ferramenta computacional, o que antes era impensada na disciplina de matemática. Outro fato que também chamou a atenção dos alunos foi a mistura entre a construção feita no computador e as folhas de atividades, onde conseguiam fazer comparações entre seus resultados.

4.6.4. Oficina 4 - A “demonstração sem palavras” atribuída a Thabit Ibn – Qurra.

A oficina 4 teve sua realização feita por 25 alunos dispostos de maneira individual. Como se trata de uma atividade onde foram utilizados apenas pintura, recorte e colagem, a análise será feita através de relatos e observações feitas pelo autor.

É importante ressaltar que o objetivo da oficina é fazer uma demonstração sem palavras do Teorema de Pitágoras, e por esse motivo as folhas de atividades trouxeram apenas figuras concebidas através de relatos históricos atribuídos a Thabit Ibn-Qurra indicando como deveriam ser feitas as passagens até sua conclusão.

A oficina se iniciou com uma constatação histórica feita pelo professor, onde tentou situar seus alunos ao período onde ocorreu o fato e a naturalidade do matemático em questão, entendendo que o conteúdo é mais valorizado pelo discente quando consegue identificar vestígios de realidade no acontecimento.

Após a exposição, foi feita a entrega da primeira folha de atividades, onde o autor propôs que os alunos pintassem o quadrado de uma cor e os triângulos retângulos de outra, tendo como objetivo a melhor visualização das outras etapas da sequência didática.

Com o término da pintura o professor fez uma nova etapa de aula expositiva, desta vez se utilizando da lousa, onde recriou o quadrado que compõe a folha de atividades 1 e de maneira conjunta determinou os valores das áreas dos triângulos retângulos $\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)$ e quadrado (c^2). A principal questão abordada pelo professor nesta etapa foi fixar as medidas dos lados do quadrado inicial $(a + b)$, onde propôs que o menor segmento teria o valor a e o maior b, o valor c para a hipotenusa apareceu de maneira natural, pois quando o professor questionou com a pergunta "se essa medida menor vale a, e a outra vale b, quanto valerá a hipotenusa, que é maior que as duas? ", rapidamente a resposta c foi citada por alguns alunos, e o professor logo tratou de fazer uma constatação sobrepondo os lados para que os alunos visualizasse a diferença entre as medidas.

Ao fazer a decomposição do quadrado inicial, os alunos receberam a folha de atividades 2 e encontraram um passo a passo no formato de imagens indicando como chegar a etapa final da oficina.

Nestas passagens os alunos não encontraram dificuldades, pois relataram que as imagens indicavam, de maneira clara e objetiva como deveriam realizar as colagens e recortes. Portanto, o autor concluiu que este foi o ponto alto da oficina, uma vez que o aluno pode desenvolver as ações sem a ajuda externa.

Figura 69: Decomposição do quadrado feita por um aluno.

Na parte final, como era esperado, o aluno desenvolveu a atividade de maneira mais prática que a realizada na aula teste, pelo fato do autor ter criado o tabuleiro onde foram coladas suas peças, o que facilitou muito sua conclusão.

Ao perceber que o aluno havia finalizado a oficina, o professor tratou de fazer abordagens a respeito do resultado encontrado, fazendo questão de reiterar que as figuras utilizadas para a colagem tinham juntas área igual a c^2, e que em momento algum teve diminuição da mesma. Ao ser questionado por um aluno que houve uma decomposição, e se naquele instante a área se alterou, o professor procurou abrir o questionamento para os demais, com o intuito de que chegassem a uma conclusão, sem alguma imposição feita pelo aplicador. A estratégia encontrada surtiu o efeito esperado, pois os alunos chegaram a um denominador comum, construindo seu conhecimento sobre o tema, item que o autor tinha com hipótese a ser alcançada com a sequência didática.

Figura 70: Colagem feita por um aluno.

A oficina 4 ultrapassou as expectativas do autor, pois os alunos concluíram sem muitas dificuldades as atividades propostas, construindo de maneira conjunta conhecimentos sobre o tema abordado. Alguns alunos relataram que aulas que utilizam trabalhos manuais são mais atraentes, pois passar cinco horas na escola assistindo a exposições de temas variados, sentados em um local fechado com pessoas de diferentes personalidades, sem produzir nada, cria uma rotina improdutiva, transformando o ambiente escolar em carcerário, promovendo a indisciplina. Por esse motivo o autor conclui que diversificar o método de ensino pode ser uma opção para a melhor construção do conhecimento, e entende que a oficina aplicada atingiu os objetivos propostos.

4.6.5. Oficina 5 - Uma demonstração particular do Teorema de Pitágoras através do Tangram.

A oficina 5 teve sua realização feita por 28 alunos dispostos de maneira individual. A análise será feita através das respostas disponibilizadas pelos alunos e observações do professor, em relação ao andamento da oficina e em entrevistas realizadas com os alunos.

A oficina iniciou com uma introdução por parte do professor, apresentando a figura do Tangram, a qual foi relacionada em diversas etapas do ensino, fatores históricos e características geométricas de cada polígono que o compõe.

Após essa conversa inicial, reiterou que as figuras presentes no final da folha de atividades 1 são semelhantes, e que através delas ocorrerá a demonstração particular do Teorema de Pitágoras.

Em seguida, os alunos fizeram a pintura das figuras geométricas do Tangram. Essa etapa tinha o objetivo de analisar se o aluno apresenta a competência de comparar áreas de figuras planas, a partir de um critério pré-estabelecido. No momento da aplicação o autor notou a ausência do critério base para a pintura, e para que a atividade tivesse sentido a fez de forma oral. A folha de atividades deverá ser alterada buscando uma melhor qualidade, por esse motivo o autor vai completar o primeiro comando que ficará assim: *Pinte os dois quadrados de maneira que as figuras de mesma área tenham cores iguais, levando em consideração que o triângulo pequeno tenha área de uma unidade quadrada.*

Ao corrigir a atividade o autor notou que apenas 6 alunos (22%) coloriram os quadrados de maneira correta, ficando claro que a habilidade deve ser retomada em futuras aulas, 20 alunos (72%) pintaram figuras semelhantes com cores iguais, os outros 2 alunos (6%) concluíram a atividade de maneira aleatória.

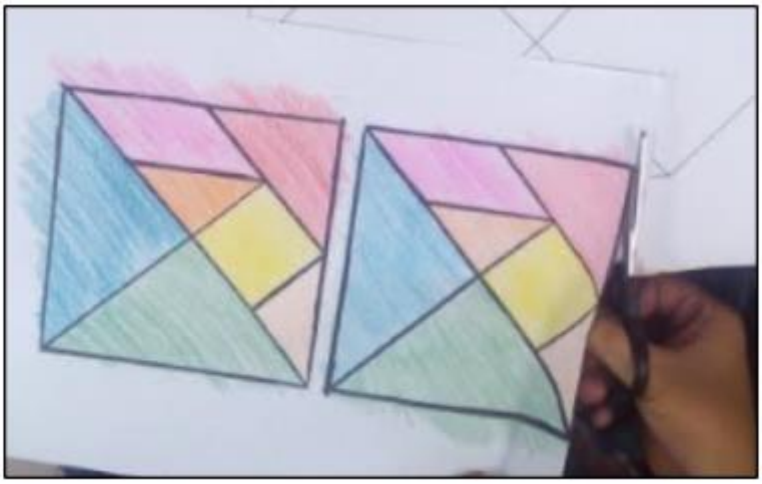


Figura 71: Quadrados pintados de maneira equivocada por um aluno.

No segundo comando, no qual o aluno deveria utilizar o raciocínio dedutivo para resolver um problema de área, o professor resolveu interferir em seu andamento, pois percebeu que a etapa de pintura anterior estava sendo executada de maneira equivocada, e que o mesmo iria acontecer. Por esse motivo propôs aos alunos que imaginassem a divisão de todas as figuras em triângulos pequenos, o mesmo que foi apontado com área igual a uma unidade quadrada. Essa intervenção será acrescentada na nova folha de atividades que estará disposta no **Apêndice D.**

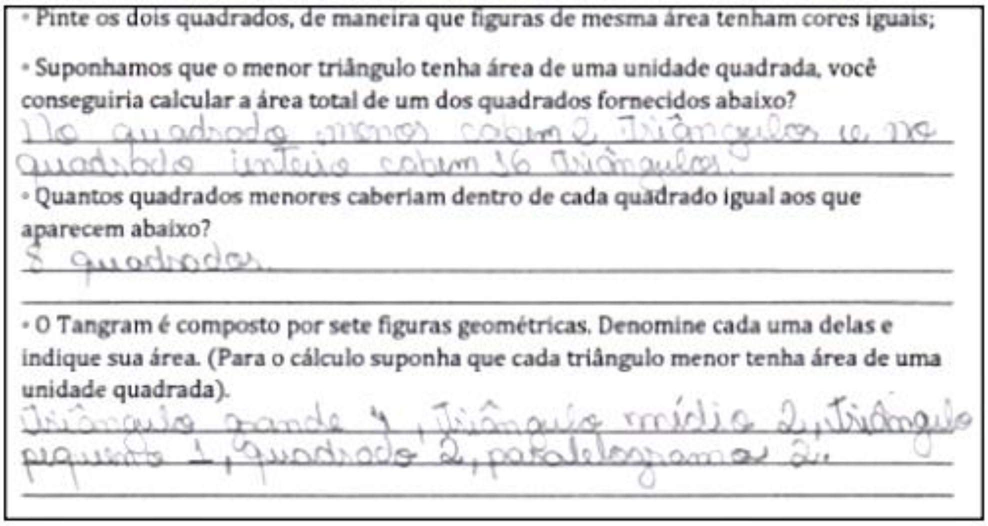
Em relação à área do quadrado, 20 alunos (71%) acertaram a atividade, os outros 8 alunos (29%) não compreenderam a divisão.

Após uma entrevista feita com um aluno que não havia indicado o valor correto para a área do quadrado, o autor notou que a dificuldade encontrada nesta etapa foi a de dividir o triângulo grande em quatro unidades do menor, e entendeu que esse erro é de fácil correção, e que no momento da devolutiva desenvolverá a atividade com o aluno para sanar essa dificuldade.

O próximo item questionava quantos quadrados pequenos caberiam no interior do grande. O exercício poderia ser resolvido de várias maneiras, sendo que a moda nas resoluções foi o de quadricular o quadrado maior com a malha tendo a medida do menor. Esse fato é considerado normal pelo autor, pois o aluno acabou de resolver um problema por esse método, e de imediato acreditou que fosse a melhor solução.

O índice de acerto para essa atividade foi de 22 alunos (79%), o que representa um nível excelente de entendimento, os outros 6 alunos (21%) opinaram de maneira pouco significativa.

O último item da folha de atividades 1, solicitava que os alunos descrevessem os nomes e a áreas de cada figura geométrica que fazem a composição do Tangram. Todos os nomes foram escritos de maneira correta pelos alunos, com exceção ao paralelogramo, onde apareceram nomenclaturas variadas para a figura. Em relação as áreas, 18 alunos (64%) acertaram todos os valores, 8 alunos (29%) cometeram pequenos erros e 2 alunos (7%) tiveram poucos acertos.



• Pinte os dois quadrados, de maneira que figuras de mesma área tenham cores iguais;

• Suponhamos que o menor triângulo tenha área de uma unidade quadrada, você conseguiria calcular a área total de um dos quadrados fornecidos abaixo?

No quadrado menos cabem 8 triângulos e no quadrado inteiro cabem 16 triângulos.

• Quantos quadrados menores caberiam dentro de cada quadrado igual aos que aparecem abaixo?

8 quadrados.

• O Tangram é composto por sete figuras geométricas. Denomine cada uma delas e indique sua área. (Para o cálculo suponha que cada triângulo menor tenha área de uma unidade quadrada).

triângulo grande 4, triângulo médio 2, triângulo pequeno 1, quadrado 2, paralelogramo 2.

Figura 72: Comparação entre áreas feita por um aluno.

Com isso, o autor pediu para que o aluno retirasse os quadrados da folha de atividades 1 e a recolheu. Depois fez a entrega da folha de atividades 2, prosseguindo o andamento da oficina.

Para a continuação da oficina os alunos recortaram em volta de um dos quadrados retirados da primeira folha de atividades e fez a decomposição do segundo. Em seguida os mesmos foram colados sobre um tabuleiro. Após a colagem o professor fez algumas considerações a respeito do resultado que acabara de ser encontrado, indicando que era um caso particular do Teorema de Pitágoras, onde seus quadrados construídos sobre os catetos tinham mesma área.

Em relação à colagem, todos os alunos concluíram com exatidão essa etapa. Porém era notório a dificuldade que alguns encontraram para sua finalização, mas no geral o autor considerou a atividade satisfatória.

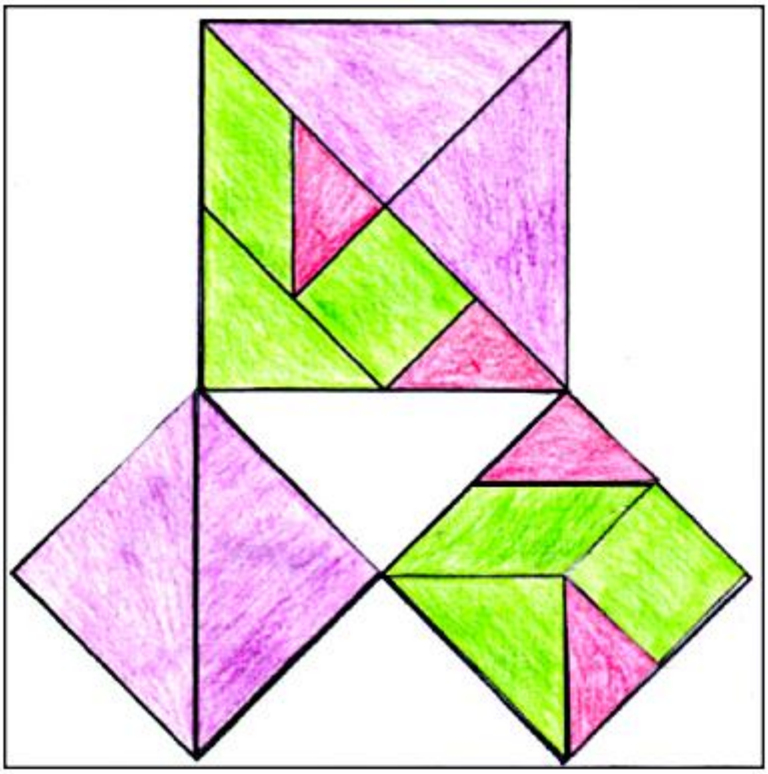


Figura 73: Tabuleiro oficina 5 completo.

Após a colagem os alunos foram questionados em relação às áreas dos quadrados sobre os catetos, sendo que 19 alunos (68%) indicaram corretamente seu valor, os outros 9 alunos (32%) erraram esse item.

A próxima atividade era a indicação do nome do triângulo utilizado na composição do tabuleiro. Neste caso, o aluno deveria assinalar uma entre três alternativas propostas pelo autor. Os resultados indicaram que 6 alunos (21%)

assinalaram a alternativa triângulo equilátero como opção correta, 15 alunos (54%) isósceles e 7 alunos (25%) escaleno. O autor acredita que (54%) de acerto é um índice aquém do esperado, por esse motivo seja necessária uma aula de revisão do conteúdo.

• Monte o quebra cabeça no tabuleiro com as peças decompostas, o outro quadrado deverá ser colado abaixo do triângulo.

• Após a colagem determine a área de cada quadrado.

Os dois menores 8, o quadrado grande 16.

• Assinale o espaço que corresponde ao nome do triângulo que compõe o tabuleiro abaixo.

( ) EQUILÁTERO (X) ISOSCELES ( ) ESCALENO

Figura 74: Classificação do triângulo em relação a seus lados.

A última atividade dessa oficina se tratava de uma aplicação do teorema, onde o autor fornecia o valor para a hipotenusa, e os questionava sobre as medidas dos catetos, deixando bem claro que os mesmos eram iguais. Nesta atividade foi deixado um espaço para o cálculo, mesmo entendendo que não havia necessidade, pois, a área do quadrado estava disponível em atividades trabalhadas anteriormente, faltando apenas que o aluno extraísse ou deixasse indicado o valor dentro de uma raiz quadrada.

Os dados indicaram que 17 alunos (61%) concluíram de maneira satisfatória o que era pedido, sendo que dentre esses 9 alunos (53%) não efetuaram o cálculo, indicando soluções mais objetivas, os 11 alunos (39%) restantes não chegaram a uma solução significativa.

• Se a hipotenusa desse triângulo mede 4 unidades, quanto deve medir cada cateto? Desenvolva o cálculo no espaço ao lado.

Se a hipotenusa mede 4 o cateto mede 2.

Figura 75: Cálculo equivocado feito por um aluno em relação a hipotenusa.

Com esses dados podemos acreditar que a aplicação do teorema pode não estar muito clara para o aluno, devido à falta de familiarização com as propriedades algébricas, mas esse item não preocupa o autor, pois o objetivo principal das oficinas é demonstrar e dar ferramentas para que o aluno construa conhecimentos significativos sobre tema, a parte da utilização do resultado merece uma nova dissertação a seu respeito.

CONCLUSÃO

Foram observados através da análise a posteriori, que as oficinas propostas pelo autor dessa dissertação atingiram em sua grande maioria o objetivo esperado, e que os alunos conseguiram construir conhecimentos significativos sobre o Teorema de Pitágoras.

As folhas de atividades formaram uma sequência didática eficiente, proporcionando momentos de protagonismo aos alunos, sendo que os mesmos as descreveram como métodos diferenciados de ensino, que fogem das aulas tradicionais realizadas nas escolas públicas.

As atividades estavam em um nível adequado em relação à turma em que foram aplicadas, mostrando-se aptas para utilização em sala de aula, pois despertaram interesse dos alunos durante seu desenvolvimento, fazendo-os realizar com tranquilidade os itens propostos.

O curto momento nas etapas expositivas dos conteúdos fez com que os alunos não procurassem se entreter com celulares (problema comum nos dias de hoje, encontrado por profissionais da educação) ou em conversas paralelas, dando plena atenção aos comandos desenvolvidos pelo professor, elevando o nível de proficiência de suas atividades.

É importante ressaltar que o trabalho manual com recortes e colagens de figuras geométricas, tal como as construções das mesmas, proporcionaram uma visão geométrica singular aos alunos, inserindo-os no contexto matemático proposto pela secretaria da educação estadual, que visa à resolução de problemas pelo método investigativo.

Apesar do bom funcionamento das oficinas o tempo de execução foi insuficiente em algumas aplicações, principalmente nas duas primeiras, onde os alunos não estavam acostumados com o tema, o que prejudicou o término das atividades, necessitando de alguns minutos extras para sua finalização. Esse fato não influenciou nos resultados, pois o professor teve o cuidado de aplicar as folhas de atividades em aulas duplas, mesmo que a hipótese indicasse que a aplicação deveria ocorrer em uma aula de 50 minutos.

Após as aplicações o autor notou algumas falhas na criação das atividades, fator que não é preocupante, pois o produto de ensino é um material em constante construção, aceitando melhorias na busca da aula ideal. As possíveis falhas não impedem que outros professores utilizem o material, sendo que as folhas de atividades devem ser adaptadas à realidade de suas turmas.

Algumas correções foram feitas, e as novas folhas de atividades estarão dispostas na seção **Apêndice D**.

Um bom indicativo de que os alunos construíram o conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras foi que sua descrição foi melhorando gradativamente com o passar das oficinas, chegando bem próximo de uma descrição com um certo rigor matemático.

Apesar de quase todas as oficinas serem aplicadas de maneira individual, as entrevistas feitas com o grupo elevaram o nível de conhecimento sobre o tema, pois houve a troca de experiências entre os discentes, proporcionando a proliferação do saber sob o monitoramento do professor.

A função do professor aplicador foi de mediador, influenciando o mínimo possível nas atividades, permitindo que os alunos detectem suas próprias observações, em uma busca constante do conhecimento.

A Engenharia Didática teve um papel fundamental no método de criação das atividades, no levantamento das hipóteses e análises dos resultados, sendo auxiliada pelas orientações do Matemática na Prática (DIAS) que visa nortear alunos de graduação e mestrado na produção de trabalhos acadêmicos do tipo deste. A seguir serão relacionadas algumas características das oficinas desenvolvidas:

◦ Diminuição da quantidade de aulas expositivas;

◦ Utilização de ferramentas multimídias;

◦ Contextualização histórica dos conteúdos;

◦ Ter o aluno como protagonista das ações;

◦ Desenvolver a capacidade investigativa dos alunos;

◦ Levantamento de dados, permitindo que o professor encontre as falhas do processo ensino aprendizagem;

◦ Construção do conhecimento pelos alunos.

O trabalho pode ser avaliado de maneira positiva, pois atingiu o objetivo proposto em elaborar um produto de ensino único, tendo o aluno como protagonista de ações investigativas, construindo um conhecimento significativo por meio de manipulações geométricas e suas transições para a linguagem algébrica.

A sequência didática presente nesta dissertação, mesmo aberta a constantes modificações, permite que o aluno se aproprie de maneira investigativa dos conceitos sobre o Teorema de Pitágoras, produzindo material que representam seu resultado.

O presente trabalho colaborou para o crescimento profissional do autor, onde iniciou com a escolha do tema, prosseguindo com a metodologia adotada e a busca por materiais de leitura que enriqueceram seu conhecimento. A criação das oficinas, juntamente com suas folhas de atividades, o fez entender que a educação é dinâmica, e a busca pelo conhecimento tal qual o aperfeiçoamento das práticas cotidianas se faz necessário para que possamos transmitir de maneira significativa o conhecimento ao aluno.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica.** Lisboa. Ministério da Educação/Departamento de Educação Básica, 1999, p. 98. Disponível em http://www.researchgate.net/plubication/263807597_A_Matemática_na_Educao_Bsica

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 193-217.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 P. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matemática.pdf

BERLINGHOFF, WILLIAM P., GOUVÊA, FERNANDO Q. **A Matemática Através dos Tempos.** Tradução: Elza Gomide e Helena Castro – 2ª ed. – São Paulo: Blucher, 2008.

BOYER, CARL B., **História da Matemática.** Prefácio de Isaac Asimov; revista por. Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática.** Zetetike. Campinas- SP. UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118. Disponível em www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2458.

CHIZZOTTI, ANTÔNIO. **Pesquisa em ciências humanas e sociais.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

DIAS, CLÁUDIO CARLOS, et al. **Matemática na Prática. Curso de especialização em ensino de matemática para ensino médio.** Central de Textos. Cuiabá, Mato Grosso: módulo III, 2013.

ERIKSEN BROWN R.; OWENS A. **mathematical explorations: Tilted Squares, Irrational Numbers, and the Pythagorean Theorem.** Mathematics teaching in the middle school. National Council of Teachers of Mathematics, 2009, p. 57-62.

EVES, HOWARD. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas – São Paulo: Editora Unicamp, 2011.

LIMA, ELON LAGES. **Temas e problemas elementares.** Elon Lages Lima, Eduardo Wagner, Paulo Cesar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado. 5ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2013. 335 p. (Coleção PROFMAT; 05).

MACHADO, S. D. A. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução.** 3ª ed. São Paulo: [s.n.], 2008. Capítulo: Engenharia Didática. 233-247 p. ISBN 978-85-283-0373-5.

MANTOVANI, HAROLDO. **Atividades sobre progressões aritméticas através do reconhecimento de padrões.** São Carlos – São Paulo: UFSCar, 2016. 162 p.

MUNIS NETO, ANTONIO CAMINHA. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. 471 p. (Coleção PROFMAT; 09).

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T.M. **Tópicos de História da Matemática.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT: 03).

PROJETO ARARIBA. **Matemática do Ensino Fundamental:** obra coletiva; editora responsável Mara Regina Garcia Gay. – 4ª Ed. – São Paulo: Moderna, 2014. SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática. São Paulo: SEE/SP,2014.

SÃO PAULO. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo**: Caderno do Professor - Matemática/Ensino Fundamental – 9° ano – Volume 3. São Paulo: SEE/SP, 2014.

SÃO PAULO. **Matriz de avaliação processual**: Matemática; encarte do professor/ Secretaria da Educação. São Paulo: SE, 2016. 48 p.

SILVA, DAVIDSON MOURA LOPES. **Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: Realidade e perspectivas.** São Carlos – São Paulo: UFSCar, 2015. 88 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FOLHAS DE ATIVIDADES APLICADAS NAS AULAS TESTES

PROFMAT

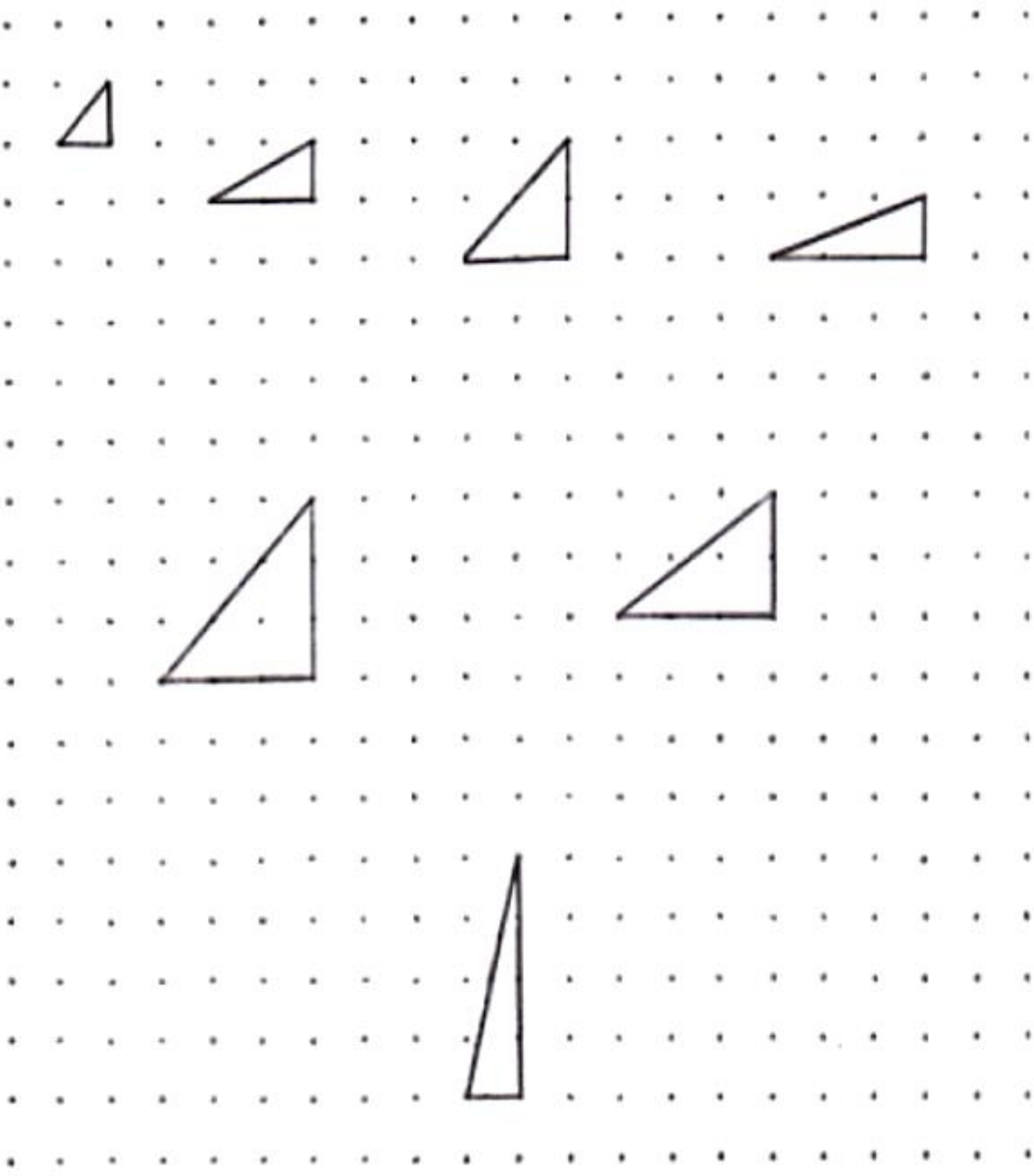
SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES

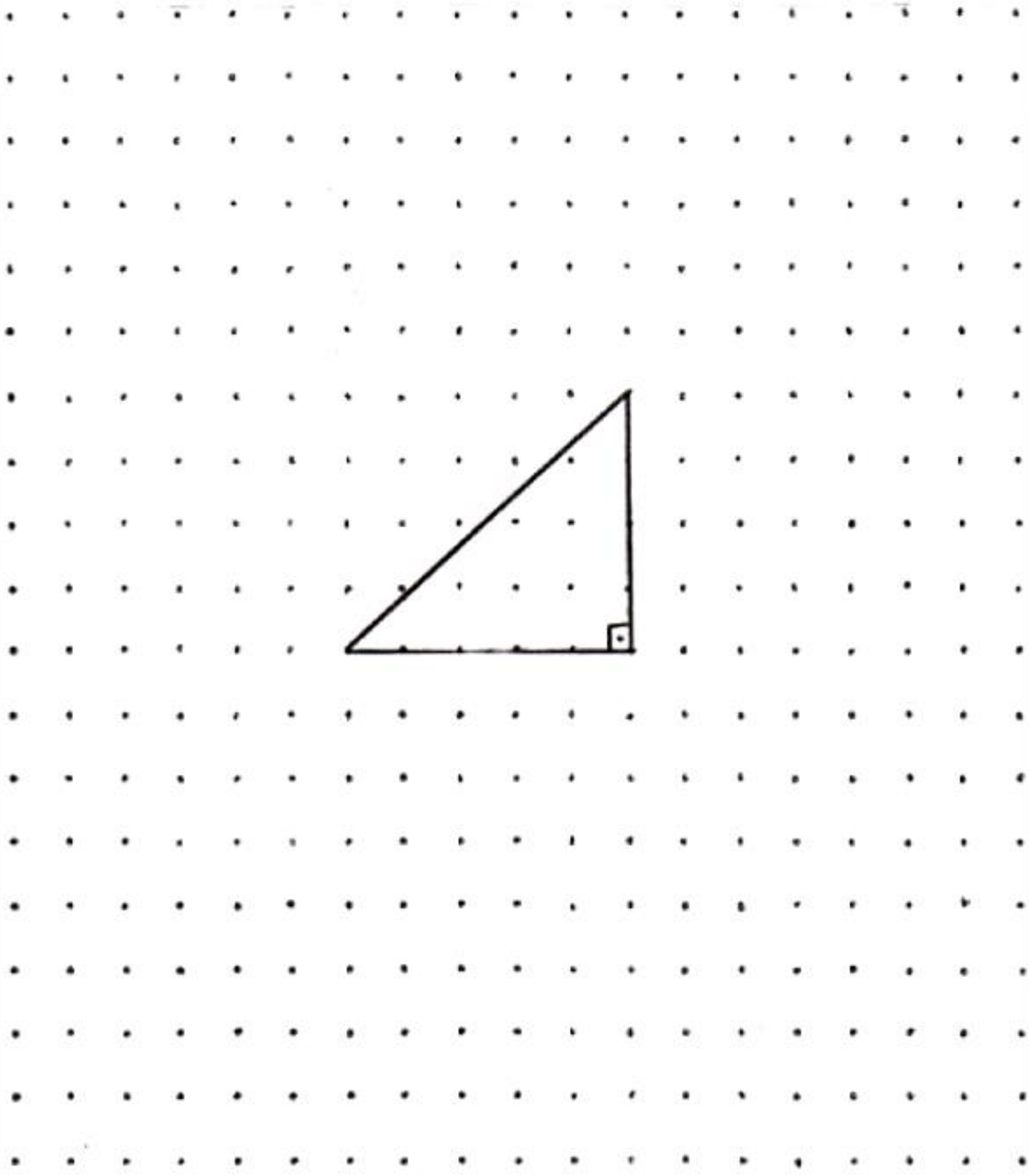
TEOREMA DE PITÁGORAS - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 1

PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME:______________________________________Nº________



2- Aplique no triângulo a seguir o que aprendeu no exercício 1, e relate suas descobertas sobre as áreas dos quadrados.



Seu relato pode ser escrito nas linhas abaixo.

PROFMAT

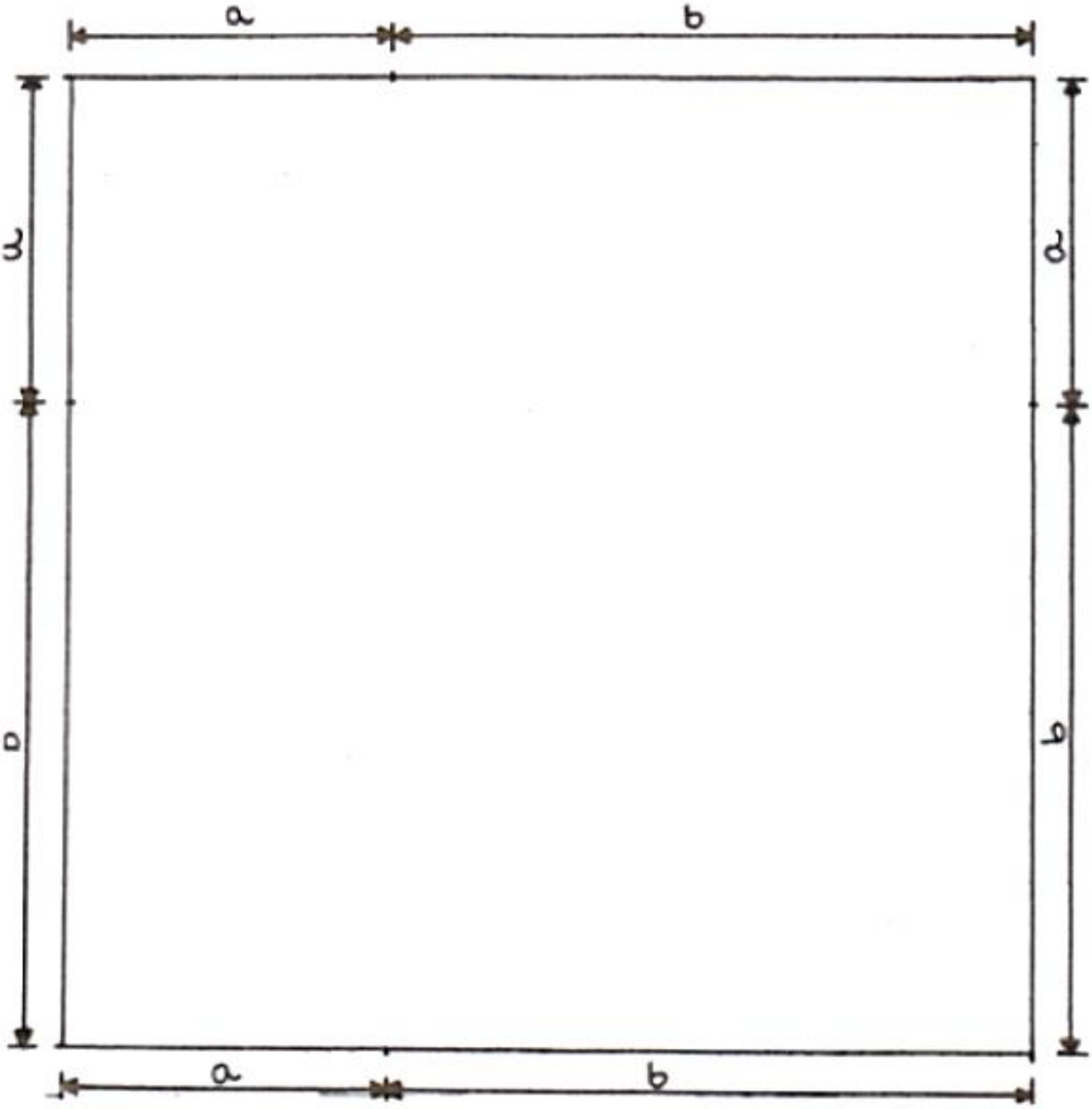
SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES

TEOREMA DE PITÁGORAS - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 2- FIGURA 1

PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME:____N°__________



PROFMAT

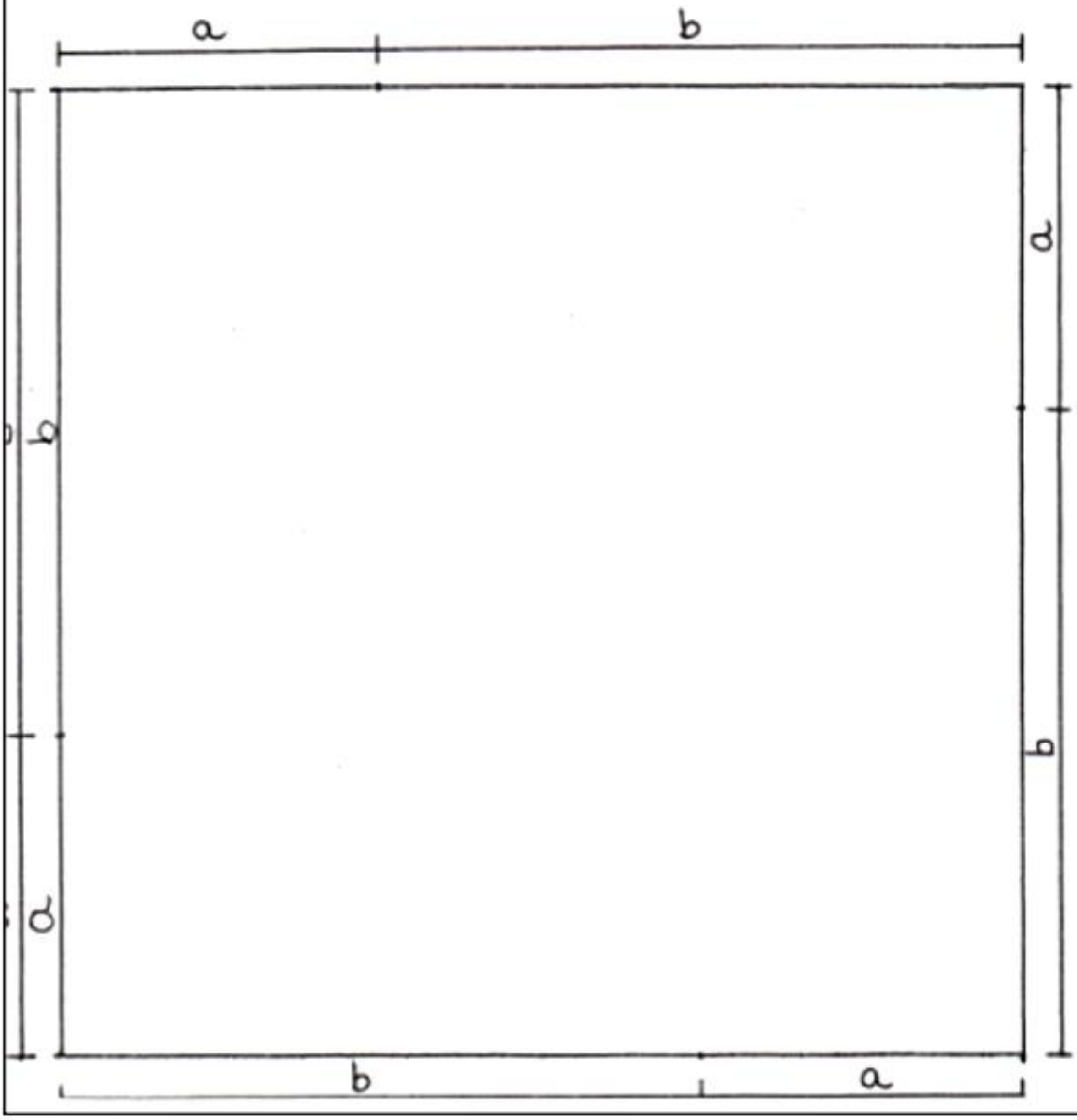
SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES

TEOREMA DE PITÁGORAS - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 2- FIGURA 2

PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME:______________________________________Nº__________



UFSCAR PROFMAT SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES

TEOREMA DE PITÁGORAS - 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 3

PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME:____N°_________

NOME:____N°_________

NOME:____N°_________

Construa no software Geogebra os polígonos determinados pelos passos a seguir, e responda as questões.

- Posicione três pontos A, B e C, de maneira que crie um triângulo retângulo em B qualquer, e em seguida determine a medida dos seguimentos abaixo.

- $\overline{AB}$ = ________
- $\overline{BC}$ = ________

- Utilizando a função polígono ligue os três pontos posicionados anteriormente, determinando a área do triângulo. (Não esqueça que você deverá clicar em todos os pontos na ordem alfabética, e para finalizar clicar novamente no ponto de origem)

- A área do ΔABC é __________.
- Como você calcularia a área desse triângulo sem a ajuda do software?

____

____

- Construa os quadrados referente aos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, posicionando os pontos D e E para o quadrado ABDE, e F e G para o quadrado BCFG, e com a ferramenta polígono ligue os pontos desses dois quadrados.

- Com suas palavras escreva a definição para quadrado, e como você calcularia sua área.

____

____

- A área do quadrado ABDE é __________.
- A área do quadrado BCFG é __________.

- Com o posicionamento dos pontos H e I construa o quadrado referente a Hipotenusa, e determine a sua área com a ferramenta polígono.

- A área do quadrado ACHI é __________.

- Você encontrou alguma relação entre as áreas dos quadrados construídos na atividade que acabou de fazer?

- Faça a construção da atividade anterior na malha quadriculada abaixo. (Não se esqueça de colocar as letras que representam o os nomes dos pontos).

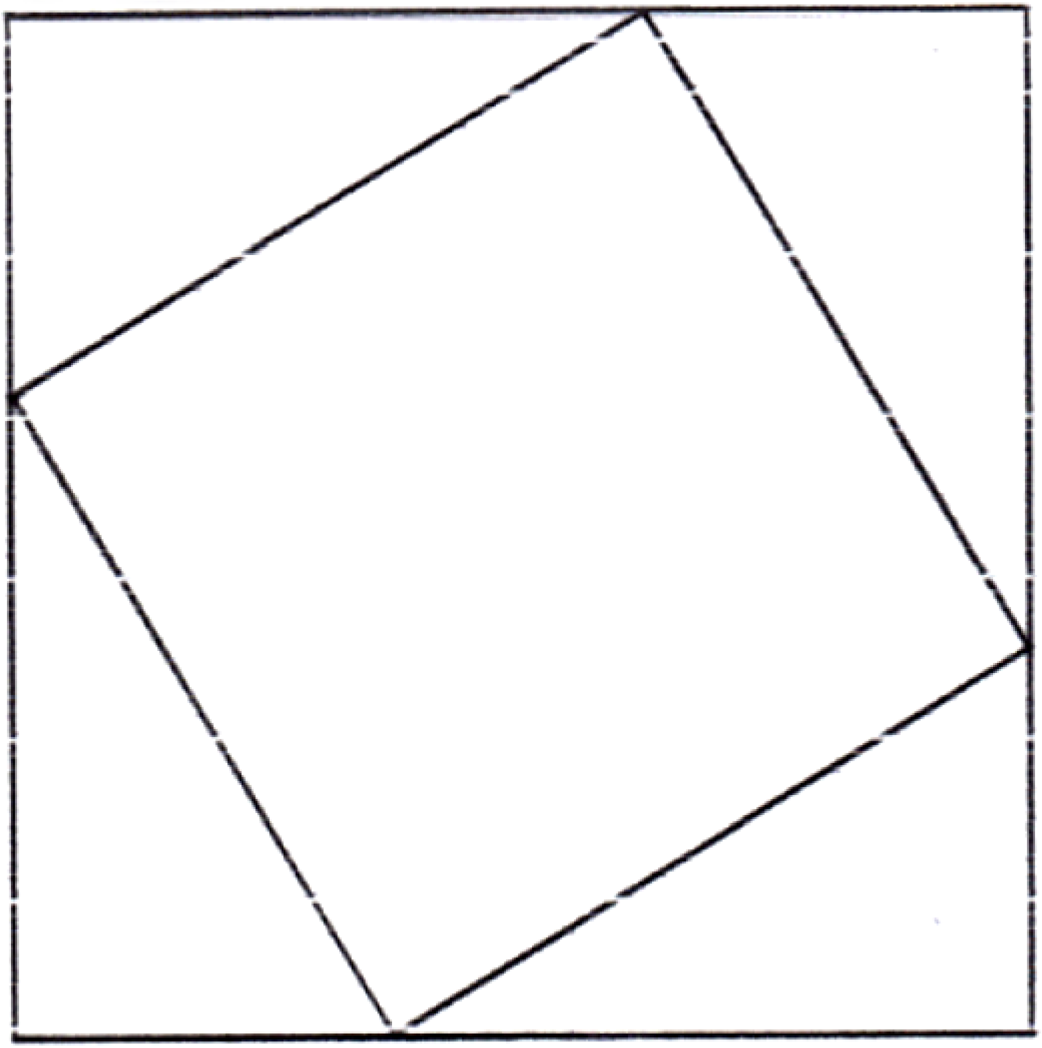
- Qual é o valor do segmento $\overline{AC}$ encontrado na construção?

- Como você encontrou a solução para o problema anterior?

- Em um triângulo retângulo de Catetos medindo 3 e 4 centímetros respectivamente, qual é o valor para a Hipotenusa? Como você encontrou esse resultado?

E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL - OFICINA 4 - A "demonstração sem palavras" atribuída a Thabit Ibn – Qurra*
PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO
NOME: ____. Nº________

1) Pinte e recorte o quadrado a seguir, tendo que seus lados medem *(a + b)*, e os lados do quadrado formado em seu interior medem *c*.

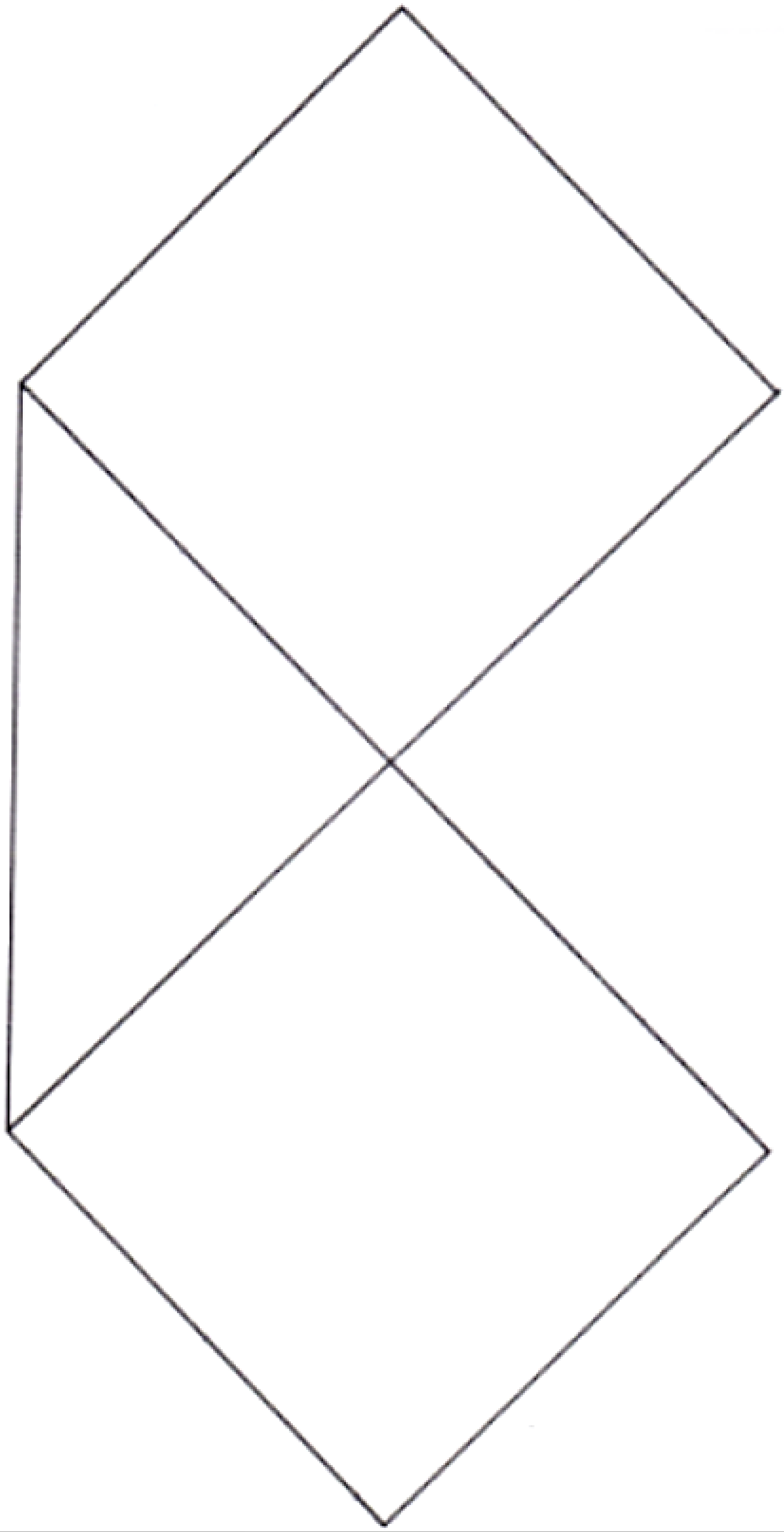


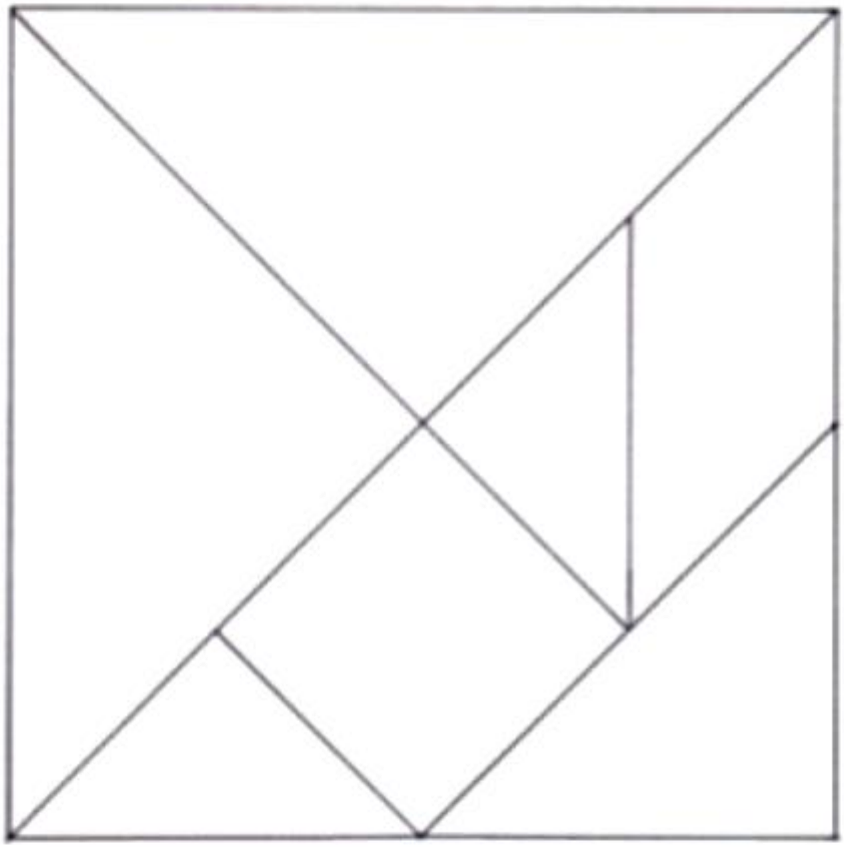
E. E. PEDRO BENTO ALVES

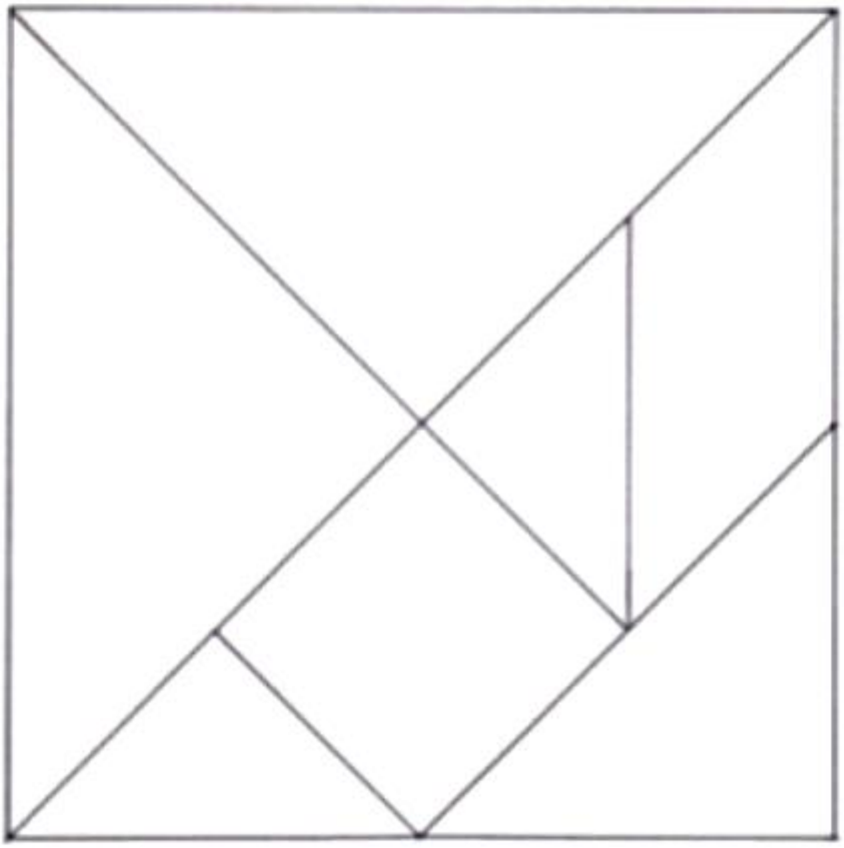
TEOREMA DE PITÁGORAS - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ______________________________________ Nº ________







APÊNDICE B– FOLHAS DE ATIVIDADES APLICADAS NA ESCOLA

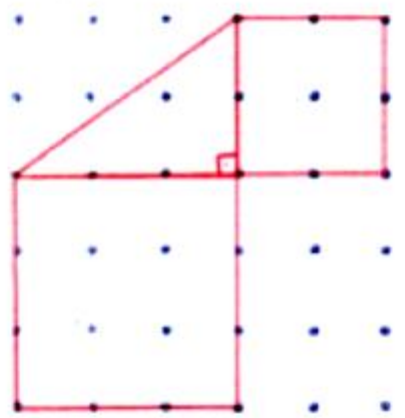
E. E. PEDRO BENTO ALVES - 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL-PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

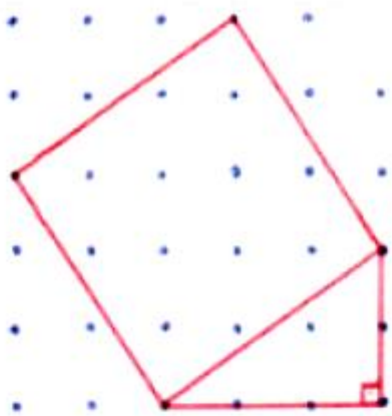
NOME: ____ N°__________

Folha de atividades 1 – Teorema de Pitágoras

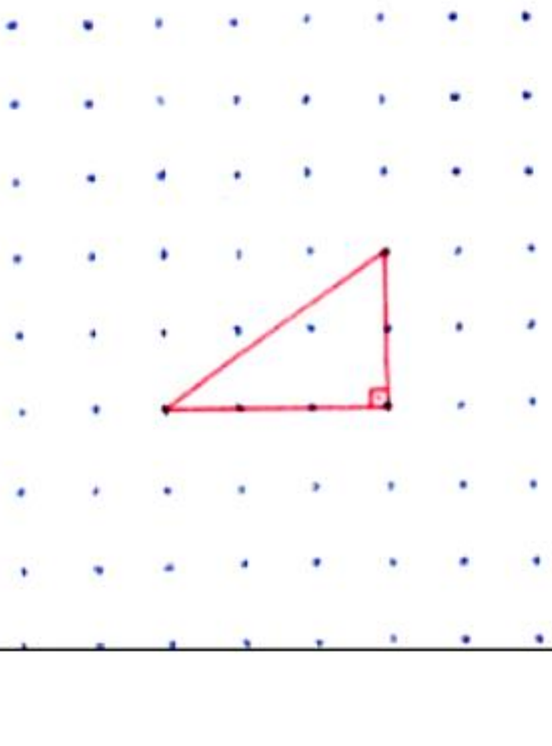
Observação: A distância entre dois pontos no sentido horizontal e vertical, encontrados nas malhas de pontos dos exercícios dessas folhas de atividades é de uma unidade.

1) Observe as duas figuras a seguir e tente calcular a área de cada quadrado.

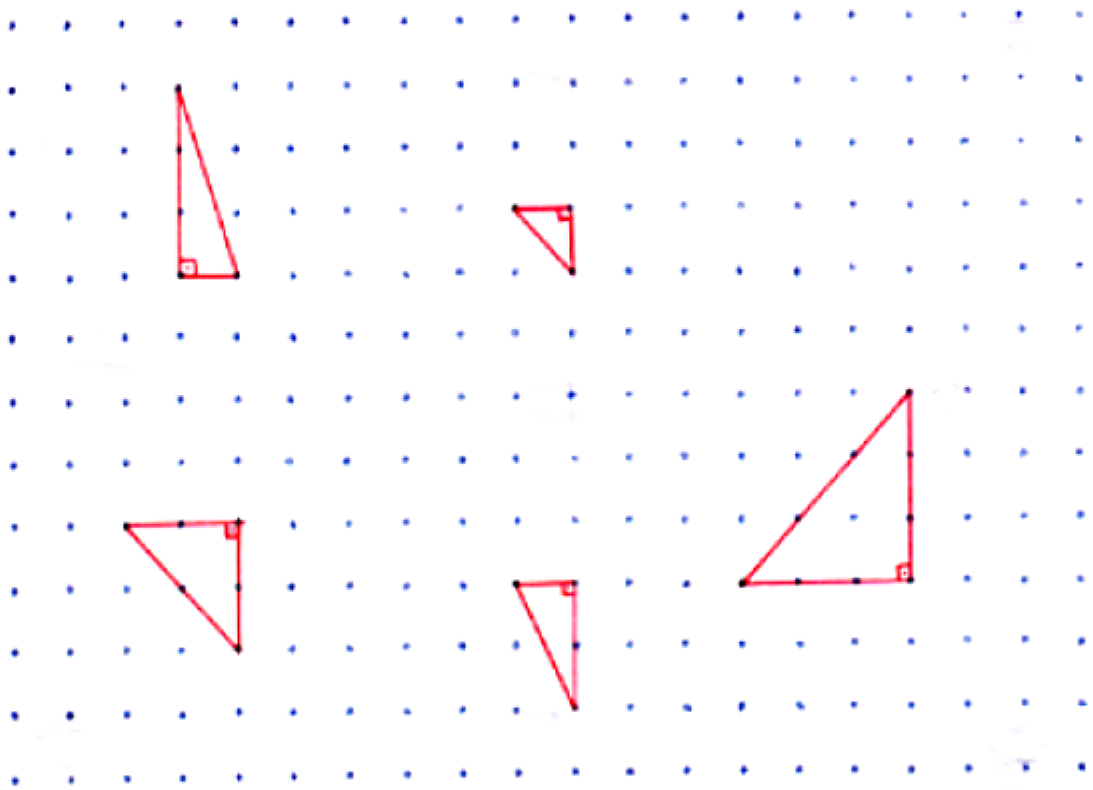




2) Construa os quadrados do exercício anterior, e relate suas observações sobre as áreas dos quadrados.



3) Construa quadrados em cada um dos "lados" dos triângulos, sendo que o lado do quadrado deve ser igual ao lado do triângulo correspondente, e conte sua área:

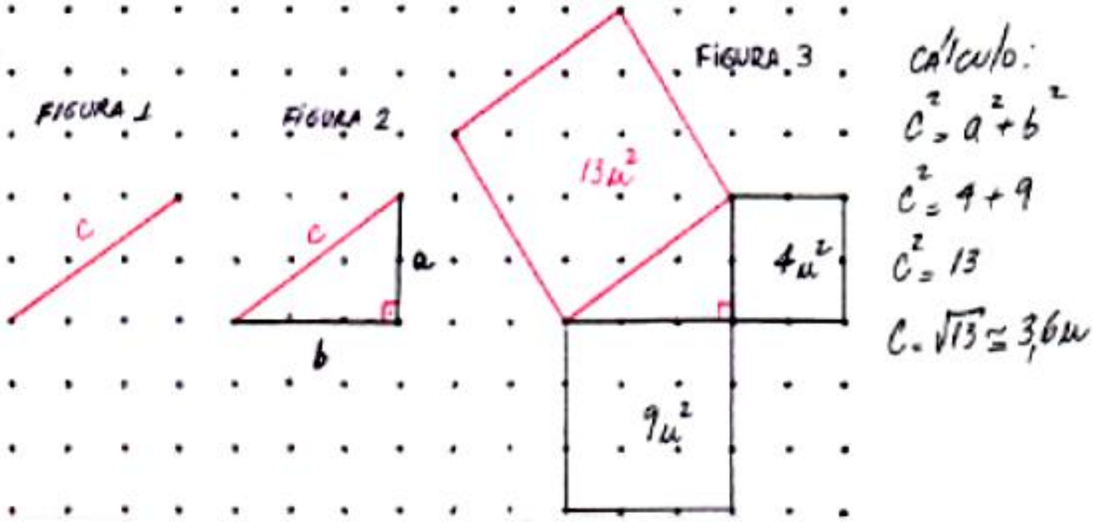


4) Complete a tabela a seguir com os valores para a área dos catetos e da hipotenusa de cada triângulo do exercício anterior.

Figuras	Cateto 1	Cateto 2	Soma dos catetos	Hipotenusa
1				
2				
3				
4				
5				

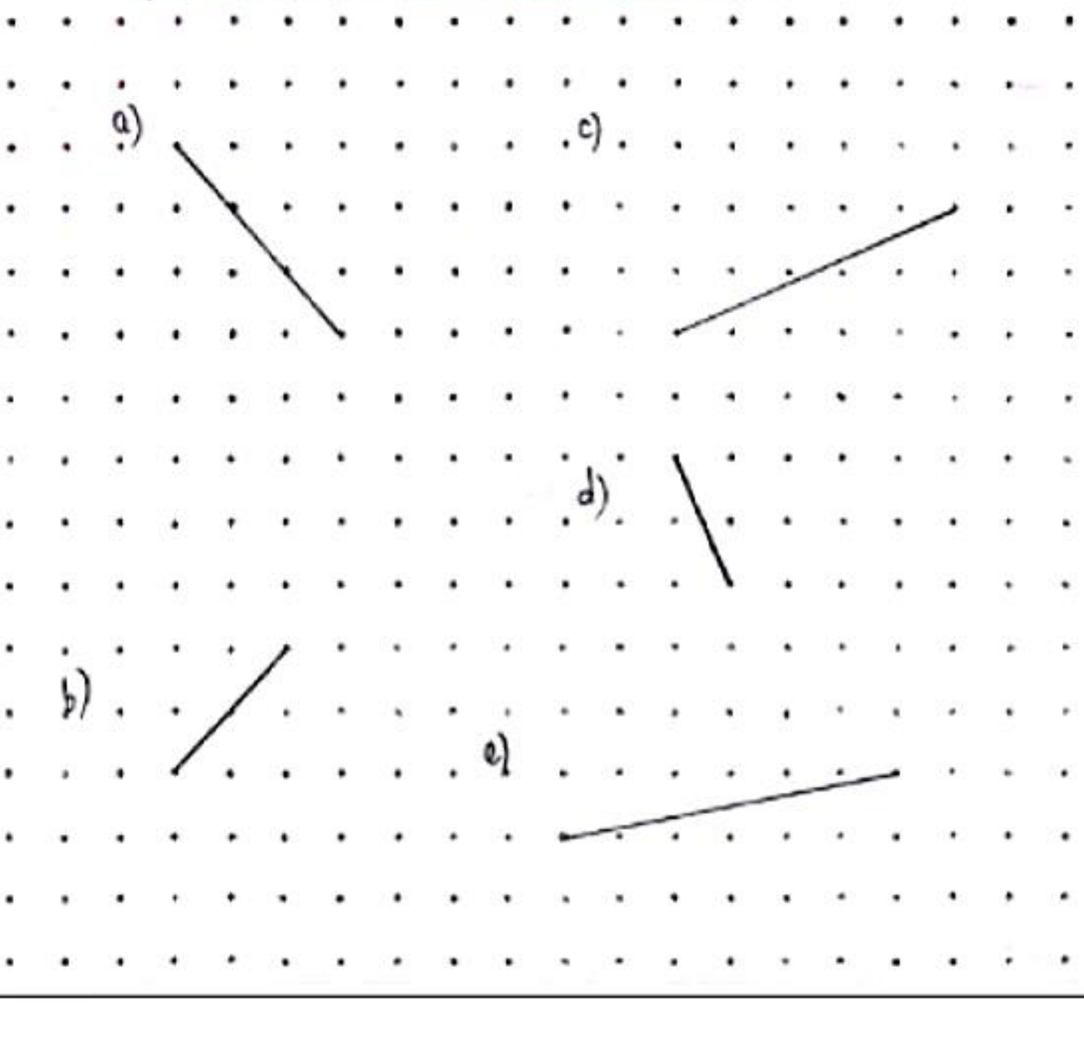
5) O que você pode concluir com a construção feita no exercício 3, e a tabela do exercício 4?

6- Observe a sequência de figuras abaixo, que demonstra como calcular o tamanho do segmento c, através do Teorema de Pitágoras.



Portanto, o valor encontrado para o segmento $c = \sqrt{13} \cong 3{,}6$ *unidades*.

Agora é a sua vez de calcular o tamanho dos segmentos a seguir:



E. E. PEDRO BENTO ALVES - 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL-PROF. LEONARDO

NOME: ____N°__________

OFICINA 2 – A PROVÁVEL DEMONSTRAÇÃO FEITA POR PITÁGORAS

● A atividade a seguir é uma demonstração que pode ter sido feita por Pitágoras. Faremos a denotação de *a, b* e *c* para os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideremos os quadrados em anexo, cada um de lados iguais a $(a + b)$.

I- Pinte todos os triângulos da mesma cor e os quadrados de outra, depois recorte

II- Recorte as peças do quadrado 1, e cole as cinco peças no espaço abaixo.

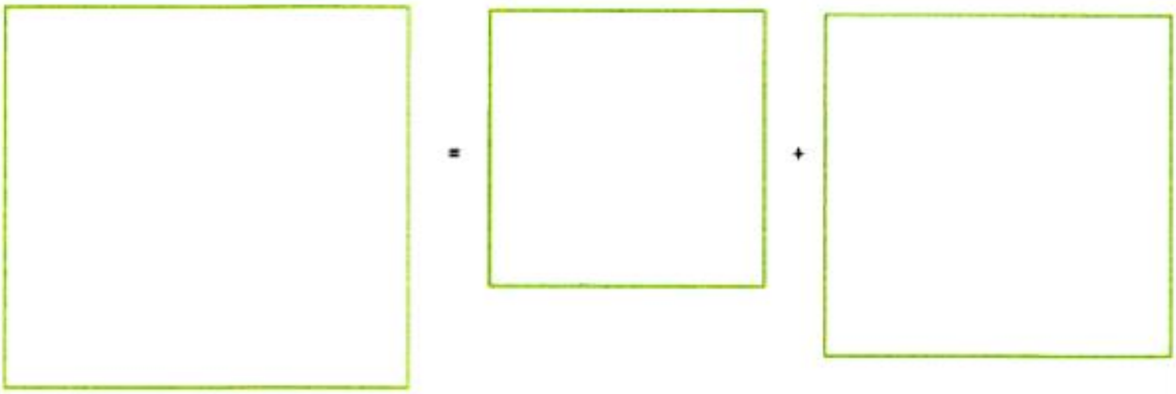
III- Faça o mesmo processo com as seis peças do quadrado 2.

IV- Observe que nas duas atividades anteriores existem peças que tem mesma área. Cole abaixo as peças com mesma área retiradas dos quadrados 3 e 4.

Quadrado 3 = Quadrado 4

V- Subtraindo-se iguais por iguais, o que podemos concluir com sobre as figuras que sobraram?

VI- Cole os quadrados restantes no espaço abaixo, de maneira que exemplifique o que você relatou acima.



VII- Juntamente com seu professor, produza uma representação algébrica para a demonstração do teorema.

PROFMAT

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 3 - Utilizando a ferramenta geogebra para encontrar o resultado do Teorema de Pitágoras* - PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ____. Nº_______

NOME: ____. Nº_______

NOME: ____. Nº_______

- Construa no software Geogebra os polígonos determinados pelos passos a seguir, e responda as questões.
- Posicione três pontos A, B e C, de maneira que crie um triângulo retângulo em B qualquer, e em seguida determine a medida dos seguimentos abaixo, e a área de triângulo. *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono para a construção, não se esqueça de clicar em todos os pontos na ordem alfabética, e para finalizar clicar novamente no ponto de origem).*

◦ $\overline{AB}$ = _______

◦ $\overline{BC}$ = _______

◦ A área do ΔABC é ________. *(A área estará indicada como polígono 1 na janela de álgebra do lado esquerdo da tela).*

- Como você calcularia a área desse triângulo sem a ajuda do software?

____

____

____

- Calcule a área do triângulo ΔABC como descreveu acima.

____

____

____

- Construa os quadrados referente aos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, posicionando os pontos D e E para o quadrado ABDE, e F e G para o quadrado BCFG, e com a ferramenta polígono ligue os pontos desses dois quadrados. *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono regular para facilitar a construção)*

- **Com suas palavras escreva uma definição para quadrado, e como você calcularia sua área.**

____

____

____

____

- **Determine a área dos quadrados que você acabou de construir no GEOGEBRA, não esqueça de deixar o cálculo exposto na área indicada abaixo.**

(Espaço para o desenvolvido do cálculo pelo aluno)

____

____

____

____

____

◦ A área do quadrado ABDE é ________.   ◦A área do quadrado BCFG é ________.

- **Com o posicionamento dos pontos H e I construa o quadrado referente a Hipotenusa, e determine a sua área com a ferramenta polígono.**

◦ A área do quadrado ACHI é ________.

- **Você encontrou alguma relação entre as áreas dos quadrados construídos nas atividades que acabou de desenvolver?**

____

____

____

____

- **Faça a construção da atividade anterior na malha de pontos da terceira folha de atividades.** *(Não se esqueça de colocar as letras A, B e C para representar os vértices da construção, sendo que B deverá ter ângulo reto)*

◦ Qual é o valor do segmento $\overline{AC}$ encontrado na construção?

____

◦ Como você encontrou a solução para o problema anterior?

____

____

____

- Agora faça o cálculo do seguimento $\bar{AC}$ no espaço abaixo.

• Em um triângulo retângulo de Catetos medindo 6 e 8 centímetros respectivamente, qual é o valor para a Hipotenusa?

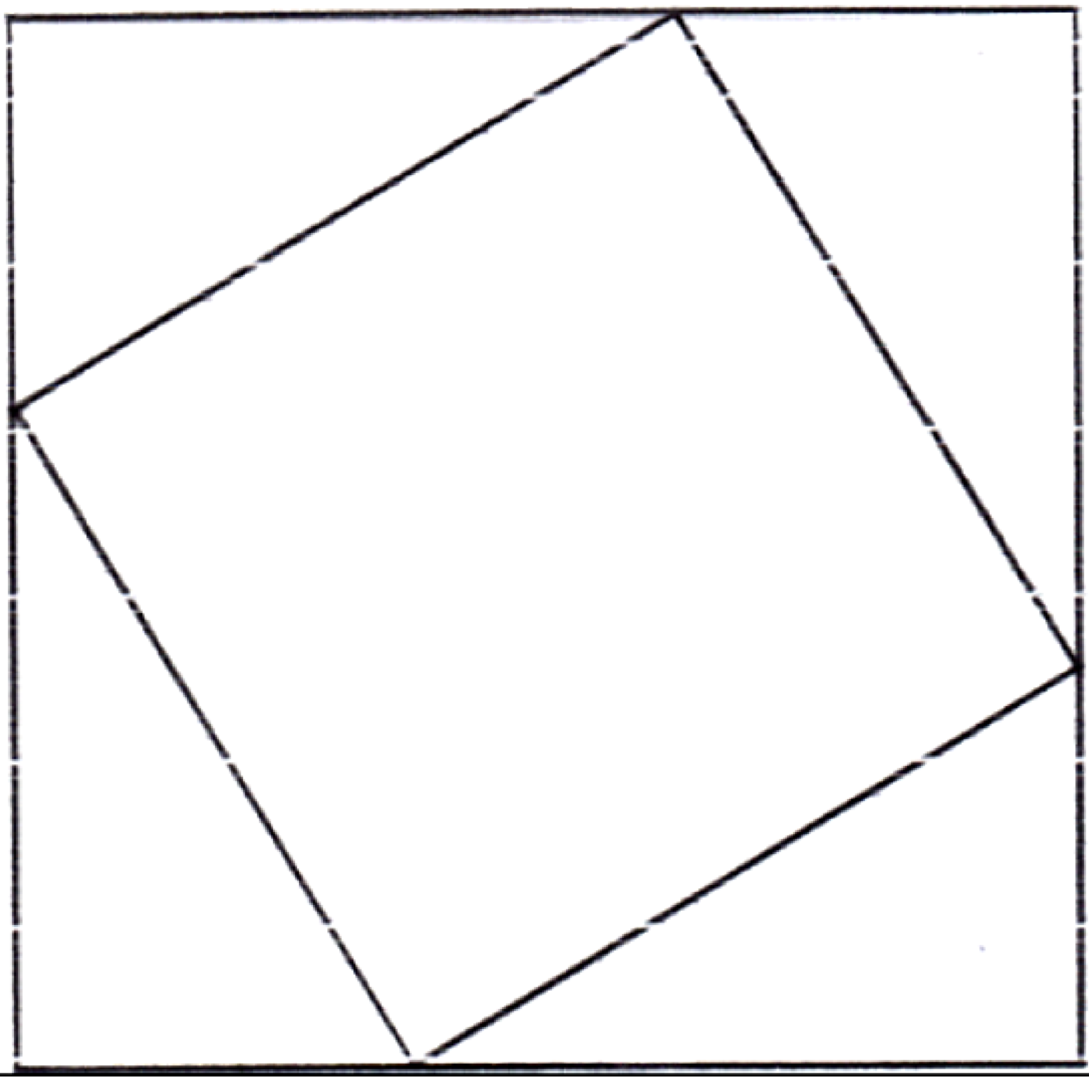
• Como você encontrou esse resultado?

PROFMAT

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL - OFICINA 4 - A "demonstração sem palavras" atribuída a Thabit Ibn – Qurra*
PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO
NOME: ______________________________________, Nº________

1) Pinte e recorte o quadrado a seguir, tendo que seus lados medem $(a + b)$, e os lados do quadrado formado em seu interior medem c.

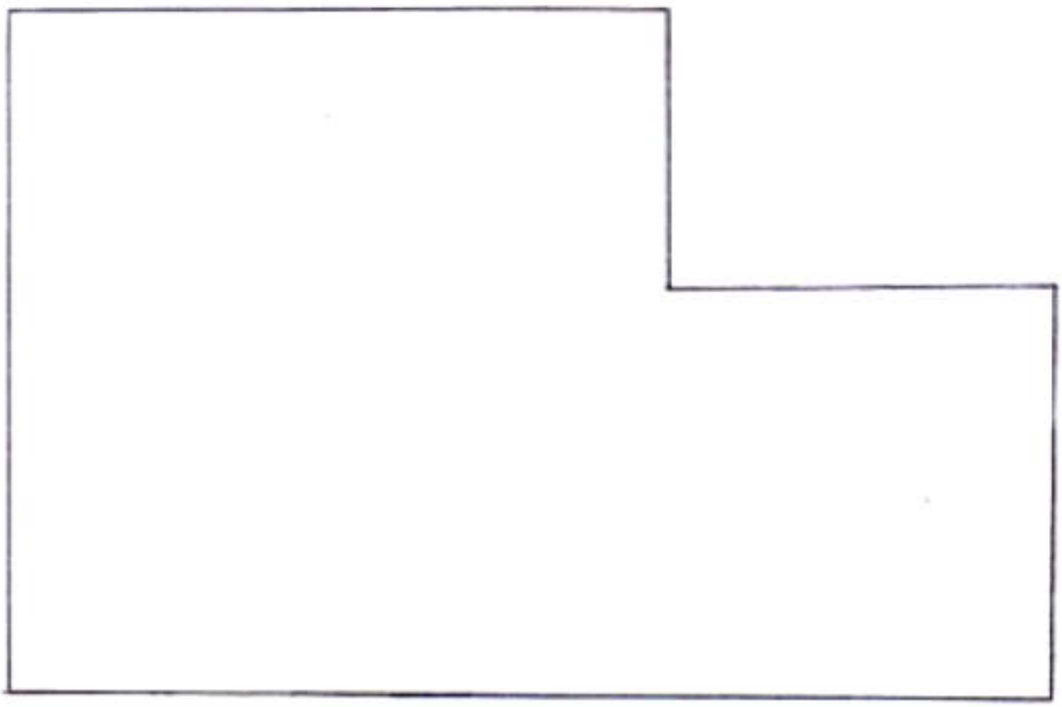


2) Após a decomposição siga os seguintes passos:

• cole dois dos triângulos dentro do quadrado de lados *c* conforme as figuras abaixo;

• Recorte o quadrado em duas partes como mostra a figura abaixo.

• Utilizando a parte em azul e os dois triângulos, monte o quebra cabeça no tabuleiro abaixo.



E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL - OFICINA 5 - Uma demonstração particular para o Teorema de Pitágoras através do Tangram* – PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ______________________________, Nº________

• A demonstração a seguir utiliza as figuras geométricas que compõem o Tangram na obtenção do Teorema de Pitágoras. Acompanhe os passos fornecidos por essas Folhas de Atividades até alcançar o resultado esperado:

• Pinte os dois quadrados, de maneira que figuras de mesma área tenham cores iguais;

• Suponhamos que o menor triângulo tenha área de uma unidade quadrada, você conseguiria calcular a área total de um dos quadrados fornecidos abaixo?

____

____

• Quantos quadrados menores caberiam dentro de cada quadrado igual aos que aparecem abaixo?

____

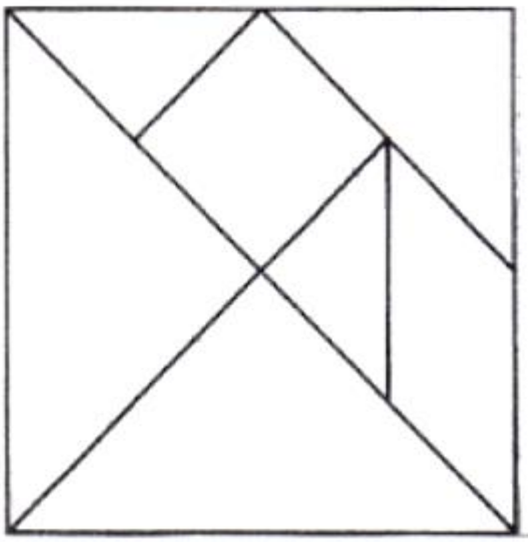
____

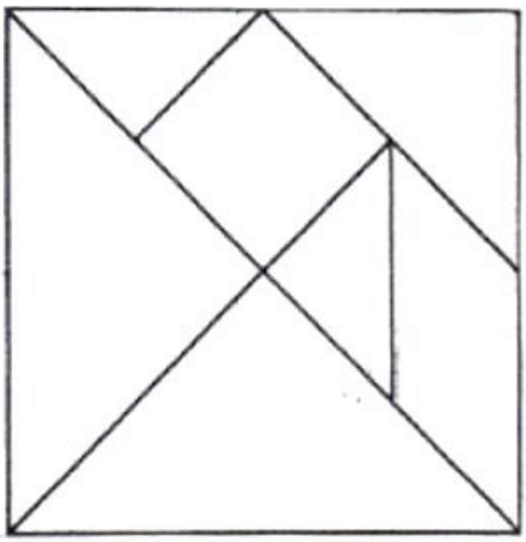
• O Tangram é composto por sete figuras geométricas. Denomine cada uma delas e indique sua área. (Para o cálculo suponha que cada triângulo menor tenha área de uma unidade quadrada).

____

____

____





• Decomponha através de recorte um dos quadrados, o outro apenas corte sua volta.

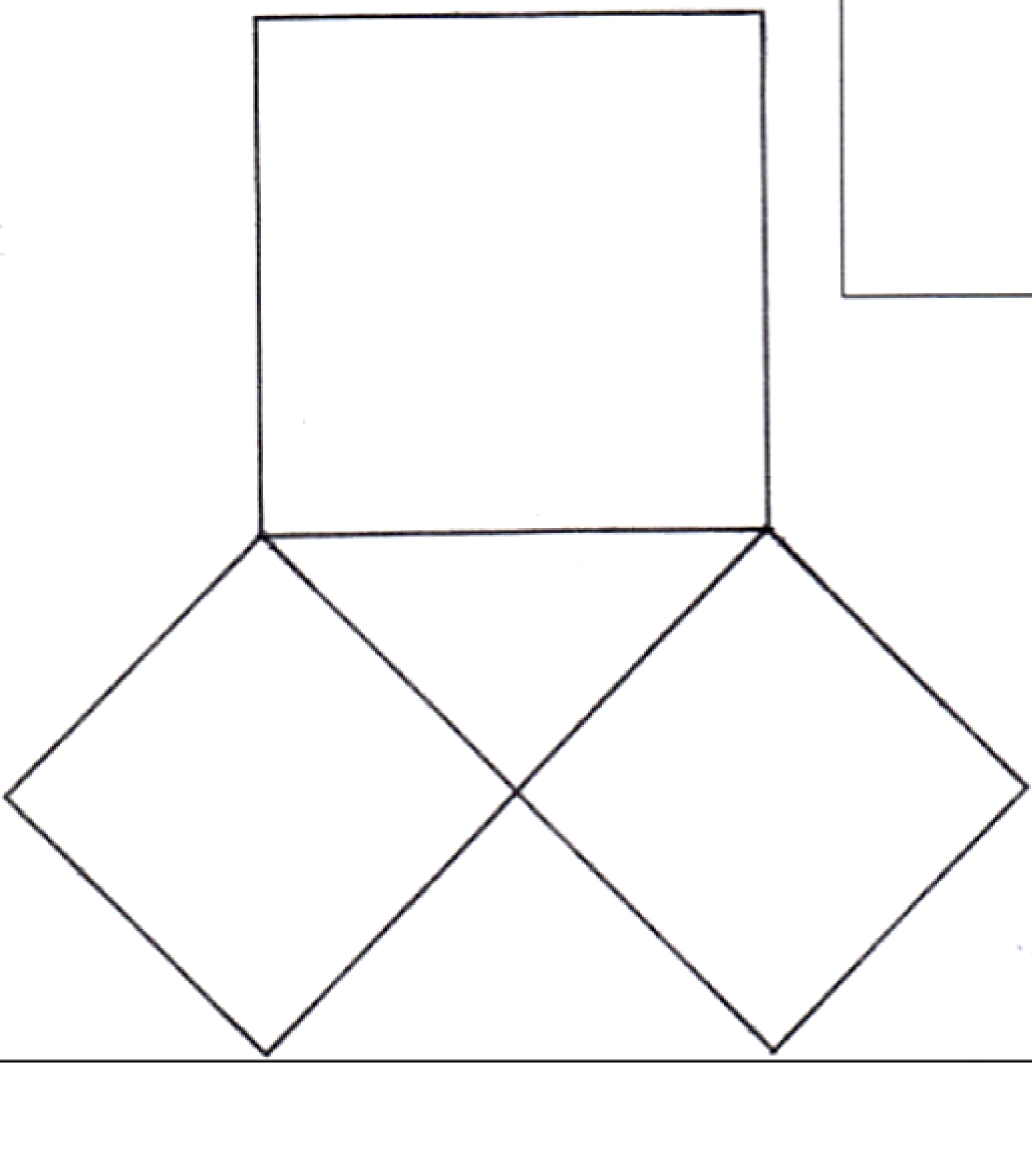
• Monte o quebra cabeça no tabuleiro com as peças decompostas, o outro quadrado deverá ser colado abaixo do triângulo.

• Após a colagem determine a área de cada quadrado.

• Assinale o espaço que corresponde ao nome do triângulo que compõe o tabuleiro abaixo.

( ) EQUILÁTERO ( ) ISOSCELES ( ) ESCALENO

• Se a hipotenusa desse triângulo mede 4 unidades, quanto deve medir cada cateto? Desenvolva o cálculo no espaço ao lado.



APÊNDICE C–RESPOSTAS ESPERADAS PELO AUTOR NAS FOLHAS DE ATIVIDADES

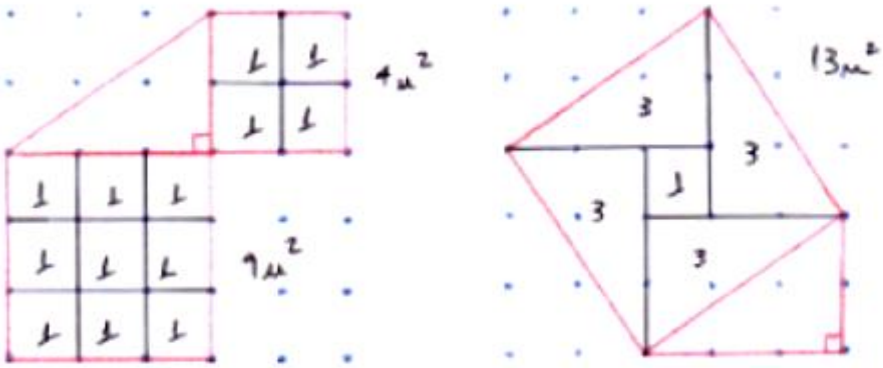
E. E. PEDRO BENTO ALVES - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL-PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ____ Nº__________

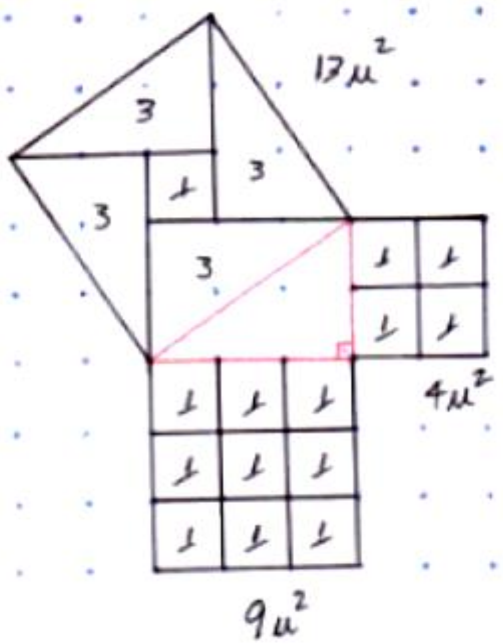
Folha de atividades 1 – Teorema de Pitágoras

Observação: A distância entre dois pontos no sentido horizontal e vertical, encontrados nas malhas de pontos dos exercícios dessas folhas de atividades é de uma unidade.

1) Observe as duas figuras a seguir e tente calcular a área de cada quadrado.



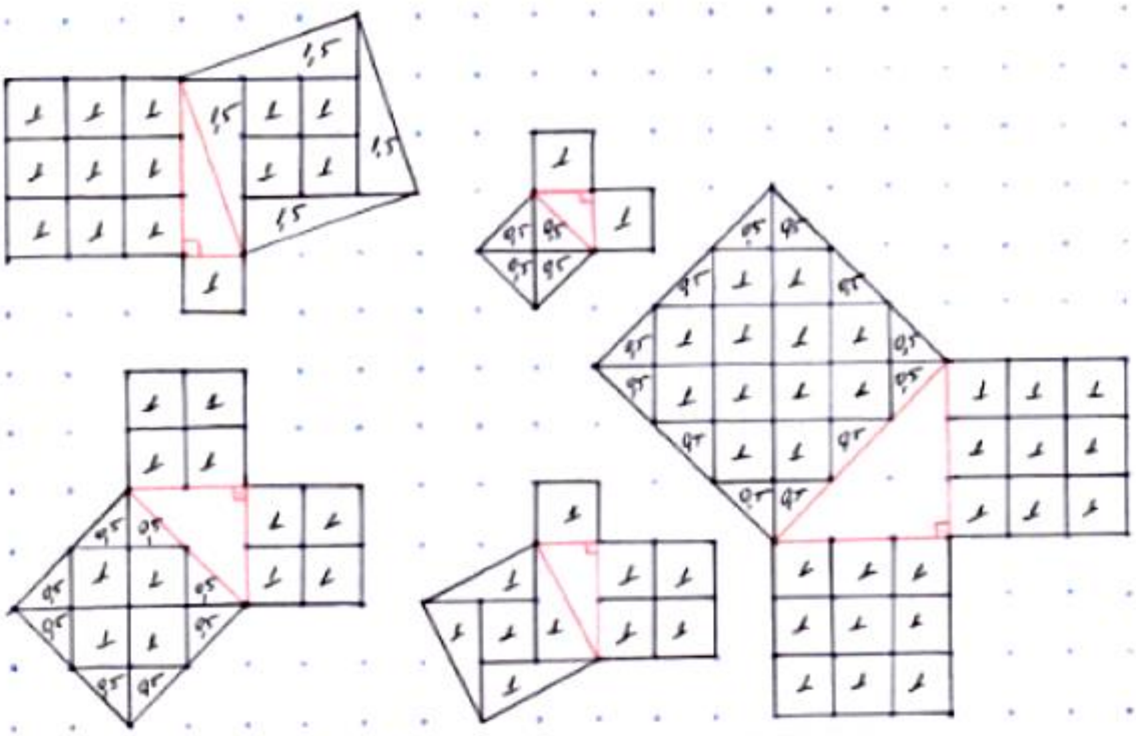
2) Construa os quadrados do exercício anterior, e relate suas observações sobre as áreas dos quadrados.



$4u^2 + 9u^2 = 13u^2$

a soma dos quadrados sobre os catetos, é igual ao quadrado sobre a hipotenusa.

3) Construa quadrados em cada um dos "lados" dos triângulos, sendo que o lado do quadrado deve ser igual ao lado do triângulo correspondente, e conte sua área:



4) Complete a tabela a seguir com os valores para a área dos catetos e da hipotenusa de cada triângulo do exercício anterior.

Figuras	Cateto 1	Cateto 2	Soma dos catetos	Hipotenusa
1	9	1	10	10
2	1	1	2	2
3	4	4	8	8
4	1	4	5	5
5	9	9	18	18

5) O que você pode concluir com a construção feita no exercício 3, e a tabela do exercício 4?

a soma dos quadrados sobre os catetos é igual os quadrados sobre a hipotenusa.

UFSJ · PROFMAT · SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

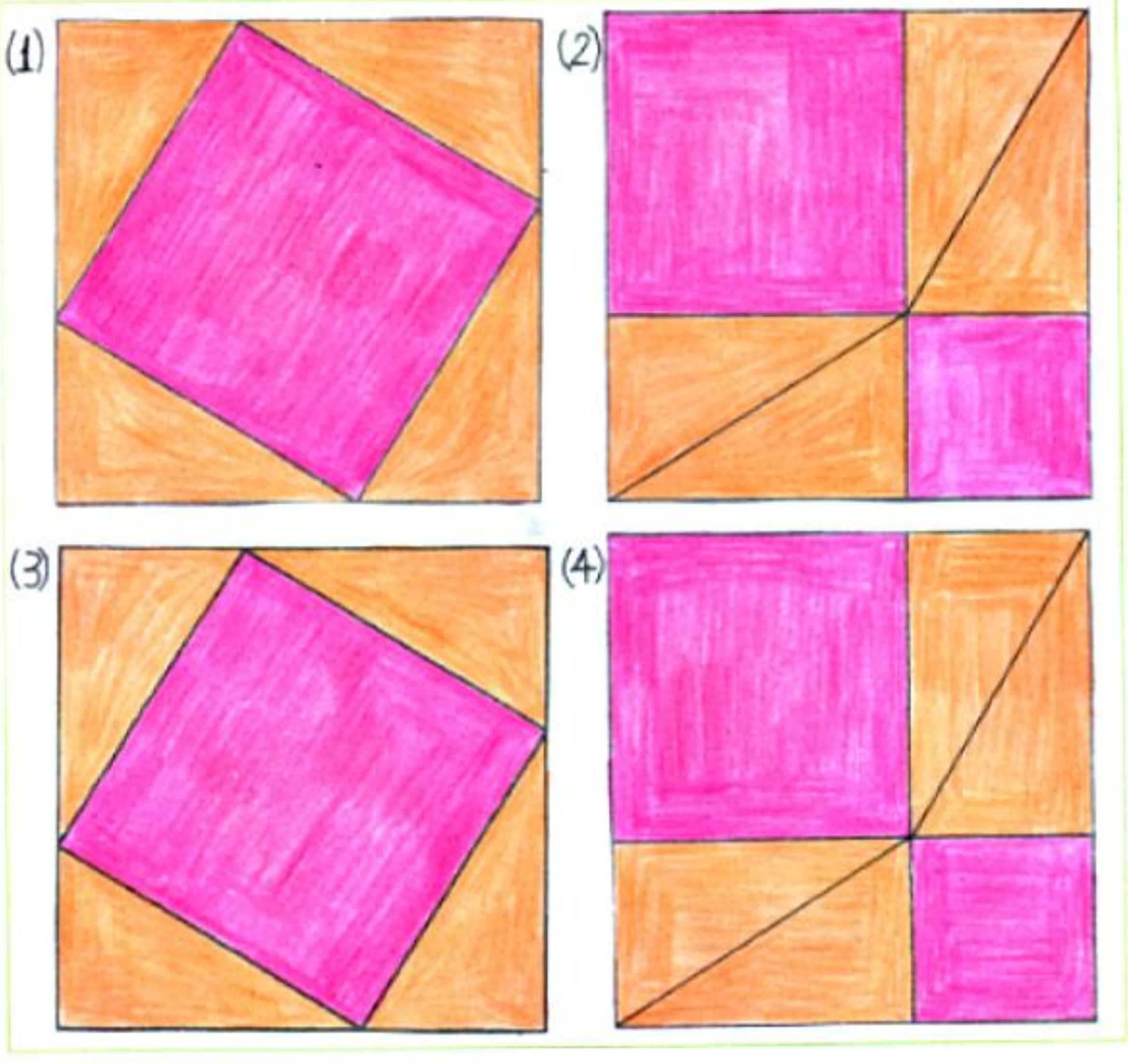
E. E. PEDRO BENTO ALVES - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL-PROF. LEONARDO

NOME: ______________________________ Nº________

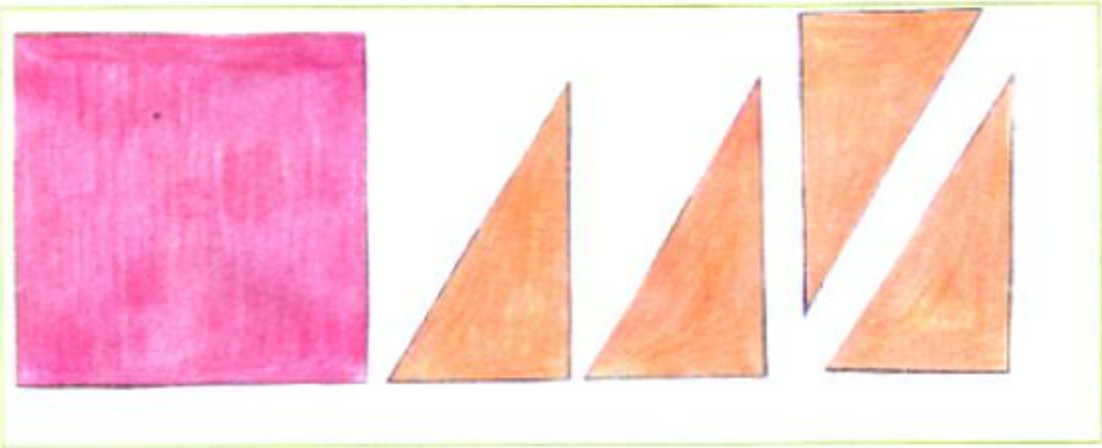
Folha de atividades 2 – A provável demonstração feita por Pitágoras

• A atividade a seguir é uma demonstração que pode ter sido feita por Pitágoras. Faremos a denotação de a, b e c para os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideremos os quadrados em anexo, cada um de lados iguais a $(a + b)$.

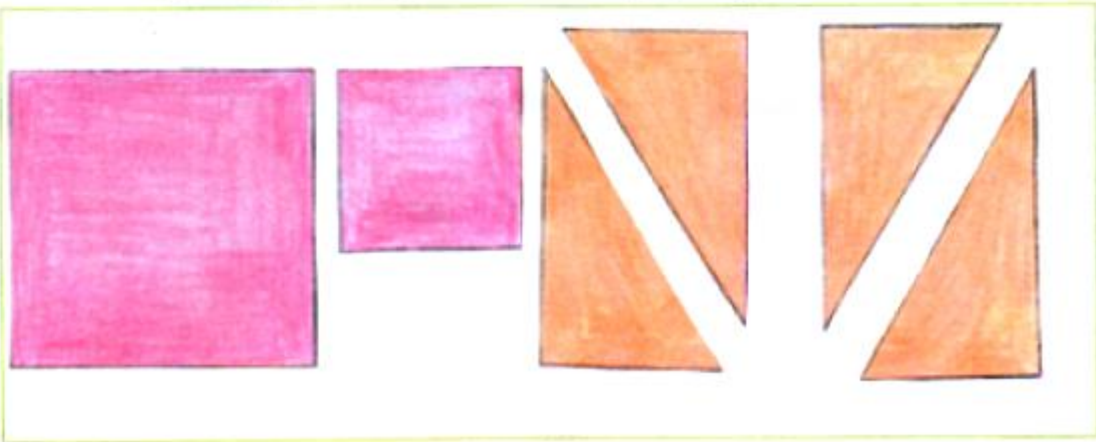
I- Pinte todos os triângulos da mesma cor e os quadrados de outra, depois recorte.



II- Recorte as peças do quadrado 1, e cole as cinco peças no espaço abaixo.

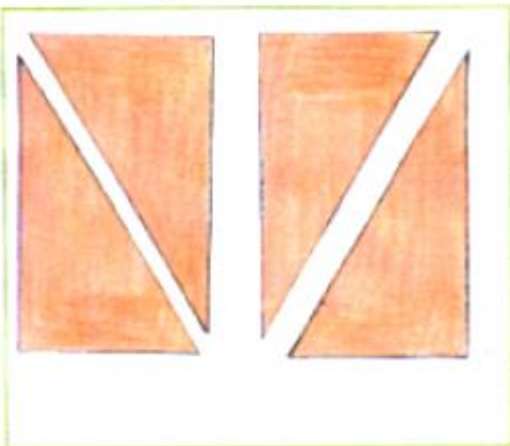


III- Faça o mesmo processo com as seis peças do quadrado 2.



IV- Observe que nas duas atividades anteriores existem peças que tem mesma área. Cole abaixo as peças com mesma área retiradas dos quadrados 3 e 4.

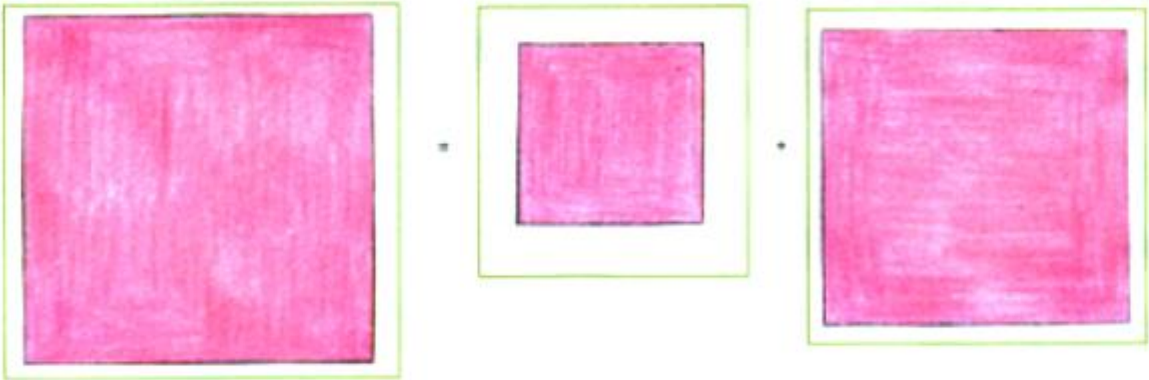
Quadrado 3 = Quadrado 4



V- Subtraindo-se iguais por iguais, o que podemos concluir com sobre as figuras que sobraram?

Concluo que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos quadrados menores

VI- Cole os quadrados restantes no espaço abaixo, de maneira que exemplifique o que você relatou acima.



VII- Juntamente com seu professor, produza uma representação algébrica para a demonstração do teorema.

Quadrado 1 = Quadrado 2

$$c^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}$$

$$c^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 4\frac{ab}{2}$$

Subtraindo-se iguais por iguais, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Portanto, Pelo Teorema de Pitágoras temos que $c^2 = a^2 + b^2$

UFJF ICE PROFMAT SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

E. E. PEDRO BENTO ALVES - *9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – OFICINA 3 - Utilizando a ferramenta geogebra para encontrar o resultado do Teorema de Pitágoras* - PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ______________________________ Nº______

NOME: ______________________________ Nº______

NOME: ______________________________ Nº______

- **Construa no software Geogebra os polígonos determinados pelos passos a seguir, e responda as questões.**
- **Posicione três pontos A, B e C, de maneira que crie um triângulo retângulo em B qualquer, e em seguida determine a medida dos seguimentos abaixo, e a área de triângulo.** *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono para a construção, não se esqueça de clicar em todos os pontos na ordem alfabética, e para finalizar clicar novamente no ponto de origem).*

- $\overline{AB}$ = 2m
- $\overline{BC}$ = 2m

Resposta Pessoal

- A área do ΔABC é 2m² *(A área estará indicada como polígono 1 na janela de álgebra do lado esquerdo da tela).*

- **Como você calcularia a área desse triângulo sem a ajuda do software?**

ATRAVÉS DA MULTIPLICAÇÃO DA BASE COM A ALTURA DIVIDIDO POR DOIS.

- **Calcule a área do triângulo ΔABC como descreveu acima.**

RESPOSTA PESSOAL

$$\text{ÁREA} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{4}{2} = 2m^2$$

- **Construa os quadrados referente aos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, posicionando os pontos D e E para o quadrado ABDE, e F e G para o quadrado BCFG, e com a ferramenta polígono ligue os pontos desses dois quadrados.** *(Você poderá utilizar a ferramenta polígono regular para facilitar a construção)*

• **Com suas palavras escreva uma definição para quadrado, e como você calcularia sua área.**

FIGURA GEOMÉTRICA COM QUATRO LADOS DE MESMO COMPRIMENTO E QUATRO ÂNGULOS RETOS.
CALCULARIA SUA ÁREA ATRAVÉS DA multiplicação ENTRE A BASE E A ALTURA.

• **Determine a área dos quadrados que você acabou de construir no GEOGEBRA, não esqueça de deixar o cálculo exposto na área indicada abaixo.**

(Espaço para o desenvolvido do cálculo pelo aluno)

QUADRADO 1 = $2.2 = 4u^2$
QUADRADO 2 = $2.2 = 4u^2$

Resposta PESSOAL

- A área do quadrado ABDE é $4u^2$. - A área do quadrado BCFG é $4u^2$.

• **Com o posicionamento dos pontos H e I construa o quadrado referente a Hipotenusa, e determine a sua área com a ferramenta polígono.**

- A área do quadrado ACHI é $8u^2$. RESPOSTA PESSOAL

• **Você encontrou alguma relação entre as áreas dos quadrados construídos nas atividades que acabou de desenvolver?**

A ÁREA DO QUADRADO MAIOR, É IGUAL A SOMA DAS ÁREAS DOS QUADRADOS MENORES.

• **Faça a construção da atividade anterior na malha de pontos da terceira folha de atividades.** *(Não se esqueça de colocar as letras A, B e C para representar os vértices da construção, sendo que B deverá ter ângulo reto)*

- Qual é o valor do segmento $\overline{AC}$ encontrado na construção?

$\overline{AC} = \sqrt{8}$ RESPOSTA PESSOAL

- Como você encontrou a solução para o problema anterior?

ATRAVÉS DA JANELA de ÁLGEBRA

- Agora faça o cálculo do seguimento $\overline{AC}$ no espaço abaixo.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2$

$\overline{AC}^2 = 4 + 4$

$\overline{AC}^2 = 8$

$\overline{AC} = \sqrt{8}$

- **Em um triângulo retângulo de Catetos medindo 6 e 8 centímetros respectivamente, qual é o valor para a Hipotenusa?**

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 6^2 + 8^2$

$c^2 = 36 + 64$

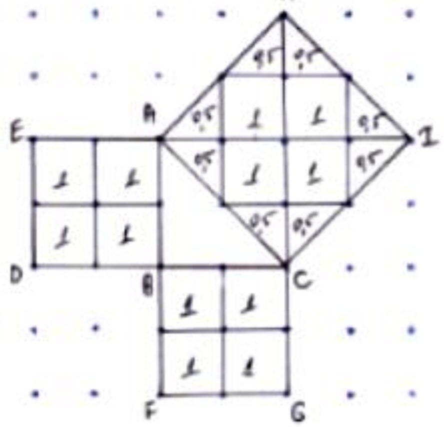
$c^2 = 100$

$c = \sqrt{100}$

$c = 10\,m$

- **Como você encontrou esse resultado?**

O resultado foi encontrado através do cálculo do teorema de Pitágoras.

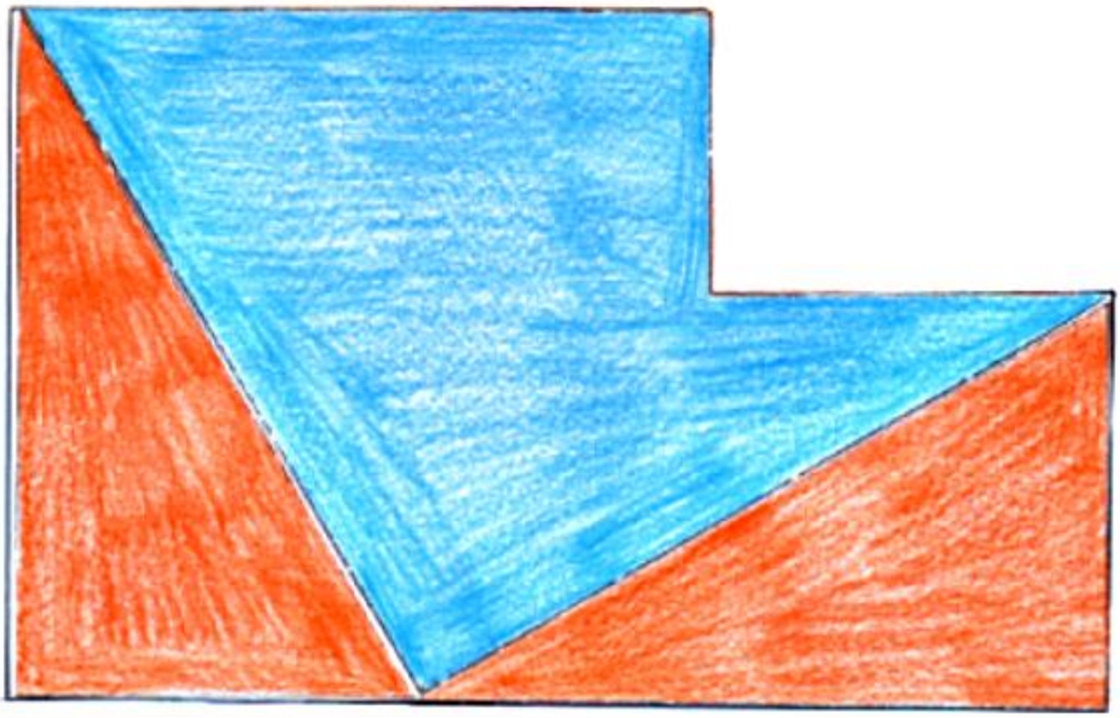


2) Após a decomposição siga os seguintes paços:

• cole dois dos triângulos dentro do quadrado de lados *c* conforme as figuras abaixo;

• Recorte o quadrado em duas partes como mostra a figura abaixo.

• Utilizando a parte em azul e os dois triângulos, monte o quebra cabeça no tabuleiro abaixo.



APÊNDICE D – FOLHA DE ATIVIDADES CORRIGIDAS

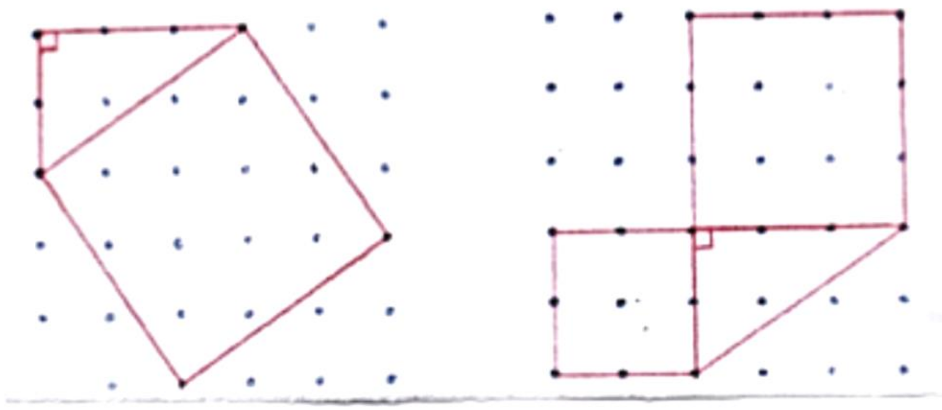
E. E. PEDRO BENTO ALVES - 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL-PROF. LEONARDO TARTAGLIA FILHO

NOME: ____N°__________

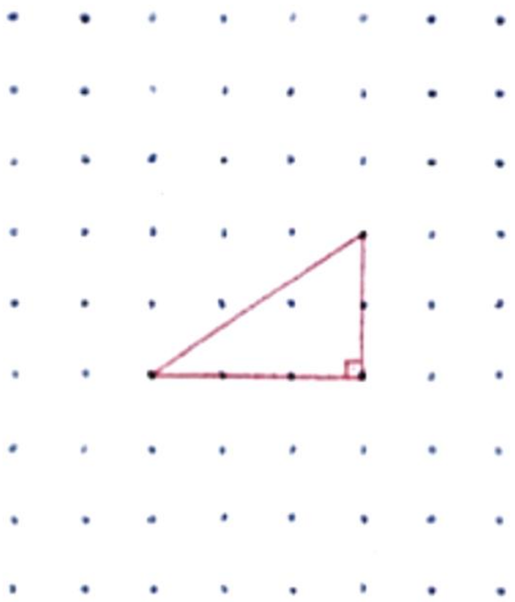
OFICINA 1 – Instigando o aluno na obtenção do resultado do Teorema de Pitágoras

Observação: A distância entre dois pontos no sentido horizontal e vertical, encontrados nas malhas de pontos dos exercícios dessas folhas de atividades é de uma unidade.

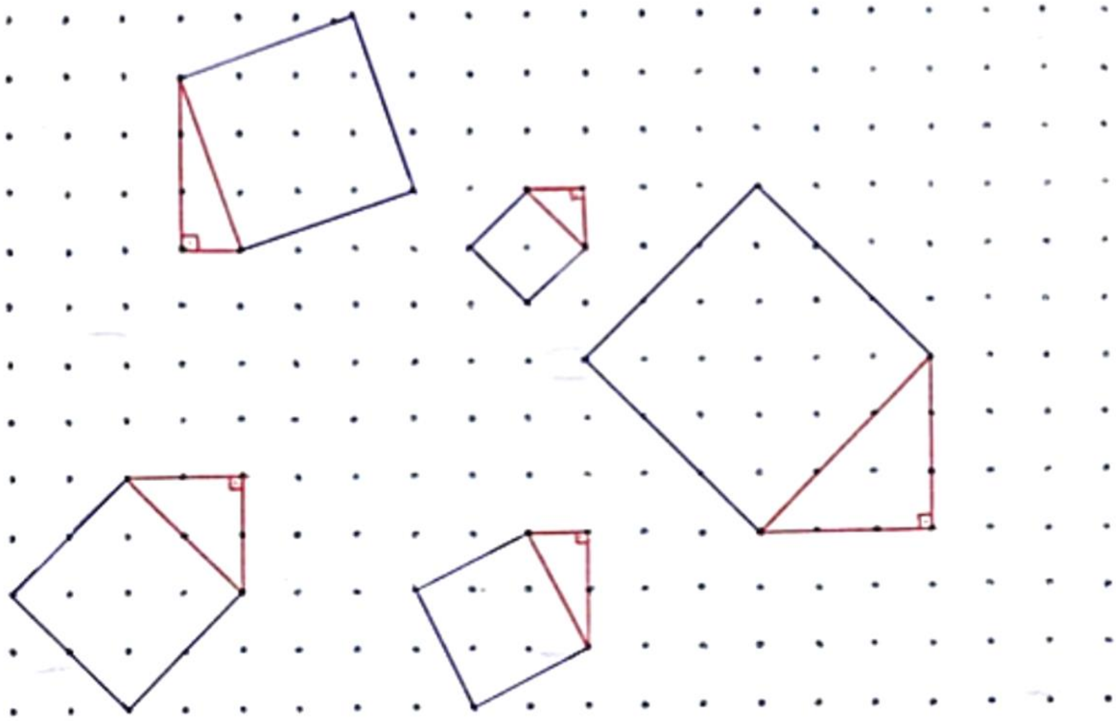
1) Observe as duas figuras a seguir e calcule a área de cada quadrado.



2) Construa os quadrados do exercício anterior, e relate suas observações sobre as áreas dos quadrados.



3) Construa quadrados em cada um dos "lados" dos triângulos, sendo que o lado do quadrado deve ser igual ao lado do triângulo correspondente, e conte sua área:



4) Complete a tabela a seguir com os valores para a área dos catetos e da hipotenusa de cada triângulo do exercício anterior.

Figuras	Cateto 1	Cateto 2	Soma dos catetos	Hipotenusa
1				
2				
3				
4				
5				

5) O que você pode concluir com a construção feita no exercício 3, e a tabela do exercício 4?

____

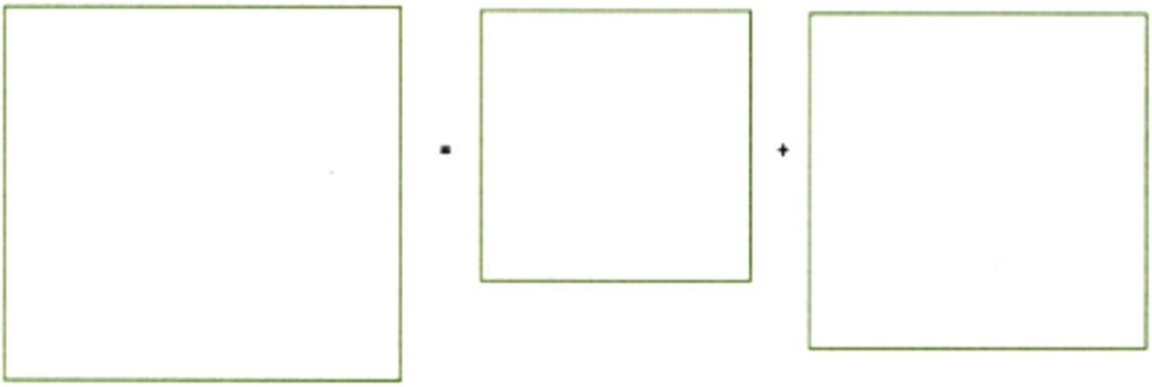
____

____

____

____

V- Cole os quadrados restantes no espaço abaixo.

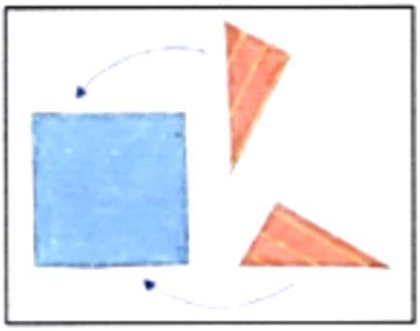


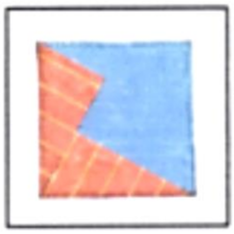
VI- Subtraindo-se iguais por iguais, o que podemos concluir com sobre os quadrados que acabou de colar?

VII- Juntamente com seu professor, produza uma representação algébrica para a demonstração do teorema.

2) Após a decomposição siga os seguintes passos:

• Cole dois dos triângulos dentro do quadrado de lados c conforme as figuras abaixo;





• Recorte o quadrado como mostram as figuras abaixo.

• Monte o quebra cabeça no tabuleiro abaixo utilizando as três peças recortadas na etapa anterior.